

**Дудик М.В.**

**Діхтяренко Ю.В.**

# **ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**

**Навчальний посібник**

для студентів вищих навчальних закладів

фізико-математичних спеціальностей

Умань 2015

**УДК 537 (075.8)**

**ББК 22.313я73**

**Е50**

*Рецензенти:*

**Краснобокий Ю.М.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент

**Побережець І.І.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент

*Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного факультету  
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини  
(протокол № 5 від 18.12.2014 р.)*

**Укладачі: Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.**

Е50 Електродинаміка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 120 с.

© Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

© СПД Жовтий, 2015

## ЗМІСТ

Рекомендована література . . . . .	9
РОЗДІЛ I. ТЕОРІЯ ЕМП У ВАКУУМІ. . . . .	10
§1. Експериментальні основи класичної електродинаміки. Основні властивості електромагнітної взаємодії. . . . .	10
§2. Рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП. . . . .	11
§3. Калібровочні перетворення потенціалів. . . . .	13
§4. Тензор електромагнітного поля. . . . .	14
§5. Перетворення напруженостей ЕМП. . . . .	15
§6. Інваріанти ЕМП. . . . .	17
§7. Перша пара рівнянь Максвелла . . . . .	18
§8. Густина електричного струму. . . . .	19
§9. Дія для електромагнітного поля . . . . .	21
§10. Вивід другої пари рівнянь Максвелла. . . . .	22
§11. Тривимірна форма другої пари рівнянь Максвелла . . . . .	23
§12. Системи одиниць вимірювань електричних і магнітних величин. . . . .	24
§13. Енергія електромагнітного поля. . . . .	25
§14. Закон збереження імпульсу в ЕМП. . . . .	27
§15. Граничні умови для векторів ЕМП . . . . .	28
§16. Єдиність розв'язку рівнянь Максвелла. . . . .	30
§17. Рівняння для електромагнітних потенціалів . . . . .	31
РОЗДІЛ III. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ (ЕМХ) У ВАКУУМІ . . . . .	50
§28. Хвильове рівняння і його розв'язок . . . . .	50
§29. Плоска монохроматична хвиля. . . . .	51
§30. Властивості плоскої монохроматичної хвилі. . . . .	52
§31. Потенціали, що запізнюються. Дипольне випромінювання. . . . .	54
§32. Інтенсивність дипольного випромінювання . . . . .	56
§33. Дипольний осцилятор. . . . .	57
§34. Електромагнітне поле рухомого заряду. . . . .	58
§35. Радіаційне тертя. . . . .	60
§36. Ефект Вавілова-Черенкова. . . . .	62
§37. Розсіяння ЕМХ вільними зарядами. . . . .	63
§38. Немонохроматичні хвилі. . . . .	65

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугаєнко Г.О., Фонкич М.Є. Курс теоретичної фізики. Електродинаміка. Теорія відносності. – К.: Рад. шк., 1965. – 419 с.
2. Кушниренко А.Н. Теоретическая физика. Т.1, ч.2. – К.: Феникс, 2000. – 382 с.
3. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. – М.: Наука, 1969. – 912 с.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т.2. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
7. Макарець М.В., Решетняк В.Ю., Романенко О.В. Задачі з класичної електродинаміки. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 151 с.
8. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики: Классическая электродинамика. – М.: Просвещение, 1990. – 270 с.
9. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
10. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 504 с.
11. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 399 с.
12. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике. – М.: Просвещение, 1970. – 328 с.
13. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1. – М.: Наука, 1991. – 496 с.
14. Физика микромира. Маленькая энциклопедия. / Гл. ред. Д.В.Ширков. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 528 с.

# РОЗДІЛ I. ТЕОРІЯ ЕМП У ВАКУУМІ

## §1. Експериментальні основи класичної електродинаміки. Основні властивості електромагнітної взаємодії

В природі виявлено чотири типи фундаментальних взаємодій:

- сильна (приклад: ядерні сили між нуклонами в ядрі);
- електромагнітна;
- слабка (приклад: спричиняє  $\beta$  - розпад ядер, обумовлює реакції термоядерного синтезу в надрах зірок);
- гравітаційна.

Електромагнітна взаємодія (ЕМВ) – це тип фундаментальних взаємодій, який характеризується участю електромагнітного поля (ЕМП). ЕМП – особливий вид матерії, що випромінюється і поглинається при взаємодії та переносить взаємодію між тілами. Найвідомішим прикладом ЕМВ є взаємодія двох точкових зарядів, яка задовольняє закон Кулона: сила та потенціальна енергії взаємодії двох точкових зарядів  $q_1$  та  $q_2$ , що перебувають на відстані  $r$  один від одного, дорівнюють

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad U = k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1)$$

Задана в (1) залежність від відстані:  $F \sim \frac{1}{r^2}$ ;  $U \sim \frac{1}{r}$  вказує на далекодіючий характер ЕМВ, її необмежений, як і у гравітаційної взаємодії, радіус дії, на відміну від короткодіючих сильної і слабкої взаємодій. Тому вже на атомних відстанях ( $\sim 10^{-10}$  м) електромагнітні сили перевищують ядерні, радіус дії яких  $\sim 10^{-15}$  м.

На відміну від гравітаційної взаємодії, при якій тіла завжди тільки притягуються, ЕМВ може приводити як до притягання, так і до відштовхування між зарядженими тілами. Це відповідає існуванню двох різнойменних електричних зарядів: позитивного і негативного, причому різнойменні заряди притягуються, однойменні – відштовхуються. Вільні магнітні заряди (“магнітні монополі” або “монополі Дірака”) в природі не виявлені.

ЕМВ відповідає за існування основних “цеглин” речовини – атомів і молекул, і визначає взаємодію позитивно заряджених ядер і негативно заряджених електронів у цих мікросистемах. Тому до ЕМВ відноситься більшість сил, що проявляються в макроскопічній фізиці: сили тертя, пружності, поверхневого натягу тощо.

ЕМВ визначає властивості речовини у різних агрегатних станах, її електричні, магнітні і оптичні властивості, хімічні перетворення. Прояви ЕМВ широко використовуються в електро- і радіотехніці, електроніці, оптиці, квантовій електроніці (лазерах), побуті.

Явища, в яких беруть участь слабкі ЕМП, енергія яких значно менша за енергію спокою взаємодіючих частинок ( $E \ll mc^2$ ), або повільно-змінні ЕМП, які характеризуються енергією фотонів, набагато меншою за енергію спокою частинок ( $E = h\nu \ll mc^2$ ), описуються рівняннями Максвелла, які складають

основу класичної електродинаміки. Для сильних ( $E \geq mc^2$ ) або швидкозмінних ( $h\nu \geq mc^2$ ) полів основними є квантові явища з участю фотонів, які описуються квантовою електродинамікою. Великою, що характеризує інтенсивність ЕМВ, є електричний заряд. Заряд є дискретною величиною, кратною елементарному заряду:  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Інтенсивність ЕМП в мікросвіті прийнято характеризувати безрозмірною величиною  $\alpha$ , яка називається сталою тонкої структури:  $\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ . Для замкнутих систем виконується закон збереження електричного заряду:

Повний електричний заряд замкнутої системи частинок є величиною, що зберігається у будь-яких процесах.

Той факт, що електричний заряд визначає силу взаємодії і в той же час є величиною, яка зберігається – це унікальна властивість ЕМВ. Через це ЕМВ записується однаково для тіл і частинок різної природи, для різних електромагнітних явищ і процесів, тобто залежить тільки від електричного заряду. Цю властивість називають універсальністю ЕМВ.

## §2. Рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП

Для отримання рівнянь руху зарядженої частинки в ЕМП будемо виходити із принципу найменшої дії, представивши дію для зарядженої частинки в ЕМП у вигляді суми:

$$S = S_{\text{вільн}} + S_{\text{вз}}, \quad (1)$$

де  $S_{\text{вільн}}$  – дія вільної частинки;  $S_{\text{вз}}$  – дія, що відповідає взаємодії частинки з ЕМП. З курсу класичної механіки релятивістський вираз для дії вільної частинки має вигляд:

$$S_{\text{вільн}} = - \int mcds = - \int_{t_1}^{t_2} mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (2)$$

Що стосується  $S_{\text{вз}}$ , то вона повинна містити як величини, які характеризують частину (заряд  $e$  та 4-вимірний вектор переміщення  $dx^i$ :  $S_{\text{вз}} \sim e \cdot dx^i$ ), так і величини, які характеризують ЕМП. Оскільки  $S_{\text{вз}}$  має бути 4-скаляром, то величина, яка характеризує поле, має бути 4-вектором і входити в  $S_{\text{вз}}$  у вигляді скалярного добутку з вектором  $dx^i$ . Тому для опису ЕМП вводиться чотиривимірний коваріантний вектор  $A_i$ , який називають 4-потенціалом ЕМП, а дію  $S_{\text{вз}}$  представляють у вигляді

$$S_{\text{вз}} = - \frac{1}{c} \int e A_i dx^i. \quad (3)$$

Коваріантному вектору  $A_i$  ставиться у відповідність контраваріантний вектор  $A^i$  за допомогою співвідношень:

$$A_i \rightarrow A^i; A_0 = A^0; A_1 = -A^1; A_2 = -A^2; A_3 = -A^3.$$

Часову компоненту 4-потенціала ЕМП називають скалярним потенціалом і позначають  $\varphi$ :  $A_0 = A^0 = \varphi$ . Просторові компоненти 4-потенціала ЕМП утворюють звичайний тривимірний вектор  $\vec{A}$  з

компонентами:  $A^1 = A_x$ ;  $A^2 = A_y$ ;  $A^3 = A_z$ , який називають векторним потенціалом поля. Таким чином:

$$A^i(\varphi, \vec{A}), \quad A_i(\varphi, -\vec{A}), \quad (4)$$

причому потенціали  $\varphi$  та  $\vec{A}$  є функціями координат і часу.

Згідно (4) та  $dx^i(cdt, d\vec{r})$  отримаємо  $A_i dx^i = \varphi cdt - A_x dx - A_y dy - A_z dz = \varphi cdt - \vec{A} \cdot d\vec{r}$ . Тоді (3) прийме вигляд:

$$S_{\text{вз}} = -\frac{e}{c} \int (\varphi cdt - \vec{A} d\vec{r}) = -e \int \left( \varphi - \frac{1}{c} \vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = -e \int_{t_1}^{t_2} \left( \varphi - \frac{\vec{v}}{c} \vec{A} \right) dt, \quad (5)$$

де враховано, що похідна  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  означає швидкість частинки.

Підставляючи (5) і (2) в (1), отримаємо вираз для повної дії

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} \left( mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\varphi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (6)$$

з функцією Лагранжа зарядженої частинки в ЕМП:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (7)$$

Підставляючи (7) у рівняння Лагранжа  $\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ , отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right); \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Для обчислення похідної по координатам скористаємось тотожністю  $\vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] =$

$$= \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}, \quad \text{в якій враховано, що } \vec{\nabla} \text{ не діє на } \vec{v}. \quad \text{Тоді}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \quad \text{і остаточно рівняння}$$

Лагранжа:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}} + e\vec{\nabla} \varphi - \cancel{\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}} - \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}],$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{\nabla} \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]. \quad (8)$$

(8) – це і є розшукуване рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП. В ньому використано оператор “набла”  $\vec{\nabla} \equiv \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$  і введено поняття градієнта скалярного поля:

$$\vec{\nabla} \varphi = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi \quad (9)$$

та ротора векторного поля

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{A}. \quad (10)$$

Завдяки (9) і (10) рівняння руху частинки (8) набуде вигляду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} = \vec{F}_L, \quad (11)$$

де  $F_L$  - так звана сила Лоренца, яка діє на заряджену частинку з боку ЕМП. З іншого боку, ЕМП характеризується також векторами напруженостей електричного поля  $\vec{E}$  і магнітного поля  $\vec{H}$ , які входять у силу  $F_L$  згідно формули Лоренца:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} = e \cdot \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}. \quad (12)$$

Порівнюючи (11) і (12), знаходимо зв'язок між напруженостями і потенціалами:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (14)$$

### §3. Калібровочні перетворення потенціалів

Згідно (2.13) і (2.14):

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1)$$

Розглянемо наступне перетворення векторного потенціалу:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi, \quad (2)$$

де  $\chi = \chi(\vec{r}, t)$  - довільна диференційована скалярна функція координат і часу.

Знайдемо відповідаючу потенціалу  $\vec{A}'$  напруженість магнітного поля  $\vec{H}' = \text{rot } \vec{A}'$ ; підставивши сюди (2), отримаємо  $\vec{H}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \text{grad } \chi = \text{rot } \vec{A} = \vec{H}$ .

Отже, перетворення (2) не змінює напруженість магнітного поля. Але, якщо зробити тільки це перетворення і не змінити  $\varphi$ , то зміниться напруженість електричного поля  $\vec{E}$ . Щоб вектор  $\vec{E}$  також не змінювався при перетворенні (2), необхідно перетворити і скалярний потенціал  $\varphi$  за формулою:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad} \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } \chi) = \\ &= -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \chi = \vec{E}. \end{aligned}$$

Отже, напруженості  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  є інваріантами відносно перетворень потенціалів (2) і (3), які називаються калібровочними або градієнтними перетвореннями. Ці перетворення можна представити у 4-вимірній формі:

$$A'_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}. \quad (4)$$

Таким чином, одним і тим же напруженостям електромагнітного поля  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  відповідає широкий клас електромагнітних потенціалів, зв'язаних формулами (2) і (3). Ця властивість ЕМП називається калібровочною інваріантністю.

В класичній електродинаміці вимірюваними характеристиками електромагнітного поля є напруженості  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , а потенціали виступають як допоміжні функції, з яких напруженості отримуються диференціюванням за формулами (2.13) і (2.14). Калібровочна інваріантність приводить до того, що електромагнітне поле однозначно визначає вектори напруженості полів, але залишає певну довільність у потенціалах. Але, незважаючи на те, що потенціали не є основними величинами в електродинаміці, вони відіграють важливу роль, тому що вони дозволяють зменшити число невідомих функцій, які описують електромагнітне поле, з шести:  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ , до чотирьох:  $A_x, A_y, A_z, \varphi$ .

Особливо велике значення електромагнітні потенціали набувають у квантовій механіці і при квантово-механічному описі ЕМП. Саме потенціали, а не напруженості входять в більшість рівнянь квантової механіки і квантової електродинаміки.

#### §4. Тензор електромагнітного поля

Враховуючи тензорні позначення

$$ct = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3; \quad \varphi = A^0 = A_0, A_x = A^1 = -A_1, A_y = A^2 = -A_2, A_z = A^3 = -A_3, \quad (1)$$

представимо формули (3.1) у координатному вигляді:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}; & E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}; & E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}; \\ H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}; & H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}; & H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}. \end{cases} \quad (2)$$

Вирази (2) нагадують тензор 2-го роду виду  $a_i b_k - b_i a_k$ , де  $a_i$  і  $b_k$  – коваріантні компоненти довільних векторів, якщо в якості  $b_k$  розглядати 4-вимірний потенціал ЕМП  $A_k$ , а в якості  $a_i$  – 4-вимірний диференціальний оператор  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  – аналог оператора “набла” (див. §2):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (3)$$

З урахуванням (2) і (3) введемо антисиметричний тензор другого рангу, який представимо у вигляді

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = -F_{ki}. \quad (4)$$

Його називають тензором електромагнітного поля. Порівнюючи (2) і (4), знайдемо зв'язок між компонентами напруженостей і тензора ЕМП:

$$\begin{aligned} E_x &= F_{01} = -F_{10}; & H_x &= F_{32} = -F_{23}; \\ E_y &= F_{02} = -F_{20}; & H_y &= F_{13} = -F_{31}; \end{aligned}$$

$$E_z = F_{03} = -F_{30};$$

$$H_z = F_{21} = -F_{12}.$$

Отже, компоненти векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  можна трактувати як компоненти тензора електромагнітного поля  $F_{ik}$ . Якщо в  $F_{ik}$   $i$  – нумерує стрічки, а  $k$  – стовпчики, то тензор  $F_{ik}$  можна представити у вигляді матриці:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В (5) наряду з коваріантним тензором ЕМП  $F_{ik}$  введено також контраваріантний тензор  $F^{ik}$ , компоненти якого визначались за правилом: підняття часового індексу (0) не змінює, а просторового (1, 2, 3) змінює знак компоненти.

В той час, коли 4-потенціал  $A_i$  визначається неоднозначно, компоненти  $F_{ik}$  виявляються однозначними. Дійсно, якщо в (4) підставити вираз калібровочного перетворення (3.4)  $A'_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}$ , отримаємо:

$$F'_{ik} = \frac{\partial A'_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A'_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( A_k - \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left( A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = F_{ik}$$

тобто  $F'_{ik} = F_{ik}$ , що й треба було довести.

## §5. Перетворення напруженостей ЕМП

Знайдемо, як змінюються компоненти векторів напруженостей полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  при переході від однієї ІСВ (K) до іншої (K'), тобто при перетвореннях Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

які в тензорному 4-вимірному представленні мають вигляд:

$$x^0 = \frac{x'^0 + \frac{v}{c} x'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{x'^1 + \frac{v}{c} x'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x'^2; \quad x^3 = x'^3. \quad (1)$$

Перетворення (1) зручно представити за допомогою матриці перетворень  $a_k^i$ :

$$x^i = a_k^i \cdot x'^k, \quad a_k^i = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

(Дійсно, розглянемо для прикладу перетворення часової компоненти радіус-

вектора:  $x^0 = a_k^0 \cdot x^k = a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 + a_3^0 x^3 = \alpha x^0 + \alpha \beta x^1 = \frac{x^0 + \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , що співпадає з

(1.)

Згідно із загальним визначенням тензор 2-го рангу  $F^{ik}$  є величиною, компоненти якої при переході від однієї ІСВ до іншої перетворюються подібно до добутку двох 4-векторів. Тому, використовуючи (2), представимо перетворення компонент тензора ЕМП у вигляді:

$$F^{ik} = a_m^i \cdot a_n^k \cdot F'^{mn}. \quad (3)$$

Враховуючи зв'язок між компонентами тензора ЕМП і векторів напруженостей (4.5), отримаємо формулу перетворення, наприклад, для компонентів поля  $E_x$  та  $E_y$ :

$$E_x = F^{10} = a_m^1 \cdot a_n^0 \cdot F'^{mn} = a_0^1 a_n^0 F'^{0n} + a_n^1 a_0^0 F'^{1n} = a_0^1 a_1^0 F'^{01} + a_1^1 a_0^0 F'^{10} =$$

$$= -\alpha^2 \beta^2 E'_x + \alpha^2 E'_x = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} E'_x = E'_x;$$

$$E_y = F^{20} = a_m^2 \cdot a_n^0 \cdot F'^{mn} = a_2^0 a_n^0 F'^{2n} = a_0^2 F'^{20} + a_1^0 F'^{21} = \alpha E'_y + \alpha \beta H'_z = \frac{E'_y + \beta H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

і т.д. Таким же способом отримаємо формули перетворень для всіх компонентів електричного і магнітного полів:

$$E_x = E'_x; E_y = \frac{E'_y + \frac{v}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; H_x = H'_x; H_y = \frac{H'_y - \frac{v}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; H_z = \frac{H'_z + \frac{v}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

Ці формули можна подати у вигляді, що не залежить від вибору осей координат:

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \frac{\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}'_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad H_{\parallel} = H'_{\parallel}, \quad \vec{H}_{\perp} = \frac{\vec{H}'_{\perp} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}'_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5)$$

де символами  $\parallel$  і  $\perp$  позначені компоненти полів, паралельні і перпендикулярні вектору швидкості.

Формули (4) показують, що напруженості електричного і магнітного полів, як і більшість фізичних величин, є відносними, тобто їх значення залежить від вибору системи відліку. В нерелятивістському випадку

( $v \ll c, \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$ ) формули (4) переходять в

$$E_x = E'_x; E_y = E'_y + \frac{v}{c} H'_z; E_z = E'_z - \frac{v}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x; H_y = H'_y - \frac{v}{c} E'_z; H_z = H'_z + \frac{v}{c} E'_y. \quad (6)$$

Формули (5) зручно представити у векторному вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c} [\vec{H}' \times \vec{v}]; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \frac{1}{c} [\vec{E}' \times \vec{v}]. \quad (7)$$

Формули зворотних перетворень отримуються з (4-7) перестановкою штриха та заміною знаку при швидкості.

З формул (7) випливає ряд цікавих наслідків:

1) Якщо в ІСВ  $K'$  магнітне поле відсутнє, тобто  $\vec{H}' = 0$ , то з (7) випливає, що в ІСВ  $K$  існує наступний зв'язок між магнітним і електричним полем:

$$\vec{H} = -\frac{1}{c} [\vec{E} \times \vec{v}] = \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}]. \quad (8)$$

2) Аналогічно, якщо в ІСВ  $K'$  електричне поле відсутнє:  $\vec{E}' = 0$ , то в ІСВ  $K$  маємо

$$\vec{E} = \frac{1}{c} [\vec{H} \times \vec{v}]. \quad (9)$$

Отже, в обох випадках електричне і магнітне поля є взаємно ортогональними. Ці твердження мають також і зворотну силу: якщо в деякій ІСВ  $K$  поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні (але не рівні за величиною), то існує така ІСВ  $K'$ , в якій електромагнітне поле чисто електричне або чисто магнітне, причому швидкість  $\vec{v}$  системи  $K'$  по відношенню до системи  $K$  перпендикулярна до  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ .

## §6. Інваріанти ЕМП

З векторів напруженості електричного і магнітного полів можна скласти інваріантні величини, тобто величини, які залишаються незмінними при переході від однієї ІСВ до іншої. Розглянемо вираз:

$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = [\text{замінімо компоненти векторів } \vec{H} \text{ і } \vec{E} \text{ штрихованими компонентами, скориставшись формулами (5.4)}] =$

$$\begin{aligned} &= H_x'^2 + \frac{\left(H_y' - \frac{v}{c} E_z'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\left(H_z' + \frac{v}{c} E_y'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E_x'^2 - \frac{\left(E_y'^2 + \frac{v}{c} H_z'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\left(E_z' - \frac{v}{c} H_y'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= H_x'^2 - E_x'^2 + \frac{H_y'^2 + \frac{v^2}{c^2} E_z'^2 + H_z'^2 + \frac{v^2}{c^2} E_y'^2 - E_y'^2 - \frac{v^2}{c^2} H_z'^2 - E_z'^2 - \frac{v^2}{c^2} H_y'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= H_x'^2 - E_x'^2 + H_y'^2 - E_y'^2 + H_z'^2 - E_z'^2 = \vec{H}'^2 - \vec{E}'^2. \end{aligned}$$

Отже, величина  $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$  має однакове значення в усіх ІСВ, тобто є інваріантом:

$$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = \text{Inv}. \quad (1)$$

Аналогічно доказується, що  $\vec{E} \cdot \vec{H} = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = \vec{E}' \cdot \vec{H}'$ , тобто, скалярний добуток векторів  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  є інваріантом:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = \text{Inv}. \quad (2)$$

Інваріанти (1) і (2) пов'язані з тензором ЕМП. Так, наприклад:

$$\begin{aligned} F_{ik} \cdot F^{ik} &= F_{00} F^{00} + F_{01} F^{01} + \dots + F_{32} F^{32} + F_{33} F^{33} = -E_x^2 - E_y^2 - \dots + H_x^2 = \\ &= 2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - 2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = \text{Inv}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо абсолютно антисиметричний тензор  $\varepsilon^{iklm}$ , у якого компоненти дорівнюють  $\pm 1$  в залежності від того, парним чи непарним числом перестановок може бути отримана дана послідовність індексів  $i, k, l, m$  із послідовності 0, 1, 2, 3:

$$\varepsilon^{0123} = 1; \varepsilon^{1023} = -1; \varepsilon^{1032} = 1; \dots$$

Обчислимо вираз:

$$\varepsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \varepsilon^{0123} F_{01} F_{23} + \dots = -E_x H_x - \dots = -8(E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z) = -8\vec{E} \cdot \vec{H};$$

отже

$$\varepsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -8(\vec{E} \cdot \vec{H}) = Inv. \quad (4)$$

Із інваріантів (1) і (2) випливає ряд цікавих наслідків:

1. Якщо в деякій ІСВ  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , то згідно (2)  $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0 = \vec{E}' \cdot \vec{H}'$ , тобто вектори  $\vec{E} \perp \vec{H}$  в усіх ІСВ.
2. Якщо  $E = H$  в деякій ІСВ, то з (1) випливає, що  $\vec{E}^2 - \vec{H}^2 = 0 = Inv$ , тому  $E = H$  в усіх ІСВ. Якщо обидва інваріанти дорівнюють нулю, то в усіх ІСВ електричне і магнітне поля будуть взаємно перпендикулярні і рівними за величиною.
3. Якщо  $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$ , то можна знайти таку ІСВ, в якій дорівнює нулю одне з полів в залежності від знаку виразу  $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$ . Навпаки, якщо в деякій ІСВ або  $\vec{E}$ , або  $\vec{H}$  дорівнюють нулю, то в будь-якій іншій ІСВ поля будуть ортогональними.
4. Якщо  $H > E$ ,  $H^2 - E^2 > 0$ , то це співвідношення зберігається в усіх ІСВ.

## §7. Перша пара рівнянь Максвела

Візьмемо вираз (2.13):  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  і застосуємо до нього операцію

rot :

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot grad } \varphi - \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Отже, ми отримали 
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Застосуємо до виразу  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$  (2.14) операцію дивергенції :

$$\text{div } \vec{H} = \text{div rot } \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють першу пару рівнянь Максвела в диференціальній формі. Проте ці 2 рівняння ще не визначають повністю і однозначно властивості ЕМП. Це видно вже з того, що вони визначають зміну з часом магнітного поля завдяки наявності похідної  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , але не визначають похідну  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Рівняння (1) і (2) можна написати в інтегральній формі. Проінтегруємо рівняння (2) по довільному об'єму, і застосуємо до нього теорему Остроградського-Гауса:

$$\int_V \text{div } \vec{H} dV = \oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0.$$

Отже, потік магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (3)$$

Якщо ввести поняття силових ліній магнітного поля як ліній, дотичні до яких співпадають з напрямком напруженості магнітного поля, то рівність (3) означає, що скільки силових ліній входить в область, обмежену замкнутою поверхнею, стільки ж із неї і виходить. Це можливо, тільки якщо силові лінії магнітного поля є замкнутими. Такі поля називають соленоїдальними. Для магнітного поля це є наслідком відсутності магнітних зарядів - монополів.

Проінтегруємо рівняння (1) по довільній поверхні:

$$\int_s \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_s \vec{H} d\vec{S}. \quad (4)$$

Застосуємо до інтеграла зліва теорему Стокса:

$$\int_s \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}. \quad (5)$$

Введемо поняття електрорушійної сили в заданому контурі  $l$ :

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}, \quad (6)$$

і магнітного потоку:

$$\Phi = \int_s \vec{H} d\vec{S}. \quad (7)$$

Підставляючи отримані вирази в (4), отримаємо

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (8)$$

або

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9)$$

Отримані формули (8) та (9) виражають закон електромагнітної індукції Фарадея:

***ЕРС в деякому контурі дорівнює взятій із знаком “-” і поділеній на швидкість світла у вакуумі похідній по часу від потоку магнітного поля через поверхню, обмежену цим контуром.***

(3) і (8) утворюють першу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

Рівняння Максвелла (1) і (2) можна записати також у коваріантній 4-вимірній формі. Дійсно, із визначення тензора ЕМП  $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$  легко показати, що

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \quad (10)$$

а підстановка в (10) виразів  $F_{ik}$  через компоненти векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  приводить до рівнянь (1) і (2).

## §8. Густина електричного струму

Оскільки навіть у малих макрооб’єктах міститься дуже велике число елементарних заряджених частинок, можна ввести поняття про неперервно розподілений в об’ємі заряд, розуміючи під густиною заряду в деякій “точці” простору відношення

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1)$$

де  $\Delta V$  – макроскопічно малий об'єм,  $\Delta q$  – повний електричний заряд в ньому. Під “макроскопічно малим”, або “фізично нескінченно малим” об'ємом розуміють такий об'єм, в якому міститься велике число елементарних зарядів, але лінійний розмір якого малий порівняно з відстанями, які являють інтерес в конкретній задачі. Внаслідок дискретності структури електричного заряду перехід у виразі (1) до межі  $\Delta V \rightarrow 0$  позбавлений фізичного змісту. Проте, якщо знехтувати дискретністю електричного заряду, формулу (1) можна умовно переписати у вигляді:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (2)$$

Тоді інтегрування (2) по деякому об'єму  $V$  визначає заряд в цьому об'ємі:

$$q = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (3)$$

Рух зарядів породжує перенесення заряду. Явище переносу заряду називають електричним струмом. Кількісною характеристикою електричного струму є вектор густини електричного струму

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (4)$$

Вектор густини струму  $\vec{j}$  визначає у кожній точці напрям і кількість перенесеного заряду за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну до напрямку швидкості.

Знайдемо швидкість зміни заряду з часом у деякому об'ємі  $V$ :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (5)$$

З іншого боку, зміна заряду за одиницю часу визначається кількістю заряду, який виходить за цей час із даного об'єму назовні, або, навпаки, входить всередину об'єму. Кількість заряду, яка проходить за одиницю часу через елемент  $d\vec{S}$  поверхні, що обмежує даний об'єм, дорівнює  $\rho \vec{v} d\vec{S} = \vec{j} d\vec{S}$ , де  $\vec{v}$  – швидкість заряду в тій точці простору, де знаходиться елемент поверхні  $d\vec{S}$ . Повна кількість заряду, що виходить за одиницю часу з даного об'єму, дорівнює

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (6)$$

Знак “-” в (6) враховує зменшення повного заряду в об'ємі  $V$ , якщо заряд виходить із об'єму. Прирівнюючи (5) і (6), отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (7)$$

Формула (7) виражає закон збереження електричного заряду в інтегральній формі.

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса до поверхневого інтегралу у правій частині рівності (7), знайдемо:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div } \vec{j} dV; \quad \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (8)$$

Формула (8) виражає закон збереження електричного заряду в диференціальній формі.

Якщо ввести 4-вимірний вектор густини електричного струму

$$j^i = \rho u^i = (c\rho, \rho\vec{v}), \quad (9)$$

то рівняння (8) можна переписати у релятивістськи інваріантному вигляді:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (10)$$

За допомогою перетворень Лоренца для 4-вектора  $j^i$  можна показати, що

густина заряду залежить від його швидкості: 
$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11)$$

де  $\rho_0$  – густина заряду відносно ІСВ, в якій цей заряд нерухомий. Проте, повний заряд в певному об'ємі  $V$  зберігається незмінним внаслідок

зменшення об'єму при русі  $\left( V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$ :

$$\Delta q = \rho \cdot \Delta V = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_0 \cdot V_0 = \Delta q_0,$$

тобто величина заряду не залежить від руху ІСВ і є інваріантом.

### §9. Дія для електромагнітного поля (НСО)

Представимо дію системи заряджених частинок і ЕМП у вигляді:

$$S = S_{\text{част}} + S_{\text{ез}} + S_{\text{ЕМП}}; \quad (1)$$

$$S_{\text{част}} = -\sum_a m_a c \int ds_a; \quad S_{\text{ез}} = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i^{(a)} \frac{dx_{(a)}^i}{dt} dt = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i^{(a)} u_{(a)}^i dt, \quad (2)$$

де  $u_{(a)}^i$  позначає 4-вимірну швидкість  $a$ -тої зарядженої частинки.

Представимо сукупність точкових зарядів  $e_a$  як заряд, розподілений у просторі з деякою густиною  $\rho$ . Тоді в (2) слід виконати заміну:

$$e_a \rightarrow de = \rho dV; \quad \sum_a e_a \rightarrow \int de = \int \rho dV.$$

Ця заміна дозволяє записати  $S_{\text{ез}}$  у вигляді

$$S_{\text{ез}} = -\frac{1}{c} \int \rho dV \int A_i u^i dt = -\frac{1}{c} \int \rho A_i u^i dV dt. \quad (3)$$

Скориставшись визначенням 4-вимірного вектора густини струму (8.9)  $[j^i = \rho u^i = (\rho c, \vec{j})]$ , представимо  $S_{\text{ез}}$  у вигляді:

$$S_{\text{ез}} = -\frac{1}{c} \int A_i j^i dV dt = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega, \quad (4)$$

де введено інваріантний 4-об'єм  $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx dy dz = c dt dV = \text{Inv.}$

Щоб знайти  $S_{\text{ЕМП}}$ , врахуємо той дослідний факт, що ЕМП задовольняє **принципу суперпозиції**, згідно з яким у кожній точці простору загальне поле системи зарядів дорівнює сумі полів, створених кожним зарядом окремо. Тому рівняння поля повинні бути лінійними диференціальними рівняннями. А це буде тоді, коли в дії під знаком інтегралу стоятиме вираз, квадратичний по полю. Крім того, дія має бути інваріантом перетворень Лоренца. Найбільш підходящим квадратичним інваріантом, який можна утворити з

характеристик поля, є  $F_{ik}F^{ik} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$ . Ми відкидаємо інший скалярний інваріант  $A_i A^i$ , який визначається неоднозначно. Отже, під знаком інтегралу дії  $S_{EMП}$  має стояти  $F_{ik}F^{ik}$ , а для інваріантності дії інтегрування повинно проводитись по 4-об'єму  $d\Omega = c dt dV$ . Таким чином, ми приходимо до виразу

$$S_{EMП} = \alpha \int F_{ik}F^{ik} d\Omega,$$

де  $\alpha$  - деяка стала. Інтегрування по координатам тут здійснюється по всьому 3-вимірному простору, а по часу – між двома заданими моментами  $t_1$  і  $t_2$ . Щоб отримати за допомогою знайденого виразу для дії  $S_{EMП}$  правильні рівняння поля, слід покласти  $\alpha = -\frac{1}{16\pi c}$ ;

$$\text{тоді} \quad S_{EMП} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F^{ik} d\Omega = -\frac{1}{16\pi} \int F_{ik}F^{ik} dt dV. \quad (5)$$

### §10. Вивід другої пари рівнянь Максвелла (НСО)

Виведемо другу пару рівнянь, виходячи з принципу найменшої дії. Дію для ЕМП, з урахуванням результатів попереднього параграфу, запишемо так:

$$S = S_{EMП} + S_{\text{вз}} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F^{ik} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega. \quad (1)$$

Принцип найменшої дії вимагає, щоб при варіюванні потенціалу ЕМП дія залишалася незмінною:

$$\delta S = 0 = -\frac{1}{16\pi c} \int \delta(F_{ik}F^{ik}) d\Omega - \frac{1}{c} \int j_i \delta A_i d\Omega. \quad (2)$$

Знайдемо варіацію

$$\begin{aligned} \delta(F_{ik}F^{ik}) &= \delta F_{ik}F^{ik} + F_{ik}\delta F^{ik} = 2F^{ik}\delta F_{ik} = 2F^{ik}\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = 2F^{ik}\delta\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - 2F^{ik}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{врахуємо, що } F^{ki} = -F^{ik}, \\ \text{і в 1-му доданку зробимо} \\ \text{заміну індексів } i \leftrightarrow k \end{array} \right] = -4F^{ik}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \left[ \begin{array}{l} (u \cdot v)' = u'v + uv' \\ u'v = (uv)' - v'u \end{array} \right] = -4\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) + 4\delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отже, замість (2) отримаємо:

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi c} \int \left\{ -4\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) + 4\delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right\} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega = 0. \quad (3)$$

У тримірному просторі в тензорних позначеннях  $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a^k}{\partial x^k}$ ,

а теорема Остроградського-Гауса :

$$\int_V \text{div } \vec{a} dV = \int_V \frac{\partial a^k}{\partial x^k} dV = \oint_S \vec{a} d\vec{S} = \oint_S a^k dS_k.$$

Використовуючи аналогію з цим виразом у 4-вимірному просторі, отримаємо для першого інтеграла в (3):

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) d\Omega = \oint_S F^{ik}\delta A_i dS_k = 0,$$

де  $dS_k$  – елемент 3-вимірної “гіперповерхні”. Але на границі досліджуваного 4-об'єму варіація  $\delta A_i = 0$ , тому останній інтеграл обертається в 0. Відповідно варіація дії (3) дорівнюватиме

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} j^i \right) \delta A_i d\Omega = 0,$$

звідки, в силу довільності варіацій  $\delta A_i$ , варіація дії обертається в нуль, якщо в нуль обертається підінтегральний вираз:  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} j^i = 0$ , або

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (i=0, 1, 2, 3). \quad (4)$$

Це рівняння являє собою другу пару рівнянь Максвелла у 4-вимірному інваріантному представленні.

### §11. Тривимірна форма другої пари рівнянь Максвелла

Знайдемо вигляд другої пари рівнянь Максвелла у стандартних тривимірних позначеннях, використовуючи явний вигляд тензора ЕМП (4.5) та 4-вектора густини струму (8.9).

При  $i = 0$  рівняння (10.4) набудуть вигляду:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0 = -\frac{4\pi}{c} \rho c = -4\pi \rho,$$

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi \rho$$

або

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (1)$$

Для  $i = 1, 2, 3$  аналогічним чином отримаємо

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють другу пару рівнянь Максвелла у диференціальній формі. Вивівши рівняння (2), Максвел передбачив існування струму зміщення, густина струму якого дорівнює

$$\vec{j}_{zm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3)$$

На відміну від струму провідності  $I$ , обумовленого рухом заряджених частинок, струм зміщення обумовлений наявністю змінного в часі електричного поля. Відповідно до (3), рівняння (2) набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{zi}). \quad (4)$$

Проінтегруємо (1) по довільному об'єму і скористаємось теоремою Остроградського-Гауса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV, \text{ або}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q. \quad (5)$$

Отже, *потік електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює помноженому на  $4\pi$  повному заряду  $q$ , який знаходиться в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.*

Проінтегруємо (4) по довільній незамкненій поверхні і скористаємось теоремою Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{zm}) d\vec{S}; \quad \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \oint_l \vec{H} d\vec{l}.$$

Тут 
$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad \text{та} \quad I_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad (6)$$

– сили струму провідності і струм зміщення. Отже,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (I + I_{zm}), \quad (7)$$

тобто: **циркуляція магнітного поля по деякому контуру дорівнює помноженій на  $\frac{4\pi}{c}$  сумі струмів провідності та зміщення.**

Рівняння (5) і (7) утворюють другу пару рівнянь Максвела в інтегральній формі.

## §12. Системи одиниць вимірювань електричних і магнітних величин

Досі ми користувалися гаусовою системою одиниць, яка більш зручна для теоретичних досліджень. Її основні одиниці: сантиметр, грам, секунда. Заряд, потенціал тощо вимірюються в гаусовій системі в абсолютних одиницях заряду, потенціалу і т.п.

Але в останні десятиліття для практичних цілей, пов'язаних з електротехнікою, широко впроваджується міжнародна система одиниць СІ. В ній ЕМП описується чотирма векторами  $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B})$ , де  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  – напруженості електричного і магнітного полів відповідно,  $\vec{D}$  і  $\vec{B}$  – їх індукції.

Порівняємо рівняння Максвела в Гаусовій системі одиниць (1) і системі СІ (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad (1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (2)$$

На перший погляд система рівнянь Максвела в СІ (2) виглядає ніби симетричніше і простіше. Але є декілька недоліків, які ускладнюють її використання в теоретичних дослідженнях.

По-перше, в системі СІ для опису ЕМП у вакуумі вимагається не 2, а 4 вектора, які зв'язані між собою додатковими співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\Phi}{\text{м}}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{\text{м}} \quad (4)$$

- так звані електрична і магнітна сталі.

По-друге, в рівняннях (2)-(4) використовуються сталі  $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$ , які не мають жодного фізичного змісту, тоді як в системі (1) використовується стала  $c$  - швидкість світла, причому  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ .

По-третє, всі чотири вектори  $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B})$  у системі СІ мають різні розмірності  $\left(\frac{B}{m}, \frac{B \cdot \Phi}{m^2}, \frac{A}{m}, T_L = \frac{\Gamma_H \cdot A}{m^2}\right)$ , що ускладнює порівняння напруженостей полів. А в гаусовій системі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  мають однакові розмірності, і це дозволяє порівнювати їх безпосередньо.

По-четверте, крім трьох основних одиниць: довжини, часу і маси, в СІ вводиться четверта основна одиниця – А (ампер).

Вказані недоліки ускладнюють використання системи СІ для формулювання фундаментальних законів теорії електромагнітного поля. Тому в теоретичній електродинаміці частіше використовують Гаусову систему одиниць. Але для інженерних цілей СІ виявляється досить зручною, і її використання більш поширене.

Для прикладу приведемо вигляд закону Кулона в гаусовій та міжнародній системі одиниць:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} (\text{Гаус}), \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} (\text{СІ}).$$

### §13. Енергія електромагнітного поля

Виконаємо наступні перетворення рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \vec{H} \Big| \quad \text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{E} \Big| \quad \text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \\ & \vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ & \frac{1}{c} \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - (\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H}). \end{aligned} \quad (1)$$

Врахуємо, що  $\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$ , а з рівності  $\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{ rot } \vec{a} - \vec{a} \text{ rot } \vec{b}$  випливає  $\vec{H} \text{ rot } \vec{E} - \vec{E} \text{ rot } \vec{H} = \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$ . Тоді рівність (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}] \Big| \cdot \frac{c}{4\pi}, \text{ або} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} &= -\vec{j} \vec{E} - \text{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Введемо так званий вектор Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (3)$$

тоді замість (2) можна записати:  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\vec{j} \vec{E} - \text{div } \vec{S}. \quad (2')$

Вияснимо фізичний зміст рівності (2'). Проінтегруємо (2') по довільному об'єму  $V$  і використаємо формулу Остроградського-Гауса:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \int_V \operatorname{div} \vec{S} dV = - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}. \quad (4)$$

Тут  $\Sigma$  – поверхня, що обмежує об'єм  $V$ ,  $d\vec{\Sigma}$  – елемент цієї поверхні.

Розглянемо випадок, коли інтегрування в (4) відбувається по всьому простору; тоді інтеграл по поверхні обертається в 0, тому що поле на нескінченості дорівнює нулю:

$$\oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma} = \frac{c}{4\pi} \int_{\Sigma} [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

Інший випадок обернення поверхневого інтегралу (5) в нуль – якщо система замкнута, і на межі замкнутої системи електромагнітне поле обертається в 0.

В цих випадках (4) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \int_V \vec{j} \vec{E} dV = 0. \quad (6)$$

$$\text{Але } \vec{j} \vec{E} dV = [\vec{j} = \rho \vec{v}] = \rho \vec{v} \vec{E} dV = [\rho dV = dq] = \vec{v} dq \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot dq \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) = \vec{v} \cdot d\vec{F} =$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{F} = \frac{dA}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \text{потужність ЕМП} \\ \text{в об'ємі } dV \end{array} \right] = \frac{d\mathcal{E}_{\text{кін}}}{dt},$$

де  $d\mathcal{E}_{\text{кін}}$  – кінетична енергія частинок в об'ємі  $dV$ . Підставляючи отриманий результат в (6), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \frac{d}{dt} \sum \mathcal{E}_{\text{кін}} &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кін}} \right) = 0; \\ \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кін}} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, для замкнутої системи, що складається з ЕМП разом із зарядженими частинками, зберігається величина (7), яка являє собою суму кінетичної енергії всіх частинок в об'ємі  $V$  та ще одного доданку, який слід розглядати як енергію ЕМП в об'ємі  $V$ :

$$W = \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV, \quad (8)$$

а величина, що стоїть у (8) під знаком інтегралу, тобто

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (9)$$

представляє густину енергії ЕМП – енергію поля в одиниці об'єму.

Припустимо тепер, що система незамкнута. Тоді умова (5) не виконується, і замість рівняння (6) ми прийдемо до співвідношення:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кін}} \right) = - \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}. \quad (10)$$

Оскільки вираз зліва в (10) визначає зміну енергії системи в об'ємі за одиницю часу, то вираз справа  $\oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}$  визначає потік енергії електромагнітного

поля за одиницю часу через поверхню, що обмежує даний об'єм. Тоді вектор Пойтінга  $\vec{S}$  є густиною потоку енергії і дорівнює кількості енергії поля, яка протікає за одиницю часу через одиницю поверхні. Отже рівняння (2) і

рівняння (4) виражають закон збереження повної енергії системи частинок і ЕМП відповідно в диференціальній та інтегральній формах.

#### §14. Закон збереження імпульсу в ЕМП

Знайдемо зміну імпульсу частинок в об'ємі  $V$ . Для цього запишемо їх рівняння руху:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \vec{F} = \int_V \vec{f} dV, \quad \text{де } \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} \quad (1)$$

– густина сили Лоренца, тобто сила Лоренца, що припадає на одиницю об'єму. Цю густину сили Лоренца можна представити у вигляді:

$$\vec{f} = \frac{1}{dV} dq \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) = \rho \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) = [\rho \vec{v} = \vec{j}] = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}],$$

так що рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} \right) dV. \quad (2)$$

Використовуючи другу пару рівнянь Максвелла, знайдемо вирази для густин заряду і струму:

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{E};$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

підставивши їх в (2), отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} \vec{E} \text{div } \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} \right\} dV. \quad (3)$$

Симетризуємо праву частину (3), додавши до неї рівний 0 в силу рівнянь Максвелла вираз:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} \vec{H} \text{div } \vec{H} + \frac{1}{4\pi} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \times \vec{E} \right\} dV = 0 \Rightarrow \\ & \frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left\{ -\frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + \left[ \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \text{div } \vec{E} + \vec{H} \text{div } \vec{H}) + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \right] \right\} dV = \\ & = -\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV + \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \text{div } \vec{E} + \vec{H} \text{div } \vec{H}) + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \right\} dV. \quad (4) \end{aligned}$$

Другий інтеграл в (4) (від виразу у фігурних дужках) можна перетворити у поверхневий, причому він міститиме вектори поля в другій степені. Тому він буде наближатись до 0 при необмеженому зростанні поверхні, якщо тільки вектори спадають швидше, ніж функція  $1/r$ . Тоді, переходячи до нескінченно великого об'єму, прийдемо до виразу:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{P}_{\text{част}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV \right) = 0,$$

звідки

$$\vec{P}_{\text{част}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV = \text{const}. \quad (5)$$

Формула (5) показує, що повний імпульс замкнутої системи, яка складається з ЕМП і частинок, зберігається. Тому величину

$$\vec{P}_{\text{ЕМП}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV \quad (6)$$

слід вважати імпульсом ЕМП, а величину

$$\vec{p}_{\text{ЕМП}} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (7)$$

– густиною імпульсу. Отже, при взаємодії поля і частинок поруч із законом збереження повної енергії має місце закон збереження повного імпульсу. Втрата імпульсу частинками (наприклад, при випромінюванні) приводить до збільшення імпульсу поля, і навпаки, передача імпульсу частинкам супроводжується зменшенням імпульсу поля.

Якщо інтегрування в (4) здійснюється по скінченному об'єму, то другий інтеграл означатиме потік імпульсу через поверхню, що обмежує виділений об'єм. Тому зміна повного імпульсу ЕМП в деякому об'ємі  $\int_V \vec{p}_{\text{ЕМП}} dV$

дорівнюватиме зміні імпульсу частинок, які містяться в цьому об'ємі, і потоку імпульсу через поверхню.

Передбачення теорії про існування імпульсу поля вперше було підтверджене експериментально П.М.Лебедевим у 1901 р. у вигляді світлового тиску. Імпульс ЕМП у звичайних умовах малий і часто лежить за межами похибок вимірювань. Але у області атомних явищ імпульс ЕМП зрівнюється із імпульсом частинок і відіграє важливу роль в усіх процесах взаємодії випромінювання з речовиною. Крім атомних явищ, тиск випромінювання відіграє важливу роль в процесах, що відбуваються у внутрішніх частинах зірок і у зоряних атмосферах та других явищах астрономічного масштабу, зокрема, визначає напрямки хвостів комет від Сонця внаслідок тиску сонячного світла.

Поруч з вектором густини імпульсу поля можна ввести в розгляд густину моменту імпульсу ЕМП:

$$\vec{m}_{\text{ЕМП}} = \vec{r} \times \vec{p}_{\text{ЕМП}} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{H}]] = \frac{\vec{r} \times \vec{S}}{c^2}. \quad (8)$$

Момент імпульсу поля в об'ємі  $V$  дорівнює:

$$\vec{M}_{\text{ЕМП}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{H}]] dV = \int_V \frac{\vec{r} \times \vec{S}}{c^2} dV. \quad (9)$$

Можна показати, що для моменту імпульсу ЕМП, як і для його енергії і імпульсу, має місце закон збереження. Момент імпульсу ЕМП відіграє важливу роль у процесах атомного масштабу, проте в явищах макроскопічного масштабу він є не суттєвим.

## §15. Граничні умови для векторів ЕМП

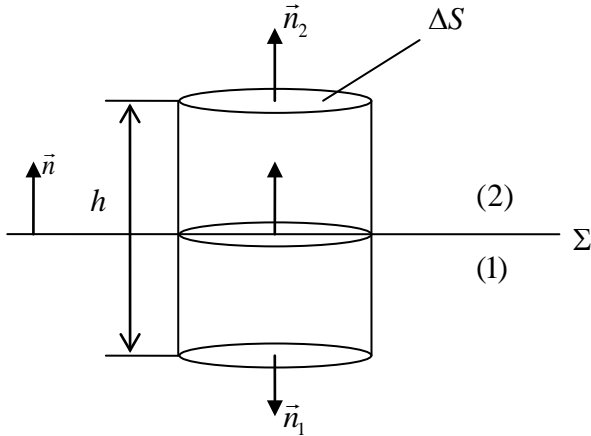
Розглянемо поверхні, на яких величини  $\rho$  і  $\vec{j}$  мають особливості, тобто зазнають стрибків, або обертаються в нескінченність. На особливих поверхнях рівняння Максвелла стають недійсними, тому що на них похідні від  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  можуть втратити зміст. Тому диференціальні рівняння заміняють

деякими умовами зшивання компонентів поля, які виводять з інтегральної форми рівнянь Максвела.

1. Розглянемо рівняння (12.5):

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (1)$$

Виберемо об'єм у формі циліндра малого радіуса і висоти  $h$  з основами  $\Delta S$  паралельними особливій поверхні  $\Sigma$ .



Представимо ліву частину рівняння (1) наближено у вигляді

$$\oint_S E_n dS \approx E_{n_1} \Delta S + E_{n_2} \Delta S + N_{\text{біч}},$$

$$E_{n_1} = -E_{1n}; \quad E_{n_2} = E_{2n};$$

$$\int_S E_n dS = (E_{2n} - E_{1n}) \Delta S + N_{\text{біч}};$$

а праву частину:  $\int_V \rho dV = \rho \cdot \Delta S \cdot h$ . Тоді

рівняння (1) прийме вигляд:

$$(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S + N_{\text{біч}} \approx \rho \cdot \Delta S \cdot h \cdot 4\pi. \quad (2)$$

Перейдемо у (2) до границі  $h \rightarrow 0$  так, щоб основи циліндра сумістились з поверхнею  $\Sigma$ . Оскільки при цьому бічна поверхня циліндра наближається до 0, а поле  $E$  залишається обмеженим, тому  $N_{\text{біч}} \rightarrow 0$ . Позначимо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho h = \sigma. \quad (3)$$

Величина  $\sigma$  називається поверхневою густиною заряду.  $\sigma \neq 0$ , якщо об'ємна густина  $\rho$  має особливість на поверхні  $\Sigma$  так, що в тонкому поверхневому шарі знаходиться скінчений заряд. Враховуючи це, отримаємо замість (2):

$$(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S;$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi \sigma. \quad (4)$$

Ця умова виконується для будь-якої поверхні. (4) визначає скачок нормальних компонентів електричного поля на особливій поверхні. На регулярній поверхні  $\sigma=0$  і тому  $E_n$  – величина неперервна.

2. Приведене в п. 1 виведення повністю зберігає силу і для рівняння (7.3):

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (5)$$

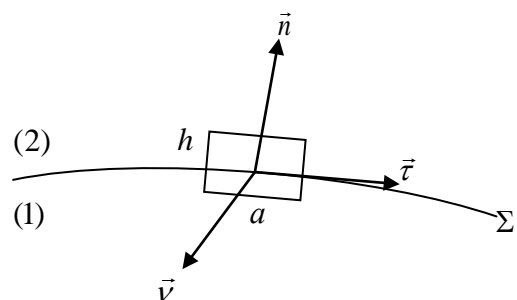
Але оскільки права частина в (5) всюди  $=0$ , то нормальна компонента вектора  $\vec{H}$  на будь-якій поверхні неперервна:

$$H_{2n} = H_{1n}. \quad (6)$$

3. Знайдемо тепер умови для тангенціальних (дотичних) компонентів. Будемо виходити з рівняння (12.7):

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} (I + I_{\text{зм}}) = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dS. \quad (7)$$

Виберемо замкнутий контур  $l$  у вигляді малого прямокутника, площина якого перпендикулярна поверхні  $\Sigma$ .



Вектори  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$  утворюють трійку взаємно перпендикулярних ортів. Маємо:

$$\oint_l H_l dl = H_{2\tau} a - H_{1\tau} a + \gamma_h,$$

де  $\gamma_h$  – інтеграл по бічних ділянках контуру. Далі:

$$\int_S j_n dS \approx j_\nu ha; \quad \int_S \frac{dE_n}{dt} dS \approx \frac{\partial E_\nu}{\partial t} ha,$$

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau})a + \gamma_h \approx \frac{4\pi}{c} j_\nu ha + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\nu}{\partial t} ha.$$

Спрямовуючи  $h \rightarrow 0$ , так що контур стягується до поверхні  $\Sigma$ , отримаємо  $\gamma_h \rightarrow 0$ . Позначимо

$$\lim_{h \rightarrow 0} (j_\nu h) = i_\nu. \quad (8)$$

Величина (8) являє собою проекцію на напрямок  $\vec{\nu}$  густини поверхневого струму. Тоді:

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau})a = \frac{4\pi}{c} i_\nu a, \text{ звідки } H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_\nu. \quad (9)$$

(9) визначає граничну умову для дотичних складових напруженості магнітного поля. Останню умову неважко переписати і у векторному вигляді:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (10)$$

4. З рівняння (7.8)  $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{H} d\vec{S}$  аналогічно виводиться гранична

умова для дотичних компонент вектора  $\vec{E}$ . В зв'язку з обмеженістю величини  $\vec{H}$  в правій частині відповідної рівності буде стояти 0. Тому ми отримуємо:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (11)$$

тобто дотична складова електричного поля до поверхні неперервна на будь-якій поверхні.

## §16. Єдиність розв'язку рівнянь Максвелла (НСО)

Сформулюємо умови, при яких розв'язок рівнянь Максвелла є єдиним. Нехай 1) задано в певному об'ємі  $V$  розподіл густини зарядів і струмів  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  і 2) відомі початкові значення напруженостей поля  $\vec{E}(\vec{r}, 0)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, 0)$ , а також 3) задані дотичні компоненти одного з векторів поля  $E_\tau$  і  $H_\tau$  в усі моменти часу. Покажемо, що при цих умовах розв'язок рівнянь Максвелла всередині даного об'єму єдиний.

Доказ виконаємо від супротивного, тобто припустимо існування двох розв'язків  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_1$  і  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$ , які задовольняють рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_{1(2)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{1(2)}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H}_{1(2)} = 0 \\ \text{rot } \vec{H}_{1(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{1(2)}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E}_{1(2)} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (1)$$

Складемо різниці

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \\ \vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_2 \end{cases} \quad (2)$$

Віднімаючи рівняння Максвелла (1) для полів  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_1$  і  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$  і враховуючи (2), отримаємо

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}, & \text{div } \vec{H}' = 0; \\ \text{rot } \vec{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}, & \text{div } \vec{E}' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Помноживши скалярно перше рівняння в (3) на вектор  $\vec{H}'$ , а друге – на  $\vec{E}'$ , і віднімаючи отримані рівняння одне від одного, отримаємо:

$$\vec{H}' \text{ rot } \vec{E}' - \vec{E}' \text{ rot } \vec{H}' = -\frac{1}{c} \left( \vec{H}' \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} + \vec{E}' \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right), \text{ або } \text{div} [\vec{E}' \times \vec{H}'] = -\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2).$$

Проінтегрувавши це рівняння по об'єму і скориставшись теоремою Остроградського-Гауса, отримаємо:

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = - \int_V \text{div} [\vec{E}' \times \vec{H}'] dV = - \oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}'] d\vec{S} = - \oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}']_n dS. \quad (4)$$

Але нормальна складова векторного добутку  $[\vec{E}' \times \vec{H}']_n$  виражається через дотичні компоненти  $E'_\tau$  і  $H'_\tau$  на поверхні  $S$ , одна з яких в силу прийнятих умов (3), наприклад,  $E'_\tau$ , дорівнює 0:  $E'_\tau = E_{1\tau} - E_{2\tau} = E_\tau - E_\tau = 0$ . Тому з (4) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = 0 & \Rightarrow \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = \text{const} \Rightarrow \\ \int_V (\vec{E}'^2(\vec{r}, t) + \vec{H}'^2(\vec{r}, t)) dV &= \int_V (\vec{E}'^2(\vec{r}, 0) + \vec{H}'^2(\vec{r}, 0)) dV = [\vec{E}'(\vec{r}, 0) = \vec{H}'(\vec{r}, 0) = 0] = 0; \end{aligned}$$

Але тоді  $\vec{E}'(\vec{r}, t) = 0, \vec{H}'(\vec{r}, t) = 0; \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2; \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_2$ , що й треба було довести.

Відмітимо, що якщо  $\oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}'] d\vec{S} \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow \infty$ , що має місце при достатньо швидкому спаданні  $\vec{E}'$  і  $\vec{H}'$  з відстанню, то граничні умови 3) стають лишніми для доказу єдиності розв'язку.

## §17. Рівняння для електромагнітних потенціалів

В 4-вимірній формі друга пара рівнянь Максвелла має вигляд (10.4):

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i,$$

де тензор ЕМП виражається через 4-потенціали  $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ ,  $F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}$ .

Підставляючи  $F^{ik}$  в рівняння Максвелла, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (1)$$

Введемо 4-вимірний аналог оператора набла:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (2)$$

Тоді оператор: 
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = \square \quad (3)$$

називають оператором Даламбера, який є інваріантним відносно перетворень Лоренца аналогом оператора Лапласа.

Скориставшись визначенням оператора Даламбера, перепишемо (1) у вигляді:

$$\square A^i + \frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (4)$$

(1) або (4) є загальним виразом рівнянь, яким задовольняє 4-потенціал ЕМП. Але ці рівняння можна спростити, якщо скористатися неоднозначністю визначення 4-потенціалу, пов'язаною з калібровочною інваріантністю магнітного поля (§3). Вона дозволяє накласти на 4-потенціал додаткову умову:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (5)$$

(7) називають умовою Лоренца. При врахуванні (5) рівняння (4) набуває вигляду:

$$\square A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (6)$$

або в тривимірних позначеннях  $(A^i(\varphi, \vec{A}), j^i(c\rho, \vec{j}))$ :

$$i=0: \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (7)$$

$$i=1,2,3: \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (8)$$

(7) і (8) складають систему рівнянь, яким задовольняють скалярний і векторний потенціали.

Замість умови Лоренца (5) часто використовують умову Кулона:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (9)$$

яку також називають кулонівською калібровкою. За цієї калібровки отримаємо замість (6) і (7):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho; \quad (10)$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi. \quad (11)$$

Якщо розглядати ЕМП при відсутності зарядів і струмів ( $\rho=0, \vec{j}=0$ ), то можна використати калібровку, при якій

$$\varphi=0 \quad \text{і} \quad \operatorname{div} \vec{A}=0 \quad (12)$$

так що рівняння (10) виконується тотожно, а рівняння (11) приймає вигляд

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

(13) є хвильовим рівнянням для векторного потенціалу, яке ще інакше називають рівнянням Даламбера.

## РОЗДІЛ III. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ (ЕМХ) У ВАКУУМІ

### §28. Хвильове рівняння і його розв'язок

Запишемо рівняння Максвела у вакуумі при відсутності зарядів і струмів ( $\rho = 0, \vec{j} = 0$ ) =

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ці рівняння можуть мати відмінні від нуля розв'язки. Це означає, що ЕМП може існувати навіть при відсутності зарядів. Такі електромагнітні поля, що існують в пустоті при відсутності зарядів, називають електромагнітними хвилями. Дослідимо такі поля. Застосуємо до першого з рівнянь (1) операцію *rot*:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

або, враховуючи рівняння (1)  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , знайдемо

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Аналогічно отримується рівняння для напруженості магнітного поля:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

(2) і (3) називають хвильовими рівняннями. Якщо при відсутності зарядів і струмів використати калібровку  $\varphi = 0, \operatorname{div} \vec{A} = 0$  (17.12), то можна отримати аналогічне до (2) і (3) хвильове рівняння для векторного потенціалу (17.13):

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (2-4) і описують електромагнітні хвилі у вакуумі.

Розглянемо окремий випадок, коли поле залежить лише від однієї просторової координати  $x$  і часу  $t$ , тобто  $\vec{E} = \vec{E}(x, t), \vec{H} = \vec{H}(x, t)$ . Тоді рівняння (2-4) набудуть вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

де під  $u(x, t)$  розуміють довільну компоненту векторів  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$ . Як було показано в курсі ММФ (в чому можна також переконатись безпосередньою підстановкою в (5)), розв'язком рівняння (5) є

$$u(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct), \quad (6)$$

де  $g$  і  $h$  - довільні, двічі диференційовані функції своїх аргументів. Розв'язок (6) являє собою накладання двох збурень, кожне з яких поширюється вздовж вісі  $Ox$  в сторону зменшення або зростання  $x$  зі швидкістю  $c$  по закону

$$x \pm ct = x_0. \quad (7)$$

Такі збурення називаються біжучими плоскими електромагнітними хвилями.

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється в додатному напрямку осі

х. В цій хвилі всі польові характеристики є функціями тільки аргументу  $x-ct$ , в тому числі і векторний потенціал:  $\vec{A} = \vec{A}(x-ct)$ . При використанні калібровки (17.12)  $\varphi=0, \operatorname{div} \vec{A}=0$  ми отримаємо наступні вирази для напруженостей полів:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \cdot \vec{A}' \cdot (-c) = \vec{A}',$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}(x-ct) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(x-ct) \times \vec{A}' = \operatorname{grad} x \times \vec{A}' = \vec{i} \times \vec{A}', \quad (8)$$

де  $\vec{i}$  - одиничний орт у напрямку вісі  $Ox$ , який співпадає з напрямком поширення хвилі  $\vec{n}$ . Це дозволяє замість (8) встановити наступне, незалежне від вибору системи координат співвідношення між напруженостями електричного і магнітного полів:

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{A}' = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (9)$$

Таким чином, у плоскій ЕМХ напруженості перпендикулярні одна одній і перпендикулярні напрямку поширення хвилі:  $\vec{H} \perp \vec{E}, \vec{H} \perp \vec{n}, \vec{E} \perp \vec{n}$ . З (9) також випливає, що електричне і магнітне поля плоскої хвилі однакові за абсолютною величиною:

$$|\vec{H}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin 90^\circ = |\vec{E}|.$$

Знайдемо потік енергії в плоскій ЕМХ. Він визначається вектором Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \{ \vec{n} \cdot E^2 - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) \} = \frac{c}{4\pi} E^2 \cdot \vec{n} = c \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \vec{n},$$

$$\vec{S} = c w \vec{n}, \quad (10)$$

де  $w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$  - густина енергії ЕМП хвилі. Отже, потік енергії поширюється зі швидкістю світла в напрямку поширення хвилі  $\vec{n}$ . Густина імпульсу (імпульс одиниці об'єму) ЕМХ дорівнює:

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{c w \vec{n}}{c^2} = \frac{w}{c} \vec{n}. \quad (11)$$

Це співвідношення між густиною імпульсу  $\vec{g}$  і густиною енергії ЕМХ  $w$  узгоджується із формулою зв'язку між енергією  $\varepsilon$  і імпульсом  $\vec{p}$  фотонів – квантів світла, або інших частинок, що рухаються зі швидкістю світла. Дійсно, якщо концентрація фотонів дорівнює  $N$ , тоді  $\vec{g} = N \vec{p}$ ,  $w = N\varepsilon$ , тому згідно (11) маємо:

$$N \vec{p} = \frac{N\varepsilon}{c} \vec{n} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\varepsilon}{c} \vec{n}. \quad (12)$$

## §29. Плоска монохроматична хвиля

Серед біжучих плоских хвиль важливе місце займають монохроматичні хвилі, для яких будь-яка компонента змінюється по гармонічному закону:

$$u(x, t) = u_0 \cos[k(x-ct) + \varphi_0], \quad (1)$$

де  $u_0, k, \varphi_0$  - сталі величини, значення яких визначаються умовами збудження хвилі. Величина  $\varphi = k(x-ct) + \varphi_0$  називається фазою хвилі,  $\varphi_0$  – початкова фаза,  $u_0$  – амплітуда. Величину  $k \cdot c = \omega$  називають циклічною частотою. Відмітимо, що, розкривши в (1) під знаком косинуса круглі дужки, можна

записати

$$kx = (\vec{i}k + \vec{j} \cdot 0 + \vec{l} \cdot 0) \cdot (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{l}z) = \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{i},$$

або, в загальному випадку довільного напрямку поширення,  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$  – так званий хвильовий вектор, який співпадає з напрямком поширення хвилі  $\vec{n}$  (у формулі (1) це є напрямок вісі  $Ox$  – орт  $\vec{i}$ ). Звідси випливає, що в загальному випадку, коли плоска монохроматична хвиля поширюється в довільному напрямку  $\vec{n}$ , компоненти хвилі можуть бути представлені у вигляді

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Співвідношення  $k \cdot c = \omega$  визначає закон дисперсії електромагнітних хвиль.

Звідси знаходиться групова швидкість:  $v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = c$ . Існує також фазова швидкість, яка визначається умовою сталості фази ЕМХ:

$$kx - \omega t = \text{const} = kx_0 - \omega t_0 \Rightarrow v_\phi = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\omega}{k} = c. \text{ Отже, групова і фазова швидкість}$$

електромагнітних хвиль у вакуумі співпадають. З фізичної точки зору це означає, що хвильові пакети, тобто, суперпозиції плоских монохроматичних хвиль з різними частотами, поширюються у вакуумі без зміни форми.

$$\text{Період хвилі дорівнює } T = \frac{2\pi}{\omega}; \text{ довжина хвилі } \lambda = c \cdot T = 2\pi \frac{c}{\omega} = 2\pi \frac{\phi}{k\phi} = \frac{2\pi}{k}.$$

Таким чином, модуль хвильового вектору зв'язаний з довжиною хвилі співвідношенням  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

В електродинаміці часто користуються комплексними представленням полів:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (3)$$

маючи при цьому на увазі, що вимірюваними величинами є дійсні частини відповідних комплексних виразів:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) в рівняння Максвела (28.1), отримаємо зв'язок між комплексними амплітудами полів:

$$\vec{H}_0 = \vec{n} \times \vec{E}_0, \quad \vec{E}_0 = \vec{H}_0 \times \vec{n}, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_0 = 0, \quad (5)$$

де  $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$  – одиничний вектор у напрямку поширення хвилі. Співвідношення

(5) означають, що вектори  $\vec{H}_0, \vec{E}_0$  і  $\vec{n}$  утворюють трійку взаємно перпендикулярних векторів, тобто плоска монохроматична хвиля є поперечною, причому модулі амплітуд полів однакові:  $|\vec{E}_0| = |\vec{H}_0|$ .

### §30. Властивості плоскої монохроматичної хвилі

**а) Ефект Доплера.** Розглянемо релятивістськи інваріантний вираз

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = \text{Inv}. \quad (1)$$

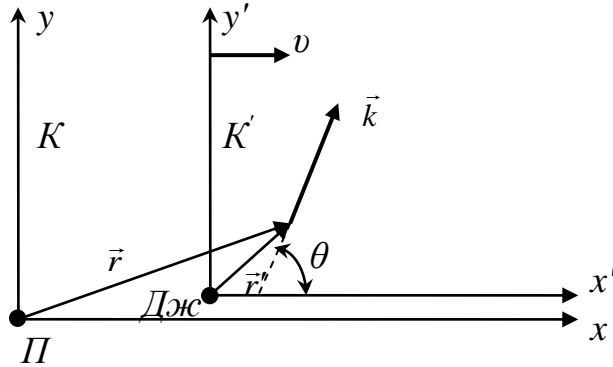
Релятивістська інваріантність цього виразу необхідна, щоб плоска монохроматична ЕМХ однаково виглядала в усіх ІСВ. Представимо (1) у

чотиривимірному вигляді, ввівши 4-вимірний хвильовий вектор

$$k^i(k^0, \vec{k}) \quad k^0 = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|. \quad (2)$$

Тоді релятивістська інваріантність виразу (1) є інваріантністю скалярного добутку 4-вимірного хвильового вектору з 4-радіус-вектором:

$$\omega t - \vec{k} \vec{r} = k_i x^i = \text{Inv} \quad (3)$$



Нехай джерело ЕМХ є нерухомим відносно ІСВ  $K'$  і випромінює плоску монохроматичну хвилю з частотою  $\omega_0$  під деяким кутом  $\theta'$  до вісі  $Ox$ . Приймач хвиль знаходиться в ІСВ  $K$  і спостерігає рух випроміненої хвилі під кутом  $\theta$  до вісі  $Ox$ .

Користуючись формулами перетворень 4-векторів, знайдемо зв'язок між часовими компонентами хвильового вектора випроміненої і прийнятої хвилі:

$$k^{0'} = \frac{k^0 - \frac{v}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad k^{0'} = \frac{\omega'}{c} = [\omega' \equiv \omega_0] = \frac{\omega_0}{c}; \quad k^0 = \frac{\omega}{c}; \quad k^1 = k_x = |\vec{k}| \cdot \cos \theta; \Rightarrow$$

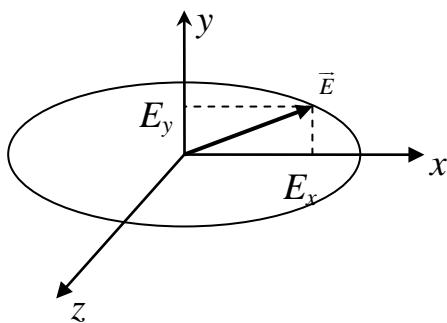
$$\Rightarrow \frac{\omega_0}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \frac{\omega}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

звідки отримуємо зв'язок між частотою ЕМХ в нерухомій і рухомій системами відліку:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (4)$$

Формула (4) визначає ефект Доплера – зміну частоти ЕМХ, викликану відносним рухом джерела і приймача.

**б) Поляризація ЕМХ.** Представимо вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  монохроматичної хвилі, яка поширюється вздовж вісі  $z$ , у вигляді суми двох компонентів  $E_x$  і  $E_y$ :



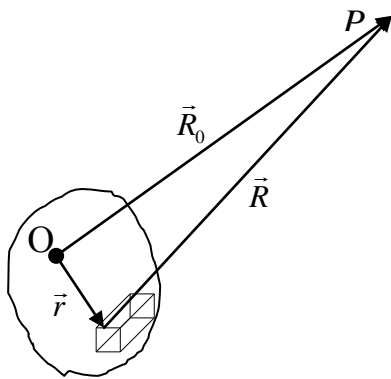
$$E_x = E_1 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0), \quad E_y = \pm E_2 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

де знак  $E_y$  залежить від того, в яку сторону напрямлений вектор  $\vec{E}_y$  - в напрямку чи проти додатного напрямку вісі  $y$ . З (5) можна отримати:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1. \quad (6)$$

Отже, у кожній точці простору вектор електричного поля обертається в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, причому його кінець описує еліпс. Така хвиля називається еліптично поляризованою. Обертання відбувається в напрямку за або проти напрямку гвинта, вгвинчуваного вздовж вісі  $z$ , відповідно при знакові (+) або (-) в (5). Якщо  $E_1 = E_2$ , то хвиля називається поляризованою по колу. Якщо або  $E_1 = 0$ , або  $E_2 = 0$ , то еліпс вироджується в пряму лінію. Це означає, що вектор  $\vec{E}$  завжди паралельний одному і тому ж напрямку. Така хвиля називається лінійно поляризованою. Еліптично поляризована хвиля може розглядатись як накладання двох лінійно поляризованих хвиль.

### §31. Потенціали, що запізнюються. Дипольне випромінювання



В попередніх параграфах розглядалось поширення ЕМХ в пустому просторі. Розглянемо тепер випромінювання ЕМХ зарядами, що рухаються у вакуумі.

Нехай заряди і струми в об'ємі  $V$  розподілені по закону  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Елементарний об'єм  $dV$  містить заряд  $dq = \rho(\vec{r}, t)dV$ , який створює в т.  $P(X, Y, Z)$  скалярний потенціал  $d\phi(\vec{R}_0, t) = \frac{dq}{R} = \frac{\rho(\vec{r}, t)dV}{R}$ . Повний скалярний

потенціал, створюваний всіма зарядами в об'ємі  $V$ , дорівнює 
$$\phi(\vec{R}_0, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}, t)dV}{R}.$$

Але ця формула не точна, тому що з неї випливає, що при зміні з часом густини заряду зміна потенціалу в т.  $P$  відбуватиметься миттєво, що суперечить 2-му постулату СТВ. Для того, щоб врахувати скінченність швидкості поширення електромагнітного сигналу, потрібно врахувати запізнення сигналу на час його поширення від заряду до точки  $P$  і замінити в густині заряду  $\rho(\vec{r}, t)$  час  $t$  на  $t - \frac{R}{c}$ . Отже,

$$\phi(\vec{R}_0, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{R}{c})}{R} dV. \quad (1)$$

Аналогічно векторний потенціал

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{R}{c})}{R} dV \quad (2)$$

Потенціали (1), (2) називають потенціалами, що запізнюються.

З малюнку видно, що  $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$ , але  $|\vec{r}| \ll |\vec{R}_0|$ . Тому величину  $R$  можна розкласти по степеням відношення  $r/R_0$ :

$$\begin{aligned}
R &= |\vec{R}_0 - \vec{r}| = \sqrt{(\vec{R}_0 - \vec{r})^2} = (\vec{R}_0^2 - 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= R_0 \left( 1 - \frac{2\vec{R}_0 \cdot \vec{r}}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right] \approx R_0 \left( 1 - 2\vec{n} \frac{\vec{r}}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[ (1+x)^n \approx 1+nx, |x| \ll 1 \right] = R_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 2\vec{n} \frac{\vec{r}}{R_0} \right) = R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}
\end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки  $\vec{n} \cdot \vec{r} \ll R_0$ , то за формулою Тейлора можна виконати розкладання  $f(R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}) \approx f(R_0) - \frac{\partial f(R_0)}{\partial R_0} \vec{n} \cdot \vec{r}$ . Це дозволяє розкласти підінтегральні функції в (1) і (2), що дає:

$$\frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} - \vec{n} \cdot \vec{r} \frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} \right) \tag{4}$$

Підставивши цей вираз в (1), отримаємо:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) \approx \frac{1}{R_0} \int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV - \vec{n} \frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{1}{R_0} \int_V \vec{r} \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV \right).$$

Але перший інтеграл тут визначає повний заряд системи, який покладемо рівним нулю, вважаючи систему електронейтральною:  $\int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = q = 0$ . Другий інтеграл є не що інше, як

дипольний електричний момент, який мала система в момент  $t - \frac{R_0}{c}$ :  $\int_V \vec{r} \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$ . В результаті отримаємо:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = -\vec{n} \frac{\partial}{\partial R_0} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0}.$$

Нарешті, виконавши диференціювання і врахувавши, що

$$\frac{\partial}{\partial R_0} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\frac{1}{c} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right),$$

отримаємо

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0^2} + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}$$

Перший доданок тут обернено пропорційний квадрату відстані від системи до т. Р і спадає з відстанню швидше, ніж другий доданок. Тому на великих відстанях можна покласти

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}. \tag{5}$$

З тієї ж причини при підстановці (3) в (2) можна зберегти лише 1-й доданок:

$$A(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{cR_0} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = \frac{1}{cR_0} \int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) \dot{\vec{r}} dV = \frac{1}{cR_0} \frac{d}{dt} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}. \quad (6)$$

Формули (5) і (6) визначають скалярний і векторний потенціал поля випромінювання на великих відстанях від джерел поля. Ці формули показують, що поля випромінювання визначаються дипольним моментом випромінюючої системи. Тому таке випромінювання називається дипольним.

### §32. Інтенсивність дипольного випромінювання

Знайдемо напруженості, які відповідають потенціалам дипольного випромінювання:

$$\begin{aligned} \vec{H} = \text{rot } \vec{A} &= \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} = \frac{1}{c} \text{grad} \left( \frac{1}{R_0} \right) \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{cR_0} \text{rot} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \\ &= -\frac{1}{cR_0^2} \text{grad } R_0 \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{cR_0} \text{grad} \left( t - \frac{R_0}{c} \right) \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \left[ \text{grad } R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \vec{n} \right] = \\ &= -\frac{1}{cR_0^2} \vec{n} \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) - \frac{1}{c^2 R_0} \text{grad } \vec{R}_0 \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \\ &= -\frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}}{c^2 R_0}. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial R_0} \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} \right) \cdot \vec{n} - \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} = \\ &= \left( \frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \right) \cdot \vec{n} - \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \approx \frac{(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}}{c^2 R_0} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 R_0} = \frac{(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \cdot \vec{n} - \ddot{\vec{p}}}{c^2 R_0} = \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \times \vec{n}}{c^2 R_0}. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\vec{H} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}}{c^2 R_0}, \quad \vec{E} = \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \times \vec{n}}{c^2 R_0} = \vec{H} \times \vec{n}. \quad (1)$$

Формули (1) показують, що вектори  $\vec{H}, \vec{E}$  і  $\vec{n}$  взаємно перпендикулярні, тобто електромагнітна хвиля дипольного випромінювання є поперечною.

Крім того,  $|\vec{H}|=|\vec{E}|$ , як і в плоскій ЕМХ. Отже, на великій відстані від випромінюючої системи ЕМХ дипольного випромінювання подібна до плоскої хвилі. Амплітуда хвилі зменшується обернено пропорційно відстані. Зона електромагнітних хвиль на великій відстані від випромінювача, де поля визначаються формулами (1), називаються хвильовою зоною. Крім того, формули (1) показують, що електромагнітна хвиля дипольного випромінювання поляризована лінійно.

Знайдемо інтенсивність дипольного випромінювання, тобто повну енергію випромінювання за одиницю часу. Перш за все знайдемо вектор густини потоку енергії ЕМП хвилі – вектор Пойнтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} [\vec{H} \times \vec{n}] \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}. \quad (2)$$

Обчислимо повний потік енергії електромагнітних хвиль через замкнуту поверхню, що обмежує випромінюючу систему. Він визначає інтенсивність випромінювання та дорівнює:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{S} \vec{n} d\Sigma = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Sigma} H^2 d\Sigma = \left[ H^2 = \frac{|\ddot{p}|^2}{c^4 R_0^2} \sin^2 \theta; d\Sigma = R_0^2 d\Omega = R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right] = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\ddot{p}^2}{c^3 R_0^2} \sin^2 \theta R_0^2 \sin \theta = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta; \\ \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= -\cos \theta \left|_0^{\pi} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right|_0^{\pi} = +1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Таким чином, інтенсивність випромінювання дорівнює

$$I = \frac{\ddot{p}^2}{2c} \frac{4}{3} = \frac{2\ddot{p}^2}{3c} \left( t - \frac{R_0}{c} \right). \quad (3)$$

Ця формула визначає інтенсивність випромінювання по всім напрямкам.

### §33. Дипольний осцилятор

Для багатьох наукових і технічних задач важливим є дослідження випромінювання системи, дипольний момент якої змінюється з часом за гармонічним законом:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Такі системи називаються дипольними осциляторами. Такою системою може бути антена з періодичним струмом у ній, або атом у класичній моделі, який складається з позитивного нерухомого заряду і рухомого негативного заряду, що коливається за гармонічним законом. Іншим прикладом дипольного осцилятора є осцилятор Герца, який являє собою дві металеві кульки, з'єднані провідником і заряджені у початковий момент часу однаковими за величиною і протилежними за знаком зарядами. Внаслідок розряду

виникають гармонічні коливання:  
заряду

$$q = q_0 \cos \omega t ,$$

дипольного моменту

$$\vec{p} = q\vec{l} = q_0\vec{l} \cos \omega t = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

і струму

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin \omega t .$$

Знайдемо середнє значення потоку енергії поля через сферу радіуса  $R_0$ , що оточує дипольний момент, використовуючи формулу (32.3) для

інтенсивності:  $I = \frac{2\ddot{p}^2 \left( t - \frac{R_0}{c} \right)}{3c^3}$ . Згідно (1)  $\ddot{p}^2 = \ddot{p}_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega \left( t - \frac{R_0}{c} \right)$ . Середнє значення інтенсивності визначатиметься з формули:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega \left( t - \frac{R_0}{c} \right)}{3c^3} dt = \left[ \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \right] = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Отже, середня інтенсивність випромінювання дипольного осцилятора за період дорівнює:

$$\bar{I} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^2} = \left[ \omega = \frac{2\pi c}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} \right] = \frac{2^4 \pi^4 p_0^2 c}{3\lambda^4}. \quad (2)$$

Тобто, середнє значення енергії, що випромінюється осцилятором за період, прямо пропорційне квадрату амплітуди і четвертій степені частоти, або обернено пропорційне четвертій степені довжини хвилі.

Отриманий результат дозволяє пояснити ряд явищ:

1) Пояснимо голубий колір неба. Повітря, що оточує Землю, складається з молекул, кожен з яких можна розглядати як дипольний осцилятор. Сонячне світло викликає вимушені коливання осциляторів з частотою падаючого світла. В результаті кожен осцилятор випромінює енергію, яка обчислюється за формулою (2). Вважаючи амплітуду дипольного моменту молекули  $p_0$  сталою, бачимо, що енергія сонячного світла, розсіяного молекулами повітря, обернено пропорційна  $\lambda^4$ . Отже, молекули повітря найбільше розсіюють світло короткохвильової частини сонячного спектра, що й пояснює голубий колір неба - колір, що відповідає меншим значенням  $\lambda$ .

2) Осцилятор Герца має дипольний момент  $\vec{p} = q\vec{l} = q_0\vec{l} \cos \omega t$ . Внаслідок того, що заряджені кульки з'єднані провідником, в системі виникають коливання зарядів і струмів. Такий диполь, згідно з (2) випромінює енергію і є найпростішою моделлю антени. З (2) випливає, що енергія, яка випромінюється антеною, різко збільшується із зменшенням довжини хвилі. Це пояснює, чому в радіотехніці використовуються ЕМХ з довжиною кілька сот метрів і менше.

### §34. Електромагнітне поле рухомого заряду

Визначимо потенціали поля, яке створюється одним точковим зарядом, що рухається по закону  $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ . Потенціали поля в т. Р у момент часу  $t$

внаслідок запізнення будуть визначатись положенням і швидкістю заряду в момент часу  $t'$ , для якого час поширення електромагнітного збурення з точки знаходження заряду  $\vec{r}_0(t')$  в точку спостереження Р якраз дорівнює  $t - t'$ . Нехай  $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$  - радіус-вектор від заряду до т. Р. Тоді момент  $t'$  визначається рівнянням, звідки

$$R(t') = c(t - t'). \quad (1)$$

В системі відліку, в якій в момент часу  $t'$  частинка нерухома, поле в точці спостереження в момент  $t$  дається просто кулонівським потенціалом:

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \vec{A} = 0. \quad (2)$$

Вирази для потенціалів у довільній системі відліку отримаємо, написавши такий чотиривекторний потенціал  $A^i$ , щоб при швидкості  $\vec{v} = 0$ , він зводився до виразу (2). Відмітимо, що згідно з (1) потенціали (2) в чотиривимірній формі набувають вигляду:

$$A^i \left( \frac{e}{c(t - t')}, 0 \right). \quad (3)$$

При переході від вибраної ІСВ до інших вираз (3) повинен включати швидкість, яка у чотиривимірному представлення дорівнює:

$$u^i \left( \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \text{ Якщо покласти 4-потенціал пропорційним 4-швидкості,}$$

то при  $\vec{v} = 0$  векторний потенціал також дорівнюватиме 0. Далі, в знаменнику виразу (3) стоїть часова компонента 4-вектора  $R^k(c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}_0(t'))$ . Отже, в знаменник  $A^i$  необхідно ввести 4-вектор  $R^k$ , але для правильної розмірності його треба помножити на 4-швидкість. Отже, 4-потенціал потрібно визначити наступним чином:

$$A^i = e \frac{u^i}{R^k u_k} \quad (4)$$

$$\text{Оскільки } R^k u_k = \frac{c^2(t - t') - \vec{R}\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = [\text{викор. (1)}] = \frac{cR(t') - \vec{v}\vec{R}(t')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c \left( R(t') - \frac{\vec{v}\vec{R}(t')}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ тому}$$

(4) з урахуванням явного вигляду  $u^i$  приводить до наступного вигляду потенціалів:

$$\varphi = A^0 = \frac{e}{\left( R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c} \right)_{t'}}; \quad \vec{A}' = \frac{e\vec{v}}{c \left( R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c} \right)_{t'}}. \quad (5)$$

Таким чином, у нас визначені потенціали і, отже, визначені поля. Потенціали (5) електромагнітного поля, створюваного рухомим зарядом, називаються потенціалами Ленара-Віхарта. Знаючи ці потенціали, можна знайти напруженість відповідних полів:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dots = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) + \frac{e}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) \times \dot{\vec{v}}\right]\right], \quad (6)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R} [\vec{R} \times \vec{E}] = \vec{n} \times \vec{E} \quad (7)$$

Тут  $\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'}$ ; всі величини у формулах (6) і (7) беруться в момент часу  $t'$ .

Згідно (6) електричне поле складається з двох доданків різного характеру. Перший доданок залежить від швидкості частинки, але не залежить від прискорення і на великих відстанях  $E \sim \frac{e}{R^2}$ . Другий доданок пропорційний прискоренню  $\dot{\vec{v}}$  і на великих відстанях обернено пропорційний  $1/R$ . Цей доданок зв'язаний з випромінюванням частинкою ЕМХ. Що стосується першого доданку, то, будучи незалежним від прискорення, він повинен відповідати полю, створюваному рівномірно рухомим зарядом. Формула (7) також показує, що магнітне поле всюди перпендикулярне до електричного.

### §35. Радіаційне тертя

При випромінюванні електромагнітного поля енергія зарядженої частинки зменшується з часом. Це зменшення можна розглядати як результат втрати випромінюючою системою енергії на виконання роботи проти особливої сили радіаційного тертя, якає наслідком сили реакції поля (сили віддачі, як при пострілі гармати у механіці).

Для знаходження цієї сили виходитимемо з закону збереження енергії, згідно з яким втрата зарядженою частинкою енергії за одиницю часу дорівнює інтенсивності випромінювання:

$$\frac{dE}{dt} = -I = -\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}. \quad (1)$$

З іншого боку, втрати енергії частинки йдуть на виконання роботи проти сили радіаційного тертя:

$$dE = -\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} dt = dA = \vec{F}_{pad} d\vec{r} = \vec{F}_{pad} \vec{v} dt,$$

звідки:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{pad} \vec{v} dt &= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2\ddot{p}}{3c^3} dt = \left[ \begin{array}{l} \vec{p} = e\vec{r} \\ \dot{\vec{p}} = e\dot{\vec{r}} = e\vec{v} \\ \ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}} \end{array} \right] = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2 dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \dot{\vec{v}} dt = \left[ \int u \dot{v} dt = uv - \int v \dot{u} dt \right] = \\ &= -\frac{2e^2}{3c^3} \left( \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \dot{\vec{v}} dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Припустимо, що  $\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ . Це має місце у багатьох випадках, зокрема:

- 1) при періодичному русі, коли  $T = t_2 - t_1$ ;
- 2) якщо прискорення перпендикулярне швидкості ( $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$ );
- 3) при скінченному часі прискорення:  $\dot{\vec{v}}(t_1) = \dot{\vec{v}}(t_2) = 0$ .

В усіх вказаних випадках, як випливає з (2), інтегральний баланс енергій буде виконуватись, якщо

$$\vec{F}_{рад} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} 2\ddot{\vec{v}}. \quad (3)$$

Отже, сила радіаційного тертя виявляється пропорційною не прискоренню, а похідній від прискорення по часу  $\ddot{\vec{v}}$ .

Знайдемо межі застосування формули (3). Прискорений рух частинки відбувається під дією деякої зовнішньої сили  $F_0$ , яка визначається за II законом Ньютона.

$$\vec{F}_0 = m\dot{\vec{v}}. \quad (4)$$

Виконані розрахунки  $F_{рад}$  справедливі в припущенні, що  $F_{рад}$  набагато менше  $F_0$ . Припустимо, що рух є періодичним:  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$ ,  $\dot{\vec{v}} = \vec{v}_0 i\omega e^{i\omega t}$ ,  $\ddot{\vec{v}} = -\vec{v}_0 \omega^2 e^{i\omega t}$ , тому умова малості сил радіаційного тертя порівняно з діючою на заряд зовнішньою силою є, по-перше,

$$\frac{|\vec{F}_{рад}|}{|\vec{F}_0|} = \frac{\frac{2e^2}{3c^3} v_0 \omega^2}{m v_0 \omega} = \frac{2e^2 \omega}{3mc^3} \ll 1, \quad (5)$$

або, якщо ввести довжину хвилі згідно формули  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , то

$$\frac{|\vec{F}_{рад}|}{|\vec{F}_0|} = \frac{4\pi^2 c}{3mc^3 \lambda} = \frac{4\pi e^2}{3mc^2 \lambda} \ll 1, \quad \lambda \gg \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{4\pi}{3} R_0, \quad (6)$$

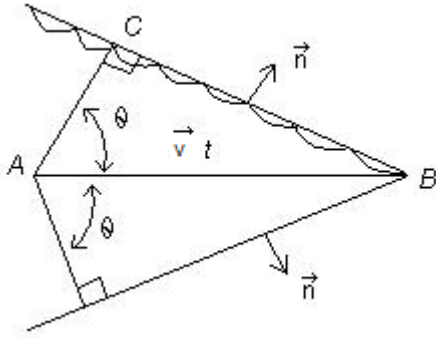
де  $R_0$  – класичний радіус зарядженої частинки. Отже, формула (3) для  $F_{рад}$  придатна лише тоді, коли довжина випромінюваної зарядом хвилі значно більша за класичний радіус заряду, який і тут виявляється тією межею, за якою класична електродинаміка вступає у протиріччя із собою.

Відмітимо, що формула (1), застосована до руху окремої частинки, дає інтенсивність випромінювання частинки: :

$$I = \frac{2\ddot{\vec{p}}^2}{3c^3} = [\ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}}] = \frac{2e^2 \ddot{\vec{r}}^2}{3c^3}. \quad (7)$$

Звідси випливає, що заряджена частинка випромінює електромагнітні хвилі лише тоді, коли її прискорення відмінне від нуля. Навпаки, частинка, яка рухається рівномірно і прямолінійно, не буде випромінювати електромагнітні хвилі. Ці висновки привели до відомих в теорії фізики проблем в планетарній моделі атома Резерфорда, тому що електрон, який рухається в атомі по коловій орбіті, має відмінне від нуля доцентрове прискорення і мусив би неперервно випромінювати електромагнітні хвилі, втрачаючи при цьому енергію і падаючи на ядро. В той же час спостереження показує стабільність атомів. Розв'язання цього протиріччя врешті привело до необхідності застосування в мікросвіті квантових законів.

### §36. Ефект Вавілова-Черенкова



Вище було показано, що заряджена частинка при рівномірному русі не випромінює електромагнітні хвилі. Проте існує явище, коли частинка, що рухається без прискорення, випромінює ЕМХ у видимій частині спектру. Це явище відкрив П.А.Черенков у лабораторії С.І.Вавілова.

П.Черенков встановив, що при опромінюванні  $\gamma$ -променями чистих рідин у них виникає свічення у видимій області спектру. С.І.Вавілов вказав, що це свічення викликане не самими  $\gamma$ -променями, а електронами, які виникають при розсіянні  $\gamma$ -променів. Природу цього випромінювання, яке було назване випромінюванням Вавілова-Черенкова, теоретично з'ясували радянські фізики І.Є.Тамм і І.М.Франк. Вони показали, що свічення викликають лише ті електрони, які мають швидкість більшу від швидкості світла в даному середовищі  $v > c_1 = \frac{c}{n}$ , де  $n$  - показник заломлення середовища.

Важливою особливістю випромінювання Вавілова-Черенкова є його напрямленість вперед по конусу (див. мал.), нормаль до поверхні якого утворює з напрямом руху електрона кут, що визначається формулою  $\cos \theta = \frac{c}{vn}$ , де  $v$  - швидкість руху електрона ( $v > c/n$ ).

Пояснення цього явища полягає в тому, що у точках середовища на шляху руху електрона збуджується ЕМП, яке поширюється з швидкістю  $c/n$ . В оточуючому просторі поле, збуджене електроном, існуватиме внаслідок інтерференції хвиль, що поширюються з точок траєкторії електрона. Це поле відмінне від 0 лише у випадку, коли швидкість електрона буде більша за  $c/n$ .

Нехай електрон летить з точки А в напрямі В і через час  $t$  пройде відстань  $AB = vt$ . З точки А за цей час сферична хвиля, викликана збудженням в: А середовищем, досягне сфери радіуса  $\frac{c}{n}t = AC$ . Легко бачити, що випромінювання проміжних точок одночасно досягне конуса, твірною якого є лінія СВ, а віссю – АВ. З малюнка видно, що

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c}{n}t}{vt} = \frac{c}{nv}. \quad (1).$$

Лінія СВ є лінією, на якій (внаслідок когерентності випромінювання окремих молекул) фаза коливань є однаковою. Отже, конус, твірною якого є СВ, являє собою поверхню сталої фази, тобто фронт хвилі, для якої АС збігається з напрямом поширення. Це означає, що напрям поширення випромінювання Вавілова-Черенкова визначається формулою (1). Випромінювання Вавілова-Черенкова знайшло важливе застосування при дослідженнях у фізиці ЕЧ та атомного ядра. На його застосуванні базується принцип дії черенковських лічильників, які дозволяють по куту  $\theta$  конуса

випромінювання заряджених частинок визначити їх  $v$  і  $E_{кин}$ . За відкриття цього явища і розробку його теорії П. Черенков, І. Тамм і І. Франк нагороджені Нобелівською премією. Умова (1) взагалі була давно відома в акустиці (конус Маха).

### §37. Розсіяння ЕМХ вільними зарядами

Якщо на систему зарядів падає ЕМХ, то під її дією заряди приходять в рух. Цей рух у свою чергу супроводжується випромінюванням у всі сторони; відбувається розсіяння початкової хвилі.

Розсіяння зручно характеризувати відношенням кількості енергії, випромінюваної розсіюючою системою в даному напрямку за одиницю часу, до густини потоку енергії падаючого на систему випромінювання. Це відношення має розмірність площі і називається ефективним перерізом (або просто перерізом) розсіяння.

Нехай  $dI$  є енергія, випромінювана в тілесний кут  $d\Omega$  (за 1 с) при падінні на неї хвилі з вектором Пойнтінга  $\vec{S}$ . Тоді переріз розсіяння (в тілесний кут  $d\Omega$ ) дорівнює

$$d\sigma = \frac{dI}{|\vec{S}|}. \quad (1)$$

(риска над буквою означає усереднення по часу). Інтеграл від  $d\sigma$  по всім напрямкам є повний переріз розсіяння.

Розглянемо розсіяння, яке виконує один нерухомий вільний заряд. Нехай на цей заряд падає плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля. Її електричне поле можна записати у вигляді  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$ .

Будемо вважати, що швидкість, яку набуває заряд під дією поля падаючої хвилі, мала порівняно з швидкістю світла. Тоді залишивши лише силу силою  $\frac{e}{e}[\vec{v} \times \vec{H}]$  з боку магнітного поля можна знехтувати, що силу, яка діє на заряд з боку електричного поля, дорівнює  $e\vec{E}$ . При великих довжинах хвиль можна знехтувати також впливом зміщення заряду при його коливаннях під дією поля. Тоді, якщо заряд здійснює коливання біля початку координат  $\left(\vec{k}\vec{r} \approx 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1\right)$ , то і можна тоді вважати, що на нього весь час діє те поле, яке є у початку координат, тобто, можна покласти  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha)$ .

Оскільки рівняння руху заряду є  $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$ , а його дипольний момент  $\vec{p} = e\vec{r}$ , то

$$\ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{E}. \quad (2)$$

Для обчислення розсіяного випромінювання скористаємося формулами (32) для дипольного випромінювання:

$$dI = \ddot{p}^2 \frac{\sin^2 \theta}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\vec{E} \times \vec{n}']^2 d\Omega, \quad (3)$$

де  $\vec{n}'$  - одиничний вектор в напрямку розсіяння. З іншого боку, вектор Пойнтінга падаючої хвилі дорівнює:  $S = \frac{c}{4\pi} E^2$ . Звідси знаходимо переріз розсіяння в тілесний кут  $d\Omega$ :

$$d\Omega = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta d\Omega = r_0^2 \sin^2 \Theta d\Omega \quad (4)$$

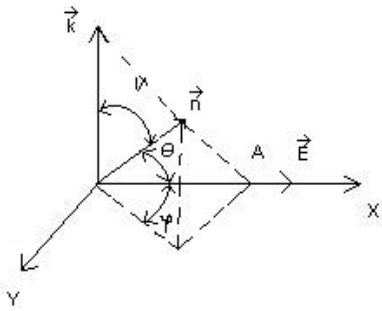
де  $\theta$  - кут між напрямком розсіяння і напрямком поля  $\vec{E}$  падаючої хвилі. Ми бачимо, що переріз розсіяння вільним зарядом не залежить від частоти. Тут  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  позначає класичний радіус заряду.

Визначимо повний переріз  $\sigma$ . Для цього виберемо напрямок  $\vec{E}$  в якості полярної вісі; тоді  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ ; інтегруючи по  $d\theta$  від 0 до  $\pi$  і по  $d\varphi$  від 0 до  $2\pi$ , знайдемо:

$$\sigma = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = r_0^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = \frac{8}{3} \pi \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (5)$$

Це є так звана формула Томсона.

Нарешті, обчислимо диференційний переріз  $d\sigma$  у випадку, коли падаюча хвиля не поляризована (природне світло). Тоді (4) треба усереднити по всім напрямкам вектора  $\vec{E}$  в площині, перпендикулярній до напрямку поширення падаючої хвилі (напрямку хвильового вектора  $\vec{k}$ ) по відношенню до напрямку розсіяння  $\vec{n}$ , тобто по всім значенням кута  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . З малюнка видно, що  $OA = \cos \theta = \sin \vartheta \cos \varphi$ . Тоді середнє значення:



$$\overline{\sin^2 \theta} = (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) = \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (6)$$

Отже, розшукуваний переріз розсіяння неполяризованої хвилі вільним зарядом дорівнює

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (7).$$

З (7) випливає, що ефективний переріз буде різним для різних кутів  $\vartheta$ ; він максимальний для  $\vartheta = 0$  та  $\pi$  і найменшим для  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

Експериментальна перевірка показала, що формула (7) описує розсіяння електромагнітних хвиль від довгих до коротких і не виконується для рентгенівських променів і  $\gamma$ -хвиль. Пояснюється це обмеженістю законів класичної електродинаміки. При взаємодії рентгенівського випромінювання з вільними електронами (для такого випромінювання електрони атома також можна вважати вільними) слід користуватись іншими, квантовими законами.

### §38. Немонохроматичні хвилі

Немонохроматичною називають хвилю, яку не можна представити як гармонічну функцію, що відповідає одній частоті. Але її можна представити як суперпозицію монохроматичних хвиль різних частот.

Розглянемо плоску немонахроматичну хвилю, що поширюється у вакуумі в додатному напрямку вісі  $x$ . Будь-яка величина, що характеризує таку хвилю ( $\vec{E}, \vec{H}$  і т. д.) описуються функцією  $f = f(t - \frac{x}{c})$ .

Зафіксувавши  $x$ , ми отримаємо функцію від  $t$ , що описує коливання поля в даній точці:  $f = f(t)$ .

Розглянемо випадок, коли хвиля, а також і коливання  $f(t)$ , існують протягом обмеженого проміжку часу (а не від  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ ). В цьому випадку  $f(t)$  можна розкласти в інтеграл Фур'є, що містить неперервний ряд частот:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

де  $C(\omega)$  - функція частоти  $\omega$ , яка визначається виразом

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega \xi} d\xi. \quad (2)$$

Очевидно, що  $C^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi = C(-\omega).$  (3)

Повна інтенсивність хвилі за час від  $-\infty$  до  $\infty$  визначається виразом

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) C(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) C^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Звідси випливає, що  $|C(\omega)|^2$  характеризує долю повної інтенсивності, що припадає на одиничний інтервал частот, а  $dI(\omega) = |C(\omega)|^2 d\omega$  - інтенсивність випромінювання в інтервалі частот  $[\omega, \omega + d\omega]$ .

Якщо хвиля періодична:  $f(t+T) = f(t)$ , то  $f(t)$  можна розкласти в ряд Фур'є, що містить частоти  $\omega_n = n\omega_0$ , кратні основній частоті  $\omega_0$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\omega_n t}, \text{ де } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\omega_n t} dt.$$

Можна також записати:  $f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{i\omega_n t}.$

Середня інтенсивність хвилі пропорційна середньому значенню  $\vec{E}^2$  або  $\vec{H}^2$ , тобто пропорційна

$$\begin{aligned}
\overline{[f(t)]^2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\omega_0 n t} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^* e^{im\omega_0 t} \right) dt = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(m-n)\omega_0 t} dt = \\
&= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \delta_{nm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2
\end{aligned}$$

Отже, середня інтенсивність немонохроматичної хвилі складається з інтенсивностей монохроматичних компонентів.

М.М. БРЕДОВ,  
В.В. РУМЯНЦЕВ,  
И.Н. ТОПТЫГИН

---

# КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Под редакцией  
И.Н. ТОПТЫГИНА

*Допущено Министерством  
высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей  
высших технических учебных заведений.*



Москва "Наука"  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
1985

22.31  
Б 87  
УДК 530.1

Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика: Учебное пособие/Под ред. И.Н.Топтыгина. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 400 с.

Настоящий курс электродинамики представляет собой один из разделов теоретической физики и предназначен для студентов вузов 2—3 годов обучения, прослушавших достаточно содержательные курсы общей физики и классической механики. Вместе с тем, благодаря соответствующему подбору материала и современному стилю изложения, книгой могут пользоваться для справок студенты старших курсов, инженеры и научные работники.

В книге содержится теория электромагнитных явлений в вакууме и в средах, а также специальная теория относительности. Изложение специальной теории относительности предшествует микроскопической электродинамике, которая строится как последовательно релятивистская теория. В электродинамике сред используются как микроскопический, так и макроскопический подходы к описанию явлений.

Для студентов физических факультетов университетов и других вузов. Может быть использована инженерами и научными работниками.

Библиогр. 104 назв. Табл. 2. Ил. 48.

Рецензенты:

кафедра квантовой теории и высоких энергий МГУ,  
докт. физ.-мат. наук В.И.Денисов, чл.-корр. АН СССР Л.П.Питаевский

1704000000 — 032  
Б ————— 108-84  
053 (02)-85

© Издательство "Наука".  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1985.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
Часть I	
МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ВАКУУМЕ	
Глава I. Специальная теория относительности и релятивистская кинематика . . . . .	12
§ 1. Принцип относительности и преобразования Лоренца . . . . .	12
1.1. Пространство и время в классической механике (12). 1.2. Принцип относительности Эйнштейна (16). 1.3. Преобразования Лоренца (18).	
§ 2. Некоторые следствия преобразований Лоренца . . . . .	21
2.1. Сокращение масштабов. Преобразование объема (21). 2.2. Относительность одновременности. Собственное время (21). 2.3. Релятивистское преобразование скорости (22). 2.4. Преобразование направлений. Аберрация света (23). 2.5. Видимая форма быстро движущихся тел (25).	
§ 3. Геометрический смысл преобразований Лоренца. Интервал и причинность . . . . .	26
3.1. Преобразование Лоренца как поворот в четырехмерном мире (26). 3.2. Три типа интервалов. Причинность (29).	
§ 4. Четырехмерные векторы и тензоры . . . . .	30
4.1. Определение вектора. Контра- и ковариантные компоненты (30). 4.2. Четырехмерные тензоры (33). 4.3. Дифференциальные операции (34). 4.4. Четырехмерные скорость и ускорение частицы (35).	
§ 5. Действие для свободной частицы. Энергия и импульс . . . . .	36
5.1. Принцип наименьшего действия для свободной частицы (36). 5.2. Энергия и импульс свободной частицы (38). 5.3. Связь между массой и энергией (39).	
§ 6. Кинематика релятивистских частиц . . . . .	41
6.1. Распад частиц (41). 6.2. Энергетический порог реакции (42). 6.3. Кинематика двухчастичных реакций (42). 6.4. Преобразование фазового объема и функций распределения (44).	
Глава II. Специальная теория относительности и электромагнитные явления . . . . .	46
§ 7. Взаимодействие между заряженными частицами и электромагнитное поле . . . . .	46
7.1. Взаимодействие в теории относительности. Электрический заряд и электромагнитное поле (46). 7.2. Действие для частицы, находящейся в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал (48).	
§ 8. Уравнение движения релятивистской частицы в электромагнитном поле. Напряженность поля . . . . .	48
8.1. Функция Лагранжа и уравнение движения (48). 8.2. Сила Лоренца. Напряженность электромагнитного поля (50). 8.3. Градиентное преобразование потенциалов (51). 8.4. Функция Гамильтона (52).	
§ 9. Уравнение движения в ковариантной форме. Тензор электромагнитного поля . . . . .	52
9.1. Вариация действия и уравнение движения (52). 9.2. Связь тензора поля с напряженностями $E, H$ (55).	
1*	3

§ 10. Преобразование напряженностей электромагнитного поля. Инварианты поля . . . . .	56
10.1. Преобразование напряженностей (56). 10.2. Инварианты поля (56).	
§ 11. Движения релятивистской частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Электрический дрейф . . . . .	57
11.1. Движение в однородном магнитном поле (57). 11.2. Электрический дрейф (59). 11.3. Гиперболическое движение (61).	
§ 12. Теорема Лармора . . . . .	63
<b>Г л а в а III. Уравнения электромагнитного поля . . . . .</b>	<b>64</b>
§ 13. Вывод уравнений Максвелла в ковариантной форме из принципа наименьшего действия . . . . .	64
13.1. Действие для системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля (64). 13.2. Четырехмерная плотность тока (67). 13.3. Уравнения Максвелла (70).	
§ 14. Трехмерная форма уравнений Максвелла и их связь с опытными законами электромагнетизма . . . . .	71
14.1. Уравнения Максвелла в трехмерной форме (71). 14.2. Интегральная форма уравнений Максвелла (73). 14.3. Системы единиц измерения электрических и магнитных величин (75).	
§ 15. Граничные условия для векторов электромагнитного поля . . . . .	77
15.1. Условия для нормальных компонент (77). 15.2. Условия для тангенциальных компонент (78).	
§ 16. Тензор энергии — импульса электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга . . . . .	79
16.1. Тензор энергии — импульса релятивистских частиц (79). 16.2. Тензор энергии — импульса электромагнитного поля (81). 16.3. Энергия поля. Вектор Пойнтинга. Максвелловский тензор напряжений (83).	
§ 17. Единственность решения уравнений Максвелла . . . . .	85
§ 18. Уравнения для электромагнитных потенциалов . . . . .	87
<b>Г л а в а IV. Постоянное электрическое поле в вакууме . . . . .</b>	<b>88</b>
§ 19. Общие свойства постоянного электрического поля . . . . .	88
§ 20. Интегрирование уравнения Пуассона . . . . .	91
20.1. Интегральная форма уравнения Пуассона (91). 20.2. Единственность решения электростатической задачи (93). 20.3. Решение граничной задачи с помощью функций Грина (93).	
§ 21. Потенциал на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный и квадрупольный моменты . . . . .	95
§ 22. Энергия и силы взаимодействия в электростатическом поле . . . . .	98
22.1. Энергия электростатического поля (98). 22.2. Система зарядов во внешнем поле (101).	
§ 23. Потенциал двойного слоя . . . . .	103
<b>Г л а в а V. Постоянное магнитное поле в вакууме . . . . .</b>	<b>105</b>
§ 24. Общие свойства постоянного магнитного поля в вакууме . . . . .	105
24.1. Основные уравнения (105). 24.2. Закон Био — Савара (107). 24.3. Псевдоскалярный потенциал магнитного поля и магнитные листки (108). 24.4. Формула Ампера (109).	
§ 25. Магнитный момент . . . . .	110
§ 26. Энергия и силы в постоянном магнитном поле . . . . .	113
26.1. Магнитная энергия стационарных токов (113). 26.2. Энергия системы контуров с током. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции (113). 26.3. Система токов во внешнем поле (115). 26.4. Силы в постоянном магнитном поле (115).	
<b>Г л а в а VI. Электромагнитные волны . . . . .</b>	<b>117</b>
§ 27. Волновые уравнения . . . . .	117
27.1. Уравнения электромагнитного поля в отсутствие зарядов (117). 27.2. Пример решения волнового уравнения — плоские волны (118).	
§ 28. Плоские монохроматические волны . . . . .	120
28.1. Амплитуда, частота и волновой вектор. Фаза плоской монохроматической волны. (120). 28.2. Преобразование частоты и волнового вектора. Эффект Доплера (122). 28.3. Поляризация плоской волны (123).	

§ 29. Немонохроматические волны. Спектральное разложение . . . . .	124
§ 30. Когерентность и интерференция . . . . .	128
30.1. Описание некогерентного поля излучения с помощью корреляционного тензора. Время и длина когерентности (128). 30.2. Влияние временной и пространственной когерентности на интерференцию волн (131). 30.3. Частичная поляризация электромагнитных волн (136).	
§ 31. Гамильтонова форма уравнений электромагнитного поля . . . . .	139
31.1. Собственные типы колебаний (моды) электромагнитного поля (139). 31.2. Число собственных колебаний (141). 31.3. Гамильтониан и гамильтонова форма уравнений поля (142).	
<b>Глава VII. Поля движущихся зарядов . . . . .</b>	<b>144</b>
§ 32. Запаздывающие потенциалы . . . . .	144
32.1. Функции Грина волнового уравнения (144). 32.2. Выбор запаздывающих потенциалов (148). 32.3. Спектральное разложение запаздывающих потенциалов (149).	
§ 33. Принцип Гюйгенса и формула Кирхгофа . . . . .	150
33.1. Вывод формулы Кирхгофа (150). 33.2. Геометрическая оптика. Дифракция Френеля (153). 33.3. Дифракция Фраунгофера (155).	
§ 34. Электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольным образом . . . . .	158
34.1. Потенциалы Лиенара – Вихерта (158). 34.2. Напряженность поля (159). 34.3. Спектральное разложение потенциалов Лиенара – Вихерта (160).	
<b>Глава VIII. Излучение и рассеяние электромагнитных волн . . . . .</b>	<b>161</b>
§ 35. Излучение релятивистской заряженной частицы . . . . .	161
35.1. Угловое распределение излучения (161). 35.2. Потеря энергии и импульса заряженной частицей (163). 35.3. Спектральное распределение излучения (166).	
§ 36. Излучение нерелятивистской системы заряженных частиц . . . . .	169
36.1. Электрическое дипольное излучение (169). 36.2. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение (171). 36.3. Поле на близких расстояниях (173). 36.4. Примеры излучения простейших систем (174).	
§ 37. Излучение макроскопических тел. Антенны . . . . .	175
37.1. Вектор Герца (175). 37.2. Излучение антенны. Диаграмма направленности (176). 37.3. Принцип взаимности (178).	
§ 38. Реакция излучения . . . . .	180
38.1. Взаимодействие заряженной частицы с собственным электромагнитным полем (180). 38.2. Вычисление силы радиационного торможения из закона сохранения энергии (181).	
§ 39. Излучение и рассеяние электромагнитных волн осциллятором . . . . .	183
39.1. Излучение осциллятора. Естественная ширина спектральных линий (183). 39.2. Рассеяние электромагнитных волн осциллятором (184).	
§ 40. Рассеяние электромагнитных волн свободными частицами . . . . .	187
40.1. Формула Томсона (187). 40.2. Когерентное и некогерентное рассеяние (187).	

## Часть II

### ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ И НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД

<b>Глава I. Уравнения электромагнитного поля в поляризуемых и намагничиваемых средах . . . . .</b>	<b>190</b>
§ 1. Макроскопический и микроскопический подходы к описанию электромагнитных явлений в средах . . . . .	190
1.1. Микроскопические уравнения поля. Сторонние и наведенные заряды и токи (190). 1.2. Усреднение уравнений Максвелла . . . . .	
§ 2. Уравнения электромагнитного поля в средах . . . . .	195
2.1. Связь наведенных зарядов и токов с удельными дипольными моментами. Уравнения Максвелла в средах (195). 2.2. Другая форма уравнений поля в средах. Вектор обобщенной электрической индукции (200).	

§ 3. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости. Временная дисперсия . . . . .	201
3.1. Функция отклика и диэлектрическая проницаемость (201).	
3.2. Свойства диэлектрической проницаемости при действительных частотах (203).	
3.3. Свойства диэлектрической проницаемости при комплексных значениях частоты (206).	
§ 4. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости. Пространственная дисперсия . . . . .	209
§ 5. Соотношения Крамерса — Кронига . . . . .	212
§ 6. Дебаевское экранирование . . . . .	216
6.1. Электростатический потенциал точечного заряда в среде (216).	
6.2. Дебаевский радиус (219).	
§ 7. Диссипация энергии поля в диспергирующих средах . . . . .	222
§ 8. Энергия электромагнитного поля и поток энергии в диспергирующей среде . . . . .	225
§ 9. Уравнения электродинамики в движущихся средах . . . . .	232
9.1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения (232).	
9.2. Граничные условия (235).	
9.3. Уравнения Максвелла с обобщенным вектором индукции (237).	
§ 10. Силы, действующие на элементы среды в электромагнитном поле . . . . .	238
10.1. Силы, действующие на диэлектрик, помещенный в постоянное электрическое поле (238).	
10.2. Силы, действующие на магнетик, помещенный в постоянное магнитное поле (241).	
10.3. Силы в переменном электромагнитном поле (242).	
§ 11. Среднее и эффективное поля в средах . . . . .	244
<b>Г л а в а II. Постоянное электрическое поле в средах . . . . .</b>	<b>249</b>
§ 12. Электрическое поле в окрестности проводников . . . . .	249
§ 13. Электрическое поле в непроводящих средах . . . . .	253
§ 14. Термодинамические соотношения для диэлектриков во внешнем электрическом поле . . . . .	255
14.1. Внутренняя энергия и свободная энергия диэлектрика (255).	
14.2. Изменение внутренней энергии диэлектрика при изотермическом включении поля (257).	
14.3. Симметрия тензора диэлектрической проницаемости (259).	
§ 15. Силы, действующие на жидкие диэлектрики в электрическом поле. Электрострикция . . . . .	260
§ 16. Статическая диэлектрическая проницаемость . . . . .	261
16.1. Связь между статической диэлектрической проницаемостью и флуктуациями вектора поляризации среды в отсутствие внешнего электрического поля (261).	
16.2. Диэлектрическая проницаемость среды, состоящей из полярных молекул (265).	
16.3. Диэлектрическая проницаемость среды, состоящей из неполярных молекул (265).	
§ 17. Транспортные явления в среде, помещенной в постоянное электрическое поле . . . . .	267
17.1. Электрический ток и поток тепла в среде в присутствии внешнего электрического поля (267).	
17.2. Эффект Пельтье (269).	
17.3. Эффект Томсона (269).	
17.4. Термоэлектродвижущая сила (269).	
17.5. Соотношения Томсона (270).	
§ 18. Оценка проводимости в приближении времени релаксации . . . . .	270
§ 19. Пьезоэлектрики и сегнетоэлектрики . . . . .	273
19.1. Пьезоэлектрический эффект (273).	
19.2. Сегнетоэлектрики (275).	
<b>Г л а в а III. Постоянное магнитное поле в средах . . . . .</b>	<b>279</b>
§ 20. Классификация магнетиков . . . . .	279
§ 21. Постоянное магнитное поле в среде, обусловленное токами . . . . .	280
§ 22. Термодинамические соотношения для магнетиков в магнитном поле . . . . .	281
§ 23. Адиабатическое размагничивание . . . . .	284
§ 24. Теорема Бора — Ван Лёвен . . . . .	286
§ 25. Транспортные эффекты в магнитном поле . . . . .	289
§ 26. Ферромагнетизм . . . . .	290
§ 27. Магнитные свойства сверхпроводников . . . . .	292
<b>Г л а в а IV. Электромагнитные волны в средах . . . . .</b>	<b>295</b>
§ 28. Плоские электромагнитные волны в изотропных средах. Продольные и поперечные волны . . . . .	295

§ 29.	Электромагнитные волны в анизотропных средах . . . . .	300
§ 30.	Распространение волн в неоднородной среде. Поверхностные волны. Скин-эффект . . . . .	302
	30.1. Поверхностные волны (302). 30.2. Нормальный скин-эффект (306). 30.3. Аномальный скин-эффект (309). 30.4. Скин-эффект при высоких частотах (314).	
§ 31.	Электромагнитные волны в волноводах . . . . .	316
§ 32.	Отражение и преломление объемных поперечных электромагнитных волн на границе раздела сред . . . . .	319
§ 33.	Диэлектрическая проницаемость плазмы и плазмоподобных сред при конечных частотах . . . . .	321
	33.1. Вычисление функции $\epsilon(k, \omega)$ электронного газа при конечных $k$ и $\omega$ (321). 33.2. Продольные колебания бесстолкновительного невырожденного электронного газа (323). 33.3. Поперечные колебания электронного невырожденного бесстолкновительного газа (326). 33.4. Ионно-звуковые колебания (326). 33.5. Гидродинамическое описание волн в однородной изотропной плазме (328).	
§ 34.	Магнитогидродинамическое описание электромагнитных волн в плазме в магнитном поле . . . . .	331
	34.1. Система уравнений магнитной гидродинамики (331). 34.2. Магнитогидродинамические волны (334).	
§ 35.	Прохождение электромагнитных волн через гиротропные среды . . . . .	336
§ 36.	Распространение жесткого излучения в кристаллах . . . . .	339
	36.1. Фундаментальные уравнения теории дифракции рентгеновских лучей в кристаллах (339). 36.2. Кинематическое и динамическое приближения в теории дифракции рентгеновских лучей (342). 36.3. Сечение дифракционного рассеяния рентгеновских лучей на кристаллах конечного объема (343). 36.4. Температурные эффекты при дифракции рентгеновских лучей (347).	
<b>Глава V. Излучение электромагнитных волн быстрыми частицами в средах</b> . . . . .		350
§ 37.	Излучение быстрых частиц в пространственно-однородной среде . . . . .	350
	37.1. Описание потерь энергии быстрых нерелятивистских частиц в веществе в рамках диэлектрического формализма (350). 37.2. Торможение быстрой частицы за счет испускания объемных плазмонов (352). 37.3. Излучение Вавилова — Черенкова (354).	
§ 38.	Генерация электромагнитных волн при движении быстрой частицы в пространственно-неоднородной среде. Переходное излучение. Возбуждение поверхностных плазмонов . . . . .	355
§ 39.	Излучение гамма- и рентгеновских лучей при движении быстрых заряженных частиц в кристаллах . . . . .	360
<b>Глава VI. Нелинейные электромагнитные процессы в средах</b> . . . . .		362
§ 40.	Нелинейная поляризация . . . . .	362
	40.1. Общее феноменологическое выражение для нелинейной поляризуемости (362). 40.2. Квадратичные по полю эффекты нелинейности (364). 40.3. Кубичные по полю эффекты нелинейности (365).	
§ 41.	Классические модели, обеспечивающие существование нелинейной восприимчивости . . . . .	366
	41.1. Нелинейная восприимчивость газа свободных электронов (366). 41.2. Нелинейность, связанная с ангармонизмом колебаний (367).	
<b>Дополнения</b> . . . . .		369
Д1.	Элементы тензорной алгебры и анализа в трехмерном евклидовом пространстве . . . . .	369
	Д1.1. Определение тензора (369). Д1.2. Операции над тензорами (370). Д1.3. Симметрия тензоров (371). Д1.4. Инвариантные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$ и $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ (372). Д1.5. Приведение симметричного тензора II ранга к диагональному виду (373). Д1.6. Преобразование тензоров при инверсии системы координат. Псевдотензоры (374).	
Д11.	Дополнительные сведения о тензорах в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве . . . . .	375
	Д11.1. Связь между четырехмерными и трехмерными тензорами (375). Д11.2. Теорема Остроградского — Гаусса в 4-пространстве (376).	

ДIII. Вариационный принцип для непрерывных систем . . . . .	377
ДIII.1. Колебания упругой среды как предел колебаний дискретных точечных масс (377). ДIII.2. Лагранжева форма уравнений движения непрерывной среды (379).	
ДIV. Дельта-функция Дирака . . . . .	381
ДIV.1. Определение и общие свойства (381). ДIV.2. Некоторые представления $\delta$ -функции (383). ДIV.3. Представление $\delta$ -функции че- рез контурные интегралы в комплексной плоскости (384).	
ДV. Перевод электрических и магнитных величин из системы СИ в гауссову и обратно . . . . .	385
ДVI. О тензоре энергии — импульса . . . . .	387
ДVI.1. Симметрия тензора энергии — импульса (387). ДVI.2. Об одноз- начности определения тензора энергии — импульса поля (388).	
ДVII. Сферические функции Лежандра . . . . .	389
ДVIII. Постоянное электрическое поле внутри сферической полости в диэлек- трике . . . . .	391
ДIX. Реактивное поле в диэлектрике . . . . .	392
Рекомендуемая литература . . . . .	393
Предметный указатель . . . . .	396

# Часть I

## МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ВАКУУМЕ

---

### Глава I

#### СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

Специальная теория относительности (СТО), на которой в настоящей книге базируется изложение релятивистской механики и электродинамики, была создана в начале текущего столетия трудами А. Эйнштейна и других выдающихся физиков и математиков\*) (Х. Лоренц, А. Пуанкаре, Г. Минковский, М. Планк и др.). Ее основой, в свою очередь, явились представления о свойствах пространства, времени и движения, выработанные классической механикой, но углубленные, критически проанализированные и в некоторых важных пунктах измененные и дополненные Эйнштейном в связи с новыми опытными данными, полученными к тому времени в физике при изучении электромагнитных явлений, особенно в движущихся средах. Поэтому мы начнем этот параграф, посвященный основам СТО, с краткого резюме некоторых понятий, известных из классической механики и необходимых для дальнейшего изложения. Предполагается, что эти понятия в основном известны читателю и требуют только некоторого напоминания.

#### § 1. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

**1.1. Пространство и время в классической механике.** Из классической (ньютоновской) механики хорошо известно понятие инерциальной (галилеевской) системы отсчета — это такая система, в которой материальная точка, не взаимодействующая с какими-либо другими телами, движется равномерно и прямолинейно или покоится. Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, так как любая система, движущаяся относительно данной инерциальной системы с постоянной скоростью без вращения, также является инерциальной.

Координаты и время в различных инерциальных системах выражаются друг через друга посредством простых линейных соотношений. Пусть система  $S'$  движется относительно системы  $S$  со скоростью  $V = \text{const}$ , направленной вдоль оси  $x$ , причем в момент времени  $t = 0$  начала координатных систем совпадали, а соответствующие оси параллельны (рис. 1.1). Тогда координаты  $x', y', z'$  и время  $t'$  в системе  $S'$  связаны с  $x, y, z, t$ , определенными в системе  $S$ , соотношениями

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (1.1)$$

которые называются *преобразованиями Галилея*.

\*) Оригинальные работы основоположников СТО можно найти в сборнике [77].

Обратим внимание на то, что время не преобразуется — во всех инерциальных системах время одно и то же, оно имеет абсолютный характер. Это свойство времени в классической механике очень четко выразил ее основоположник И. Ньютон<sup>\*)</sup>: "Абсолютное истинное математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью."

Из преобразований Галилея (1.1) вытекает закон сложения скоростей в классической механике: если  $v$  и  $v'$  — скорости материальной точки относительно систем  $S$  и  $S'$ , то

$$v' = v - V. \quad (1.2)$$

Скорости складываются по закону сложения векторов (правило параллелограмма) и ничем не ограничены по абсолютной величине.

Инерциальные системы отсчета отличаются от неинерциальных систем тем, что все законы физики формулируются в них наиболее просто. Физические явления в инерциальных системах также выглядят проще, чем в неинерциальных: на них не накладывается неравномерное движение самой системы отсчета.

В отсутствие каких-либо материальных тел и полей пространство, рассматриваемое относительно инерциальной системы, однородно и изотропно, а время — однородно. Под однородностью пространства понимается равноправие всех его частей: любая механическая система, помещенная в произвольную область свободного пространства, будет двигаться точно так же, как и в любом другом месте. Иными словами, поведение одинаковых механических систем при одинаковых начальных условиях — одно и то же в разных частях однородного пространства. По их поведению нельзя отличить одну область пространства от другой.

Изотропия пространства означает равноправие всех направлений в нем: поведение механической системы не зависит от ее ориентации. Наконец, однородность времени означает, что все его моменты равноправны: движение механической системы будет происходить одинаково независимо от того, в какой момент времени она была "запущена", т.е. когда были фиксированы начальные условия движения. Разумеется, начальные условия при разных "запусках" должны быть одними и теми же.

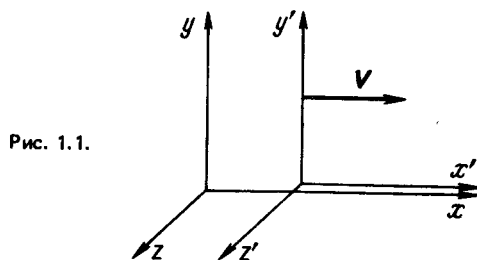


Рис. 1.1.

Говоря об одинаковости протекания механических явлений в различных ситуациях, следующей из свойств симметрии пространства и времени, мы пока все время имели в виду либо одну определенную инерциальную систему отсчета, либо системы, которые неподвижны друг относительно друга и лишь сдвинуты на некоторый вектор или повернуты на некоторый угол. Но, как уже говорилось, существует бесконечное множество инерциальных

<sup>\*)</sup> И. Ньютон. Математические начала натуральной философии. — Собр. трудов акад. А.Н. Крылова, т. VII. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

систем, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями. В связи с этим возникает важный вопрос — как будут протекать механические явления в движущихся инерциальных системах? Можно ли по наблюдению движения каких-либо тел узнать, движется ли система отсчета, в которой наблюдается то или иное механическое явление, или она покоится?

Ответ на эти вопросы дает принцип относительности классической механики, который является обобщением опытных данных о свойствах механического движения:

*механические явления при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах.*

Это означает, что все инерциальные системы равноправны, ни одна из них не является чем-либо выделенной, привилегированной. Движение можно определить только по отношению к какому-либо телу или системе осей, связанных с телом, оно носит относительный характер, не существует "абсолютного" движения.

Следует подчеркнуть важность оговорки об одинаковости начальных условий. Если начальные условия движения тел в разных инерциальных системах различны, то движение тел будет происходить по-разному. Например, мяч, подброшенный вертикально вверх в вагоне поезда, будет двигаться по прямой в системе, связанной с вагоном, но его траектория будет параболой в системе, связанной с Землей. Различие в движениях связано с неодинаковостью начальных условий в двух системах — поезда и Земли. Если не требовать тождественности начальных условий, то можно утверждать лишь об одинаковости законов механики (т.е. дифференциальных уравнений движения), но не самих движений (т.е. координат, скоростей, траекторий тел) в разных инерциальных системах.

Математическим выражением принципа относительности классической механики является инвариантность ее уравнений движения относительно преобразований Галилея (1.1). Запишем уравнение движения частицы с массой  $m$  в системе  $S$ :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F, \quad (1.3)$$

где  $F$  — сила, действующая на эту частицу, а  $r$  — радиус-вектор частицы. Из формул (1.1) следует:  $d^2 r/dt^2 = d^2 r'/dt'^2$  — ускорение частицы в двух инерциальных системах одно и то же. Кроме того, в классической механике масса — инвариантная величина, одинаковая во всех системах отсчета:  $m' = m$ . Таким же свойством обладает сила:  $F' = F$ .

Инвариантность силы — утверждение менее очевидное, поэтому остановимся на нем подробнее. В инерциальных системах отсчета существуют только силы взаимодействия между телами, которые могут зависеть от относительного положения тел и от их относительной скорости. Пусть, для определенности, рассматриваемая частица взаимодействует с некоторым телом малых размеров. Если обозначить его радиус-вектор в системе  $S$  через  $R$ , а скорость — через  $u$ , то сила  $F$  будет зависеть от разностей  $r - R$ ,  $v - u$ :

$$F = F(r - R, v - u). \quad (1.4)$$

Но при переходе в другую инерциальную систему, согласно преобразованиям Галилея (1.1) и закону сложения скоростей (1.2),

$$r - R = r' - R', \quad v - u = v' - u',$$

т.е. расстояния между телами и их относительные скорости не изменяются. Существенно, что согласно опытным данным, в области применимости

классической механики и само взаимодействие между телами не зависит от того, в какой инерциальной системе оно рассматривается. Поэтому

$$F'(r' - R', v' - u') = F(r - R, v - u) \quad (1.5)$$

— как сами функции  $F$  (силы), так и их аргументы одинаковы.

Таким образом, при переходе в систему  $S'$  уравнение (1.3) сохраняет свой вид,

$$m' \frac{d^2 r'}{dt'^2} = F', \quad (1.6)$$

причем масса, сила и ускорение в обеих системах одинаковы, меняются только обозначения этих величин. Это означает, что уравнение движения (1.3) остается инвариантным (неизменным) относительно преобразований Галилея. Но тогда и решения уравнений (1.3) и (1.6) при одинаковых начальных условиях будут тождественны, в соответствии с содержанием принципа относительности.

Обратим внимание на одно важное свойство взаимодействия тел в классической механике, которое отражено в формулах (1.4) — (1.5). Сила зависит от координат (и, возможно, скоростей) взаимодействующих тел, причем координаты и скорости берутся в один и тот же момент времени. Это означает, что если положение одного из тел изменилось, второе тело почувствует это изменение немедленно. Взаимодействие передается мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью.

Содержащееся в уравнениях классической механики предположение о бесконечной скорости распространения взаимодействий (иногда говорят о распространении "сигналов") находится в полном соответствии с абсолютным характером времени. Действительно, пусть в системе  $S$  имеется устройство, которое испускает изотропно во все стороны "сигнал", распространяющийся с бесконечной скоростью. Соответствующие приборы, находящиеся в любых точках пространства и в любых инерциальных системах, движущихся относительно  $S$  с конечными скоростями, зафиксируют этот сигнал в тот же момент, в который он был испущен. Тем самым такие сигналы могут служить "метками времени", с помощью которых во всех инерциальных системах будет отсчитываться одно и то же, т.е. абсолютное, время  $t' = t'' = \dots = t$ .

Аналогичным образом обстоит дело с определением одновременности: если два сигнала испущены одновременно в двух разных точках в системе  $S$ , то они будут одновременно зафиксированы соответствующим прибором в системе  $S'$ . События, одновременные в одной инерциальной системе, одновременны и в любой другой системе. В классической физике одновременность абсолютна.

В заключение перечислим еще раз основные свойства пространства и времени в классической физике.

1. Существуют инерциальные системы отсчета, относительно которых свободная частица (материальная точка) движется равномерно и прямолинейно (покой — частный случай такого движения).

2. В любой инерциальной системе отсчета свободное от материи пространство однородно и изотропно, а время однородно.

3. Любое механическое явление при одинаковых начальных условиях протекает одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета (принцип относительности).

4. Взаимодействия между материальными телами и сигналы, служащие для передачи информации, могут распространяться с бесконечной скоростью.

5. Координаты и время в двух инерциальных системах связаны преобразованием Галилея (1.1). Время одинаково во всех инерциальных системах, т.е. абсолютно. Одновременность тоже абсолютна.

1.2. Принцип относительности Эйнштейна. Экспериментальные и теоретические исследования электромагнитных явлений, особенно в движущихся телах, потребовали пересмотра и уточнения основных представлений о свойствах пространства, времени и движения. Мы не будем обсуждать здесь экспериментальных основ СТО — предполагается, что читатель знаком с ними по курсу общей физики \*). Мы изложим основные свойства пространства, времени и движения в их современном понимании; при этом, в целях преемственности, мы примем за основу свойства, сформулированные выше.

1. Постулат о существовании инерциальных систем и их определение сохраняют полную силу и в СТО.

2. Пределы применимости утверждения о свойствах симметрии пространства и времени (однородность и изотропия свободного пространства, однородность времени) расширяются и распространяются не только на механические, но на все физические явления (электромагнитные, тепловые, процессы взаимодействия элементарных частиц и т.д.). Это означает, например, что следствием однородности пространства будет одинаковое протекание любого физического явления (колебание маятника, излучение радиоволн антенной, распад элементарной частицы и т.д.) в любом месте свободного пространства. Аналогичным образом обобщаются понятия изотропии пространства и однородности времени.

3. Принцип относительности классической механики обобщается на все без исключения физические явления и становится одним из самых общих законов природы. В этом обобщенном смысле его можно сформулировать следующим образом:

Любое явление природы протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчета, если начальные условия одни и те же. (I)

4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, не могут распространяться с бесконечной скоростью. Существует максимальная (предельная) скорость распространения взаимодействий. Многочисленные экспериментальные данные указывают на то, что эта предельная скорость совпадает со скоростью света в вакууме\*\*).

Это утверждение обычно называют постулатом о постоянстве скорости света в вакууме. Его можно сформулировать в другой, эквивалентной форме:

Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета, она не зависит от движения источника или приемника света. (II)

Нетрудно понять, что приведенные формулировки эквивалентны. Если бы предельная скорость распространения сигналов и взаимодействий изме-

\*) Прекрасное изложение экспериментов, лежащих в основе СТО, и становления ее основных идей в историческом плане читатель найдет в книге Л.И. Мандельштама [2].

\*\*) При описании различных физических явлений могут быть использованы два рода величин: координатные и физические. Поскольку первые из них в большой мере отражают выбор координатно-временной сетки и требуют знания специальных правил обращения с ними, то они в этой книге не используются. Все утверждения, содержащиеся здесь и далее в тексте, относятся только лишь к физическим величинам. С использованием координатных величин и их свойствами можно познакомиться по книге А.А. Логюнова [63].

нялась при переходе из одной системы отсчета в другую, то она утратила бы свой предельный характер: при переходе в другую инерциальную систему можно было бы как уменьшить, так и увеличить эту скорость. Следовательно, постулируя существование предельной скорости, мы обязательно должны считать ее одинаковой во всех инерциальных системах отсчета, т.е. инвариантной величиной. Тот факт, что именно скорость света (т.е. скорость распространения электромагнитных волн) совпадает с предельной скоростью передачи взаимодействий, не играет решающей роли для СТО, но является очень важным свойством самого электромагнитного поля.

Совокупность постулатов (I) и (II) называется *принципом относительности Эйнштейна* \*). Нетрудно видеть, что эти постулаты противоречат классической механике. Законы классической механики, как мы видели, будут одинаковы во всех инерциальных системах, если координаты и время преобразуются по формулам Галилея (1.1). Но из последних вытекает закон сложения скоростей (1.2). Если скорость света в системе  $S$  равна  $c$ , то в другой инерциальной системе, согласно (1.2), она станет равной

$$v' = c - V. \quad (1.7)$$

Скорость  $v'$  по модулю может быть как больше, так и меньше  $c$ , в зависимости от угла между  $c$  и  $V$ , что и доказывает несовместимость постулата о постоянстве скорости света с преобразованиями Галилея, а тем самым — и с законами классической механики; поэтому, если мы хотим принять приведенные выше общие положения (1) — (4), то должны отказаться от преобразований Галилея и абсолютности времени, т.е. от свойства 5 (см. п. 1.1).

Эйнштейн глубоко проанализировал свойства времени и понятие одновременности. Он показал, что классическая механика приписывала времени такие свойства, которые, вообще говоря, не согласуются с опытом и могли выглядеть как приблизительно правильные только при малых скоростях движения. Одним из центральных пунктов эйнштейновского анализа понятия времени является синхронизация часов, т.е. установление единого времени в пределах одной инерциальной системы отсчета. Если двое часов находятся в одной точке пространства, то их синхронизация производится непосредственно — стрелки ставятся в одно и то же положение (мы будем предполагать, что все часы одинаковы и идеально точны). Но как произвести синхронизацию часов, находящихся в разных точках пространства,  $A$  и  $B$ ?

Эйнштейн предложил производить синхронизацию часов с помощью световых сигналов, которые распространяются, как мы видим, с максимальной возможной в природе скоростью передачи сигналов и взаимодействий. Испустим из точки  $A$  в момент  $t_1$  короткий световой сигнал, который отразится от некоторого зеркала в точке  $B$  и вернется в точку  $A$  в момент  $t_2$ . Времена распространения сигнала туда и обратно конечны (скорость сигнала конечна!) и одинаковы (изотропия пространства!). Поэтому часы в точке  $B$  будут синхронизованы с часами в точке  $A$ , если их показания  $t_B$  в момент прихода сигнала будут связаны с показаниями часов  $A$  в моменты испускания ( $t_1$ ) и возвращения ( $t_2$ ) сигнала соотношениями

$$t_1 = t_B - r_{AB}/c, \quad t_2 = t_B + r_{AB}/c,$$

где  $r_{AB}$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ . Отсюда находим положение, в которое надо поставить стрелки часов  $B$  в момент прихода сигнала:  $t_B = (t_1 + t_2)/2$ . Совершенно очевидно, что синхронизацию часов с тем же

\*) Впервые этот принцип был сформулирован в его основополагающей работе по СТО [102].

результатом можно произвести, испуская сигнал в точке  $B$  и принимая его в точке  $A$ . Такой же способ синхронизации можно применить для точек  $C$ ,  $D$  и т.д., и таким образом синхронизовать все часы, неподвижные друг относительно друга в некоторой инерциальной системе  $S$  — все они будут показывать одно и то же время  $t$ .

А можно ли часы, движущиеся относительно системы  $S$ , синхронизовать с часами, неподвижными в  $S$ ? Мысленные эксперименты со световыми сигналами, аналогичные описанному, показывают, что такая синхронизация невозможна, единого для всех инерциальных систем времени не существует. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим поучительный пример с эйнштейновским "поездом".

Пусть наблюдатель  $A$  находится посередине длинного "поезда", движущегося с релятивистской скоростью, а наблюдатель  $B$  стоит на земле близ полотна железной дороги. Приборы  $C$  и  $D$ , находящиеся в голове и в хвосте поезда на одинаковых расстояниях от  $A$ , испускают две короткие световые вспышки, которые достигают наблюдателей  $A$  и  $B$  одновременно — в тот момент, когда они поравняются друг с другом. Какие выводы из факта одновременного прихода к ним сигналов из  $C$  и  $D$  смогут сделать наблюдатели в поезде и на земле?

Наблюдатель  $A$ : сигналы были испущены из точек, удаленных от меня на равные расстояния, и пришли одновременно, следовательно, они и испущены были одновременно.

Наблюдатель  $B$ : сигналы пришли ко мне одновременно, но в момент испускания голова поезда была ко мне ближе, чем хвост. Следовательно, сигнал от хвоста прошел больший путь и был испущен раньше, чем сигнал от головы.

Этот пример показывает, что часы в системе поезда ( $S'$ ) синхронизованы только с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно  $S'$ . Для наблюдателя в системе  $S$  (земля) часы в точках  $C$ ,  $D$ ,  $A$  показывают разное время. По этой причине события, одновременные в системе  $S'$  (вспышки в  $C$  и в  $D$ ), неодновременны в системе  $S$ . Но это означает, что и синхронизация часов наблюдателя  $B$ , находящегося на земле, с часами в поезде невозможна — время в двух разных инерциальных системах, совершающих относительное движение, различно,  $t' \neq t$ . Это не исключает возможности совпадения времени в разных системах в отдельный момент — например, наблюдатели  $A$  и  $B$  в момент встречи могут установить одинаково стрелки своих часов. Но уже в любой последующий момент показания часов разойдутся.

**1.3. Преобразования Лоренца.** Нам нужно установить на основе рассмотренных выше свойств пространства, времени и движения в СТО формулы преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, которые заменили бы преобразования Галилея. Логика вывода будет такой: мы будем последовательными этапами, исходя из физических постулатов, формулировать математические требования, которым должны удовлетворять формулы преобразований, и на каждом этапе искать соответствующие ограничения на искомые формулы, пока не определим их структуру до конца.

1. Из однородности пространства и времени следует, что преобразования должны быть линейными:

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \beta' z + \beta t + p \text{ и т.д.}, \quad (1.8)$$

где  $\alpha, \beta, \alpha', \dots$  — постоянные коэффициенты. Если бы эти величины были функциями координат и времени (т.е. связь между штрихованными и

нестрихованными переменными была нелинейной), это означало бы, что закон преобразования (1.8) неодинаков для разных точек пространства и для разных моментов времени. Это противоречило бы однородности пространства-времени — по закону преобразования можно было бы отличать одни области пространства (и моменты времени) от других. Но коэффициенты  $\alpha, \beta$  и т.п. могут зависеть, разумеется, от относительной скорости.

2. Конкретизируем теперь рассматриваемые системы (рис. 1.1). Пусть соответствующие им оси параллельны и относительное движение происходит вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$ , а начала отсчета выбраны так, что при  $t = 0$  точка  $x' = y' = z' = 0$  (начало координат системы  $S'$ ) совпадает с точкой  $x = y = z = 0$  (началом координат системы  $S$ ). Стрелки часов в системе  $S'$  мы поставим таким образом, чтобы в момент совпадения начал координат систем они показывали время  $t' = 0$ . В этих условиях свободные члены в равенствах (1.8) (постоянная  $p$  и т.п.) обратятся в нуль.

Мы видим далее, что плоскость  $xu$  совпадает с плоскостью  $x'y'$ . Это означает, что при  $z' = 0$  должно быть и  $z = 0$ , причем эти равенства должны выполняться при любых значениях  $x', y', t'$  и соответственно  $x, y, t$ . Это возможно только если связь между  $z$  и  $z'$  имеет вид  $z' = kz$ ,  $k = \text{const}$ . Ввиду произвольности направлений осей  $y$  и  $z$  (изотропия пространства!) такая же связь с тем же коэффициентом  $k$  должна быть между  $y$  и  $y'$ :  $y' = ky$ .

Теперь рассмотрим преобразования  $x'$  и  $t'$ . Запишем их в виде

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z, \\ t' &= \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В плоскости  $x' = 0$  имеем  $x = Vt$  при любых  $z$  и  $y$ , так как система  $S'$  движется относительно  $S$  со скоростью  $V$ . Подставив эти значения  $x$  и  $x'$  в первое равенство (1.9), будем иметь  $\alpha' = \beta' = 0$ ,  $\beta = -\alpha V$ . Наконец, обратимся к формуле преобразования для  $t'$ . Мы установили часы в системе  $S'$  так, чтобы при  $x = 0$  и  $t = 0$  было  $t' = 0$ . Это возможно только при  $\sigma' = \delta' = 0$ . В итоге имеем следующие формулы преобразований:

$$x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad y' = k(V)y, \quad z' = k(V)z, \quad t' = \sigma(V)x + \delta(V)t. \quad (1.10)$$

где у коэффициентов явно указана зависимость от относительной скорости.

3. Используем теперь условие равноправия систем  $S$  и  $S'$ . Оно означает, что формулы перехода из  $S'$  в  $S$  должны получаться из формул перехода (1.10) заменой  $V$  на  $-V$ :

$$x = \alpha(-V)(x' + Vt'), \quad y = k(-V)y', \quad z = k(-V)z', \quad t = \sigma(-V)x' + \delta(-V)t'. \quad (1.11)$$

Обратимся сначала к формулам для  $y$  и  $z$ . Случаи (1.10) и (1.11) отличаются только направлением относительной скорости, которая и в том и в другом случаях перпендикулярна к плоскости  $yz$ . Но оба направления совершенно равноправны (изотропия пространства!), поэтому  $k(-V) = k(V)$ . Совершая преобразование от  $y$  к  $y'$  и затем снова от  $y'$  к  $y$ , будем иметь  $y = k^2 y$ , т.е.  $k^2 = 1$ ,  $k = \pm 1$ . Значение  $k = -1$  отвечает противоположной ориентации осей  $y$  и  $y'$ , поэтому соответствие с рис. 1.1. будет только при значении  $k = 1$ .

Обратимся к преобразованиям (1.11) и подставим в формулу для  $x$  значения  $x'$  и  $t'$  из (1.10):

$$x = [\alpha(-V)\alpha(V) + V\sigma(V)\alpha(-V)]x + \alpha(-V)V[\delta(V) - \alpha(V)]t. \quad (1.12)$$

Чтобы это равенство было справедливо при всех  $x$  и  $t$ , коэффициенты преобразования должны удовлетворять соотношению

$$\delta(V) = \alpha(V). \quad (1.13)$$

Второе соотношение, следующее из (1.12), нам не потребуется. Вместо него удобнее воспользоваться постулатом о постоянстве (правильнее сказать — об инвариантности) скорости света.

4. Пусть в момент совпадения систем  $S$  и  $S'$  ( $t = t' = 0$ ) из совпадающих начал отсчета испущен короткий световой сигнал. Точка пересечения фронта волны с осью  $x$  движется в системе  $S$  со скоростью  $x/t = c$ . Но вследствие того, что световой сигнал распространяется во всех системах отсчета с одинаковой скоростью, скорость фронта в системе  $S'$  будет той же самой:  $x'/t' = c$ . На основе этих условий получаем из (1.10), поделив уравнение для  $x'$  почленно на уравнение для  $t'$ :

$$c = \frac{\alpha(c - V)}{\sigma c + \alpha}.$$

Отсюда

$$\sigma(V) = -\frac{V}{c^2} \alpha(V). \quad (1.14)$$

Чтобы определить коэффициент  $\alpha(V)$ , рассмотрим уравнения сферического волнового фронта в системах  $S$  и  $S'$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (1.15)$$

В этих уравнениях опять использовано свойство инвариантности скорости света, поэтому  $c$  — одинаковое. Поскольку  $y' = y$ ,  $z' = z$ , то

$$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2. \quad (1.16)$$

С помощью (1.10), (1.13) и (1.14) получаем из последнего уравнения

$$\alpha^2 (1 - V^2/c^2) (c^2 t^2 - x^2) = (ct)^2 - x^2$$

откуда

$$\alpha(V) = \pm (1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \quad (1.17)$$

Здесь снова нужно взять только знак плюс, так как минус соответствует противоположному направлению осей  $x$  и  $x'$ .

Собирая воедино результаты (1.10)–(1.17), приходим к релятивистским формулам преобразования координат и времени (преобразования Лоренца):

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.18)$$

Обратные преобразования получаются из (1.18) заменой  $V$  на  $-V$ :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.19)$$

Для сокращения записи формул релятивистского преобразования введем часто используемые обозначения:

$$\beta = V/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (1.20)$$

В этих обозначениях

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (1.21)$$

При  $V/c \ll 1$  имеем:  $\sqrt{1 - V^2/c^2} \approx 1$ , и преобразования Лоренца (1.18) переходят в преобразования Галилея (1.1). Таким образом, последние применимы только при малых, по сравнению с предельной скоростью  $c$ , относительных скоростях движения инерциальных систем. При  $V \rightarrow c$  коэффициенты в формулах (1.18), (1.19) обращаются в бесконечность и сами преобразования Лоренца теряют смысл. Это объясняется тем, что системы отсчета могут быть связаны только с макроскопическими материальными телами, относительные скорости которых не могут достигать предельной скорости  $c$ .

## § 2. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

**2.1. Сокращение масштабов. Преобразование объема.** Пусть в системе  $S'$  имеется неподвижная твердая линейка длиной  $l_0$  (масштаб), ориентированная вдоль оси  $x'$ . Какую длину будет иметь этот же масштаб в системе  $S$ ? Определим эту длину следующим способом: одновременно (в системе  $S$ ) сделаем зарубки на оси  $x$  против концов масштаба, движущегося в этой системе со скоростью  $V$ . Расстояние между зарубками (неподвижными в  $S$ ) и примем за длину  $l$  движущегося относительно  $S$  масштаба.

Для вычисления длины  $l$  используем преобразования Лоренца (1.18). Пусть концам стержня в системе  $S'$  соответствуют координаты  $x'_1, x'_2$ . Зарубки делаются в один и тот же момент  $t'_1 = t'_2 = t'$  в системе  $S$  в точках  $x_1, x_2$ . Из (1.18) имеем  $x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ ; но  $x'_2 - x'_1$  равна  $l_0$  — длине неподвижного стержня, а  $x_2 - x_1$  равна  $l$  — длине движущегося стержня. Поэтому

$$l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (2.1)$$

— при движении стержень сокращается (сокращение Лоренца — Фитцджеральда).

Из формул (1.18) видно, что масштаб, ориентированный перпендикулярно относительной скорости, не испытывает лоренцева сокращения. Поэтому объем  $\mathcal{V}$  движущегося тела уменьшится только за счет сокращения продольного размера:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2.2)$$

Мы видим, что длина и объем тел в СТО различны в разных инерциальных системах, тогда как в классической механике эти величины инвариантны, т.е. одинаковы во всех системах отсчета.

Необходимо подчеркнуть, что сокращение движущегося масштаба или уменьшение объема движущегося тела — это реальные, а не кажущиеся эффекты. Они устанавливаются в результате измерения расстояния между реальными метками, фиксирующими положение концов стержня в выбранной системе отсчета.

**2.2. Относительность одновременности. Собственное время.** Мы уже указывали в § 1.2, что понятие одновременности в СТО теряет свой абсолютный характер. Здесь мы рассмотрим этот вопрос количественно. Пусть в системе  $S'$  в точках с координатами  $x'_1$  и  $x'_2$  произошли одновременно ( $t'_1 = t'_2$ ) два события. С помощью (1.19) найдем промежуток

времени между этими событиями в системе  $S$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{V(x'_2 - x'_1)}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.3)$$

Этот результат показывает, что абсолютный характер имеет одновременность только таких событий, которые происходят в совпадающих точках пространства. При  $x_1 = x_2$  время между событиями  $\Delta t = 0$  во всех системах, если  $\Delta t' = 0$ . В том же случае, когда события пространственно разделены, они, будучи одновременными в одной системе отсчета, неодновременны, вообще говоря, в других системах.

Сравним теперь промежутки времени, отсчитываемые по часам в движущейся и неподвижной инерциальных системах. Пусть одни часы покоятся в системе  $S$ , а другие — в  $S'$ . Пока в системе  $S'$  пройдет промежуток времени  $\tau$ , в системе  $S$  пройдет согласно (1.19) большее время

$$\Delta t = \tau / \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2.4)$$

Для дифференциалов времен в двух системах получим связь:

$$d\tau = \sqrt{1 - V^2/c^2} dt. \quad (2.5)$$

Мы видим, что в движущейся системе время течет медленнее.

И пространственный объем, и время различны в разных инерциальных системах. Но их произведение инвариантно, в чем можно убедиться, перемножая равенства (2.2) и (2.4):

$$\mathcal{V} \Delta t = \mathcal{V}_0 \tau = \text{inv}. \quad (2.6)$$

Время, отсчитываемое по часам, неподвижным относительно некоторого объекта, называется собственным временем этого объекта. Формула (2.5) дает связь между собственным временем покоящихся в системе  $S'$  объектов и временем  $t$ , отсчитываемым в системе  $S$ . Собственное время можно определить и для неравномерно движущихся объектов. В этом случае для  $d\tau$  сохраняется определение (2.5), где  $V$  имеет смысл скорости инерциальной системы, мгновенно сопутствующей рассматриваемому объекту и совпадающей, следовательно, со скоростью самого объекта. Конечный интервал собственного времени получится интегрированием (2.5):

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2} dt, \quad (2.7)$$

где  $v(t)$  — скорость объекта в системе  $S$ .

**2.3. Релятивистское преобразование скорости.** Рассмотрим произвольное движение некоторого тела малых размеров. По определению,

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$$

— декартовы составляющие скорости тела в системе  $S$ , а

$$v'_x = dx'/dt', \quad v'_y = dy'/dt', \quad v'_z = dz'/dt'$$

— декартовы составляющие скорости того же самого тела в системе  $S'$ , если штрихованные и нештрихованные переменные связаны соотношениями (1.18). Чтобы найти связь между  $v'$  и  $v$ , переписываем (1.18) для дифференциалов,

$$dx' = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - V dx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

и делим первые три равенства почленно на  $dt'$ . Получим

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}. \quad (2.8)$$

Эти формулы выражают релятивистский закон сложения скоростей, заменяющий правило пераллелограмма (1.2) классической механики.

В пределе  $V/c \ll 1$  формулы (2.8) переходят в (1.2), а при  $v \rightarrow c$  обеспечивают предельный характер скорости света  $c$ . Так, если  $v_x \rightarrow c$ ,  $v_y = v_z = 0$ , то  $v'_y = v'_z = 0$ , а

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - V/c} = c, \quad (2.9)$$

в соответствии с принципом инвариентности скорости света. Результат не изменится, если скорость света будет направлена навстречу  $V$ . В числителе и знаменателе предыдущей формулы изменятся знаки перед  $V$ , но результат сложения скоростей останется прежним. Следует подчеркнуть, однако, что при сложении скоростей остается неизменной только абсолютная величина скорости света. Направление же ее может измениться при переходе в другую систему.

Результат (2.9) не означает, что в СТО никакие скорости не могут превышать скорости света. Скорость светового зайчика на экране, достаточно удаленном от источника, фазовая скорость волны, скорость разлета или сближения частиц в лабораторной системе и т.п. могут быть больше  $c$ . СТО утверждает лишь, что со сверхсветовыми скоростями невозможна передача информации и взаимодействий.

**2.4. Преобразование направлений. Аберрация света.** Преобразование скорости (2.8) влечет за собой преобразование углов  $\Theta$ ,  $\Phi$ , определяющих ее направление. Пусть  $\Theta$  — угол между скоростью тела  $v$  и относительной скоростью  $V$ , а  $\Phi$  — соответствующий азимутальный угол, отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной  $V$ . С помощью (2.8) находим:  $v'_y/v'_z = v_y/v_z$ . Это означает, что азимутальный угол  $\Phi$  не преобразуется:

$$\Phi = \Phi'. \quad (2.10)$$

Формулу преобразования угла  $\Theta$  находим следующим образом:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{v_y'^2 + v_z'^2}}{v_x'} = \frac{v' \sin \Theta'}{\gamma(v' \cos \Theta' + V)}. \quad (2.11)$$

Мы воспользовались здесь формулами (2.8), заменив в них  $V$  на  $-V$ .

При релятивистском относительно движении систем отсчета ( $V \rightarrow c$ ) имеем  $\Theta \ll \Theta'$  во всех случаях за исключением того, когда скорость частицы в системе  $S'$  тоже близка к  $c$  и направлена противоположно  $V$ .

Для света  $v' = c$ , и (2.10) — (2.11) дают

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta'}{\gamma(\beta + \cos \Theta')}, \quad \Phi = \Phi'. \quad (2.12)$$

Эти формулы описывают преобразование направления луча света при переходе в другую систему (явление аберрации света). Если  $\beta \ll |\cos \Theta'|$ , то из (2.12) получим в первом порядке по  $V/c$ :

$$\operatorname{tg} \Theta' - \operatorname{tg} \Theta = \frac{\beta \operatorname{tg} \Theta'}{\cos \Theta'},$$

т.е. изменение угла  $\Delta\Theta = \Theta' - \Theta$  — малая величина порядка  $\beta = V/c$ . Поэтому в первом приближении

$$\Delta\Theta = \frac{V}{c} \sin \Theta'. \quad (2.13)$$

Аберрация света и элементарная формула (2.13) сыграли большую роль в истории развития СТО. Пусть в некоторой системе отсчета  $S'$  — системе неподвижной звезды — направление лучей света составляет угол  $\Theta' = \pi/2$  с направлением скорости Земли  $V$  (которую будем считать параллельной

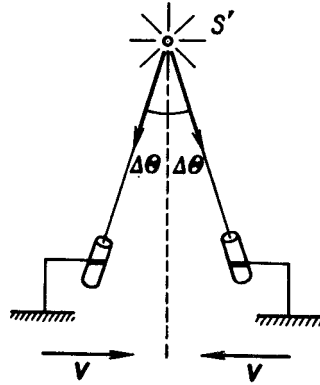


Рис. 2.1.

земной поверхности). Тогда в телескоп, установленный на Земле, звезда будет видна под углом  $\Delta\Theta = V/c$  к вертикали (рис. 2.1). Через полгода, когда направление  $V$  изменится на противоположное, изменится и направление на звезду. Таким образом, неподвижные звезды будут совершать на небосводе видимые движения, причиной которых является движение Земли по орбите. Формула (2.13) хорошо подтверждается наблюдениями.

В заключение остановимся на преобразовании угловых размеров световых пучков. Пусть в некоторой системе  $S'$  пучок света распространяется внутри малого телесного угла  $d\Omega' = \sin \Theta' d\Theta' d\Phi'$ . Какие угловые размеры будет иметь тот же пучок в системе  $S$ ?

В этой системе  $d\Omega = -d \cos \Theta d\Phi$ , где углы  $\Theta$ ,  $\Phi$  нужно выразить через  $\Theta'$  и  $\Phi'$  с помощью формул (2.11). Удобно вычислить сначала  $\cos \Theta$ :

$$\cos \Theta = \frac{\cos \Theta' + \beta}{1 + \beta \cos \Theta'}, \quad (2.14)$$

причем знак при извлечении корня выбирается так, чтобы  $\cos \Theta = \cos \Theta'$  при  $\beta = 0$ . Дифференцируя (2.14), выражаем  $d\Omega$  через  $d\Omega'$ :

$$d\Omega = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta \cos \Theta')^2} d\Omega'. \quad (2.15)$$

Обратное преобразование, как обычно, получается переменной мест штрихованных и нештрихованных величин и изменением знака перед  $\beta$ .

Чтобы лучше понять смысл преобразования телесного угла, представим себе, что в системе  $S'$  имеется источник, испускающий свет изотропно во все стороны. Внутри телесного угла  $d\Omega'$  испускается доля от всего излучения, равная  $dN = d\Omega'/4\pi$ . Величина  $f' = dN/d\Omega = 1/4\pi$  представляет со-

бой функцию распределения излучаемого света по углам. В системе  $S$  та же доля излучения  $dN$  будет приходиться в соответствии с (2.15) на другой телесный угол, так что

$$dN = \frac{1 - \beta^2}{4\pi(1 - \beta \cos \Theta)^2} d\Omega. \quad (2.16)$$

Мы видим, что изотропное в одной системе распределение света по направлениям становится анизотропным в другой системе. Новая функция распределения

$$f(\Theta) = \frac{1 - \beta^2}{4\pi(1 - \beta \cos \Theta)^2} \quad (2.17)$$

становится резко анизотропной при релятивистской относительной скорости, когда  $1 - \beta \ll 1$ . В этом случае излучения в направлении относительной скорости ( $\Theta = 0$ ) и в противоположном направлении ( $\Theta = \pi$ ) относятся как

$$f(0)/f(\pi) = (1 + \beta)/(1 - \beta) \approx 4\gamma^2 \gg 1.$$

Это означает, что любой источник света, движущийся с релятивистской скоростью, будет в основном излучать вперед по движению внутри конуса с углом раствора \*)

$$\Theta_0 = \gamma^{-1} \ll 1, \quad (2.18)$$

даже если его излучение в сопутствующей системе близко к изотропному. Это свойство излучения играет большую роль для частиц с  $v \approx c$ .

**2.5. Видимая форма быстро движущихся тел.** Поскольку все тела испытывают лоренцево сокращение, как это ясно из § 2.1, то, казалось бы, наблюдатель, движущийся с релятивистской скоростью, должен видеть все предметы сплюснутыми в направлении движения. Так, шар должен выглядеть сплюснутым эллипсоидом вращения, куб — прямоугольным параллелепипедом и т.д. Однако такое представление оказывается неверным. Эффекты СТО (конечная скорость света и сокращение Лоренца) фактически приводят к тому, что тела, рассматриваемые в параллельном пучке света (т.е. в малом телесном угле), кажутся не сплюснутыми, а повернутыми относительно наблюдателя на некоторый угол  $\alpha$ .

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример: куб, фотографируемый в параллельном пучке света. Пусть непрозрачный куб с ребром  $l_0$  в своей системе отсчета движется относительно наблюдателя со скоростью  $V$ . Наблюдатель фотографирует его в момент, когда лучи света, испускаемые поверхностью куба, попадают в объектив фотоаппарата под прямым углом к направлению движения (в системе фотоаппарата, рис. 2.2.). Какое изображение будет сфотографировано?

Лучи, испущенные разными точками ребра  $A'B'$  одновременно в системе  $S'$  (куба), достигнут фотопластинки тоже одновременно. Длина изображения  $AB$  будет такой же, как и в случае неподвижного куба, и будет определяться только тем сокращением, которое обусловлено расстоянием до предмета и фокусным расстоянием фотоаппарата. Примем эту длину за единицу.

У неподвижного куба изображение ребра  $E'F'$  в параллельных лучах было бы сплюснуто с изображением  $A'B'$ . В случае движущегося куба лучи от ребра  $E'F'$  должны быть

\*) Как легко проверить с помощью (2.17),

$$f(\Theta_0)/f(0) \approx 1/4.$$

При  $\Theta \gg \Theta_0$ , но при  $\Theta \ll 1$  отношение

$$f(\Theta)/f(0) \approx (\Theta_0/\Theta)^4 \ll 1.$$

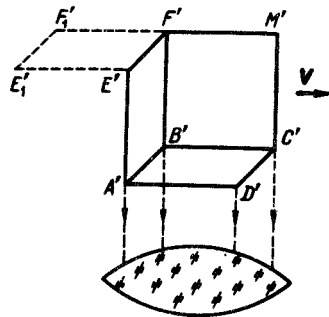


Рис. 2.2.

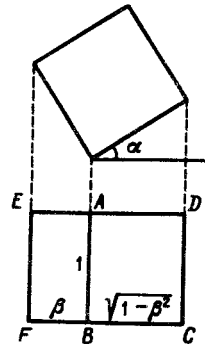


Рис. 2.3.

испущены раньше на время  $\Delta t = l_0/c$ , тогда они достигнут фотопластины одновременно с лучами от  $A'B'$ . В момент испускания света ребро  $E'F'$  занимало положение  $E'_1F'_1$  и до испускания света ребром  $A'B'$  проделало путь, равный  $Vl_0/c$ . Следовательно, теперь изображения ребер  $A'B'$  и  $E'F'$  не наложатся, изображения ребер  $A'E'$  и  $B'F'$  будут иметь длину  $V/c = \beta$ , а не нуль, как у неподвижного куба, и вся грань  $A'B'F'E'$  сфотографируется в виде прямоугольника  $ABFE$  (рис. 2.3) с отношением сторон, равным  $1:\beta$ .

Лучи, создающие изображение ребер  $A'B'$  и  $C'D'$ , испускаются кубом одновременно в системе  $S$ . В системе  $S'$ , как следует из преобразований Лоренца (1.21), лучи с ребра  $C'D'$  должны быть испущены раньше, чем с ребра  $A'B'$ , на время  $\Delta t' = \gamma V l_0/c^2$ , где  $l_0$  — длина ребер  $B'C'$  и  $A'D'$  в системе  $S$ . Можно считать, что в системе  $S'$  на расстоянии  $\Delta x' = l_0$  произошли два события, причем одно на  $\Delta t'$  позже другого. Расстояние между ними в системе  $S$  определяется с помощью (1.19):

$$l \equiv \Delta x = \gamma(\Delta x' - V\Delta t') = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

Ребра  $B'C'$  и  $A'D'$ , параллельные направлению движения, испытали, таким образом, обычное лоренцево сокращение. Их изображения (с учетом сокращения в фотоплапате) будут иметь длины  $\sqrt{1-\beta^2}$ .

Остальные ребра куба будут находиться на невидимой наблюдателем в рассматриваемый момент времени стороне и не будут сфотографированы. Таким образом, на фотографии получится задняя (по отношению к направлению движения) часть куба, т.е. куб будет выглядеть повернутым на угол  $\alpha = \arcsin(V/c)$  (см. рис. 2.3), но его форма не будет искажена. Если бы время было абсолютным и сохранялись в силе преобразования Галилея, то ребра  $A'D'$  и  $B'C'$  не испытали бы лоренцева сокращения, отрезки  $AD$  и  $BC$  имели бы на фотопластинке длины, равные 1, и форма куба была бы искажена.

### § 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА. ИНТЕРВАЛ И ПРИЧИННОСТЬ

**3.1. Преобразование Лоренца как поворот в четырехмерном мире.** Многим результатам релятивистской кинематики можно придать простой геометрический смысл. Такой подход облегчает их интерпретацию и позволяет развить изящный математический аппарат СТО.

Поскольку время в СТО теряет абсолютный характер и зависит от системы отсчета, то для изображения кинематических соотношений естественно использовать четырехмерное многообразие — "пространство — время", для которого применяют также выходящее из употребления название "мир" или, более подробно, "четырёхмерный мир Минковского". Изобразим на рис. 3.1 двумерное сечение четырехмерного пространства и отложим

на взаимно перпендикулярных осях координаты  $x$  и  $ct$  (удобно умножить время на  $c$ , чтобы обе координаты имели одинаковую размерность). Отдельные точки в четырехмерном пространстве — времени указывают пространственные координаты и время некоторого "события". Последовательность кинематических состояний любого тела (т.е. его координаты в разные моменты времени) изображается "мировой линией".

Мировыми линиями (в отличие от траекторий классической механики) обладают не только движущиеся, но и покоящиеся в данной инерциальной системе тела. Так, мировой линией тела, покоящегося в (пространственной) точке  $x_0$  оси  $x$ , будет прямая  $AB$ , параллельная оси  $ct$  и проходящая через  $x_0$ ; мировая линия тела, движущегося с постоянной скоростью  $v = \text{const}$  (и проходящего через начало координат при  $t = 0$ ) — прямая  $CD$  ( $\text{tg } \alpha = v/c$ ); мировая линия тела, движущегося с переменной скоростью  $v(t)$  — кривая  $MN$ ; мировая линия светового луча, испущенного в момент  $t = 0$  из начала координат в направлении оси  $x$  — биссектриса координатного угла  $OF$ .

Выясним теперь геометрический смысл преобразования Лоренца. Запишем его только для  $x$  и  $ct$ :

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (3.1)$$

Это — линейное однородное преобразование, очень напоминающее преобразование поворота в трехмерном евклидовом пространстве. Запишем, например, преобразование поворота на угол  $\varphi$  в плоскости  $xu$  в обычном пространстве:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (3.2)$$

Новые оси  $x'$ ,  $y'$ , получающиеся в результате такого преобразования, изображены на рис. 3.2. Важнейшим свойством этого преобразования является сохранение расстояния между любыми двумя точками:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (3.3)$$

Расстояние  $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  между точками 1 и 2 остается инвариантным при преобразовании поворота.

Для выявления сходства и различий между поворотом в евклидовом пространстве и преобразованием Лоренца запишем (3.1) через гиперболи-

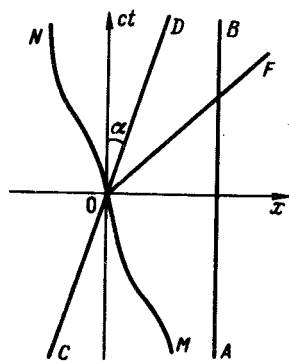


Рис. 3.1.

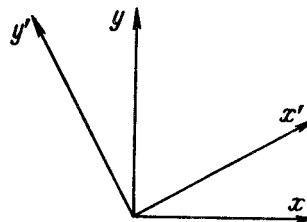


Рис. 3.2.

ческие функции:

$$x' = x \operatorname{ch} \psi - ct \operatorname{sh} \psi, \quad ct' = -x \operatorname{sh} \psi + ct \operatorname{ch} \psi, \quad (3.4)$$

где

$$\operatorname{ch} \psi = \gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{sh} \psi = \beta\gamma = (V/c) (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \quad (3.5)$$

причем, как и должно быть

$$\operatorname{ch}^2 \psi - \operatorname{sh}^2 \psi = 1. \quad (3.6)$$

Преобразование (3.4) также обладает свойством оставлять инвариантной некоторую квадратичную комбинацию координат  $x$  и  $ct$  — интервал

$$s_{12} = \sqrt{(ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}. \quad (3.7)$$

В самом деле, из (3.4) — (3.6) непосредственно следует, что  $(ct'_2 - ct'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$ , и, таким образом,  $s'_{12} = s_{12} = \text{inv}$ . Интервал  $s_{12}$  можно рассматривать как "расстояние" между точками плоскости  $x, ct$ . Но квадрат разности пространственных координат входит в выражение интервала со знаком минус. Пространство, в котором расстояние между точками определено формулой (3.7), называется псевдоевклидовым. Наряду с очевидным сходством, между псевдоевклидовым и евклидовым пространствами имеются и существенные различия. Так, в евклидовом пространстве квадрат расстояния между двумя точками  $r_{12}^2 \geq 0$ , причем равенство этой величины нулю означает, что точки 1 и 2 совпадают. В псевдоевклидовом пространстве  $s_{12}^2$  может иметь любой знак, а обращение интервала в нуль возможно и для двух совершенно различных точек в четырехмерном пространстве — времени.

Рассмотрим, далее, положения новых осей  $x', ct'$  на псевдоевклидовой плоскости. Отложим координаты  $x$  и  $ct$  на осях прямоугольной системы координат (рис. 3.3). Точка  $x' = 0$ , совпадающая с началом координат системы  $S'$ , движется в системе  $S$  со скоростью  $V$ . Ее мировая линия, очевидно, будет представлять собой ось времени  $ct'$  системы  $S'$ . Таким образом, эта ось будет наклонена к оси  $ct$  на угол  $\alpha = \operatorname{arctg}(V/c)$ . Ось  $x'$  новой системы можно определить условием  $ct' = 0$ . Но, согласно (3.1), в старой системе  $S$  это будет прямая  $ct = \beta x$ , проходящая через начало координат и составляющая тот же угол  $\alpha = \operatorname{arctg}(V/c)$  с осью  $x$ .

Новая система координат косоугольна! Было бы неправильно пытаться найти связь между  $x', ct'$  и  $x, ct$  непосредственно из рис. 3.3 путем проектирования отрезков, как это нетрудно сделать в евклидовом случае (см. рис. 3.2). Преобразования Лоренца не только поворачивают оси, но и меняют масштабы координат по осям.

С помощью рис. 3.3 нетрудно дать геометрическую интерпретацию различным следствиям из преобразований Лоренца. Рассмотрим, например, относительность одновременности. В системе  $S$  линии равного времени — прямые, параллельные оси  $Ox$ . В системе  $S'$  — это прямые, параллельные  $O'x'$ , не совпадающие с линиями равного времени в системе  $S$ . Поэтому события, одновременные в  $S$ , не будут, вообще говоря, одновременными в  $S'$ . Например, между одновременными в системе  $S$  событиями  $A$  и  $B$  в системе  $S'$  пройдет промежуток времени  $\Delta t' = AB'/c$ , причем событие  $B$  произойдет раньше \*).

\*). Многие другие геометрические пояснения основных соотношений СТО читатель найдет в книгах [89, 93].

Существует распространенный способ сделать преобразования Лоренца (3.1) формально тождественными преобразованию поворота (3.2) в евклидовой плоскости. Это достигается путем введения мнимой временной координаты  $ict$  и мнимого угла поворота. Заменяем в (3.1)  $\psi$  на  $-i\varphi$  и воспользуемся формулами  $\text{ch}(-i\varphi) = \cos \varphi$ ,  $\text{sh}(-i\varphi) = -i \sin \varphi$ .

Получим

$$x'^1 = x^1 \cos \varphi + x^4 \sin \varphi, \quad x'^4 = -x^1 \sin \varphi + x^4 \cos \varphi, \quad (3.8)$$

где  $x^1 = x$ ,  $x^4 = ict$ . Интервал в этих переменных примет вид

$$s_{21}^2 = -(x_2^1 - x_1^1)^2 - (x_2^4 - x_1^4)^2, \quad (3.9)$$

т.е. будет отличаться только знаком от квадрата расстояния  $r_{12}^2$  между точками евклидовой плоскости.

Но следует иметь в виду, что введение мнимой временной координаты приводит лишь к формальному сходству с евклидовым пространством. Глубокое внутреннее различие между двумя геометриями — евклидовой и псевдоевклидовой — этим, разумеется, не устраняется. Поэтому мы в дальнейшем будем пользоваться действительной временной координатой  $x^0 = ct$ .

**3.2. Три типа интервалов. Причинность.** Обобщим определение интервала (3.7) на четырехмерный случай:

$$\begin{aligned} s_{21}^2 &= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - r_{21}^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

здесь  $r_{21}$  — обычное расстояние между (пространственными) точками 1 и 2. В зависимости от соотношения между временной  $ct$  и пространственными  $x, y, z$  координатами двух точек  $s_{21}^2$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Применяют следующую терминологию: при  $s_{21}^2 > 0$  интервал называют *временеподобным*, при  $s_{21}^2 < 0$  — *пространственноподобным*, при  $s_{21}^2 = 0$  — *светоподобным* или *нулевым*.

Характер интервала тесно связан с причинностью — он определяет возможность причинной связи событий, происходящих в пространственно-временных точках 1 и 2. Если  $s_{21}^2 > 0$ , то событие 2 может быть причинно связано с событием 1 (и наоборот): из точки 1 можно послать сигнал со скоростью  $v = r_{21}/(t_2 - t_1) < c$ , который вызовет событие 2. Это возмож-

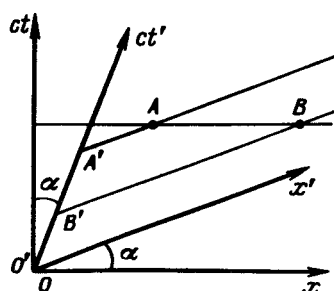


Рис. 3.3.

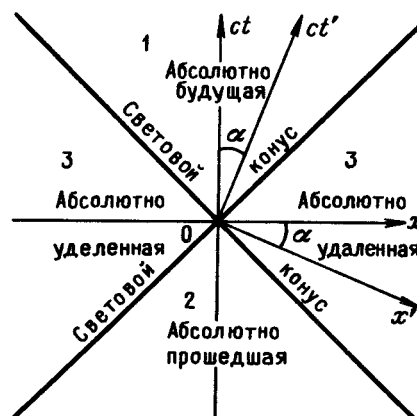


Рис. 3.4.

но и в случае нулевого интервала, но только сигнал должен распространяться с предельной скоростью  $c$ . События, разделенные пространственно-подобным интервалом, не могут быть причинно обусловлены, так как сигналы не могут распространяться со скоростью  $v = r_{21}/(t_2 - t_1) > c$ .

Псевдоевклидову плоскость  $(x, ct)$  в зависимости от свойств интервала  $s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$  между началом координат (событие 0) и точками плоскости можно разделить на три области, различные по своим свойствам. Проведем биссектрисы координатных углов (рис. 3.4). Область 1 обладает следующими свойствами: а) любое событие, изображаемое некоторой точкой этой области, в каждой инерциальной системе происходит позже события 0 (это следует из неравенства  $s^2 > 0$  для всех точек этой области); б) существует такая система отсчета, в которой рассматриваемое событие происходит в той же (пространственной) точке, что и нулевое событие, т.е. события являются одноместными. Для того чтобы найти текущую систему, достаточно провести луч через начало координат и рассматриваемую точку. Угол  $\alpha$  между этим лучом и осью  $ct$  определит скорость  $V = c \operatorname{tg} \alpha$  искомой инерциальной системы  $S'$  относительно исходной системы  $S$ . Область 1 называют "абсолютно будущей" по отношению к событию 0.

Область 2 является "абсолютно прошедшей" по отношению к 0. Все события этой области во всех инерциальных системах происходят раньше события 0 и могут быть сделаны одноместными путем подбора соответствующей инерциальной системы.

Аналогичным свойством обладают любые два события, разделенные времениподобным интервалом: понятия "позже" и "раньше" для них являются абсолютными. Это означает, что если в некоторой системе времена этих событий  $t_2 > t_1$ , то в любой другой системе также  $t'_2 > t'_1$ .

Наконец, область 3 характерна тем, что любое событие из этой области может быть сделано одновременным с событием 0. Для этого достаточно выбрать инерциальную систему, ось  $x'$  которой проходит через начало координат и рассматриваемое событие. Но не существует такой системы, в которой оно было бы одноместным с событием 0. В этом смысле все точки области 3 являются абсолютно удаленными от точки 0.

В четырехмерном пространстве — времени также, разумеется, существуют указанные области. Они разграничены трехмерной гиперповерхностью  $s^2 = 0$  (световым конусом). Внутренние области этого конуса являются абсолютно прошедшей и абсолютно будущей, а внешняя — абсолютно удаленной от начала координат.

#### § 4. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

**4.1. Определение вектора. Контра- и ковариантные компоненты.** Для количественной формулировки законов природы с учетом требований СТО необходимо познакомиться с основами векторной и тензорной алгебры в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Она строится по аналогии с тензорной алгеброй в трехмерном евклидовом пространстве. Для удобства читателей мы даем в Дополнении I в элементарном изложении сводку основных понятий алгебры трехмерных тензоров, а в Дополнении II — некоторые дополнительные (по сравнению с теми, которые изложены в этом параграфе) сведения по алгебре и анализу четырехмерных тензоров \*).

\* ) Более точные названия этих объектов — аффинные тензоры. Мы в дальнейшем будем опускать прилагательное "аффинный", поскольку никакие другие тензоры в данной книге не используются.

Начнем с определения вектора в четырехмерном пространстве (или, сокращенно, 4-вектора).

Рассмотрим координаты точки (события) в четырехмерном пространстве и перенумеруем их верхними индексами от 0 до 3:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (4.1)$$

Как мы знаем, эти величины при переходе к другой инерциальной системе преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0 \operatorname{ch} \psi - x^1 \operatorname{sh} \psi, & x^{1'} &= -x^0 \operatorname{sh} \psi + x^1 \operatorname{ch} \psi, \\ x^{2'} &= x^2, & x^{3'} &= x^3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\operatorname{th} \psi = V/c$ .

Дадим следующее определение 4-вектора, обобщающее определение вектора в трехмерном пространстве: *четырёхмерным* вектором  $A^i (A^0, A^1, A^2, A^3)$  называется совокупность четырех величин, преобразующихся при переходе в другую инерциальную систему отсчета так же, как 4-координаты, т.е. по формулам (4.2):

$$\begin{aligned} A^{0'} &= A^0 \operatorname{ch} \psi - A^1 \operatorname{sh} \psi, & A^{1'} &= -A^0 \operatorname{sh} \psi + A^1 \operatorname{ch} \psi, \\ A^{2'} &= A^2, & A^{3'} &= A^3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Однако если мы захотим, по аналогии с трехмерным евклидовым пространством, вычислить квадрат вектора  $A^i A^i$  (сумма по повторяющимся значкам от 0 до 3), то легко убедимся, что такая величина не будет инвариантом преобразования Лоренца (т.е. поворота в четырехмерном пространстве). Инвариантом оказывается комбинация компонент вида

$$(A^{0'})^2 - (A^{1'})^2 - (A^{2'})^2 - (A^{3'})^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \quad (4.4)$$

В случае координат 4-точки это — интервал (3.10):

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (4.5)$$

В справедливости равенства (4.4) легко убедиться с помощью формул (4.3).

Для того чтобы определить квадрат 4-вектора и скалярное произведение двух 4-векторов как инвариантные величины, вводят в рассмотрение два сорта компонент одного и того же вектора — ковариантные и контравариантные\*). Контравариантные компоненты обозначаются верхними индексами ( $A^i$ ), а ковариантные — нижними индексами ( $A_i$ ). Определим связь между ко- и контравариантными компонентами вектора:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (4.6)$$

Из (4.3), (4.6) следует, что преобразование Лоренца для ковариантного вектора выглядит так:

$$A'_0 = A_0 \operatorname{ch} \psi + A_1 \operatorname{sh} \psi, \quad A'_1 = A_0 \operatorname{sh} \psi + A_1 \operatorname{ch} \psi, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3. \quad (4.7)$$

Составим теперь сумму произведений ковариантных компонент на контравариантные:

$$A_i A^i = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3. \quad (4.8)$$

Эта сумма оказывается инвариантом преобразования, назовем ее квадратом 4-вектора. Аналогичным образом определяется скалярное произве-

\*) Мы увидим в § 4.3, что ковариантные — преобразующиеся так же, как компоненты градиента скалярной функции по четырехмерным координатам; контравариантные — преобразующиеся не так, как градиент, но так же, как сами координаты.

дение двух векторов:

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3. \quad (4.9)$$

Его можно записать через временные  $A_0, B_0$  и пространственные  $A, B$  компоненты векторов следующим образом:

$$A_i B^i = A_0 B^0 - A \cdot B.$$

Как следует из (4.6), безразлично, какой вектор в произведении ковариантный, а какой — контравариантный. Оба произведения, (4.8) и (4.9) — инварианты преобразования Лоренце. Но аналогичная сумма, составленная только из ковариантных или только из контравариантных компонент, не обладает простым законом преобразования и поэтому не имеет смысла.

Термин "скаляр" является синонимом слова "инвариант". Это — величина, имеющая одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета,  $A'_i A'^i = A_i A^i$  и т.д.

Формулы преобразования (4.3), (4.7) можно записать в сокращенном виде:

$$A'^i = a^i_k A^k, \quad A'_i = a_i^k A_k. \quad (4.10)$$

Здесь  $a^i_k, a_i^k$  — матрицы преобразования, имеющие ковариантный и контравариантный индексы. Матрицы, согласно (4.3), (4.7), имеют следующий вид:

$$(a^i_k) = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & -\text{sh } \psi & 0 & 0 \\ -\text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a_i^k) = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi & 0 & 0 \\ \text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Как видно из этих таблиц,  $a^i_k \neq a_i^k$ , т.е. вид метриц различен в зависимости от того, какой индекс (первый или второй) верхний, а какой — нижний. Но обе матрицы симметричны, т.е.  $a^i_k = a^k_i, a_i^k = a_k^i$ .

Перемножая матрицы (4.11), мы видим, что их произведение равно единичной матрице:

$$(a^i_k a_i^k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(суммирование по  $k$ !). Обозначив элементы единичной матрицы через  $\delta_i^i$ , будем иметь

$$a^i_k a_i^k = \delta_i^i, \quad a_i^k a^i_k = \delta_i^k. \quad (4.12)$$

Обратим внимание на то, что суммирование здесь производится либо по первым, либо по вторым индексам, причем один из них — нижний, а другой — верхний. Единичная матрица, разумеется, симметрична,  $\delta_i^k = \delta_k^i$ , и расположение верхнего и нижнего индексов у нее произвольное.

С помощью (4.12) нетрудно найти преобразования, обратные (4.10). Умножая первую формулу (4.10) на  $a_i^i$  и суммируя по  $i$ , имеем

$$a_i^i A'^i = \delta_i^i A^i = A^i. \quad (4.13)$$

Аналогичным образом получаем

$$A_l = a^i_l A'_i. \quad (4.14)$$

Из формул (4.13) и (4.10) следует, что матрица  $a^i_k$  прямого преобразования контравариантных компонент вектора одновременно является и матрицей обратного преобразования его ковариантных компонент. Это разъясняет смысл термина "контравариантный" — преобразующийся с помощью обратной матрицы преобразования ковариантного вектора.

**4.2. Четырехмерные тензоры.** Примем следующее определение: 4-тензором II ранга называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведения компонент двух 4-векторов при переходе в другую инерциальную систему. Как и 4-векторы, 4-тензоры могут быть ковариантными ( $T^{ik}$ ) и контравариантными ( $T_{ik}$ ), а также смешанными ( $T_i^k$  и  $T^i_k$ ). При этом, вообще говоря,  $T_i^k \neq T^i_k$ , смешанный тензор зависит от того, какой именно значок — первый или второй — ковариантный, а какой — контравариантный. В соответствии с этим возможны следующие законы преобразования 4-тензора II ранга:

$$\begin{aligned} T^{ik'} &= a^i_m a^{k'}_n T^{mn}, & T'_{ik} &= a_i^m a_k^n T_{mn}, \\ T_i^{k'} &= a_i^m a^{k'}_n T_m^n, & T_k^{i'} &= a^i_m a_k^n T^m_n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

С помощью формул (4.12) легко найти обратные преобразования. Тензоры более высоких рангов определяются аналогичным образом.

Одним из наиболее простых тензоров II ранга является метрический тензор  $g_{ik}$ :

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Преобразуя этот тензор с помощью (4.11), (4.12) к другой инерциальной системе, убеждаемся, что этот тензор — инвариантный, его компоненты одинаковы во всех системах. Поднимая один из индексов с помощью правила (4.6), т.е. переходя к смешанному тензору, получим

$$g_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \delta_i^k. \quad (4.17)$$

Это — единичный тензор, хорошо известный из теории трехмерных тензоров. Наконец, поднимая и второй индекс, получим  $g^{ik} = g_{ik}$  — контравариантные компоненты совпадают с ковариантными.

С помощью метрического тензора производится опускание и поднятие индекса у любого 4-вектора или 4-тензора: из (4.6) и (4.16) следует, что

$$A_l = g_{lk} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k \quad (4.18)$$

(суммирование по повторяющемуся индексу  $k$ !). Поэтому интервал (4.5) может быть записан через  $g_{ik}$  в виде

$$s^2 = g_{ik} x^i x^k, \quad (4.19)$$

а скалярное произведение — в формах

$$A_i B^i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k. \quad (4.20)$$

Формула (4.19) поясняет, почему тензор  $g_{ik}$  называется метрическим: он позволяет определить инвариантное "расстояние" между двумя точками в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, или, как говорят, установить метрику этого пространства.

Еще один важный для приложений 4-тензор — это единичный антисимметричный тензор IV ранга  $e^{iklm}$ . Он определяется по аналогии с соответствующим трехмерным тензором  $e_{\alpha\beta\gamma}$  (см. Дополнение I.4) двумя условиями:

$$1. e^{0123} = 1.$$

2.  $e^{iklm}$  меняет знак при перестановке любых двух индексов.

В результате остаются отличными от нуля (и равными  $\pm 1$ ) только те компоненты, у которых все 4 индекса различны; их число равно  $4! = 24$ . При переходе к штрихованной системе имеем

$$e'^{0123} = a^0_p a^1_q a^2_r a^3_s e^{pqrs}. \quad (4.21)$$

В силу определения  $e^{pqrs}$ , данного выше, правая часть (4.21) представляет собой определитель матрицы преобразования (4.11). Но этот определитель равен единице, что следует непосредственно из явного вида матрицы и формулы  $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ . Таким образом,  $e'^{0123} = 1$ . Изменение расположения индексов приводит к перестановке строк определителя, что вызывает изменение знака при каждой элементарной транспозиции (перестановке двух строк). Но именно такими свойствами обладает и тензор  $e^{iklm}$ , так что

$$e'^{iklm} = e^{iklm}, \quad (4.22)$$

т.е.  $e^{iklm}$ , как и  $g^{ik}$ , является инвариантным тензором.

4-тензор  $T^{ik \dots lm}$  называется истинным, или просто тензором, если при инверсии пространственных координат (преобразование  $x'^0 = x^0$ ,  $x'^\alpha = -x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) он преобразуется как произведение координат  $x'^i x^k \dots x'^l x^m$ . Если же при таком преобразовании тензор приобретает дополнительный множитель  $-1$ , он называется псевдотензором (ср. с трехмерным случаем, см. Дополнение I.6). В соответствии с этим определением,  $g^{ik}$  — истинный тензор, а  $e^{iklm}$  — псевдотензор.

Еще некоторые сведения о 4-тензорах приведены в Дополнении II. Они не необходимы для дальнейшего чтения этой книги, но полезны для лучшего понимания материала.

**4.3. Дифференциальные операции.** Найдем правило релятивистского преобразования оператора градиента  $\partial/\partial x^i$ . В штрихованной системе

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^k};$$

но согласно (4.13)  $x^k = a_i^k x^{i'}$ , поэтому  $\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = a_i^k$  и

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = a_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (4.23)$$

Полученное соотношение совпадает с законом преобразования ковариантного вектора (4.10), следовательно, оператор  $\partial/\partial x^k$  представляет собой ковариантный вектор. Его пространственная часть совпадает с трехмерным

оператором  $\nabla$ , а временная представляет собой производную  $\partial/\partial x^0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right). \quad (4.24)$$

Контравариантный оператор градиента может быть обозначен как  $\partial/\partial x_k$  и, согласно (4.6), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla \right), \quad (4.25)$$

причем  $x_0 = x^0$ ,  $x_\alpha = -x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Теперь становятся очевидными следующие утверждения:

1.  $\frac{\partial \Phi}{\partial x^k}$  — ковариантный вектор, если  $\Phi$  — скалярная функция 4-координат.

2.  $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ ,  $\frac{\partial A^i}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$  — соответственно смешанный, контравариантный и

ковариантный 4-тензоры II ранга.

3.  $\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$  — четырехмерная дивергенция, инвариант преобразова-

ния Лоренца.

4.  $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$  — четырехмерный ротор, антисимметричный тензор

II ранга.

$$5. -\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \equiv \square \quad (4.26)$$

оператор Даламбера, инвариант преобразования Лоренца. Применение оператора Даламбера к некоторой величине не меняет закона преобразования этой величины; например,  $\square \Phi$  — скаляр,  $\square A_i$  — ковариантный вектор и т.д.

4.4. Четырехмерные скорость и ускорение частицы. Трехмерная скорость частицы,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , не является 4-вектором. Это следует хотя бы из того, что закон преобразования (2.8) величин  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  не совпадает с (4.3) или (4.7). Но скорость нетрудно переопределить таким образом, чтобы она стала 4-вектором. Предварительно найдем связь между собственным временем частицы  $\tau$  и интервалом. Воспользовавшись инвариантностью интервала, запишем:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = c^2 d\tau^2. \quad (4.27)$$

Первое равенство — определение малого интервала в системе  $S$ ; второе — его значение в мгновенно сопутствующей частице системе, в которой  $dx^\alpha = 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), а  $dx^0 = c d\tau$ . Из (4.27) находим:

$$d\tau = ds/c, \quad (4.28)$$

откуда следует, что  $d\tau$  — инвариант, так как  $ds$  и  $c$  — инварианты. Следовательно, если определить 4-скорость через производные от координат по

собственному времени,

$$u^i = dx^i/d\tau, \quad (4.29)$$

то совокупность таких производных образует 4-вектор. Пользуясь формулой (2.5), находим связь 4-скорость с трехмерной скоростью  $v$ :

$$u^i = \left( \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right); \quad (4.30)$$

из (4.30) находим

$$u_i u^i = c^2. \quad (4.31)$$

4-ускорение естественно определить через вторые производные от координат по собственному времени:

$$w^i = d^2 x^i / d\tau^2. \quad (4.32)$$

Оно может быть выражено через трехмерное ускорение  $w$  и скорость  $v$ . Дифференцируя (4.31) по собственному времени, находим

$$u_i w^i = 0, \quad (4.33)$$

т.е. 4-скорость и 4-ускорение взаимно перпендикулярны.

## § 5. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС

**5.1. Принцип наименьшего действия для свободной частицы.** Механику релятивистских частиц удобно строить исходя из принципа наименьшего действия. Такой подход позволяет с самого начала легко обеспечить основное требование СТО — релятивистскую ковариантность уравнений механики, т.е. запись их в такой форме, чтобы они были справедливы в любой инерциальной системе отсчета.

Как известно из классической механики, основной величиной, из которой выводятся уравнения движения, является действие  $S$  — интеграл по времени от функции Лагранжа, взятый вдоль траектории движения частицы между двумя фиксированными точками — точками 1 и 2:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L dt. \quad (5.1)$$

В точках 1 и 2 задаются координаты частицы и моменты времени, в которые частицы проходят эти точки. Действие стационарно на истинных (физических) траекториях, т.е. его первая вариация обращается в нуль:

$$\delta S = 0. \quad (5.2)$$

Функция Лагранжа свободной нерелятивистской частицы имеет вид

$$L = mv^2/2. \quad (5.3)$$

Мы потребуем, чтобы искомое действие для свободной релятивистской частицы обладало следующими двумя свойствами: а) релятивистской инвариантностью — это необходимо, чтобы был выполнен принцип относительности — одинаковость законов механики во всех инерциальных системах; б) функция Лагранжа релятивистской частицы при  $v/c \ll 1$  должна переходить в известное из классической механики выражение (5.3).

Второе требование есть следствие принципа соответствия. Принцип соответствия представляет собой один из общезначимых принципов, играю-

щих огромную роль при построении новых физических теорий. Он требует, чтобы уравнения некоторой общей теории, включающей в себя предыдущую более узкую теорию как частный случай, при соответствующих условиях переходили в уравнения частной теории. В данном случае частной теорией является классическая механика, а более общей физической теорией — релятивистская механика. Но уравнения релятивистской механики при малых скоростях движения должны переходить в классические уравнения, правильность которых в области их применимости подтверждается всей общечеловеческой практикой. Ранее мы уже использовали принцип соответствия, потребовав, чтобы преобразования Лоренца при  $V/c \ll 1$  переходили в преобразования Галилея.

Вернемся к вопросу о действии для релятивистской частицы. При отсутствии каких-либо сил или полей единственная релятивистская инвариантная величина, характеризующая движение частицы из точки 1 в точку 2 четырехмерного пространства-времени — это длина ее мировой линии между соответствующими точками. Поэтому запишем действие в виде

$$S = \alpha \int_{(1)}^{(2)} ds, \quad (5.4)$$

где  $\alpha$  — инвариантная постоянная. Чтобы привести его к виду (5.1), перейдем к интегрированию по  $t$ , записав  $ds = \frac{ds}{dt} dt$ . Но, согласно (4.28) и (2.5),

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (5.5)$$

где  $v(t)$  — трехмерная скорость частицы. Таким образом, действие принимает вид

$$S = \alpha c \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (5.6)$$

и, следовательно, согласно (5.1), функция Лагранжа

$$L = \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Значение постоянной  $\alpha$  устанавливается из принципа соответствия: при  $v/c \ll 1$  имеем

$$L = \alpha c - \alpha v^2/2c.$$

Сравнивая второй член, содержащий  $v^2$ , с выражением (5.3), находим  $\alpha = -mc$ , где  $m$  — масса частицы; при этом получаем в нерелятивистском пределе

$$L = -mc^2 + mv^2/2. \quad (5.7)$$

Здесь  $m$  — масса нерелятивистской (в том числе покоящейся) частицы — инвариантная величина. Иногда в литературе для этой массы используют название "масса покоя", в отличие от массы движущейся частицы, зависящей от скорости (см. § 5.3).

Вспомним, что функции Лагранжа, отличающиеся на постоянную, физически эквивалентны; поэтому постоянную  $mc^2$  в (5.7) можно отбросить, и, таким образом, мы получили нерелятивистскую функцию Лагранжа (5.31). В общем же случае функция Лагранжа свободной релятивист-

ской частицы имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (5.8)$$

**5.2. Энергия и импульс свободной частицы.** Из лагранжева метода в механике мы знаем, как выражаются через функцию Лагранжа обобщенный импульс  $p$  и энергия  $\mathcal{E}$ :

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \mathcal{E} = p \cdot v - L. \quad (5.9)$$

Вычисляя эти величины путем дифференцирования (5.8), находим

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.11)$$

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (5.12)$$

поскольку  $L$  не зависит от  $r$ , сводится к равенству  $dp/dt = 0$ , т.е.  $p = \text{const}$ . Это вполне естественно: и импульс и энергия свободной частицы являются интегралами движения.

Сравнение формул (5.10) и (5.11) для  $p$  и  $\mathcal{E}$  приводит к полезному соотношению между импульсом, скоростью и энергией релятивистской частицы:

$$p = \mathcal{E}v/c^2. \quad (5.13)$$

Формула (4.30), дающая определение 4-скорости, позволяет записать  $p^\alpha = mu^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ),  $\mathcal{E}/c = mu^0$ ; но  $mu^i$  — 4-вектор, поскольку  $m$  — инвариант. Таким образом, энергия, деленная на скорость света, и трехмерный импульс частицы образуют 4-вектор энергии — импульса:

$$p^i = mu^i = (\mathcal{E}/c, p). \quad (5.14)$$

Установление этого факта позволяет с легкостью преобразовывать энергию и импульс из одной инерциальной системы в другую:

$$p_x = \frac{p'_x + V\mathcal{E}'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + p'_x V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (5.15)$$

Пользуясь инвариантностью квадрата 4-импульса, найдем связь между энергией и импульсом свободной частицы. Выражения для квадрата 4-импульса одинаковы в системах  $S$  и  $S'$ :

$$p^i p_i = (\mathcal{E}/c)^2 - p^2 = (\mathcal{E}'/c)^2 - p'^2. \quad (5.16)$$

Пусть  $S'$  — система покоя частицы, в которой  $v' = 0$ , и, согласно (5.10), (5.11),  $p' = 0$ ,  $\mathcal{E}' = mc^2$ . Из (5.16) получим

$$\mathcal{E}^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (5.17)$$

В инерциальной системе отсчета энергия частицы, выраженная через ее импульс, совпадает с функцией Гамильтона  $\mathcal{H}(p)$ . Таким образом,

$$\mathcal{H}(p) = \mathcal{E}(p) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (5.18)$$

Перед корнем выбран положительный знак, чтобы (5.18) согласовывалось с (5.11).

В природе существуют частицы (например, фотоны, кванты света), у которых масса покоя равна нулю. Но они, как и объекты, имеющие  $m \neq 0$ , обладают энергией и импульсом, связь между которыми дается формулой (5.17) при  $m = 0$ :

$$\mathcal{E} = cp. \quad (5.19)$$

Из (5.11) следует, что конечная энергия у таких частиц может быть только, если их скорость  $v = c$ . Очевидно, что формула (5.19) приближенно справедлива для любой частицы с  $m \neq 0$ , если у нее  $p \gg mc$ . Такие частицы называются ультрарелятивистскими. Но при  $m \neq 0$  скорость частицы  $v$  всегда меньше  $c$ . Это следует из (5.11): при  $v \rightarrow c$  энергия частицы возрастает до бесконечности, что, очевидно, невозможно.

**5.3. Связь между массой и энергией.** Рассмотрим нерелятивистский предел для уравнений (5.10), (5.11). Полагая  $v/c \ll 1$ , получаем из (5.10)  $p = mv$ , что находится в полном соответствии с известным выражением для импульса свободной нерелятивистской частицы. В (5.11) удерживаем при разложении член, содержащий  $v^2/c^2$ , и получаем

$$\mathcal{E} = mc^2 + mv^2/2. \quad (5.20)$$

Второе слагаемое представляет собой кинетическую энергию нерелятивистской частицы. Первый же член, величина  $mc^2$  — постоянная. Как мы знаем, в классической механике полная энергия частицы определена с точностью до аддитивной постоянной. Поэтому возникает вопрос — следует ли рассматривать величину

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \quad (5.21)$$

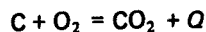
как "энергию покоя" неподвижной частицы, способную проявлять себя в различных физических процессах, или эта величина представляет собой ненаблюдаемую и не имеющую физического смысла постоянную, которую можно обратить в нуль изменением начала отсчета энергии? Для ответа на этот вопрос следует обратиться к опыту.

В явлениях, в которых массы частиц не изменяются и сами частицы не испытывают превращений, постоянные  $mc^2$  не играют роли, так как наблюдаемыми на опыте являются разности энергий покоящихся и движущихся нерелятивистских частиц, из которых эти постоянные выпадают. Так, если на покоящуюся частицу начинает действовать некоторая сила, которая сообщает ей скорость  $v \ll c$ , то изменение энергии частицы

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = mv^2/2$$

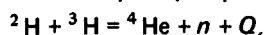
совпадает с известным выражением для нерелятивистской энергии, а постоянная  $mc^2$  в таком процессе никак не проявляется. Характерной чертой таких (нерелятивистских) процессов является приблизительное сохранение массы покоя участвующих в них частиц.

Например, при сжигании обычного (химического) топлива в реакции типа



на один акт выделяется энергия  $Q$  в форме кинетической энергии молекул или фотонов порядка нескольких электронвольт (эВ). Это означает, что масса образовавшейся молекулы  $\text{CO}_2$  меньше суммы масс молекул С и О на величину порядка  $\Delta m = Q/c^2$ . Энергия покоя молекулы  $\text{CO}_2$  составляет  $\mathcal{E}_0 = mc^2 \approx 4 \cdot 10^9$  эВ; таким образом, относительное изменение массы покоя равно  $\Delta m/m \approx 10^{-9}$ , т.е. эта величина сохраняется с огромной точностью. Поэтому при изучении явлений, происходящих с нерелятивистскими частицами (химические превращения, нерелятивистская механика сплошных сред и др.) сохранение массы покоя участвующих в таких процессах частиц рассматривают как точный закон природы.

При ядерных реакциях относительное изменение массы значительно больше. Например, в реакции



играющей важную роль для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза, ядро гелия  ${}^4\text{He}$  ( $\alpha$ -частица) и нейтрон получают кинетическую энергию  $Q \approx 17,6$  МэВ. Относительное изменение массы  $\Delta m/m$  в этом случае порядка  $3 \cdot 10^{-3}$ .

Но в природе происходят и такие процессы, в которых  $\Delta m/m$  достигает десятков процентов и даже может быть  $\Delta m/m = 1$ , т.е. частицы с отличной от нуля массой покоя превращаются в безмассовые частицы. Примером может служить превращение электронно-позитронных или мюонных пар в фотоны высокой энергии —  $\gamma$ -кванты:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma, \quad \mu^+ + \mu^- \rightarrow 2\gamma.$$

Таким образом, в общем случае релятивистских процессов масса покоя частиц (а следовательно, и макроскопических тел) не сохраняется.

Во всех перечисленных процессах та или иная часть энергии покоя исходных частиц  $\Delta \mathcal{E}_0 = \Delta mc^2$  превращалась в кинетическую энергию образующихся частиц (включая фотоны) и через нее — в другие виды энергии. Это означает, что энергия покоя  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  является такой же физической реальностью, как и другие виды энергии. Во всяком неподвижном теле массы  $m$  заключена энергия  $\mathcal{E}_0 = mc^2$ . Эту формулу с помощью (5.11) можно обобщить на случай движущегося тела, записав

$$\mathcal{E} = m_* c^2, \quad (5.22)$$

где

$$m_* = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5.23)$$

— полная масса или масса, зависящая от скорости. При таком обобщении каждая система частиц, движущаяся или неподвижная, если она имеет полную энергию  $\mathcal{E}$ , то имеет и эквивалентную ей массу:

$$m_* = \mathcal{E}/c^2. \quad (5.24)$$

Определенную таким образом массу можно приписать любому объекту. Она эквивалентна энергии, отличаясь от нее лишь универсальным множителем  $c^2$ . Но мы далее в этой книге будем называть массой только инвариантную величину  $m$  — массу покоя. Энергию  $\mathcal{E}$  нередко называют "полной" в отличие от "кинетической" энергии

$$T = \mathcal{E} - mc^2, \quad (5.25)$$

не включающей энергии покоя.

## § 6. КИНЕМАТИКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Полезную и разнообразную информацию о процессах столкновений и распадов частиц можно получить только на основе законов сохранения энергии и импульса, не задаваясь явным видом взаимодействия между частицами. Энергия и импульс замкнутой системы частиц в релятивистской механике, как и в классической, являются интегралами движения: вспомним, что сохранение импульса связано с однородностью пространства, а сохранение энергии — с однородностью времени. Поскольку указанные свойства симметрии пространства — времени выполняются в СТО, как и в классической механике, то и законы сохранения энергии и импульса в релятивистской механике также имеют место.

Общая кинематическая задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть у нас имеется несколько частиц  $a, b, \dots$ , первоначально находящихся на значительных расстояниях друг от друга и потому не взаимодействующих; 4-импульсы этих частиц в начальном состоянии обозначим через  $p_a^i, p_b^i, \dots$  соответственно ( $i = 0, 1, 2, 3$ ). Пусть, далее, эти частицы при своем движении сближаются и взаимодействуют друг с другом. Характер их взаимодействия при решении кинематических задач не играет особой роли и может быть весьма разнообразным: это могут быть упругие столкновения, при которых число частиц и их типы остаются неизменными, либо распады и неупругие столкновения, когда могут изменяться число частиц, их типы и внутренние состояния. Символически этот процесс взаимодействия можно записать в виде

$$a + b + \dots \rightarrow m + n + \dots$$

Считая, что в конечном состоянии частицы  $m, n, \dots$  находятся опять на значительных расстояниях друг от друга, имеют 4-импульсы  $p_m^i, p_n^i, \dots$  и не взаимодействуют, мы можем записать закон сохранения 4-импульса всей системы в виде равенства сумм 4-импульсов всех частиц до и после взаимодействия:

$$p_a^i + p_b^i + \dots = p_m^i + p_n^i + \dots$$

Эти равенства выполняются в любой инерциальной системе отсчета. Полезно также помнить, что квадрат любого 4-импульса есть инвариант и, следовательно, имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько типичных кинематических задач. Они позволят читателю быстрее освоиться с формулами релятивистской механики \*). Кроме того, предлагаемые задачи представляют и самостоятельный интерес. Во всех приводимых ниже формулах выбираем систему единиц, в которой  $c = 1$ . В используемой системе, в частности, совпадают единицы массы и энергии.

### 6.1. Распад частиц.

**З а д а ч а.** Частица массы  $M$  распадается на две частицы с массами  $m_1, m_2$ . Найти энергии продуктов распада в системе покоя распадающейся частицы.

**Р е ш е н и е.** Исходим из закона сохранения 4-импульса, записанного в системе покоя исходной частицы:

$$P_0^i = p_{10}^i + p_{20}^i, \quad (6.1)$$

где  $P_0^i, p_{10}^i, p_{20}^i$  — 4-импульсы исходной и образующихся частиц:  $P_0^i = (M, 0), p_{10}^i =$

\*) Значительное число полезных задач читатель может найти в [16].

$= (\varepsilon_{10}, p_{10}), p_{20}^i = (\varepsilon_{20}, p_{20})$ . В трехмерной записи (6.1) эквивалентно законам сохранения энергии и трехмерного импульса:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{10} + \varepsilon_{20} &= M, \\ p_{10} + p_{20} &= 0.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Поскольку  $\varepsilon_{10} \geq m_1$ ,  $\varepsilon_{20} \geq m_2$ , то из первого равенства получаем условие, необходимое для самопроизвольного (без подвода энергии извне) распада частицы:

$$M \geq m_1 + m_2, \quad (6.3)$$

После простых преобразований (6.2) с использованием (5.16) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{10} + \varepsilon_{20} &= M, \quad \varepsilon_{10} - \varepsilon_{20} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M}, \\ \text{откуда} \\ \varepsilon_{10} &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \varepsilon_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Нетрудно вычислить энергии  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и в лабораторной системе, относительно которой исходная частица движется со скоростью  $V$ . Для этого нужно задаться углом  $\theta_0$  между  $p_{10} = -p_{20}$  и  $V$  и применить формулы (5.13).

#### 6.2. Энергетический порог реакции.

З а д а ч а. Частица с массой  $m_1$  налетает на покоящуюся частицу с массой  $m_2$ . В результате образуется несколько частиц с суммарной массой  $M > m_1 + m_2$ . При малой кинетической энергии налетающей частицы реакция запрашена законом сохранения энергии. Найти минимальную кинетическую энергию налетающей частицы  $T_{1 \min}$ , при которой реакция становится энергетически возможной.

Р е ш е н и е. Значение  $T_{1 \min}$  определяется условием, что образовавшиеся частицы покоятся в системе центра масс (в лабораторной системе частицы не могут покоиться — это противоречило бы закону сохранения импульса). Следовательно, в системе центра масс полный 4-импульс после реакции равен  $P_0^{\mu} = (M, 0)$ . До реакции в этой же системе 4-импульс был равен  $P_0^{\mu}$ , причем  $P_0^i = P_0^i$ . Но поскольку  $P_0^i P_{0i}$  — инвариант, можем записать:

$$P_i P^i = P_{0i} P_0^i = P_{0i} P_0^i, \quad (6.5)$$

где  $P^i = (\varepsilon_{1 \min} + m_2, p_{1 \min})$  — полный 4-импульс в лабораторной системе до реакции. Подставив в (6.5) значения 4-импульсов, будем иметь

$$(\varepsilon_{1 \min} + m_2)^2 - p_{1 \min}^2 = M^2,$$

откуда с помощью равенств  $T_{1 \min} = \varepsilon_{1 \min} - m_1$  и  $\varepsilon_{1 \min}^2 - p_{1 \min}^2 = m_1^2$  получаем:

$$T_{1 \min} = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}. \quad (6.6)$$

**6.3. Кинематика двухчастичных реакций.** Двухчастичными реакциями называются превращения элементарных частиц, идущие по схеме

$$a + b \rightarrow c + d,$$

когда две частицы  $a$  и  $b$ , взаимодействуя, превращаются в две другие частицы,  $c$  и  $d$ . Частным случаем такого процесса является упругое рассеяние, при котором массы частиц не изменяются, но изменяются энергии и направления движения. Любые реакции, как правило, приходится рассматривать в двух системах отсчета — лабораторной ( $L$ ) и системе центра инерции ( $\zeta$ ): в  $\zeta$ -системе удобно производить теоретический анализ взаимодействия частиц; в  $L$ -системе ставятся реальные эксперименты.

Все кинематические соотношения, которым удовлетворяют двухчастичные реакции, выводятся из закона сохранения 4-импульса

$$p_a^i + p_b^i = p_c^i + p_d^i, \quad (6.7)$$

который справедлив в любой системе отсчета, и из инвариантности квадрата 4-импульса. Различные кинематические величины (энергии частиц до и после реакции, им-

пульсы, углы их отклонения и т.д.) удобно выразить через инвариантные параметры:

$$\begin{aligned} s &= (p_a^i + p_b^i)(p_{ai} + p_{bi}), \\ t &= (p_a^i - p_c^i)(p_{ai} - p_{ci}), \\ u &= (p_a^i - p_d^i)(p_{ai} - p_{di}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Величины  $s$ ,  $t$ , и  $u$  суть релятивистские инварианты, так как они представляют собой квадраты 4-импульсов. Они связаны линейным соотношением, вытекающим из (6.7):

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2, \quad (6.9)$$

где квадрат массы каждой частицы совпадает с квадратом ее 4-импульса:

$$m_a^2 = p_a^i p_{ai} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, из трех параметров (6.8) только два независимы.

Параметр  $s$  представляет собой квадрат полного 4-импульса частиц в начальном состоянии. Если в Л-системе одна из частиц первоначально покоится, то  $s$  выражается через энергию налетающей частицы (см. (6.15)). Параметр  $t$  при упругом рассеянии (когда частица  $c$  совпадает с частицей  $a$ ) представляет собой квадрат 4-импульса, переданного частице  $b$  при рассеянии. При неупругом столкновении величина  $t$  является релятивистским обобщением переданного импульса. Этот параметр выражается через угол рассеяния (см. (6.14)). Параметр  $u$  также представляет собой квадрат импульса, переданного от частицы  $a$  частице  $d$ .

Выразим вначале энергии частиц в Ц-системе через параметр  $s$ . Для этого запишем определение  $s$  через 4-импульсы в Ц-системе:

$$p_{a0}^i + p_{b0}^i = (\mathcal{E}_{a0} + \mathcal{E}_{b0}, 0), \quad p_{c0}^i + p_{d0}^i = (\mathcal{E}_{c0} + \mathcal{E}_{d0}, 0).$$

Пространственные части этих 4-импульсов обращаются в нуль, так как по определению Ц-системы  $p_{a0} = -p_{b0}$  и  $p_{c0} = -p_{d0}$ . Далее имеем:

$$s = (\mathcal{E}_{a0} + \mathcal{E}_{b0})^2 = (\mathcal{E}_{c0} + \mathcal{E}_{d0})^2. \quad (6.10)$$

Разрешая равенства (6.10) относительно импульсов, получим

$$p_{a0}^2 = p_{b0}^2 = \frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{4s}, \quad p_{c0}^2 = p_{d0}^2 = \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{4s} \quad (6.11)$$

где величина

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (6.12)$$

называется "кинематической функцией". Теперь нетрудно найти энергии  $\mathcal{E}_{a0} =$

$$= \sqrt{p_{a0}^2 + m_a^2} \text{ и т.д.:}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{a0} &= \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}, & \mathcal{E}_{b0} &= \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}}, \\ \mathcal{E}_{c0} &= \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{s}}, & \mathcal{E}_{d0} &= \frac{s + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Косинус угла между  $p_{a0}$  и  $p_{c0}$  выражается через два инварианта,  $s$  и  $t$ , с помощью соотношения

$$t = m_a^2 + m_c^2 + 2p_{a0}p_{c0}\cos\theta_0 - 2\mathcal{E}_{a0}\mathcal{E}_{c0},$$

которое получается в результате подстановки в (6.8) 4-импульсов, определенных в Ц-системе. Выражая абсолютные величины импульсов и энергии с помощью (6.11),

(6.13), получим

$$\cos \theta_0 = \frac{s^2 + s(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)(m_c^2 - m_d^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)}. \quad (6.14)$$

Выразим теперь через кинематические инварианты энергии и импульсы частиц в Л-системе. Пусть в Л-системе частица с массой  $m_b$  до столкновения покоилась. Подставляя в формулу (6.В), определяющую инвариант  $s$ , величины  $p_a^i = (\varepsilon_a, p_a)$  и  $p_b^i = (m_b, 0)$ , находим

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2\varepsilon_a m_b. \quad (6.15)$$

откуда

$$\varepsilon_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}. \quad (6.16)$$

В определении  $t$  заменяем разность  $p_a^i - p_c^i$  на  $p_d^i - p_b^i$  в соответствии с (6.7). Получаем соотношение

$$t = m_b^2 + m_d^2 - 2m_b \varepsilon_d.$$

из которого определяется энергия частицы  $d$  в лабораторной системе:

$$\varepsilon_d = \frac{m_b^2 + m_d^2 - t}{2m_b}. \quad (6.17)$$

Наконец, из закона сохранения энергии находим  $\varepsilon_c$ :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_a + m_b - \varepsilon_d = \frac{s + t - m_a^2 - m_d^2}{2m_b} = \frac{1}{2m_b}(m_b^2 + m_c^2 - u). \quad (6.18)$$

Теперь нетрудно с помощью (5.16) вычислить  $p_c$  и  $p_d$ . Угол  $\theta_{ac}$  в лабораторной системе вычисляется тем же способом, что и  $\cos \theta_0$ . Мы не приводим здесь этих формул.

Применим полученные соотношения к упругому рассеянию двух частиц. При этом

$$m_c = m_a, \quad m_d = m_b, \quad \lambda(s, m_a^2, m_b^2) = 4m_b^2(\varepsilon_a^2 - m_a^2),$$

и

$$t = \frac{2m_b^2(\varepsilon_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b \varepsilon_a} (1 - \cos \theta_0). \quad (6.19)$$

С помощью (6.17), (6.18) и (6.19) найдем энергии частиц в Л-системе после рассеяния как функции  $\varepsilon_a$  и угла рассеяния в Ц-системе:

$$\varepsilon'_a = \varepsilon_c = \varepsilon_a - \frac{m_b(\varepsilon_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b \varepsilon_a} (1 - \cos \theta_0), \quad (6.20)$$

$$\varepsilon'_b = \varepsilon_d = m_b + \frac{m_b(\varepsilon_a^2 - m_a^2)}{m_a^2 + m_b^2 + 2m_b \varepsilon_a} (1 - \cos \theta_0). \quad (6.21)$$

Передача энергии отсутствует при  $\theta_0 = 0$  и максимальна при  $\theta_0 = \pi$ .

**6.4. Преобразование фазового объема и функций распределения.** При рассмотрении систем состоящих из большого числа релятивистских частиц (пучок частиц от ускорителя, космические лучи — газ релятивистских частиц и т.д.) обычно вводят функции, характеризующие распределение частиц по импульсам и в пространстве — функции распределения. Для многих целей необходимо знать, как преобразуются такие функции при пере-

ходе в другую инерциальную систему. Мы рассмотрим три типа функций распределения: по импульсам, по координатам и в фазовом пространстве.

Функцию распределения по импульсам  $f(p)$  определим следующим образом: произведение  $f(p)$  на элемент объема  $d^3p = p^2 dp d\Omega_p$  трехмерного импульсного пространства равно числу  $dN$  частиц в системе, импульсы которых направлены внутри телесного угла  $d\Omega_p$ , а их абсолютные величины заключены между  $p$  и  $p + dp$ , т.е.

$$dN = f(p) d^3p. \quad (6.22)$$

Интегрирование (6.22) по всем значениям импульсов дает полное число  $N$  частиц в системе. Иногда вместо  $f(p)$  рассматривают величину  $w(p) = \frac{1}{N} f(p)$ , которая нормирована на единицу.

Закон преобразования  $f(p)$  установим из того очевидного факта, что как полное число частиц  $N$ , так и их малая часть  $dN$  суть инварианты, одинаковые во всех инерциальных системах:

$$dN = f(p) d^3p = f'(p') d^3p' = \text{inv}. \quad (6.23)$$

Отсюда

$$f'(p') = f(p) \frac{d^3p}{d^3p'}, \quad (6.24)$$

где все величины в правой части равенства нужно выразить через  $p'$  с помощью формул преобразования.

Вычислим отношение  $d^3p/d^3p'$ , воспользовавшись для определенности декартовыми проекциями импульса и формулами (5.15). Имеем

$$dp_x = \gamma \left( dp'_x + \frac{V d\mathcal{E}'}{c^2} \right) = \gamma \left( 1 + \frac{V}{c^2} \frac{d\mathcal{E}'}{dp'_x} \right) dp'_x.$$

Но

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dp'_x} = \frac{c^2 p'_x}{\mathcal{E}'},$$

поэтому

$$dp_x = \frac{\gamma}{\mathcal{E}'} (\mathcal{E}' + V p'_x) dp'_x = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} dp'_x;$$

поперечные же проекции импульса не изменяются:  $dp_y = dp'_y$ ,  $dp_z = dp'_z$ .

Отсюда

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'} d^3p',$$

или

$$\frac{d^3p}{\mathcal{E}} = \frac{d^3p'}{\mathcal{E}'}. \quad (6.25)$$

Подставляя (6.25) в (6.24) и выразив  $\mathcal{E}$  и  $p$  через штрихованные величины, будем иметь

$$f'(p') = \gamma \left( 1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{V}}{\mathcal{E}'} \right) f(\gamma(p'_x + V\mathcal{E}'/c^2), p'_y, p'_z). \quad (6.26)$$

Найдем теперь закон преобразования функции распределения в фазовом пространстве  $f(r, p)$ , определяемой следующим образом: число частиц

$dN$ , находящихся в объеме  $d^3x$  координатного и объеме  $d^3p$  импульсного пространства, выражается в виде

$$dN = f(r, p) d^3x d^3p. \quad (6.27)$$

Согласно (2.2).

$$d^3x = (\gamma'/\gamma) d^3x', \quad (6.28)$$

где  $\gamma$  — релятивистский фактор. Но, поскольку  $\gamma/\gamma' = \gamma/\gamma'$ , то из (6.25) следует:  $d^3p = (\gamma/\gamma') d^3p'$ . Таким образом, фазовый объем

$$d^3x d^3p = d^3x' d^3p' = \text{inv}. \quad (6.29)$$

Следовательно,

$$f'(r', p') = f(r, p). \quad (6.30)$$

— также инвариант.

Нам осталось найти закон преобразования функции распределения по координатам, т.е. концентрации частиц

$$n(r) = \int f(r, p) d^3p. \quad (6.31)$$

Как оказывается, для этого нужно рассмотреть ее совместно с вектором плотности потока частиц

$$j(r) = \int v f(r, p) d^3p, \quad (6.32)$$

поскольку указанные величины преобразуются друг через друга. Это будет сделано в § 13.

## Глава II

### СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

#### § 7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

**7.1. Взаимодействие в теории относительности.** Электрический заряд и электромагнитное поле. Взаимодействие частиц в теории относительности существенно отличается от взаимодействий, рассматриваемых в классической механике. В классической механике широко пользуются понятием потенциальной энергии. В случае двух материальных точек их потенциальная энергия зависит от разностей координат:  $U(r_1(t) - r_2(t))$ . Концепция потенциальной энергии предполагает, что а) взаимодействие передается с бесконечной скоростью; б) частицы взаимодействуют на расстоянии, без какого-либо промежуточного агента, передающего взаимодействие (такая картина называется "дальнодействием").

Конечность скорости распространения взаимодействий радикально меняет эту картину. Изменение положения или скорости частицы 1 меняет силу, приложенную к частице 2, но это изменение дойдет до частицы 2 только через конечное время  $\tau = r_{12}/u$ , где  $u \leq c$  — скорость распространения взаимодействия. Это означает, что взаимодействующие частицы должны создавать в окружающем пространстве силовое поле, через которое и передается взаимодействие. Изменения координат и скоростей частиц создают возмущения поля, распространяющиеся с конечной скоростью. Рассматри-

ваемая частица почувствует эти изменения состояний других частиц через изменение поля в той точке, в которой она находится ("близкодействие"). Концепция поля, таким образом, с неизбежностью вытекает из требований теории относительности. Если в классической механике "поле" могло играть лишь роль вспомогательного математического понятия, то теория относительности рассматривает поле как "физическую реальность, данную нам в ощущении" (через посредство соответствующих приборов), т.е. как одну из форм материи. Поле не менее материально, чем частицы.

Мы будем рассматривать в этой книге только один тип поля — электромагнитное поле. Взаимодействие частиц с электромагнитным полем, а также и сама генерация (создание) поля обусловлены важным свойством элементарных частиц, называемым *электрическим зарядом*. Электрический заряд является одной из основных характеристик элементарных частиц, наряду с такими фундаментальными величинами, как масса, спин (внутренний момент импульса) и некоторые другие, изучаемые в квантовой теории. Понятие электрического заряда мы будем считать элементарным понятием, не требующим другого определения.

Простейшим и вместе с тем фундаментальным фактом, позволяющим обнаружить самое существование электрического заряда и количественно его охарактеризовать, является факт взаимодействия между зарядами. Опыт устанавливает, что силы взаимодействия между неподвижными заряженными телами малых размеров, находящимися в вакууме, подчинены закону

$$F_{21} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} \quad (7.1)$$

(закон Кулона). Это равенство справедливо и с учетом знаков зарядов  $e_1, e_2$ .

Зависимость от расстояния может быть проверена путем изменения расстояния и измерения при этом силы взаимодействия. Зависимость силы от  $e_1, e_2$  можно установить, если взять несколько зарядов — не менее четырех. Будем помещать их попарно в одни и те же точки 1 и 2 пространства, удаляя остальные заряды "на бесконечность". Тогда, если справедлив закон (7.1), то

$$\frac{F_{23}}{F_{13}} = \frac{F_{24}}{F_{14}} = \frac{e_2}{e_1}, \quad (7.2)$$

и закон Кулона можно проверить при четырех независимых измерениях (с точностью до постоянного множителя, определяемого выбором системы единиц).

Из наиболее распространенных при обычных условиях элементарных частиц отрицательным (условно) зарядом  $e = -e_0$  обладают электроны, а положительным зарядом  $e = +e_0$  — протоны; численное значение элементарного заряда  $e_0 = 4,8 \cdot 10^{-10}$  ед. СГС  $= 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Каждой элементарной частице соответствует ее античастица, заряд которой равен по абсолютной величине и противоположен по знаку заряду частицы. Некоторые элементарные частицы (нейтроны, нейтрино, нейтральные мезоны) не имеют электрического заряда, но нейтроны (и антинейтроны) имеют магнитный момент. Любопытно, что электрический заряд всех "элементарных" частиц равен по абсолютной величине либо элементарному заряду, либо нулю \*).

\*) В состав элементарных частиц, называемых адронами, входят кварки, которые по современным данным имеют дробные электрические заряды.

**7.2. Действие для частицы, находящейся в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал.** Для количественного описания процессов взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем на основе лагранжева формализма, которым мы уже пользовались в гл. I при рассмотрении свободных частиц, нужно постулировать вид действия. Запишем действие для частицы с зарядом  $e$ , находящейся в заданном (т.е. не зависящем от движения рассматриваемой частицы) электромагнитном поле в виде

$$S = S_{\text{part}} + S_{\text{int}}, \quad (7.3)$$

где

$$S_{\text{part}} = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds \quad (7.4)$$

— действие (5.4) свободной частицы,  $S_{\text{int}}$  — слагаемое, описывающее взаимодействие частицы с электромагнитным полем. Действие  $S_{\text{int}}$  должно удовлетворять следующим очевидным свойствам: а) быть релятивистским инвариантом — для того, чтобы был выполнен принцип относительности; б) содержать (в виде произведения) величины, относящиеся к частице (ее заряд  $e$ ) и величины, описывающие поле, поскольку частицы, не имеющие заряда, с электромагнитным полем не взаимодействуют \*).

Постулируем взаимодействие вида

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int_{(1)}^{(2)} A_i(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i, \quad (7.5)$$

где интеграл берется вдоль мировой линии частицы, проходящей через точки 1 и 2,  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) — действительные функции координат и времени, описывающие электромагнитное поле и образующие ковариантный 4-вектор, множитель  $-1/c$  выделен для удобства. Мы ввели, таким образом, для описания электромагнитного поля 4-вектор  $A_i$ , который называется четырехмерным потенциалом. Взаимодействие (7.5) удовлетворяет сформулированным выше условиям а) и б), но не определяется ими однозначно. Мы увидим, однако, что выражение (7.3) и вытекающие из него следствия будут находиться в полном согласии с многочисленными опытными данными о взаимодействии частиц с электромагнитным полем, это и служит в конечном счете главным аргументом в пользу выбора взаимодействия (7.5).

## § 8. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

**8.1. Функция Лагранжа и уравнение движения.** Действие, вид которого был постулирован в предыдущем параграфе, позволяет записать уравнение движения заряженной частицы. Мы получим здесь требуемое уравнение в форме, наиболее близкой к ньютоновской. На основе (7.3) — (7.5) имеем:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right). \quad (8.1)$$

\*) Мы не рассматриваем здесь случай, когда нейтральная частица имеет магнитный момент.

где интегрирование производится вдоль мировой линии частицы между фиксированными точками 1 и 2 в 4-пространстве;  $x^i$  — четырехмерные координаты в произвольной инерциальной системе отсчета. Поскольку  $ds$  и  $A_i dx^i$  — релятивистские инварианты, то  $S$  — также инвариант, и полученное из релятивистски инвариантного действия уравнение движения будет справедливо в любой инерциальной системе.

Чтобы привести (8.1) к обычной форме (5.1), перейдем к интегрированию по  $t$ , записав предварительно  $A_i = (\varphi, -A)$  и  $A_i dx^i = c\varphi dt - A \cdot dr$ :

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mc \frac{ds}{dt} - e\varphi + \frac{e}{c} A \cdot \frac{dr}{dt} \right) dt, \quad (8.2)$$

Здесь величины  $\varphi(r, t)$  и  $A(r, t)$  называются скалярным и векторным потенциалами электромагнитного поля (их совокупность образует 4-потенциал). Далее,  $dr/dt = \mathbf{v}$  — трехмерная скорость частицы,  $ds/dt$  выразим согласно (5.5), и, таким образом,

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e\varphi \right) dt. \quad (8.3)$$

Тем самым определена функция Лагранжа заряженной частицы:

$$L(r, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(r, t) - e\varphi(r, t). \quad (8.4)$$

Отмеченный выше факт, согласно которому частицы могут взаимодействовать только через посредство поля, позволяет легко обобщить функцию (8.4) на случай системы взаимодействующих частиц:

$$L = -\sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} + \sum_a \frac{e_a}{c} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{A}(r_a, t) - \sum_a e_a \varphi(r_a, t). \quad (8.5)$$

При этом под  $\mathbf{A}(r_a, t)$  и  $\varphi(r_a, t)$  нужно понимать потенциалы, создаваемые внешними телами и всеми частицами, кроме  $a$ -й, в точке нахождения  $a$ -й частицы. При переходе к нерелятивистскому пределу изменяется только первое слагаемое. Преобразовав радикал, как это делалось в § 5, и отбросив из функции Лагранжа постоянное слагаемое  $\sum m_a c^2$ , получим

$$L_{\text{nonrel}} = \sum_a \left\{ \frac{mv_a^2}{2} + \frac{e_a}{c} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{A}(r_a, t) - e_a \varphi(r_a, t) \right\}. \quad (8.6)$$

Уравнение движения в лагранжевой форме имеет вид (5.12). Вычислим входящие в него производные (для одной частицы):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(r, t). \quad (8.7)$$

Как известно, производная  $\partial L / \partial \mathbf{v} = \mathbf{P}$  носит название обобщенного импульса. Согласно (8.7), обобщенный импульс  $\mathbf{P}$  не совпадает с импульсом  $\mathbf{p}$  (5.10) свободной частицы:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(r, t). \quad (8.8)$$

Затем вычисляем производную по времени

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right) \quad (8.9)$$

и производную по координатам

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - e \nabla \varphi.$$

В последнем равенстве удобно воспользоваться векторным дифференциальным тождеством

$$\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A},$$

в котором учтено, что оператор дифференцирования  $\nabla$  не действует на вектор  $\mathbf{v}$ . В итоге будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}] - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} - e \nabla \varphi,$$

а уравнение движения запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}. \quad (8.10)$$

**8.2. Сила Лоренца. Напряженность электромагнитного поля.** Величина, стоящая в правой части равенства, по определению представляет собой силу, действующую на заряженную частицу:

$$\mathbf{F} = e \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}. \quad (8.11)$$

Сравним это выражение с известным из опыта выражением для силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (8.12)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы, характеризующие электромагнитное поле. Они называются *напряженностями электрического и магнитного полей* соответственно. Мы будем рассматривать силу Лоренца (8.12) как фундаментальный опытный факт. Выражение (8.12) для силы Лоренца — это одна из самых красивых формул классической физики. Она производит глубокое впечатление своей простотой и общностью: любая заряженная частица, движущаяся с произвольной скоростью, будет испытывать в электромагнитном поле действие силы (8.12). В отличие от многих других формул релятивистской механики (например (5.10), (5.11)), содержащих релятивистский фактор  $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ , сила Лоренца линейна по  $\mathbf{v}$ . Она линейна также по  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Сила Лоренца играет важную роль в классической электродинамике, описывая во всех возможных ситуациях действие электромагнитного поля на заряженные частицы. Она позволяет свести измерение напряженностей электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  к измерению механических величин  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  (а также заряда  $e$ , способы определения которого обсуждались в § 7). При этом напряженность  $\mathbf{E}$  определяется силой, действующей на неподвижную ( $\mathbf{v} = 0$ ) пробную частицу с зарядом  $e$ ; напряженность  $\mathbf{H}$  — добавочной силой, которая действует на движущуюся частицу.

Сравнение (8.11) с (8.12) позволяет связать введенный ранее 4-потенциал с напряженностями электромагнитного поля:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (8.13)$$

Поскольку  $\mathbf{A}$  — трехмерный полярный вектор, а  $\varphi$  — скаляр, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при вращениях в трехмерном пространстве преобразуются одинаковым образом по закону преобразования векторов. Но при отражении координатных осей (преобразование  $r' = -r$ )  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ведут себя различно: вектор  $\mathbf{E}$ , как и  $r$ , изменяет знак на противоположный, а вектор  $\mathbf{H}$  не изменяет знака. Поэтому  $\mathbf{H}$  называется псевдовектором, или аксиальным вектором, в отличие от  $\mathbf{E}$ , который является истинным, или полярным вектором.

На примере измерения  $\mathbf{H}$  через силу Лоренца можно еще раз убедиться в псевдовекторном характере напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля: хотя

сила  $\mathbf{F}_m = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$  определена путем измерения вполне однозначно, знак  $\mathbf{H}$  условен и зависит от определения векторного произведения. Если условиться понимать под  $\mathbf{v}, \mathbf{H}$  и  $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$  не правую, а левую тройку векторов, то знак  $\mathbf{H}$  заменится на обратный. Это — характерная особенность аксиальных векторов: определена лишь ось, но не ее направление (см. по этому вопросу также Дополнение I.6). Напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  такая неопределенность не присуща: его направление при измеренной силе  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}$  и известном заряде  $e$  определяется единственным образом.

**8.3. Градиентное преобразование потенциалов.** Из (8.13) видно, что одним и тем же напряженностям электромагнитного поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  отвечает широкий класс электромагнитных потенциалов. В самом деле, векторный потенциал

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad (8.14)$$

где  $\chi(r, t)$  — произвольная дифференцируемая скалярная функция, не изменяет магнитного вектора:  $\tilde{\mathbf{H}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$ , так как равенство  $\text{rot } \nabla \chi = 0$  выполняется тождественно при всех  $\chi$ . Чтобы при таком преобразовании не изменялся и электрический вектор  $\mathbf{E}$ , нужно преобразовать также скалярный потенциал:

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (8.15)$$

Таким образом, напряженности поля  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — инварианты относительно преобразований потенциалов (8.14), (8.15), которые называются *градиентными* или *калибровочными* преобразованиями. Из калибровочной инвариантности электромагнитной теории вытекают глубокие следствия, некоторые из которых будут обсуждаться в гл. III.

Градиентное преобразование потенциалов нетрудно записать в 4-форме:

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}, \quad (8.16)$$

где  $\chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$  — произвольный дифференцируемый 4-скаляр.

В классической электродинамике наблюдаемыми величинами являются напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , потенциалы же выступают как вспомогательные функции, из которых  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  получаются дифференцированием по формулам (8.13). Несмотря на то что потенциалы не являются основными величина-

ми, они играют важную роль в электродинамике. Они позволяют уменьшить число неизвестных функций с шести  $(E, H)$  до четырех  $(A, \varphi)$ . Как было продемонстрировано выше, без потенциалов невозможно обойтись при формулировке вариационного принципа. Особенно большое значение приобретают электромагнитные потенциалы в квантовой механике и при квантовомеханическом описании электромагнитного поля. Именно потенциалы  $A, \varphi$ , а не напряженности поля  $E, H$  входят в большинство уравнений квантовой механики и квантовой электродинамики.

**8.4. Функция Гамильтона.** По определению, известному из механики, функция Гамильтона зависит от обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени и определяется равенством

$$\mathcal{H}(r, P, t) = P \cdot v - L, \quad (8.17)$$

где правую часть нужно выразить через  $r, P$  и  $t$ . В качестве обобщенных координат выбраны декартовы координаты  $r = (x, y, z)$ .

Подставив в (8.17) выражения (8.7) и (8.4), получим

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой энергию свободной частицы (5.11). Выразив ее через  $p = P - \frac{e}{c} A$  согласно (5.18), получим окончательно:

$$\mathcal{H}(r, P, t) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( P - \frac{e}{c} A \right)^2} + e\varphi. \quad (8.18)$$

Найденная функция Гамильтона позволяет записать уравнения в форме канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{P} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}. \quad (8.19)$$

Мы рекомендуем читателю убедиться самостоятельно, что уравнения (8.19) эквивалентны уравнению движения (8.10).

## § 9. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В КОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**9.1. Вариация действия и уравнение движения.** Уравнение движения (8.10) релятивистски инвариантно (справедливо в любой инерциальной системе), но не ковариантно (правая и левая его части не являются 4-тензорами какого-либо ранга). Между тем, ковариантная запись имеет определенные преимущества: она делает релятивистскую инвариантность явной и позволяет найти закон релятивистского преобразования для напряженностей электромагнитного поля  $E, H$ .

Для получения уравнений движения в ковариантной форме произведем варьирование действия (8.1) непосредственно, не переходя к нековариантной записи через функцию Лагранжа, которая выделяет одну (временную) координату. Будем иметь:

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mc \delta ds - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i - \frac{e}{c} A_i \delta dx^i \right). \quad (9.1)$$

Затем вычислим вариацию  $ds$ : по определению  $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ ,

$$\delta ds = \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = \frac{1}{c} u_i \delta dx^i; \quad (9.2)$$

в последнем равенстве мы использовали (4.28) и определение 4-скорости (4.29). Это позволяет представить (9.1) в виде

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left( -mu_i \delta dx^i - \frac{e}{c} A_i \delta dx^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right).$$

Далее интегрируем первые два члена по частям и получаем

$$\delta S = \left( -mu_i - \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \left( m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \delta x^i - \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right). \quad (9.3)$$

В фиксированных 4-точках 1 и 2  $\delta x^i = 0$ , поэтому выделившийся внеинтегральный член обращается в нуль. В подынтегральном выражении преобразуем отдельные члены следующим образом:

$$\begin{aligned} du_i &= \frac{du_i}{d\tau} d\tau; & dA_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} d\tau = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d\tau; \\ \delta A_i &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k; & dx^i &= u^i d\tau. \end{aligned} \quad (9.4)$$

В результате подстановки этих формул в (9.3) получаем

$$\delta S = \int \left( m \frac{du_i}{d\tau} \delta x^i d\tau + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k \delta x^i d\tau - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^i \delta x^k d\tau \right). \quad (9.5)$$

В последнем слагаемом делаем перестановку немых индексов  $i \rightleftharpoons k$  и вводим обозначение

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \quad (9.6)$$

Величина  $F_{ik}$  представляет собой антисимметричный ковариантный 4-тензор II ранга — ротор 4-потенциала. Он называется *тензором электромагнитного поля* и играет огромную роль в электродинамике.

Вариация действия, записанная через тензор  $F_{ik}$ , принимает вид

$$\delta S = \int_{(1)}^{(2)} \left( m \frac{du_i}{d\tau} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i d\tau. \quad (9.7)$$

Для того чтобы не нарушалась симметрия между 4-координатами, необходимо считать все четыре вариации,  $\delta x^i, i = 0, 1, 2, 3$ , произвольными и отличными от нуля. В нерелятивистской же механике варьирование обобщенных координат производится при постоянном времени, т.е. при  $\delta x^0 = 0$ . Таким образом, в релятивистской теории вариационный принцип должен быть несколько обобщен. Однако это обобщение сказывается лишь на форме записи уравнений движения, но не на их содержании, так как ре-

зультаты, которые мы ниже получим, будут эквивалентны результатам § 8, в котором варьирование производилось при  $t = \text{const}$ .

Ввиду произвольности и независимости вариаций  $\delta x^i$  из условия стационарности действия  $\delta S = 0$  следуют уравнения движения

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (9.8)$$

По форме они представляют собой равенство между двумя ковариантными 4-векторами. Это равенство выполняется, конечно, и для контравариантных компонент:

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (9.9)$$

Вернемся теперь к равенству (9.3). Интегральный член в нем тождествен (9.7) и обращается в нуль при движении частицы по физической траектории. Если закрепить точку 1 и варьировать координаты точки 2, то вариация действия примет вид

$$\delta S = - \left( m u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i.$$

С другой стороны,  $\delta S = \frac{\partial S}{\partial x^i} \delta x^i$ , откуда

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = - \left( m u_i + \frac{e}{c} A_i \right).$$

Назовем

$$P_i = - \frac{\partial S}{\partial x^i} = m u_i + \frac{e}{c} A_i \quad (9.10)$$

ковариантным 4-вектором обобщенного импульса; тогда контравариантный 4-вектор  $P^i$  запишется в виде

$$P^i = \left( \frac{\mathcal{H} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (9.11)$$

Его пространственная часть совпадает с трехмерным вектором обобщенного импульса (8.8), а временная компонента представляет собой функцию Гамильтона (8.18), деленную на  $c$ . Таким образом, величины  $(\mathcal{H}/c, \mathbf{P}) = P^i$  образуют контравариантный 4-вектор обобщенного импульса. Его компоненты, согласно (9.11) — (9.13), связаны с производными от действия теми же соотношениями, которые хорошо известны из классической механики:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = - \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (9.12)$$

Это позволяет составить уравнение Гамильтона — Якоби и использовать его для решения задач о движении релятивистских частиц в электромагнитном поле.

Как известно из механики, уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}, t) = 0, \quad (9.13)$$

где  $\mathcal{H}$  — функция Гамильтона (8.18), в которой обобщенный импульс  $\mathbf{P}$  следует заменить величиной  $\text{grad} S$  в соответствии с (9.12). Пользуясь

(8.18), получим

$$\sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \text{grad } S - \frac{e}{c} A \right)^2} = - \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right),$$

или, избавляясь от радикала,

$$\left( \text{grad } S - \frac{e}{c} A \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (9.14)$$

Это и есть уравнение Гамильтона – Якоби для релятивистской частицы.

**9.2. Связь тензора поля с напряженностями  $E, H$ .** Выпишем отдельные компоненты тензора  $F_{ik}$ , подставив в определение (9.6)  $A_i = (\varphi, -A)$ . Получим

$$F_{01} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x, \quad F_{12} = +\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -H_z \text{ и т. д.,}$$

т.е., согласно (8.13), компоненты тензора  $F_{ik}$  совпадают с проекциями трехмерных векторов  $E, H$ .

Запишем связь между 4-тензором электромагнитного поля и 3-векторами напряженности в виде

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Напряженности поля являются компонентами единого антисимметричного 4-тензора второго ранга.

Перепишем теперь уравнение движения (9.9) в трехмерной форме. Вспоминая связь трехмерного импульса с 4-скоростью (5.14), видим, что левая часть (9.9),  $m du^\alpha/d\tau$  при  $\alpha = 1, 2, 3$ , сводится к производной  $\gamma dp/dt$ , где  $\gamma$  – лоренц-фактор. Правая часть с помощью (9.15) и (4.30) записывается в виде силы Лоренца (8.12), умноженной на  $\gamma$ . В итоге получаем трехмерное уравнение движения:

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (9.16)$$

Компонента (9.9) с  $i = 0$  тем же путем приводится к виду

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = eE \cdot \mathbf{v}, \quad (9.17)$$

т.е. выражает изменение кинетической энергии частицы. Уравнение (9.17) не является независимым и может быть получено из (9.16) путем умножения обеих частей скалярно на  $\mathbf{v}$ . При этом согласно (5.18) и (5.13)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dp} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \frac{dp}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

где  $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  есть сумма кинетической энергии частицы и энергии

покоя. Она не включает в себя энергию взаимодействия с электромагнитным полем. Отметим, что магнитное поле не производит работы над частицей, так как магнитная сила всегда перпендикулярна скорости.

§ 10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОСТЕЙ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ИНВАРИАНТЫ ПОЛЯ

**10.1. Преобразование напряженностей.** Выяснение того фундаментального факта, что векторы  $E$  и  $H$  представляют собой компоненты 4-тензора поля  $F^{ik}$ , позволяет с легкостью найти преобразования этих векторов из одной инерциальной системы в другую. Исходим из закона преобразования тензора (4.15):

$$F^{ik'} = a^i_m a^k_n F^{mn}, \quad (10.1)$$

где матрица  $a^i_m$  определена (4.11). Отсюда получаем, например,

$$\begin{aligned} F^{10'} &= a^1_0 a^0_1 F^{01} + a^1_1 a^0_0 F^{10} = (\text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi) F^{10} = F^{10}, \\ F^{20'} &= a^2_2 a^0_0 F^{20} + a^2_2 a^1_1 F^{21} = \text{ch} \psi F^{20} - \text{sh} \psi F^{21} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Обращаясь к (9.15), находим следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta H_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta H_y), \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma(H_y + \beta E_z), & H'_z &= \gamma(H_z - \beta E_y). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Формулы (10.2) можно переписать в векторном виде, если ввести параллельные и перпендикулярные относительной скорости  $V$  составляющие векторов  $E$  и  $H$ :

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & E'_\perp &= \gamma \left( E_\perp + \frac{1}{c} V \times H \right), \\ H'_\parallel &= H_\parallel, & H'_\perp &= \gamma \left( H_\perp - \frac{1}{c} V \times E \right). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Важный частный случай формул (10.3) — относительное движение систем отсчета с нерелятивистской скоростью,  $V \ll c$ . При этом  $\gamma \approx 1$  и с точностью до линейных по  $V/c$  членов

$$E' = E + \frac{1}{c} V \times H, \quad H' = H - \frac{1}{c} V \times E. \quad (10.4)$$

**10.2. Инварианты поля.** Составим все возможные независимые инварианты из компонент тензора  $F^{ik}$ . Свертка тензора, являющаяся инвариантом — его след  $F^i_i$  — в данном случае обращается в нуль. Нетривиальным инвариантом является скалярный квадрат тензора  $F^{ik}$ , т.е. его произведение на ковариантный тензор:

$$F_{ik} F^{ik} = \text{inv.} \quad (10.5)$$

Второй независимый инвариант строится с помощью единичного совершенно антисимметричного тензора  $e_{iklm}$  (см. § 4):

$$e_{iklm} F^{ik} F^{lm} = \text{inv.} \quad (10.6)$$

Произведения (10.5) и (10.6) нетрудно выразить через  $E$  и  $H$  с помощью (9.15):

$$F_{ik} F^{ik} = 2(H^2 - E^2), \quad e_{iklm} F^{ik} F^{lm} = 2E \cdot H.$$

Таким образом, релятивистскими инвариантами являются

$$E^2 - H^2 = \text{inv}, \quad E \cdot H = \text{inv}. \quad (10.7)$$

Найденные величины по-разному ведут себя при отражении пространственных или временной оси. Разность  $E^2 - H^2$  является инвариантом и по отношению к преобразованию отражения осей. Произведение  $E \cdot H$  меняет знак при отражении трех пространственных или временной оси: в первом случае  $E' = -E$ ,  $H' = H$ , а во втором случае  $E' = E$ , но  $H' = -H$ . Поэтому  $E \cdot H$  — не истинный скаляр, а псевдоскаляр. Однако  $E \cdot H$  остается инвариантным относительно отражения всех четырех осей.

Инварианты поля будут использованы в § 13 для построения релятивистски инвариантного действия. Кроме того, с их помощью можно находить инерциальные системы отсчета, в которых электромагнитное поле имеет наиболее простой вид. Пусть, например, в некоторой системе отсчета  $E$  и  $H$  однородны и взаимно перпендикулярны, т.е.  $E \cdot H = 0$ . Тогда, в зависимости от знака разности  $E^2 - H^2$ , можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой  $E' = 0$  (при  $E^2 - H^2 < 0$ ) или  $H' = 0$  (при  $E^2 - H^2 > 0$ ).

В первом из указанных случаев полагаем скорость искомой системы отсчета  $V$  перпендикулярной плоскости  $(E, H)$  и записываем для нее на основе (10.3) уравнение

$$E' = \gamma \left( E + \frac{1}{c} V \times H \right) = 0,$$

из которого находим

$$V = c \frac{E \times H}{H^2}. \quad (10.8)$$

Во втором случае тем же путем из условия  $H' = 0$  находим

$$V = c \frac{E \times H}{E^2}. \quad (10.9)$$

В обоих случаях  $V < c$ , что является необходимым условием существования искомой инерциальной системы.

#### § 11. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДРЕЙФ

**11.1. Движение в однородном магнитном поле.** Здесь мы исследуем один из простейших случаев — движение частицы во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях  $E, H$ . В конце § 10 было показано, что при  $E \neq H$  существует такая инерциальная система, в которой одна из напряженностей обращается в нуль. При  $E < H$  в системе, движущейся относительно исходной со скоростью

$$V_E = c \frac{E \times H}{H^2}, \quad (11.1)$$

остается только магнитное поле, которое будет иметь согласно (10.3) напряженность

$$H' = \left( \frac{H^2 - E^2}{H^2} \right)^{1/2} H. \quad (11.2)$$

Запишем уравнения движения заряженной частицы (9.16), (9.17) в системе отсчета, в которой  $E' = 0, H' \neq 0$ :

$$\frac{dp'}{dt'} = \frac{e}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{H}', \quad \frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = 0. \quad (11.3)$$

Последнее уравнение показывает, что в магнитном поле энергия частицы, а следовательно, и абсолютная величина импульса не изменяются — поле не совершает работы над частицей, а лишь изменяет направление ее движения. Первое уравнение (11.3) можно с помощью (15.14) записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \vec{\Omega}' \times \mathbf{p}', \quad (11.4)$$

где

$$\vec{\Omega}' = -\frac{e\mathcal{E}'}{mc^2} \mathbf{H}' \quad (11.5)$$

— гиромагнитная (циклотронная) частота; для нерелятивистских частиц  $\mathcal{E}' \approx mc^2$  и

$$\vec{\Omega}' = -\frac{e\mathbf{H}'}{mc}. \quad (11.6)$$

Выберем ось  $z'$  в направлении поля  $\mathbf{H}$  и запишем (11.4) в проекциях на оси координат:

$$\frac{dp'_x}{dt'} = -\Omega' p'_y, \quad \frac{dp'_y}{dt'} = \Omega' p'_x, \quad \frac{dp'_z}{dt'} = 0. \quad (11.7)$$

Последнее уравнение дает  $p'_z = \text{const}$ , т.е. частица движется в направлении поля  $\mathbf{H}'$  с постоянной скоростью  $v'_z = v'_{\parallel}$ , определяемой начальными условиями. Первые два уравнения удобно привести к виду

$$\frac{d}{dt'} (p'_x + ip'_y) = i\Omega' (p'_x + ip'_y), \quad (11.8)$$

где  $i$  — мнимая единица. Интегрируя (11.8), находим

$$p'_x + ip'_y = C e^{i\Omega' t'},$$

где  $C$  — комплексная постоянная интегрирования. Записав ее в виде  $C = p'_\perp e^{i\alpha'}$ , где  $p'_\perp = |C|$  и разделив действительную и мнимую части, получим

$$p'_x = p'_\perp \cos(\Omega' t' + \alpha'), \quad p'_y = p'_\perp \sin(\Omega' t' + \alpha'). \quad (11.9)$$

Отсюда следует, что  $p'_\perp = \sqrt{p'^2_x + p'^2_y}$  — абсолютное значение проекции импульса на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{H}'$ ,  $\alpha'$  — начальная фаза вращения, импульс частицы вращается с гиромагнитной частотой (11.5) вокруг направления магнитного поля, оставаясь постоянным по абсолютному значению.

Скорость частицы связана с ее импульсом соотношением (5.13):  $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / \mathcal{E}$ . Интегрируя скорость по времени с использованием (11.9) и

условия  $\mathcal{E}' = \text{const}$ , находим зависимость координат от времени:

$$x' = R'_\perp \sin(\Omega' t' + \alpha'), \quad y' = -R'_\perp \cos(\Omega' t' + \alpha'), \quad z' = z'_0 + v'_\parallel t'. \quad (11.10)$$

Здесь

$$R'_\perp = \frac{cp_\perp}{eH'}, \quad (11.11)$$

— радиус вращения частицы в плоскости, перпендикулярной  $H'$ , который называют также *гирорадиусом* или *ларморовским радиусом*. Ось  $z'$  выбрана проходящей через центр ларморовского кружка. Частица движется по спирали, навитой на поверхность цилиндра радиуса  $R'_\perp$ . Шаг спирали

$$h = 2\pi v'_\parallel / \Omega',$$

где  $2\pi/\Omega'$  — период циклотронного вращения. При  $v'_\parallel = 0$  частица движется по окружности в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля.

**11.2. Электрический дрейф.** Рассмотрим теперь картину движения частицы в исходной (лабораторной) системе отсчета, в которой отличны от нуля обе напряженности поля,  $E$  и  $H$ . Координаты частицы в этой системе можно выразить через (11.10) с помощью преобразований Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x'(t') + V_E t'), & y &= y'(t'), & z &= z'(t'), \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{1}{c^2} V_E x'(t')\right), & \gamma &= (1 - V_E^2/c^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Мы выбрали ось  $x$  направленной вдоль  $V_E$ , а ось  $y$  — вдоль  $E$ . Формулы (11.12) задают движение частицы в исходной (лабораторной) системе в параметрической форме, причем в качестве параметра использовано время  $t'$ . Постоянные  $R'_\perp, v'_\parallel, \alpha', z'_0$ , которые входят в правые части (11.12), определяются из начальных условий.

Рассмотрим важный случай слабого электрического поля,  $E \ll H$ , что соответствует  $V_E \ll c$ , т.е. нерелятивистскому относительному движению систем отсчета. Вычислим скорость  $v$  в лабораторной системе с точностью до членов, линейных по  $V_E/c$ . В этом приближении  $\gamma = 1$ . Поделив дифференциалы  $dx, dy, dz$  на  $dt = dt' + \frac{1}{c^2} V_E dx'$ , получим с требуемой точностью:

$$v_x = v'_x(t') + V_E \left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right),$$

$$v_y = v'_y(t') - \frac{1}{c^2} V_E v'_x(t') v'_y(t'),$$

$$v_z = v'_\parallel - \frac{1}{c^2} V_E v'_\parallel v'_x(t').$$

Если движение частицы в штриховенной системе нерелятивистское, то слагаемые порядка  $v'^2/c^2$  можно отбросить. Но при  $v' \sim c$  они не малы.

Имея в виду в дальнейшем усреднить скорость по времени  $t$ , запишем в слагаемых нулевого порядка  $t' = t - \frac{1}{c^2} V_E x'(t')$ ; в членах первого по-

рядка, пропорциональных  $V_E$ , можно положить  $t' = t$ . В итоге будем иметь

$$v_x(t) = v'_x(t) + V_E \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dv'_x(t)}{dt} x'(t) - \frac{1}{c^2} v'^2_x(t) \right],$$

$$v_y(t) = v'_y(t) - \frac{1}{c^2} V_E \left[ \frac{dv'_y(t)}{dt} x'(t) + v'_y(t) v'_x(t) \right],$$

$$v_z(t) = v'_z - \frac{1}{c^2} V_E v'_z v'_x(t).$$

Усредним теперь  $v(t)$  по периоду  $T = 2\pi/\Omega'$  вращения частиц вокруг направления магнитного поля:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_x(s) ds \quad \text{и т. д.}$$

С помощью формул (11.9), (11.10) находим

$$\overline{\frac{dv'_x(t)}{dt} x'(t)} = -\frac{1}{2} v'^2_{\perp}, \quad \overline{v'^2_x(t)} = \frac{1}{2} v'^2_{\perp} \quad \text{и т. д.,}$$

так что окончательно

$$\bar{v}_x = V_E, \quad \bar{v}_y = 0, \quad \bar{v}_z = v'_{\parallel},$$

или в векторной форме

$$\bar{\mathbf{v}} = v'_{\parallel} \mathbf{h} + V_E \mathbf{e}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H}/H. \quad (11.13)$$

Таким образом, усредненное движение частицы в лабораторной системе складывается из равномерного движения вдоль магнитного поля и равномерного движения в направлении, перпендикулярном как электрическому, так и магнитному векторам со скоростью (11.1). Последнее движение называется *электрическим дрейфом*. Скорость электрического дрейфа  $V_E$  зависит только от отношения напряженностей электрического и магнитного полей. Она не зависит от заряда и энергии частиц, и, в частности, одинакова для релятивистских и нерелятивистских частиц, электронов и ядер. Но это не означает, что электрический дрейф испытывают и нейтральные частицы. Ларморовский радиус нейтральной частицы бесконечен, и усреднение по циклотронному вращению не имеет смысла.

Происхождение электрического дрейфа легко понять из наглядных соображений. Частица, вращающаяся вокруг  $\mathbf{H}$ , на половине окружности ускоряется электрическим полем, а на второй половине — замедляется, согласно формуле

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathbf{p}' \cdot V_E, \quad V_E \ll c, \quad \mathcal{E}' = \text{const.} \quad (11.14)$$

Поэтому ларморовский радиус на разных фазах вращения оказывается различным, что приводит к движению частицы перпендикулярно  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (рис. 11.1). Детальная форма траектории зависит от параметров задачи.

Поперечный дрейф может быть вызван не только электрическим полем, но и любой другой силой  $\mathbf{F}$ , приложенной перпендикулярно  $\mathbf{H}$ , например, гравитацией или градиентом давления. Силе  $\mathbf{F}$ , действующей на частицу, можно сопоставить эффективное электрическое поле  $\mathbf{E}_* = \mathbf{F}/e$ . Подстав-

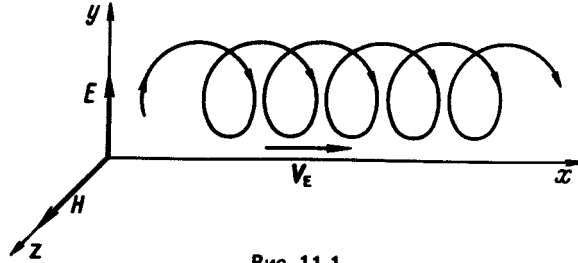


Рис. 11.1.

для его значения в (11.1), находим скорость соответствующего дрейфа:

$$V_F = c \frac{F \times H}{eH^2}. \quad (11.15)$$

Эта скорость зависит от знака и величины заряда; частицы с зарядами разных знаков будут дрейфовать в разные стороны.

**11.3. Гиперболическое движение.** При  $E > H$ ,  $E \cdot H = 0$  существует система отсчета, движущаяся со скоростью (10.9), в которой

$$H' = 0, \quad E' = \left( \frac{E^2 - H^2}{E^2} \right)^{1/2} E \neq 0.$$

В этой системе движение заряженной частицы происходит только под действием электрической силы. Рассмотрим процесс ускорения первоначально покоившейся заряженной частицы постоянным и однородным электрическим полем. Для разнообразия решим эту задачу исходя из уравнения движения (9.9) в ковариантной форме.

Выберем ось 1 в направлении  $E$ . Тогда уравнение (9.9) с помощью (9.15) сведется к системе двух уравнений первого порядка относительно  $u^1(\tau)$ ,  $u^0(\tau)$ :

$$m \frac{du^1}{d\tau} = \frac{e}{c} E u^0, \quad m \frac{du^0}{d\tau} = \frac{e}{c} E u^1. \quad (11.16)$$

Эту систему следует проинтегрировать с начальными условиями

$$u^0(0) = c, \quad u^1(0) = 0, \quad (11.17)$$

причем отсчет собственного времени  $\tau$  выбран так, что

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (11.18)$$

Ищем решение системы (11.16) в форме

$$u^1(\tau) = A \operatorname{sh} \lambda \tau, \quad u^0(\tau) = B \operatorname{ch} \lambda \tau, \quad (11.19)$$

где  $A, B, \lambda$  — постоянные. Из начальных условий (11.17) находим:  $B = c$ . Подстановка (11.19) в (11.16) дает два алгебраических уравнения для определения  $A$  и  $\lambda$ ;

$$m \lambda A = e E, \quad m \lambda c = \frac{e}{c} E A,$$

откуда  $\lambda = e E / m c$ ,  $A = c$ . Тем самым, найдена 4-скорость в функции собственного времени:

$$\frac{dx^1}{d\tau} = u^1(\tau) = c \operatorname{sh} \lambda \tau, \quad \frac{dx^0}{d\tau} = u^0(\tau) = c \operatorname{ch} \lambda \tau. \quad (11.20)$$

Последующее интегрирование позволяет найти связь  $x^1 = x$  и  $x^0 = ct$  с собственным временем  $\tau$ :

$$x(\tau) = \frac{c}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda \tau, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda \tau. \quad (11.21)$$

Начальные условия выбраны таким образом, что  $x(0) = c/\lambda$ .

Связь между координатой  $x$  и временем  $t$  в лабораторной системе получается в результате исключения  $\tau$  из равенств (11.21) с помощью тождества  $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$ :

$$\frac{x^2}{(c/\lambda)^2} - \frac{(ct)^2}{(c/\lambda)^2} = 1. \quad (11.22)$$

Из этого уравнения следует, что в плоскости  $(x, ct)$  частица описывает гиперболу (рис. 11.2). В зависимости от знака заряда частицы движение будет происходить по одной из двух ее ветвей.

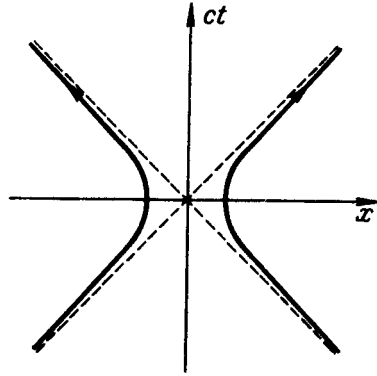


Рис. 11.2.

Наконец, вычислим энергию  $\mathcal{E}$  и трехмерную скорость  $v$  частицы. Имеем

$$\mathcal{E}(\tau) = mc u^0(\tau) = mc^2 \operatorname{ch} \lambda \tau,$$

$$v(\tau) = \frac{c^2 m u^1(\tau)}{\mathcal{E}(\tau)} = c \operatorname{th} \lambda \tau, \quad (11.23)$$

или, в функции времени  $t$ ,

$$\mathcal{E}(t) = mc^2 \sqrt{1 + \left( \frac{eEt}{mc} \right)^2},$$

$$v(t) = \frac{eE}{m} \frac{t}{\sqrt{1 + \left( \frac{eEt}{mc} \right)^2}}. \quad (11.24)$$

Скорость частицы асимптотически приближается к  $c$  за характерное время порядка нескольких  $t_0 = mc/eE$ , а энергия нарастает при больших временах линейно со временем. Предоставляем читателям самим убедиться, что при  $t \ll t_0$  из (11.22), (11.24) получаются известные формулы для равноускоренного движения нерелятивистской частицы.

## § 12. ТЕОРЕМА ЛАРМОРА

Рассмотрим систему одинаковых заряженных нерелятивистских частиц, находящихся во внешнем электрическом аксиально-симметричном поле. Как повлияет на такую систему частиц слабое однородное магнитное поле, направленное вдоль оси симметрии?

Ответ на поставленный вопрос дает *теорема Лармора*: при наложении слабого магнитного поля система частиц приходит во вращение как целое с угловой скоростью

$$\bar{\Omega}_L = -\frac{eH}{2mc}. \quad (12.1)$$

Это движение называется *ларморовской прецессией*. Наиболее простое доказательство теоремы Лармора можно получить путем сравнения функций Лагранжа системы частиц в магнитном поле и той же системы без магнитного поля, но рассматриваемой относительно вращающихся координатных осей. В отсутствие магнитного поля функция Лагранжа имеет вид, хорошо известный из классической механики:

$$L_0 = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} - U, \quad (12.2)$$

где  $U$  — полная потенциальная энергия, включающая энергию взаимодействия частиц друг с другом и с внешним полем. При наложении магнитного поля функция Лагранжа приобретает, согласно (8.6), добавку  $\sum_a \frac{e_a}{c} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{A}_a$ , где  $\mathbf{A}_a$  — векторный потенциал в той точке, где находится частица.

При  $H = \text{const}$  удобно представить  $\mathbf{A}$  в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \times \mathbf{r}, \quad (12.3)$$

так как

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla \times [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{2} \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \frac{3}{2} \mathbf{H} - \frac{1}{2} \mathbf{H} = \mathbf{H}.$$

Функция Лагранжа системы частиц в магнитном поле приобретает следующий вид:

$$L_H = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + \frac{e}{2c} \sum_a \mathbf{v}_a \cdot [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] - U. \quad (12.4)$$

Теперь запишем функцию Лагранжа (12.2) относительно осей, вращающихся с угловой скоростью  $\bar{\Omega}$  вокруг оси симметрии внешнего поля. Скорости частицы  $\mathbf{v}_a$  в неподвижной и  $\mathbf{v}'_a$  во вращающейся системе связаны соотношением

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \bar{\Omega} \times \mathbf{r}'_a. \quad (12.5)$$

известным из классической механики. При выполнении условия

$$|\bar{\Omega} \times \mathbf{r}'_a| \ll v'_a \quad (12.6)$$

в функции Лагранжа достаточно учесть только линейные по  $\Omega$  члены. Подставляя (12.5) в (12.4), и отбрасывая слагаемые с  $\Omega^2$ , получим

$$L_\Omega = \sum_a \frac{mv_a'^2}{2} + \sum_a m \mathbf{v}'_a \cdot [\bar{\Omega} \times \mathbf{r}'_a] - U. \quad (12.7)$$

Существенно, что потенциальная энергия  $U$  при переходе к вращающимся осям не изменяется:

$$U(r_1, \dots, r_N) = U(r'_1, \dots, r'_N).$$

Это связано с тем, что при нерелятивистских скоростях движения расстояния между частицами и расстояния  $\rho_a$  от каждой из частиц до оси симметрии — одни и те же в неподвижной и вращающейся системах отсчета:

$$|r_a - r_b| = |r'_a - r'_b|, \quad \rho_a = \rho'_a.$$

а только от таких комбинаций координат может зависеть потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц в аксиально-симметричном поле. Поэтому функции Лагранжа  $L_\Omega$  и  $L_H$  становятся одинаковыми, если  $\vec{\Omega} = eH/2mc$ . Но это означает, что и поведение частиц одинаково: система частиц, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета, при наложении магнитного поля приобретает угловую скорость  $\Omega_L = -eH/2mc$ . Знак минус появляется потому, что направления вращения частиц относительно координатных осей и осей относительно частиц взаимно противоположны.

Уточним смысл условия (12.6). Пусть частицы без магнитного поля совершают финитное квазипериодическое движение, как, например, электроны в атомах. Тогда можно положить  $v'_a \approx \omega_a r'_a$ , где  $\omega_a$  — частота вращения  $a$ -й частицы. Условие (12.6) сводится к неравенству

$$\omega_a \gg \Omega_L. \quad (12.8)$$

т.е. частота ларморовской прецессии должна быть мала по сравнению с собственными частотами частиц. Это условие играет существенную роль, и если оно не выполнено, то теорема Лармора неверна. Например, для свободных частиц ( $\omega_a \rightarrow 0$ ) частота вращения вдвое больше  $\Omega_L$  (см. (11.6)).

Из приведенного доказательства теоремы Лармора следует, что она справедлива и для таких частиц, у которых  $e_a$  и  $m_a$  различны, если только отношения  $e_a/m_a$  одинаковы.

### Глава III

#### УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

##### § 13. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В КОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

**13.1. Действие для системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля.** В главах I и II мы применили принцип наименьшего действия для получения уравнений движения свободной частицы и частицы в электромагнитном поле. Естественно использовать тот же подход и для вывода уравнений движения самого электромагнитного поля, что мы и сделаем ниже. Общую формулировку вариационного принципа для непрерывных систем мы будем считать известной из классической механики \*).

Начнем с построения действия для системы "заряженные частицы + электромагнитное поле". В духе общего подхода, основанного на понятии

\*) Для тех читателей, которым необходимо освежить в памяти эти сведения, они приведены в Дополнении III.

вид. В кулоновской калибровке скалярный потенциал  $A^0 = \varphi$  согласно (18.1) и (18.7) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (18.8)$$

в которое время входит как параметр. Потенциал  $A$  должен определяться из уравнения (18.1) при  $i = 1, 2, 3$ :

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (18.9)$$

Условие калибровки (18.7), наложенное на потенциалы  $A^i$  и  $\tilde{A}_i$ , приводит к следующему ограничению на функцию  $\chi$  градиентного преобразования:

$$\Delta\chi = 0. \quad (18.10)$$

Если рассматривается электромагнитное поле в отсутствие зарядов и токов, т.е. при  $\rho = 0$  и  $j = 0$ , то можно выбрать такую калибровку потенциалов, при которой  $\varphi = 0$  тождественно, а также  $\text{div } A = 0$ . При таком выборе потенциалов уравнение (18.8) удовлетворяется тождественно, а (18.9) превращается в уравнение Даламбера:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (18.11)$$

#### Глава IV

#### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

##### § 19. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Как мы уже видели в § 14, если напряженность электрического поля не зависит от времени, то система уравнений Максвелла распадается на две пары уравнений, содержащих только электрические или только магнитные величины. Уравнения Максвелла для постоянного электрического поля имеют вид

$$\text{rot } E = 0, \quad \text{div } E = 4\pi\rho. \quad (19.1)$$

Первое из этих уравнений указывает на безвихревой характер постоянного электрического поля. Оно удовлетворяется, если вектор  $E$  будет представлять собой градиент некоторой скалярной функции:

$$E(r) = -\text{grad } \varphi(r). \quad (19.2)$$

Величина  $\varphi(r)$  называется в этом случае электростатическим потенциалом, а формула (19.2) представляет собой частный случай соотношений (8.13) при  $\partial A/\partial t = 0$ .

Чтобы выяснить физический смысл потенциала  $\varphi$ , вычислим работу  $A$  электрических сил по перемещению заряда  $e$  вдоль некоторого контура  $l$  из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} eE \cdot dl = -e \int_{(1)}^{(2)} \nabla \varphi \cdot dl = -e \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = e(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.3)$$

Здесь мы воспользовались формулой для скалярного произведения векто-

ров  $\nabla\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$  и  $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ :

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = d\varphi,$$

где  $d\varphi$  — полный дифференциал функции  $\varphi$ .

Из формулы (19.3) следует, что работа электрических сил не зависит от пути перемещения заряда, а определяется только разностью потенциалов начальной и конечной точек. Если, в частности, эти точки совпадают (замкнутый контур), то работа обращается в нуль:

$$A = e\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (19.4)$$

Независимость работы электрических сил от пути — важнейшее свойство электростатического поля. Таким образом, измеряемой величиной является разность потенциалов в двух точках — она определит работу электрических сил по перемещению единичного заряда между этими точками. Поэтому сам электростатический потенциал  $\varphi(r)$  определяется неоднозначно — с точностью до произвольной аддитивной постоянной, не влияющей на значение разностей потенциалов.

Уравнение для электростатического потенциала мы получим, подставив  $\mathbf{E}$  из (19.2) в уравнение (19.1) для  $\operatorname{div} \mathbf{E}$ . Поскольку

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, то искомое уравнение имеет вид

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho. \quad (19.5)$$

Оно называется *уравнением Пуассона*. В частном случае, когда в рассматриваемой области пространства заряды отсутствуют, т.е.  $\rho = 0$ , уравнение Пуассона превращается в *уравнение Лапласа*:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (19.6)$$

Оператор Лапласа в уравнениях (19.5) и (19.6) может быть записан, разумеется, в любой координатной системе.

Граничные условия на особых поверхностях для уравнений (19.5) и (19.6) получаются из условий (15.6) и (15.14) для компонент вектора  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  и гласят:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma, \quad (19.7)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial \tau} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial \tau} = 0, \quad (19.8)$$

где через  $\frac{\partial}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  обозначены производные в направлении нормали и касательной к поверхности. Без ограничения общности второе условие можно заманить условием непрерывности потенциала на поверхности:

$$\varphi_2 = \varphi_1. \quad (19.9)$$

Уравнение Пуассона (19.5) сохраняет силу и при наличии точечных зарядов, если объемную плотность заряда записать через  $\delta$ -функцию Дираке,

как это делалось в § 13. Аналогичное замечание относится и к случаю, когда в пространстве имеются заряженные нити или поверхности. Объемную плотность заряда на них можно выразить через одномерную и двумерную  $\delta$ -функции. Например, если имеется точечный заряд в начале координат, то  $\rho(r) = e \delta(r)$  и уравнение Пуассона примет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e \delta(r). \quad (19.10)$$

Найдем из этого уравнения потенциал точечного заряда. Для этого примем во внимание сферическую симметрию задачи и проинтегрируем обе части уравнения по объему шара радиуса  $r$ . Левая часть по теореме Остроградского — Гаусса преобразуется к виду

$$\int \Delta\varphi dV = \int \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi dV = \oint \operatorname{grad} \varphi \cdot dS = 4\pi r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad (19.11)$$

а правая часть при теком интегрировании превратится в постоянную

$$\int 4\pi e \delta(r) dV = 4\pi e. \quad (19.12)$$

В результате уравнение примет вид

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -e, \quad (19.13)$$

и из него последующим интегрированием находим

$$\varphi(r) = \frac{e}{r} + C. \quad (19.14)$$

Постоянная  $C$  остается произвольной. Ее удобно выбрать равной нулю, с тем чтобы электростатический потенциал обращался в нуль на бесконечности. Отметим, что при подстановке (19.14) в уравнение (19.10) получается тождество

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(r), \quad (19.15)$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Наглядное представление об электростатическом поле дают поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности)

$$\varphi(x, y, z) = \text{const} \quad (19.16)$$

и силовые линии электрического поля. Последние определяются как линии, касательные в каждой точке пространства к вектору напряженности поля  $E$ . Поскольку  $E = -\nabla\varphi$ , а вектор  $\nabla\varphi$  направлен по нормали к поверхности равного потенциала, то и силовые линии нормальны к поверхности (19.16). Они могут быть найдены из условия параллельности  $E$  и элементу  $dl$  силовой линии:

$$E \times dl = 0. \quad (19.17)$$

Это векторное равенство можно переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, которая в декартовых координатах, выраженная через потенциал, принимает вид

$$\frac{dx}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{dy}{\partial\varphi/\partial y} = \frac{dz}{\partial\varphi/\partial z}. \quad (19.18)$$

Интегралы этих уравнений определяют две системы поверхностей, линии пересечения которых и являются силовыми линиями электрического поля. При использовании криволинейных ортогональных координат  $q_1, q_2, q_3$  уравнения (19.18) примут вид

$$\frac{h_1^2 dq_1}{\partial \varphi / \partial q_1} = \frac{h_2^2 dq_2}{\partial \varphi / \partial q_2} = \frac{h_3^2 dq_3}{\partial \varphi / \partial q_3}, \quad (19.19)$$

где  $h_\alpha$  — коэффициенты Ламе (функции координат).

## § 20. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

**20.1. Интегральная форма уравнения Пуассона.** Уравнение Пуассона (19.5) можно преобразовать к интегральной форме. Последняя позволяет в некоторых частных случаях получить решение в квадратурах, а в общем случае — лучше понять свойства решений уравнения Пуассона и постановку граничных условий.

Воспользуемся тождеством Грина

$$\int_{(V)} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_{(S)} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS, \quad (20.1)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — две произвольные дифференцируемые скалярные функции,  $V$  — произвольный объем,  $S$  — ограничивающая его замкнутая поверхность,  $\partial \varphi / \partial n$  и  $\partial \psi / \partial n$  — проекции градиентов на внешнюю нормаль к поверхности. Тождество Грина (20.1) получается путем применения теоремы Остроградского — Гаусса,  $\int \operatorname{div} a dV = \oint a \cdot dS$ , к вектору  $a = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$ , для которого

$$\operatorname{div} a = \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi.$$

Пусть мы интересуемся значением потенциала в точке  $M$ , лежащей внутри объема  $V$ . Выберем в качестве  $\varphi$  искомый потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона (19.5), а в качестве  $\psi$  — скалярную функцию  $\psi = 1/R$ , где  $R = |r_M - r|$  — расстояние от точки  $M$  до элемента интегрирования  $dV$ . Заметим, что согласно (19.15),  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi = -4\pi \delta(r_M - r), \quad (20.2)$$

которое получается, если в (19.15) заменить  $r$  на  $r_M - r$ . В (20.2) оператор Лапласа может действовать как на координаты точки  $r$ , так и на координаты  $r_M$ .

Подставим в (20.1) значения  $\Delta \varphi$  из (19.5) и  $\Delta \psi$  из (20.2). Это дает

$$4\pi \int_{(V)} \left[ -\varphi(r) \delta(r_M - r) + \frac{\rho(r)}{R} \right] dV = \oint_{(S)} \left[ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS.$$

Вычислив интеграл с  $\delta$ -функцией,  $\int \varphi(r) \delta(r_M - r) dV = \varphi(r_M) \equiv \varphi_M$ , находим

$$\varphi_M = \int_{(V)} \frac{\rho(r)}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_{(S)} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] dS. \quad (20.3)$$

Первое слагаемое в этой формуле описывает потенциал, создаваемый зарядами, которые находятся внутри объема  $V$ . Эту часть потенциала можно получить и по принципу суперпозиции, поскольку малый заряд  $\rho(r) dV$ , согласно (19.14), создает в точке  $M$  потенциал  $\rho dV/R$ , а полный потенциал

от всех зарядов внутри  $V$  получается суммированием (интегрированием) по этим зарядам. Второе слагаемое в (20.3) описывает потенциал от зарядов, находящихся вне объема  $V$  и на его границе, т.е. на поверхности  $S$ . Но оно учитывает указанные заряды не явно, через их объемную и поверхностную плотности, а через значения потенциала  $\varphi$  и нормальной компоненты напряженности поля  $E_n = -\partial\varphi/\partial n$  на границе объема.

Если все заряды, создающие электростатическое поле, находятся внутри конечного объема  $V$ , то поверхностный интеграл обращается в нуль и полный потенциал описывается выражением

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r') dV'}{|r - r'|}, \quad (20.4)$$

которое в этом случае является решением уравнения Пуассона (19.5). В этом легко убедиться, отодвигая поверхность  $S$  на бесконечность: на больших расстояниях потенциал ограниченной системы будет убывать не медленнее, чем потенциал точечного заряда, т.е.  $r^{-1}$ , а производные  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  и  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right)$  — не медленнее, чем  $r^{-2}$ . Следовательно, если устремить поверхность к бесконечности, то подынтегральное выражение будет убывать как  $r^{-3}$ , а сама поверхность — нарастать как  $r^2$ , и в целом весь поверхностный интеграл будет стремиться к нулю как  $r^{-1}$ , где  $r$  — радиус поверхности. Но, поскольку объемный интеграл не изменяется при изменении поверхности  $S$ , если она охватывает все заряды, то поверхностный интеграл обращается в нуль как в случае бесконечной, так и конечной поверхности.

Выражение (20.4) сохраняет силу и при наличии точечных зарядов, а также заряженных поверхностей и нитей, если ввести в объемную плотность заряда  $\rho(r)$  соответствующие  $\delta$ -образные вклады. Например, если все заряды — точечные, то

$$\rho(r) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(r - r_a), \quad (20.5)$$

и из (20.4) получим

$$\varphi(r) = \sum_{a=1}^N \frac{e_a}{|r - r_a|}, \quad (20.6)$$

т.е. алгебраическую сумму потенциалов точечных зарядов.

Зададимся вопросом — можно ли рассматривать формулу (20.4) как общее решение уравнения Пуассона? Это можно делать, если известно распределение зарядов во всем пространстве (и интеграл (20.4) сходится). Но во многих случаях (особенно при наличии материальных сред) распределение заряда известно только в ограниченной области пространства. Вне этой области и на ее границе распределение зарядов неизвестно, зато заданы значения потенциала или его нормальной производной на границе области. В этих условиях более удобной является форма (20.3). Однако ни в каком случае выражение (20.3) при отличном от нуля поверхностном интеграле нельзя рассматривать как решение уравнения Пуассона. Это было бы возможно, если бы допускалось одновременное и независимое задание  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n$  на некоторой поверхности. Тогда (при заданной  $\rho(r)$ ) обе слагаемых в правой части (20.3) были бы известными функциями координат, и (20.3) давало бы решение уравнения Пуассона. В действительности

же не произвольной замкнутой поверхности могут быть заданы произвольно либо  $\varphi$ , либо  $\partial\varphi/\partial n$ , но не обе эти величины одновременно (см. п. 20.2). Задавая одну из них, мы превращаем (20.3) в интегральное уравнение, так как неизвестная функция  $\varphi$  (или ее производная  $\partial\varphi/\partial n$ ) входит под знаком интеграла. Поэтому (20.3) можно рассматривать в общем случае только как интегральную форму уравнения Пуассона, но не как его решение.

**20.2. Единственность решения электростатической задачи.** Чтобы завершить дискуссию, начатую в конце п. 20.1, докажем *теорему единственности*.

Решение электростатической задачи внутри заданного объема  $V$  единственно, если в объеме  $V$  задано распределение зарядов  $\rho(r)$ , а на его поверхности  $S$  — либо потенциал  $\varphi$ , либо его нормальная производная  $\partial\varphi/\partial n$ .

Воспользуемся тождеством Грина

$$\int_{(V)} (\psi \Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi) dV = \oint_{(S)} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \quad (20.7)$$

которое получается путем применения теоремы Остроградского — Гаусса к вектору  $\mathbf{a} = \psi \nabla\varphi$ , где  $\psi$  и  $\varphi$  — произвольные дифференцируемые скаляры. Предположим, что существуют два различных решения электростатической задачи,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_{1,2} = -4\pi\rho \quad \text{внутри объема } V \quad (20.8)$$

и граничным условиям

$$\varphi_{1,2} = f \quad \text{на } S \quad (20.9a)$$

(условия Дирихле), либо

$$\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial n} = F \quad \text{на } S \quad (20.9b)$$

(условия Неймана), где  $f$  и  $F$  — заданные функции координат.

Положим в (20.7)  $\varphi = \psi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Из (20.8) следует, что  $\Delta\varphi = 0$ . Интеграл в правой части (20.7) также обращается в нуль, так как в силу (20.9a) и (20.9b) на поверхности  $S$  либо  $\varphi = 0$ , либо  $\partial\varphi/\partial n = 0$ . В итоге получаем

$$\int |\nabla\varphi|^2 dV = 0, \quad (20.10)$$

что возможно только при условии  $\nabla\varphi = 0$ , т.е.  $\varphi = \text{const}$ . В случае (20.9a)  $\text{const} = 0$ , т.е.  $\varphi_1 = \varphi_2$ . В случае (20.9b)  $\text{const} \neq 0$ , но два электростатических потенциала, отличающиеся на постоянную, физически эквивалентны. Таким образом, и в том, и в другом случае решение единственно.

**20.3. Решение граничной задачи с помощью функций Грина.** Соотношению (20.3) можно придать такую форму, что оно будет давать явное решение электростатической задачи, если ввести в него соответствующим образом подобранную функцию Грина. Функцией Грина  $G(r, r')$  электростатической задачи называется решение уравнения Пуассона для единичного точечного заряда

$$\Delta' G(r, r') = -4\pi \delta(r - r') \quad (20.11)$$

внутри данного объема  $V$ . Если вне объема  $V$  и на его поверхности другие заряды отсутствуют, то решением (20.11), справедливым во всем безгранич-

ном пространстве, является

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} \quad (20.12)$$

(см. (20.2)). Но если вне объема имеются другие заряды, заданные не явно, а через посредство соответствующего граничного условия на  $S$ , то вид функции Грина усложняется:

$$G(r, r') = \frac{1}{|r - r'|} + F(r, r'). \quad (20.13)$$

Здесь  $F(r, r')$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta' F(r, r') = 0 \quad (20.14)$$

и, следовательно, учитывает действие зарядов, находящихся вне заданного объема.

При задании граничных условий Дирихле (20.9а) подберем функцию  $F(r, r')$  так, чтобы выполнялось условие

$$G(r, r') = 0 \quad \text{для } r' \text{ на } S. \quad (20.15)$$

Отождествим в равенстве (20.1) функцию  $\varphi$  — с искомым потенциалом, а  $\psi$  — с функцией Грина (20.13), удовлетворяющей граничному условию (20.15). Получим равенство (20.3), в котором следует заменить  $1/R$  на  $G(r, r')$ . Но в силу (20.15), поверхностный интеграл будет содержать только одно слагаемое:

$$\varphi(r) = \int_{(V)} G(r, r') \rho(r') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \varphi(r') \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS'. \quad (20.16)$$

Поскольку  $\varphi(r')$  задан на  $S$ , то в (20.16) правая часть известна и дает значение потенциала в любой точке объема  $V$ .

При задании граничных условий Неймана (20.9б) оказывается невозможным наложить на функцию Грина граничное условие

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} = 0 \quad \text{для } r' \text{ на } S,$$

так как оно противоречит уравнению (20.11), из которого следует:

$$\oint_{(S)} \frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} dS' = -4\pi. \quad (20.17)$$

Простейшее условие, согласующееся с (20.17), имеет вид

$$\frac{\partial G(r, r')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{для } r' \text{ на } S. \quad (20.18)$$

Тогда, подставив в (20.3) вместо  $1/R$  функцию Грина (20.13), удовлетворяющую условию (20.18), получим

$$\varphi(r) = \bar{\varphi} + \int_{(V)} G(r, r') \rho(r') dV' + \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} G(r, r') \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n'} dS'. \quad (20.19)$$

Здесь  $\bar{\varphi} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \varphi(r) dS$  — среднее значение потенциала на поверхности  $S$ , которое может быть выбрано произвольно.

**Пример.** Найти потенциал внутри сферы радиуса  $a$ , если на расстоянии  $b < a$  от ее центра помещен точечный заряд  $q$ , а на поверхности сферы поддерживается потенциал  $\varphi = 0$ .

**Решение.** Построим функцию Грина, удовлетворяющую внутри сферы уравнению (20.11), а на ее поверхности — условию (20.15). Это достигается путем выбора  $F(r, r')$  в виде потенциала точечного заряда

$$F(r, r') = \frac{e_*}{|r_* - r'|}, \quad (20.20)$$

величина  $e_*$  и положение  $r_*(r)$  которого подбираются так, чтобы выполнить условие (20.15). Из соображений симметрии очевидно, что  $r$  и  $r_*$ , отсчитываемые от центра сферы, должны быть направлены вдоль одной прямой. Выбирая ось  $z$  сферической системы координат вдоль этой прямой, получим из (20.15) условие для определения параметров  $e_*$  и  $r_*$ :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}} + \frac{e_*}{\sqrt{r_*^2 + a^2 - 2ar_* \cos \vartheta}} = 0. \quad (20.21)$$

Уравнение (20.21) имеет два решения:  $e_* = -1$ ,  $r_* = r$  (тривиальное решение, потенциал равен нулю всюду в пространстве) и  $e_* = -a/r$ ,  $r_* = a^2/r$ . Второе решение и позволяет построить функцию Грина, которая в сферических координатах имеет вид

$$G(r, r') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} - \frac{a/r}{\sqrt{r_*^2 + r'^2 - 2r_*r' \cos \vartheta}}. \quad (20.22)$$

Вычисляя затем потенциал с помощью (20.16), где следует положить

$$\rho(r') = q \delta(r' - b), \quad \varphi = 0 \text{ на } S,$$

получим

$$\varphi(r) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \vartheta}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 r^2/a^2 - 2br \cos \vartheta}}, \quad (20.23)$$

где  $\vartheta$  — угол между линией расположения зарядов и радиус-вектором  $r$ .

## § 21. ПОТЕНЦИАЛ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ДИПОЛЬНЫЙ И КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТЫ

Если известно распределение в пространстве всех создающих электрическое поле зарядов, то, согласно (20.4), потенциал этого поля будет определяться интегралом

$$\varphi = \int \frac{\rho(r') dV'}{|r - r'|}.$$

Такое представление потенциала предполагает, что плотность  $\rho(r)$  отлична от нуля в ограниченной области пространства или достаточно быстро убывает при  $r \rightarrow \infty$  по любому направлению.

Интеграл может быть взят и представлен в аналитическом виде в сравнительно небольшом числе случаев, при относительно простой функции  $\rho(r')$ . Затруднения при вычислении этого интеграла в заметной степени связаны с тем, что в знаменателе подынтегрального выражения стоит иррациональное выражение  $|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + \dots}$ . Поэтому в общем случае установить

вид функции  $\varphi(r)$  бывает довольно сложно. Существуют, однако, случаи, когда вид этой функции может быть установлен с хорошей точностью при довольно общих предположениях о виде функции  $\rho(r')$ . Важнейшей задачей такого типа является задача нахождения электростатического поля на больших расстояниях от ограниченной системы зарядов.

Пусть заряды занимают объем с характерным размером  $l$ . Выбрав начало отсчета внутри системы, найдем потенциал на расстояниях  $r \gg l$ . Для этого разложим величину

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{r \cdot r'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

в ряд по малому параметру — отношению  $r'/r$ . Используя известное разложение бинома в степенной ряд, получим с точностью до квадрата указанного малого отношения

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3} + \frac{3}{2r} \left( \frac{r \cdot r'}{r^2} \right)^2 - \frac{r'^2}{2r^3} + \dots \quad (21.1)$$

Если записать квадратичные слагаемые через декартовы координаты и использовать тензорные обозначения, то указанные слагаемые приводятся к виду

$$\frac{3}{2r} \left( \frac{r \cdot r'}{r^2} \right)^2 - \frac{r'^2}{2r^3} = \frac{1}{2r^5} x_\alpha x_\beta (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad (21.2)$$

где по повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

Используем выражение (21.1) для приближенного вычисления интеграла (20.4). Подставив (21.1) в (20.4) и воспользовавшись представлением (21.2), получим

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{p \cdot r}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}. \quad (21.3)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$q = \int \rho(r') dV' \quad (21.4)$$

— полный заряд системы;

$$p = \int r' \rho(r') dV' \quad (21.5)$$

— дипольный момент системы;

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(r') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV' \quad (21.6)$$

— тензор квадрупольного момента системы зарядов.

Продолжив разложение (21.1), мы могли бы определить высшие мультипольные моменты системы. Поэтому разложение (21.3) называется разложением электростатического потенциала по мультипольным моментам или, более кратко, по мультиполям. Фактически, как уже указывалось, это есть разложение по степеням  $l/r$ , поэтому на больших расстояниях от системы каждый последующий член разложения мал по сравнению с предыдущим.

Главным членом в (21.3) является потенциал точечного заряда  $\varphi_0 = q/r$ . Его смысл очевиден: на больших расстояниях детали распределения заряда не существенны и система действует как точечный заряд, помещенный в начало координат. Но если полный заряд равен нулю, то первым

неисчезающим членом разложения оказывается потенциал диполя

$$\varphi_{\text{dip}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / r^3; \quad (21.7)$$

этим определяется его важное значение во многих задачах электродинамики. Такой потенциал создает на больших расстояниях нейтральная система зарядов (например молекула).

В этом случае, т.е. при  $q = 0$ , дипольный момент (21.5) оказывается не зависящим от выбора начала отсчета: сдвинув его на вектор  $\mathbf{a}$ , будем иметь в новой системе отсчета

$$\mathbf{p}_* = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \rho(\mathbf{r}') dV' = \mathbf{p} - \mathbf{a}q = \mathbf{p}. \quad (21.8)$$

Для системы точечных зарядов

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i. \quad (21.9)$$

Если, в частности, имеется всего два заряда  $+e$  и  $-e$  на расстоянии  $l$ , то

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l}, \quad (21.10)$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному (рис. 21.1). Такая система называется *элементарным диполем*.

Напряженность электрического поля диполя вычисляется дифференцированием потенциала (21.7)

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (21.11)$$

В сферических координатах  $(r, \vartheta, \alpha)$  с полярной осью, направленной вдоль  $\mathbf{p}$ , составляющие  $\mathbf{E}_{\text{dip}}$  имеют вид:

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^2}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^2}, \quad E_\alpha = 0. \quad (21.12)$$

Обсудим теперь квадрупольный член в разложении потенциала,

$$\varphi_{\text{qu}} = \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}. \quad (21.13)$$

Если ввести единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , то (21.13) можно представить в виде

$$\varphi_{\text{qu}} = \frac{Q_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3}. \quad (21.14)$$

Из этих выражений видно, что  $\varphi_{\text{qu}} \sim 1/r^3$ .

Чаще всего квадрупольный член выступает как поправочный к потенциалу точечного заряда или диполя. Но при достаточно симметричном расположении зарядов он может оказаться главным в разложении потенциала. Примеры таких систем изображены на рис. 21.2.

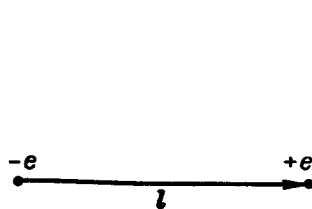


Рис. 21.1.

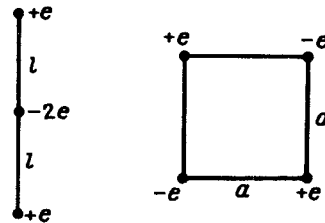


Рис. 21.2.

Квадрупольный момент  $Q_{\alpha\beta}$  представляет собой тензор II ранга. Из определения (21.6) следует, что он симметричен,

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}, \quad (21.15)$$

а его след (сумма диагональных элементов) равен нулю:

$$Q_{\alpha\alpha} = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0. \quad (21.16)$$

Как и всякий симметричный тензор,  $Q_{\alpha\beta}$  может быть приведен к главным осям, в которых отличны от нуля только диагональные элементы, связанные соотношением (21.16). Поэтому только два из них независимы. Если же система зарядов аксиально-симметрична ( $Oz$  — ось симметрии), то

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33}. \quad (21.17)$$

Величину  $Q_{33} = Q$  называют в этом случае просто квадрупольным моментом. Квадрупольный потенциал при этом упрощается и приобретает в сферических координатах вид

$$\varphi_{qu} = \frac{Q}{4r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{Q}{2r^3} P_2(\cos \vartheta), \quad (21.18)$$

где  $P_2(\cos \vartheta)$  — полином Лежандра.

В случае, когда распределение зарядов близко к сферически-симметричному, более удобным оказывается разложение в ряд по мультиполям в сферических координатах. Используя разложение

$$\frac{1}{|r - r'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r'^l}{(2l+1)r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha'), \quad (21.19)$$

приведенное в Дополнении VII, представим потенциал  $\varphi(r)$  при  $r > r'$  в виде

$$\varphi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}}. \quad (21.20)$$

Здесь  $Q_{lm}$  — мультипольный момент порядка  $l, m$ :

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(r') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'. \quad (21.21)$$

## § 22. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**22.1. Энергия электростатического поля.** Плотность энергии электрического поля дается формулой (16.28) при  $H = 0$ :

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \quad (22.1)$$

Вычислим полную энергию ограниченной системы неподвижных зарядов

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (22.2)$$

где интегрирование нужно производить по всему пространству. Для постоянного электрического поля  $E = -\nabla\varphi$ , поэтому, пользуясь правилами

векторного дифференцирования, находим

$$E^2 = -E \cdot \nabla \varphi = -\nabla \cdot (E\varphi) + \varphi \nabla \cdot E. \quad (22.3)$$

Заменим в последнем слагаемом  $\nabla \cdot E$  на  $4\pi\rho$ , согласно (19.1), и подставим (22.3) под интеграл (22.2). Это дает

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV - \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(E\varphi) dV. \quad (22.4)$$

Последний интеграл для ограниченной системы обращается в нуль, как нетрудно показать с помощью теоремы Остроградского — Гаусса. В самом деле,

$$\int_{(V)} \operatorname{div}(E\varphi) dV = \oint_{(S_\infty)} E_n \varphi dS,$$

где  $S_\infty$  — бесконечная поверхность, охватывающая все пространство. Но на больших расстояниях от системы зарядов, согласно (21.4),  $\varphi$  убывает не медленнее  $r^{-1}$ , а  $E_n$  — не медленнее  $r^{-2}$ , тогда как сама поверхность нарастает как  $r^2$ . В итоге

$$\oint E_n \varphi dS \rightarrow 0,$$

и в случае ограниченной электростатической системы мы имеем две различных выражения для полной энергии: (22.2) и

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (22.5)$$

Применим последнюю формулу для анализа некоторых частных случаев. Пусть имеются две ограниченные системы зарядов (рис. 22.1). Они не обязательно должны быть разделены в пространстве. Обозначим через  $\varphi_1(r)$ ,  $\varphi_2(r)$  электростатические, потенциалы, создаваемые в заданной

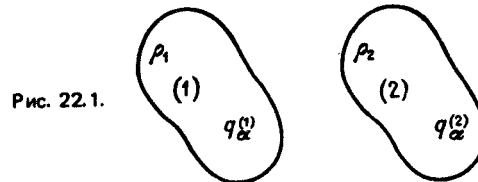


Рис. 22.1.

точке зарядами первой и второй систем. Воспользовавшись принципом суперпозиции и подставив в (22.5)  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  и  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , будем иметь

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{22}, \quad (22.6)$$

где

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \rho_1 \varphi_1 dV, \quad (22.7)$$

$$W_{12} = \frac{1}{2} \int (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) dV. \quad (22.8)$$

Выражение для  $W_{22}$  аналогично (22.7). Интегрирование в формулах (22.5) — (22.8) можно производить по всему пространству, но области, в которых  $\rho$  равно нулю, не дадут вклада.

Разложение (22.6) имеет простой физический смысл. Величины  $W_{11}$  и  $W_{22}$  представляют собой энергии систем 1 и 2 по отдельности, а  $W_{12}$  — их взаимная энергия или энергия взаимодействия. В механике ее называют потенциальной энергией взаимодействия. Очевидно, что эта энергия зависит от взаимного расположения систем, т.е. от их обобщенных координат  $q_\alpha^{(1)}$  и  $q_\beta^{(2)}$ . По общим правилам механики, производная от потенциальной энергии по координате, взятая с противоположным знаком, определяет силу, стремящуюся увеличить эту координату:

$$F_\alpha = - \frac{\partial W_{12}}{\partial q_\alpha^{(1)}}, \quad F_\beta = - \frac{\partial W_{12}}{\partial q_\beta^{(2)}}. \quad (22.9)$$

Энергию взаимодействия можно записать в более компактном виде, если воспользоваться формулой

$$\varphi_{1,2}(r) = \int \frac{\rho_{1,2}(r') dV'}{|r - r'|}. \quad (22.10)$$

Поменяв местами в одном из слагаемых (22.8) переменные интегрирования  $r$  и  $r'$ , получим

$$W_{12} = \int \frac{\rho_1(r) \rho_2(r')}{|r - r'|} dV dV' \quad (22.11)$$

Из этой записи следует, что энергию взаимодействия можно представить также в формах

$$W_{12} = \int \rho_1 \varphi_2 dV = \int \rho_2 \varphi_1 dV. \quad (22.12)$$

Энергию отдельной системы зарядов тоже можно записать через двойной интеграл типа (22.11):

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho_1(r) \rho_1(r')}{|r - r'|} dV dV'. \quad (22.13)$$

Обратим внимание на множитель  $1/2$ , отличающий энергию одной системы от энергии взаимодействия двух систем (22.11).

Рассмотрим теперь систему точечных зарядов\*)  $e_1, \dots, e_N$ , имеющих радиус-векторы  $r_1, \dots, r_N$ . Записав

$$\rho(r) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(r - r_a)$$

и подставив эту сумму в формулу типа (22.13), получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^N \frac{e_a e_b}{|r_a - r_b|} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \frac{e_a^2}{|r_a - r_a|}. \quad (22.14)$$

Здесь первая сумма, в которой индексы  $a$  и  $b$  не совпадают, представляет собой энергию взаимодействия системы точечных зарядов. Ее можно

\*) Отметим, что неподвижная система точечных зарядов может существовать только при наличии связей, закрепляющих положение зарядов в пространстве. Равновесие системы неподвижных частиц, взаимодействующих только электрическими силами, неустойчиво (это утверждение, на доказательстве которого мы не будем останавливаться, называется теоремой Ирншоу).

записать без множителя  $1/2$ , учитывая каждый член в сумме по одному разу:

$$W_{\text{int}} = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a>b}}^N \frac{e_a e_b}{|r_a - r_b|}. \quad (22.15)$$

Вторая сумма в (22.14) описывает сумму собственных энергий точечных зарядов. Каждый член в ней расходится ввиду расходимости кулоновского потенциала при  $r \rightarrow 0$ . Очевидная бессмысленность этого результата означает, что классическая электродинамика становится неприменимой на малых расстояниях. Трудность с расходимостью собственной энергии точечного заряда является фундаментальной и проявляется не только в классической электродинамике, но и в современной теории элементарных частиц, основу которой составляют квантовая механика и теория относительности. Для того чтобы избежать расходимости собственной энергии, следует считать элементарные частицы протяженными. Но это неизбежно означает наличие у них внутренней структуры, т.е. "неэлементарность".

Ввиду невозможности вычислить в рамках классической электродинамики собственную энергию системы точечных зарядов, мы должны ограничиться вычислением энергии их взаимодействия, которая дается формулой (22.15).

Можно оценить характерный размер элементарной частицы, если ее рассматривать как протяженный классический объект. Электростатическая энергия заряженного шара радиуса  $r_0$  записывается в виде  $W = \alpha e^2 / r_0$ , где  $\alpha$  — множитель порядка единицы, зависящий от распределения заряда. Так, при равномерном поверхностном распределении заряда  $\alpha = 1/2$ , при равномерном распределении по объему  $\alpha = 3/5$  и т.д. Предположив, что вся масса частицы имеет электромагнитное происхождение, и приравняв энергию покоя  $mc^2$  ее электростатической энергии  $e^2 / r_0$ , получим

$$r_0 = e^2 / mc^2 \quad (22.15')$$

Для электрона величина  $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-13}$  см и называется *классическим радиусом электрона*. Этот параметр появляется во многих задачах электродинамики. Однако ему нельзя приписывать буквальный смысл радиуса элементарной частицы, так как классическая теория, на основе которой получена оценка (22.15'), из-за квантовых эффектов теряет силу уже на значительно больших расстояниях  $\Lambda = h/mc$  (где  $h = 1,05 \cdot 10^{-27}$  эрг · с — постоянная Планка). Для электрона  $\Lambda = 137 r_0 = 3,9 \cdot 10^{-11}$  см. Величина  $\Lambda$  называется *комптоновской длиной волны*.

**22.2. Система зарядов во внешнем поле.** Вычислим энергию ограниченной системы зарядов во внешнем электрическом поле, слабо изменяющемся в пределах размера системы (рис. 22.2). Это условие позволяет произвести разложение в ряд и выразить энергию через мультипольные моменты системы, введенные в § 21.

Будем для определенности считать заряды точечными. Воспользуемся формулой (22.12), понимая в ней под  $\varphi_2$  потенциал внешнего поля  $\varphi$ . Для точечных зарядов указанная формула примет вид

$$W = \sum_{i=1}^N e_i \varphi(R + r_i). \quad (22.16)$$

Воспользуемся предполагаемой гладкостью потенциала  $\varphi$  в пределах сис-

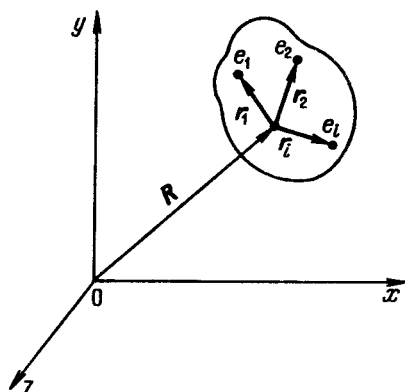


Рис. 22.2.

темы и разложим его в степенной ряд:

$$\varphi(R + r_l) = \varphi(R) + x_\alpha^l \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} x_\alpha^l x_\beta^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (22.17)$$

Здесь использованы тензорные обозначения и правило суммирования по повторяющимся индексам.

Если в пределах рассматриваемой системы зарядов нет источников внешнего поля, то потенциал  $\varphi$  в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 0$ . Это позволяет записать последний член разложения в (22.17) в виде

$$\left( x_\alpha^{(l)} x_\beta^{(l)} - \frac{1}{3} r_l^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (22.18)$$

Подставив разложение (22.17) и (22.18) в (22.16), будем иметь

$$W = q\varphi - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \quad (22.19)$$

Здесь величины  $\mathbf{E}$  и  $\varphi$  берутся при аргументе  $R$ , а величины

$$q = \sum_{i=1}^N e_i, \quad p_\alpha = \sum_{i=1}^N e_i x_\alpha^{(i)} \quad (22.20)$$

и

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta})$$

представляют собой полный заряд системы, ее дипольный момент и квадрупольный момент соответственно. Формулы (22.20) являются аналогами (21.5) — (21.7), относящимися к случаю точечных зарядов.

Разложение (22.19) производится по отношению размера системы  $l$  и масштабу  $L$  неоднородности потенциала  $\varphi$ . Если, в частности,  $\varphi$  создается точечным зарядом, находящимся в начале координат, то параметром разложения является  $l/R$ .

Первый член в (22.19) представляет собой энергию точечного заряда во внешнем поле,  $W_0 = q\varphi$ . Дифференцирование ее по  $R$  дает известное выражение для силы:

$$\mathbf{F}_0 = -q \nabla \varphi = q\mathbf{E}. \quad (22.21)$$

Второй член,

$$W_{\text{dip}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (22.22)$$

дает энергию диполя во внешнем поле. Вычисляя ее градиент с помощью формул векторного дифференцирования, найдем силу, действующую на диполь во внешнем поле:

$$\mathbf{F}_{\text{dip}} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (22.23)$$

Но энергия диполя зависит не только от координат, но и от ориентации  $\mathbf{p}$  по отношению к  $\mathbf{E}$ . Поэтому в общем случае на диполь действует не только сила, стремящаяся сдвинуть его в пространстве, но и крутящий момент

сил. Последний можно вычислить, дифференцируя энергию  $W_{\text{dip}} = -pE \cos \theta$  по углу между  $p$  и  $E$ :

$$N = - \frac{\partial W_{\text{dip}}}{\partial \theta} = -pE \sin \theta. \quad (22.24)$$

Знак минус указывает на то, что момент сил стремится уменьшить угол  $\theta$ , т.е. ориентировать диполь вдоль поля.

### § 23. ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

Кроме объемных, поверхностных и точечных зарядов возможны еще распределения электрических зарядов вдоль некоторых линий (заряженные нити), а также двойные электрические слои. Последние представляют собой тонкие слои, на одной стороне которых имеется положительный заряд с плотностью  $\sigma$ , а на другой — отрицательный заряд с плотностью  $-\sigma$ , так что в целом слой электронеутрален (рис. 23.1).

Пусть  $\delta$  — толщина слоя (т.е. расстояние между положительно и отрицательно заряженными поверхностями). Эта величина будет считаться малой по сравнению со всеми другими расстояниями в задаче. Тогда на элемент поверхности слоя  $dS$  будет приходиться электрический дипольный момент

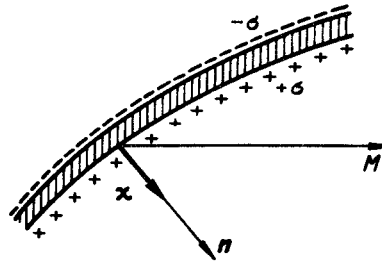
$$dp = \sigma \delta dS, \quad (23.1)$$

а на единицу поверхности слоя — дипольный момент

$$\vec{\kappa} = \frac{dp}{dS} = \sigma \delta \vec{n}, \quad (23.2)$$

где орт нормали  $\vec{n}$  должен быть направлен от отрицательной стороны поверхности к положительной (см. рис. 23.1).

Рис. 23.1.



Вычислим потенциал двойного слоя. Воспользуемся принципом суперпозиции и полученным выше выражением для потенциала элементарного диполя (21.8):

$$\varphi_M = \int_{(S)} \frac{\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}{r^3} dS. \quad (23.3)$$

Здесь радиус-вектор  $\vec{r}$  соединяет точки поверхности с точкой наблюдения  $M$ , а интегрирование ведется по поверхности, занятой двойным слоем. Формуле (23.3) можно придать другой вид, если заметить, что

$$\frac{\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}{r^3} dS = \pm \kappa d\Omega. \quad (23.4)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла, под которым из точки наблюдения  $M$

видна площадка  $dS$ , знак плюс соответствует случаю, когда видна положительная, а минус — отрицательная сторона поверхности.

С помощью (23.4) будем иметь

$$\varphi_M = \int_{(\Omega)} (\pm \kappa) d\Omega. \quad (23.5)$$

Если, в частности, поверхность ориентирована так, что для всех ее элементов знак в (23.4) один и тот же, то

$$\varphi_M = \pm \kappa \Omega. \quad (23.6)$$

Для замкнутой поверхности с двойным слоем имеем

$$\varphi_M = \begin{cases} \pm 4\pi\kappa, & \text{точка } M \text{ внутри поверхности;} \\ 0, & \text{точка } M \text{ снаружи.} \end{cases} \quad (23.7)$$

Если точка наблюдения находится вблизи поверхности двойного слоя, то, очевидно,

$$\varphi_M = \pm 2\pi\kappa. \quad (23.8)$$

Это означает, что на самой поверхности потенциал испытывает скачок:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\kappa. \quad (23.9)$$

При этом, поскольку полная плотность поверхностного заряда двойного слоя равна нулю, напряженность поля непрерывна на поверхности:

$$E_{2n} - E_{1n} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0. \quad (23.10)$$

Эти условия очевидным образом отличаются от граничных условий (19.7) и (19.9) на заряженной поверхности.

Примером физической системы, в которой реализуется двойной слой, является поверхность раздела твердое тело — вакуум. Электроны, как более легкие по сравнению с ионами частицы, с большей вероятностью, чем атомные ядра, могут оказаться на периферии среды, так что поверхность раздела является двойным слоем с определенной поверхностной плотностью дипольного момента. Этот поверхностный дипольный момент может быть изменен, если на поверхность среды высадить полярные молекулы так, чтобы вектор дипольного момента каждой из молекул был перпендикулярен поверхности. Такой же эффект может быть достигнут нанесением на поверхность тонкой пленки щелочного металла. Атом щелочного металла может отдать свой электрон в объем среды, и на поверхности останутся заряженные положительно ионы металла. Это приводит к уменьшению дипольного момента поверхности. Величина этого дипольного момента определяет разность потенциалов внутри среды и в вакууме.

Если поверхность раздела плоская и однородная, то скалярный потенциал  $\varphi$  электрического поля будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -4\pi \rho(z). \quad (23.11)$$

Здесь  $z$  — нормальная к поверхности раздела координата. После первого интегрирования это уравнение примет вид

$$\frac{d\varphi}{dz} = -4\pi \int_{-\infty}^z \rho(z') dz',$$

а после второго мы будем иметь

$$\varphi(z) - \varphi(-\infty) = -4\pi \int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{z'} \rho(z'') dz'' \right] dz'. \quad (23.12)$$

Интеграл в правой части этой формулы берем по частям:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{z'} \rho(z'') dz'' \right] dz' &= \left[ z' \int_{-\infty}^{z'} \rho(z'') dz'' \right] \Big|_{-\infty}^z - \int_{-\infty}^z \rho(z') z' dz' = \\ &= z \int_{-\infty}^z \rho(z') dz' - \int_{-\infty}^z dz' z' \rho(z'). \end{aligned} \quad (23.13)$$

Если полный заряд среды равен нулю, то  $\int_{-\infty}^z \rho(z') dz'$  при  $z \rightarrow \infty$  есть нуль и в правой части (23.13) остается только одно последнее слагаемое

$$\varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} z \rho(z) dz. \quad (23.14)$$

Таким образом, разность потенциалов в глубине среды и в вакууме на большом от нее расстоянии определяется поверхностной плотностью дипольного момента поверхности раздела. Поскольку работа по перемещению единичного заряда из среды в вакуум представляет собой разность  $\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)$ , то эту последнюю величину принято называть *работой выхода*.

## Глава V

### ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

#### § 24. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

**24.1. Основные уравнения.** В отсутствие зависимости от времени напряженность магнитного поля удовлетворяет системе уравнений (14.6):

$$\text{rot } H = \frac{4\pi}{c} j, \quad (24.1)$$

$$\text{div } H = 0. \quad (24.2)$$

Поскольку  $\partial \rho / \partial t = 0$ , то из уравнения неразрывности вытекает условие стационарности токов:

$$\text{div } j = 0. \quad (24.3)$$

Последнее соотношение можно получить и из уравнения (24.1), применив к обеим его частям операцию div. Заметим, что для существования тока,  $j \neq 0$ , необходимо, чтобы заряды двигались. Поэтому постоянное магнитное поле может создаваться стационарной, но не статической системой зарядов.

При расчете магнитных полей от симметричных распределений токов полезна интегральная форма уравнения (24.1). Она получается из (14.15) при  $E = 0$ , либо непосредственно из (24.1) путем интегрирования по произ-

Фурье-образ скалярного потенциала запишется в виде

$$\varphi_{\omega}(r) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)} d\tau. \quad (34.16)$$

Здесь  $R(\tau) = |r - s(\tau)|$ .

Если движение частицы периодически с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ , то ее поле может быть разложено в ряд Фурье. Гармоника с частотой  $n\omega_0$  ( $n$  — целое) выражается интегралом

$$A_n(r) = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{v(\tau)}{R(\tau)} \exp[in\omega_0(\tau - R(\tau)/c)] d\tau. \quad (34.17)$$

Скалярный потенциал  $\varphi_n(r)$  отличается от (34.17) отсутствием множителя  $v(\tau)/c$ .

## Глава VIII

### ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### § 35. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

**35.1. Угловое распределение излучения.** Как уже отмечалось, на больших расстояниях от частицы выражения для напряженностей поля упрощаются; остается только волновое поле:

$$E = \frac{en \times [(n - v/c) \times \dot{v}]}{c^2 R(1 - n \cdot v/c)^3} \Big|_{t'}, \quad H = n \times E. \quad (35.1)$$

Вычислим поток энергии внутри телесного угла  $d\Omega$  на больших расстояниях от частицы:

$$dI = \vec{\gamma} \cdot n R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d\Omega, \quad (35.2)$$

или, подставляя (35.1),

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 [n \times ((n - v/c) \times \dot{v})]^2}{4\pi c^3 (1 - n \cdot v/c)^6}, \quad (35.3)$$

где все величины в правой части берутся в запаздывающий момент  $t'$ .

Поток энергии на единицу телесного угла  $dI/d\Omega$  зависит от  $R$  только через временной аргумент  $t' = t - R(t')/c$ . Это означает, что поток энергии через площадки  $R^2 d\Omega$  внутри выбранного телесного угла  $d\Omega$ , находящиеся на разных расстояниях от частицы, в соответствующие моменты времени (с учетом конечной скорости переноса энергии) будет одинаковым — электромагнитные возмущения распространяются от генерировавшей их заряженной частицы на бесконечность. Они образуют поле излучения, которое, возникнув, отрывается от своего источника. Величина (35.3) и дает поток энергии излучения, распространяющейся внутри единичного телесного угла.

Квазистационарное поле (т.е. слагаемые в (34.10), (34.13), не содержащие  $\dot{v}$  и пропорциональные  $R^{-2}$ ) таким свойством не обладает. С ростом  $R$

поток энергии квазистационарного поля внутри данного телесного угла убывает как  $R^{-2}$ . Следовательно, квазистационарное поле остается все время связанным с частицей и не создает потока на бесконечности.

Проведем анализ углового распределения излучения (35.3) для некоторых частных случаев.

1. Нерелятивистская частица,  $v \ll c$ . Пренебрегая членами порядка  $v/c$ , получим из (35.3)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\dot{v}^2 - (n \cdot \dot{v})^2] = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (35.4)$$

где  $\theta$  — угол между ускорением (в запаздывающий момент  $t'$ ) и направлением наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления  $\dot{v}$  и максимально в направлении, перпендикулярном  $\dot{v}$ .

2. Ультрарелятивистская частица,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ , ускорение направлено вдоль скорости:  $\dot{v} \parallel v$ . Обозначая через  $\theta$  угол между  $n$  и  $v$ , получаем из (35.3)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 [1 - (v/c) \cos \theta]^6}. \quad (35.5)$$

Высокая степень знаменателя, весьма малого при  $\cos \theta \approx 1$ , приводит к тому, что почти все излучение сосредоточено в области малых  $\theta$  (хотя при  $\theta = 0$  интенсивность обращается в нуль). В наиболее интересной области малых углов произведем разложения  $\sin^2 \theta \approx \theta^2$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ . Учитывая, что  $v \approx c$ , получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16e^2 \dot{v}^2 \gamma^{10} (\gamma \theta)^2}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^6}. \quad (35.6)$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка нескольких  $1/\gamma$ . Это свойство излучения ультрарелятивистских частиц объясняется релятивистским преобразованием углов и уже было отмечено в § 2.

3. Ультрарелятивистская частица, ускорение перпендикулярно скорости:  $\dot{v} \perp v$ . Простое преобразование числителя (35.3) приводит к формуле

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{\dot{v}^2}{(1 - n \cdot v/c)^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)(n \cdot \dot{v})^2}{(1 - n \cdot v/c)^6} \right\}, \quad (35.7)$$

которая после введения угла  $\theta$  между  $n$  и  $v$  записывается в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{[1 - (v/c) \cos \theta]^4} - \frac{(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{[1 - (v/c) \cos \theta]^6} \right\}. \quad (35.8)$$

Здесь  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(v, n)$  и  $(v, \dot{v})$ .

Распределение (35.8), как и (35.5), сконцентрировано в направлении вперед. При малых  $\theta$  оно имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4e^2 \dot{v}^2 \gamma^8}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^4} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right]. \quad (35.9)$$

Выражение в скобках, как и должно быть, неотрицательно ни при каких значениях углов. Направления векторов поля в волновой зоне (т.е. поляри-

зация волны) определяются формулами (35.1) и могут быть проанализированы для различных случаев движения частицы.

**35.2. Потеря энергии и импульса заряженной частицей.** Вычисленная в § 31.1 величина  $dI/d\Omega$  представляет собой поток электромагнитной энергии внутри единичного телесного угла, который может измерить неподвижный в лабораторной системе наблюдатель. Она отличается от скорости потерь энергии частицей за счет излучения в единичный телесный угол в данном направлении  $-d^2\mathcal{E}/dt' d\Omega$ , где  $dt'$  — интервал "запаздывающего" времени. Очевидно, что порция  $dI/dt$  электромагнитной энергии, излученной внутри телесного угла  $d\Omega$  и проходящая мимо наблюдателя в интервале времени от  $t$  до  $t + dt$ , испущена частицей в интервале между  $t'$  и  $t' + dt'$ . Поэтому излученную частицей энергию  $-d^2\mathcal{E}$  нужно относить именно к интервалу времени  $dt'$  и к телесному углу  $d\Omega$ , который совпадает с телесным углом наблюдателя, так как оба определены в одной (лабораторной) системе отсчета. Интервалы времени  $dt$  и  $dt'$  также оба определены в лабораторной системе, но связаны соотношением

$$dt = \left(1 - \frac{n \cdot v(t')}{c}\right) dt', \quad (35.10)$$

вытекающим из (34.6). Приравняв энергию, испущенную частицей за время  $dt'$ , и энергию, прошедшую мимо наблюдателя за время  $dt$ , будем иметь с помощью (35.10)

$$-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \left(1 - \frac{n \cdot v(t')}{c}\right) \frac{dI}{d\Omega}. \quad (35.11)$$

Величина  $dI/d\Omega$  согласно (35.3) зависит от аргумента  $t'$ . Это соотношение устанавливает связь между потерей энергии частицей и интенсивностью излучения, регистрируемой наблюдателем.

Проинтегрировав (35.11) по всему телесному углу, получим полную (или суммарную по всем направлениям) потерю энергии излучающей частицей:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\int \frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} d\Omega = \int \left(1 - \frac{n \cdot v(t')}{c}\right) \frac{dI}{d\Omega} d\Omega. \quad (35.12)$$

Как видно из (35.12), она не совпадает с полной интенсивностью

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega.$$

Величина  $-d\mathcal{E}/dt'$  является более удобной характеристикой излучения, чем полная интенсивность  $I$ , так как она релятивистски инвариантна. Чтобы в этом убедиться, сравним скорость потери энергии частицей в двух системах отсчета: мгновенно сопутствующей  $S_0$ , в которой частица в данный момент покоится, и лабораторной  $S$ , в которой частица имеет скорость  $v$ . В системе  $S_0$  интенсивность излучения (совпадающая со скоростью потерь энергии  $-d\mathcal{E}_0/dt'_0$ ) дается формулой (35.4). Поскольку она — четная функция угла, то потери импульса частицей в этой системе не происходит,  $dp_0 = 0$ .

Рассмотрим энергию  $-d\mathcal{E}_0$ , излучаемую частицей в сопутствующей системе за время  $dt'_0 \doteq d\tau$ . С помощью преобразований Лоренца, учитывая, что

$dp_0 = 0$ , получим потерю энергии в системе  $S$ :

$$-d\mathcal{E} = -d\mathcal{E}_0 / \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Она происходит за время  $dt' = d\tau / \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ . Отсюда для скорости потерь энергии находим

$$-d\mathcal{E}/dt' = -d\mathcal{E}_0/d\tau, \quad (35.13)$$

что и доказывает релятивистскую инвариантность этой величины. Полная интенсивность  $I$  таким свойством не обладает.

Скорость потерь энергии (35.13) можно выразить через  $v$  и  $\dot{v}$ , воспользовавшись (35.3) и проведя интегрирование по углам. Но более простой путь — релятивистское обобщение скорости потерь энергии  $-d\mathcal{E}_0/d\tau$  в мгновенно сопутствующей системе, основанное на релятивистской инвариантности этой величины. С помощью (35.13), (35.12) находим

$$-d\mathcal{E}/dt' = \int (dI_0/d\Omega) d\Omega.$$

Но  $dI_0/d\Omega$  — это интенсивность излучения (35.4) нерелятивистской частицы. Проинтегрировав (35.4) по телесному углу, получим

$$-d\mathcal{E}/dt' = 2e^2 \dot{v}^2 (t')/3c^3, \quad (35.14)$$

где  $\dot{v}$  — ускорение в такой системе отсчета, в которой  $v \ll c$ . Это важное соотношение называется *формулой Лармора*.

Релятивистское обобщение формулы Лармора очевидно:  $\dot{v}^2$  следует заменить релятивистским инвариантом, переходящим при  $v \rightarrow 0$  в  $\dot{v}^2$ . Таким инвариантом является взятый с противоположным знаком квадрат 4-ускорения  $-w^k w_k$ . При  $v \rightarrow 0$  временная компонента  $w^k = du^k/d\tau$  обращается в нуль, а пространственная переходит в  $\dot{v}$ . Таким образом,

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3} w^k w_k. \quad (35.15)$$

Определим теперь потерю импульса излучающей частицей. В сопутствующей системе, как уже отмечалось,  $dp_0 = 0$ . В лабораторной системе с помощью преобразования Лоренца (5.15) находим:

$$dp = \frac{v d\mathcal{E}_0}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (35.16)$$

Отнесем эту потерю к "времени частицы"  $dt'$  в лабораторной системе:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{v}{c^2} \left( -\frac{d\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2} dt'} \right).$$

Но  $\sqrt{1 - v^2/c^2} dt' = d\tau$  — дифференциал собственного времени частицы, поэтому с учетом (35.13) получаем простую связь между потерями частицей энергии и импульса на излучение:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{v}{c^2} \left( -\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right). \quad (35.17)$$

Эта формула справедлива при любой скорости частицы.

Соотношения (35.15), (35.17) можно записать в единой релятивистски ковариантной форме:

$$-\frac{dp^i}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} w^k w_k u^i. \quad (35.18)$$

Выразим потерю энергии при произвольной скорости частицы через трехмерные величины. Вычисляем 4-ускорение,

$$w^k = \frac{du^k}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \left( \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c}, \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma^4 \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \right)$$

и находим его квадрат:

$$w^k w_k = -\gamma^6 [\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2 / c^2].$$

Это позволяет записать релятивистское обобщение формулы Лармора через трехмерные величины:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2 \gamma^6}{3c^3} \left[ \dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right]. \quad (35.19)$$

Если ускорение частицы создается внешним электромагнитным полем, его можно выразить через напряженности  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . Из уравнения движения частицы, записанного в трехмерной форме, имеем

$$\left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right] + \gamma^2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} = \left( \frac{e}{m \gamma^2} \right)^2 \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)^2$$

и

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m \gamma^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Комбинируя последние два равенства, находим величину  $\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2 / c^2$  и получаем потерю энергии в виде

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^4 \gamma^2}{3m^2 c^3} \left[ \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2 \right]. \quad (35.20)$$

Ультрарелятивистская частица ( $\gamma \gg 1$ ) теряет энергию на излучение со скоростью, пропорциональной квадрату ее кинетической энергии и квадрату напряженности внешнего поля. Исключение составляет случай, когда частица движется строго вдоль электрического поля при  $\mathbf{H} = 0$ . При этом ускорение направлено вдоль скорости частицы, а скорость потери энергии

$$-\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right)_{\parallel} = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3} \quad (35.21)$$

не зависит от самой энергии. Если же  $\mathbf{E} = 0$ , а  $\mathbf{H} \neq 0$ , то ускорение перпендикулярно скорости и

$$-\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right)_{\perp} = \frac{2e^4 \gamma^2 H^2 v_{\perp}^2}{3m^2 c^5}. \quad (35.22)$$

При одинаковых напряженностях поля ( $E = H$ ) отношение

$$\frac{(d\mathbf{s}/dt')_{\perp}}{(d\mathbf{s}/dt')_{\parallel}} = \gamma^2 \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \quad (35.23)$$

велико для ультрарелятивистской частицы, если только составляющая скорости  $v_{\perp}$ , перпендикулярная магнитному полю, не слишком мала. Этот результат показывает, что при произвольном ультрарелятивистском движении частицы главную роль играет ее излучение за счет поперечной составляющей силы.

**35.3. Спектральное распределение излучения.** Рассмотрим расстояния, большие по сравнению с размером области движения частицы и с длиной волны ее излучения:

$$r \gg s(t), \quad r \gg \lambda. \quad (35.24)$$

В этой области, называемой *волновой зоной*, векторный потенциал (34.15) можно упростить. Представим  $R(\tau)$  в виде

$$R(\tau) = |r - s(\tau)| \approx r - n \cdot s(\tau), \quad (35.25)$$

где  $n = r/r$  — единичный вектор,  $s(\tau)$  — радиус-вектор частицы. В знаменателе под интегралом (34.15) можно ограничиться нулевым приближением,  $R(\tau) \approx r$ , с точностью до членов  $s/r \ll 1$ . Но в показателе экспоненты следует учесть и слагаемое  $n \cdot s(\tau)$ , поскольку произведение  $\omega s(\tau)/c = 2\pi s(\tau)/\lambda$  не обязано быть малым. Следующие члены разложения (35.25), имеющие порядок  $s^2/r$  и меньше, пренебрежимо малы на больших расстояниях.

Введя обозначение  $k = \omega/c$  для волнового вектора излучаемой волны, получим из (34.15)

$$A_{\omega}(r) = \frac{e}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \exp(i\omega\tau - ik \cdot s(\tau)) d\tau. \quad (35.26)$$

Это — расходящаяся сферическая волна, ее амплитуда убывает вдали от источника как  $r^{-1}$ .

При вычислении напряженности магнитного поля  $H_{\omega} = \text{rot } A_{\omega}$  на больших расстояниях от частицы достаточно дифференцировать только экспоненциальный множитель, так как дифференцирование знаменателя приведет к членам относительного порядка  $(kr)^{-1} = \lambda/2\pi r \ll 1$ . В итоге получим

$$H_{\omega} = ik \times A_{\omega}. \quad (35.27)$$

Вычисляя затем напряженность электрического поля из уравнения Максвелла для амплитуд Фурье  $-\frac{i\omega}{c} E_{\omega} = \text{rot } H_{\omega}$ , аналогичным образом будем иметь

$$E_{\omega} = H_{\omega} \times n. \quad (35.28)$$

Из (35.27), (35.28) следует, что векторы  $E_{\omega}$ ,  $H_{\omega}$  взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения  $n$  волны. Ранее, в § 27, 28, эти свойства поля излучения уже были отмечены для плоских волн. Сферическая волна на больших расстояниях от источника в малых областях пространства близка к плоской, чем и объясняются отмеченные ее свойства.

Вычислив  $H_\omega$  и  $E_\omega$  с помощью (35.27), (35.28), получим

$$\begin{aligned} E_\omega &= -\frac{ie\omega}{c^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau)) \exp(i\omega\tau - ik \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau, \\ H_\omega &= \frac{ie\omega}{c^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - ik \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (35.29)$$

Фурье-компоненты поля излучения (35.29), в отличие от (35.1), не содержат ускорения. Но в этом нет противоречия, так как подынтегральные выражения (35.29) можно преобразовать путем интегрирования по частям и использования тождеств типа

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} = \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^2},$$

таким образом, чтобы в них входило ускорение частицы. При таком преобразовании, так же как и при записи интегралов (35.29), предполагается, что излучение (т.е. ускоренное движение частицы) длится конечное время, исчезая на  $\pm \infty$ .

Интенсивность излучения на заданной частоте  $\omega$  в данном направлении  $\mathbf{n}$  равна произведению вектора Пойнтинга  $\vec{\gamma} = \frac{c}{8\pi} |H_\omega|^2 \mathbf{n}$  на элемент поверхности сферы большого радиуса, окружающей частицу:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{8\pi} |H_\omega|^2 r^2. \quad (35.30)$$

Эта величина усреднена по периоду изменения поля. Полная интенсивность излучения  $I$  получится в результате интегрирования (35.30) по всему телесному углу и по всем частотам от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поскольку  $H_{-\omega} = H_\omega^*$ , то при вычислении полной интенсивности можно удвоить интеграл и интегрировать только по положительным частотам:

$$I = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{c}{4\pi} |H_\omega|^2 r^2 d\Omega \quad (35.31)$$

(ср. с (29.15)).

Величина под интегралом (35.31) имеет смысл дифференциальной интенсивности излучения на заданной частоте и в заданном направлении, отнесенной к единичному телесному углу и к единичному интервалу частот. Обозначив дифференциальную интенсивность через  $I_{n\omega}$ , будем иметь с помощью (35.29)

$$I_{n\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \mathbf{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - ik \cdot \mathbf{s}(\tau)) d\tau \right|^2. \quad (35.32)$$

Эта формула решает задачу о спектре и угловом распределении излучения заряженной частицы при ее заданном движении.

Излучение при нерелятивистском движении частиц будет детально рассмотрено в § 36. Здесь мы выясним качественные особенности спектра излучения ультрарелятивистских частиц. Выше было показано, что ультрарелятивистская частица излучает в основном вперед, вдоль скорости  $\mathbf{v}$  в узкий конус с углом раствора  $\theta_0 \approx 1/\gamma \ll 1$ . Как оказывается, в зависимости

от свойств внешнего поля, в котором движется частица, можно выделить два характерных случая формирования спектра излучения.

1. Полный угол отклонения частицы во внешнем поле велик по сравнению с углом излучения  $1/\gamma$ . С таким случаем мы имеем дело, например, при излучении частицы в магнитном поле. В данном направлении  $n$  частица излучает с малого участка траектории, на котором направление скорости изменяется на угол порядка  $1/\gamma$ . Длина этого участка  $l_{coh} \approx \rho/\gamma$ , где  $\rho$  – мгновенный радиус кривизны, играет роль длины когерентности (или длины формирования излучения).

Пусть на длине  $l_{coh}$  внешнее поле  $F$  меняется слабо:

$$\rho |\nabla F|/\gamma \ll F.$$

Тогда скорость и ускорение частицы можно считать постоянными на такой длине. Далее, согласно (35.23), главную роль играет составляющая силы, перпендикулярная скорости. Поэтому в рассматриваемых условиях излучение близко к тому, которое испускает частица, движущаяся по окружности радиуса  $\rho$ .

Зная длину формирования излучения, можно найти интервал частот, определяющий спектральный состав излучения. Согласно (35.29), за время излучения  $\tau \approx l_{coh}/v \approx \rho/\gamma v$  фаза волны с частотой  $\omega$  изменится на

$$\Delta\varphi = \omega\tau - n \cdot \Delta s(\tau)\omega/c.$$

Здесь  $\Delta s(\tau)$  – смещение частицы за время  $\tau$ . Поскольку угол между  $n$  и  $v$  не превышает  $1/\gamma$  по порядку величины, то

$$\frac{n \cdot \Delta s(\tau)}{c} \approx \frac{v\tau}{c} \approx \frac{\rho}{\gamma c}$$

с точностью до членов порядка  $1/\gamma^3$ . Оценивая приращение фазы, получим порядок величины:

$$\Delta\varphi \approx \frac{\omega\rho}{\gamma v} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \frac{\omega\rho}{2\gamma^3 c}.$$

Излучаться могут волны только таких частот, для которых  $\Delta\varphi \lesssim 1$ ; при  $\Delta\varphi > 1$  волны внутри конуса излучения имеют большие сдвиги фаз и гасят друг друга. Интервал излучаемых частот определяется условием

$$\Delta\omega \lesssim \omega_c = \frac{c}{\rho} \gamma^3. \quad (35.33)$$

При  $\omega \gg \omega_c$  интенсивность излучения сильно (во многих случаях экспоненциально) уменьшается.

Если частица движется в однородном магнитном поле перпендикулярно его напряженности, то, согласно результатам § 11,  $\rho = cp/eH \approx mc^2\gamma/eH$ . При этом

$$\omega_c = \frac{eH}{mc} \gamma^2. \quad (35.34)$$

Критическая частота  $\omega_c$  пропорциональна квадрату энергии частицы и первой степени напряженности магнитного поля. Движение в магнитном поле строго периодически, поэтому спектр состоит из дискретных линий, расстояние между которыми равно частоте вращения релятивистской частицы  $\Omega = ecH/\hbar\omega = eH/mc\gamma$ . При  $\gamma \gg 1$  спектр становится квазинепрерывным. Максимум интенсивности излучения приходится на частоты порядка  $\omega_c$ .

2. Полный угол отклонения за все время пролета частицей внешнего поля мал или порядка угла излучения  $1/\gamma$ . Все излучение происходит в узкий конус и определяется всей траекторией частицы (точнее, тем ее участком, на котором частица испытывает ускорение). Пример — излучение ультрарелятивистской частицы при рассеянии на малый угол ( $\vartheta \lesssim 1/\gamma$ ) в кулоновском поле ядра.

Пусть внешнее поле существует в области размером  $a$  (это может быть, например, радиус экранировки кулоновского поля). Частица будет испытывать ускорение в течение времени  $\Delta t' \approx a/v \approx a/c$ . Для неподвижного в лабораторной системе наблюдателя этот процесс будет длиться в течение времени

$$\Delta t \approx \frac{\Delta t'}{\Delta t'} \quad \Delta t' \approx \left(1 - \frac{n \cdot v}{c}\right) \frac{a}{c} = \frac{a}{\gamma^2 c^2}.$$

Спектральный интервал оценим с помощью соотношения (29.24):  $\Delta \omega \approx 1/\Delta t \approx c\gamma^2/a$ . Спектр в данном случае простирается вплоть до частот

$$\omega_c \approx \frac{c}{a} \gamma^2. \quad (35.35)$$

Характерная частота, как и (35.34), пропорциональна квадрату энергии частицы.

### § 36. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

**36.1. Электрическое дипольное излучение.** Исследование излучения упрощается, если время распространения электромагнитных возмущений в пределах излучающей системы мало по сравнению с характерным временем движения заряженных частиц в системе:

$$l/c \ll T, \quad (36.1)$$

где  $l$  — размер системы,  $T$  — время, за которое распределение зарядов существенно изменяется. При периодическом движении  $T$  — это период, поэтому неравенству (36.1) можно придать форму

$$l \ll \lambda, \quad (36.2)$$

здесь  $\lambda$  — длина волны излучения. Наконец,  $l/T \approx v$  — характерная скорость частиц, и условие (36.1) сводится к требованию, чтобы указанная скорость была нерелятивистской:

$$v \ll c. \quad (36.3)$$

Проанализируем поле излучения системы зарядов, удовлетворяющей условиям (36.1)–(36.3). Как мы видели в предыдущем параграфе, для этого достаточно вычислить векторный потенциал в волновой зоне ( $r \gg \lambda$ ) и учесть лишь члены, обратно пропорциональные расстоянию  $r$  до системы, так как только они дают вклад в излучаемую системой энергию.

Исходим из запаздывающего потенциала (32.22) и разлагаем  $|r - r'|$  в ряд по отношению размеров системы к расстоянию  $r$ :  $|r - r'| \approx r - n \cdot r'$ . Представим плотность тока, стоящего под интегралом, в виде разложения

$$j\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{n \cdot r'}{c}\right) = j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) + j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) \frac{n \cdot r'}{c} + \dots, \quad (36.4)$$

где точками обозначены производные по времени. В знаменателе же подынтегрального выражения оставляем член нулевого приближения, заменяя  $|r - r'|$  на  $r$ .

Взяв из разложения (36.4) первый не исчезающий член, будем иметь

$$A(r, t) = \frac{1}{cr} \int j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV'.$$

Далее пользуемся тождеством

$$a \cdot j = j \cdot \nabla' (a \cdot r') = \nabla' \cdot [j(a \cdot r')] - a \cdot r' (\nabla' \cdot j),$$

где  $a$  — постоянный вектор, и получаем

$$a \cdot \int j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV' = -a \cdot \int r' \operatorname{div} j dV' =$$

$$= a \frac{\partial}{\partial t} \int r' \rho\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV'.$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности  $\operatorname{div} j + \partial \rho / \partial t = 0$ . Вспомогательное определение дипольного момента (21.5), можем записать

$$\int j(r', t - r/c) dV' = \dot{p}(t - r/c)$$

и

$$A(r, t) = \frac{\dot{p}(t - r/c)}{cr}. \quad (36.5)$$

При вычислении напряженностей поля следует удерживать только члены порядка  $r^{-1}$ , которые получаются при дифференцировании аргумента  $\dot{p}$  (но не знаменателя):

$$H = \operatorname{rot} A = \frac{\ddot{p} \times n}{c^2 r}, \quad n = \frac{r}{r}. \quad (36.6)$$

Электрический вектор  $E$  можно выразить через магнитный вектор  $H$  с помощью формул (27.13) для плоской волны, поскольку сферические волны в волновой зоне локально близки к плоским:

$$E = H \times n = \frac{(\ddot{p} \times n) \times n}{c^2 r}. \quad (36.7)$$

Гармоники Фурье напряженностей поля, согласно (36.6), (36.7), выражаются через фурье-гармоники производной дипольного момента  $\dot{p}_\omega = -\omega^2 p_\omega$ :

$$E_\omega(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{(p_\omega \times n) \times n}{r},$$

$$H_\omega(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{p_\omega \times n}{r}. \quad (36.8)$$

С помощью (36.6) – (36.8) легко вычисляются интенсивность излучения на заданной частоте  $\omega$  в данном направлении  $n$ ,

$$I_{n\omega} = \frac{c}{8\pi^2} \operatorname{Re} [r^2 n \cdot (E_\omega \times H_\omega)] = \frac{\omega^4}{8\pi^2 c^3} |p_\omega \times n|^2, \quad (36.9)$$

а также интенсивность излучения в единицу телесного угла,

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} n \cdot (E \times H) r^2 = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3}, \quad (36.10)$$

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}. \quad (36.11)$$

Последняя величина для одной излучающей частицы ( $p = er$ ) переходит в формулу Лармора (35.14).

Рассмотренное излучение называется *электрическим дипольным излучением*, поскольку все величины выражаются через производные от электрического дипольного момента. При равенстве нулю дипольного момента или при его постоянстве электрическое дипольное излучение отсутствует, и для расчета поля излучения нужно учесть следующие члены разложения (36.4). Такая ситуация возникает, например, в случае системы заряженных частиц с одинаковым отношением  $e_a/m_a = \eta$ :

$$p = \sum_a e_a r_a = \eta \sum_a m_a r_a = \eta R \sum_a m_a.$$

Здесь  $R$  — радиус-вектор центра масс; в отсутствие внешних сил  $\dot{R} = V = \text{const}$ ,  $\ddot{R} = 0$ , следовательно дипольное излучение обращается в нуль.

36.2. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение. Второй член разложения в правой части (36.4) содержит по сравнению с первым членом, малый множитель  $r'/cT \leq l/\lambda \ll 1$ . Преобразуем его с помощью тождества

$$\frac{1}{c} (n \cdot r') \dot{j} = \frac{1}{2c} [(n \cdot r') \dot{j} + (n \cdot \dot{j}) r'] + \frac{1}{2c} (r' \times \dot{j}) \times n.$$

Подстановка этого выражения в (32.22) дает векторный потенциал вида

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \int [(n \cdot r') \dot{j} + (n \cdot \dot{j}) r'] dV'. \quad (36.12)$$

Здесь  $\dot{m} = \frac{1}{2c} \int [r' \times \dot{j}] dV'$  — производная от магнитного момента системы по времени. Второй интеграл в (36.12) преобразуем с помощью тождества

$$\int B dV = - \int r \operatorname{div} B dV, \quad (36.13)$$

которое легко проверяется путем интегрирования по частям, причем  $B$  — вектор, отличный от нуля в конечной области пространства, а интегрирование производится по всему пространству.

С помощью указанного тождества находим

$$\int (n \cdot r') \dot{j} dV' = - \int r' (n \cdot r') \operatorname{div} j dV' - \int r' (n \cdot \dot{j}) dV'.$$

Используя уравнение неразрывности  $\operatorname{div} j = - \partial \rho / \partial t$ , запишем векторный потенциал (36.12) в виде

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r' (n \cdot r') \rho dV'. \quad (36.14)$$

Интеграл в (36.14) можно записать через электрический квадрупольный момент. Введя тензорные обозначения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int x'_\alpha (n \cdot r') \rho dV' &= \frac{1}{3} n_\beta \int (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho dV' + \\ &+ \frac{1}{3} n_\alpha \int \rho r'^2 dV' = \frac{1}{3} Q_{\alpha\beta} n_\beta + \frac{1}{3} n_\alpha \int \rho r'^2 dV'. \end{aligned} \quad (36.15)$$

В итоге находим векторный потенциал в волновой зоне:

$$A = \frac{\dot{m} \times n}{cr} + \frac{\ddot{Q}}{6c^2 r} + \frac{n}{6c^2 r} \int \ddot{p} \left( r', t - \frac{r}{c} \right) r'^2 dV'. \quad (36.16)$$

Здесь

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta, \quad (36.17)$$

а  $Q_{\alpha\beta}$  — тензор квадрупольного момента.

При вычислении напряженностей поля последнее слагаемое в (36.16) не дает вклада, поле излучения выражается только через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{c^2 r} \left\{ (\dot{m} \times n) \times n + \frac{1}{6c} \dot{Q} \times n \right\}, \\ E &= \frac{1}{c^2 r} \left\{ n \times \ddot{m} + \frac{1}{6c} (\ddot{Q} \times n) \times n \right\}. \end{aligned} \quad (36.18)$$

Обратим внимание на симметрию поля излучения электрического и магнитного диполей: поле магнитного диполя получается из поля электрического диполя заменой  $\ddot{p} \rightarrow \dot{m}$ ,  $E \rightarrow H$ ,  $H \rightarrow -E$ . При гармоническом движении зарядов  $\ddot{p} = -\omega^2 p$ ,  $\dot{m} = -\omega^2 m$ ,  $\dot{Q} = i\omega^3 Q$ , поэтому интенсивности электрического и магнитного дипольных излучений пропорциональны  $\omega^4$ , тогда как электрическое квадрупольное излучение пропорционально  $\omega^6$ .

В заключение вычислим полную интенсивность излучения системы, имеющей электрический квадрупольный момент  $Q_{\alpha\beta}$  и магнитный дипольный момент  $m$ . С помощью (36.18) находим:

$$I = \frac{1}{4\pi c^3} \int \left\{ (\dot{m} \times n)^2 + \frac{1}{36c^2} (\ddot{Q} \times n)^2 - \frac{1}{3c} \dot{m} \cdot (\ddot{Q} \times n) \right\} d\Omega. \quad (36.19)$$

Интегрирование здесь производится по всем возможным направлениям вектора  $n$ . Записывая

$$\begin{aligned} (\dot{m} \times n)^2 &= \dot{m}^2 - (\dot{m} \cdot n)^2, \\ \dot{m} \cdot (\ddot{Q} \times n) &= e_{\alpha\beta\gamma} \dot{m}_\alpha \ddot{Q}_{\beta\mu} n_\mu n_\gamma, \\ (\ddot{Q} \times n)^2 &= \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\mu\nu} n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu, \end{aligned} \quad (36.20)$$

убеждаемся, что интегрировать нужно произведения компонент единичного вектора.

При вычислении соответствующих интегралов удобно использовать их тензорные свойства. Так, интеграл  $\int n_\alpha n_\beta d\Omega/4\pi$  является трехмерным тензором II ранга, не зависящим от ориентации координатных осей (поскольку по углам проинтегрировано). Существует единственный незави-

симый тензор с такими свойствами — это единичный тензор  $\delta_{\alpha\beta}$ , поэтому

$$\frac{1}{4\pi} \int n_\alpha n_\beta d\Omega = \lambda \delta_{\alpha\beta}. \quad (36.21)$$

Свертывая правую и левую части по паре индексов, находим  $\lambda = 1/3$ . Аналогичным образом находим

$$\frac{1}{4\pi} \int n_\alpha n_\beta n_\mu n_\nu d\Omega = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}),$$

$$\frac{1}{4\pi} \int n_\alpha n_\beta n_\gamma d\Omega = 0. \quad (36.22)$$

Подставляя (36.20) — (36.22) в (36.19), получаем

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{m}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2. \quad (36.23)$$

По сравнению с интенсивностью (36.11) слагаемые (36.23) содержат малый множитель  $(l/\lambda)^2$ . Поэтому они будут играть существенную роль только в отсутствие электрического дипольного излучения \*).

**36.3. Поле на близких расстояниях.** Если расстояние до системы движущихся зарядов удовлетворяет условию

$$l \ll r \ll \lambda, \quad (36.24)$$

то вычисление поля, как и в волновой зоне, упрощается, но поле на таких расстояниях носит существенно иной характер и называется *квазистационарным*. Условие (36.24) означает, что время распространения электромагнитного возмущения до точки наблюдения  $r/c$  мало по сравнению с характерным периодом движения зарядов  $\lambda/c = T$ , поэтому при вычислении потенциалов можно пренебречь запаздыванием:

$$\varphi(r, t) = \int \frac{\rho(r', t)}{|r - r'|} dV',$$

$$A(r, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t)}{|r - r'|} dV'. \quad (36.25)$$

Поле определяется мгновенными распределениями зарядов и токов в системе.

Разложение скалярного потенциала в ряд по отношению  $l/r$  производится таким же образом, как и в статическом случае (см. § 21). Ограничи-

\*) Казалось бы, что при  $\ddot{p} \neq 0$  и при необходимости учесть члены порядка  $(l/\lambda)^2$  следует взять сумму выражений (36.11) и (36.23). Но недавно было выяснено, что это не так [104]: наряду с указанными членами в интенсивность излучения войдет дополнительное слагаемое  $\frac{2}{15c^5} (\ddot{p} \cdot \ddot{L})$ , также имеющее порядок  $(l/\lambda)^2$ . В нем

$$L_\alpha = \frac{d}{dt} \int \rho r^2 x_\alpha dV - \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) j_\beta dV.$$

ваясь дипольным приближением, будем иметь

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (36.26)$$

где  $q$  — полный заряд системы,

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) dV' \quad (36.27)$$

— ее электрический дипольный момент.

При разложении векторного потенциала возникают некоторые отличия от статического случая. Производя разложение, как в § 25, получим с точностью до магнитно-дипольного члена

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' + \frac{1}{cr^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV'.$$

Второй член преобразуется к потенциалу магнитного диполя (25.9). Первый же член для нестационарной системы не обращается в нуль:

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' = - \int \mathbf{r}' \operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dV' = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t) dV' = \dot{\mathbf{p}}(t).$$

Таким образом, векторный потенциал принимает вид

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t)}{cr} + \frac{\mathbf{m}(t) \times \mathbf{n}}{r^3}. \quad (36.28)$$

Ему соответствует магнитное поле

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} A = \frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{cr^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}. \quad (36.29)$$

Последние два члена описывают поле магнитного диполя. Первый же член представляет собой поле, создаваемое элементарным током. Пусть, например,  $\mathbf{p}(t) = q(t)l$ , где  $l$  — расстояние между двумя одинаковыми по абсолютной величине зарядами диполя, а  $q(t)$  — величина положительного заряда. Тогда ток вдоль отрезка  $l$ , соединяющего заряды,  $J(t) = \dot{q}(t)$ . Магнитное поле за счет первого члена в (36.29)

$$H_{BS} = \frac{J(t)}{cr^3} [l \times \mathbf{r}]$$

представляет собой вычисленное по закону Био — Савара поле элементарного тока, текущего в отрезке  $l$ .

Комбинируя приближения, использованные в п. 36.1 — 36.3, нетрудно вычислить поле во всей области  $r \gg l$ , в том числе в переходной зоне  $r \approx \lambda$ . Но мы не будем приводить здесь соответствующие, довольно громоздкие формулы.

#### 36.4. Примеры излучения простейших систем.

Элементарный электрический диполь. Такая система часто встречается в физике и технике и может быть реализована многими способами, например, в виде короткого ( $l \ll \lambda$ ) отрезка провода, возбуждаемого переменным током  $J(t) = J_0 \sin \omega t$ . Для наглядности предположим, что элементарный диполь представляет собой две одинаковые приводящие сферы, соединенные проводником длиной  $l$ . В системе возбуждены электрические колебания, в результате которых заряды на сферах  $+q$  и  $-q$  периодически меняются:  $q(t) = q_0 \cos \omega t$ . Это вызывает колебания дипольного момента  $p = q_0 l \cos \omega t$  и ток в проводнике  $J(t) = q_0 \omega \sin \omega t$ . Энергия, диссипируемая

в проводнике и расходуемая на излучение, восполняется внешним источником (генератором электромагнитных колебаний).

Оrientировав диполь вдоль оси  $z$ , получим с помощью (36.6), (36.7) отличные от нуля компоненты поля в волновой зоне:

$$H_\varphi = E_\theta = -\frac{\omega^2 p(t-r/c)}{c^2 r} \sin \theta. \quad (36.30)$$

Как следует из (36.30), поле представляет собой расходящуюся сферическую волну с линейной поляризацией. Излучение максимально в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ), а его суммарная по всем направлениям интенсивность дается формулой (36.11):

$$I = 2\omega^4 p^2 / 3c^3. \quad (36.31)$$

Средняя по времени интенсивность, будучи выражена через дипольный момент, пропорциональна четвертой степени частоты:  $\bar{I} = \omega^4 p_0^2 / 3c^3$ , где  $p_0 = q_0 l$  — амплитуда дипольного момента. Но если интенсивность выразить через силу тока, она оказывается пропорциональной квадрату частоты:  $\bar{I} = \omega^2 J_0^2 l^2 / 3c^3$ .

**Магнитный ротор.** Пусть тело, имеющее магнитный момент  $m$ , равномерно, с частотой  $\omega$  вращается вокруг оси, составляющей угол  $\alpha$  с вектором  $m$ . Найдем угловое распределение и полную интенсивность излучения, усредненные по вращению тела.

Напряженности поля в волновой зоне вычислим по формулам (36.18), где полагаем  $Q = 0$  ввиду отсутствия квадрупольного момента. Угловое распределение излучения

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} r^2 \overline{E^2(t)} = \frac{1}{4\pi c^3} |\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}|^2.$$

Для вычисления правой части используем уравнение движения магнитного момента  $\dot{\mathbf{m}} = \omega \times \mathbf{m}$ . Из него получаем

$$\ddot{\mathbf{m}} = \omega \times (\omega \times \mathbf{m}) = -\omega^2 \mathbf{m}_\perp,$$

где  $\mathbf{m}_\perp$  — составляющая, перпендикулярная оси вращения. Таким образом,

$$(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})^2 = \omega^4 [m_\perp^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_\perp)^2],$$

или

$$(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})^2 = \omega^4 m_\perp^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - \varphi)),$$

где  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от направления  $\vec{\omega}$ ;  $\omega t$  и  $\varphi$  — азимуты векторов  $\mathbf{m}_\perp$  и  $\mathbf{n}$  в плоскости, перпендикулярной  $\omega$ .

Усредняя по времени, находим окончательно:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4 m^2 \sin^2 \alpha}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta). \quad (36.32)$$

Интегрирование по телесному углу дает

$$I = 2\omega^4 m^2 \sin^2 \alpha / 3c^3.$$

Модель магнитного ротора часто используют для объяснения электромагнитного излучения нейтронных звезд — пульсаров. Но механизмы излучения пульсаров намного более сложные, чем рассмотренный выше, так как звезда вращается в плазме и имеет плазменную оболочку — магнитосферу.

## § 37. ИЗЛУЧЕНИЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ТЕЛ. АНТЕННЫ

**37.1. Вектор Герца.** Если излучателем является макроскопическое тело размерами  $l \gg \lambda$ , то разложение поля излучения по мультиполям неприменимо, и следует пользоваться точными выражениями (32.22), (32.23) для запаздывающих потенциалов. Количество неизвестных функций можно уменьшить, если вместо потенциалов  $A(r, t)$  и  $\varphi(r, t)$ , связанных условием Лоренца (18.3), ввести одну векторную функцию  $Z(r, t)$ , через которую

выражаются электромагнитные потенциалы:

$$\varphi = -\operatorname{div} Z, \quad A = \frac{1}{c} \frac{\partial Z}{\partial t}. \quad (37.1)$$

Величина  $Z$  называется *вектором Герца* или *поляризационным потенциалом*.

Распределение зарядов и токов электронейтральной системы при этом целесообразно описывать с помощью одной векторной функции  $P(r, t)$  посредством соотношений

$$\rho = -\operatorname{div} P, \quad j = \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (37.2)$$

$P(r, t)$  носит название *вектора поляризации* (ср. с вектором поляризации вещества, введенным в § 2, ч. II книги). Связь зарядов и токов (37.2) с вектором поляризации обеспечивает выполнение уравнения непрерывности:  $\operatorname{div} j + \partial \rho / \partial t = 0$ . Полный заряд ограниченной системы при этом должен быть равен нулю,

$$q = \int_{V \rightarrow \infty} \rho dV = - \int_{V \rightarrow \infty} \operatorname{div} P dV = \oint_{S \rightarrow \infty} P \cdot dS = 0,$$

а полный электрический дипольный момент  $p$  выражается интегралом  $\int P dV$  по объему системы. В самом деле, по определению  $p = \int r \rho dV$ , или с помощью (37.2)

$$p = - \int r \operatorname{div} P dV = \int P dV. \quad (37.3)$$

Последнее равенство представляет собой тождество при условии, что вне системы  $P = 0$ , и свидетельствует о том, что вектор  $P$  можно рассматривать как дипольный момент на единицу объема рассматриваемой системы движущихся зарядов.

Подчиним вектор Герца неоднородному уравнению Даламбера:

$$\Delta Z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -4\pi P. \quad (37.4)$$

Применяя к обеим частям (37.4) попеременно операторы  $-\operatorname{div}$  и  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ , мы получим уравнения для потенциалов (18.5), что доказывает правильность выбора уравнения (37.4) для вектора Герца. По аналогии с запаздывающими потенциалами (32.22), (32.23) можно записывать решение уравнения (37.4) для ограниченной системы в свободном пространстве:

$$Z(r, t) = \int \frac{P(r', t - |r - r'|/c)}{|r - r'|} dV'. \quad (37.5)$$

В заключение приведем выражения для напряженностей поля через вектор Герца:

$$E = \operatorname{rot} \operatorname{rot} Z - 4\pi P, \quad H = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} Z. \quad (37.6)$$

Они получаются с помощью (37.1) и (37.4).

**37.2. Излучение антенны. Диаграмма направленности.** Рассмотрим излучение проводника длиной  $l$ , в котором возбуждена стоячая волна тока (рис. 37.1):

$$J(z, t) = J_0 \sin[k(z + l/2)] e^{-i\omega t}. \quad (37.7)$$

На концах проводника сила тока равна нулю, поэтому

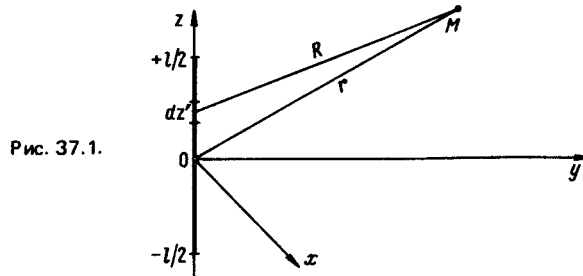
$$k = \omega/c = m\pi/l, \quad (37.8)$$

здесь  $m$  — число полуволн, укладывающихся на длине проводника. Такой проводник представляет собой простейшую (линейную) антенну, на примере которой мы рассчитаем излучение макроскопического тела.

Считая провод бесконечно тонким, записываем объемную плотность тока в виде  $\mathbf{j} = e_z J(z, t) \delta(x) \delta(y)$  и с помощью второй формулы (37.2) находим вектор поляризации:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\omega} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (37.9)$$

Теперь вектор Герца может быть найден согласно (37.5). Рассмотрим расстояния, большие по сравнению с  $l$ . В знаменателе (37.5) полагаем



$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ , а во временном аргументе  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - z' \cos \theta$ . В этом приближении вектор Герца выразится интегралом

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = e_z \frac{iJ_0}{\omega r} \exp(ikr - i\omega t) \int_{-l/2}^{l/2} \sin \left[ k \left( z' + \frac{l}{2} \right) \right] \exp(-ikz' \cos \theta) dz',$$

вычисление которого производится элементарно и дает

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = e_z \frac{2J_0 c}{\omega^2 r} \frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\sin^2 \theta} \begin{cases} \left[ -\sin \left( \frac{m\pi}{2} \cos \theta \right) \right] & - m \text{ четное,} \\ \left[ i \cos \left( \frac{m\pi}{2} \cos \theta \right) \right] & - m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (37.10)$$

Вектор  $\mathbf{H}$  определяется по формуле (37.6). В сферических координатах

$$\mathbf{H} = e_\varphi \frac{2J_0}{cr} \frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\sin \theta} \begin{cases} \left[ -\sin \left( \frac{m\pi}{2} \cos \theta \right) \right] & - m \text{ четное,} \\ \left[ i \cos \left( \frac{m\pi}{2} \cos \theta \right) \right] & - m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (37.11)$$

Далее находим угловое распределение излучения, усредненное по времени:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{8\pi} |H|^2 = \frac{J_0^2}{2\pi c} \begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} & - m \text{ четное,} \\ \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} & - m \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (37.12)$$

Характер углового распределения излучения виден из полярных диаграмм, изображенных на рис. 37.2. Штриховой линией показано распределение тока по длине антенны, сплошной – угловое распределение излучения. Разделение диаграммы направленности излучения на отдельные лепестки связано с интерференцией полей, создаваемых разными участками антенны.

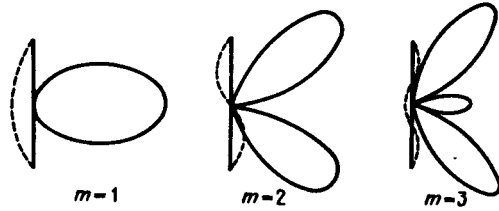


Рис. 37.2.

Излучение имеет наибольшую интенсивность в направлениях, определяемых осями наружных лепестков.

Энергия, излучаемая антенной в виде электромагнитных волн, черпается из энергии тока, возбуждаемого в антенне генератором электромагнитных колебаний. Поэтому с излучением можно связать некоторое дополнительное сопротивление, которое называется *сопротивлением излучения* и характеризует потерю электромагнитной энергии на излучение. Определим сопротивление излучения соотношением

$$R_r = 2\overline{I}/J_0^2,$$

где  $\overline{I}$  – суммарная по всем направлениям интенсивность излучения, усредненная по времени,  $J_0^2$  – амплитуда силы тока в антенне. Проинтегрировав интенсивность (37.12) по телесному углу, найдем

$$R_r = \frac{1}{c} [\ln(2\pi m) + C + \text{Ci}(2\pi m)],$$

где

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

– интегральный косинус,  $C \approx 0,577$  – постоянная Эйлера.

Сопротивление излучения выражает собой обратное влияние излучения на колебания тока в антенне.

**37.3. Принцип взаимности.** Рассмотрим два источника, характеризующиеся распределениями тока  $j_1$  и  $j_2$  и создающие монохроматические поля одинаковой частоты  $\omega$ . В силу принципа суперпозиции эти поля по отдельности

удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H_1 &= \frac{4\pi}{c} j_1 - \frac{i\omega}{c} E_1, & \operatorname{rot} H_2 &= \frac{4\pi}{c} j_2 - \frac{i\omega}{c} E_2, \\ \operatorname{rot} E_1 &= i \frac{\omega}{c} H_1, & \operatorname{rot} E_2 &= i \frac{\omega}{c} H_2. \end{aligned} \quad (37.13)$$

Умножив эти уравнения соответственно на  $E_2, H_2, E_1, H_1$  и вычитая их попарно, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(H_1 \times E_2) &= \frac{4\pi}{c} j_1 \cdot E_2 - \frac{i\omega}{c} (E_1 \cdot E_2 + H_1 \cdot H_2), \\ \operatorname{div}(H_2 \times E_1) &= \frac{4\pi}{c} j_2 \cdot E_1 - \frac{i\omega}{c} (E_1 \cdot E_2 + H_1 \cdot H_2). \end{aligned}$$

Наконец, вычитая почленно получившиеся равенства, найдем

$$\operatorname{div}(H_1 \times E_2 - H_2 \times E_1) = \frac{4\pi}{c} (j_1 \cdot E_2 - j_2 \cdot E_1). \quad (37.14)$$

Проинтегрируем обе части уравнения (37.14) по всему пространству. Это дает

$$\int j_1 \cdot E_2 dV = \int j_2 \cdot E_1 dV + \frac{c}{4\pi} \oint_{S \rightarrow \infty} (H_1 \times E_2 - H_2 \times E_1) \cdot dS,$$

где объемный интеграл преобразован в поверхностный с помощью теоремы Остроградского — Гаусса. В вакууме интеграл по бесконечно удаленной поверхности при наличии поля излучения отличен от нуля. Но реальные излучатели всегда находятся в среде, которая вызывает некоторое затухание электромагнитных волн. Поэтому поверхностный интеграл можно считать равным нулю, хотя на конечных расстояниях влияние поглощения может быть пренебрежимо малым. В итоге мы приходим к следующей формулировке теоремы взаимности:

$$\int j_1 \cdot E_2 dV = \int j_2 \cdot E_1 dV. \quad (37.15)$$

Для случая двух источников поля, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, а расстояние между ними велико по сравнению с их размерами, равенство (37.15) допускает упрощения. При указанных условиях каждый из векторов  $E_1$  и  $E_2$  можно считать постоянным в пределах другого источника и вынести за знак интеграла:

$$E_2 \cdot \int j_1 dV = E_1 \cdot \int j_2 dV.$$

Далее применяем ранее неоднократно использовавшееся тождество

$$\int j dV = - \int r \operatorname{div} j dV$$

и с помощью уравнения непрерывности находим

$$\int j dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int r \rho dV = i\omega p,$$

где  $p$  — дипольный момент. Теорема взаимности для электрических дипольных излучателей принимает вид

$$p_1 \cdot E_2 = p_2 \cdot E_1. \quad (37.16)$$

Если дипольные излучатели представляют собой квазилинейные проводники, длины которых малы по сравнению с длиной волны излучения, то (37.15) можно придать другую форму. Заменяя  $j dV \rightarrow J dl$  и обозначая

$$\int E_2 \cdot dl_1 = U_2(1), \quad \int E_1 \cdot dl_2 = U_1(2)$$

— разности потенциалов, создаваемые источником 2 на концах проводника 1 и источником 1 на концах проводника 2, будем иметь

$$J_1 U_2(1) = J_2 U_1(2). \quad (37.17)$$

Пусть ориентация первой антенны изменяется. В соответствии с ее диаграммой направленности будет изменяться и  $U_1(2)$ . Но

$$U_2(1) = (J_2/J_1) U_1(2),$$

т.е. наводимая на первой антенне разность потенциалов пропорциональна  $U_1(2)$ . Следовательно, диаграмма направленности антенны в режимах приема и передачи одна и та же.

Это свойство, как оказывается, сохраняется и для произвольных антенных систем. Диаграммы направленности любой антенны при работе на прием и на передачу совпадают.

## § 38. РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

**38.1. Взаимодействие заряженной частицы с собственным электромагнитным полем.** Мы уже столкнулись в § 22 с трудностью определения собственной электростатической энергии заряженной частицы. Для точечной частицы эта энергия оказывается бесконечной. Введения конечного радиуса частицы

$$r_0 = e^2/mc^2 \quad (38.1)$$

и связанного с этим предположения о наличии у нее внутренней структуры позволяет сделать собственную энергию конечной. Но объект размером  $r_0$  не описывается классической теорией: квантовые эффекты становятся существенными уже на значительно больших расстояниях,

$$\Lambda = \hbar/mc \approx 137 r_0. \quad (38.2)$$

Параметр  $\Lambda$  называется *комптоновской длиной волны*.

К сожалению, квантовая теория не разрешает трудностей, связанных с вычислением собственной энергии. В ней появляется, кроме бесконечной собственной энергии, еще одна бесконечная величина — добавка к заряду частицы \*).

При ускоренном движении заряженной частицы возникает ее дополнительное взаимодействие с собственным полем. Ускоренное движение порождает излучение электромагнитных волн, что приводит, как мы видели в § 35, к потере частицей энергии и импульса. Следовательно, само движение частицы будет зависеть от излучения ею электромагнитных волн, и корректная постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения в уравнение движения членов, учитывающих влияние излучения на движение.

Во многих случаях, однако, это влияние оказывается малым, что и позволяет считать движение излучающей частицы заданным. Количественный

\*) Рассмотрение этих вопросов выходит за рамки классической электродинамики. С ними можно ознакомиться по книгам [8, 18].

критерий малости реакции излучения можно получить, сравнивая потерю энергии на излучение за некоторое время  $\Delta t$  с изменением кинетической энергии частицы под действием внешних сил за то же время. Оценим обе энергии в системе отсчета, в которой скорость частицы — нерелятивистская:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{rad}} \approx 2e^2 \dot{v}^2 \Delta t / 3c^3 \approx 2e^2 \dot{v} \Delta v / 3c^3,$$

где  $\Delta v$  — изменение скорости за время  $\Delta t$ ;  $\Delta \mathcal{E}_{\text{kin}} \approx m \Delta v \cdot v$ .

Неравенство  $\Delta \mathcal{E}_{\text{rad}} \ll \Delta \mathcal{E}_{\text{kin}}$  дает

$$\Delta t \approx v / \dot{v} \gg 2e^2 / 3mc^3 = 2r_0 / 3c = \tau, \quad (38.3)$$

где  $\tau$  — время распространения электромагнитных возмущений на расстояние порядка классического радиуса частицы (множитель  $2/3$  написан для упрощения последующих формул). Наибольшее значение время  $\tau$  имеет для самой легкой элементарной частицы — электрона:  $\tau_e = 0,63 \cdot 10^{-23}$  с.

При квазипериодическом движении частицы ее средняя скорость и ускорение возвращаются к исходным значениям через каждый период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , и потерю энергии на излучение за период нужно сравнивать со средней кинетической энергией:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{rad}} \approx (2e^2 l^2 \omega_0^4 / 3c^3) T_0, \quad \Delta \mathcal{E}_{\text{kin}} \approx m \omega_0^2 l^2,$$

где  $l$  — размер области движения частицы. Сравнение дает

$$T_0 \gg \tau \quad \text{или} \quad \omega_0 \tau \ll 1. \quad (38.4)$$

Таким образом, реакцию излучения можно рассматривать как малый эффект, если движение частицы достаточно плавное: ее состояние слабо изменяется за время  $\tau$  или на расстояниях  $ct \approx r_0$ .

**38.2. Вычисление силы радиационного торможения из закона сохранения энергии.** Рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы под действием внешней силы  $F_0$ . При ускоренном движении частица излучает электромагнитные волны. Для учета реакции излучения добавим в правую часть уравнения движения силу реакции излучения  $F_{\text{rad}}$ :

$$m \dot{v} = F_0 + F_{\text{rad}}. \quad (38.5)$$

Сконструируем силу  $F_{\text{rad}}$  таким образом, чтобы работа этой силы за конечный промежуток времени была равна энергии, излучаемой частицей за то же время. С помощью (35.14) находим:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2(t') dt' = - \int_{t_1}^{t_2} F_{\text{rad}} \cdot v dt'. \quad (38.6)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\text{rad}} \cdot v dt' = - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v} \cdot v \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{v} \cdot v dt'. \quad (38.7)$$

Во многих случаях слагаемое  $\dot{v} \cdot v \Big|_{t_1}^{t_2}$  обращается в нуль. Это имеет место при периодическом движении, если  $t_2 - t_1$  равно периоду, или при движении в магнитном поле, когда  $\dot{v} \cdot v = 0$ , или при конечном времени ускорения, когда  $\dot{v}(t_1) = \dot{v}(t_2) = 0$ . Во всех указанных случаях, как следует из (38.7), интегральный баланс энергии будет соблюдаться, если

$$F_{\text{rad}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{v}. \quad (38.8)$$

В итоге уравнение движения (38.5) примет вид

$$m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (38.9)$$

Мы установили вид силы радиационного торможения из нестрогих полукачественных соображений. Применение более последовательных подходов \*) либо приводит к той же самой формуле (38.8), либо требует рассмотрения неизвестной и не описываемой классической электродинамикой внутренней структуры элементарной частицы.

Лоренцева сила лучистого трения (38.8) описывает реакцию излучения не вполне удовлетворительным образом. Прежде всего, она повышает порядок уравнения движения, так как содержит третью производную от радиус-вектора. Такая структура уравнения движения находится в противоречии с основными положениями классической механики, вся схема которой предполагает, что уравнения движения должны иметь второй порядок по времени. Поэтому некоторые решения уравнения (38.9) оказываются физически бессмысленными. Например, при  $\mathbf{F}_0 = 0$  уравнение

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

имеет решение

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 e^{t/\tau}, \quad (38.10)$$

которое описывает неограниченное самоускорение частицы в отсутствие внешних сил.

Но в тех случаях, когда сила лучистого трения (38.8) входит в уравнение движения как малая добавка к внешним силам, учитываемая по методу последовательных приближений, она дает физически осмысленные результаты (см. § 39). Эту силу приходится использовать ввиду отсутствия другого, более удовлетворительного описания реакции излучения.

Нетрудно сформулировать условия малости радиационной силы по сравнению с внешней электромагнитной силой. Записывая

$$\mathbf{F}_0 = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0, \quad (38.11)$$

находим из (38.9) в нулевом приближении по радиационной силе

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \dot{\mathbf{E}}_0 + \frac{e}{mc} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}_0 + \frac{e}{mc} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{H}}_0. \quad (38.12)$$

В мгновенно сопутствующей системе  $\mathbf{v} = 0$ , а ускорение в нулевом приближении имеет значение  $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}_0/m$ . С учетом этого получим из (38.8) и (38.12) следующее приближенное выражение для радиационной силы в мгновенно сопутствующей системе отсчета:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}}_0 + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0. \quad (38.13)$$

В периодическом внешнем поле  $\dot{\mathbf{E}}_0 \approx -i\omega_0 \mathbf{E}_0$ , поэтому сравнение (38.13) с (38.11) в сопутствующей системе дает два неравенства:

$$\omega_0 \tau \ll 1 \quad \text{или} \quad \lambda_0 \gg r_0 \quad (38.14)$$

и

$$H_0 \ll e/r_0^2 = m^2 c^4 / e^3. \quad (38.15)$$

\*) Их можно найти в книгах [44, 58, 11].

Первое из этих неравенств уже было получено раньше (см. (38.4)) из других соображений. Второе неравенство требует, чтобы внешнее поле было малым по сравнению с максимальным полем "классической" частицы — протяженного объекта, имеющего радиус  $r_0$ . Квантовые поправки ограничивают область применимости классической электродинамики значительно меньшими полями:

$$H_0 \ll m^2 c^3 / \hbar e = e / 137 r_0^2.$$

Сила радиационного торможения (38.8) допускает релятивистское обобщение. Приведем для справок соответствующее четырехмерное выражение:

$$R^i = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{d^2 u^i}{d\tau^2} - \frac{u^i u^k}{c^2} \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} \right). \quad (38.16)$$

Пространственная часть  $R^i$  при  $v \rightarrow 0$  переходит в (38.8). Вывод (38.16) можно найти в книгах [44, 58, 11].

### § 39. ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Излучение, поглощение и рассеяние волн атомными системами — это квантовые процессы, последовательное описание которых возможно только на основе квантовой механики и квантовой электродинамики. Но многие качественные характеристики этих явлений хорошо передаются моделью взаимодействия электромагнитных волн с гармоническим осциллятором. Под осциллятором мы будем понимать заряженную частицу, связанную с некоторым центром упругой силой. Последняя моделирует связь электронов в атомах.

**39.1. Излучение осциллятора. Естественная ширина спектральных линий.** Пусть электрон, связанный с началом координат изотропной упругой силой  $F_e = -m\omega_0^2 r$ , совершает свободные колебания. В отсутствие излучения нерелятивистское уравнение движения электрона имело бы вид

$$m\ddot{r} + m\omega_0^2 r = 0. \quad (39.1)$$

и описывало бы незатухающие гармонические колебания с частотой  $\omega_0$ . Но реакция излучения, как мы видели в § 38, приводит к появлению силы радиационного трения

$$F_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r},$$

которую следует добавить в правую часть уравнения (39.1):

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{r}. \quad (39.2)$$

Решение будем искать методом последовательных приближений, считая силу радиационного трения малой. В нулевом приближении  $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$ , поэтому  $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$ . Введя обозначение

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} = \frac{2\omega_0^2}{3c} r_0, \quad (39.3)$$

где  $r_0 = e^2 / mc^2$ , получим уравнение движения осциллятора с трением:

$$\ddot{r} + \gamma \dot{r} + \omega_0^2 r = 0. \quad (39.4)$$

Здесь  $\gamma \ll \omega_0$ , если  $\omega_0 \ll c/r_0$  или  $\lambda_0 \gg r_0$ . Для электрона  $\omega_0 \ll 10^{23} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует энергии  $\gamma$ -квантов  $\mathcal{E}_\gamma = \hbar \omega_0 \ll 100 \text{ МэВ}$ .

Решая (39.4) с учетом малости  $\gamma$ , в пренебрежении членами  $(\gamma/\omega_0)^2$  найдем:

$$r(t) = a \exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t), \quad (39.5)$$

где  $a$  — начальная амплитуда осциллятора. Поскольку поле излучения заряженной частицы пропорционально  $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$ , то в волновой зоне

$$E = E_0 \exp(-\gamma t/2 - i\omega_0 t), \quad (39.6)$$

где  $E_0$  — зависящая от координат амплитуда поля. С таким сигналом мы уже имели дело в конце § 29. Он приводит к распределению интенсивности излучения по частотам вида (29.28):

$$I_\omega = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}. \quad (39.7)$$

Постоянная  $I_0$  — это полная интенсивность:

$$I_0 = \int_0^\infty I_\omega d\omega.$$

Отсутствию лучистого трения соответствует  $\gamma \rightarrow 0$ . При этом, согласно (Д.ІV. 17),

$$\frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \delta(\omega - \omega_0),$$

и спектральное распределение становится бесконечно узким:

$$I_\omega = I_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (39.8)$$

Таким образом, учет радиационного трения приводит к качественно новому эффекту — конечной ширине спектра излучения.

Квантовомеханический расчет дает для атомных спектров такую же форму линии (39.6), что и классическая модель осциллятора, но с другим значением постоянной  $\gamma$ . Такая форма линии называется *лоренцевским контуром*, а постоянная  $\gamma$  — *естественной шириной линии*. Обратная величина  $\tau = \gamma^{-1}$  характеризует время жизни возбужденного состояния осциллятора: за время порядка нескольких  $\tau$  осциллятор высвечивается и его колебания прекращаются.

В реальных условиях форма и ширина спектральных линий атомов определяются не только реакцией излучения, но и другими факторами, среди которых главную роль обычно играют столкновения атомов и их тепловое движение.

**39.2. Рассеяние электромагнитных волн осциллятором.** Рассмотрим взаимодействие плоской монохроматической волны с осциллятором. В правую

часть уравнения (39.2) нужно добавить силу взаимодействия заряженной

частицы с полем волны  $\frac{e}{m} \left( E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)$ . Но магнитная составляющая

силы Лоренца для нерелятивистской частицы имеет относительный порядок  $v/c \ll 1$ . Пренебрегая этой силой, запишем уравнение движения:

$$\ddot{r} + \omega_0 r = e E_0 \exp(ik \cdot r - \omega t) + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{r}. \quad (39.9)$$

Но и в таком виде уравнение слишком сложно. Поэтому введем дальнейшие упрощения: а) будем считать амплитуду колебаний электрона  $a$  малой по сравнению с длиной волны внешнего поля,  $a \ll \lambda_0$ , чтобы можно было положить  $\exp(ik \cdot r) \approx 1$ ; б) учтем радиационную силу по методу последовательных приближений, т.е. подставим в нее  $\ddot{r} = -\omega_0^2 r + e E_0 \exp(-i\omega t)$ . Это позволяет получить окончательное уравнение движения:

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r + \gamma \dot{r} = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}, \quad (39.10)$$

где в правой части отброшен член порядка  $r_0/\lambda \ll 1$ .

В задаче рассеяния достаточно найти частное решение уравнения (39.10), колеблющееся с частотой вынуждающей силы, поскольку собственные колебания осциллятора затухнут за время  $\gamma^{-1}$ . Получаем

$$r = \frac{(eE_0/m) \exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (39.11)$$

и находим дипольный момент колеблющейся частицы:  $p = er$ . Далее с помощью формулы (36.10) находим усредненную по времени интенсивность излучения вторичных волн осциллятором:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3} |\ddot{p} \times n|^2. \quad (39.12)$$

Процесс рассеяния обычно характеризуют эффективным дифференциальным сечением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\gamma_0} \frac{dI}{d\Omega}, \quad (39.13)$$

где  $\gamma_0 = c |E_0|^2 / 8\pi$  — средняя по времени плотность потока энергии в падающей волне. Угловое распределение рассеянного излучения зависит от характера поляризации падающей волны.

1. Рассеяние линейно-поляризованной волны. При этом  $E_0 = E_0 e$ , где  $e$  — действительный единичный вектор поляризации. С помощью (39.11) — (39.13) находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (39.14)$$

где  $\theta$  — угол между  $e$  и направлением распространения рассеянной волны.

2. Циркулярно-поляризованная волна. Выбирая ось  $z$  вдоль направления ее распространения, полагаем  $E_0 = E_0 (e_x \pm ie_y) / \sqrt{2}$  и получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\omega^4 (1 + \cos^2 \vartheta)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (39.15)$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением распространения падающей волны и направлением рассеяния. Сечение не зависит от направления вращения вектора  $E$  в волне. Поскольку неполяризованную волну можно рассматривать как некогерентную смесь двух циркулярно-поляризованных волн с равными интенсивностями и противоположными направлениями вращения (см. п. 30.3), то сечение рассеяния неполяризованной волны описывается той же формулой (39.15).

Интегрируя (39.14) и (39.15) по телесному углу, получаем для этих случаев одинаковые значения полного эффективного сечения рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (39.16)$$

При частотах, близких к  $\omega_0$ , т.е. при  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ , общую формулу (39.16) можно упростить. Полагая  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$  и оставляя члены с разностью  $\omega - \omega_0$  только в знаменателе, получим

$$\sigma = \frac{2\pi r_0^2}{3} \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \quad (39.17)$$

Зависимость от частоты — такая же, как для спектра излучения осциллятора (39.6). При  $\omega = \omega_0$  имеется резкий максимум:

$$\sigma_{\max} = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2.$$

Если рассеяние происходит вдали от резонанса,  $\omega \gg \omega_0$ , то

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \text{const} \quad (39.18)$$

— зависимость от частоты исчезает. Фактически, однако, применимость формулы (39.18) ограничена сверху условием  $\hbar \omega \ll mc^2$  — энергия отдельного кванта электромагнитного поля должна быть мала по сравнению с энергией покоя частицы. В противном случае нужно учитывать квантовые эффекты.

В области малых частот,  $\omega \ll \omega_0$ ,

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (39.19)$$

— полное сечение пропорционально четвертой степени частоты.

Полученные выше результаты позволяют построить простую модель поляризации среды в переменном поле. Пусть в среде имеются осцилляторы разных сортов, с различными собственными частотами  $\omega_j$  и постоянными затухания  $\gamma_j$ . Полное число осцилляторов на единицу объема  $n$ , причем относительная доля осцилляторов сорта  $j$  равна  $f_j$ . Под действием внешнего поля каждый осциллятор колеблется по закону (39.11). Дипольный момент на единицу объема среды  $P$  мы получим, умножив каждое  $r_j$  на заряд электрона и просуммировав по всем осцилляторам:

$$P = en \sum_j f_j r_j = \frac{e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j E_0 \exp(-i\omega t)}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega \gamma_j} \quad (39.20)$$

Коэффициент пропорциональности между поляризацией  $P$  и электрическим полем  $E = E_0 \exp(-i\omega t)$  называется *диэлектрической восприимчивостью среды*:

$$\chi = \frac{e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega \gamma_j} \quad (39.21)$$

Квантовомеханический расчет для разреженной газообразной среды дает для  $\chi$  выражение, совпадающее по форме с (39.21). Роль собственных частот осцилляторов  $\omega_j$  играют частоты переходов  $\omega_{mn} = (\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)/\hbar$  между различными уровнями энергии атомов.

#### § 40. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВОБОДНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

**40.1. Формула Томсона.** Дифференциальное и полное сечения рассеяния электромагнитных волн свободной заряженной частицей легко получить из предыдущих результатов для осциллятора, положив  $\omega_0 = 0$  и пренебрегая радиационной силой (которая дает вклад порядка  $r_0/\lambda \ll 1$ ). В итоге получим:

для волны с линейной поляризацией из (39.14)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \sin^2 \theta, \quad (40.1)$$

а для циркулярно поляризованной или неполяризованной волны из (39.15)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (40.2)$$

Интегрирование по углам приводит к формуле (39.18) для полного сечения (формуле Томсона):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (40.3)$$

Полное сечение является универсальной постоянной, не зависящей от частоты волн до тех пор, пока выполняется условие применимости классического расчета  $\hbar\omega \ll mc^2$ .

Рассеяние волны частицей сопровождается действием на частицу некоторой силы  $F$  со стороны рассеиваемого поля. В первом порядке по амплитуде поля  $F = eE_0 e^{-i\omega t}$ . Эта сила обращается в нуль при усреднении по периоду поля.

В следующем приближении средняя по времени сила отлична от нуля и определяется импульсом поля, поглощенным частицей в единицу времени. Излучение же вторичных волн нерелятивистской частицей связано с изменением ее импульса, как было показано в п. 35.2. Плотность импульса в плоской волне, согласно (16.29), (28.12), есть

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi c} [E \times H] = \frac{1}{4\pi c} \bar{E}^2 n. \quad (40.4)$$

Поглощаемый частицей в единицу времени импульс есть  $c\bar{g}\sigma$ . Таким образом,

$$F = \frac{1}{3} r_0^2 |E_0|^2 n, \quad (40.5)$$

где  $E_0$  — амплитуда волны. Сила направлена в сторону распространения падающей волны.

**40.2. Когерентное и некогерентное рассеяние.** Рассмотрим теперь взаимодействие плоской монохроматической линейно-поляризованной волны с системой одинаковых частиц, совершающих колебания, каждая около своего положения равновесия  $r_j$ . Мы по-прежнему будем пренебрегать неоднородностью падающей волны в пределах области колебаний отдельной частицы, но расстояние между частицами может быть произвольным по сравнению с длиной волны. Поэтому на частицу с номером  $j$  будет действовать поле  $E = E_0 \exp(ik_0 \cdot r_j - i\omega t)$ , а ее радиус-вектор

$$r_j = a \exp(ik_0 \cdot r_j - i\omega t), \quad (40.6)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний, одинаковая для всех частиц,  $k_0$  — волновой

вектор падающей волны. В случае упруго связанной частицы, согласно (39.11),

$$a = \frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (40.7)$$

а для свободной частицы следует положить  $\omega_0 = \gamma = 0$ .

Поле излучения в волновой зоне можно записать по принципу суперпозиции, пользуясь (36.6) и условием  $v/c \ll 1$ :

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \frac{1}{c^2 R_j} [e\ddot{r}_j(t'_j) \times n] = \\ &= - \sum_j \frac{\omega^2}{c^2 R_j} [p \times n] \exp \{ ik_0 \cdot r_j - i\omega(t - R_j/c) \}. \end{aligned} \quad (40.8)$$

Здесь  $p = ea$ ,  $R_j = |r - r_j|$ , где  $r$  отсчитывается от некоторого начала координат внутри объема, занимаемого частицами. Аппроксимируя в показателе экспоненты  $R_j = r - n \cdot r_j$ , а в знаменателе  $R_j = r$ , находим

$$H = \frac{\omega^2 (n \times p)}{c^2 r} \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \sum_j \exp(-iq \cdot r_j), \quad (40.9)$$

где  $q = k - k_0$  — изменение волнового вектора при рассеянии, а  $k = \omega n/c$  — волновой вектор рассеянной волны.

Обозначив эффективное дифференциальное сечение рассеяния волн системой зарядов через  $dS/d\Omega$  и вычислив его по формуле (39.13), получим

$$\frac{dS}{d\Omega} = \left| \sum_{j=1}^N \exp(-iq \cdot r_j) \right|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (40.10)$$

Здесь

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4 (n \times p)^2}{c^4 |E_0|^2}$$

— сечение рассеяния одиночной частицей, которое было вычислено раньше и дается формулами (39.14), (39.15) либо (40.1), (40.2).

Множитель

$$F(\omega, n_0, n) = \left| \sum_{j=1}^N \exp(-iq \cdot r_j) \right|^2 \quad (40.11)$$

представляет собой фактор когерентности, показывающий, в какой мере рассеяние системой зарядов отличается от рассеяния на отдельной частице. Он сильно зависит от соотношения между обратным переданным импульсом  $q^{-1}$  и размерами области, в которой движутся частицы. Рассмотрим два предельных случая.

1. Переданный импульс мал, так что для всех  $j$   $|q \cdot r_j| \ll 1$ . Заменяя в (40.11) экспоненты единицами, имеем

$$F = N^2, \quad (40.12)$$

где  $N$  — полное число рассеивателей. Это — случай полностью когерентного рассеяния, когда поля от отдельных частиц складываются в одной фазе. Сечение пропорционально квадрату числа рассеивателей:

$$dS/d\Omega = N^2 d\sigma/d\Omega. \quad (40.13)$$

Если рассеиваются длинные волны,  $\lambda \gg r_j$ , то формула (40.13) справедлива при всех углах рассеивания. Если же  $\lambda \lesssim r_j$ , то (40.13) справедливо только при рассеянии на малые углы, при которых  $qr_j \ll 1$ , несмотря на то, что  $kr_j \gg 1$ . Поскольку  $q = 2k \sin \theta / 2$ , где  $\theta$  — угол рассеяния, то область углов, в которой работает формула (40.13), дается неравенством

$$\theta \ll \theta_c \approx 1/kl. \quad (40.14)$$

Здесь  $l$  — размер области, занятой зарядами,  $\theta_c$  — характерное значение угла рассеяния.

2. Переданный импульс веппик,  $|q \cdot r_j| \gg 1$ . Запишем (40.11) в виде

$$F = \sum_{j=1}^N \exp[iq \cdot (r_j - r_j)] + \sum_{j \neq s} \exp[iq \cdot (r_s - r_j)].$$

Первая сумма, очевидно, равна  $N$ . Значения же второй суммы зависят, вообще говоря, от расположения зарядов, и если оно является случайным, то при достаточно большом  $N$  произойдет взаимное гашение осциллирующих слагаемых  $\exp[iq \cdot (r_s - r_j)]$ . Поэтому будем иметь  $F = N$ ,

$$dS/d\Omega = Nd\sigma/d\Omega. \quad (40.15)$$

Здесь складываются не амплитуды, а интенсивности волн, рассеянных отдельными частицами, и эффект пропорционален числу рассеивателей, а не их квадрату.

Рассмотренные выше интерференционные эффекты наблюдаются, например, при рассеянии рентгеновских лучей атомами и кристаллами.

Будем теперь решать уравнение Максвелла  $\text{rot } B = \frac{4\pi}{c} j$  совместно с материальным уравнением (27.9). Подставляя в уравнение

$$\text{rot rot } B = \frac{4\pi}{c} \text{rot } j$$

правую часть лондоновского соотношения (27.9), получим, что

$$\Delta B = \frac{4\pi e^2 n}{mc^2} B. \quad (27.11)$$

В случае плоской геометрии это уравнение примет вид

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} B.$$

Его решение есть

$$B = A_1 e^{z/\delta} + A_2 e^{-z/\delta},$$

где

$$\delta = c/\omega_p = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2}.$$

В полупространстве, занятом сверхпроводником ( $z > 0$ ),

$$B = B_0 \exp(-z/\delta). \quad (27.12)$$

Это решение и описывает эффект Мейсснера — Оксенфельда. Из (27.12) следует, что глубина, на которую все же проникает магнитное поле, равна

$$\delta = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2} = c/\omega_p. \quad (27.13)$$

Типичное значение величины  $\delta \approx 5 \cdot 10^{-6}$  см.

Уравнения Лондонов являются локальными в том смысле, что они выражают плотность тока  $j$  через значение  $B$  в той же точке пространства, в которой определена и  $j$ . Они описывают электродинамические свойства реальных сверхпроводников в узкой области температур около температуры перехода сверхпроводника в нормальный металл, когда магнитное поле у поверхности сверхпроводника изменяется достаточно медленно. В случае быстрого пространственного изменения магнитного поля у поверхности лондоновское локальное уравнение должно быть заменено на нелокальное (так называемый пиппардовский случай).

## Глава IV

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ

#### § 28. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ. ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

Уравнения Максвелла в случае монохроматических волн упрощаются, если напряженности поля представить в комплексной форме

$$E(t) = E(\omega) e^{-i\omega t}, \quad B(t) = B(\omega) e^{-i\omega t}.$$

$$H(t) = H(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \vec{D}(t) = \vec{D}(\omega) e^{-i\omega t}$$

так, чтобы измеряемые величины могли быть описаны действительными частями написанных комплексных напряженностей. В этом случае уравне-

ния Максвелла в среде, в которой нет сторонних зарядов и токов, могут быть представлены в виде

$$\operatorname{rot} E(\omega) = i \frac{\omega}{c} B(\omega), \quad \operatorname{rot} B(\omega) = -i \frac{\omega}{c} \vec{D}(\omega). \quad (28.1)$$

Два других уравнения из системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (28.2)$$

при описании электромагнитных волн в явном виде учитывать не надо, поскольку они следуют из уравнений (28.1). В этом легко убедиться, применяя оператор дивергенции к уравнениям (28.1). При этом левые части этих уравнений обращаются в нуль и из (28.1) сразу следуют уравнения (28.2).

Из (28.1) можно получить уравнение, содержащее только вектор  $E$ . Имея в виду, что

$$\vec{D}(k, \omega) = \hat{\epsilon}(k, \omega) E(k, \omega)$$

вычисляя ротор левой и правой частей первого из уравнений (28.1) и исключив  $\operatorname{rot} B(\omega)$  с помощью второго уравнения, получим

$$\Delta E - \operatorname{grad} \operatorname{div} E + \hat{\epsilon} \frac{\omega^2}{c^2} E = 0. \quad (28.3)$$

Использованное здесь обозначение  $\hat{\epsilon}$  для диэлектрической проницаемости означает, что при учете пространственной дисперсии величина  $\hat{\epsilon}$  даже в изотропной среде остается тензором. Второе слагаемое в (28.3), вообще говоря, не равно нулю даже в пространственно-однородных средах, несмотря на существование уравнения  $\operatorname{div}(\hat{\epsilon} E) = 0$ . Даже в случае, когда можно пренебречь пространственной дисперсией, из уравнения

$$\operatorname{div}(\hat{\epsilon} E) = 0$$

еще не следует, что величина  $\operatorname{div} E$  тоже равна нулю. Из этого уравнения в пространственно-однородной среде и без учета пространственной дисперсии следует только, что

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} E(\omega) = 0,$$

т.е. что  $\operatorname{div} E$  может и не быть нулем при частотах, при которых обращается в нуль диэлектрическая проницаемость.

В плоской волне все векторы поля зависят от координат, как  $e^{ik \cdot r}$ , поэтому уравнение (28.3) можно представить в виде

$$k^2 E - k(k \cdot E) = (\omega/c)^2 \hat{\epsilon}(k, \omega) E. \quad (28.4)$$

Поскольку в изотропной пространственно-однородной среде диэлектрическая проницаемость имеет вид (4.5), то это уравнение можно записать в форме

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{\text{tr}} \right) E - \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{ck} \right)^2 (\epsilon^l - \epsilon^{\text{tr}}) \right] k(k \cdot E) = 0. \quad (28.5)$$

Спроектируем это уравнение на ось, направленную вдоль волнового вектора  $k$ . Проще всего это можно сделать, умножив скалярное уравнение (28.5) на волновой вектор  $k$ . В результате уравнение (28.5) примет вид

$$(\omega/c)^2 \epsilon^l(k, \omega) (k \cdot E) = 0. \quad (28.6)$$

Напряженность электрического поля, определяемая этим уравнением, отлична от нуля, если при  $\omega \neq 0$

$$\epsilon^l(k, \omega) = 0. \quad (28.7)$$

Таким образом, продольная компонента электрического поля оказывается не зависимой от поперечной компоненты, причем частота продольного электрического поля определяется уравнением (28.7) как функция его волнового вектора. Уравнения, связывающие частоту и волновой вектор, принято называть *дисперсионными уравнениями*. Таким образом, уравнение (28.7) есть дисперсионное уравнение продольных колебаний электрического поля в среде. Дисперсионное уравнение (28.7) может иметь по крайней мере несколько корней. Самое высокочастотное решение можно легко найти, если вспомнить выражение (3.14) для высокочастотной асимптотики диэлектрической проницаемости. В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 - \omega_p^2 / \omega^2 = 0. \quad (28.8)$$

Отсюда следует, что продольные колебания электрического поля во всяком случае имеют место на частоте, которая совпадает с так называемой плазменной частотой  $\omega_p$ . Формула (28.8) написана без учета пространственной дисперсии. Учет этой дисперсии приводит к тому, что частота продольных колебаний электрического поля оказывается зависящей от волнового вектора, но при всех не слишком больших волновых векторах она не очень сильно отличается от  $\omega_p$ .

Первое же решение уравнения (28.5), которое мы получили, оказалось таким решением, которое не имеет аналогов в случае электромагнитных явлений в вакууме, где, как известно, не могут существовать продольные волны. Появление новых колебательных мод электромагнитного поля в среде — характерная черта электродинамики сред. Но кроме новых мод существуют, конечно, и такие решения, которые в некотором смысле являются обобщением уже известных из первой части книги. В частности, в среде, как и в вакууме, могут существовать поперечные волны. Полагая в (28.5), что  $k \cdot E = 0$ , получаем, что

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{tr}\right) E = 0. \quad (28.9)$$

Это означает, что дисперсионное уравнение для поперечной моды электромагнитных колебаний в среде имеет вид

$$\epsilon^{tr}(k, \omega) = (ck/\omega)^2. \quad (28.10a)$$

Уравнению (28.10) можно придать такой вид, что вместо поперечной диэлектрической проницаемости  $\epsilon^{tr}$  в дисперсионное уравнение для поперечной моды электромагнитных колебаний будут входить две другие характеристики среды,  $\epsilon$  и  $\mu$ . С помощью (4.9) из (28.10) легко получается:

$$\epsilon\mu = (ck/\omega)^2. \quad (28.10b)$$

При низких частотах, когда можно пренебречь временной дисперсией диэлектрической проницаемости, дисперсионное уравнение (28.10) превращается в уравнение

$$\omega = ck / \sqrt{\epsilon^{tr}}, \quad (28.11)$$

которое в пределе  $\epsilon^{tr} \rightarrow 1$  переходит в обычное вакуумное решение. Из (28.11) следует, что так называемая *фазовая скорость* низкочастотной волны в веществе, которая определяется как

$$v_{ph} = \omega/k \quad (28.12)$$

и которая показывает, с какой скоростью перемещается в пространстве поверхность равной фазы плоской монохроматической волны, связана со скоростью света в вакууме соотношением.

$$v_{ph} = c / \sqrt{\epsilon^{tr}}. \quad (28.13)$$

Величину  $\sqrt{\epsilon^{tr}}$  принято называть *показателем преломления*

$$n = \sqrt{\epsilon^{tr}}. \quad (28.14)$$

В этих обозначениях дисперсионное уравнение (28.11) принимает вид

$$\omega = ck/n. \quad (28.15)$$

Формула (28.15) может быть написана и в случае высоких частот, но при этом показатель преломления становится функцией частоты  $n = n(\omega)$ , так что простая линейная зависимость  $\omega$  от  $k$  уже не будет иметь места. Обращаясь опять к справедливому при очень больших частотах асимптотическому значению (3.14) диэлектрической проницаемости, из (28.15) получаем, что при таких частотах связь  $\omega$  с  $k$  в явном виде может быть написана как

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (28.16)$$

Несмотря на то, что и в этом случае мы имеем дело с поперечными волнами, дисперсионное уравнение (28.16) сильно отличается от дисперсионного уравнения для волн в вакууме.

Диэлектрическая проницаемость является комплексной величиной. Поэтому решения дисперсионных уравнений (28.7) и (28.10) могут оказаться комплексными. Иначе говоря, при действительном волновом векторе  $k$  комплексной может оказаться частота  $\omega$ . И наоборот, при действительной частоте  $\omega$  волновой вектор  $k$  будет комплексным. Что именно — частоту или волновой вектор — следует считать величиной действительной, зависит в первую очередь от условия возбуждения волн. Если электромагнитная монохроматическая волна попадает в среду из вакуума, то ее частота не меняется. Волновой же вектор меняется. Это приводит, во-первых, к тому, что в среде длина волны будет уже не такой, как в вакууме, и, во-вторых, наличие мнимой части волнового вектора будет отвечать появлению пространственного затухания волны по мере ее распространения внутри среды. В тех же случаях, когда условия возбуждения обуславливают появление стоячих волн, длина волны, а вместе с ней и волновой вектор (они связаны соотношением  $\lambda = 2\pi/k$ ) могут считаться величинами действительными, а частота будет комплексной величиной. Последнее означает, что интенсивность волн со временем будет затухать или нарастать. Комплексные частоты, в частности, возникают в задаче о затухании заданного электромагнитного поля в среде после выключения поддерживающих его источников.

В тех случаях, когда волновой вектор является комплексным, могут быть два случая: когда действительная и мнимая части  $k'$  и  $k''$  волнового вектора параллельны друг другу и когда  $k' \cdot k'' \neq k'k''$ . В последнем случае волна — плоская только в некотором условном смысле. При этом плоскости, перпендикулярные вектору  $k'$ , являются плоскостями постоянной фазы, плоскостями же постоянной амплитуды являются перпендикулярные вектору  $k''$  плоскости. Поверхности постоянного значения векторов напряженности поля вообще могут не быть плоскими. Такие волны называются *неоднородными плоскими волнами*.

Заметим, что величина  $k''$  (так же, как и мнимая часть показателя преломления) описывает явление диссипации или нарастания энергии поля

волны. Показатель преломления может оказаться мнимым и в случае действительной диэлектрической проницаемости, если  $\epsilon' < 0$ . При этом в объеме среды волна распространяться вообще не может, а падающая на поверхность среды волна проникает в эту среду лишь на глубину порядка длины волны и отражается обратно в вакуум<sup>\*)</sup>.

Действительную и мнимую части показателя преломления  $n = n' + ik$  можно выразить через  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  (величина  $k$  иногда называется коэффициентом поглощения среды). Из равенства  $n' + ik = \sqrt{\epsilon}$  следует, что  $n'^2 - k^2 + 2in'k = \epsilon' + i\epsilon''$  и

$$n' = \sqrt{\frac{\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}{2}}, \quad k = \sqrt{\frac{-\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}{2}}. \quad (28.17)$$

В вакууме значения напряженности электрического и магнитного полей поперечной электромагнитной волны, как известно, одинаковы, в среде же могут очень сильно отличаться. Рассмотрим, например, низкочастотную поперечную волну в металле.

При низких частотах в металлах  $\epsilon'' \gg \epsilon'$  и  $\epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$  (см. формулу (3.11)). Следовательно, в (28.17) величиной  $\epsilon'$  можно пренебречь по сравнению с  $\epsilon''$  и

$$n' = k = \sqrt{2\pi\sigma/\omega}. \quad (28.18)$$

Это означает, что низкочастотные волны в металлах затухают на длине порядка длины волны.

Из первого уравнения Максвелла следует, что в случае поперечных волн векторы  $E$  и  $B$  связаны соотношением

$$\left(\frac{k}{k}\right) \times E = \frac{1}{n} B. \quad (28.19)$$

Вектор  $k/k$  является единичным вектором. Следовательно, абсолютные значения напряженностей поля  $E$  и  $B$  связаны соотношением  $nE = B$ . Представив комплексный показатель преломления  $n$  в виде

$$\sqrt{n'^2 + k^2} \exp\left[i \arctg \frac{k}{n'}\right],$$

получаем, что вектор магнитной индукции по модулю в  $\sqrt{n'^2 + k^2}$  раз больше модуля вектора  $E$ . Кроме того, эти векторы в случае хорошо проводящих сред сдвинуты по фазе на  $\pi/4$ .

\*) Примером такого явления может служить отражение волны от плазмы при  $\omega < \omega_p$ . Из дисперсионного уравнения (28.16) следует, что при таком отражении волновой вектор является чисто мнимым:  $k = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ . Это означает, что внутри плазмы волна с частотой  $\omega$  распространяться не может. Если же волна падает из вакуума нормально на плоскую резкую границу раздела плазма — вакуум, то она проникает в плазму на глубину  $l \approx c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ , причем напряженность поля волны в плазме будет уменьшаться по закону  $\exp\left(-\frac{z}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}\right)$ . (Плазме соответствуют значения нормальной к поверхности координаты  $z > 0$ .)

## § 29. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В анизотропных средах комплексная диэлектрическая проницаемость  $\hat{\epsilon}$  является тензором, вид которого определяется структурой среды. Уравнение, определяющее поле, и в этом случае имеет вид (28.4), но тензор  $\hat{\epsilon}$  теперь уже не может быть представлен в виде (4.5). В изотропных средах, в которых диэлектрическая проницаемость определяется формулой (4.5), выделенным направлением является только одно направление — направление волнового вектора. В анизотропных средах появляются выделенные направления, присущие самому веществу или внешним (в том числе и по соотношению к электромагнитным волнам) полям, в которых это вещество может находиться. Поэтому изменение тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  при изменении направления распространения волны относительно осей симметрии среды обычно более существенно, чем зависимость  $\epsilon_{\alpha\beta}$  от модуля вектора  $k$ . Согласно § 7, ч. II, тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  среды без потерь является эрмитовым:  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}^*$ . Эрмитов тензор может оказаться вещественным, и тогда он симметричен ( $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}$ ), но в принципе он может иметь также и мнимую часть. Среда с действительным симметричным тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}$  называется *анизотропными*, а среды с комплексным эрмитовым тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — *гиротропными*. Гиротропия — это более сложный вид анизотропии. В этом параграфе мы будем рассматривать только анизотропные среды, а с гиротропными средами познакомимся в § 35.

Спроектируем уравнение (28.4) на  $\alpha$ -направление. Тогда будем иметь уравнение, определяющее компоненты вектора  $E$ :

$$k^2 E_\alpha - k_\alpha k_\beta E_\beta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta. \quad (29.1)$$

Поскольку индексу  $\alpha$  можно придавать различные значения от 1 до 3, то (29.1) фактически является системой трех уравнений. Система эта — однородная, поэтому условием совместности уравнений этой системы является обращение в нуль детерминанта, составленного из коэффициентов при неизвестных компонентах вектора электрического поля:

$$\det = |k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon_{\alpha\beta}| = 0. \quad (29.2)$$

Это уравнение является дисперсионным уравнением, оно определяет частоту  $\omega$  (которая входит в последнее слагаемое непосредственно и в виде аргумента величины  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ) как функцию волнового вектора  $k$ . Введем вместо вектора  $k$  новый вектор  $n$ , связанный с вектором  $k$  соотношением

$$k = \frac{\omega}{c} n. \quad (29.3)$$

При этом дисперсионное уравнение примет вид

$$|n^2 \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta - \epsilon_{\alpha\beta}(n, \omega)| = 0. \quad (29.4)$$

Особенно просто дисперсионное уравнение выглядит в системе координат, в которой тензор  $\hat{\epsilon}$  является диагональным. В такой координатной системе уравнение (29.4) принимает вид

$$\begin{aligned} n^2 (\epsilon_{xx} n_x^2 + \epsilon_{yy} n_y^2 + \epsilon_{zz} n_z^2) - [n_x^2 \epsilon_{xx} (\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + \\ + n_y^2 \epsilon_{yy} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) + n_z^2 \epsilon_{zz} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})] + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (29.5)$$

уравнение (29.5) принято называть *основным уравнением кристаллооптики* или *уравнением Френеля*.

Нужно, однако, иметь в виду, что анизотропная среда вовсе не обязательно является кристаллом. Анизотропия проявляется и в первоначально изотропной среде, которая оказывается во внешних полях; к таким средам, конечно, также применимо уравнение Френеля. Обычно уравнение Френеля удобно решать, находя из него  $n$  как функцию  $\omega$ . Это связано с тем, что частота может довольно сложным образом, входить в уравнение через величины  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  и  $\epsilon_{zz}$ . Вектор же  $n$  в пренебрежении пространственной дисперсией входит в (29.5) явно. При заданных частоте  $\omega$  и направлении вектора  $n$  уравнение Френеля определяет величину  $n^2$ . Оно является квадратичным по отношению к  $n^2$ . Поэтому каждому значению  $n/n$  соответствуют два значения величины  $n^2$ . Иначе говоря, в каждом направлении будут распространяться одновременно две волны с одной и той же частотой, но разными волновыми векторами.

Из уравнения (28.4), написанного в виде

$$n^2 E - n(nE) = D, \quad (29.6)$$

следует, что в анизотропной среде вектор  $D$  всегда перпендикулярен волновому вектору. Действительно, умножая (29.6) на  $n$  скалярно, получаем, что левая часть этого уравнения после умножения на  $n$  обращается в нуль, так что  $n \cdot D = 0$ . Перпендикулярен вектору  $n$  и вектор магнитной индукции. Это непосредственно видно из уравнения Максвелла  $\text{rot } E = -(1/c)\partial B/\partial t$ , написанного в виде  $n \times E = B$ . Перпендикулярность же вектора  $E$  вектору  $n$  не следует ни из каких уравнений. Из уравнения  $n \times E = B$  следует только, что  $E \perp B$ . Поскольку вектору  $B$  перпендикулярны векторы  $n$  и  $D$ , то можно только утверждать, что вектор  $E$  лежит в плоскости, образованной векторами  $k$  и  $D$ . Иначе говоря, в общем случае вектор  $E$  электромагнитной волны в анизотропной среде не является ни поперечным, ни продольным. Поэтому поляризацию волн в анизотропных средах удобнее определять с помощью вектора  $D$ .

Для определения характера поляризации электромагнитных волн удобно ввести систему координат, одна из осей которой направлена вдоль вектора  $n$ . Спроектируем на оси этой системы уравнение (29.6). Проекция на перпендикулярные к  $n$  оси будут иметь вид

$$n^2 E_\alpha = D_\alpha. \quad (29.7)$$

Исключим из этого уравнения  $E$ , используя материальное уравнение  $E_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ . Тогда (29.7) примет вид

$$D_\alpha = n^2 \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta. \quad (29.8)$$

Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  здесь могут принимать два значения. Поэтому (29.8) является системой двух однородных уравнений по отношению к неизвестным величинам — компонентам вектора  $D$ . Обратный тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ , как и исходный  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , является симметричным. Обозначим индексами 1 и 2 направления, совпадающие с главными осями двумерного тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ , а его главные значения обозначим через  $\epsilon_{11}^{-1}$  и  $\epsilon_{22}^{-1}$ . В главных осях тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$  система (29.8) примет вид

$$\begin{aligned} (1/n^2 - \epsilon_{11}^{-1}) D_1 &= 0, \\ (1/n^2 - \epsilon_{22}^{-1}) D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (29.9)$$

При  $1/n^2 = \epsilon_{11}^{-1}$  скобка в первом из уравнений (29.9) обращается в нуль, поэтому  $D_1 \neq 0$ . Скобка же во втором из уравнений (29.9) отлична от нуля, это означает, что  $D_2 = 0$ . При  $1/n^2 = \epsilon_{22}^{-1}$ , напротив,  $D_1 = 0$  и  $D_2 \neq 0$ .

Отсюда следует, что в анизотропных средах волна с каждым из двух возможных значений  $n^2$  полностью линейно-поляризована по вектору  $D$  в определенной плоскости. Эти две плоскости совпадают с главными осями двумерного тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ . Главные оси любого симметричного тензора взаимно перпендикулярны. Поэтому и плоскости, в которых располагаются векторы  $D_1$  и  $D_2$ , тоже взаимно перпендикулярны.

Важным и сравнительно простым частотным случаем анизотропной среды является такая среда, в которой два из трех главных значений тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  совпадают между собой. В кристаллооптике такие среды называются *одноосными кристаллами*.

Если принять, что  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}$  и  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}$ , то уравнение Френеля (29.5) примет вид

$$(n^2 - \epsilon_{\perp}) [\epsilon_{\parallel} n_z^2 + \epsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) - \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}] = 0. \quad (29.10)$$

Иначе говоря, оно распадается на два уравнения

$$n^2 = \epsilon_{\perp}, \quad (29.11)$$

$$n_z^2/\epsilon_{\perp} + (n_x^2 + n_y^2)/\epsilon_{\parallel} = 1. \quad (29.12)$$

Из (29.11) следует, что одна из двух возможных в анизотропных средах волн ничем не отличается от волны, которая распространялась бы в изотропном кристалле с показателем преломления  $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ . В случае же волны, поведение которой определяется уравнением (29.12), величина  $1/n^2$  зависит от угла  $\theta$  между вектором  $n/n$  и оптической осью (т.е. направлением оси  $z$ ):

$$1/n^2 = \sin^2 \theta / \epsilon_{\parallel} + \cos^2 \theta / \epsilon_{\perp}. \quad (29.13)$$

Волна первого типа называется *обыкновенной волной*, волна второго типа — *необыкновенной волной*.

### § 30. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ. СКИН-ЭФФЕКТ

Волны в неоднородных средах описываются все тем же уравнением (28.3), но диэлектрическая проницаемость в нем теперь зависит от координат. Кроме уравнения

$$\Delta E - \text{grad div } E + \hat{\epsilon} \frac{\omega^2}{c^2} E = 0, \quad (30.1)$$

в которое входит только напряженность электрического поля  $E$ , иногда бывает удобно работать с уравнением, содержащим только магнитное поле. В неоднородных средах такое уравнение имеет вид

$$\Delta H + \hat{\epsilon} \frac{\omega^2}{c^2} H + \frac{\hat{1}}{\epsilon} \text{grad } \hat{\epsilon} \times \text{rot } H = 0. \quad (30.2)$$

**30.1. Поверхностные волны.** Важнейшей особенностью неоднородных сред является то, что в неоднородных средах могут появляться новые решения уравнений (30.1) и (30.2), которых не может быть в случае пространственно-однородных сред. Наиболее простой и физически прозрачный вид такие новые моды электромагнитных колебаний имеют в важном предельном случае резкой границы раздела двух сред, или среды и вакуума. Мы рассмотрим этот последний случай и покажем, что существование границы раздела приводит к появлению новой, так называемой *поверхностной*

волны, которая оказывается локализованной вблизи области резкой неоднородности среды, и амплитуда которой убывает по мере удаления от этой области.

Вообще говоря, существование поверхностных волн известно из гидродинамики, это — всем хорошо известные волны, образуемые идущими судами. Скорости распространения таких волн и другие их характеристики резко отличаются от таковых у волн объемных, примером которых в той же гидродинамике являются звуковые волны, распространяющиеся в толще воды. Если скорость распространения для объемной моды порядка километров в секунду, то для поверхностной — километры или десятки километров в час. Не менее сильно различаются и свойства поверхностных и объемных мод электромагнитных колебаний.

Итак, рассмотрим плоскую границу раздела среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega)$  и вакуумом. Границу будем считать резкой. Координатную систему выберем так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль нормали к границе, по направлению — внутрь среды. Соответственно, поверхностная волна будет распространяться в плоскости  $xy$ . Будем искать такое решение уравнений (30.1) и (30.2), когда вектор  $H$  (среду будем считать для простоты немагнитной, т.е.  $\mu = 1$ ) находится в плоскости раздела. Пусть, например, вектор  $H$  параллелен оси  $y$ . Тогда уравнение (30.2) во всех точках внутри среды принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_m}{\partial z} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{q^2}{\epsilon} \right) H_m = 0. \quad (30.3)$$

Индекс  $m$  означает, что это — магнитное поле в среде, магнитное поле в вакууме будем обозначать символом  $H_v$ . Буквой  $q$  здесь обозначен расположенный в плоскости раздела волновой вектор.

Уравнение для магнитного поля, справедливое для всех точек вакуума, имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_v}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - q^2 \right) H_v = 0. \quad (30.4)$$

Решения уравнений (30.3) и (30.4) должны быть сшиты на поверхности раздела с помощью граничных условий

$$H_{v\tau}|_S = H_{m\tau}|_S, \quad E_{v\tau}|_S = E_{m\tau}|_S, \quad D_{mn}|_S = D_{vn}|_S. \quad (30.5)$$

Решения уравнений (30.3) и (30.4) для  $H_v$  и  $H_m$  ищем в виде

$$H_v = H_{v0} \exp(iqx + \kappa_v z), \quad (30.6)$$

$$H_m = H_{m0} \exp(iqx - \kappa_m z), \quad (30.7)$$

так, чтобы  $H_v$  и  $H_m$  стремились к нулю при  $z \rightarrow \mp \infty$  соответственно. Другими словами, ищутся именно поверхностные моды электромагнитных волн. Подставляя (30.6) и (30.7) в уравнения (30.3) и (30.4), получаем

$$\kappa_v^2 H_v + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - q^2 \right) H_v = 0,$$

$$\frac{\kappa_m^2}{\epsilon} H_m + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{q^2}{\epsilon} \right) H_m = 0.$$

Из первого из этих уравнений получается

$$\kappa_v = \sqrt{q^2 - \omega^2/c^2}, \quad (30.8)$$

из второго

$$\kappa_m = \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon}. \quad (30.9)$$

Переходим к сшиванию решений на границе. Из равенства тангенциальных компонент  $H_v$  и  $H_m$  следует, что  $H_{v0} = H_{m0} = H_0$ . Равенство тангенциальных компонент электрического поля дает

$$\left. \frac{\partial H_v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial H_m}{\partial z} \right|_{z=0},$$

откуда получается

$$\kappa_v = -\frac{\kappa_m}{\epsilon}, \quad \text{или} \quad \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = -\frac{1}{\epsilon} \sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon}. \quad (30.10)$$

Это равенство может выполняться, если только  $\epsilon(\omega) < 0$ . Из граничного условия  $D_{mn}|_S = E_{vn}|_S$  следует, что

$$\left. \frac{\partial H_v}{\partial x} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial H_m}{\partial x} \right|_{z=0}.$$

Таким образом, ничего нового это последнее условие не дает.

Разрешая уравнение (30.10) относительно  $q^2$ , получаем следующее дисперсионное уравнение для нашей поверхностной волны:

$$q^2 = \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon(\omega) + 1} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2. \quad (30.11)$$

В этом уравнении  $\epsilon(\omega) < 0$ . Формула (30.11) дает в неявном виде связь между частотой поверхностных электромагнитных колебаний и волновым вектором. Переходя от (30.10) к (30.11), мы сделали предположение о том, что пространственной дисперсией можно пренебречь. Только в этом случае возможно в явном виде разрешить дисперсионное уравнение по отношению к  $q^2$ . Если пространственной дисперсией не пренебрегать, то формула (30.11) тоже будет справедлива, но при этом нужно помнить, что  $\epsilon = \epsilon(q, \omega)$ , так что волновой вектор будет входить и в левую, и в правую части уравнения. Оба квадратных корня в (30.10) должны быть действительными, только в этом случае  $\kappa_m$  и  $\kappa_v$  действительны и положительны и волна и в самом деле является поверхностной. Из действительности указанных квадратных корней следуют неравенства

$$(qc/\omega)^2 > 1 \quad \text{и} \quad (qc/\omega)^2 > \epsilon.$$

Комбинируя первое из этих неравенств с дисперсионным уравнением, записанным в виде

$$(cq/\omega)^2 = \epsilon/(\epsilon + 1),$$

получаем, что

$$\epsilon/(\epsilon + 1) > 1, \quad (30.12)$$

откуда следует, что  $\epsilon(\omega)$  должна быть хотя бы немного меньше единицы.

Полезно рассмотреть предел дисперсионного уравнения (30.11) в случае, когда можно пренебречь электродинамическим запаздыванием. Это можно сделать, когда длина поверхностной волны удовлетворяет неравенству

$$\lambda < cT,$$

т.е. длина волны меньше пути, который свет проходит за период колебаний поля. В этом случае скорость света  $c$  в уравнении (30.11) можно считать равной бесконечности и дисперсионное уравнение примет вид

$$q^2 [\epsilon(\omega) + 1] = 0,$$

откуда получаем, что

$$\epsilon(\omega) = -1. \quad (30.13)$$

Из последнего уравнения видно, что в пределе поверхностных электростатических волн (когда  $c \rightarrow \infty$ ) и в пренебрежении пространственной дисперсией частота поверхностной волны не зависит от ее волнового вектора. Легко найти самый высокочастотный корень уравнения (30.13). Воспользовавшись высокочастотной асимптотической  $\epsilon(\omega)$ , получаем

$$1 - \omega_p^2/\omega^2 = -1,$$

или

$$\omega = \omega_p/\sqrt{2}. \quad (30.14)$$

Колебания такого типа называются *поверхностными плазменными колебаниями* (или короче — *поверхностными плазмонами*). Поскольку вектор  $\mathbf{H}$  в такой поверхностной моде лежит в плоскости раздела и перпендикулярен волновому вектору  $\mathbf{q}$ , то волну можно назвать поперечной *H-волной* (сокращенно — *TH-волной*).

Распределение электрического поля в пространстве может быть вычислено по найденному магнитному полю с помощью второго уравнения Максвелла

$$\mathbf{E} = i \frac{c}{\omega \epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Ротор магнитного поля, направленного вдоль оси  $y$  и зависящего от координат  $x$  и  $z$ , имеет две составляющих, направленных вдоль ортов  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_z$ . Это означает, что поверхностная волна, будучи поперечной по отношению к магнитному полю, по отношению к электрическому полю не является ни продольной, ни поперечной. Вектор  $\mathbf{E}$  находится в плоскости  $x, z$ , а направление этого вектора по мере изменения координаты  $x$  меняется от точки к точке.

Убедимся теперь в том, что поверхностная поперечная по электрическому полю волна (*TE-волна*) существовать не может. Примем, что  $E = E_y$ ,  $E_x = E_z = 0$ . Решение уравнения (30.1) будем искать в виде

$$E_y = E_{0y} \exp(iqx + \kappa_y z), \quad E_m = E_{m0} \exp(iqx - \kappa_m z).$$

Подставляя эти функции в уравнение, получаем выражения для  $\kappa_m$  и  $\kappa_y$ , совпадающие с (30.8) и (30.9). Сшивая решения на границе, получим уравнение

$$\kappa_y = -\kappa_m.$$

Это соотношение не может выполняться при положительных значениях величин  $\kappa_y$  и  $\kappa_m$ , откуда и следует, что поверхностной *TE-волны* не существует.

Существование поверхностных волн означает, что энергия электромагнитного поля может передаваться в избранном направлении по поверхности открытых волноводов, которые могут быть диэлектрическими.

**30.2. Нормальный скин-эффект.** Другой эффект, связанный с существованием поверхности, заключается в том, что если в вакууме вблизи проводящей среды существует переменное электромагнитное поле, то это поле проникает в проводящую среду только на конечную глубину. Это явление носит название *скин-эффекта*.

Наиболее просто скин-эффект описывается в случае низкочастотных полей. В этом случае возникают два упрощающих обстоятельства. Первое из них заключается в том, что низкочастотные колебания являются длинноволновыми. Длина этих волн в среде такова, что она много больше длины свободного пробега носителей тока в среде. Таким образом, носители тока движутся в электромагнитном поле, которое, хотя и является переменным во времени, но может считаться почти однородным в пространстве. Поэтому связь между током и полем является локальной. Иначе говоря, эффекты пространственной дисперсии в этом случае оказываются несущественными. Второе упрощающее обстоятельство связано с возможностью сами уравнения Максвелла внутри проводника и в его окрестности записать в упрощенном виде.

Пусть характерные размеры проводника равны  $L$ . Рассмотрим первое уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Поскольку частота изменения поля считается известной, перед нами стоит задача нахождения только его пространственного распределения. В правой части уравнения, содержащей временную производную, заключена информация о пространственном изменении поля на длинах порядка  $cT$ , где  $T = 2\pi\omega^{-1}$  — период колебания поля. Левая же часть уравнения должна содержать информацию о его пространственном распределении на длине  $L$  порядка размеров проводящей среды. Если частота  $\omega = 2\pi T^{-1}$  настолько мала, что

$$L \ll cT, \quad (30.15)$$

то информация о пространственном распределении поля, содержащаяся в левой части первого уравнения Максвелла, является более детальной, чем информация, содержащаяся в правой части. Это же относится и ко второму уравнению Максвелла в вакууме. Таким образом, электромагнитное поле в вакууме на не слишком больших расстояниях от проводника, таких что

$$\lambda \gg L, \quad (30.16)$$

(здесь  $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$  — длина волны электромагнитного поля в пустоте,  $L$  — характерные размеры проводника и расстояние от проводника до точки наблюдения) можно описывать уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0, & \operatorname{rot} H &= 0, \\ \operatorname{div} E &= 0, & \operatorname{div} H &= 0. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Уравнения, определяющие электромагнитное поле внутри среды, должны, конечно, содержать характеристики среды, определяющие ее реакцию на внешнее поле. В случае хороших проводников при низких частотах основной такой характеристикой является статическая проводимость  $\sigma$ . Поэтому

второе уравнение Максвелла в среде следует записывать в виде

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi\sigma}{c} E. \quad (30.18)$$

Током смещения в этом уравнении можно, конечно, пренебречь. Поле  $E$  в правой части (30.18) само по себе может быть небольшим, но оно умножается на большую величину  $\sigma$  и поэтому существенно. По этой причине в первом уравнении Максвелла в металле следует оставить временную производную, чтобы учесть, в соответствии с законом Фарадея, возможную генерацию электрического поля переменным магнитным:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (30.19)$$

Остальные уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} E = 0. \quad (30.20)$$

Последнее уравнение является однородным, поскольку наведенные полем в проводнике заряды рассасываются за время порядка  $\omega_p^{-1}$ . При  $\omega \ll \omega_p$  и на временах  $T$  проводник является квазинейтральным. Уравнения (30.17) – (30.20) описывают электромагнитное поле, как принято говорить, в квазистационарном приближении.

Исключая из (30.18) и (30.19) электрическое поле, можно получить одно уравнение второго порядка для магнитного поля в среде

$$\Delta H = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (30.21)$$

Исключая из этих уравнений магнитное поле  $H$ , получаем, с учетом (30.20), уравнение

$$\Delta E = \frac{4\pi}{c^2} \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (30.22)$$

Опираясь на полученные уравнения, рассмотрим теперь задачу о проникновении электромагнитного поля частоты  $\omega$  в металл, занимающий полупространство  $z > 0$ .

Будем считать, что поперечное поле падает на поверхность металла нормально, так что электрическое поле имеет только  $x$ -компоненту, а магнитное — составляющую  $H_y$ . Уравнение (30.22) для электрического поля в среде, записанное в форме

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = -\frac{4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2} E, \quad (30.23)$$

будем иметь решение

$$E = E_0 \exp(\pm \kappa z). \quad (30.24)$$

Подставляя (30.24) в уравнение (30.23), получим

$$\kappa^2 = -\frac{4\pi i\omega\sigma\mu}{c^2} = 4\pi\omega\sigma\mu c^{-2} \exp(-i\pi/2).$$

Таким образом,

$$\kappa = c^{-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{4\pi\omega\sigma\mu} = (1-i) \frac{\sqrt{2\pi\omega\mu}}{c},$$

так что решение уравнения для поля в металле имеет вид

$$E = E_0 \exp(-i\omega t) \exp \left[ \pm \frac{\sqrt{8\pi\sigma\omega\mu}}{2c} z \mp i \frac{\sqrt{8\pi\omega\sigma\mu}}{2c} z \right]. \quad (30.25)$$

В этом решении следует оставить член, обращающийся на бесконечности в нуль. Таким образом, кроме осциллирующей части, в решении (30.25) имеется множитель  $\exp \left[ -\frac{1}{c} \sqrt{2\pi\sigma\omega\mu} z^2 \right]$ , обеспечивающий локализацию поля в проводнике вблизи поверхности. Характерная толщина этого скин-слоя есть

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}. \quad (30.26)$$

Видно, что скин-слой тем тоньше, чем выше частота поля и проводимость среды. Напомним, что формула (30.26) справедлива, если выполняются неравенства  $l \ll \delta$  (обеспечивающие возможность пренебречь пространственной дисперсией) и  $\omega\tau \ll 1$  (здесь  $\tau$  — характерное время столкновений электронов в проводнике). Последнее неравенство соответствует пренебрежению временной дисперсией и обеспечивает возможность пользоваться статической проводимостью  $\sigma$ . Магнитное поле в металле убывает по тому же закону, что и электрическое.

Найдем теперь соотношение между величинами напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности проводника. Из (30.18), (30.24) и (30.26) следует, что векторы  $E$  и  $H$  связаны между собой соотношением

$$E = (1 - i) \frac{c}{4\pi\sigma\delta} H \times n, \quad (30.27)$$

где  $n = \vec{k}/k$  есть единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . Соотношение (30.27) справедливо для любой точки среды и для поверхности в том числе. Величине

$$\zeta = (1 - i) \frac{c}{4\pi\sigma\delta} = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}, \quad (30.28)$$

связывающая векторы  $E$  и  $H$ , называется *поверхностным импедансом*.

Соотношение (30.27) можно использовать как граничное условие для нахождения электромагнитного поля вне проводника. Как показывают предыдущие результаты, поле внутри проводника существенно изменяется на длине  $\delta$ , а вне его — на длине  $L$  порядка размеров проводящего тела (предполагаем, что  $L \ll \lambda$ ). При достаточно высокой электропроводности  $\delta \ll L$ . Это неравенство обеспечивает малость тангенциальных производных от напряженностей поля внутри проводника по сравнению с производной по нормали к поверхности. Это означает, что при любом характере падения электромагнитной волны на поверхность проводника поле внутри него будет иметь тот же характер, что и при нормальном падении, и будет справедлива формула (30.27).

Вследствие непрерывности тангенциальных компонент векторов поля на границе, соотношение (30.27) справедливо и для полей на внешней стороне поверхности проводника. Поэтому соотношение

$$E_t = \zeta H_t \times n \quad (30.27a)$$

можно рассматривать и использовать как граничное условие, позволяющее находить поле вне проводника, не рассматривая поля внутри среды. Оно называется *граничным условием Леонтовича*.

Из приведенных выше оценок ясно, что граничное условие Леонтовича (30.27а) справедливо и для неплоской поверхности проводника, если локальный радиус ее кривизны велик по сравнению с величиной  $\delta$ .

**30.3. Аномальный скин-эффект.** При возрастании частоты  $\omega$  характер скин-эффекта меняется. Это связано с тем, что толщина скин-слоя уменьшается с ростом частоты, и при некоторых характерных частотах толщина скин-слоя  $\delta$  может стать сравнимой с длиной свободного пробега  $l$  электронов проводника. Из (30.26) следует, что толщина скин-слоя  $\delta$  становится сравнимой с  $l$  при  $c/\sqrt{\sigma\omega} \approx l$ , откуда следует, что характерная частота  $\omega_a$ , при которой происходит переход от нормального скин-эффекта к аномальному, имеет порядок

$$\omega_a \approx c^2/\sigma l^2. \quad (30.29)$$

Проводимость  $\sigma$  при оценке можно считать равной  $\sigma = ne^2\tau/m$ , а длина свободного пробега в металлах  $l = v_F\tau$  (где  $v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми,  $\tau$  — время между столкновениями электронов). Таким образом,

$$\omega_a \approx \frac{c^2 p_F}{ne^2 l^3}. \quad (30.30)$$

Здесь  $p_F$  — импульс электронов на поверхности Ферми,  $n$  — концентрация электронов проводимости. Видно, что частота  $\omega_a$  существенно зависит от величины  $l$  и при характерных для металлов значениях  $l$  с ростом частоты условие  $\delta \approx l$  достигается обычно раньше, чем условие  $\omega\tau \sim 1$ . В этом случае (и тем более в случае, когда  $\delta \ll l$ ) электроны движутся в поле, которое уже нельзя считать однородным, и нужно учитывать пространственную дисперсию. Временная же дисперсия при  $\omega\tau < 1$  еще не существенна. Скин-эффект в условиях, когда  $\delta \lesssim l$  и необходимо учитывать пространственную дисперсию, называется *аномальным скин-эффектом*.

При аномальном скин-эффекте, по сравнению со случаем нормального скин-эффекта, меняется соотношение между плотностью наведенного в металле тока и напряженностью электрического поля  $E$ . Чтобы найти это соотношение, напишем кинетическое уравнение для функции распределения электронов металла

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v \frac{\partial \delta f}{\partial r} + eE \frac{\partial f_0}{\partial p} = -\nu \delta f,$$

в котором  $f_0$  — равновесная фермиевская функция распределения, а  $\delta f$  — отклонение функции распределения от равновесной, обусловленное проникающим в металл полем. Считая, как и в случае нормального скин-эффекта, что поле падает из вакуума на металл в направлении оси  $z$ , нормальной к поверхности и направленной в глубь металла, кинетическое уравнение можно записать в виде

$$\frac{d\delta f}{dz} + \frac{\nu - i\omega}{v_z} \delta f = -\frac{eE(z)}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \quad (30.31)$$

Мы будем считать, что электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ . Уравнение (30.31) удобно переписать в виде

$$\frac{d\delta f}{dz} + A\delta f = BE(z). \quad (30.32)$$

Из сравнения (30.31) и (30.32) следует, что

$$A = \frac{1 - i\omega\tau}{\tau v_z}, \quad B = -\frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \quad (30.33)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (30.32), есть

$$\delta f = C e^{-Az},$$

где  $C$  — постоянная. Решение неоднородного уравнения (30.32) запишем в виде

$$\delta f = C(z) e^{-Az},$$

что соответствует простейшему варианту метода вариации произвольных постоянных. Подстановка последней формулы в (30.32) дает

$$C(z) = \int_z^{\infty} B E(z') e^{Az'} dz' + C_1,$$

так что

$$\delta f = \left\{ B \int_z^{\infty} E(w) e^{Aw} dw + C_1 \right\} e^{-Az}. \quad (30.34)$$

Функция  $\delta f$  должна обладать свойством

$$\delta f(z, v_z < 0) |_{z=\infty} = 0. \quad (30.35)$$

Условие  $v_z < 0$  в аргументе функции  $\delta f$  в асимптотической формуле (30.35) означает, что речь идет о функции распределения электронов, движущихся по направлению к поверхности. Из асимптотического условия (30.35) можно определить константу  $C_1$ , входящую в решение (30.34) для  $\delta f (v_z < 0)$ . Из сравнения (30.34) и (30.35) следует, что

$$\delta f(z, v_z < 0) = \frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} z\right) \int_z^{\infty} E(w) \exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} w\right) dw. \quad (30.36)$$

Таким образом, функция распределения движущихся к границе электронов определяется значением электрического поля во всем пространстве от  $z$  до  $\infty$ .

Вид функции  $\delta f(z, v_z > 0)$ , описывающей удаляющиеся от границы электроны, определяется характером рассеяния электронов на границе. Существуют две предельных случая рассеяния электронов на границе — зеркальное рассеяние и диффузное рассеяние. На самом деле, конечно, реализуется некоторая промежуточная ситуация. Математически наиболее просто описывается скин-эффект при зеркальном отражении электронов от границы. Имея это в виду, а также то, что самая главная особенность — неэкспоненциальный спад поля по мере его проникновения в глубину металла — проявляется уже при зеркальном отражении электронов от границы, мы и ограничимся последним случаем.

При зеркальном рассеянии электронов на границе

$$\delta f^{(+)}(v_x, v_y, v_z, z=0) = \delta f^{(-)}(v_x, v_y, -v_z, z=0). \quad (30.37)$$

В этом граничном условии функция  $\delta f^{(+)}$  относится к электронам, удаляющимся от поверхности, а  $\delta f^{(-)}$  — к электронам, приближающимся к ней. Из (30.37) с учетом (30.36) имеем

$$\delta f^{(+)}(v_x, v_y, v_z, z=0) = -\frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \int_0^{\infty} E(w) \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} w\right) dw. \quad (30.38)$$

Интеграл в этой формуле есть величина, зависящая только от  $\omega$ ,  $\tau$  и  $v_z$ . Поэтому из общего решения (30.34), записанного в виде

$$\delta f = \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} z\right) \left\{ C_1 - \frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \int_0^z E(w) \exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} w\right) dw \right\},$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta f^{(+)}(z) &= \\ &= -\frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} z\right) \left[ \int_0^\infty E(w) \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} w\right) dw + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^z E(w) \exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v_z} w\right) dw \right]. \end{aligned} \quad (30.39)$$

Формула (30.36) дает нам решение кинетического уравнения для функции  $\delta f^{(-)}$ , формула (30.39) — для функции  $\delta f^{(+)}$ . Эти функции удовлетворяют поставленным граничным и асимптотическим условиям. С их помощью обычным образом вычисляется плотность наведенного тока:  $j(z) = e \int v_x \delta f d^3 v$ . Подставляя в эту формулу функции  $\delta f^{(+)}$  и  $\delta f^{(-)}$  и вводя полярные координаты  $(v, \theta, \alpha)$  в пространстве скоростей, получим

$$\begin{aligned} j(z) &= \frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \left[ \int_{\pi/2}^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{v_x}{v_z} \frac{\partial v}{\partial v_x} \times \right. \\ &\quad \times \int_z^\infty dw E(w) \exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (w-z)\right) - \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{v_x}{v_z} \frac{\partial v}{\partial v_x} \times \\ &\quad \times \left. \left[ \int_0^z dw E(w) \exp\left(-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (z+w)\right) + \int_0^z dw E(w) \exp\left(\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (w-z)\right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (30.40)$$

Интегрирование по  $\alpha$  здесь можно провести сразу, поскольку подынтегральное выражение не зависит от  $\alpha$ . Подынтегральные выражения в интегралах по  $\theta$  являются нечетными функциями  $\theta$ , поэтому (30.40) можно представить в виде

$$\begin{aligned} j(z) &= -\frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \frac{v_x}{v_z} \frac{\partial v}{\partial v_x} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty dw E(w) \exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (z+w)\right] + \int_0^z dw E(w) \exp\left[\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (w-z)\right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_z^\infty dw E(w) \exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\tau v \cos\theta} (w-z)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (30.41)$$

Два последних интеграла в фигурной скобке

$$\begin{aligned} &\int_0^z dw E(w) \exp\left[\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta} \frac{w-z}{l}\right] + \int_z^\infty dw E(w) \exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta} \frac{w-z}{l}\right] = \\ &= \int_0^\infty dw E(w) \exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos\theta} \left|\frac{z-w}{l}\right|\right]. \end{aligned} \quad (30.42)$$

Здесь  $l = \tau v$  — длина свободного пробега электронов. Таким образом, получаем следующее выражение для плотности тока:

$$j(z) = \int_0^\infty E(w) \mathcal{K}\left(\frac{z+w}{l}\right) dw + \int_0^\infty E(w) \mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) dw, \quad (30.43)$$

где  $\mathcal{K}$  — ядро интегральной связи между напряженностью электрического поля в точке с  $z$ -координатой, равной  $w$ , и током в произвольной точке с координатой  $z$ , имеющее вид

$$\mathcal{K}(s) = -\frac{e^2}{m} \int_0^\infty dv v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \frac{v_x}{v_z} \frac{\partial v}{\partial v_x} \exp\left[-\frac{1-i\omega\tau}{\cos \theta} s\right]. \quad (30.44)$$

Интегральный характер формулы (30.43) означает, что мы имеем дело с пространственной дисперсией. Подставляя (30.43) в уравнение

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \frac{4\pi i \omega}{c} j,$$

получим основное уравнение теории аномального скин-эффекта

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \\ = \frac{4\pi i \omega}{c} \left[ \int_0^\infty \mathcal{K}\left(\frac{z+w}{l}\right) E(w) dw + \int_0^\infty \mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) E(w) dw \right], \end{aligned} \quad (30.45)$$

определяющее электрическое поле в среде. Поле в вакууме считается заданным или может быть найдено из обычного волнового уравнения, решение которого следует сшить на границе раздела металл — вакуум с решением интегро-дифференциального уравнения (30.45), определяющего поле в среде, с помощью обычных граничных условий:

$$E_{n_1} = E_{n_2} \quad \text{и} \quad E_{\tau_1} = E_{\tau_2}.$$

Интегро-дифференциальное уравнение (30.45) можно решить с помощью следующего приема. В первом интеграле в правой части уравнения (30.45) проведем замену переменной  $w \rightarrow -w'$ , после чего этот интеграл примет вид

$$\int_{-\infty}^0 \mathcal{K}\left(\frac{z-w}{l}\right) E(-w) dw. \quad (30.46)$$

Продолжим теперь формально решение уравнения (30.45) в область  $z < 0$ . Это продолжение можно провести совершенно произвольным образом. Проще всего продолженное таким образом поле  $E$  считать или четным (по отношению к плоскости  $z = 0$ ), или нечетным, или даже нулевым. Окончательное решение задачи от способа продолжения зависеть не будет. Выберем для определенности четное продолжение, т.е. будем считать, что

$$E(-z) = E(z). \quad (30.47)$$

Тогда уравнение (30.45) с учетом (30.46) примет вид

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = \frac{4\pi i \omega}{c} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) E(w) dw. \quad (30.48)$$

В этом уравнении  $z > 0$  и оно определяет поле внутри металла, причем при формальном продолжении решения этого уравнения в область  $z < 0$  выполняется условие (30.47). По своей математической структуре уравнение (30.48) значительно проще исходного уравнения (30.45), так как в (30.48) ядро интегрального члена имеет только разностный аргумент. Это дает возможность решить уравнение (30.48) с помощью преобразования Фурье.

Найдем фурье-образ уравнения (30.48). Для этого уравнение (30.48) следует умножить на  $\exp(-ikz)$  и проинтегрировать по всему пространству:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz) \frac{d^2 E}{dz^2} dz + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E(k) = \frac{4\pi i \omega}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dw E(w) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-ikz) \mathcal{H}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right). \quad (30.49)$$

Первое слагаемое в этом соотношении следует дважды проинтегрировать по частям. После первого интегрирования получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz) \frac{d^2 E}{dz^2} dz = \exp(-ikz) \frac{dE}{dz} \Big|_{-\infty}^{-0} + \exp(-ikz) \frac{dE}{dz} \Big|_{+0}^{+\infty} + \\ + ik \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz) \frac{dE}{dz} dz = E'(-0) - E'(0) + ik \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikz) \frac{dE}{dz} dz. \quad (30.50)$$

Поскольку функция  $E(z)$  — четная, то производная от этой функции в точке  $z = 0$  может испытывать разрыв, так что  $E'(-0) = -E'(0)$ . Сама же функция  $E(z)$  в точке  $z = 0$  при этом непрерывна, так что  $E(-0) = E(0) = E(+0)$ . С учетом этого обстоятельства и после второго интегрирования по частям первое слагаемое в уравнении (30.49) примет вид  $-2E'(0) - k^2 E(k)$ .

Правую часть (30.49) можно записать в виде

$$\frac{4\pi i \omega}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dw E(w) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \exp(-ikz) \mathcal{H}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) = \\ = \frac{4\pi i \omega l}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dw E(w) \exp(-ikw) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{l} \exp\left[-ikl\left(\frac{z-w}{l}\right)\right] \mathcal{H}\left(\left|\frac{z-w}{l}\right|\right) = \\ = \frac{4\pi i \omega l}{c} \mathcal{H}(kl) E(k).$$

Таким образом, фурье-образ уравнения (30.48) принимает вид

$$-2E'(0) - k^2 E(k) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E(k) = \frac{4\pi i \omega l}{c} \mathcal{H}(kl) E(k), \quad (30.51)$$

так что

$$E(k) = \frac{2E'(0)}{\omega^2/c^2 - k^2 - (4\pi i \omega l/c) \mathcal{H}(kl)}. \quad (30.52)$$

По найденному фурье-образу находим искомое электрическое поле:

$$E(z) = \frac{E'(0)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk \exp(ikz)}{\omega^2/c^2 - k^2 - (4\pi i \omega l/c) \mathcal{H}(kl)}. \quad (30.53)$$

Физический смысл функция  $E(z)$  имеет при  $z > 0$ . Множитель  $E'(0)$  определяется интенсивностью и длиной волны падающего на поверхность металла электромагнитного излучения. Основной особенностью полученной таким образом функции  $E(z)$  является то, что она не имеет экспоненциального вида. Оценка интеграла в (30.53), деталей которой мы не приводим, дает, что глубина проникновения поля в металл при аномальном скин-эффекте имеет следующий порядок величины:

$$\delta \approx \left( \frac{c^2 \hbar^3}{\omega e^2 \rho_F^2} \right)^{1/3}. \quad (30.54)$$

Зависимость  $\delta$  от  $\omega$  имеет вид  $\omega^{1/3}$ , т.е. она несколько слабее, чем в случае нормального скин-эффекта.

**30.4. Скин-эффект при высоких частотах.** При дальнейшем увеличении частоты характер скин-эффекта снова изменяется. Это обусловлено тем, что в задаче о скин-эффекте присутствуют, вообще говоря, не две, а три характерные длины. До сих пор учитывалось наличие двух характерных длин — глубины скин-слоя  $\delta$  и длины свободного пробега электронов  $l$ . И не подчеркивалось, что существует еще одна характерная длина — путь  $l_T$ , который электрон проходит за один период  $T$  изменения поля. При тех частотах, при которых имеет место нормальный скин-эффект, длина  $l_T = v_F/\omega$  была много больше и глубины скин-слоя  $\delta$  и тем более — длины свободного пробега электронов  $l$ , поэтому величина  $l_T$  была несущественна. В условиях аномального скин-эффекта и  $l$ , и  $l_T$  больше  $\delta$ , причем в теории, изложенной в п. 30.3, соотношение между  $l$  и  $l_T$  было произвольным. Важно было только то, что  $\delta$  — наименьшая из всех характерных длин.

С ростом частоты уменьшаются значения и  $\delta$ , и  $l_T$  (величина  $l$  от  $\omega$ , конечно, не зависит), но значение  $l_T$  уменьшается быстрее, чем  $\delta$ . Действительно, согласно (30.54),  $l_T/\omega \sim \omega^{-2/3}$ , так что при достаточно высоких частотах  $l_T < \delta$ .

Если  $l_T \ll \delta$ , то электроны снова, как и в случае нормального скин-эффекта, будут двигаться в почти однородном электрическом поле и в этом смысле скин-эффект при высоких частотах напоминает нормальный скин-эффект, с той, однако, разницей, что роль величины  $l$  теперь начинает играть величина  $l_T$ . Иначе говоря, скин-эффект при высоких частотах можно считать нормальным скин-эффектом, но при этом оказывается существенной временная дисперсия.

Из условия  $\delta \gg l_T$ , которое можно переписать в виде  $\omega \gg v_F/\delta$ , следует, что из первых двух слагаемых в левой части кинетического уравнения наибольший вклад дает временная производная от функции распределения, поскольку  $\partial \delta f / \partial t \gg v \partial \delta f / \partial r$ . Из неравенства  $l \gg l_T$ , записанного в виде  $\omega \gg v_F/l$ , получаем, что

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} \gg \frac{\delta f}{\tau} = \frac{\delta f v_F}{l}.$$

Таким образом, кинетическому уравнению при высоких частотах можно придать вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{g}} = 0. \quad (30.55)$$

Волновой вектор  $\mathbf{k}$  в это уравнение не входит, поэтому пространственная дисперсия при высоких частотах так же несущественна, как и при низких.

Решение кинетического уравнения (30.55) имеет вид

$$\delta f = i \frac{e v E}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \xi}. \quad (30.56)$$

Функция распределения  $\delta f$  зависит от частоты  $\omega$  изменения поля, следовательно, временная дисперсия должна обязательно учитываться.

Плотность тока, обусловленная полученной функцией распределения, равна

$$j = i \frac{e^2}{\omega} \int v (v \cdot E) \frac{\partial f_0}{\partial \xi} d^3 p.$$

В изотропном случае вектор  $j$  направлен вдоль вектора  $E$ , так что

$$j = i \frac{e^2}{\omega} E \int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \cos^2 \theta d^3 p, \quad (30.57)$$

где  $\theta = (\mathbf{v}, \mathbf{E})$ . Таким образом  $j = \sigma E$ , причем

$$\sigma = i \frac{e^2}{\omega} \int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \cos^2 \theta d^3 p. \quad (30.58)$$

Интеграл в (30.58) легко вычисляется:

$$\sigma = - \frac{4\pi i e^2 p_F^3}{3m\omega(2\pi\hbar)^3}.$$

Порядок этой величины составляет  $(\xi_F/\hbar)(\xi_F/\hbar\omega)$ . Подставляя (30.57) в уравнение для поля, получаем:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{1}{c^2} \left[ \omega^2 - e^2 \int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \cos^2 \theta d^3 p \right] E = 0. \quad (30.59)$$

Это уравнение имеет решение  $E = E_0 \exp(-z/\delta)$ , причем

$$\delta^{-2} = - \frac{1}{c^2} \left( \omega^2 - e^2 \int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \xi} \cos^2 \theta d^3 p \right). \quad (30.60)$$

В соответствии с оценкой, приведенной для случая сферической поверхности Ферми, второе слагаемое в скобке в формуле (30.60) имеет порядок  $(\xi_F/\hbar)^2$ . Поэтому при  $\hbar\omega < \xi_F$  величина  $\delta$  является действительной.

Таким образом, при частотах, больших тех, при которых  $\delta$  становится порядка или больше  $l_T$  (эти частоты обычно лежат в далекой инфракрасной области спектра), но меньших  $\xi_F/\hbar$ , поле по мере проникновения в глубину металла спадает экспоненциально, причем глубина скин-слоя

$$\delta \approx c / \sqrt{(\xi_F/\hbar)^2 - \omega^2}. \quad (30.61)$$

Частота  $\xi_F/\hbar$ , входящая в эту формулу, обычно соответствует по порядку величины коротковолновому оптическому или ближнему ультрафиолетовому участкам спектра. Частота  $\omega < \xi_F/\hbar$ , поскольку при  $\omega \rightarrow \xi_F/\hbar$  кроме собственно скин-эффекта начинают проявляться и другие физические явления (такие, например, как фотоэффект), которые нужно учитывать при вычислении пространственного распределения поля. Поэтому фактически  $\delta \sim c\hbar/\xi_F$ .

### § 31. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ

*Волноводом* принято называть металлическую бесконечно длинную трубу произвольного сечения и, вообще говоря, произвольной формы. Волновод может быть и конечной длины, но в этом случае труба должна иметь отверстия на концах, через которые в трубу поступает и из нее вытекает электромагнитное поле. Задачи о волноводах решаются, конечно, методами электродинамики. Однако большое число вопросов, связанных с описанием распространения электромагнитных волн в таких системах, носит прикладной характер. Поэтому в данном параграфе будет уделено внимание только одному, имеющему наибольшее принципиальное значение, вопросу о типах волн, которые могут распространяться в простейшем прямом цилиндрическом волноводе произвольной формы, стенки которого являются абсолютно проводящими. Будем также считать, что внутри волновод не заполнен диэлектриком. Это дает возможность показать, что даже в вакууме электромагнитные волны не обязательно являются поперечными, если область, в которой эти волны распространяются, примыкает к проводящим поверхностям.

Для волновода справедливы уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = i \frac{\omega}{c} H, \quad \operatorname{rot} H = -i \frac{\omega}{c} E. \quad (31.1)$$

Поскольку стенки волновода считаются идеально проводящими, то на его стенках  $E_\tau = 0$ . Возьмем компоненту первого из уравнений (31.1), нормальную к поверхности в некоторой точке поверхности волновода. Проекция вектора  $\operatorname{rot} E$  на эту нормаль содержит пространственные производные от тангенциальных компонент электрического поля по тангенциальным же координатам. Поскольку  $E_\tau = 0$  в любой точке поверхности, то  $\operatorname{rot}_n E = 0$ , откуда сразу следует, что на поверхности волновода значение  $H_n$  также равно нулю. Таким образом, формулы

$$E_\tau = 0 \quad \text{и} \quad H_n = 0$$

могут рассматриваться как граничные условия к уравнениям (31.1). Исключая из (31.1) магнитное поле, получим уравнение для нахождения электрического поля,

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0, \quad (31.2)$$

с дополнительным условием  $\operatorname{div} E = 0$ .

Систему координат выберем так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль волновода. Убедимся, что в волноводе может распространяться волна *ТМ*-типа, т.е. что в волноводе может существовать  $z$ -компонента электрического поля, которая зависит от координат следующим образом:  $E_z = \Pi(x, y) \exp(ikz)$ . Здесь  $k$  — волновой вектор волны, распространяющейся вдоль волновода. Неизвестная функция  $\Pi(x, y)$  удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \kappa^2 \Pi = 0, \quad (31.3)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (31.4)$$

Спроектируем уравнения (31.1) на оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} H_x, & -\frac{\partial H_y}{\partial z} &= -i \frac{\omega}{c} E_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} H_y, & \frac{\partial H_x}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} E_y. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y &= \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y &= \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Из этих соотношений видно, что, решив уравнение (31.1) и найдя таким образом  $E_z$ , через эту компоненту электрического поля можно выразить все остальные компоненты электрического и магнитного полей. Следовательно, вся задача сводится к решению только одного двумерного уравнения (31.3) с граничным условием  $\Pi(x, y)|_S = 0$ . Решение уравнения (31.3) получается с помощью методов математической физики и зависит от формы волновода. Но при любой форме волновода, сечение которого конечно, функция  $\Pi(x, y)$  ограничена и удовлетворяет граничным условиям только при определенных значениях величин  $\kappa^2$ , которая образует набор так называемых собственных значений. Найдя этот набор, в каждой конкретной задаче можно с помощью формулы (31.4) найти частоту колебаний:

$$\omega = c \sqrt{\kappa^2 + k^2}. \quad (31.7)$$

Эта частота зависит от волнового вектора  $k$ , но при  $k \rightarrow 0$  частота  $\omega$  в нуль не обращается. Из (31.7) видно, что существует минимальное значение частоты (определяемое минимальным собственным значением  $\kappa_{\min}$ ), с которой в волноводе еще может распространяться электромагнитная волна. Величина  $\kappa_{\min}$  порядка  $1/L$ , где  $L$  — поперечные линейные размеры волновода, следовательно,  $\omega_{\min} \approx c/L$ .

Групповая скорость волны в волноводе

$$v_g = \partial\omega/\partial k = ck/\sqrt{k^2 + \kappa^2}. \quad (31.8)$$

При  $k = 0$   $v_g = 0$ , при  $k \rightarrow \infty$   $v_g \rightarrow c$ .

Аналогичным образом можно убедиться в том, что в волноводе также возможно распространение волны  $TE$ -типа. В этом смысле волновод отличается от незамкнутой поверхности, которая тоже может в некотором смысле служить волноводом (см. § 30, ч. II), но вдоль такой поверхности волны  $TE$ -типа распространяться не могут.

Поперечные волны одновременно по векторам  $E$  и по  $H$  в обычном односвязном волноводе распространяться не могут. Качественную причину этого явления можно понять, если учесть, что в соответствии с граничным условием  $H_n = 0$  силовые линии магнитного поля в волноводе должны замыкаться в плоскости  $xu$ , это означает, что  $\text{rot } H$  имеет  $z$ -компоненту. В соответствии со вторым из уравнений (31.1) должна существовать и  $z$ -компонента электрического поля. Положение изменяется, если внутри волновода имеется еще один проводящий цилиндр. Тогда магнитное поле может замыкаться вокруг токов, наведенных во внутреннем

цилиндре. В таком более сложном волноводе могут распространяться поперечные волны.

В качестве примера применения изложенных принципов к конкретным системам рассмотрим задачу о нахождении возможных типов волн и их частот в простом прямоугольном волноводе со сторонами  $a$  и  $b$ , причем  $a > b$ .

В таком волноводе могут распространяться и волны  $TM$ -типа, и волны  $TE$ -типа.

Рассмотрим волны  $TM$ -типа. Уравнению (31.3) с граничными условиями  $\Pi(0, y) = \Pi(a, y) = \Pi(x, 0) = \Pi(x, b) = 0$  отвечает решение

$$\Pi(x, y) = \Pi_0 \sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b), \quad (31.9)$$

причем  $m$  и  $n$  — целые числа (не равные нулю). Поскольку уравнение (31.3) является однородным, постоянная  $\Pi_0$  определяется условиями возбуждения волн и может иметь любые значения. Подставляя (31.9) в (31.3), получим связь между  $\kappa^2$  и величинами  $m$  и  $n$ :

$$\kappa^2 = (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2. \quad (31.10)$$

Спектр возможных частот, согласно (31.7), имеет вид

$$\omega = c \sqrt{k^2 + (\pi m/a)^2 + (\pi n/b)^2}.$$

Минимальная возможная частота

$$\omega_{\min} = c \pi \sqrt{(a^2 + b^2)/a^2 b^2}.$$

Компонента электрического поля, направленная по оси волновода, равна

$$E_z(x, y, z) = \Pi_0 \sin(\pi m x/a) \sin(\pi n y/b) \exp(ikz). \quad (31.11)$$

Остальные компоненты электрического и магнитного полей выражаются через (31.11) по формулам (31.6).

Рассмотрим волны  $TE$ -типа. В случае  $TE$ -волн  $H_z = \Pi(x, y) \exp(ikz)$ , и для определенной таким образом функции  $\Pi$  будут справедливы уравнения (31.3) и (31.4). Аналогами уравнений (31.6) в случае  $TE$ -волн являются уравнения

$$E_x = \frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{i\omega}{c\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (31.12)$$

$$H_x = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{ik}{\kappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

Граничное условие  $H_n = 0$ , согласно вторым двум из этих уравнений, может быть записано в виде

$$\partial H_z / \partial n = 0. \quad (31.13)$$

Поэтому и в случае  $TE$ -волн следует решать уравнения вида (31.3), но с граничным условием

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{0,y} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_{a,y} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|_{x,0} = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|_{x,b} = 0. \quad (31.14)$$

Соответствующее решение имеет вид

$$\Pi = \Pi_0 \cos(\pi m x/a) \cos(\pi n y/b), \quad (31.15)$$

причем связь между  $\kappa^2$  и величинами  $m$  и  $n$  имеет тот же вид, что и в случае  $TM$ -волн. Однако в отличие от  $TM$ -волн, одно из чисел,  $m$  или  $n$ , может оказаться равным нулю. Это означает, что минимальная частота волн  $TE$ -типа меньше, чем в случае волн  $TM$ -типа и равна

$$\omega_{\min} = c\pi/a. \quad (31.16)$$

Соответствующая волновая мода называется  $TE_{10}$ -волной.

### § 32. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ОБЪЕМНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Граница раздела сред не только обуславливает появление новых мод электромагнитных колебаний, но и оказывает влияние на распространение обычных объемных мод. Наиболее важно описать это влияние на распространение поперечных электромагнитных волн, которые имеют возможность пересекать границы раздела и выходить в вакуум или генерироваться в вакууме и падать на границу раздела вакуум — среда.

Рассмотрим падение поперечной электромагнитной волны (рис. 32.1) из прозрачной среды (в частности, это может быть и вакуум) на плоскую границу раздела прозрачной среды (эту среду будем обозначать индексом I) с любой другой средой (которую обозначаем индексом II). Падающую волну обозначим индексом 0, отраженную — индексом 1, преломленную — индексом 2. Угол падения волны на границу, отсчитываемый от нормали к границе, обозначим  $\theta_0$ , угол отражения —  $\theta_1$  и угол преломления —  $\theta_2$ . Координатную плоскость  $xu$  расположим в плоскости раздела. По отношению к координатам  $x$  и  $y$  задача является пространственно-однородной. Это означает, что тангенциальные компоненты волнового вектора всех трех волн — падающей, отраженной и преломленной — одинаковы. Из равенств  $k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}$  следует, что в первой среде

$$k_{0z} = -k_{1z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 \quad \text{и} \quad \theta_0 = \theta_1. \quad (32.1)$$

Таким образом, равенство угла падения углу отражения является прямым следствием сохранения тангенциальной компоненты волнового вектора падающей и отраженной волн. Во второй среде

$$k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}. \quad (32.2)$$

Эта компонента волнового вектора в поглощающей среде может оказаться величиной комплексной. Если вторая среда является прозрачной, то из (32.1) и (32.2) следуют простые законы, связывающие углы падения, отражения и преломления:

$$\theta_0 = \theta_1 \quad \text{и} \quad \sin \theta_2 / \sin \theta_0 = \sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} = n_1 / n_2. \quad (32.3)$$

Из полученных выражений можно определить ход лучей, но эти формулы ничего не говорят об их интенсивностях. Для того чтобы найти эти интенсивности, следует принять во внимание граничные условия на поверхности раздела.

Сначала рассмотрим случай, когда поле  $E_0$  перпендикулярно плоскости падения. Имея в виду обычные условия непрерывности тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, получаем, что на поверхности раздела

$$E_0 + E_1 = E_2. \quad (32.4)$$

Величину  $H$  удобно выразить через  $E$  с помощью первого уравнения Максвелла  $\text{rot } E = - (1/c) \partial H / \partial t$ ; компонента  $H_x$ , например, равна

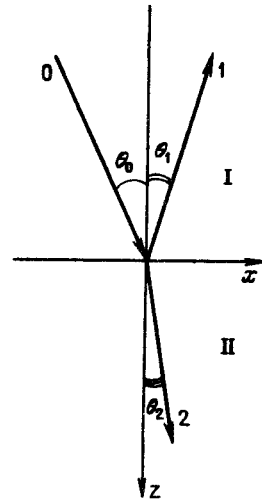


Рис. 32.1.

$$-(c/\omega)k_z E_y. \text{ Имея это в виду, получаем на поверхности раздела сред} \\ k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2. \quad (32.5)$$

Находя из двух последних уравнений величины  $E_1$  и  $E_2$ , получим

$$E_1 = \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0, \quad E_2 = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0. \quad (32.6)$$

Подставляя сюда (32.1) и (32.2), получим

$$E_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0, \quad (32.7)$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0. \quad (32.8)$$

Эти формулы называются *формулами Френеля*. В случае, когда среды прозрачные и  $\sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} = \sin \theta_2 / \sin \theta_0$ , формулы Френеля упрощаются:

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0. \quad (32.9)$$

Можно убедиться, что граничные условия для  $D_n$  и  $B_n$  не дают новых результатов.

Если вектор  $E$  лежит в плоскости падения, то удобнее работать с магнитным полем, вектор напряженности которого оказывается в плоскости раздела. Способом, аналогичным предыдущему, получаем еще две формулы,

$$H_1 = \frac{\epsilon_2 k_{0z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_1 k_{2z} + \epsilon_2 k_{0z}} H_0 = \frac{\epsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \quad (32.10)$$

$$H_2 = \frac{2\epsilon_2 k_{0z}}{\epsilon_1 k_{2z} + \epsilon_2 k_{0z}} H_0 = \frac{2\epsilon_2 \cos \theta_0}{\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \quad (32.11)$$

также полученные Френелем. В прозрачных средах эти формулы примут вид

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (32.12)$$

Введем понятие *коэффициента отражения*. Определим его как отношение  $z$ -компонент векторов Пойнтинга отраженной и падающей волн:

$$R = \frac{|(\vec{\gamma}_1)_z|}{|(\vec{\gamma}_0)_z|}.$$

Без учета пространственной дисперсии и в случае немагнитной среды (напряженности поля считаются комплексными величинами)

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_1 |E_1|^2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0 |E_0|^2}. \quad (32.13)$$

При нормальном падении волн с помощью (32.7) и (32.8) получаем, что

$$R = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2. \quad (32.14)$$

Если показатель преломления среды  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = n'_2 + i\kappa_2$ , то при падении волн на такую среду, например, из пустоты ( $\epsilon_1 = 1$ ), будем иметь

$$R = \frac{(n'_2 - 1) + \kappa_2^2}{(n'_2 + 1) + \kappa_2^2}. \quad (32.15)$$

При наклонном падении, согласно (32.9),

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (32.16)$$

Здесь  $R_{\perp}$  и  $R_{\parallel}$  — коэффициенты отражения падающих волн, поляризованных, соответственно, перпендикулярно и параллельно плоскости падения.

Замечательным является случай, когда волна падает под таким углом, что сумма углов падения и преломления  $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ . Обозначим этот выделенный угол падения  $\theta_0$  символом  $\theta_p$ ; угол  $\theta_p$  называется углом Брюстера. Имея в виду определение  $\theta_p$  и закон преломления (32.3), получаем

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}}{\sin \theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_p}}{\sin \theta_p} = \operatorname{ctg} \theta_p = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}.$$

Таким образом, угол  $\theta_p$  определяется величиной отношения  $\epsilon_1/\epsilon_2$ . При  $\theta_0 = \theta_p$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_p)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_p)} \rightarrow 0. \quad (32.17)$$

Поэтому при любой поляризации падающего под углом  $\theta_p$  пучка электромагнитных волн отраженные от среды 2 волны оказываются полностью поляризованными в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Преломленные же волны линейно-поляризованными не будут.

Другое важное явление, возникающее при падении электромагнитных волн на поверхность раздела двух сред — полное внутреннее отражение. Оно возникает при отражении от оптически менее плотной среды, т.е. при  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ . Когда имеет место полное внутреннее отражение, то преломленная волна не проникает в оптически менее плотную среду; величины  $R_{\perp}$  и  $R_{\parallel}$  при этом обращаются в единицу. Соответствующий угол падения  $\theta_0 = \theta_r$ , при котором наступает полное внутреннее отражение, определяется из того условия, что при этом  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ . Этот предельный угол  $\theta_r$  определяется формулой

$$\theta_r = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}. \quad (32.18)$$

При  $\theta_0 > \theta_r$  вся энергия падающего электромагнитного поля отражается обратно в первую среду.

### § 33. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ И ПЛАЗМОПОДОБНЫХ СРЕД ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧАСТОТАХ

33.1. Вычисление функции  $\epsilon(k, \omega)$  электронного газа при конечных  $k$  и  $\omega$ . В предыдущих параграфах распространение электромагнитных волн в основном рассматривалось с позиций макроскопической электродинамики. Более подробное изучение этих процессов требует знания явного вида функциональной зависимости диэлектрической проницаемости от частоты и волнового вектора.

В качестве практически важного и сравнительно простого примера вычисления  $\epsilon(k, \omega)$  найдем диэлектрическую проницаемость пространственно-однородного изотропного электронного газа в бесстолкновительном приближении. Такое приближение будет оправданным в том случае, когда частота колебаний поля  $\omega$  велика по сравнению с частотой столкновений  $\nu$  или если описываемые процессы протекают на характерных расстояниях, которые много меньше длины свободного пробега электронов. В качестве такого характерного расстояния может выступать, в частности, путь, проходимый электроном за период изменения поля. Как было показано в § 6, ч. II, диэлектрическая проницаемость в этом случае может быть представлена в виде (6.11)

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{v_\alpha \partial f_0 / \partial p_\beta}{\omega - k \cdot v}, \quad (33.1)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера,  $k$  — волновой вектор,  $\omega$  — частота изменения поля,  $v$  и  $p$  — скорость и импульс электронов среды.

В § 6, ч. II было получено предельное значение диэлектрической проницаемости при  $\omega \rightarrow 0$ . В данном разделе  $\omega$  будем считать отличной от нуля. При конечной  $\omega$  интеграл в формуле (33.1) перестает быть определенной величиной, поскольку в (33.1) не содержится правила обхода полюса  $\omega = k \cdot v$ . Это правило, в соответствии с которым знаменатель подынтегрального выражения в (33.1) следует записать в виде  $\omega - k \cdot v + i\nu$ , причем  $\nu \rightarrow 0$ , было установлено в § 6.

Согласно (4.5), выражение (33.1) может быть представлено в виде комбинации продольной и поперечной диэлектрической проницаемости. Из (4.5) и (33.1) следует, что если в среде имеется продольное электрическое поле, то вектор электрической индукции может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \vec{D} &= E_{\parallel} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{v}{\omega - k \cdot v + i\nu} \left( E_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) = \\ &= \left[ 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{k \cdot v}{\omega - k \cdot v + i\nu} \left( k \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) \right] E_{\parallel}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\epsilon^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3p \frac{k \cdot v}{\omega - k \cdot v + i\nu} \left( k \frac{\partial f_0}{\partial p} \right). \quad (33.2)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для поперечной диэлектрической проницаемости в изотропной среде:

$$\epsilon^{tr} = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega} \int d^3p \frac{1}{\omega - k \cdot v + i\nu} \left[ v \frac{\partial f_0}{\partial p} - \frac{k \cdot v}{k^2} \left( k \frac{\partial f_0}{\partial p} \right) \right]. \quad (33.3)$$

Производную от равновесной функции распределения можно преобразовать:

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} = v \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}},$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия электрона. С учетом этой формулы продольной  $\epsilon^l$  и поперечной  $\epsilon^{tr}$  диэлектрическим проницаемостям можно придать вид

$$\epsilon^l = 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3\rho \frac{(k \cdot v)^2}{\omega - k \cdot v + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}}, \quad (33.4)$$

$$\epsilon^{tr} = 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega k^2} \int d^3\rho \frac{(k \times v)^2}{\omega - k \cdot v + i\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}}. \quad (33.5)$$

При вычислении интегралов в этих формулах следует пользоваться правилом, которое принято записывать символически в виде (см. (Д. IV. 25))

$$\frac{1}{k \cdot v - \omega - i\nu} = \mathcal{P} \frac{1}{k \cdot v - \omega} + i\pi \delta(k \cdot v - \omega). \quad (33.6)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  есть символ главного значения интеграла, а само соотношение (33.6) есть операторное соотношение, которое понимается в том смысле, что оно может быть умножено на функцию, не имеющую особенностей в определенной области, после чего все это выражение интегрируется. Важной характеристикой диэлектрической проницаемости является то, что, несмотря на отсутствие столкновений, она наряду с действительной частью имеет и конечную мнимую часть.

**33.2. Продольные колебания бесстолкновительного невырожденного электронного газа.** Выясним, какие новые результаты (по сравнению с теми, что были найдены в § 28) относительно продольных электромагнитных волн могут быть получены, если известен явный вид функции  $\epsilon(k, \omega)$ . Для простоты рассмотрим случай плазмы, равновесная функция распределения в которой имеет вид распределения Максвелла:

$$f_0 = \frac{N}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right). \quad (33.7)$$

В этом распределении величина  $N$  — плотность электронов,  $T$  — температура электронного газа в энергетических единицах. Подставляя (33.7) в (33.4) и (33.5), получим:

$$\epsilon^l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2 \exp(-x^2/2)}{\omega - xk\sqrt{T/m} + i\nu}, \quad (33.8)$$

$$\epsilon^{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp(-x^2/2)}{\omega - xk\sqrt{T/m} + i\nu}. \quad (33.9)$$

Здесь было введено обозначение:  $k \cdot p = xk\sqrt{T/m}$ . Таким образом, интегралы по  $x$  соответствуют интегрированию по продольной (по отношению к  $k$ ) компоненте импульса  $p$ . Интегрирование по поперечной компоненте импульса  $p$  в этих формулах уже проведено.

Формула (33.8) существенно упрощается в предельном случае длинноволновых колебаний. При этом в ней можно провести разложение по степеням малого параметра  $(k/\omega)\sqrt{T/m}$ , после чего (33.8) примет вид

$$\begin{aligned} \epsilon^l = & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3Tk^2}{m\omega^2}\right) + \\ & + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\omega_p^2}{k^3} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2k^2T}\right). \end{aligned} \quad (33.10)$$

Видно, что здесь диэлектрическая проницаемость — величина комплексная. Мнимая ее часть обусловлена тем вкладом в интеграл (33.8), который связан с обходом полюса в подынтегральном выражении (33.8) (напомним, что правило обхода определяется наличием бесконечно малой мнимой части в знаменателе). При малых  $k$  мнимая часть функции  $\epsilon'$  экспоненциально мала и ее можно не учитывать. Тогда из условия существования продольных волн,  $\epsilon'(k, \omega) = 0$ , следует связь между частотой этих волн и волновым вектором  $k$ :

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{3T}{m} k^2} = \omega_p + \frac{3}{2} \frac{k^2 T}{m \omega_p}. \quad (33.11)$$

Таким образом, частота продольных колебаний поля оказывается зависящей от волнового вектора. Хотя зависимость вида  $\omega = \omega_p + ak^2$  можно было бы написать и из общих соображений в феноменологической теории, знание явного вида диэлектрической проницаемости позволило вычислить коэффициент  $a$  в последней формуле. Соотношение (33.11) можно переписать несколько иначе, выразив коэффициент  $a$  через дебаевский радиус  $r_D$ . Согласно (6.13), дебаевский радиус определяется формулой

$$r_D^{-2} = -4\pi e^2 \int d^3p \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}.$$

Подставляя сюда формулу (33.7) и беря интеграл, получим, что в электронном газе с максвелловской функцией распределения

$$r_D^{-2} = 4\pi e^2 N/T = m\omega_p^2/T. \quad (33.12)$$

Имея в виду это выражение для дебаевского радиуса, запишем формулу (33.11) в виде

$$\omega = \omega_p [1 + \frac{1}{2} (kr_D)^2]. \quad (33.13)$$

Видно, что для того чтобы это дисперсионное уравнение можно было считать справедливым, необходимо, чтобы длина волны поля была много больше дебаевского радиуса экранирования.

Мнимая часть функции  $\epsilon'(k, \omega)$  растет с увеличением значения волнового вектора. Поскольку в изотропной среде именно мнимая часть диэлектрической проницаемости обуславливает диссипацию энергии поля, то можно заключить, что с ростом волнового вектора будет увеличиваться затухание продольных колебаний поля. Затухание собственных колебаний поля можно описывать, введя комплексную частоту колебаний  $\omega - i\gamma$ , так что изменение поля со временем будет задаваться формулой

$$\exp[-i(\omega - i\gamma)t] = \exp(-i\omega t) \exp(-\gamma t).$$

Здесь  $\omega$  — действительная часть частоты колебаний, а  $\gamma$  — мнимая часть, — называется *декрементом* колебаний, при этом предполагается, что  $\gamma > 0$ . Если же амплитуда колебаний со временем возрастет и  $\gamma < 0$ , то говорят об *инкременте* колебаний.

Вычислим декремент колебаний в случае продольных волн. Декремент может быть найден из дисперсионного уравнения

$$\epsilon'(\omega - i\gamma, k) + i\epsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0, \quad \epsilon'' \ll \epsilon'.$$

Последнее неравенство позволяет затухание колебаний считать слабым. Решим дисперсионное уравнение

$$\epsilon'(\omega - i\gamma, k) + i\epsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0 \quad (33.14)$$

методом итераций. В нулевом приближении, когда полностью пренебрегается затуханием, это уравнение переходит в  $\epsilon'(\omega, k) = 0$ .

Функцию  $\epsilon'(\omega - i\gamma, k)$  представим в виде разложения в ряд Тейлора по малому параметру  $\gamma/\omega$ , оставив в нем нулевой и линейный по  $\gamma$  члены. Тогда (33.14) примет вид

$$\epsilon'(\omega, k) - i\gamma \left. \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right|_{\gamma=0} + i\epsilon''(\omega - i\gamma, k) = 0.$$

В слагаемом, пропорциональном мнимой части диэлектрической проницаемости, величиной  $\gamma$  можно пренебречь. Функция  $\epsilon''$  — сама по себе величина первого порядка малости, поэтому сохранение в ее аргументе величины  $\gamma$  соответствовало бы учету членов второго порядка малости по  $\gamma$ , которыми в разложении функции  $\epsilon'$  мы пренебрегли. Теперь дисперсионное уравнение принимает вид

$$\epsilon'(\omega, k) - i\gamma \left. \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right|_{\gamma=0} + i\epsilon''(\omega, k) = 0.$$

Но  $\epsilon'(\omega, k) = 0$ , поэтому сразу получаем, что декремент колебаний

$$\gamma = - \frac{\epsilon''(\omega, k)}{\partial \epsilon'(\omega, k) / \partial \omega}. \quad (33.15)$$

Подставляя сюда  $\epsilon''$  из (33.10) и вычисляя соответствующую производную в знаменателе, получаем

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(kr_D)^3} \exp \left[ - \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \frac{1}{(kr_D)^2} \right] \quad (33.16)$$

или, учитывая (33.11),

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(kr_D)^3} \exp \left[ - \frac{1}{2(kr_D)^2} - \frac{3}{2} \right]. \quad (33.17)$$

Затухание, описываемое этой формулой, называется *затуханием Ландау*. Из (33.17) видно, что затухание мало при малых  $k$  и быстро нарастает при приближении  $k$  к обратному дебаевскому радиусу.

Физическая картина, приводящая к появлению затухания Ландау, может быть представлена следующим образом. Из (33.4) и (33.6) следует, что мнимая часть диэлектрической проницаемости связана с выполнением условия  $k \cdot v = \omega$ . Поскольку  $\omega/k = v_{ph}$  есть фазовая скорость волны, то указанное условие можно сформулировать так:  $v_{||} = v_{ph}$  (здесь  $v_{||}$  — параллельная вектору  $k$  проекция скорости  $v$  частиц). Это означает, что энергия поля переходит к тем частицам, которые движутся так, что все время находятся в плоскости одной и той же фазы. При этом электроны долгое время находятся в поле волны одного знака и могут за счет поля получить значительную энергию. Электроны, для которых сформулированное фазовое соотношение не выполняется, движутся в переменном поле, и поэтому последовательно как получают энергию от поля, так и отдают ее полю.

Заметим, что условие  $k \cdot v = \omega$  соответствует тому, что электроны могут не только получать энергию от поля. Быстрые электроны могут отдавать ее полю, что приводит к раскачке продольных колебаний. Но

обычно функция распределения электронов в среде, близкая к равновесной, такова, что медленных электронов в среде больше, чем быстрых. Соответственно, продольные волны, распространяющиеся в термодинамически-равновесной среде, всегда затухают.

33.3. Поперечные колебания электронного невырожденного бесстолкновительного газа. Спектр поперечных электромагнитных волн определяется дисперсионным уравнением (28.10)

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{tr}(k, \omega) = 0.$$

Поперечную диэлектрическую проницаемость при малых  $k$  вычисляем, разлагая (33.9) в ряд по степеням  $k$ . С точностью до квадратичных по  $k$  слагаемых

$$\epsilon^{tr}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 T}{m\omega^2} \right). \quad (33.18)$$

Отсюда можно получить дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2 \left( 1 + \frac{k^2 T/m}{\omega_p^2 + c^2 k^2} \right). \quad (33.19)$$

из которого видно, что эффект пространственной дисперсии, связанный с существованием теплового движения электронов, в случае поперечных волн мал. Полученное дисперсионное уравнение (33.19) оказалось весьма близким к уравнению (28.16).

Бесстолкновительное затухание поперечных волн можно считать равным нулю. Это связано с тем, что фазовая скорость  $v_{ph}$  поперечных волн при всех  $k$  больше, чем скорость света  $c$ , поэтому нет электронов, для которых могло бы выполняться условие  $v_{ph} = v_{||}$ , а с этим условием связано существование мнимой части диэлектрической проницаемости.

33.4. Ионно-звуковые колебания. В предыдущих пунктах этого параграфа подразумевалось, что двигаться могут только электроны, ионы же считались неподвижными. При высоких частотах колебаний поля ионы даже в газовой плазме, и тем более в твердом теле, могут считаться неподвижными из-за их большой массы. Но ионы газовой плазмы могут оказывать существенное влияние на распространение низкочастотных волн, приводя даже к появлению новых колебательных мод с низкими частотами. Диэлектрическая проницаемость двухкомпонентной газовой плазмы, состоящей из электронов и ионов, отличается от функции  $\epsilon$  электронного газа тем, что во вторых слагаемых в правых частях формул (33.4) и (33.5) должна стоять сумма по всем компонентам (в частности — по электронной и ионной)

$$\epsilon' = 1 + \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{\omega k^2} \int d^3 p \frac{(k \cdot v)^2}{\omega - k \cdot v + i\nu} \frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathcal{E}}. \quad (33.20)$$

$$\epsilon^{tr} = 1 + \sum_j \frac{2\pi e_j^2}{\omega k^2} \int d^3 p \frac{(k \times v)^2}{\omega - k \cdot v + i\nu} \frac{\partial f_{0j}}{\partial \mathcal{E}}. \quad (33.21)$$

Обозначим массы электронов и ионов соответственно  $m_e$  и  $m_i$ , а температуры —  $T_e$  и  $T_i$ . В электронной и ионной функциях, вообще говоря,  $T_e \neq T_i$ .

Существование подвижных ионов приводит, кроме усложнения формул для  $\epsilon^l$  и  $\epsilon^{lr}$ , также к дополнительному уравнению

$$eN_e + e_i N_i = 0, \quad (33.22)$$

выражающему факт электронейтральности плазмы. Для того чтобы новая, возникающая благодаря движению ионов мода колебаний поля затухала слабо, необходимо, чтобы фазовая скорость этой волны была далека от средних тепловых скоростей как ионов, так и электронов. Это может быть достигнуто, если  $T_e \gg T_i$  (что возможно в бесстолкновительной системе) и  $\sqrt{T_i/m_i} \ll v_{ph} \ll \sqrt{T_e/m_e}$ . Вклад ионов в величину  $\epsilon^l - 1$  будет определяться формулой (33.10), в которой вместо электронных характеристик нужно подставить ионные. Вклад электронов в  $\epsilon^l - 1$  получается из (33.20) разложением этой формулы в ряд по степеням малого параметра  $(\omega/k)\sqrt{m_e/T_e}$ . Этот вклад равен

$$\frac{\omega_{pe}^2}{kT_e/m_e} \left[ 1 - \frac{\omega^2 m_e}{k^2 T_e} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k\sqrt{T_e/m_e}} \right]. \quad (33.23)$$

Мнимая часть формулы (33.23) является малой, поскольку она пропорциональна малому параметру  $(\omega/k)\sqrt{m_e/T_e}$ . Малым является также и второе слагаемое в квадратной скобке, и в дальнейшем мы его учитывать не будем. Таким образом, при  $\sqrt{T_i/m_i} \ll v_{ph} \ll \sqrt{T_e/m_e}$  продольная диэлектрическая проницаемость

$$\begin{aligned} \epsilon^l(k, \omega) = & 1 + \frac{\omega_{pe}^2 m_e}{kT_e} \left[ 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_e}{T_e}} \right] - \\ & - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2 T_i}{\omega^2 m_i} \right). \end{aligned} \quad (33.24)$$

Экспоненциально малым вкладом в мнимую часть функции  $\epsilon^l$  от ионной компоненты мы пренебрегли по сравнению с мнимой частью функции  $\epsilon^l$  электронного происхождения. Из уравнения  $\epsilon^l(k, \omega) = 0$  получаем дисперсионное уравнение (в пренебрежении малым затуханием):

$$\omega^2 = \frac{1 + 3k^2 r_{Di}^2 [1 + 1/(k^2 r_{De}^2)]}{1 + 1/(k^2 r_{De}^2)} \omega_{pi}^2. \quad (33.25)$$

При выводе этого уравнения учтено соотношение (33.22).

Дисперсионное уравнение особенно упрощается в случае, когда не только  $kr_{Di} \ll 1$ , но и  $kr_{De} \ll 1$ . В этом случае (33.25) переходит в

$$\omega = k\omega_{pi} r_{De}. \quad (33.26)$$

Спектр колебаний оказывается линейным по волновому вектору. Поскольку таким же свойством обладает и спектр звуковых возбуждений, то рассматриваемые волны носят название *ионно-звуковых*. Из (33.26)

следует, что фазовая скорость ионно-звуковых волн  $v_{ph} \approx \sqrt{T_e/m_i}$ . Она определяется температурой электронов, но массой — ионов. Декремент ионно-звуковых волн

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{\pi m_e N_e}{8 m_i N_i}} \quad (33.27)$$

и полностью обусловлен электронами.

При более коротких длинах волн, когда  $r_{De}^{-1} \ll k \ll r_{Di}^{-1}$ , дисперсионное уравнение (33.25) принимает вид

$$\omega = \omega_{pi}.$$

Это — ионные колебания, аналогичные рассмотренным ранее колебаниям электронного газа.

**33.5. Гидродинамическое описание волн в однородной изотропной плазме.** Кроме уже рассмотренного кинетического описания взаимодействия среды с электромагнитным полем, часто используется другой, более грубый метод описания, который привлекателен своей простотой и который в сложных случаях часто используется для первоначального, оценочного рассмотрения задачи. Этот метод (он носит название *гидродинамического*) заключается в следующем.

В уравнения Максвелла функция распределения непосредственно не входит. В эти уравнения входит плотность наведенного тока (и плотность наведенного заряда), которая выражается через интеграл от функции распределения

$$j = \int d^3p \, v f(p)$$

Иначе говоря, в уравнения Максвелла входит только среднее значение скорости частицы среды. В уравнения же механики, определяющие характер реакции среды на поле, скорость  $v$  входит непосредственно.

Если предположить, что детали фактического распределения частиц по скоростям мало сказываются на характере реакции среды на внешнее поле, то мы придем к гидродинамическому описанию движения среды, в котором в уравнения движения среды с самого начала входит только средняя скорость. В гидродинамическом приближении свойства среды описываются пятью скалярными величинами: тремя компонентами средней скорости частиц среды  $v$  и двумя величинами, описывающими внутреннее состояние среды в каждой точке (как известно из термодинамики, двух величин для этого достаточно). Такими величинами могут быть, например, плотность среды  $\tau$  и давление  $p$ , или  $\tau$  и температура  $T$ . Это означает, что в гидродинамическом приближении средняя скорость частиц среды зависит не только от величины приложенного поля, но и от внутреннего состояния вещества. Поэтому, по сравнению с самым грубым возможным приближением, в котором все частицы под действием приложенного поля движутся с одной скоростью, гидродинамическое приближение позволяет получить относительно детальное описание реакции среды на поле.

Сравнивая гидродинамическое приближение с кинетическим, можно сказать, что если гидродинамическое описание обеспечивает детальное описание взаимодействия среды с полем, то кинетическое описание является исчерпывающим.

Сформулируем теперь уравнения, используемые при описании взаимодействия среды с полем в гидродинамическом приближении. Пренебрегая для простоты трением между разными компонентами плазмы, запишем уравнение движения зарядов каждого сорта:

$$\tau \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \frac{e}{m} \tau E. \quad (33.28)$$

Это уравнение следует дополнить уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau v) = 0. \quad (33.29)$$

Внутреннее состояние плазмы описывается уравнением состояния. Очень часто в качестве такого уравнения выступает уравнение состояния идеального газа

$$p = \frac{\tau}{m} T. \quad (33.30)$$

Будем считать, что распространение волн в среде происходит адиабатически, так что

$$p\tau^{-\gamma} = \text{const}. \quad (33.31)$$

Здесь параметр  $\gamma = 1 + R/c_V$ . Приведенные уравнения содержат неизвестные  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\tau$  и  $E$ ; поэтому совместно с четырьмя записанными выше уравнениями должны решаться уравнения Максвелла, определяющие электрическое поле  $E$ .

Линеаризуем эти уравнения, полагая, что  $T = T_0 + T_1$ ,  $p = p_0 + p_1$  и  $\tau = \tau_0 + \tau_1$ . Будем считать, что  $v_0 = E_0 = 0$ , так что  $v$  и  $E$  — уже величины первого порядка. Поскольку равновесная система предполагается пространственно-однородной, то  $\text{grad } p_0 = \text{grad } T_0 = \text{grad } \tau_0 = 0$ . Таким образом, из адиабатического уравнения (33.31) получим, что

$$p_1 = p_0 \gamma \tau_1 / \tau_0,$$

а из уравнения непрерывности — что

$$\tau_1 / \tau_0 = (k \cdot v) / \omega.$$

Поэтому  $p_1 = \gamma (k \cdot v) p_0 / \omega$ . При вычислении производных имелось в виду, что все величины:  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $\tau_1$  — зависят от  $r$  и  $t$  по закону  $\exp[i(k \cdot r - \omega t)]$ .

Далее вычисляем  $\nabla p_1$ . Будем считать, что этот градиент направлен вдоль вектора  $k$ , так что

$$\nabla(k \cdot v) = k \nabla v_{\parallel} = i k k v_{\parallel}.$$

Подставляя полученную величину в (33.28), будем иметь

$$v_{\perp} = i \frac{e E_{\perp}}{m \omega}. \quad (33.32)$$

Здесь  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  — соответственно параллельная и перпендикулярная вектору  $k$  компоненты вектора  $v$ , причем

$$v_{\parallel} = \frac{i e E_{\parallel}}{m \omega \left( 1 - \gamma \frac{k^2 T_0}{m \omega^2} \right)}. \quad (33.33)$$

Поэтому продольная и поперечная компоненты плотности тока имеют вид

$$j_{\parallel} = \frac{i e^2 \tau_0 \omega E_{\parallel}}{m(m \omega^2 - \gamma k^2 T_0)}, \quad j_{\perp} = \frac{i e^2 \tau_0 E_{\perp}}{m^2 \omega}. \quad (33.34)$$

Все эти формулы написаны для одной компоненты плазмы. Но поскольку ток обусловлен всеми ее компонентами, то в (33.34) следует подразумевать суммирование по всем этим компонентам.

Из (33.34) получаем выражения для продольной и поперечной проводимостей:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{i e^2 \tau_0 \omega}{m(m \omega^2 - \gamma k^2 T_0)}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{i e^2 \tau_0}{m^2 \omega}. \quad (33.35)$$

Поскольку

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega},$$

то для диэлектрической проницаемости получаем

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2 - \gamma k T}, \quad \epsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2}; \quad (33.36)$$

здесь  $n_0 = \tau_0/m$  — концентрация, знак суммы означает суммирование по всем компонентам плазмы.

Поперечная диэлектрическая проницаемость в этом случае выглядит так же, как и в случае простейшей модели, в которой все частицы одного

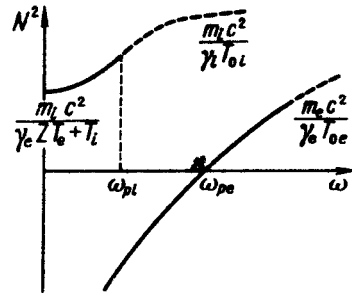


Рис. 33.1.

сорта под действием поля движутся с одинаковой скоростью. Для продольной составляющей такого совпадения нет. Этот результат в простейшей модели движения частиц с одинаковой скоростью места не имел, он получается именно в гидродинамической модели (а также, конечно, и в кинетической).

Рассмотрим первую поперечную составляющую диэлектрической проницаемости, как более простую. При  $\omega < \omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$

$$\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon_{\perp}} < 0.$$

Это означает, что волна с такой частотой не может распространяться в среде. При  $\omega > \omega_{pe}$  в плазме могут распространяться поперечные волны, для которых закон дисперсии,  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$ , совпадает с тем, что было получено раньше. Вкладом ионов в спектр поперечных колебаний из-за их инерционности можно пренебречь.

При описании продольных колебаний вкладом ионов пренебрегать, вообще говоря, нельзя в связи с наличием второго слагаемого в знаменателе в  $\epsilon_{\parallel}$ . Дисперсионное уравнение в этом случае примет вид

$$\epsilon_{\parallel}(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2 - \gamma_e k^2 T_{0e}} - \frac{4\pi n_{0i} Z^2 e^2}{m_i \omega^2 - \gamma_i k^2 T_{0i}} = 0. \quad (33.37)$$

Здесь предполагалось, что существуют ионы только одного типа с зарядом  $Ze$ . Решение уравнения (33.37) представлено на рис. 33.1. Видно, что решение имеют две ветви — электронную и ионную.

В области высоких частот, когда движением ионов все же можно пренебречь, третье слагаемое вклада в (33.37) не дает и

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e \frac{T_{0e}}{m_e} k^2. \quad (33.38)$$

Зависимость частоты от волнового вектора здесь обусловлена давлением электронного газа.

Ионной ветви колебаний соответствуют частоты, при которых электроны адиабатически следуют за ионами. Поэтому квадратом частоты в электронном слагаемом в (33.37) можно пренебречь, после чего дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 = \gamma_i \frac{k^2 T_{0i}}{m_i} + \gamma_e \frac{k^2 Z T_{0e}}{m_i (1 + \gamma_e k^2 T_{0e} / 4\pi e^2 n_{0e})} \quad (33.39)$$

При малых значениях волнового вектора

$$\gamma_e k^2 T_{0e} / 4\pi n_{0e} e^2 = k^2 \gamma_e / \kappa_{De}^2 \ll 1,$$

и

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i T_{0i} + \gamma_e Z T_{0e}}{m_i} \quad (33.40)$$

Это и есть ионно-звуковые колебания.

При  $k^2 \gamma_e / \kappa_{De}^2 \gg 1$

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + k^2 \frac{\gamma_i T_{0i}}{m_i}, \quad (33.41)$$

что соответствует плазменным ионным колебаниям. В этих колебаниях электроны участия не принимают.

#### § 34. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**34.1. Система уравнений магнитной гидродинамики.** Если в среде имеется постоянное внешнее магнитное поле, то в такой среде модифицируются уже рассмотренные в предыдущем параграфе колебательные моды и, что особенно существенно, — возникают новые. Изучение этих колебательных мод может проводиться на той же основе, что и в среде без магнитного поля. Новым здесь будет то, что в "силовом" члене кинетического уравнения будет теперь стоять полная сила Лоренца, вместе с ее магнитной частью. Внешнее магнитное поле выделяет в среде некоторое направление, поэтому такая среда является анизотропной.

Вследствие большой сложности задач с магнитным полем для их решения особенно удобно применять сравнительно простой гидродинамический способ описания взаимодействия плазмы с полем. При этом будет достигнуто упрощение (по сравнению с кинетическим) описания взаимодействия среды с полем, и кроме того, оказывается возможным сравнительно просто учесть явления, возникающие в случае, когда под действием поля элементы среды испытывают макроскопические перемещения. Основным гидродинамическим уравнением и здесь будет уравнение Навье — Стокса. Но при наличии магнитного поля наиболее существенным оказывается взаимодействие этого поля с токами среды, которые могут быть большими и в электрически-нейтральной плазме. Поэтому в случае квазинейтральной и проводящей среды уравнение Навье — Стокса примет вид

$$\tau \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\text{grad } p + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_f. \quad (34.1)$$

Здесь  $\tau$  — плотность среды,  $p$  — давление в среде,  $F_f$  — силы трения, обусловленные столкновениями частиц среды,  $v$  — гидродинамическая скорость. Среду считаем немагнитной, так что  $B = H$ . Плотность среды считается такой, что силой тяжести можно пренебречь. В тех же случаях, когда среда достаточно плотная, к правой части уравнения (34.1) следует добавлять слагаемое  $\tau g$ . Здесь  $g$  — ускорение свободного падения.

В систему уравнений гидродинамики кроме (34.1) входит уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau v) = 0. \quad (34.2)$$

Эти уравнения должны решаться совместно с уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} B = 0. \quad (34.3)$$

(Во втором уравнении Максвелла мы пренебрегаем током смещения, поскольку нас будут интересовать лишь низкочастотные колебательные моды.) Кроме того, нужно еще учесть материальное уравнение

$$j = \sigma \left( E + \frac{1}{c} v \times B \right). \quad (34.4)$$

Комбинация  $E + \frac{1}{c} v \times B$  есть электрическое поле в системе, движущейся вместе со средой. Именно в такой системе определен обычный закон Ома.

Введем теперь некоторые важные понятия, используемые в магнитной гидродинамике. Прежде всего изучим особенности поведения магнитного поля в жидких проводниках. С помощью уравнения (34.4) выразим  $E$  через  $j$  и  $B$  и проводимость  $\sigma$ :

$$E = \sigma^{-1} j - \frac{1}{c} v \times B.$$

Вычислим ротор от этого соотношения:

$$\operatorname{rot} E = \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} j - \frac{1}{c} \operatorname{rot}(v \times B).$$

В последнем соотношении  $\operatorname{rot} j$  выразим через  $\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} B$  и получившуюся формулу подставим в левую часть первого уравнения Максвелла. В результате получим уравнение, связывающее напряженность магнитного поля со скоростью перемещения элементов среды:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times B) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta B. \quad (34.5)$$

В случае, если среда неподвижная, это уравнение упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta B. \quad (34.6)$$

Поскольку уравнение (34.6) по своей структуре является уравнением типа уравнения диффузии, то сразу можно определить характерное время "диффузии" магнитного поля:

$$t_d = (4\pi\sigma/c^2) L^2, \quad (34.7)$$

где  $L$  — характерная длина, на которой существенно изменяется магнитное поле. Другому предельному случаю отвечает движущаяся среда с очень высокой проводимостью. При этом  $\sigma \rightarrow \infty$  и уравнение (34.5) переходит в уравнение

$$\partial B / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (34.8)$$

Можно видеть, что это уравнение описывает магнитное поле, "вмороженное" в вещество, и поэтому поле перемещается вместе с веществом. Действительно  $\operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B}$ . Здесь четвертое слагаемое справа равно нулю в силу третьего уравнения Максвелла. Третье слагаемое может быть преобразовано с учетом соотношения непрерывности

$$\mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{B} \left( -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) - \mathbf{B} \left( \frac{\mathbf{v}}{\tau} \cdot \nabla \right).$$

Теперь уравнению (34.8) можно придать вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{\tau} (\mathbf{v} \cdot \nabla \tau).$$

Деля это уравнение на  $\tau$  и группируя в нем члены, получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\tau} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\tau} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (34.9)$$

Сравним это выражение с уравнением, описывающим скорость изменения линейного элемента жидкости. Пусть скорость движения одного конца элемента  $\delta l$  есть  $\mathbf{v}$ ; тогда скорость другого конца есть  $\mathbf{v} + (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}$ . Поэтому за время  $dt$  элемент изменит свою длину на величину  $dt (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}$ , так что

$$\frac{d}{dt} \delta l = (\delta l \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (34.10)$$

Поскольку структура уравнений (34.9) и (34.10) полностью совпадает, можно сделать заключение о том, что величина  $\mathbf{B}/\tau$  в процессе деформации среды оказывается, как говорят, "вмороженной" в вещество.

Перейдем теперь к изучению механической части системы уравнений магнитной гидродинамики. Все силы в правой части уравнения Навье — Стокса делятся на силы электромагнитного (обозначим их через  $F_{em}$ ) и силы неэлектромагнитного ( $F_{nem}$ ) происхождения

$$F_{em} \frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \frac{\sigma}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{\sigma}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{c^2} \mathbf{v}_\perp B^2. \quad (34.11)$$

Здесь  $\mathbf{v}_\perp$  — перпендикулярная относительно направления магнитного поля компонента скорости движения среды. Из (34.11) следует, что все электромагнитные силы перпендикулярны по отношению к направлению магнитного поля. Последнее слагаемое в (34.11) направлено против перпендикулярной по отношению к  $\mathbf{B}$  компоненты скорости перемещения элементов среды и линейно зависит от величины этой компоненты. В этом отношении эта часть силы  $F_{em}$  напоминает силу трения в механике. Поэтому ее принято называть магнитной вязкостью. Сила магнитной вязкости

$$F_v = -\frac{\sigma}{c^2} \mathbf{v}_\perp B^2 \quad (34.12)$$

пропорциональна квадрату вектора  $\mathbf{B}$ , что существенно сказывается на динамике хорошо проводящих сред.

В  $F_{em}$  можно выделить еще одно важное слагаемое. Электромагнитную силу  $\frac{1}{c} j \times B$  с помощью второго уравнения Максвелла можно записать в виде

$$F_{em} = -\frac{1}{4\pi} B \times \operatorname{rot} B.$$

С помощью тождества  $\frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 = B \times \operatorname{rot} B + (B \operatorname{grad}) B$  эту силу представим в виде

$$F_{em} = -\operatorname{grad} (B^2/8\pi) + \frac{1}{4\pi} (B \operatorname{grad}) B. \quad (34.13)$$

Первое слагаемое в правой части (34.13) может быть объединено со слагаемым  $-\operatorname{grad} p$  в уравнении (34.1). Это означает, что магнитное поле создает некоторое давление

$$p_m = B^2/8\pi, \quad (34.14)$$

которое называют *магнитным давлением* и которое, наряду с обычным гидростатическим давлением, может быть причиной течения проводящей жидкости или проводящего газа.

**34.2. Магнитогидродинамические волны.** Магнитное поле в среде может приводить к появлению новых колебательных мод электромагнитного поля. Рассмотрим простейшую свободную деформируемую среду — идеально проводящую жидкость с нулевой вязкостью. Ее движение описывается уравнениями гидродинамики

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div} \tau v = 0, \quad \tau \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi} B \times \operatorname{rot} B, \quad (34.15)$$

вместе с уравнениями поля. Будем описывать поле уравнением (34.5), в котором  $\sigma \rightarrow \infty$ , так что

$$\partial B / \partial t = \operatorname{rot} (v \times B). \quad (34.16)$$

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнение состояния среды, связывающее давление в среде с ее плотностью. При колебательных процессах в жидкостях давление  $p$  обычно бывает связано с плотностью  $\tau$  соотношением

$$p = s^2 \tau, \quad (34.17)$$

где  $s$  — скорость звука в среде. Предположим, что и в нашем случае можно пользоваться уравнением состояния (34.17). Будем искать колебательные решения системы (34.15) — (34.17). Поскольку при линейных колебаниях отклонения системы от положения равновесия обычно малы, проведем линеаризацию нашей системы уравнений. Каждую величину представим в виде суммы ее равновесного значения (обозначая его индексом 0) и слагаемого, описывающего отклонение от положения равновесия (со штрихом):

$$\tau = \tau_0 + \tau', \quad B = B_0 + B', \quad p = p_0 + p'.$$

Поскольку предполагается, что  $v_0 = 0$ , то  $v = v'$ . Поле  $B_0$  будем считать однородным и постоянным. После линеаризации уравнений (34.15) — (34.17) система уравнений магнитной гидродинамики примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau'}{\partial t} + \tau_0 \operatorname{div} v &= 0, & \tau_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\operatorname{grad} p' - \frac{1}{4\pi} B_0 \times \operatorname{rot} B', \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \operatorname{rot} v \times B_0, & \operatorname{grad} p' &= s^2 \operatorname{grad} \tau'. \end{aligned} \quad (34.18)$$

Из этой системы можно получить уравнение, содержащее только скорость и комбинацию  $B_0$  и  $\tau_0$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v}_A \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_A) = 0. \quad (34.19)$$

Величина  $v_A = B_0 (4\pi\tau_0)^{-1/2}$ , имеющая размерность скорости, называется *альвеновской скоростью*. Найдем волновое решение уравнения (34.19):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a \exp (ik \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad (34.20)$$

где  $\mathbf{v}_a$  — амплитуда колебаний скорости.

После подстановки (34.20) в (34.19) получаем

$$-\omega^2 \mathbf{v} + (s^2 + v_A^2) \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) [\mathbf{v} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A) - \mathbf{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A) - v_A (\mathbf{k} \times \mathbf{v})] = 0. \quad (34.21)$$

Если волна распространяется перпендикулярно магнитному полю и  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_A = 0$ , то уравнение (34.21) упрощается и принимает вид

$$v\omega^2 = (s^2 + v_A^2) \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

следовательно, направления векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{k}$  должны совпадать. Поэтому скорость  $\mathbf{v}$  выпадает и уравнение принимает вид дисперсионного уравнения для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю:

$$\omega^2 = (s^2 + v_A^2) k^2. \quad (34.22)$$

Как видно из дисперсионного уравнения, полученное решение описывает модифицированные за счет присутствия магнитного поля продольные звуковые волны в том смысле, что при  $H_0 \rightarrow 0$  они переходят в обычные звуковые волны.

Если волна распространяется вдоль магнитного поля и  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_A$ , то уравнение (34.21) принимает вид

$$(k^2 v_A^2 - \omega^2) \mathbf{v} + (s^2/v_A^2 - 1) k^2 \mathbf{v}_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A) = 0. \quad (34.23)$$

Здесь возможны два случая. Во-первых, возможно, что  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{v}_A$ . При этом уравнение (34.23) принимает вид

$$\omega = sk. \quad (34.24)$$

Это — обычная звуковая волна. Во-вторых, возможен случай, когда  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_A = 0$ . Тогда уравнение (34.23) превращается в простое соотношение

$$\omega = v_A k. \quad (34.25)$$

Эта волна тоже, как и звуковая, имеет линейную дисперсию. Но она является совершенно новой волной, поскольку в пределе при  $B_0 \rightarrow 0$  фазовая скорость  $v_{ph} = v_A$ , а с нею и частота  $\omega$  этой волны обращается в нуль. Такая волна с фазовой скоростью

$$v_{ph} = v_A = B_0 / \sqrt{4\pi\tau_0} \quad (34.26)$$

называется *альвеновской*. Альвеновская волна является примером того, что магнитное поле приводит к появлению новых колебательных мод.

Следует, наконец, заметить, что действие магнитного поля не сводится только к появлению альвеновской волны. Число колебательных мод в среде в магнитном поле огромно, и не все они в достаточной степени изучены.

### § 35. ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ГИРОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Если среда прозрачна, то это означает, что тензор диэлектрической проницаемости среды эрмитов:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}^* \quad (35.1)$$

Эрмитов тензор может иметь не только действительную, но и мнимую часть, причем из (35.1) следует, что

$$\epsilon'_{\alpha\beta} = \epsilon'_{\beta\alpha}, \quad \epsilon''_{\alpha\beta} = -\epsilon''_{\beta\alpha}. \quad (35.2)$$

Таковыми же свойствами обладает и обратный тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1} = (\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})' + i(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})''$ . Таким образом, как у тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , так и у тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$  имеется антисимметричная часть. Антисимметричный тензор второго ранга имеет только три независимых компоненты и, как объяснено в Дополнении I, эквивалентен аксиальному вектору. Вектор, эквивалентный тензору  $\epsilon_{\alpha\beta}''$ , обозначим символом  $g$ , а тензору  $(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})''$  — символом  $G$ . Вектор  $G$  и тензор  $(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})''$  связаны между собой совершенно антисимметричным единичным тензором третьего ранга  $e_{\alpha\beta\gamma}$ , обладающим тем свойством, что все его компоненты равны 1 или -1, если  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ , и равны нулю при совпадении хотя бы двух тензорных индексов:

$$(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})'' = e_{\alpha\beta\gamma} G_{\gamma}. \quad (35.3)$$

Поэтому связь между напряженностью электрического поля и вектором электрической индукции  $D$  может быть записана в виде

$$E_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_{\beta} = (\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})' D_{\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma} G_{\gamma} D_{\beta}. \quad (35.4)$$

В Дополнении I показано, что с помощью тензора  $e_{\alpha\beta\gamma}$  векторное произведение двух векторов можно представить в виде

$$e_{\alpha\beta\gamma} G_{\gamma} D_{\beta} = -e_{\gamma\beta\alpha} G_{\gamma} D_{\beta} = (D \times G)_{\alpha}. \quad (35.5)$$

Объединяя (35.4) и (35.5), получим

$$E_{\alpha} = (\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})' D_{\beta} + i(D \times G)_{\alpha}. \quad (35.6)$$

Совершенно аналогичным образом можно получить:

$$D_{\alpha} = \epsilon'_{\alpha\beta} E_{\beta} + i(E \times g)_{\alpha}. \quad (35.7)$$

Среды, в которых связь между  $D$  и  $E$  имеет вид (35.6) или (35.7), называются *гиротропными*. Связанный с антисимметричной частью тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  вектор  $g$  называется *вектором гирации*. Вектор  $G$  может быть выражен через вектор  $g$ . Поскольку вектор  $g$  определяется свойствами среды, то это означает, что гиротропная среда одновременно является и анизотропной.

Гиротропная среда оказывает существенное воздействие на характер поляризации распространяющихся в ней электромагнитных волн. Поляризация волн в анизотропной среде определяется уравнением (29.8), которому можно придать вид

$$\left( \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right) D_{\beta} = \left[ \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - (\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})' - i(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})'' \right] D_{\beta} = 0. \quad (35.8)$$

Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  здесь пробегают два значения. Выбрав оси, соответствующие индексам  $\alpha$  и  $\beta$ , направленными вдоль главных осей двумерного тензора  $(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})'$  и обозначая главные значения этого тензора через  $1/n_{01}^2$  и  $1/n_{02}^2$ , мы

можем уравнению (35.8) придать вид

$$\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_1 + iG_3 D_2 = 0, \quad -iG_3 D_1 + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_2 = 0; \quad (35.9)$$

здесь ось 1 соответствует величине  $1/n_{01}^2$ , а ось 2 — величине  $1/n_{02}^2$ . Эта система уравнений совместна, если

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_3^2. \quad (35.10)$$

Решая это уравнение относительно  $n^2$ , получаем два решения (чему соответствуют два возможных значения знака перед прямой скобкой)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2} \right) \pm \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right)^2 + G_3^2 \right]^{1/2}. \quad (35.11)$$

Подставляя эти два корня уравнения (35.10) в уравнение (35.9), найдем, что этим корням соответствует отношение

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{i}{G_3} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right) \mp \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2} \right)^2 + G_3^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (35.12)$$

Отношение  $D_2/D_1$  — величина мнимая. Это означает, что обе волны поляризованы эллиптически и главные оси эллипсов совпадают с главными осями двумерного тензора  $(\epsilon_{\alpha\beta}^{-1})'$ , причем отношение осей двух эллипсов одинаково, но соответствующие оси повернуты на  $\pi/2$ . Направления вращения вектора  $D$  у этих двух волн противоположны.

Наиболее ярким примером гиротропной среды является прозрачная изотропная среда, помещенная в постоянное однородное магнитное поле. В этом случае связь между  $D$  и  $E$  имеет вид

$$E = \epsilon^{-1} D + iD \times G, \quad (35.13)$$

причем аксиальный вектор  $G$  может быть, естественно, направлен только вдоль вектора напряженности  $H$  внешнего магнитного поля. В слабых полях векторы  $g$  и  $H$  связаны линейной связью:

$$g = fH, \quad (35.14)$$

здесь  $f$  — скалярный коэффициент пропорциональности. В изотропной среде  $n_{01} = n_{02} = \sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды без внешнего магнитного поля. Уравнения (35.10), (35.11) принимают теперь вид

$$1/n^2 = 1/\epsilon \mp G_3, \quad n_{\pm}^2 = \epsilon \mp g_z. \quad (35.15)$$

Подставляя эти решения в уравнения (35.9), получаем, что

$$D_1 = \mp iD_2. \quad (35.16)$$

Абсолютные значения векторов  $D_1$  и  $D_2$  равны, но эти векторы сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\mp \pi/2$ . Это означает, что одна волна имеет правую круговую поляризацию, а другая — левую. Показатели преломления этих двух волн различные, поэтому они будут иметь и разные волновые векторы:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n_{\pm}.$$

Следовательно, если на поверхность среды падает в направлении магнитного поля плоско-поляризованная волна, то на выходе из среды направление поляризации волны не будет совпадать с направлением поляризации волны на входе. Легко видеть, что на выходе

$$\frac{D_2}{D_1} = \operatorname{tg} \left( l \frac{\omega g}{2c \sqrt{\epsilon}} \right), \quad (35.17)$$

где  $l$  — длина пути, пройденного волной в среде. Величина  $D_2/D_1$  — вещественная; это соответствует тому, что линейная поляризация волны сохранилась, но плоскость поляризации по сравнению с плоскостью поляризации на входе оказывается повернутой на угол

$$\chi = \frac{\omega g}{2c \sqrt{\epsilon}} l.$$

Величина  $\omega g/2c\sqrt{\epsilon}$  называется *постоянной Верде*, а сам эффект вращения плоскости поляризации — *эффектом Фарадея*. Постоянная Верде зависит от частоты. Если атомы среды рассматривать как гармонические осцилляторы, собственная частота которых равна  $\omega_0$ , то частотная зависимость постоянной Верде будет иметь вид

$$\omega^2/(\omega^2 - \omega_0^2)^2.$$

Магнитное поле, если оно достаточно сильное, может сделать прозрачной и непрозрачную среду. В качестве примера рассмотрим металлы. В § 28, ч. II было показано, что металлы непрозрачны для электромагнитного излучения, частота которого меньше  $\omega_p$ . Наложение на металл магнитного поля может существенно изменить положение. Считая электроны в металле свободными, уравнение движения для электронов можно записать в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0; \quad (35.18)$$

здесь  $\mathbf{E}$  — электрическое поле электромагнитной волны,  $\mathbf{H}_0$  — постоянное и однородное магнитное поле<sup>\*)</sup>. Будем считать, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  поля параллелен вектору  $\mathbf{H}_0$ . Проектируя тогда уравнение движения на оси координат, перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}$ , получим два скалярных уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = eE_1 + \frac{e}{c} \dot{x}_2 H_0 \quad \text{и} \quad m\ddot{x}_2 = eE_2 - \frac{e}{c} \dot{x}_1 H_0. \quad (35.19)$$

Как и при описании эффекта Фарадея, оси, перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}$ , обозначены индексами 1 и 2. Умножая второе из уравнений (35.19) на  $\pm i$  и складывая его с первым получим уже не систему, а два отдельных уравнения, каждое из которых определяет одну из двух величин  $x_{\pm} = x_1 \pm ix_2$ , причем неоднородности в этих уравнениях будут иметь вид  $eE_{\pm} = e(E_1 \pm iE_2)$ . Решая эти уравнения, находим плотность тока, создаваемого каждой из циркулярно-поляризованных волн  $E_{\pm}$ , и затем — соответствующую диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)}, \quad (35.20)$$

где  $\omega_c = eH_0/mc$  — циклотронная частота. Из (35.20) видно, что при  $\omega < \omega_p$  одной из циркулярно-поляризованных волн отвечает значение  $\epsilon_- < 0$ .

<sup>\*)</sup> Магнитными свойствами металла мы здесь пренебрегаем, так что  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0$ .

Соответствующий показатель преломления  $n_-$  является чисто мнимым и низкочастотная волна с такой поляризацией распространяться в металлах не может. Зато волна с другой циркулярной поляризацией может распространяться в металлах, даже если  $\omega < \omega_p$ , при условии, что  $\omega < \omega_c$ . При этом  $\epsilon_+ > 1$  и показатель преломления — величина действительная.

При этих рассуждениях мы не принимали во внимание пространственную дисперсию и процесс столкновения электронов. Столкновения электронов и бесстолкновительное затухание колебаний типа затухания Ландау (имеющее место при выполнении условия  $\omega = k \cdot v$ ) могли бы привести к быстрому затуханию низкочастотной волны в металле. Однако если  $r_H \ll l$  (где  $r_H = v\omega_c^{-1}$  и  $l$  — длина свободного пробега электронов),  $\omega_c - \omega \gg v$  и  $kr_H \ll 1$ , то такая низкочастотная волна оказывается слабозатухающей. Это связано с тем, что при этих условиях столкновения малосущественны, а бесстолкновительное затухание будет сильно подавлено, так как магнитное поле, искривляя траекторию электронов, будет препятствовать продолжительному нахождению электронов металла в фазе с волной. Незатухающие низкочастотные колебания, обусловленные существованием магнитного поля в среде, носят название *геликоидальных* (или спиральных) электромагнитных волн.

### § 36. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЖЕСТКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КРИСТАЛЛАХ

**36.1. Фундаментальные уравнения теории дифракции рентгеновских лучей в кристаллах.** При частотах выше тех, которые соответствуют ультрафиолетовому излучению, длина волны излучения становится сравнимой или может быть меньше расстояния  $a$  между атомами в среде, даже в таких плотных средах, как твердое тело. При этом возникают новые физические явления, важнейшее среди которых — дифракция жесткого излучения в кристаллах.

При исследовании распространения жесткого излучения в кристаллах следует уточнить определение микроскопических величин и, в первую очередь, — определение диэлектрической проницаемости. В случае когда  $\lambda/a \leq 1$ , теряет смысл усреднение уравнений Максвелла по физически малому объему, т.е. по объему, который содержит еще много атомов, но характерные размеры которого уже много меньше длины волны  $\lambda$ . Поэтому при описании взаимодействия жесткого излучения с веществом усреднение микроскопических уравнений Максвелла по физически малому объему не проводится, но проводится их усреднение по ансамблю.

Такое усреднение фактически выполнялось и раньше. Мы его проводили, например, когда при вычислении диэлектрической проницаемости заменяли точное микроскопическое значение плотности тока  $j$  в уравнениях Максвелла на его среднее статистическое значение, причем соответствующую функцию распределения находили из решения кинетического уравнения. Такое статистическое усреднение возможно и при  $\lambda/a \leq 1$ , но переход от (3.1) к (4.1) при этом невозможен, так как ядро интегральной связи между  $D$  и  $E$  теперь будет зависеть не от разности координат  $r$  и  $r'$ , а от каждой из них в отдельности. Это связано с тем, что атомы в кристалле занимают определенные положения в пространстве, и необходимо учитывать пространственную неоднородность среды на расстояниях  $a \geq \lambda$ . Зависимость же ядра от  $t$  и  $t'$  по-прежнему будет разностной. Таким образом, связь между  $D$  и  $E$  при высоких частотах имеет вид

$$D_\alpha(r, \omega) = \int dV' \epsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) E_\beta(r', \omega). \quad (36.1)$$

Проводя преобразование Фурье от переменной  $r$  к переменной  $k$ , будем иметь

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(k, \omega) &= \int dV \int dV' \exp(-ik \cdot r) \epsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) E_{\beta}(r', \omega) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \epsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega) E_{\beta}(-k', \omega). \end{aligned} \quad (36.2)$$

Таким образом, при высоких частотах связь между фурье-образами вектора электрической индукции и вектора напряженности электрического поля стала интегральной в пространстве волновых векторов. В случае периодических структур, к которым, в первую очередь, относятся кристаллы, формула (36.2) может быть детализирована.

Основное свойство кристалла, которое необходимо учесть при определении диэлектрической проницаемости, заключается в том, что ядро интегрального оператора в (36.1) обладает трансляционной симметрией:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(r+a, r'+a, \omega). \quad (36.3)$$

Здесь  $a$  — постоянная кристаллической решетки или кратная ей величина. Чтобы математически учесть это обстоятельство, вместо  $r$  и  $r'$  в (36.3) введем две новые переменные:  $r_1$  и  $r_2$ . Определим их так, чтобы  $r_1 = r - r'$  и  $r_2 = r'$ . Выражая старые координаты через новые, получим:  $r = r_1 + r_2$  и  $r' = r_2$ . Трансляционная инвариантность (36.3) не затрагивает переменной  $r_1$ , по отношению же к переменной  $r_2$  ядро  $\epsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega)$  является периодической функцией с периодом  $a$ . Имея это в виду, ядро  $\epsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega)$  можно разложить в ряд Фурье по векторам обратной решетки<sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega) &= \epsilon_{\alpha\beta}(r_1, r_2, \omega) = \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(r_1, g, \omega) \exp(-ig \cdot r_2) = \\ &= \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(r - r', g, \omega) \exp(-ig \cdot r'). \end{aligned} \quad (36.4)$$

Суммирование здесь производится по всем векторам  $g$  обратной решетки. Из (36.4) следует, что

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega) &= \\ &= \int dV' dV \exp[-i(k \cdot r + k' \cdot r')] \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(r - r', g, \omega) \exp(-ig \cdot r') = \\ &= (2\pi)^3 \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) \delta(k + k' + g), \end{aligned} \quad (36.5)$$

\*) Система векторов  $g$  обратной решетки определяется соотношением  $\exp(ig \cdot a) = 1$ . Здесь  $a$  — система векторов, с помощью которых может быть построена вся кристаллическая решетка и которые кратны трем основным векторам:  $a_1, a_2, a_3$ . Из определения системы векторов  $g$  следует, что трем основным векторам  $a_1, a_2, a_3$  кристаллической решетки будут соответствовать три основных вектора  $g_1, g_2, g_3$ , с помощью которых может быть построена вся обратная решетка и которые могут быть определены следующим образом:

$$g_1 = 2\pi \frac{a_2 \times a_3}{V_c}, \quad g_2 = 2\pi \frac{a_3 \times a_1}{V_c}, \quad g_3 = 2\pi \frac{a_1 \times a_2}{V_c},$$

где  $V_c = a_1(a_2 \times a_3)$  — объем элементарной ячейки кристаллической решетки. В случае простой кубической решетки обратная решетка тоже является простой кубической решеткой с постоянной, равной  $2\pi/a$ . Если, например, кристаллическая решетка является объемно-центрированной кубической, с постоянной  $a$ , то обратная решетка есть гранцентрированная кубическая, с постоянной  $4\pi/a$ , и наоборот.

где фигурирующая в (36.5) величина

$$\epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) = \int dV_1 \epsilon_{\alpha\beta}(r_1, g, \omega) \exp(-ik \cdot r_1). \quad (36.6)$$

Если в (36.5) отбросить все слагаемые с  $g \neq 0$ , то

$$\epsilon_{\alpha\beta}(k, k', \omega) = (2\pi)^3 \epsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega) \delta(k + k').$$

Подставляя это в (36.2), получаем, что

$$D_{\alpha}(k, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega) E_{\beta}(k, \omega).$$

Этот естественный результат соответствует тому, что пренебрежению всеми  $g$ , кроме нулевого, отвечает переход к полностью пространственно-однородной среде. В случае же кристалла

$$\begin{aligned} D_{\alpha}(k, \omega) &= \int d^3k \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) \delta(k + k' + g) E_{\beta}(-k', \omega) = \\ &= \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_{\beta}(k + g, \omega). \end{aligned} \quad (36.7)$$

Эта формула является частным случаем формулы (36.2); она справедлива в правильной дискретно-неоднородной среде. Связь между  $D$  и  $E$  в пространстве волновых векторов нелокальна, эта нелокальность имеет специфический характер и отражает факт пространственной периодичности кристалла.

Подставляя (36.7) в (28.4), получим уравнение

$$k^2 E_{\alpha} - k_{\alpha} k_{\beta} E_{\beta} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \sum_g \epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_{\beta}(k + g, \omega), \quad (36.8)$$

из которого могут быть найдены связь между  $\omega$  и  $k$  излучения в кристалле, соотношения между компонентами  $E$  с разными аргументами и, таким образом, дифракционное электромагнитное поле. Уравнение (36.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 k^2 \delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 k_{\alpha} k_{\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega) \right] E_{\beta}(k, \omega) - \\ &- \sum_{g \neq 0} \epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega) E_{\beta}(k + g, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (36.9)$$

Выражение (36.9) является системой уравнений для амплитуд жесткого электромагнитного излучения в кристалле: эти уравнения — фундаментальные уравнения теории дифракции электромагнитного поля в кристалле. Из (36.8) следует, что кроме поля с волновым вектором  $k$ , которое соответствует падающему излучению, в кристалле появляются волны и с волновыми векторами, отличающимися от  $k$  на полное число векторов обратной решетки. Интенсивность этих волн зависит не только от интенсивности, но и от направления вектора  $k$  падающей волны. Это легко видеть, если волновой вектор  $k'$  одной из таких волн представить в виде

$$k' = k + g. \quad (36.10)$$

Формула (36.10) носит название *уравнения Лауэ*. Возводя обе части этого уравнения в квадрат и имея в виду, что в заметной степени интерферируют волны только одной длины, так что  $k^2 = k'^2$ , получаем

$$k \cdot g = -\frac{1}{2} g^2. \quad (36.11)$$

Отсюда следует, что при заданном векторе  $g$  вектор  $k$  должен иметь определенное значение. В тех случаях, когда вектор  $k$  не удовлетворяет

условию (36.11), волны с волновыми векторами  $k + g$  имеют пренебрежимо малую интенсивность. Отсюда же следует, что вполне возможна ситуация, когда при данном  $k$  в кристалле возникает только небольшое число волн с волновыми векторами  $k + g$ , например две или три. Последние волны принято называть *сильными волнами* или *рефлексами*.

Если рефлексам отвечают векторы  $g$ , параллельные границе раздела кристалл — вакуум, на которую падает излучение, то говорят о *дифракции Лауэ*. Другой предельный случай соответствует векторам  $g$ , перпендикулярным границе раздела. Это — случай *дифракции Брэгга*.

Уравнение Лауэ часто записывается в несколько иной форме. Обозначая угол между векторами  $k$  и  $k'$  буквой  $\theta$ , из (36.10) получаем

$$g = 2k \sin(\theta/2). \quad (36.12)$$

Такая форма записи уравнения Лауэ носит название *уравнения Брэгга-Вульфа*.

**36.2. Кинематическое и динамическое приближения в теории дифракции рентгеновских лучей.** Рассмотрим для простоты дифракцию рентгеновских лучей в кубической решетке. В такой решетке тензоры второго ранга сводятся к скалярам, так что в уравнении (36.9)  $\epsilon_{\alpha\beta}(k, 0, \omega)$  и  $\epsilon_{\alpha\beta}(k, g, \omega)$  можно опустить тензорные значки. Если еще ограничиться одним сильным рефлексом, то система фундаментальных уравнений примет вид

$$\hat{\xi}(k)E(k) - \epsilon(k, g)E(k + g) = 0, \quad \hat{\xi}(k + g)E(k + g) - \epsilon(k, -g)E(k) = 0. \quad (36.13)$$

Здесь

$$\hat{\xi} = \left[ \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 k^2 \delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 k_{\alpha} k_{\beta} - \epsilon(k, 0, \omega) \right]. \quad (36.14)$$

Приближение, в котором фигурирует падающая волна и один рефлекс, принято называть *двухволновым*. В этом приближении имеется только один существенный для задачи вектор обратной решетки. Если полностью пренебречь явлением дифракции, то (36.13) примет вид

$$\hat{\xi}(k)E(k) = 0.$$

Дифракционные рефлексы могут быть сильными (это означает, что интенсивность каждого рефлекса сравнима с интенсивностью падающей волны) и слабыми. В последнем случае система уравнений (36.13) может быть решена следующим образом. Из уравнений (36.13) исключаем поле  $E(k + g)$ . Получившееся уравнение для  $E(k)$  будет иметь вид

$$\hat{\xi}(k)E(k) - \xi^{-1}(k + g)\epsilon(k, -g, \omega)\epsilon(k, g, \omega)E(k) = 0. \quad (36.15)$$

Слабость рефлекса означает малость второго слагаемого в этом уравнении. Примем, что  $E(k) = E^{(0)}(k) + E^{(1)}(k)$ , где  $E^{(1)}(k)$  — поправка первого порядка, обусловленная существованием дифракции.  $E^{(0)}(k)$  удовлетворяет уравнению  $\hat{\xi}(k)E^{(0)}(k) = 0$ . Следовательно,

$$E^{(1)}(k) = \xi^{-1}(k + g)\epsilon(k, -g, \omega)\epsilon(k, g, \omega)E^{(0)}(k).$$

Используя теперь первое из уравнений (36.13), получаем, что

$$\begin{aligned} E(k + g) &= \frac{1}{\epsilon(k, g, \omega)} \hat{\xi}(k)E^{(1)}(k) = \\ &= \frac{1}{\epsilon(k, g, \omega)} \hat{\xi}(k)\xi^{-1}(k + g)\epsilon(k, -g, \omega)\epsilon(k, g, \omega)E^{(0)}(k). \end{aligned} \quad (36.16)$$

Эта формула выражает амплитуду поля, обуславливающего рефлекс, через амплитуду падающего поля. Такое приближение, в котором амплитуда  $E(k+g)$  считается малой по сравнению с  $E(k)$ , называется *кинематическим приближением*.

Если рефлекс является сильным, то интенсивности волн с волновыми векторами  $k$  и  $k+g$  могут быть сравнимы по порядку величины, а амплитуда  $E(k)$  уже не обязательно по величине близка к амплитуде падающего поля. Система уравнений (36.13) совместна, если обращается в нуль детерминант, составленный из коэффициентов перед неизвестными величинами  $E(k)$  и  $E(k+g)$ . Полученное таким образом уравнение есть дисперсионное уравнение, связывающее  $\omega$  с  $k$ . Основное слагаемое в  $\xi$  квадратично по  $k$ , поэтому дисперсионное уравнение квадратично по отношению  $k^2$ . Следовательно, одной частоте соответствуют два разных значения  $k^2$ , так что решение (36.13) можно представить в виде

$$E = A_1 \{E(k_1) \exp[i(k_1 r - \omega t)] + E(k_1 + g) \exp[i(k_1 + g)r - \omega t]\} + \\ + A_2 \{E(k_2) \exp[i(k_2 r - \omega t)] + E(k_2 + g) \exp[i(k_2 + g)r - \omega t]\}. \quad (36.17)$$

Амплитуды  $E(k_1)$ ,  $E(k_1 + g)$ ,  $E(k_2)$ ,  $E(k_2 + g)$  получаются после подстановки в (36.13) корней дисперсионного уравнения, которые были обозначены символами  $k_1$  и  $k_2$ . Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  находятся из условия сшивания на поверхности кристалла решения (36.17) с падающей из вакуума волной. Таким образом, падающая из вакуума на кристалл волна в среде возбуждает (в двухволновом приближении) четыре плоские волны с различными волновыми векторами. Теория, в которой система (36.13) решается без предположения о малости амплитуд рефлексных волн, называется *динамической теорией дифракции*.

Величины  $\epsilon$  в уравнениях (36.13) являются, вообще говоря, комплексными величинами. Это означает, что  $k_1$  и  $k_2$  — также комплексные. Мнимая часть у  $k_1$  или  $k_2$  описывает затухание рентгеновского излучения в кристалле, причем  $\text{Im } k_1 \neq \text{Im } k_2$ , поэтому разные волны в (36.17) затухают по-разному.

Аномально малое затухание некоторых волн носит название *эффекта Бормана*. Основной вклад в  $\epsilon$  в рентгеновской области частот вносит поляризация электронов, а в случае  $\gamma$ -излучения заметным становится поляризация ядер вблизи мёссбауэровских переходов.

**36.3. Сечение дифракционного рассеяния рентгеновских лучей на кристаллах конечного объема.** Кинематическая теория дифракции применяется в первую очередь при описании рассеяния рентгеновских волн на кристаллах сравнительно небольшого объема. Что именно нужно понимать под сравнительно небольшим объемом, мы уточним в конце этого раздела. При дифракционном рассеянии рентгеновских лучей на небольших кристаллах основной интерес представляет нахождение поля не внутри кристалла, как в случае динамической дифракции в толстых кристаллах, а поля в пустоте, вне кристалла, причем на большом расстоянии от него. В этом случае постановка дифракционной задачи напоминает обычную задачу о рассеянии электромагнитных волн на малых объектах, когда рассеяние удобно описывать с помощью понятия эффективного сечения рассеяния.

Поле вне кристалла можно найти, сшивая полученное в п. 36.2 выражение для вектора  $E$  внутри кристалла с соответствующими решениями в вакууме, на входе волны в кристалл и на выходе ее из кристалла. Практически, однако, удобнее написать уравнение для поля, содержащее вектор  $D$ , так чтобы одно и то же уравнение описывало поле как в кристалле, так и в вакууме.

Из первых двух уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} E = i \frac{\omega}{c} B \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j - i \frac{\omega}{c} E$$

получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 E - \frac{4\pi e^2 n(r)}{mc^2} E,$$

где  $n(r)$  — локальная плотность электронов в кристалле (ядра можно не учитывать вследствие их большой массы). Введем обозначение

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{4\pi n(r)e^2}{m\omega^2}.$$

Тогда уравнение для поля примет вид

$$-\Delta E + \operatorname{grad} \operatorname{div} E = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 D, \quad (36.18)$$

где  $D(r, \omega) = \epsilon(r, \omega) E(r, \omega)$ . Таким образом,  $E = D + \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} E$ . Подставим последнее соотношение в левую часть формулы (36.18), после чего она примет вид

$$-\Delta D + \operatorname{grad} \operatorname{div} D + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} E = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 D.$$

Слагаемые, содержащие  $D$ , сгруппируем в левой части уравнения и учтем, что  $\operatorname{div} D = 0$ . После этого будем иметь

$$\Delta D + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 D = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [n(r)E]. \quad (36.19)$$

На частотах, характерных для рентгеновского излучения, значение  $\epsilon(r)$  уже настолько близко к единице, что величину  $4\pi ne^2/m\omega^2$  можно считать малым параметром. Поэтому в правой части (36.19) вместо точного значения вектора  $E$  можно оставить напряженность поля только падающей волны. Это можно сделать вследствие кинематического характера дифракции, при которой вклад в  $E$ , обусловленный дифракцией, много меньше поля падающей волны. В соответствии с этим правую часть уравнения (36.18) можно считать известной величиной.

Решая уравнение (36.19) с такой правой частью, можно найти поле  $E$  волны, рассеянной в результате дифракции вне кристалла и на большом расстоянии от него. Такого рода волновые уравнения с заданной правой частью уже рассматривались в первой части книги, где было показано, что решение уравнения типа (36.19) можно записать в виде

$$D(r) = - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \int G_k^R(r, r') \operatorname{rot}' \operatorname{rot}' [n(r')E(r')] d^3 r',$$

причем функция Грина волнового уравнения (см. (32.20), ч. I)

$$G_k^R(r, r') = \frac{1}{4\pi|r-r'|} \exp(ik'|r-r'|).$$

Здесь  $k' = \omega/c$ . Следовательно, в вакууме на большом расстоянии от кристалла напряженность электрического поля волны, рассеянной в результате

дифракции, равна

$$E(r) = \frac{e^2 \exp(ik'r)}{m\omega^2 r} [k' \times [k' \times E_0]] \int d^3 r' n(r') \exp(i(k - k')r'). \quad (36.20)$$

Здесь начало координат выбрано внутри кристалла;  $E_0$  — амплитуда падающего поля,  $k'$  — волновой вектор рассеянной в результате дифракционного процесса волны. Модуль этого вектора  $k' = k$ , т.е. предполагается, что дифракция не сопровождается изменением частоты рассеянного излучения. Показатель экспоненты в функции Грина при переходе к (36.20) разлагается в ряд по степеням малой величины  $r'/r$  так, как это делалось в ч. I при описании дипольного, квадрупольного и магнетодипольного излучения.

Модуль вектора Пойнтинга рассеянной волны

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{e^2}{m\omega^2} \right)^2 \frac{E_0^2}{r^2} \sin^2 \theta \left| \int d^3 r' n(r') \exp[i(k - k') \cdot r'] \right|^2,$$

поэтому дифференциальное эффективное сечение рассеяния в элемент телесного угла  $d\Omega'$  равно

$$d\sigma = \frac{\gamma r^2 d\Omega'}{(c/4\pi) |E_0|^2} = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \left| \int d^3 r' n(r') \exp[i(k - k')r'] \right|^2 d\Omega'. \quad (36.21)$$

Здесь  $\theta$  — угол между векторами  $E_0$  и  $k'$ . Величина  $e^2/mc^2$  есть классический радиус электрона. Очевидно определенное сходство этой формулы с формулой Томсона (см. § 40, ч. I) для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн на свободном точечном заряде. При выводе (36.21) падающее рентгеновское излучение считалось линейно-поляризованным. В случае рассеяния неполяризованного излучения следует, как и при томсоновском рассеянии, множитель  $\sin^2 \theta$  в (36.21) заменить на  $\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta)$ , где  $\vartheta = \widehat{k, k'}$ .

В случае правильного кристалла электронную плотность  $n(r)$  можно разложить в ряд по векторам обратной решетки, аналогично тому, как мы это делали в п. 36.1 с величиной  $\epsilon_{\alpha\beta}(r, r', \omega)$ . Подставляя разложение

$$n(r) = \sum_g n(g) \exp(ig \cdot r)$$

в (36.21), получаем

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left| \sum_g n(g) \int \exp[-i(k - k' + g) \cdot r'] d^3 r' \right|^2 d\Omega'. \quad (36.22)$$

Падающее излучение здесь и далее считается неполяризованным. Из (36.22) сразу видно, что в тех случаях, когда  $k - k' + g = 0$ , т.е. когда выполняется условие (36.10), в сечении появляются резонансы. Это и есть дифракционные рефлексы. Если бы кристалл был бесконечным, то и  $d\sigma$  обращалось бы в бесконечность. При всех остальных значениях  $k$  и  $k'$  сечение рассеяния очень близко к нулю. Таким образом, дифрагирующее на правильном кристалле излучение образует систему рефлексов, причем по мере удаления от каждого рефлекса интенсивность рассеянного излучения очень быстро падает, а интерференция излучения, связанная с различными рефлексами, ничтожна. Поэтому элемент телесного угла всегда можно выбрать так, что внутри него окажется только один рефлекс или даже часть его. Имея

это в виду, формулу (36.22) будем записывать в виде

$$d\sigma_g = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n(g)|^2 \int \exp[i(k - k' + g) \cdot r'] d^3 r' |^2 d\Omega'_g \quad (36.23)$$

для каждого отдельного рефлекса, связанного с данным вектором  $g$  обратной решетки.

В случае бесконечного кристалла интеграл по объему в (36.23) сводится к  $\delta$ -функции вида  $(2\pi)^3 \delta(k - k' + g)$ . Это означает, что электромагнитное поле, создающее рефлексы, сконцентрировано в чрезвычайно узких телесных углах и имеет в этих областях пространства очень высокую напряженность, которая больше напряженности падающего поля. Следовательно, в рамках кинематического подхода можно рассматривать дифракцию на кристаллах только конечного объема. В этом случае

$$\int \exp[i(k - k' + g) \cdot r] d^3 r \approx V \delta_{k - k', g}, \quad (36.24)$$

и (36.23) принимает вид

$$d\sigma_g \approx \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n(g)|^2 V^2 d\Omega'_g. \quad (36.25)$$

Сечение рассеяния, относящееся к центру рефлекса, или, как говорят, в точном отражающем положении, оказалось, таким образом, пропорциональным квадрату объема  $V$  кристалла. Пропорциональность эта является признаком когерентности процесса рассеяния волны на всех атомах, из которых состоит кристалл, при котором происходит сложение амплитуд, а не сечений рассеяния на отдельных атомах.

При отклонении от точного отражающего положения интенсивность рассеяния падает, а зависимость сечения от объема кристалла оказывается промежуточной между  $V^2$  и  $V$ . При фиксированном направлении вектора  $k$  падающей волны вектор  $k'$  рассеянной волны, соответствующий точному отражающему положению, обозначим символом  $k'_s$ . Согласно уравнению Лауэ,  $k'_s = k + g$ . Отклонение вектора  $k'$  от точного отражающего положения обозначим через  $\Delta k' = k' - k'_s$ . Напишем выражение для элемента телесного угла  $d\Omega' = \sin \chi' d\chi' d\alpha'$ , в котором полярный угол  $\chi'$  отсчитывается от направления  $k'_s$  точного отражающего положения. Поскольку модуль вектора  $k'$  не зависит от его направления, имеет место формула

$$\Delta k' / 2k' = \sin \chi' / 2 = \sqrt{(1 - \cos \chi') / 2}. \quad (36.26)$$

Дифференцирование этой формулы дает

$$\Delta k' d(\Delta k') / k'^2 = \sin \chi' d\chi'.$$

Следовательно,

$$d\Omega' = \sin \chi' d\chi' d\alpha' = \frac{d\alpha'}{k^2} \Delta k' d(\Delta k') = \frac{1}{k^2} d(\Delta k'_x) d(\Delta k'_y). \quad (36.27)$$

Оси  $x'$  и  $y'$  лежат в плоскости, перпендикулярной направлению  $k'_s$ . Используя эти обозначения, (36.23) записываем в виде

$$d\sigma_{g, \Delta k'} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n(g)|^2 \int d^3 r' \exp(-i \Delta k' \cdot r') |^2 \times \\ \times \frac{1}{k^2} d(\Delta k'_x) d(\Delta k'_y). \quad (36.28)$$

Интеграл по объему в (36.28)

$$\int d^3r' \exp(-i\Delta\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') = \int dz' dx' dy' \exp[-i(\Delta k'_x x' + \Delta k'_y y')],$$

так как  $\Delta k'_z \ll \Delta k'_x, \Delta k'_y$ . Следовательно, этот интеграл упрощается:

$$\int d^3r' \exp(-i\Delta\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') = \int dx' dy' L_z(x', y') \exp[-i(\Delta k'_x x' + \Delta k'_y y')]. \quad (36.29)$$

Величина  $L_z(x', y')$  есть линейный вектор кристалла вдоль  $z$ , направленный по  $\mathbf{k}'_s$ . Формула (36.28) с учетом (36.29) дает изменение сечения дифракционного рассеяния в окрестности точного отражающего положения.

Формулу (36.28) можно проинтегрировать по всей окрестности направления  $\mathbf{k}'_s$ . Для этого следует использовать соотношение типа того, которое было получено в ч. I при нахождении спектральной плотности дипольного излучения и которое в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{d(\Delta k_x) d(\Delta k_y)}{(2\pi)^2} \left| \int dx' dy' L_z(x', y') \exp[-i(\Delta k'_x x' + \Delta k'_y y')] \right|^2 = \\ & = \int dx' dy' L_z^2(x', y'). \end{aligned} \quad (36.30)$$

С учетом последнего соотношения получим

$$\int d\sigma_g = \frac{2\pi^2}{k^2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) |n(g)|^2 \int dx' dy' L_z^2(x', y'). \quad (36.31)$$

Значение интеграла в этой формуле порядка  $L^4$ , так что сечение (36.31) пропорционально  $V^{4/3}$ . Характер зависимости  $\int d\sigma_g$  от объема указывает на заметный вклад в это сечение процессов, которые можно считать когерентными только приближенно.

В заключение определим, какой кристалл можно считать достаточно малым, чтобы дифракцию на нем можно было описывать в рамках кинематической теории. Дифракция будет кинематической, если  $\int d\sigma_g \ll L^2$ , откуда получаем

$$\frac{1}{k} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) |n(g)| L^2 \ll 1.$$

**36.4. Температурные эффекты при дифракции рентгеновских лучей.** Тепловые колебания атомов решетки кристалла приводят к нарушению правильной периодичности локальной электронной плотности. Это, в свою очередь, приводит к двум основным эффектам.

Во-первых, с ростом температуры уменьшается интенсивность рассеяния жесткого электромагнитного излучения в точном отражающем положении, и в связи с этим имеет место резкое уменьшение интенсивности рефлексов, которым соответствуют очень большие значения  $g$ .

Во-вторых, появляется заметное рассеяние излучения в направлениях, далеких от рефлексов, что приводит к появлению диффузного рассеянного фона. Диффузное рассеяние связано с некогерентным (и, следовательно, линейным по  $V$ ) процессом, обусловленным взаимодействием падающего излучения с флуктуациями электронной плотности. В сечении диффузного рассеяния появляется множитель, пропорциональный температуре кристалла. Значительно более резкую температурную зависимость имеет сечение дифракции в области рефлексов.

Существование тепловых колебаний кристаллической решетки можно учесть, представляя локальную электронную плотность в виде

$$n(r) = \sum_l n_a(r - r_l), \quad (36.32)$$

где сумма берется по положениям всех атомов с координатами  $r_l$ . Если бы атомы не испытывали тепловых колебаний, то все  $r_l$  были бы фиксированы и были бы равны векторам  $l$ , описывающим положения атомов в правильной решетке. При наличии колебаний положения атомов описываются векторами  $r_l = l + u_l$ , где  $u_l$  — вектор отклонения положения  $l$ -го атома от равновесного. Поскольку функция  $n(r)$  теперь не обладает правильной периодичностью, ее следует разлагать не в ряд по векторам обратной решетки, а в интеграл Фурье. Фурье-образ функции  $n(r)$  есть

$$\begin{aligned} n(q) &= \frac{1}{V} \int n(r) \exp(-iq \cdot r) d^3r = \\ &= \frac{1}{V} \sum_l \int d^3r n_a(r - l - u_l) \exp(-iq \cdot r) = \\ &= \frac{1}{V} \sum_l \exp[-iq(l + u_l)] \int d^3r n_a(r - l - u_l) \exp[-iq(r - l - u_l)]. \end{aligned} \quad (36.33)$$

Величина

$$\int d^3r n_a(r - l - u_l) \exp[-iq(r - l - u_l)] = n_a(q) \quad (36.34)$$

является фурье-образом электронной плотности, обусловленной каждым отдельным атомом; в теории дифракции ее называют *атомным фактором*. От индекса  $l$  атомный фактор не зависит, так как интеграл в (36.34) берется по всему пространству. Таким образом,

$$n(q) = n_a(q) \sum_l \exp[-iq(l + u_l)]. \quad (36.35)$$

Атомный фактор  $n_a(q)$  в правой части (36.35) умножается на сумму по  $l$ , которая называется *структурным фактором*. Если все  $u_l = 0$ , то структурный фактор принимает вид

$$\sum_l \exp(-iq \cdot l) = N \delta_{q,g},$$

т.е.  $n(q) \neq 0$  только в том случае, когда вектор  $q$  равен одному из векторов  $g$  обратной решетки. Если учесть, что при наличии тепловых колебаний решетки  $q \neq g$ , то тем самым будет принят во внимание эффект распыливания рефлексов, если же в (36.35) положить  $q = g$ , то будет описан эффект уменьшения сечения дифракционного рассеяния в точном отражающем положении вследствие тепловых колебаний.

Тепловые колебания решетки опишем, представив вектор  $u_l$  в виде

$$u_l = \sum_p (U_p \exp(ip \cdot l) + U_p^* \exp(-ip \cdot l)). \quad (36.36)$$

Наличие двух слагаемых в этой формуле обеспечивает действительность векторов  $u_l$ . С учетом (36.36) структурный фактор принимает вид (при  $q = g$ )

$$\begin{aligned} \sum_l \exp \{ -ig[l + \sum_p (U_p \exp(ip \cdot l) + U_p^* \exp(-ip \cdot l))] \} = \\ = \sum_l \prod_p \exp \{ -ig[U_p \exp(ip \cdot l) + U_p^* \exp(-ip \cdot l)] \}. \end{aligned} \quad (36.37)$$

Экспоненты в последней формуле можно разложить в ряд по степеням малых величин  $U_p$ :

$$\begin{aligned} \exp \{ -ig[U_p \exp(ip \cdot l) + U_p^* \exp(-ip \cdot l)] \} &\approx \\ \approx 1 - ig[U_p \exp(ip \cdot l) + U_p^* \exp(-ip \cdot l)] - \frac{1}{2} |g \cdot U_p|^2 \dots \end{aligned} \quad (36.38)$$

Теперь структурный фактор следует усреднить по тепловым колебаниям решетки с соответствующей функцией распределения. Среднее от линейных по  $U$  слагаемых в (36.38) не дает вклада в упругую дифракцию, вклад же от  $|g \cdot U_p|^2$  — величина конечная, так что после суммирования ряда (36.38) и подстановки его в выражение для структурного фактора получаем множитель

$$\exp(-W) = \exp \left\{ -\sum_p \langle \frac{1}{2} |g \cdot U_p|^2 \rangle \right\}, \quad (36.39)$$

который называется *фактором Дебая — Валлера*. Скобки  $\langle \dots \rangle$  в этом выражении являются символом усреднения по колебаниям решетки.

Таким образом, в сечении рассеяния рентгеновских лучей в точном отражающем положении, полученном в п. 36.3 в случае правильного кристалла, величину  $|n(g)|$  при учете конечной температуры следует заменить на фактор

$$\frac{n_d(g)}{v_c} \exp(-W), \quad (36.40)$$

в котором  $v_c$  — объем элементарной ячейки. Величина  $W$  в (36.40) тем больше, чем больше вектор обратной решетки  $g$ , которому соответствует рассматриваемый рефлекс, так что наиболее интенсивными будут рефлексы, отвечающие малым  $g$ . Величина  $W$  зависит также и от температуры  $T$ . Проще всего эта зависимость выглядит в случае высоких температур, причем именно в этом случае особенно важно учитывать фактор Дебая — Валлера. При высоких температурах средняя энергия  $\bar{\epsilon}_p$  колебаний решетки, соответствующая величине  $U_p$ , имеет порядок величины  $T$ . Следовательно,

$$T \approx \sum_p NM \omega_p^2 |U_p|^2,$$

где  $M$  — масса атомов, из которых состоит решетка (предполагается, что в элементарной ячейке содержится только один атом). Из приведенной формулы следует, что

$$|U_p|^2 \approx \frac{T}{NM \omega_p^2},$$

так что

$$\langle |g \cdot U_p|^2 \rangle \approx \frac{g^2 T}{N^2 M^2 \omega_p^4} \approx \frac{g^2 T}{M \Theta_D^2}, \quad (36.41)$$

где  $\Theta_D$  — дебаевская температура (как и температура  $T$ , она измеряется в энергетических единицах). Следовательно, при высоких температурах существование фактора Дебая — Валлера приводит к температурной зависимости интенсивности дифракционного рефлекса, имеющей вид

$$\exp \left( -\frac{g^2 T}{M \Theta_D^2} \right), \quad (36.42)$$

которая описывает быстрое уменьшение интенсивности кинематической дифракции при  $T > \Theta_D (M \Theta_D / g^2)$ .

**В. В. Мултановский  
А. С. Василевский**

# **КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Классическая  
электродинамика**

*Допущено Государственным комитетом СССР  
по народному образованию  
в качестве учебного пособия  
для студентов физико-математических факультетов  
педагогических институтов*

**МОСКВА  
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990**

ББК 22.313  
М90

Рецензенты: кафедра теоретической физики Липецкого педагогического института;  
профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Владимирского педагогиче-  
ского института Д. И. Пеннер

**Мултановский В. В., Василевский А. С.**

**М90** Курс теоретической физики: Классическая электродинамика:  
Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов.— М.:  
Просвещение, 1990.— 272 с.: ил.— ISBN 5-09-000927-9

В книге в соответствии с программой курса теоретической физики разобраны понятия и законы макроскопической электродинамики. В основу положены уравнения Максвелла для непрерывной системы зарядов в вакууме. Курс дает возможность студентам работать самостоятельно по лекциям и практическим заданиям.

**М**  $\frac{430900000-335}{103(03)-90}$  21-89

**ББК 22.313**

**ISBN 5-09-000927-9**

© Мултановский В. В., Василевский А. С., 1990

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава I. Основные понятия и принципы электродинамики</b>	<b>8</b>
§ 1. Электрический заряд и электромагнитное поле . . . . .	8
1.1. Заряд. Плотность заряда и плотность тока (8). 1.2. Закон сохранения заряда (12). 1.3. Электромагнитное поле. Напряженность электрического поля. Индукция магнитного поля (14).	
§ 2. Система уравнений Максвелла — основа электродинамики	18
2.1. Уравнение Максвелла для системы зарядов в вакууме (18). 2.2. Интегральная форма уравнений Максвелла. Графическое изображение полей (21). 2.3. Связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнитных явлений (25). 2.4. Принцип суперпозиции полей (27). 2.5. Задачи электродинамики (29). 2.6. Уравнения Максвелла — Лоренца. Принцип причинности в электродинамике (32).	
§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля . . . . .	34
3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов (34). 3.2. Энергия электромагнитного поля. Плотность и поток энергии. Закон изменения энергии (36). 3.3. Закон сохранения энергии для изолированной системы поле-заряды (39). 3.4. Импульс электромагнитного поля. Закон сохранения импульса (40).	
§ 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля	43
4.1. Потенциалы электромагнитного поля (43). 4.2. Уравнения электромагнитного поля в потенциалах (45). 4.3. Понятие об общем решении уравнений поля в потенциалах (47).	
§ 5. Решения уравнений поля . . . . .	49
5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны (49). 5.2. Гармонические составляющие свободного поля (51). 5.3. Сферические волны (53). 5.4. Потенциалы поля стационарной системы движущихся зарядов (56). 5.5. Запаздывающие потенциалы (58). 5.6. Характерные особенности и итоги общей задачи о расчете полей (61).	

<b>Глава III. Электромагнитные волны и излучение электромагнитных волн</b> .....	99
§ 9. Плоские электромагнитные волны .....	99
9.1. Уравнение Максвелла и образование электромагнитных волн (99). 9.2. Векторы напряженности и индукции плоской электромагнитной волны (101). 9.3. Гармонические составляющие свободного поля (104). 9.4. Поляризация электромагнитных волн (107).	
§ 10. Излучение электромагнитных волн .....	108
10.1. Потенциалы электромагнитного поля вдали от системы зарядов (108). 10.2. Электрическое дипольное излучение (112). 10.3. Магнитное дипольное излучение (117). 10.4*. Понятие о волновой и квазистатической зонах (118). 10.5*. Спектральное разложение излучения (119).	
§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом .....	121
11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле (121). 11.2. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом (124).	
<b>Глава IV. Релятивистская формулировка электродинамики</b> .....	131
§ 12. Релятивистская ковариантность уравнений электродинамики .....	131
12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда (131). 12.2. Ковариантность уравнений электромагнитного поля в потенциалах (135).	
§ 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой .....	136
13.1. Тензор электромагнитного поля (136). 13.2. Преобразование векторов поля $E$ и $B$ при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инварианты поля (137). 13.3. Эффект Доплера для электромагнитных волн (142).	
<b>Глава V. Основные понятия и уравнения электромагнитного поля в веществе</b> .....	148
§ 14. Усреднение уравнений микроскопического поля в веществе .....	148
14.1. Свободные и связанные заряды (148). 14.2. Усредненные уравнения поля для системы свободных и связанных зарядов (150). 14.3. Уравнения Максвелла — Лоренца для микроскопического поля в электронной теории (152). 14.4. Макроско-	

	пическое усреднение уравнений Максвелла – Лоренца (153).	
§ 15.	Уравнения Максвелла для поля в веществе . . . . .	154
	15.1. Поляризация вещества в электрическом поле (154). 15.2. Намагничивание вещества (158). 15.3. Уравнения Максвелла для поля в веществе. Напряженность магнитного и индукция электрического полей (162). 15.4. Магнитная и электрическая проницаемости вещества. Материальные уравнения (163).	
§ 16.	Характерные особенности полей в веществе . . . . .	164
	16.1. Уравнения поля в потенциалах (164). 16.2. Граничные условия (167). 16.3. Энергия и импульс поля в веществе (172).	

# УЧЕНИЕ ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

---

## Глава I ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В этой главе курса рассмотрены общие вопросы электродинамики как учения об электромагнитном поле. Ее положения и выводы необходимы для изучения каждой из остальных глав.

### § 1. Электрический заряд и электромагнитное поле

**1.1. Заряд. Плотность заряда и плотность тока.** Исходными для всей электродинамики являются такие понятия, как «электрический заряд» и «электромагнитное поле». Понятие «электрический заряд» тесно связано с особыми свойствами заряженных тел и частиц, которые проявляются в образовании электромагнитного поля, сопутствующего заряду, и в силовом действии поля на заряд. Эти два, вообще говоря, разных свойства заряженных тел – создавать поле и испытывать на себе действие поля других зарядов – характеризуются одной и той же величиной – электрическим зарядом  $Q$ .

Величина заряда определяется в физических измерениях по тем или иным проявлениям электромагнитного взаимодействия. Так, для точечных покоящихся зарядов предполагают, что сила взаимодействия между ними пропорциональна величине зарядов (закон Кулона). Поэтому, выбирая единичный заряд, можно определить величину другого заряда, сравнивая силы взаимодействия зарядов: единичного с единичным и единичного с неизвестным. В метрологии в настоящее время принят другой (не прямой) способ определения величины заряда, основанный на магнитном взаимодействии движущихся зарядов, образующих токи. По определению сила постоянного тока равна отношению заряда ко времени:

$$I = \frac{Q}{t},$$

где  $Q$  – заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника. На основании предположения о пропорциональности механической силы взаимодействия двух линейных проводников силам тока в них установлена основная единица силы тока – ампер. (Ампер – сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от дру-

гого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона на каждый метр длины.)

Поэтому единица заряда – кулон – является производной единицей (см. [7, 8, 9])

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Заряд – величина скалярная и выражается действительными числами: может иметь положительные, нулевые и отрицательные значения. Существенно, что заряд также и *скаляр* (инвариант) преобразований Лоренца, т. е. заряд некоторого тела или частицы выражается одним и тем же числом во всех инерциальных системах отсчета. Наконец, заряд – величина *аддитивная*: при соединении, например, двух точечных зарядов в один «резльтирующий» заряд будет равен алгебраической сумме соединенных зарядов. *Заряд любой системы заряженных тел и частиц равен сумме зарядов отдельных тел и частиц. Заряд макроскопического тела равен сумме зарядов его частей.*

Не следует думать, что перечисленные свойства заряда самоочевидны или априорны; все они результат обобщения опыта, отражение объективно существующих природных свойств тел и частиц. Опыт отвечает и на вопрос о непрерывности или дискретности заряда. Как известно, пределом дробимости электрического заряда является элементарный заряд, присущий электронам, протонам и другим заряженным элементарным частицам, модуль его  $e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$  Кл. (Субэлементарные частицы – кварки – имеют заряды  $\pm \frac{1}{3}e$  или  $\pm \frac{2}{3}e$ , но они в свободном состоянии не наблюдаются.)

Таким образом, электрический заряд по природе дискретен. Однако в классической электродинамике рассматривают макроскопические заряды, которые считаются непрерывными, а непрерывными заряды можно считать лишь без учета существования наименьшего элементарного заряда. Отсюда следует, что понятие бесконечно малого заряда  $dQ$  имеет физический, а не буквально математический смысл:  $dQ$  мало по сравнению с некоторым полным зарядом  $Q$ , но все еще так велико по сравнению с элементарным зарядом, что дискретность элементарных зарядов можно не принимать во внимание.

Непрерывность электрического заряда допускает и непрерывное его распределение в пространстве; оно описывается плотностью заряда, определяемой соотношением

$$\varrho = \frac{dQ}{dV}, \quad (1.1)$$

где  $dQ$  – заряд в элементе объема пространства  $dV$ . Рассматривая плотность зарядов, расположенных на телах, следует также учитывать, что элементарный заряд  $dQ$  сосредоточен в физически малом объеме пространства  $dV$ , размеры которого малы по сравнению

с другими размерами в задаче. Однако этот объем все еще очень велик по сравнению с объемом отдельного атома. (Такое физическое, а не только математическое толкование  $dQ$  и  $dV$  следует иметь в виду на протяжении всего курса классической электродинамики.)

В целом ряде задач электродинамики можно отвлечься от материальных тел и частиц — носителей зарядов — и иметь дело только с зарядами, распределенными в пространстве тем или иным образом. Заряды рассматриваются условно как особая субстанция, распределенная в пространстве с плотностью  $q$ .

Обсудим еще понятие «точечный заряд». Ему в классической электродинамике может быть придан двоякий смысл. Во-первых, за точечный заряд принимается бесконечно малый заряд  $dQ$ , находящийся в бесконечно малом элементе объема пространства. Эта модель точечного заряда соответствует его непрерывному распределению в пространстве. В таком случае

$$dQ = qdV. \quad (1.1-a)$$

Во-вторых, в отдельных случаях используется модель дискретного в пространстве точечного заряда. Согласно этой модели любой величины макроскопический заряд  $q$  может быть сосредоточен в геометрической точке пространства. Плотность заряда в таком случае выражается формулой

$$q(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (1.1-b)$$

где  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  — дельта-функция Дирака (см. П. III), а  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор точки, где расположен заряд. (Здесь и далее буква  $q$  используется для обозначения величины точечного заряда.)

Элементарный электрический заряд электрона  $e$  также является точечным. Но что касается дискретных зарядов элементарных частиц, то в рамках классической электродинамики нет возможности ставить вопрос об особенностях, вносимых в электромагнитное взаимодействие дискретностью зарядов как по величине, так и по пространственному распределению, ибо здесь отдельные элементарные заряды и их поля не рассматриваются. Взаимодействия элементарных зарядов между собой и особенности их полей описываются квантовой электродинамикой.

Чтобы подсчитать заряд в конечном объеме пространства, нужно знать его плотность  $q(\vec{r})$  в каждой точке и произвести суммирование:

$$Q = \int_V q(\vec{r}) dV. \quad (1.2)$$

Как известно, движущиеся электрические заряды создают ток. Для описания этого явления используется понятие плотности тока  $\vec{j}$ , которую определим соотношением

$$\vec{j}(\vec{r}) = q(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}), \quad (1.3)$$

где  $q$  — плотность заряда в некоторой точке пространства, а  $\vec{v}$  — ско-

рость движения заряда  $q dV$  в ней. (Если учитывать, что  $dV$  не является точкой, то речь идет о некоторой средней скорости частей заряда  $dQ$  в элементе объема  $dV$  с центром в точке  $\vec{r}$ .) Модуль плотности тока численно равен заряду, проходящему в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной траекториям движения зарядов – линиям тока; направлен вектор  $\vec{j}$  по касательной к линии тока.

От плотности тока нетрудно перейти к силе тока – заряду, протекающему через площадку  $S$  за единицу времени (рис. 1.1):

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S j_S dS, \quad (1.4)$$

где  $j_S$  – проекция вектора  $\vec{j}$  на нормаль к площадке  $dS$ . Сила тока – скалярная величина; это поток вектора плотности тока через некоторую поверхность.

Если электрические заряды движутся, то плотность зарядов в пространстве может изменяться с течением времени, т. е. плотность заряда есть функция координат точки пространства и момента времени:

$$\varrho = \varrho(\vec{r}, t).$$

В общем случае функцией координат и времени является и плотность тока:

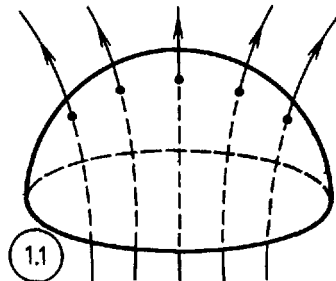
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t).$$

Для точечного заряда

$$\varrho = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad (1.4-a)$$

$$\vec{j} = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)). \quad (1.4-b)$$

Итак, распределение и движение электрических зарядов в пространстве описывается скалярной и векторной величинами: плотностью заряда  $\varrho$  и плотностью тока  $\vec{j}$ . В классической электродинамике эти две величины определяют действие некоторого заданного поля на движущиеся заряды и электромагнитное поле, созданное этими зарядами.



**1.2. Закон сохранения заряда.** Насколько это сейчас известно, в число точных (абсолютных) законов природы наряду с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса входит и закон сохранения электрического заряда: *при любых известных взаимодействиях элементарных частиц между собой сумма (алгебраическая) электрических зарядов частиц до взаимодействия равна сумме электрических зарядов частиц после взаимодействия.* В процессе взаимодействия необязательно сохраняются частицы как таковые; не сохраняется их общее число, так как одни частицы исчезают, а другие возникают, но суммарный их заряд остается неизменным. Закон проверен на множестве реакций с элементарными частицами с высокой степенью точности.

Классическая электродинамика изучает процессы, при которых не происходит взаимных превращений заряженных частиц, так что закон сохранения заряда здесь есть простое следствие сохранения его носителей — электронов и протонов. *В изолированной системе электрический заряд сохраняется.* Изменение его в неизолированной системе определяется только токами зарядов, текущими из системы или в систему. Поэтому убыль величины заряда в любом объеме пространства в единицу времени равна току, вытекающему через поверхность, ограничивающую объем. Математическая формула закона сохранения имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}. \quad (1.5)$$

Это интегральное равенство эквивалентно дифференциальному равенству

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}. \quad (1.6)$$

Для доказательства следует взять интеграл по объему от обеих частей равенства (1.6) и в правой части применить теорему Гаусса. Соотношение (1.6) называется *уравнением непрерывности* тока зарядов, оно выражает закон сохранения заряда в каждой точке пространства.

Закон сохранения заряда в форме (1.5) имеет следующий смысл: плотность зарядов изменяется только за счет их прихода и ухода из объема  $V$ . Заряды не «производятся» в каких-либо точках пространства и соответственно не «уничтожаются». Если бы были «источники» зарядов, то плотность изменялась бы и по этой причине. Пришлось бы записать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = i - \operatorname{div} \vec{j},$$

где  $i$  — скорость рождения зарядов в точке пространства, т. е. заряд, производимый в единицу времени в единице объема.

Требуется разъяснения еще одно обстоятельство, связанное с определением плотности тока выражением (1.3). В формуле

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

речь идет о выделенном точечном движущемся заряде  $dQ = \rho dV$ , проходящем за время  $dt$  через площадку  $\vec{dS}$ , коллинеарную  $\vec{j}$ . Величина этого заряда определяется плот-

ностью  $\rho(\vec{r}, t)$  в заданной (неподвижной) точке. Это обстоятельство отражено в уравнении непрерывности (1.6) знаком частной производной  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ : рассматривается скорость изменения плотности заряда в неподвижной точке пространства.

При стационарном распределении зарядов  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  и  $\text{div } \vec{j} = 0$ , т. е. имеет место движение зарядов лишь с замкнутыми линиями плотности тока. В случае точечных зарядов траектории движения являются замкнутыми кривыми.

**Пример 1.1. Непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Оно может быть задано некоторой непрерывной функцией координат. Например,

$$\rho = \rho_0,$$

где  $\rho_0$  есть постоянная величина. Это означает, что заряд по всему бесконечному пространству распределяется с одинаковой плотностью. Такой случай на практике не реализуется и далее в теории не рассматривается. Практически имеют смысл лишь заряды конечной величины, так что выражение

$$Q = \int_V \rho dV$$

сходится, а не равно бесконечности. Поэтому плотность заряда, вообще говоря, убывающая функция расстояния от некоторой точки пространства, принятой за начало координат. Например,

$$\rho = \rho_0 e^{-r/R},$$

где  $r$  — расстояние от начала координат, совпадающего с точкой наибольшей плотности заряда, а  $R$  — радиус сферы, на которой плотность заряда уменьшается в  $e$  раз.

**Пример 1.2. Кусочно-непрерывное распределение заряда в пространстве.**

Такое распределение типично для практики. Заряд с плотностью  $\rho = \rho_1(\vec{r})$  распределен в некоторой области пространства. В соседней с нею области плотность заряда описывается другой функцией  $\rho = \rho_2(\vec{r})$ . На границе областей (поверхности  $S$ )  $\rho$  может измениться скачком на конечную величину.

Так, например, плотность заряда может быть задана условиями:

$$\rho = \rho_0, \quad r \leq a;$$

$$\rho = 0, \quad r > a.$$

В этом случае мы имеем дело с равномерно заряженным по объему шаром радиусом  $a$ , за пределами которого зарядов в пространстве нет.

**Пример 1.3. Заряженные поверхности и нити.**

На практике встречаются случаи таких заряженных областей, которые следует моделировать без учета их объема, т. е. геометрическими поверхностями. Например, заряды на проводящем теле конечных размеров располагаются в поверхностном слое очень малой толщины. В этом и аналогичных случаях вводится поверхностная плотность зарядов:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}.$$

Для случая  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  при  $r = a$  мы имеем, таким образом, дело с равномерно заряженной сферой радиусом  $a$ . В других точках пространства зарядов нет.

Аналогично рассматриваются заряженные нити, для которых вводится линейная плотность зарядов:

$$\rho_{\text{лин}} = \tau = \frac{dQ}{dl}.$$

Например, распределение  $\tau = \tau_0 = \text{const}$  при  $y = 0, z = 0$  соответствует равномерно заряженной нити, расположенной в пространстве вдоль оси  $Ox$ .

**Пример 1.4. Вычисление силы тока, вытекающего из сферы.**

Плотность тока определяется соотношением  $\vec{j} = \frac{\alpha}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки с началом в центре сферы;  $\alpha$  — постоянная величина.

Используя формулу (1.4) и сферические координаты, имеем

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha}{4\pi r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \alpha.$$

**Пример 1.5. Определение изменения величины заряда в сфере.**  
(См. условие предыдущей задачи.)

На основе закона сохранения заряда  $-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_S \vec{j} d\vec{S}$  имеем  $\frac{dQ}{dt} = -\alpha$ ,

$Q = Q_0 - \alpha t$ , где  $Q_0$  — величина заряда в начальный момент времени. Смысл коэффициента  $\alpha$  выяснился: это скорость изменения заряда, сосредоточенного внутри сферы.

**1.3. Электромагнитное поле. Напряженность электрического поля. Индукция магнитного поля.** Электромагнитное поле — основной объект, изучаемый в электродинамике. Электрический заряд есть свойство заряженных частиц и заряженных тел, а электромагнитное поле, как уже говорилось, — вид материи, в макромире отличный от вещества. Существенное отличие поля от тел состоит в отсутствии локализации его в четко ограниченных областях пространства: электромагнитное поле, сопутствующее заряженным телам, занимает области без резкой границы, характерной для макроскопических тел. Кроме того, поля обладают проницаемостью: в одной и той же области пространства могут существовать одновременно несколько полей, тогда как поместить несколько тел в одну и ту же область пространства без изменения их свойств не удастся. В общем случае мы имеем дело с переменным электромагнитным полем, рассеивающимся в пространстве и стремящимся занять возможно большую пространственную зону. Так, например, система электрических зарядов, ускоренно движущихся в некоторой пространственной области, излучает поле в виде электромагнитных волн в пространство, окружающее указанную область. Часто для конкретных систем зарядов приходится рассматривать поле во всем безграничном пространстве. При этом необходимо знать характер ослабления поля по мере удаления его от источника. (Вспомним, например, поле покоящегося точечного электрического заряда.)

Единство материи в виде вещества и поля проявляется в том, что имеются универсальные физические понятия, равно применимые ко всем физическим объектам: энергия, импульс, момент импульса. Эти величины присущи полю и в макроскопической модели поля считаются непрерывно распределенными с определенной плотностью по всему объему, занимаемому полем. Действия поля на тела, а также на органы чувств человека связаны с названными характеристиками поля; при взаимодействии поля с веществом меняется состояние поля и тел, изменяются энергии, импульсы, моменты.

Например, хорошо известно превращение энергии света во внутреннюю энергию тел, а также энергии электромагнитного поля, связанного с электрическим током, в механическую энергию (электродвигатель) и т. д.

Однако такие параметры, как энергия и импульс, не используются в качестве первоначальных или исходных для описания электромагнитных полей, ибо законы изменения и сохранения энергии, импульса и момента импульса не отражают специфики электромагнитных явлений. Первоначальным в этом плане считается силовое действие электромагнитного поля на внесенные в него электрические заряды. Удастся различить две составляющие силы, действующие на заряд: электрическую  $\vec{F}_э$ , действующую как на покоящийся, так и на движущийся заряд независимо от скорости его движения, и магнитную  $\vec{F}_м$ , действующую только на движущийся заряд и существенно зависящую от его скорости. Соответственно вводятся две исходные характеристики: напряженность  $\vec{E}$  электрического поля и индукция  $\vec{B}$  магнитного поля, определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_э &= q\vec{E}, \\ \vec{F}_м &= q[\vec{v} \vec{B}]. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Эти формулы написаны на основании изучения результатов экспериментов по действию поля на различные заряды, движущиеся с разной скоростью. Опытным фактом является пропорциональность электрической силы и магнитной величине электрического заряда  $q$ . Пропорциональность имеет место в любом поле, в котором помещен заряд. Но в разных полях на покоящийся электрический заряд действует разная сила. Таким образом, сомножитель  $\vec{E}$  в первой формуле в соответствии со скалярной природой заряда является вектором, характеризующим силовое действие поля на заряд в каждой точке поля. Что касается магнитной силы, то она зависит от скорости движения зарядов, причем из опыта вытекает пропорциональность силы модулю скорости и перпендикулярность к ней. Вектор  $\vec{B}$  во второй формуле (1.7) характеризует магнитное поле в точке, где находится в данный момент движущийся заряд. В общем случае на точечный заряд в электромагнитном поле действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}]. \quad (1.8)$$

На основании формул (1.7) устанавливаются единицы напряженности и индукции:

$$1 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}, \quad 1 \text{Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{Кл} \cdot \text{м/с}}. \quad (1.9)$$

При практическом измерении напряженности поля измеряют силу, действующую на покоящееся заряженное тело, помещенное в электрическое поле. Поскольку тело имеет конечные размеры, напряженность определяется лишь в предположении об

однородности поля в пределах участка пространства, занимаемого телом. Иными словами, поле в этом объеме при измерении усредняется. Соответственно при измерении магнитной индукции  $\vec{B}$  поля используется некоторый проводник длиной  $l$ , на протяжении которого поле приходится считать однородным.

При измерениях напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  поля различают *заряд, создающий поле*, и *пробный заряд*, вносимый в поле для определения его характеристик (заряд  $q$  в формуле (1.8)). Пробный заряд должен быть достаточно мал, чтобы его собственное поле не влияло на систему зарядов, создающих поле, т. е. на результаты измерений.

Приведенные выше формулы (1.7) и (1.8) используются нами как *определения* векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  поля. Это, однако, не означает, что для нахождения указанных величин всегда необходимо прибегать к эксперименту. Величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  могут быть рассчитаны по расположению и движению зарядов, создавших поле; именно такая задача чаще всего и является основной в электродинамике.

Поле определено или задано, если в каждой точке пространства в каждый момент времени известно значение двух величин:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) \text{ и } \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t),$$

иными словами, если известны две векторные функции (или шесть скалярных) четырех независимых переменных. Поля называются *стационарными*, если функции  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не содержат времени. Если же они не зависят от координат, то поля *однородны*. В общем случае поля неоднородны в пространстве и переменны во времени.

Задание поля системы зарядов в вакууме с помощью напряженности  $\vec{E}$  и индукции  $\vec{B}$  оказывается достаточным: по этим двум векторам определяются не только силы, действующие на заряды, но и, как это будет показано ниже, энергия поля, его импульс, перемещение энергии (ее поток) в пространстве и т. д.

В заключение выясним одну терминологическую тонкость. Принято говорить, что заряды создают поле. Однако заряды никогда не существуют без поля: *заряды неразрывно связаны с полем*, так что указанное выражение имеет условный смысл. Но в отдельных случаях (неравномерное движение) заряды излучают электромагнитные волны, т. е. порождают поле, существующее далее *самостоятельно*. Это обстоятельство в известной мере и оправдывает выражение «заряды создают поле». Сам термин «поле» иногда используется и для обозначения области пространства, которую поле занимает.

**Пример 1.6. Выражение для плотности силы Лоренца.**

На элемент тела объемом  $dV$  с зарядом  $dQ = qdV$  действует электрическая составляющая силы Лоренца:

$$d\vec{F}_e = \vec{E} q dV$$

Магнитная составляющая выразится формулой

$$d\vec{F}_m = q dV [\vec{v} \vec{B}].$$

Применяя формулу

$$\vec{j} = q\vec{v},$$

имеем для магнитной составляющей силы Лоренца, действующей на элемент проводника объемом  $dV$ :

$$d\vec{F}_m = [\vec{j} \vec{B}] dV.$$

Таким образом, плотность силы Лоренца оказывается величиной

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = q\vec{E} + [\vec{j} \vec{B}].$$

**Пример 1.7. Сила Ампера.**

Сила тока в линейном проводнике, т. е. в таком, поперечное сечение которого мало по сравнению с длиной, может считаться равной произведению постоянной плотности тока на сечение (рис. 1.2):

$$I = jS.$$

Вводя элемент проводника длиной  $dl$ , совпадающий по направлению для линейного проводника с вектором  $\vec{j}$ , имеем для элемента тока  $\vec{j}dV$  выражение

$$\vec{j}dV = I \vec{dl}, \quad (1.10)$$

часто входящее в формулы электродинамики. Поэтому магнитная составляющая силы Лоренца, действующая на элемент длины линейного проводника, равна:

$$d\vec{F}_m = I [\vec{dl} \vec{B}]. \quad (1.11)$$

Эта сила называется силой Ампера.

**Пример 1.8. Потенциальное поле.**

Электромагнитное поле является полем векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Напомним, что векторные поля бывают двух видов: потенциальные и вихревые.

Поле некоторого вектора  $\vec{E}(\vec{r})$  называют *потенциальным* или полем источников, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0, \\ \text{div } \vec{E} &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

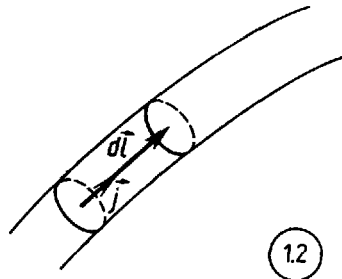
В общем случае потенциального поля

$$\text{div } \vec{E} = q(\vec{r}), \quad (1.13)$$

где  $q(\vec{r})$  — некоторая функция точки пространства. Условие потенциальности (1.12) можно записать по-другому, вводя скалярный потенциал поля  $\phi(\vec{r})$ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi(\vec{r}). \quad (1.14)$$

Если использовать формулу 25 из приложения II, помещенного в конце книги, то из соотношения (1.14) следует тождество  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . (Далее номера приложений и номера



используемых из них формул будут записаны в тексте сокращенно, например П. II, 25). Подстановка же (1.14) в (1.13) приводит к уравнению

$$\Delta \varphi = -\rho. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) позволяет при некоторых дополнительных условиях по заданной функции  $\rho(\vec{r})$  определить  $\varphi(\vec{r})$ , а затем с помощью формулы (1.14) – поле  $\vec{E}(\vec{r})$  (о том, как это делается, рассказано ниже).

**Пример 1.9. Вихревое поле.**

Поле некоторого вектора  $\vec{B}(\vec{r})$  называется *вихревым* (или *соленоидальным*), если выполняются условия:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} \neq 0. \quad (1.16)$$

В общем случае вихревого поля

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}(\vec{r}), \quad (1.17)$$

где  $\vec{j}(\vec{r})$  – некоторая векторная функция точки пространства. Условие соленоидальности (1.16) позволяет ввести векторный потенциал поля  $\vec{A}(\vec{r})$  соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (1.18)$$

На основании формулы (П. II, 26) из выражения (1.18) следует тождество  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

При подстановке выражения (1.18) в равенство (1.17) с учетом условий (1.16) приходим к уравнению

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{j}(\vec{r}). \quad (1.19)$$

Если  $\vec{j}(\vec{r})$  – известная функция, то с помощью уравнения (1.19) рассчитывается  $\vec{A}(\vec{r})$ , а затем по выражению (1.18) – и поле  $\vec{B}(\vec{r})$ .

**Пример 1.10. Поле с потенциальной и вихревой составляющими.**

К потенциальным и вихревым полям сводятся все векторные поля, изучаемые в нашем курсе. Пусть имеется некоторое поле  $\vec{E}(\vec{r})$ . Если  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$  – поле потенциальное. Если  $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  – поле вихревое.

Рассмотрим также случай  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . Из первого условия следует, что поле потенциально:  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ . Второе приводит для него к уравнению

$$\Delta \varphi = 0.$$

Начиная с условия соленоидальности, аналогично получаем

$$\Delta \vec{A} = 0.$$

Но в нашем случае оба эти уравнения имеют только нулевые решения, так как ни одна из точек пространства в условиях не выделена. Так как во всех точках пространства  $\varphi \equiv 0$ ,  $\vec{A} \equiv 0$ , то  $\vec{E} \equiv 0$ ,  $\vec{B} \equiv 0$ , – поля нет.

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\operatorname{div} \vec{E} \neq 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} \neq 0. \quad (1.20)$$

Представим вектор  $\vec{E}$  в виде двух векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

так, что

$$\operatorname{rot} \vec{E}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}_1 \neq 0; \quad \operatorname{rot} \vec{E}_2 \neq 0, \quad \operatorname{div} \vec{E}_2 = 0.$$

Условия (1.20) удовлетворяются. Отсюда видно, что поле вектора  $\vec{E}$  имеет потенциальную составляющую  $\vec{E}_1$  и вихревую  $\vec{E}_2$ .

Теперь все возможные случаи исчерпаны, любые поля сводятся таким способом к указанным двум видам.

## § 2. Система уравнений Максвелла – основа электродинамики

**2.1. Уравнения Максвелла для системы зарядов в вакууме.** В предыдущем параграфе описаны основные характеристики электриче-

ских зарядов и электромагнитного поля. Сейчас изучим количественные связи между напряженностью и индукцией поля, с одной стороны, и плотностями зарядов и токов в пустом пространстве (вакууме) – с другой. Эти связи выражаются довольно сложной системой дифференциальных уравнений в частных производных, носящих название системы уравнений Максвелла.

Впервые полная система уравнений была записана Д. К. Максвеллом в виде уравнений поля в веществе (см. § 15, п. 15.3). В математическом отношении уравнения поля для вакуума являются частными случаями уравнений поля для вещества ( $\mu = \varepsilon = 1$ ). Однако в физическом плане уравнения в вакууме играют более фундаментальную роль. Как исходная система уравнений Максвелла для элементарных зарядов в пустоте впервые применена Х. А. Лоренцом в 1903 г. Современный вид уравнения Максвелла, используемые нами ниже, приобрели в работах Г. Герца и О. Хэвисайда в конце прошлого века.

По отношению ко всему учению об электромагнитном поле система уравнений Максвелла играет роль первоначальных исходных положений, или теоретических принципов. С исторической точки зрения она является абстрактным обобщением экспериментальных данных, и ее связь с эмпирическими законами электродинамики будет показана далее. Сейчас выпишем уравнения без обсуждения их происхождения и истории открытия, т. е. в готовом виде:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.1-a) \\ (2.1-b) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.1-в) \\ (2.1-г) \end{matrix}$$

В уравнения входят следующие константы:

$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$  – магнитная постоянная;

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$  – электрическая постоянная.

Они появились здесь вследствие выбора единиц измерения величин  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , с одной стороны и  $\rho$  и  $\vec{j}$  – с другой, независимо от их связи, указываемой уравнениями.

Прямым расчетом можно убедиться, что

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (2.2)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – константа, равная скорости света в вакууме. Далее будет показано, что формула (2.2) отражает не случайное совпадение, а константа  $c$  имеет глубокую связь с уравнениями (§ 5).

Используя равенство (2.2), уравнения Максвелла можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.3-a) \\ (2.3-b) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.3-в) \\ (2.3-г) \end{matrix}$$

Уравнения (2.1) или (2.3) устанавливают связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  поля, плотностью заряда и плотностью тока в каждой точке пространства в любой момент времени. Таков общий смысл любых дифференциальных уравнений в частных производных по координатам точки пространства и по времени. Все переменные величины, входящие в уравнения  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , математически есть функции четырех независимых переменных: трех пространственных координат и времени.

Частные производные в уравнениях имеют обычный смысл: при дифференцировании по одной из переменных остальные считаются постоянными. Частное дифференцирование по времени означает, что поле и заряд рассматриваются в неподвижной точке пространства. (Так как заряды движутся, важно помнить, что их плотность  $\rho$  и величина  $\rho dV$  находятся именно в неподвижной точке для неподвижного объема  $dV$ .)

Уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) непосредственно применимы при изучении макроскопических потоков элементарных частиц или ионов в пустоте (например, электронные пучки, плазма и т. д.). Вообще говоря, их нельзя использовать, если система электрических зарядов расположена на телах, токи движутся по проводникам, а не непосредственно в вакууме, так как вещество существенно влияет на электромагнитное поле, на плотности токов и зарядов. Однако и при наличии тел возникает возможность непосредственного применения уравнений (2.1). В ряде очень важных случаев тела, которые определяют расположение и движение зарядов, сами не влияют на поле. Так, например, поле малых по размерам заряженных тел в воздухе рассчитывается как поле системы зарядов в вакууме; магнитное поле линейного проводника с током — как поле соответствующего тока в вакууме и т. д.

Уравнения Максвелла разделены на две пары для того, чтобы подчеркнуть наличие связей между отдельными уравнениями: второе уравнение в каждой паре следует из первого. Покажем это.

Возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-а):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Следовательно,  $\operatorname{div} \vec{B}$  всегда постоянна во времени. Но постоянная во времени дивергенция от произвольного переменного поля может быть только нулем. Значит,  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , что уже отражено в уравнении (2.1-б).

Точно так же, вычислив дивергенцию от обеих частей уравнения (2.1-в), имеем

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (2.4)$$

откуда с помощью уравнения непрерывности (1.6) получаем уравнение (2.1-г).

При другом подходе к системе (2.1) можно не считать уравнение непрерывности (1.6) отдельным и независимым постулатом теории электричества. Его можно получить из уравнений Максвелла. Для этого подставим в равенство (2.4)  $\operatorname{div} \vec{E}$ , взятую из уравнения (2.1-г). Получаем закон сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Как известно, имеется глубокая связь законов сохранения важнейших физических величин с симметриями пространства-времени (или иными симметриями). «Правильные» уравнения движения материальных тел или полей в любой фундаментальной физической теории (в механике, электродинамике и т. д.) содержат в себе законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда и других физических величин. В этом плане существенно важно то, что закон сохранения заряда вытекает из уравнений Максвелла. (Этот закон связан с так называемой калибровочной инвариантностью основных уравнений электродинамики.) Но сам закон шире рамок классической электродинамики; как показывает опыт, он справедлив для всех взаимодействий в природе. Поэтому к системе уравнений (2.1) обычно добавляется пятое соотношение: уравнение непрерывности (1.6). В таком случае только два из уравнений (2.1) можно считать независимыми — (2.1-а) и (2.1-в).

Заметим, что в физике не стремятся использовать непременно минимальную систему исходных положений. Если отношения между уравнениями выяснены, то обычно применяется несколько избыточная, но достаточно удобная и физически содержательная система. В электродинамике используются все четыре уравнения (2.1). Зависимые уравнения (2.1-б) и (2.1-г) несут важную физическую информацию и непосредственно применяются в ряде задач. Так, соотношение  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  истолковывается следующим образом. не существует в природе магнитных зарядов  $Q_m$ , создающих магнитное поле подобно тому, как электрические заряды  $Q$  создают электрическое поле.

Здесь следует сделать небольшое отступление. Как известно, элементарные магнитные диполи существуют: многие элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны и др.) обладают собственным магнитным моментом, называемым спиновым. Он не зависит от движения частицы в пространстве. Однако «монополей», т. е. положительных и отрицательных магнитных зарядов, которые образовали бы поле  $\vec{B}$  по закону  $\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \rho_m$ , не обнаружено, несмотря на специально поставленные многочисленные и разнообразные эксперименты.

**2.2. Интегральная форма уравнений Максвелла. Графическое изображение полей.** Уравнения (2.1) и (2.3) позволяют найти электромагнитное поле по расположению и движению зарядов в пространстве. Для этого требуется решить систему дифференциальных

уравнений в частных производных. Это сложная математическая проблема даже для сравнительно простых систем зарядов, хотя уравнения содержат производные только первого порядка как по координатам, так и по времени. Расчеты полей в конкретных задачах часто облегчаются, если перейти к интегральной форме уравнений Максвелла. Кроме того, интегральная форма уравнений нагляднее физически и помогает понять их смысл.

Начнем с уравнения (2.3-г). Выделим в пространстве некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Пусть внутри объема имеются заряды, распределенные с плотностью  $\rho$  (рис. 2.1). Проинтегрируем четвертое уравнение системы (2.3) по объему  $V$ . Получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

В левой части полученного равенства применим теорему Гаусса и учтем, что интеграл в правой части дает заряд  $Q$  в объеме  $V$ :

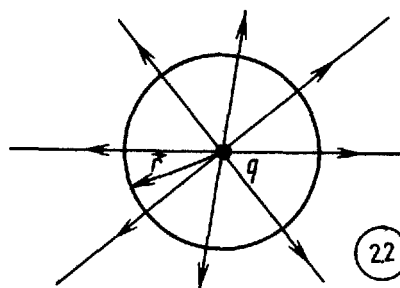
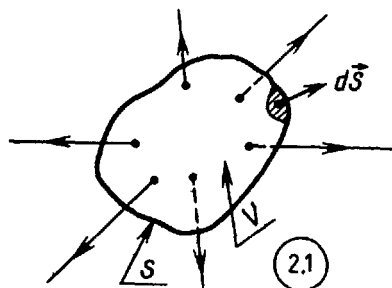
$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \quad (2.5)$$

Величина  $\vec{E} d\vec{S} = d\Psi$  носит название элементарного *потока* вектора напряженности электрического поля через площадку  $dS$ . Конечный поток через поверхность  $S$  выражается формулой

$$\Psi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что интеграл в формуле (2.5) есть *поток вектора напряженности* через замкнутую поверхность, окружающую заряд  $Q$ . Эта формула рассматривается как интегральное выражение, физически и математически эквивалентное четвертому уравнению Максвелла. Его часто называют теоремой Гаусса.

На рисунке 2.1 в целях наглядности поле вектора  $\vec{E}$  изображается линиями. Такие рисунки делаются в соответствии с договоренностью о графическом изображении полей. Линия вектора (в данном случае напряженности) проходит в пространстве так, что вектор касателен к



ней в каждой точке. Заметим, что вдоль касательной к линии напряженности направлена также и сила  $\vec{F}_э$ , действующая на заряд, помещенный в поле. Поэтому линии вектора напряженности называют еще силовыми линиями. Их проводят столько, чтобы число линий, пересекающих поверхность, всюду перпендикулярную силовым линиям, было равно  $\Psi$ . Аналогично изображаются и поля других векторов.

**Пример 2.1. Поле неподвижного точечного заряда.**  
Согласно закону Кулона

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.7)$$

Картина силовых линий дана на рисунке 2.2. Если вычислить поток вектора по формуле (2.7) через поверхность сферы с центром в точке расположения заряда, то он окажется равным  $\frac{1}{\epsilon_0}q$ , как это и требуется по теореме Гаусса (2.5).

Обратимся теперь к уравнению (2.3-б). Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к выводу: *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (2.8)$$

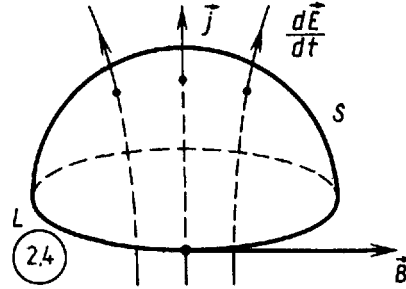
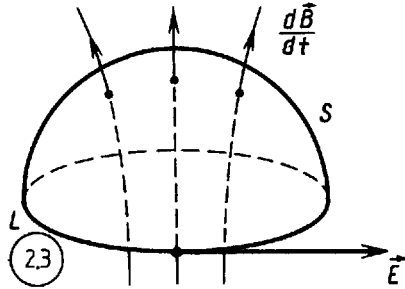
Поток вектора  $\vec{B}$  через некоторую поверхность  $S$  обозначается буквой  $\Phi$ :

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (2.9)$$

Магнитное поле изображается линиями вектора индукции  $\vec{B}$ . Число линий, пересекающих поверхность, всюду ортогональную направлению вектора  $\vec{B}$ , равно потоку вектора через эту поверхность. Из соотношения (2.3-б) или (2.8) следует, что линии индукции всегда замкнуты. Сколько линий выходит из объема  $V$ , столько же и входит в этот объем. Они не могут начинаться или заканчиваться в пределах выделенного конечного объема. Напротив, линии вектора напряженности  $\vec{E}$  могут начинаться или заканчиваться в точках расположения зарядов (или уходить в бесконечность). Поэтому уравнение (2.8) также говорит об отсутствии магнитных зарядов, как и исходная формула (2.3-б).

Перейдем к уравнению (2.1-а) или (2.3-а). Для выполнения последующих преобразований рассмотрим в пространстве некоторый замкнутый контур  $L$ , стягиваемый поверхностью  $S$  (рис. 2.3). Найдем потоки векторов  $\text{rot } \vec{E}$  и  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  через поверхность  $S$ :

$$\oint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$



В правой части равенства переменим местами дифференцирование и интегрирование, что даст

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Учтем формулу (2.9) и получим

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Фактически нет различия в производных  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{d}{dt}$  от интегральной характеристики

поля  $\Phi$ , не зависящей от координат точки пространства. Однако мы в этом и других аналогичных случаях сохраняем обозначение частной производной по времени, имея тем самым в виду *неподвижный контур*.

В левой части равенства (2.10) применим теорему Стокса. Приходим к равенству.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Вклад в интеграл дает только вихревая составляющая электрического поля. Интеграл от потенциальной составляющей равен нулю.

Это и есть первое уравнение Максвелла в интегральной форме. Выражение под знаком интеграла ( $\vec{E} d\vec{l}$ ) численно равно элементарной работе электрических сил, производимой над единичным точечным зарядом, внесенным в поле. Весь интеграл равен работе по конечному замкнутому контуру  $L$ . Эта величина называется *циркуляцией* вектора  $\vec{E}$  и обозначается через  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (2.12)$$

Формула (2.11) наглядно показывает, что электрическое поле, кроме составляющей с линиями напряженности, начинающимися и оканчивающимися на зарядах, имеет составляющую с замкнутыми линиями, охватывающими линии индукции переменного магнитного поля (см. рис. 2.3).

Займемся, наконец, уравнением (2.3-в). Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые привели к формуле (2.11), получим интегральное соотношение

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (2.13)$$

эквивалентное третьему уравнению Максвелла. Равенство (2.13) связывает циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  с величиной тока  $I$ , пронизывающего контур  $L$ , и с изменением потока напряженности электрического поля  $\vec{E}$  через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур. Действительно,

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.13) свидетельствует о том, что замкнутые линии магнитной индукции охватывают линии тока и линии напряженности переменного электрического поля (рис. 2.4). В целом интегральная форма уравнений позволяет достаточно наглядно представить связь полей, зарядов, токов.

**Пример 2.2. Индукция тока в проводнике.**

Пусть поток  $\Phi$ , пронизывающий контур  $L$  (см. рис. 2.3), изменяется с течением времени по закону  $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$ . В таком случае циркуляция вектора напряженности электрического поля по контуру определяется формулой  $\mathcal{E} = \Phi \omega \cos \omega t$ . Если по контуру проложен проводник, то в нем наводится ЭДС, равная  $\mathcal{E}$ , и, если проводник замкнут, течет индукционный ток

**2.3. Связь уравнений Максвелла с эмпирическими законами электромагнитных явлений.** В системе уравнений Максвелла (2.3) содержатся все сведения о макроскопическом электромагнитном поле. Поэтому не удивительно, что из нее в качестве следствий вытекают отдельные законы электрических или магнитных явлений, установленные экспериментально в период, предшествующий созданию Максвеллом общей теории электромагнитного поля. Исторически эти законы явились эмпирическим базисом теории Максвелла.

Так, с формулой (2.5), а значит, и с уравнением Максвелла (2.1-г) непосредственно связан закон Кулона для взаимодействия покоящихся точечных электрических зарядов. Такие заряды создают поле, определяемое только уравнением (2.5).

Соотношение (2.11) совпадает с выражением закона Фарадея для электромагнитной индукции, если циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по контуру  $L$  назвать электродвижущей силой  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ , а контур заменить проводником. Это значит, что закон Фарадея вытекает из уравнения Максвелла (2.1-а).

Формула (2.13) и соответственно уравнение Максвелла (2.1-в) отражают открытое Эрстедом магнитное действие тока и приводят к закону Био-Савара (в § 8 п. 8.2. будет показано, что закон Био-Савара есть прямое следствие уравнения 2.1-в).

Наконец, отсутствие магнитных зарядов, вытекающее из уравнения Максвелла (2.1-б), можно увязать с гипотезой Ампера о происхождении намагничивания тел за счет «молекулярных» токов в веществе.

Далее в примерах из законов Максвелла выводятся некоторые эмпирические законы электромагнетизма. Во многих задачах применяется интегральная форма уравнений Максвелла.

**Пример 2.3. Закон Кулона.**

Точечный заряд  $q_1$  окружим сферой радиусом  $r$  с центром в точке расположения заряда (см. рис. 1.4). В силу изотропности пространства поле заряда должно обладать центральной симметрией. Линии напряженности такого поля радиальны. На поверхности сферы напряженность постоянна. Поэтому соотношение (2.5) дает

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q_1.$$

Учитывая направление силовых линий, приходим к формуле (2.7).

Если теперь поместить в поле (2.7) другой точечный заряд  $q_2$ , то по определению напряженности (1.7) на него будет действовать сила

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.15)$$

Это и есть выражение закона Кулона. При выводе не учитывалось действие поля точечного заряда на этот заряд (см. § 7, п. 7.3 и § 11, п. 11.1).

Если в рассуждениях заряды поменять местами, то обнаружится, что на заряд  $q_1$  действует сила

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

причем  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Это значит, что взаимодействие зарядов подчиняется третьему закону Ньютона. Очевидно, что закон справедлив, если пространство обладает зеркальной симметрией, использованной нами при перестановке зарядов.

**Пример 2.4. Магнитное поле прямого тока.**

Используем формулу (2.13) для анализа случая, когда переменное электрическое поле отсутствует, т. е. имеются только постоянные поля и токи. Тогда для полного тока, который пересекает поверхность  $S$  и пронизывает контур  $L$  (см. рис. 2.4), из формулы (2.13) следует выражение

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (2.15-a)$$

Применим соотношение (2.15-а) к бесконечно длинному прямолинейному проводнику, по которому течет ток  $I$ . В силу осевой симметрии задачи линии индукции магнитного поля являются концентрическими окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 2.5). Из формулы (2.15-а) следует равенство

$$B2\pi r = \mu_0 I,$$

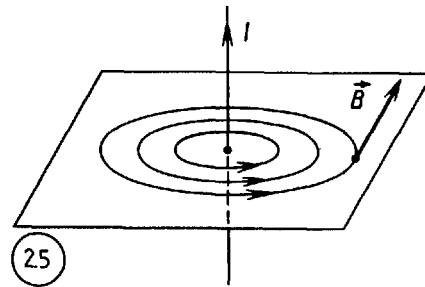
приводящее к формуле

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (2.16)$$

**Пример 2.5. Ток смещения.**

Допустим, что ток через поверхность  $S$  равен нулю ( $I = 0$ ). Уравнение (2.13) примет вид

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}.$$



А это значит, что магнитное поле порождается не только токами, но и переменным электрическим полем. Оказывается, что имеет место двухсторонняя связь между электрическим и магнитным полями: переменное магнитное поле порождает электрическое поле, а переменное электрическое поле порождает магнитное поле. Отметим, что эта связь не вполне симметрична, так как знаки у скоростей изменения потока индукции (2.11) и потока напряженности поля (2.13) и (2.14) противоположны.

Указанная закономерность в домаксвелловскую эпоху экспериментально обнаружена не была. Правильно истолковав явление электромагнитной индукции: возникает электрическое поле при изменении магнитного, — великий физик высказал догадку, что существует и обратный процесс: возникает магнитное поле при изменении электрического. Без этой догадки полная система уравнений электромагнетизма не была бы открыта.

Следуя Максвеллу, уравнение (2.3-в) иногда записывают в виде

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_c),$$

где

$$\vec{j}_c = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

— плотность тока смещения. Это некоторый фиктивный ток, вызывающий появление магнитного поля так же, как движение реальных зарядов. На самом деле магнитное поле вызывается переменным электрическим полем.

**2.4. Принцип суперпозиции полей.** В физике важное значение имеют правила, по которым находятся результирующие эффекты некоторых совместных процессов взаимодействия, если эффекты отдельных взаимодействий известны. Так, в механике существует принцип независимого действия сил, приводящий к правилу их векторного сложения: если на материальную точку действует несколько сил  $\vec{F}_i$ , то результат действия, т. е. ускорение, определяется их векторной суммой:  $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ .

В электродинамике речь идет о наложении отдельных электромагнитных полей друг на друга и о нахождении по ним результирующего поля. Пусть в одном случае движущиеся заряды  $q_1, \vec{j}_1$  создают поле  $\vec{E}_1, \vec{B}_1$ , в другом случае заряды  $q_2, \vec{j}_2$  создают поле  $\vec{E}_2, \vec{B}_2$  и т. д. Вопрос состоит в том, каким будет поле при наличии в пространстве указанных систем зарядов вместе, при их одновременном действии, выражающемся в создании поля. Ответ на него содержится в уравнениях Максвелла. В силу линейности уравнений (2.3) в рассматривае-

мом случае векторы результирующего поля равны сумме векторов составляющих полей:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_i \vec{E}_i, \\ \vec{B} &= \sum_i \vec{B}_i.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Эти две формулы и выражают принцип суперпозиции полей при наличии нескольких зарядов.

Принцип суперпозиции полей используется в средней школе, например, для вычисления напряженности в некоторой точке поля, созданного двумя точечными зарядами; вычисляют сначала напряженности, которые созданы каждым зарядом в отдельности, а затем их векторно складывают. Аналогично применяется принцип суперпозиции и в более общем случае расчета поля сложной системы движущихся зарядов, находящихся в некотором объеме пространства  $V$ . Весь объем разбивается на элементарные объемы  $dV$ . С ними связаны бесконечно малые точечные заряды  $dQ = \rho dV$  и элементы тока  $\vec{j} dV$ . Далее находятся соответствующие этим малым зарядам и токам напряженности  $d\vec{E}$  и индукции  $d\vec{B}$ , а затем они суммируются по всему объему  $V$ . Результирующее поле вычисляется по формулам

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E}, \quad \vec{B} = \int_V d\vec{B},$$

в которых выражения напряженности поля точечного заряда  $d\vec{E}$  и индукции поля элементарного тока  $d\vec{B}$  находятся сравнительно просто.

Итак, согласно принципу суперпозиции поле системы движущихся зарядов сводится к нахождению полей, связанных с зарядами и токами во всех элементах объема пространства. Но существуют поля и в пространстве без зарядов. Рассмотрим их наложение и в этом случае.

Если в уравнениях (2.3)  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ , то имеем систему линейных и однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Для таких уравнений известно свойство: любая линейная комбинация частных решений есть также решение системы. Пусть имеются частные решения  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ . Дифференциальные уравнения в частных производных допускают бесконечное множество их. Это значит, что физически реализуются, т. е. могут существовать в пространстве, поля с этими характеристиками. Но решением же будут и выражения

$$\vec{E} = \sum_i C_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i C_i \vec{B}_i,$$

где  $C_i$  — любые постоянные числа. Таким образом, согласно уравнениям Максвелла физически реализуется, т. е. может существовать в пространстве, и поле с характеристиками  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ .

Формулировка принципа суперпозиции для свободного поля со-

стоит в утверждении: если в пространстве, лишенном электрических зарядов, существуют поля  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ , то может существовать и поле

$$\vec{E} = \sum_i C_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i C_i \vec{B}_i. \quad (2.18)$$

Справедливо и обратное утверждение: любое поле  $(\vec{E}, \vec{B})$  в пространстве без зарядов можно рассматривать как результат наложения полей  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ .

Важнейшим приложением принципа суперпозиции полей является разложение любого свободного поля в вакууме по плоским монохроматическим волнам. Далее будет показано, что уравнения (2.3) при  $\rho = 0, \vec{j} = 0$  допускают решения

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

причем постоянные векторы  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  и  $\vec{k}$  взаимно перпендикулярны,  $k = \frac{\omega}{c}$ . Эти решения и выражают плоские волны различной частоты и амплитуды  $(\vec{E}, \vec{B})$ , распространяющиеся со скоростью  $c$  по всевозможным направлениям, задаваемым вектором  $\vec{k}$ . Согласно принципу суперпозиции любое свободное поле сводится к системе плоских волн различных поляризаций, амплитуд, частот и направлений распространения.

**2.5. Задачи электродинамики.** Как уже говорилось, основная задача электродинамики состоит в отыскании поля  $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$  с помощью системы уравнений Максвелла, в которые векторные функции  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  входят через частные производные первого порядка по координатам и времени. Такое решение возможно, если заданы функции  $\rho = \rho(\vec{r}, t), \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ , т. е. известны плотности заряда и тока во всех точках пространства и во все моменты времени. При интегрировании дифференциальных уравнений систем (2.1–2.3) получаются решения, содержащие некоторые произвольные функции. Такова структура общего решения дифференциальных уравнений в частных производных. Для того чтобы из общего решения найти частное — конкретное поле, необходимо располагать начальными и граничными условиями.

*Начальные условия* — это значения величин  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  во всех точках пространства в некоторый момент времени, принимаемый за начальный:

$$\vec{E}|_{t=0} = \vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r}); \quad (2.20)$$

$$\vec{B}|_{t=0} = \vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r}), \quad (2.21)$$

т. е. должны быть известны функции координат  $\vec{E}_{\text{нач}}(\vec{r})$  и  $\vec{B}_{\text{нач}}(\vec{r})$ . Тогда значение поля в остальные моменты времени определяется из решения уравнений (2.1–2.3).

*Граничные условия* — это значения векторов поля на границе области пространства, занимаемой полем. Заданы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  как известные функции времени во всех точках некоторой поверхности:

$$\vec{E}|_S = \vec{E}_{\text{гп}}(t); \quad (2.22)$$

$$\vec{B}|_S = \vec{B}_{\text{гп}}(t). \quad (2.23)$$

Поле системы зарядов в пустоте не ограничено какими-либо конечными поверхностями. Граничные условия здесь — значения векторов поля при бесконечном удалении от системы зарядов. Физический смысл имеют только те задачи, в которых система зарядов занимает не все бесконечное пространство, а ограниченную его область. Граничные условия в них сводятся к требованию затухания поля при бесконечном удалении от системы зарядов:

$$E|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad B|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

(Иногда формально вводятся системы зарядов в виде бесконечной нити, поверхности и т. д. Эти случаи нуждаются в особом изучении.)

О граничных условиях будет говориться ниже в каждом конкретном случае. В частности, условия (2.24) выполняются для электрического поля точечного заряда (2.7).

Итак, *основная задача электродинамики* состоит в отыскании поля по заданному распределению и движению зарядов при известных граничных условиях. Оказывается, что при указанных условиях уравнения Максвелла имеют *единственное* решение (см. пример 3.1). В этом смысле задание состояния системы поля-заряды на некоторый начальный момент времени позволяет определить ее состояние во все последующие моменты времени. Прослеживается аналогия с механикой, где по заданному состоянию системы материальных точек в начальный момент времени определяется ее состояние во все другие моменты времени.

Имеет смысл, а также практическое значение задача, *обратная* по отношению к разобранным: по заданному полю определить плотность зарядов и токов. Обратная задача решается с помощью уравнений (2.3-в) и (2.3-г) путем дифференцирования известных функций  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Кроме названных двух задач, в отдельных случаях может решаться и задача о движении заряженных тел, внесенных в поле. В самом простом случае, если влиянием поля движущихся зарядов на заряды, создающие поле, можно пренебречь, то это обыкновенная задача механики и решается она с помощью уравнения второго закона Ньютона. На заряды действует сила Лоренца, поэтому для заряженной частицы имеем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}], \quad (2.25)$$

где  $\vec{p}$  может быть нерелятивистским или релятивистским импульсом

Часто оказывается необходимым найти электромагнитное поле, созданное зарядом, движущимся под действием внешнего поля. Типичный пример — *задача на рассеяние света*. Заряды, входящие в состав вещества, испытывают на себе действие светового электромагнитного поля, приходят в колебания и сами излучают электромагнитные волны — рассеивают свет. В этом случае не учитывается влияние вторичного поля на заряды, создавшие первичное

поле (например, расположенные на Солнце), однако само вторичное поле рассматривается наряду с первичным как наложенное на него

В известной мере данной задаче аналогична *задача о поле в веществе*, в которой внешнее поле перераспределяет (изменяет) токи и заряды, входящие в состав вещества, а эти заряды создают поле, накладывающееся на внешнее; образуется измененное по сравнению с начальным поле в веществе.

При решении основной задачи — интегрировании системы уравнений Максвелла — возникают большие математические трудности. Далеко не всегда прямое интегрирование уравнений возможно. Поэтому применяются различные математические методы решения. Так, вместо системы уравнений в дифференциальной форме можно воспользоваться эквивалентными интегральными соотношениями (2.5), (2.8), (2.11), (2.13). При наличии пространственных симметрий в расположении зарядов, при их простых конфигурациях интегральная форма уравнений Максвелла сравнительно просто позволяет получать решения.

При отыскании решений применяется и принцип суперпозиции: если решения для элементов заряда  $q dV$  и элементов тока  $\vec{j} dV$  известны, то решения для непрерывной системы зарядов могут быть записаны в виде интегралов — сумм напряженностей и индукций полей, созданных элементами системы зарядов. Используются и другие методы решения системы уравнений Максвелла, о которых речь пойдет в курсе далее (метод потенциалов). По существу, все содержание электродинамики связано с решениями системы уравнений Максвелла для тех или иных систем зарядов.

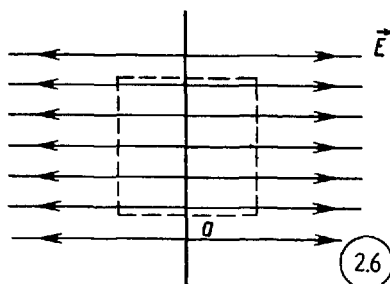
#### Пример 2.6 Применение теоремы Гаусса.

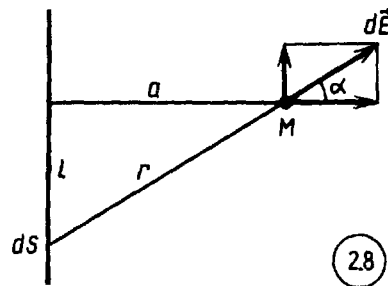
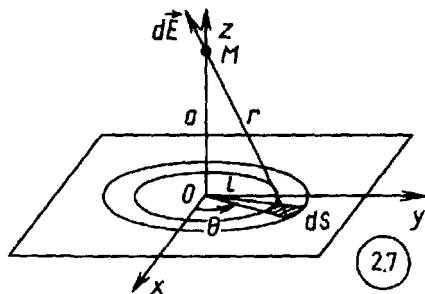
Найдем поле равномерно заряженной плоской поверхности с помощью теоремы Гаусса (2.5). Поверхностная плотность электрических зарядов постоянна и равна  $\sigma$ . В силу симметрии поля относительно заряженной поверхности линии напряженности должны быть перпендикулярны поверхности, а поле должно быть однородным (рис. 2.6). Выделяя замкнутую поверхность в виде поверхности куба и вычисляя поток вектора  $\vec{E}$ , имеем

$$2Ea^2 = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$





**Пример 2.7. Расчет напряженности с помощью принципа суперпозиции.**  
Найдем то же поле. Элемент поверхности (рис. 2.7, 2.8)  $dS = \rho d\rho d\theta$  несет заряд  $dQ = \sigma dS$ . Он создает поле, напряженность которого в точке  $M$  находится с помощью формулы (2.7). Для модуля вектора  $d\vec{E}$  получим

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 (l^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Вклад в результирующее поле дает только перпендикулярная к поверхности составляющая:

$$dE_{\perp} = dE \cos \alpha = \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Поле, созданное всей поверхностью, имеет напряженность:

$$E = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Интеграл взят с помощью подстановки  $u = a^2 + l^2$ . Составляющая поля, направленная вдоль поверхности, равна нулю. Действительно, всякой точке  $A$  можно указать симметричную ей точку плоскости  $B$  (см. рис. 2.7). Совокупный вклад зарядов точек  $A$  и  $B$  в параллельную этой поверхности составляющую напряженности  $\vec{E}_{\parallel}$  равен нулю.

**2.6. Уравнения Максвелла – Лоренца. Принцип причинности в электродинамике.** Обсудим следующую общую задачу электродинамики.

Имеется замкнутая изолированная система зарядов и электромагнитного поля в вакууме. В начальный момент состояние системы задано, т. е. заданы положения и скорости заряженных частиц, векторы поля. Требуется определить (с помощью теоретических расчетов) состояние системы во все последующие моменты времени. Решение этой задачи следует искать в синтезе уравнений Максвелла и Ньютона: определяем последовательно общее поле системы, находим силы, действующие на заряды, кинематические уравнения движения зарядов, по ним снова определяем поле и т. д.

В общем случае такая задача некорректна и требует ограничений в постановке.

Во-первых, не всегда возможно выделить изолированную систему, так как существует излучение электромагнитных волн или волны могут приходить в систему извне. Следует предположить, что

внешние источники волн отсутствуют, а сама система рассматривается без излучения или на протяжении ограниченных интервалов времени, за которые ни заряды, ни поля не выходят за пределы некоторого конечного объема пространства.

Во-вторых, при ускоренном движении зарядов возникают силы «радиационного трения», которые нельзя учесть средствами механики. Этот вопрос будет специально обсужден в § 11, п. 11.1, а пока предположим, что указанными силами можно пренебречь.

В-третьих, чтобы изучать движение зарядов с помощью законов механики, необходимо использовать некоторые механические модели тел, на которых расположены заряды. В простейшем случае это свободные от связей материальные точки с массами  $m_i$ , расположенные в точках пространства  $\vec{r}_i(t)$ .

Для плотности зарядов и плотности токов, связанных с зарядами, справедливы выражения (см. § 1, п. 1.1)

$$\rho_i = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{j}_i = q_i \dot{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.25-a)$$

Согласно принципу суперпозиции поле найдется как сумма полей отдельных зарядов:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (2.25-b)$$

Учитывая линейность операций  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ , с помощью формул (2.25-a) и (2.25-b) запишем уравнения Максвелла (2.1) для нашей системы в виде

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_i q_i \dot{\vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \end{cases} \quad (2.26)$$

К уравнениям (2.26) нужно добавить уравнения движения материальных точек под действием силы Лоренца (предполагается, что других сил нет). Согласно уравнениям (2.25)

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = q_i \vec{E} + q_i [\dot{\vec{r}}_i \vec{B}]. \quad (2.27)$$

Совокупность формул (2.26) и (2.27) носит название *уравнений Максвелла—Лоренца для системы зарядов и поля в вакууме*. В принципе они (при указанных выше ограничениях) отвечают на вопрос о движении зарядов и изменениях поля с течением времени и позволяют определить состояние системы по начальным условиям. На основании этих соотношений считают, что электродинамика является теорией с динамическими закономерностями. Так же, как и в механике, в электродинамике справедлив принцип причинности:

состояние системы поле-заряды в некоторый момент времени однозначно определяет состояние системы во все последующие (или предшествующие) моменты времени.

Однако точные решения системы уравнений Максвелла – Лоренца неизвестны даже при небольшом числе материальных точек. В практических задачах, например в физике плазмы, используются разнообразные приближенные методы. Уравнения (2.26), (2.27) служат также принципиальной основой при изучении электромагнитного поля в веществе.

Следует заметить, что уравнения Максвелла – Лоренца применяются к некоторой *макроскопической* механической системе зарядов, дополненной непрерывным полем. (Такой системой могут быть система точек, заряженная сплошная среда с теми или иными механическими свойствами, система заряженных тел и т. д.). Применение же этих уравнений к системе заряженных элементарных частиц в общем случае неправомерно в силу квантовых закономерностей их движения и взаимодействия.

Говоря о системе уравнений Максвелла – Лоренца, специально заметим, что взятые сами по себе уравнения Максвелла (2.1) описывают связь между полем и системой зарядов, движущихся не только под действием сил поля, но и любых других сил. Вообще, уравнения движения в систему не входят, так что это движение может быть произвольным и ограничено только условием сохранения заряда (1.6). Физически это значит, что нельзя отнести расположение и движение зарядов к действию на них только поля, созданного ими. Но что же еще определяет движение зарядов, кроме электромагнитного поля? Мы отвлеклись, рассматривая систему зарядов в вакууме, от их материального носителя – вещества, в состав которого они входят. На тела могут действовать гравитационные силы. Силы упругости, трения и др., хотя и имеют электромагнитную природу, в макроскопическом плане законами электродинамики Максвелла не описываются. Внутри же тел движение и взаимодействие микроскопических зарядов не подчиняются ни классической механике, ни классической электродинамике.

Среди сил, действующих на заряды, выделим силы непосредственного воздействия электромагнитного поля. Все остальные получили общее название – *сторонние* силы. Важно отметить, что и при наличии сторонних сил поле зарядов определяется уравнением Максвелла. Поэтому в системе уравнений Максвелла постановка вопроса о движении зарядов шире, чем в системе Максвелла – Лоренца.

### **§ 3. Энергия и импульс электромагнитного поля**

**3.1. Работа, совершаемая полем при перемещении зарядов.** Энергия и импульс – величины, универсальные для всех физических объектов, присущи и электромагнитному полю. Однако определения

кинетической и потенциальной энергии, а также импульса, данные в механике (см. [1]) для материальной точки и системы точек, отнюдь не распространяются на новый физический объект – поле. Об энергии и импульсе электромагнитного поля можно судить, опираясь на соответствующие механические величины, на законы сохранения энергии и импульса для замкнутой изолированной системы, состоящей из электромагнитного поля и электрически заряженных материальных точек. В общий баланс энергии, кроме кинетической энергии материальных точек, войдет и новая для механики величина, которую следует отождествить с энергией поля. Аналогично ставится вопрос и об импульсе поля.

Итак, рассмотрим систему заряженных материальных точек, взаимодействующих между собой. Такая система описывается уравнениями Максвелла – Лоренца (2.26) и (2.27). Пользуясь этими уравнениями, распространим понятия энергии и импульса на поле, находя величины, сохраняющиеся для изолированной системы полей-заряды.

Макроскопические электрические заряды так или иначе связаны с материальными телами, на которых они расположены. Пусть частица массой  $m_i$  несет на себе заряд  $q_i$ . Тогда уравнение движения (2.27) приводится к интегралу энергии обычным для механики способом. Умножим обе части равенства на  $d\vec{r}_i$ . Получим

$$d\vec{r}_i \frac{d}{dt} \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i.$$

Здесь справа стоит работа силы Лоренца. Она совершается только ее электрической составляющей, так как работа магнитной составляющей равна нулю в силу коллинеарности векторов  $\vec{v}_i$  и  $d\vec{r}_i$ :

$$q_i [\vec{v}_i \vec{B}] d\vec{r}_i = 0.$$

Левую часть преобразуем с помощью легко проверяемого тождества

$$\vec{v} d \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = d \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

и окончательно получаем

$$d \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = q_i \vec{E}_i d\vec{r}_i. \quad (3.1)$$

Элементарная работа силы Лоренца равна приросту релятивистской (кинетической) энергии заряженной материальной точки.

Просуммируем теперь элементарные работы по всем точкам системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_i q_i \vec{E}_i \vec{v}_i. \quad (3.2)$$

Формула (3.2) выражает теорему об изменении энергии системы

материальных точек за счет работы поля, совершенной над ними. Мы вывели формулу (3.2) в предположении о точечных зарядах — заряженных материальных точках. Она легко обобщается на непрерывно распределенный по пространству заряд. Для работы поля в единицу времени в таком случае с помощью формулы (1.3) имеем

$$P = \int_V \vec{E} \vec{j} dV. \quad (3.2-a)$$

Отсюда работа в единицу времени в единице объема — плотность мощности, высвобождаемой полем, — выразится формулой

$$P_0 = \vec{E} \vec{j}. \quad (3.3)$$

Формула (3.2-a) и (3.3) для работы поля нужны потому, что система уравнений Максвелла обычно используется для модели непрерывно распределенных по пространству зарядов. Что же касается механической модели носителей зарядов, то нам в данном случае удобнее использовать дискретную модель заряженных частиц (в соответствии с левой частью формулы (3.2)).

Итак, за счет работы поля изменяется кинетическая энергия находящихся в поле заряженных частиц. Это свидетельствует о наличии у поля энергии и превращении ее в кинетическую энергию частиц.

**3.2. Энергия электромагнитного поля. Плотность и поток энергии. Закон изменения энергии.** Поставим задачу: найти энергию электромагнитного поля по заданным векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Для ее решения используем уравнения Максвелла и выражение для работы поля над зарядами (3.2-a). Выпишем уравнения (2.1-a) и (2.1-в):

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}.$$

Умножим первое из них на  $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ , а второе — на  $\vec{E}$ . Перейдем к соотношениям

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (a)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \vec{E}. \quad (б)$$

Теперь из равенства (б) вычтем равенство (а) и получим

$$\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \text{rot } \vec{E}) - \vec{j} \vec{E}. \quad (в)$$

Применяя векторное тождество (П. II, 31), можно упростить запись правой части выражения (в):

$$-\frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{rot} \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{B}].$$

Кроме того, учтем, что левую часть того же выражения можно представить в виде частной производной по времени от функции

$$\frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \text{ Таким образом, имеем}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} [\vec{E} \vec{B}] + \vec{j} \vec{E}. \quad (3.4)$$

Чтобы выяснить физический смысл формулы (3.4) и входящих в нее слагаемых, полезно перейти к соответствующему интегральному соотношению.

Проинтегрируем выражение (3.4) по объему пространства  $V$ . Затем изменим порядок дифференцирования и интегрирования в левой части полученного равенства, а также преобразуем первое слагаемое в правой части с помощью теоремы Гаусса. В итоге получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV = \oint_S \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}] d\vec{S} + \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (3.5)$$

Интеграл  $P = \int_V \vec{j} \vec{E} dV$

есть работа поля за единицу времени в пределах конечного объема  $V$ . Это дает основание для введения фундаментальных величин:

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (3.6)$$

– плотности энергии поля и

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}] \quad (3.7)$$

– плотности потока энергии (вектор Умова – Пойнтинга).

Выражение

$$W = \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \quad (3.8)$$

определяет энергию поля в заданном объеме, а интеграл

$$N = \oint_S \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}] d\vec{S} \quad (3.9)$$

истолковывается как поток энергии через замкнутую поверхность за единицу времени. Фактически это *полная мощность* или *интенсивность излучения* системы зарядов.

После раскрытия смысла входящих в формулу (3.5) величин можно понять и ее общее содержание: равенство (3.5) оказывается математическим выражением закона изменения энергии электро-

магнитного поля. Если применить введенные обозначения (3.2-а), (3.6) – (3.9), то формула (3.5) принимает вид

$$-dW = Ndt + Pdt \quad (3.10)$$

(Так как  $W$  не зависит от координат точек поля, частную производную в формуле (3.5) можно заменить обыкновенной) Теорема читается: *убыль энергии поля в некотором объеме равна потоку энергии, выходящему из объема, и работе, совершаемой полем над зарядами в этом объеме.*

На практике используется не только интегральная форма теоремы (3.5) или (3.10), но часто и первоначальная дифференциальная форма теоремы (3.4) Во введенных обозначениях для нее имеем

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div } \vec{\sigma} + \vec{j} \vec{E} \quad (3.11)$$

Плотность энергии  $w$  связана с непрерывным заполнением пространства электромагнитным полем. Изменение поля в различных точках пространства – изменение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  во времени – связано с перетеканием энергии поля из одних мест в другие. Вот это-то движение энергии и учитывается с помощью вектора Умова – Пойнтинга (3.7)

Если зарядов нет, то равенство (3.11) приобретает вид

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div } \vec{\sigma}$$

и выражает закон сохранения энергии свободного электромагнитного поля. При наличии зарядов имеет место взаимодействие, обуславливающее обмен энергией между зарядами и полем. Согласно выражению (3.11) движущиеся заряды можно рассматривать как источники энергии поля. Тогда плотность мощности источника равна  $\vec{j} \vec{E}$

Пусть потока энергии через границы поля нет. В таком случае

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{j} \vec{E}$$

и энергия поля убывает, если  $\vec{j} \vec{E} > 0$ , т.е. заряды движутся под действием сил поля. Если же  $\vec{j} \vec{E} < 0$ , то энергия поля растет, но в этом случае работают не силы поля, а сторонние силы, не сводящиеся к силе Лоренца. Простейший пример, иллюстрирующий это явление, состоит в разделении сторонними силами разноименных зарядов, увеличении расстояния между ними, что приводит к увеличению энергии поля. Энергия поля может изменяться (возрастать или убывать) и за счет убыли или роста кинетической энергии входящих в систему зарядов, что также описывается величиной  $\vec{j} \vec{E}$ , если заряды тормозятся, то ( $\vec{j} \vec{E} < 0$ ) энергия поля растет, если же заряды ускоряются, то ( $\vec{j} \vec{E} > 0$ ) энергия поля убывает. (Связь энергии поля и механической энергии зарядов разобрана ниже в § 3, п. 3.3)

**Пример 3.1 Единственность решения уравнений Максвелла.**

Используем выражение для энергии поля (3.8) в доказательстве единственности решения системы уравнений Максвелла при заданных  $\rho$  и  $\vec{j}$ . Предположим противное. Пусть имеется два решения  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  и  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$  при одних и тех же начальных и граничных условиях. В силу линейности уравнений их разность  $(\vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{B}' = \vec{B}_1 - \vec{B}_2)$  будет тоже решением системы, но при нулевых начальных и граничных условиях и при нулевых значениях  $\rho$  и  $\vec{j}$ . Например, из соотношений

$$\text{div } \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \text{div } \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

следует

$$\operatorname{div}(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

Поле  $(\vec{E}', \vec{B}')$  создает нулевой поток энергии через граничную поверхность (в силу нулевых граничных условий), и поэтому его энергия  $W'$  изменяться не может (заряды и токи отсутствуют). В начальный момент  $W' = 0$ , а поэтому  $W'$  равна нулю и во все последующие моменты времени. Однако равенство

$$\frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E'^2 + \frac{1}{\mu_0} B'^2 \right) dV = 0$$

выполняется только при  $\vec{E}' = 0$  и  $\vec{B}' = 0$ . Но тогда  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$  и  $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ , решение единственное.

**3.3. Закон сохранения энергии для изолированной системы поле-заряды.** Рассмотрим *изолированную систему* поле-заряды. В соответствии с формулой (3.8) убыль энергии поля для некоторого конечного объема  $V$  равна выходящему через его поверхность потоку энергии и работе электрических сил над зарядами. Но изолированность системы следует понимать как отсутствие потока энергии через ограничивающую ее поверхность (и отсутствие потока массы, который тоже уносил бы энергию). В таком случае формула (3.5) дает

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV = \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (3.12)$$

*Работа, совершаемая полем над зарядами в изолированной системе, равна убыли энергии электромагнитного поля в ней.*

Вопрос об изолированности системы поле-заряды уже обсуждался в § 2, п. 2.6. Вернемся к нему снова, так как теорема об изменении энергии поля позволяет освободиться от ограничения, связанного с конечностью объема  $V$ .

Допустим, что в пределе  $r \rightarrow \infty$  выполняются условия

$$E \sim \frac{1}{r^\alpha}, \quad B \sim \frac{1}{r^\beta},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные числа. Поток энергии  $N$  через поверхность сферы весьма большого радиуса  $R$

$$N \sim EBS \sim \frac{R^2}{R^{\alpha+\beta}}$$

При  $R \rightarrow \infty$  он обращается в нуль, если  $\alpha + \beta > 2$ .

Таким образом, для выполнения условия изолированности системы достаточным является условие убыли  $E$  и  $B$  быстрее, чем  $\frac{1}{r}$ . В таком случае слагаемое, выражающее

поток энергии, исчезает, если рассматривать все бесконечное пространство, из соотношения (3.5) получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_{\infty} \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV = \int_{\infty} \vec{j} \vec{E} dV \quad (3.13)$$

Вернемся к формуле (3.12). Ясно, что работа, производимая над зарядами, является мерой превращения энергии поля в другие виды (какие конкретно, это зависит от модели вещества, с которым связаны заряды): в кинетическую энергию заряженных частиц или тел, потенциальную энергию деформации, внутреннюю энергию среды

и т. д. В рамках рассматриваемой (простейшей) модели свободных заряженных материальных точек энергия поля переходит в кинетическую энергию частиц, как это следует из выражений (3.1) и (3.2). При дискретном распределении зарядов интеграл в правой части формулы (3.13) заменяется суммой

$$\sum_i q_i \vec{v}_i \vec{E}_i,$$

тогда согласно формуле (3.2) получаем равенство

$$-\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}},$$

из которого следует

$$\int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const.} \quad (3.14)$$

В равенстве (3.14) объем  $V$  может быть конечным или охватывать все бесконечное пространство. Это соотношение выражает закон сохранения энергии в изолированной системе поле-заряды и читается следующим образом: *в изолированной системе сохраняется сумма энергии поля и релятивистской энергии заряженных материальных точек.*

Если объем бесконечен, то достаточно, чтобы выполнялось условие  $E \sim \frac{1}{r^2}$ ,  $B \sim \frac{1}{r^2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда система поле-заряды может считаться изолированной. Как будет показано далее, данное условие, как правило, выполняется для конечных по размерам систем зарядов.

В § 2, п 2.5. затухание на бесконечности вводилось как граничное условие для полей в вакууме. Как сейчас становится очевидным, этим требованием обеспечивается конечность значений энергии рассматриваемых в электродинамике систем зарядов. Только такие системы имеют физический смысл.

В методическом плане существенно обратить внимание на формулу (3.14) еще в одном аспекте: полная энергия системы поле-заряды складывается из механической энергии материальных точек с массами  $m_i$  и энергии поля. Никакой потенциальной энергии взаимодействия зарядов между собой или зарядов и поля в формуле нет. Формула остается справедливой, если связи между полем и зарядами нет: материальные точки не заряжены, а поле свободно. Отсутствие потенциальной энергии взаимодействия — прямое следствие замены механической модели дальнего действия на полевую. А если нет взаимодействия на расстоянии, то нет и энергии этого взаимодействия. В концепции ближнего действия энергия приписывается только материальным объектам — телам, частицам, полю. В главе II будет показано, что в отдельных случаях (для статических полей) энергия поля может быть формально представлена как потенциальная энергия взаимодействия зарядов. Потенциальная энергия по своей природе всегда сводится к энергии поля — это фактически значение энергии поля, отсчитанное от некоторого уровня.

**3.4. Импульс электромагнитного поля. Закон сохранения импульса.** Выражение для импульса электромагнитного поля полу-

чим тем же методом, что и для энергии: образуем интеграл импульса для уравнения (2.25), привлекая уравнения поля (2.1).

Просуммируем все уравнения движения для заряженных материальных точек системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_i (q_i \vec{E}_i + q_i [\vec{v}_i \vec{B}_i]).$$

Считая распределение зарядов по пространству непрерывным, заменим сумму справа интегралом по объему системы:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \int_V \{ \rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}] \} dV. \quad (3.15)$$

Преобразуем теперь подынтегральное выражение с помощью уравнений Максвелла, подставляя соответствующие выражения вместо  $\rho$  и  $\vec{j}$

$$\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}] = \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \varepsilon_0 \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{B} \right] + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{B}]. \quad (3.15-a)$$

Чтобы в правой части равенства (3.15-a) получить производную по времени от некоторой величины, дополним ее слагаемыми:

$$- \varepsilon_0 \left[ \vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] - \varepsilon_0 [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}].$$

От этого равенство не нарушится, так как согласно уравнению (2.1-a) указанное выражение всегда равно нулю. Кроме того, добавим еще член, равный нулю:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \operatorname{div} \vec{B}.$$

Далее, группируя члены в правой части соотношения (3.15-a), получим

$$\rho \vec{E} + [\vec{j} \vec{B}] = - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 [\vec{E} \vec{B}] + \varepsilon_0 (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}]) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{B}]).$$

Это выражение позволяет записать формулу (3.15) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = & - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon_0 [\vec{E} \vec{B}] dV + \int_V (\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}]) dV + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{B}]) dV. \end{aligned} \quad (3.15-b)$$

Идея дальнейших преобразований состоит в том, что второй и третий интегралы в равенстве (3.15-b) сводятся к поверхностным и они исчезают, когда интегрирование распространяется на все про-

странство, т. е. когда мы имеем дело с изолированной системой поле-заряды (см П. IV). В результате получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 [\vec{E} \vec{B}] dV = 0,$$

из которого вытекают закон сохранения импульса для изолированной системы поле-заряды:

$$\sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + \int_V \epsilon_0 [\vec{E} \vec{B}] dV = \text{const.} \quad (3.16)$$

Величину под интегралом обозначают через  $\vec{g}$ , т. е

$$\vec{g} = \epsilon_0 [\vec{E} \vec{B}]. \quad (3.17)$$

Эта величина должна быть отождествлена с плотностью импульса поля.

Введем еще один энергетический параметр — плотность энергии в потоке  $\vec{w}$ . Если движение энергии происходит со скоростью  $c$ , то произведение  $\vec{w}c$  дает нам плотность потока энергии. Иными словами,

$$\vec{w} = \frac{g}{c}$$

Используя соотношение (3.7), получим для электромагнитного поля

$$\vec{w} = \frac{1}{\mu_0 c} |[\vec{E} \vec{B}]| \quad (3.18)$$

Сопоставляя выражения (3.17) и (3.18), находим, что

$$\vec{w} = cg$$

Таким образом, для энергии электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве со скоростью  $c$ , существует такая же связь между энергией и импульсом, какая характерна для релятивистских безмассовых частиц  $\epsilon = cp$ .

В то же время очевидно, что для всей энергии поля такое соотношение не выполняется. И лишь в частном случае электромагнитных волн (см главу III) соотношение (3.18) справедливо для всей энергии поля, ибо вся она в этом случае участвует в потоке.

Взаимодействие между заряженными материальными точками осуществляется посредством поля. Это приводит к несохранению импульса замкнутой механической системы материальных точек, если система обменивается импульсом с полем так, что импульс поля изменяется. Как следствие, в такой системе может не выполняться третий закон Ньютона, или равенство нулю главного вектора внутренних сил. Например, излучающее, рассеивающее, отражающее или поглощающее электромагнитные волны тело испытывает со стороны поля действия силы, так как импульс тела изменяется, но эта сила не имеет противодействующей: к полю не может быть приложена сила.

Обладая импульсом, электромагнитное поле оказывает давление на тела, с которыми взаимодействует. Теория Максвелла предсказала давление света, рассматривая свет как электромагнитные волны. Экспериментально световое давление было обнаружено П. Н. Лебедевым в 1899 г., блестяще подтвердившим правильность теории Максвелла.

**Пример 3.2** Вычисление плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса в плоской монохроматической волне (2.19)

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \left( \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \cos^2(\vec{k} \vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{o} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}] = \frac{\vec{k}}{\mu_0 k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k} \vec{r} - \omega t),$$

$$\vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{E} \vec{B}] = \frac{\vec{k} \varepsilon_0}{k} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$$

Плотность энергии в потоке при скорости ее движения  $c$  равна  $\frac{o}{c}$ , откуда  $g = \frac{\vec{w}}{c}$

В потоке движется вся энергия, если  $w = \vec{w}$  или

$$\left( \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) c = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0,$$

что возможно при

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{B_0}{2\mu_0}$$

Отсюда

$$E_0 = cB_0$$

## § 4. Уравнения для потенциалов электромагнитного поля

**4.1. Потенциалы электромагнитного поля.** Для решения основной задачи электродинамики — нахождения поля — необходимо проинтегрировать уравнения Максвелла. Как уже указывалось, задача прямого интегрирования уравнений во многих конкретных случаях наталкивается на значительные математические трудности. Затруднительным оказывается и теоретический анализ особенностей электромагнитного поля по многим важным вопросам. Трудности в значительной мере преодолеваются при сведении уравнений поля в первых производных (система Максвелла) к хорошо изученным в математике уравнениям второго порядка путем введения вспомогательных величин — потенциалов поля.

Любое векторное поле математически определяется полностью, если заданы его дивергенция и ротор. Поэтому система уравнений Максвелла (2.1) является полной. В ней ротор и дивергенция векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определяются распределением зарядов и токов.

Напомним, что поле, для которого не равна нулю дивергенция, но равен нулю ротор, называется полем источников или потенциальным полем. Линии его начинаются и оканчиваются на электрических зарядах — источниках поля. Поле, для которого не равен нулю ротор, но равна нулю дивергенция, называется вихревым или соленоидальным. Линии такого поля замкнутые кривые. В общем случае векторное поле может быть представлено суммой потенциальной и вихревой составляющих.

Обратимся к электромагнитному полю, описываемому системой уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Уравнения (б) и (в) системы показывают, что магнитная составляющая имеет чисто вихревой характер. Уравнение (б)  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  удовлетворяется тождественно, если ввести некоторую вспомогательную функцию  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , определяемую условием:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (4.1)$$

В самом деле,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0.$$

Вектор  $\vec{A}$  называют *векторным потенциалом* электромагнитного поля. Если он найден, то дифференцированием определяется  $\vec{B}$ . Прямой физический смысл имеет вектор  $\vec{B}$  — это измеряемая величина, а векторный потенциал  $\vec{A}$  — вспомогательная величина, на опыте непосредственно не измеряющаяся.

Электрическая напряженность поля, как показывают уравнения (а) и (г), имеет вихревую и потенциальную составляющие. Подберем вспомогательную величину — скалярный потенциал электромагнитного поля — так, чтобы тождественно удовлетворялось первое уравнение системы Максвелла. Подстановка выражения (4.1) в уравнение (а) дает

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это соотношение удовлетворяется тождественно, если положить

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (4.2)$$

где  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$  — *скалярный потенциал* поля.

Если  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  известны, то  $\vec{E}$  однозначно определяется указанными в (4.2) операциями дифференцирования.

Итак, с помощью определений (4.1) и (4.2) вместо векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  можно ввести потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , однозначно определяющие электромагнитное поле (и уменьшающее число уравнений системы Максвелла до двух независимых). Однако из дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) по заданным  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  сами потенциалы поля  $\varphi$  и  $\vec{A}$  определяются не однозначно, а с точностью до некоторой произвольной функции, так как потенциалы входят в эти уравнения под знаком частных производных. (Общее решение дифференциального уравнения в частных производных содержит произвольные функции независимых переменных.) Неоднозначность выбора потенциалов используется далее для упрощения уравнений поля в потенциалах и для упрощения расчетов в конкретных задачах.

Используем вместо  $\vec{A}$  и  $\varphi$  другие потенциалы  $\vec{A}'$  и  $\varphi'$ , связанные с  $\vec{A}$  и  $\varphi$  равенствами.

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } \psi, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где  $\psi = \psi(\vec{r}, t)$  — произвольная функция

Найдем векторы поля, соответствующие потенциалам (4.3):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}' &= \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \\ -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{aligned}$$

Вычисления показали, что векторный потенциал определен соотношениями (4.1) и (4.2) с точностью до градиента произвольной функции  $\psi$ , а скалярный — с точностью до производной по времени этой же функции. Но с физической точки зрения такая неоднозначность в определении потенциалов поля несущественна. Векторный и скалярный потенциалы в общем случае величины, физически не измеряющиеся; они вводятся как вспомогательные в целях математического удобства.

**Пример 4.1. Потенциальное поле точечного заряда.**

Покажем, что поле точечного электрического заряда описывается потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C,$$

где  $C$  — константа.

Находя напряженность по формуле (4.2), получаем известное выражение (2.7)

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad } \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

**Пример 4.2. Векторный потенциал однородного поля.**

Покажем, что однородное магнитное поле может быть описано векторным потенциалом

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B} \vec{r}],$$

где  $\vec{B}$  — постоянный во всех точках пространства вектор. Действительно, с помощью формулы 30 из приложения II имеем

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2} \text{rot } [\vec{B} \vec{r}] = \frac{1}{2} (-\vec{B} + 3\vec{B}) = \vec{B}.$$

**4.2. Уравнения электромагнитного поля в потенциалах.** Задача, поставленная в начале параграфа, состоит в придании системе уравнений Максвелла новой математической формы. Это достигается переходом от векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  к потенциалам поля  $\varphi$  и  $\vec{A}$ . Для получения уравнений поля в потенциалах выполним подстановку выражений (4.1) и (4.2) в уравнения Максвелла (2.3). Первая пара уравнений удовлетворяется тождественно (и далее не рассматривается). Уравнения (2.3-в) и (2.3-г) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \vec{A} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Первое из этих уравнений преобразуем, используя тождество (П. II, 27) и группируя члены:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Полученное уравнение можно упростить, пользуясь неоднозначностью в выборе потенциалов. Потребуем выполнения дополнительного условия:

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

которое называется *калибровкой Лоренца*. Теперь в рассматриваемом уравнении для векторного потенциала исчезает последнее слагаемое в правой части. В уравнении для скалярного потенциала член  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A}$  заменим на  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ .

Окончательно уравнения поля в потенциалах принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где потенциалы связаны с векторами поля соотношениями

$$-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad (4.7)$$

и на потенциалы наложено условие калибровки Лоренца (4.5).

Отметим важную особенность уравнений (4.6): векторный потенциал определяется только распределением токов, а скалярный — только распределением зарядов в системе. Это обстоятельство делает уравнения, по существу, независимыми, что значительно упрощает расчет поля. Кроме того, полученные уравнения одностепенны и хорошо изучены в математике — это уравнения Даламбера. Решения их найдены как во множестве частных задач, так и в общем виде.

**Пример 4.3. Калибровка Лоренца.**

Установим, что калибровка Лоренца укладывается в условия неоднозначности потенциалов (4.3), т. е. она не изменяет значений  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Пусть условие Лоренца не выполняется для некоторых потенциалов  $\vec{A}'$  и  $\varphi'$ .

$$\text{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = f(\vec{r}, t) \neq 0.$$

С помощью (4.3) перейдем к новым потенциалам

$$\vec{A} = \vec{A}' - \text{grad} \psi, \quad \varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

и потребуем, чтобы условие Лоренца (4.5) выполнялось

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div} (\vec{A}' - \text{grad} \psi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0$$

Для выполнения равенства (4.5) достаточно взять такую функцию  $\psi$ , чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t), \quad (4.8)$$

что и доказывает, что в пределах неопределенности выбора потенциалов (4.3) калибровка Лоренца (4.5) всегда возможна. Заметим, что функция  $\psi$  определена неоднозначно; к ней можно прибавить слагаемое  $\xi$ , являющееся решением уравнения

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.9)$$

так как

$$\Delta(\psi + \xi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\psi + \xi)}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t)$$

Таким образом, и калибровка Лоренца еще не приводит к однозначному выбору потенциалов. Вместо данных выражений для  $\vec{A}$  и  $\varphi$  можно использовать новые:  $\vec{A}''$  и  $\varphi''$ , причем

$$\vec{A}'' = \vec{A} - \text{grad } \xi, \quad \varphi'' = \varphi + \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

где  $\xi$  — любое решение уравнения (4.9). Окончательно вид функций  $\varphi(\vec{r}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  устанавливается уже в процессе решения конкретных задач при учете начальных и граничных условий.

**4.3. Понятие об общем решении уравнений поля в потенциалах.** Система уравнений в потенциалах (4.6) вместе с формулами, определяющими связь векторов поля с потенциалами (4.7), эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (2.1) или (2.3). Но в математическом отношении уравнения в потенциалах часто предпочтительнее. Главное достоинство уравнений поля в потенциалах состоит в том, что для них можно получить решение в общем виде. Поясним, как ставится и решается эта задача.

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета задано расположение и движение зарядов:

$$\varrho = \varrho(\vec{r}, t), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t),$$

а требуется найти векторы поля

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t).$$

Вместо непосредственного нахождения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определим сначала потенциалы поля  $\vec{A}$  и  $\varphi$ . Для этого мы располагаем системой (4.6), состоящей из четырех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_x, \\ \Delta A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_y, \\ \Delta A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_z, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Математически эти уравнения однотипны и являются уравнениями Даламбера вида

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t). \quad (4.11)$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения в частных производных складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения, называемого волновым,

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.12)$$

и любого частного решения исходного неоднородного уравнения (4.11):

$$u = v + u_{\text{ч}} \quad (4.13)$$

Так как векторы поля  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  должны быть определены однозначно, физический смысл имеют только однозначные и непрерывные вместе с первыми производными решения уравнений (4.10).

Как уравнение Даламбера, так и волновое уравнение исследованы настолько детально, что имеется возможность сразу записать общее решение. Мы не будем сейчас выписывать довольно громоздкие выражения решений, так как они непонятны без предварительного физического анализа, который проведем в следующем параграфе, а разъясним только физический смысл распада общего решения на две части.

Первое слагаемое общего решения – общее решение волнового уравнения – оказывается выражением для электромагнитных волн, существующих в пространстве и при отсутствии электрических зарядов. Это так называемое свободное поле. Какие именно волны имеют место, зависит целиком от начальных условий.

Каждое волновое уравнение из системы (4.10) есть дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, а такие уравнения имеют в общем решении две произвольные функции. Для исключения произвольных функций, т. е. для перехода к частному решению в каждом конкретном случае, служат начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{t=0} &= \varphi_{\text{нач}}(\vec{r}), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi_{\text{нач}}(\vec{r}). \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Аналогично для всех проекций  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned} A_x|_{t=0} &= A_{x\text{нач}}(\vec{r}), \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} \Big|_{t=0} &= A'_{x\text{нач}}(\vec{r}) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Иными словами, свободное поле входит в систему на начальный момент времени как заданное в каждой ее точке. Дальнейшая его эволюция описывается решением волнового уравнения.

Второе слагаемое общего решения уравнений поля в потенциалах — частное решение уравнений (4.10) — описывает конкретное поле, создаваемое заданной системой зарядов. Частный характер этого решения означает, что для каждой конкретной системы отыскивается свое поле. В силу неоднозначности выбора потенциалов поля они определяются в ряде задач с точностью до констант, последние определяются нормировкой потенциалов.

Для замкнутой изолированной системы зарядов в вакууме граничные условия — это условия убыви потенциала с увеличением расстояния от системы зарядов:

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \vec{A}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (4.15)$$

Если заряды занимают ограниченную область пространства (вблизи от начала координат), потенциалы должны убывать при  $r \rightarrow \infty$  не медленнее, нежели  $\frac{1}{r}$ .

После того как потенциалы определены, с помощью формул (4.7) находятся векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Тем самым задача по расчету поля оказывается решенной. Примеры решения задач на нахождение потенциалов поля приводятся в курсе далее.

## § 5. Решения уравнений поля

**5.1. Свободное электромагнитное поле. Плоские волны.** Ниже в параграфе отыскиваются и рассматриваются формулы решений уравнений поля в потенциалах. Задача отыскания общего решения разбита на этапы, причем отдельные части решения и частные решения имеют самостоятельное значение, так как относятся к характерным и практически важным случаям проявлений электромагнитного поля в природе и применения его в технике.

Начнем с общего решения волнового уравнения. Допустим, что электрические заряды отсутствуют, т. е. в пространстве имеет место одно электромагнитное поле. Такое поле и называют свободным. Конечно, в реальной действительности полностью исключить заряды не удастся; это только модельное представление. Однако понятие свободного поля имеет важное методологическое значение, так как позволяет изучать свойства поля (как вида материи) отдельно от зарядов.

Итак, поставим задачу об отыскании потенциалов свободного поля. Для этого в системе уравнений (4.6) приравняем правые части нулю и получим четыре однотипных *волновых уравнения* вида

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (5.1)$$

где через  $v$  обозначена любая из величин  $A_x, A_y, A_z, \varphi$ . Уравнение (5.1) допускает ненулевые решения. Это значит, что поле (в вакууме) может существовать в отсутствие зарядов.

Уравнение (5.1) получило свое название – волновое – потому что имеет решения, описывающие волновые процессы. Напомним, что волной в физике называется процесс распространения в пространстве временных изменений некоторой величины. Например, для волн в упругой среде – это распространение колебаний точек среды: каждая точка колеблется около положения равновесия, а колебания распространяются в среде в некотором направлении. Волны потенциала – это распространение некоторых значений величин  $\varphi$  и  $A$  от точки к точке пространства.

Для простоты рассмотрим сначала одномерный случай:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (5.2) допускает решение в виде

$$v = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5.3)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – произвольные функции аргумента  $t \pm \frac{x}{c}$ .

Решение (5.3) является (для одномерного случая) общим. Используя начальные условия, получаем два уравнения:

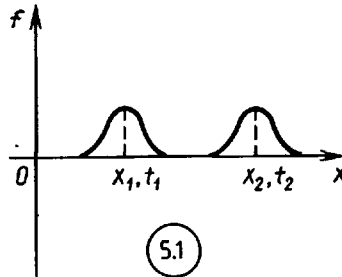
$$\begin{aligned} f_1\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2\left(\frac{x}{c}\right) &= \varphi_{\text{нач}}(x), \\ f_1'\left(-\frac{x}{c}\right) + f_2'\left(\frac{x}{c}\right) &= \psi_{\text{нач}}(x), \end{aligned}$$

откуда однозначно определяется вид функций  $f_1$  и  $f_2$ , удовлетворяющих начальным условиям. (Более подробное изложение вопроса о плоских волнах см. [2, 3].)

Нетрудно выяснить смысл решения: это бегущие волны потенциала. Значение функции  $f_1$ , взятое для точки  $x_1$  в какой-либо момент времени  $t_1$ , повторяется в другой момент времени  $t_2$  в другой точке  $x_2$  (рис. 5.1). Из условия  $t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c}$  имеем  $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$ , т. е.

«возмущения» (или значения) потенциала распространяются по оси  $Ox$  в положительном направлении со скоростью  $c$ . Соответственно  $f_2$  – волна, бегущая в противоположную сторону.

Перейдем теперь к трехмерному волновому уравнению (5.1) и будем искать его решение в виде бегущих волн:



$$v = f_1 \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right), \quad (5.4)$$

где  $\vec{k}_0$  — постоянный единичный вектор произвольного направления. Прямой подстановкой доказываем, что уравнение (5.1) удовлетворяется выражением (5.4) при произвольных функциях  $f_1$  и  $f_2$ .

Найдем геометрическое место точек, где бегущая волна потенциала имеет одно и то же значение в один и тот же момент времени.

Из условия постоянства фазы  $t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} = \text{const}$  следует

$$\vec{k}_0 \vec{r} = \text{const}.$$

Это уравнение плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{k}_0$ . Таким образом, решение (5.4) представляет собой плоские волны, причем фронт волны движется со скоростью  $c$ , а направление движения указано вектором  $\vec{k}_0$ .

Заметим, что оси координат можно выбирать так, чтобы вектор  $\vec{k}_0$  был коллинеарен оси  $Ox$ . Тогда  $\vec{k}_0 \vec{r} = x$ , и мы приходим к простым выражениям, полученным для одномерного случая, т. е. решение (5.4) фактически не является более общим, нежели (5.3).

Итак, волновое уравнение допускает решение в виде плоских волн. Решение содержит две произвольные функции, которые определяются начальными условиями. Что касается граничных условий, то в данном случае они полностью отсутствуют: в силу однородности пустого пространства никаких границ с особыми условиями в нем нет.

В процессе решения выяснена волновая природа свободного электромагнитного поля: оно может существовать только в виде волн, распространяющихся в пустоте со скоростью  $c$ .

**5.2. Гармонические составляющие свободного поля.** Найдем также некоторые частные решения уравнения (5.1). Используя прием разделения переменных, положим

$$v(x, y, z, t) = \varphi_x(x) \varphi_y(y) \varphi_z(z) f(t). \quad (5.5)$$

Подставив выражение (5.5) в формулу (5.1) и разделив полученное равенство почленно на  $v$ , имеем

$$\frac{1}{\varphi_x} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_y} \frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} + \frac{1}{\varphi_z} \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - \frac{1}{c^2 f} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0.$$

Такое равенство возможно лишь при выполнении следующих условий: каждое слагаемое равно константе, а сумма констант дает нуль. Обозначив постоянные  $k_x^2$ ,  $k_y^2$ ,  $k_z^2$ ,  $\frac{\omega^2}{c^2}$ , а затем приравнявая их соответствующим членам, получим четыре однотипных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - k_x^2 \varphi_x &= 0, & \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} - k_z^2 \varphi_z &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi_y}{dy^2} - k_y^2 \varphi_y &= 0, & \frac{d^2 f}{dt^2} - \omega^2 f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Причем

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Составляя характеристические уравнения  $r_i^2 = k_i^2$  для каждого уравнения системы (5.6), находим возможные частные решения с точностью до постоянного множителя:

$$\varphi_x = e^{\pm i k_x x}, \quad \varphi_y = e^{\pm i k_y y}, \quad \varphi_z = e^{\pm i k_z z}, \quad f = e^{\pm i \omega t}.$$

Отсюда следуют два различных решения для исходного волнового уравнения:

$$\varphi_1 = C_1 e^{\pm i (\vec{k} \vec{r} - \omega t)}, \quad (5.7)$$

$$\varphi_2 = C_2 e^{\pm i (\vec{k} \vec{r} + \omega t)}. \quad (5.8)$$

В обоих случаях

$$\omega = ck, \quad (5.9)$$

что же касается выбора знака перед  $i$ , то он несуществен.

Комплексные частные решения в отдельности физического смысла не имеют, так как потенциалы электромагнитного поля — вещественные величины. Но любая линейная комбинация частных решений (5.7), (5.8) есть также решение волнового уравнения. Воспользуемся этим свойством для построения вещественных частных решений, а также общего. Сначала получим два важных частных решения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{01} \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \\ \varphi_2 &= \varphi_{02} \cos(\vec{k} \vec{r} + \omega t), \end{aligned} \quad (5.10)$$

применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm i \alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha.$$

Они описывают плоские монохроматические гармонические волны с частотой колебаний  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  и длиной волны  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ; волновой вектор  $\vec{k}$  направлен перпендикулярно к фронту волны. Решение  $\varphi_1$  представляет собой волну, бегущую в направлении  $\vec{k}$ , а решение  $\varphi_2$  — волну противоположного направления распространения.

Для построения общего решения волнового уравнения достаточно взять линейную суперпозицию бесконечной совокупности монохроматических волн:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)} d\vec{k}, \quad (5.11)$$

где  $\varphi_0(\vec{k})$  — комплексные коэффициенты. Решение будет вещественным при выполнении условия:  $\varphi_0(\vec{k}) = \varphi_0^*(-\vec{k})$ . Интегрирование в (5.11) производится по всем возможным векторам  $\vec{k}$ , причем  $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$  и  $-\infty < k_x, y, z < \infty$ .

Формула (5.11) называется разложением свободного поля по гармоническим составляющим, оно основано на принципе суперпозиции свободных полей. Нетрудно видеть, что гармоники (5.7), (5.8) и (5.10) представляют собой основу для изучения любых свободных полей.

Решение (5.11) математически не что иное, как разложение в интеграл Фурье некоторой функции  $\varphi(\vec{r}, t)$  — решения волнового уравнения. Разложение удовлетворяет любым начальным условиям при соответствующем подборе коэффициентов  $\varphi_0(\vec{k})$ . Используя начальные условия (4.14), имеем

$$\varphi_{\text{нач}}(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

$$\psi_{\text{нач}}(\vec{r}) = \frac{-i}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \varphi_0(\vec{k}) \omega e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

откуда и определяются комплексные коэффициенты  $\varphi_0 = a + ib$ .

В качестве решения может использоваться и ряд Фурье:

$$\varphi = \sum_s \varphi_{0s} e^{i(\vec{k}_s \vec{r} - \omega_s t)}, \quad (5.11-a)$$

однако такие решения не являются самыми общими, так как представляют собой только периодические функции для потенциалов поля.

Полученные для скалярного потенциала частные и общие решения (5.10) и (5.11) автоматически обобщаются на векторный потенциал. Например, общее решение можно записать в виде разложения по гармоникам:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int \vec{A}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k}. \quad (5.12)$$

Подводя итог, заметим, что свободное волновое электромагнитное поле в любом случае сводится к той или иной системе плоских гармоник (5.10) — бегущих плоских монохроматических волн, отличающихся амплитудами, частотами, направлениями распространения. Существенно важным является еще вопрос о направлении векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{k}$  в плоской волне. Обсуждение этого вопроса отложим до § 9, а сейчас отметим, что волны векторного потенциала поперечны, т. е.  $\vec{A} \perp \vec{k}$ .

**5.3. Сферические волны.** В предыдущем пункте рассмотрены плоские волны, которые могут существовать в пространстве без зарядов, т. е. представляют собой пример поля, утратившего связь с зарядами. Однако предполагается, что образовалось свободное поле все же в системе, содержащей электрические заряды, а затем ушло за ее пределы. Для плоских волн система конечных размеров, их вызвавшая, должна находиться на бесконечном удалении от наблюдателя.

Рассмотрим теперь иной случай: система зарядов, излучающих электромагнитные волны может трактоваться как точечная и она находится в начале координат. Пока что мы анализируем не сам процесс излучения поля системой (он изучается в главе III), а особенности поля в свободном от зарядов пространстве. Но задача по срав-

нению с решенной в предыдущем параграфе видоизменяется: в пространстве выделена особая точка, поэтому свободное электромагнитное поле должно обладать центральной симметрией. Задачу следует решать в сферической системе координат.

Итак, решим волновые уравнения вида (5.1) для потенциалов поля в сферической системе координат, начало которой помещено в особую точку поля. Благодаря центральной симметрии потенциалы поля не зависят от углов  $\vartheta$  и  $\alpha$  (см. выражение оператора Лапласа в сферических координатах, П. II, 33). Поэтому уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему уравнению.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rv) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv) = 0, \quad (5.13)$$

в чем легко убедиться, выполняя указанные в уравнении (5.13) действия дифференцирования и помня, что  $r$  — независимая переменная.

Но уравнение (5.13) для функции  $u = rv$  есть волновое уравнение (5.2) для одномерной задачи, ее решения найдены в пункте 5.1:

$$rv = f_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{r}{c} \right),$$

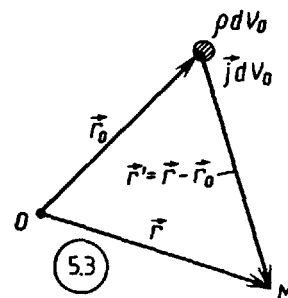
откуда

$$v = \frac{1}{r} f_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} f_2 \left( t + \frac{r}{c} \right). \quad (5.14)$$

Решение уравнения (5.14) интерпретируется как две *бегущие сферические* волны: расходящаяся от точки  $O$  с амплитудой, убывающей пропорционально  $\frac{1}{r}$ , и вторая — сходящаяся с растущей амплитудой.

В сферических волнах в фиксированный момент времени рассматриваемые величины  $\varphi$  и  $\vec{A}$  имеют постоянные значения на поверхности сферы с центром в начале координат — это волновой фронт данных волн. Для расходящейся волны волновой фронт движется от начала координат со скоростью  $c$ , для сходящейся — к началу координат. На рисунке 5.2 показаны фронты сферической волны через равные промежутки времени.

В отличие от плоских волн, у которых значение волнового поля сохранялось с течением времени во всех точках движущегося фронта волны, у сферических волн величины  $v$  убывают пропорционально  $\frac{1}{r}$ . Так как с источником поля ограниченных размеров следует связы-



Для приложений особенно важны сферические гармонические волны. Используя результаты § 5, п. 5.2, нетрудно записать формулы для потенциалов таких волн. Например, для монохроматических волн имеем

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\varphi_0}{r} \cos(kr - \omega t), \\ \vec{A} &= \frac{\vec{A}_0}{r} \cos(kr - \omega t),\end{aligned}\quad (5.15)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r} \int \vec{A}_0(k) e^{i(kr - \omega t)} dk. \quad (5.16)$$

Подводя итоги рассмотрения формул для потенциалов свободного поля, укажем, что при переходе от потенциалов к напряженностям поля с помощью формул (4.1) и (4.2) мы получим волновые поля для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . При этом гармоники для потенциалов дадут в результате дифференцирования, содержащегося в (4.1) и (4.2), аналогичные гармоники для напряженности и индукции. (Подробно этот вопрос изучается в главе III.)

Обсудим также, в каких случаях используется решение в виде плоских, а в каких в виде сферических волн. Как уже говорилось, плоская волна есть решение для пустого пространства, в котором все точки равноправны. Сферическая волна может быть отнесена к случаю с выделенной особой точкой — центром, излучающим волны. По условиям задачи особых точек может быть несколько, каждая из них рассматривается в

общем случае как источник сферических волн. Непрерывное множество особых точек может образовывать поверхность, все точки которой являются излучающими центрами

Нетрудно заключить, что решения волнового уравнения в виде сферических волн характерны для пространства, в котором, кроме электромагнитного поля, имеются тела, поверхности которых излучают сферические волны. Взаимодействие (интерференция) сферических волн приводит к дифракции первичных плоских волн, а последняя объясняется с помощью принципа Гюйгенса, выражающего количественную связь между упомянутыми системами волн (см. § 24, п. 24.3).

**5.4. Потенциалы поля стационарной системы движущихся зарядов.** Выше в § 5 (пп. 5.1, 5.2, 5.3) найдена первая часть общего решения уравнений поля. Приступаем к нахождению второй части — частного решения уравнений Даламбера (4.10), выражающего поле конкретной системы зарядов. Начнем с наиболее простого случая (но имеющего большую практическую ценность) — со стационарного движения зарядов, при котором плотности зарядов и токов от времени не зависят:

$$\varrho = \varrho(\vec{r}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}).$$

В этом случае потенциалы поля, созданного данной системой зарядов, от времени также не зависят, а уравнения поля (4.10) сводятся к односторонним уравнениям Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho; \quad (5.17)$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.18)$$

Получим решения этих уравнений, не стремясь к математической строгости, а руководствуясь физически наглядными соображениями.

Прежде всего разобьем все пространство на элементы  $dV_0$ , которые будем считать точечными. В них сосредоточены элементы заряда  $\varrho dV_0$  и элементы тока  $\vec{j} dV_0 = \vec{j} dV_0$ . По принципу суперпозиции поле складывается из полей, созданных этими зарядами. В принципе суперпозиции полей (2.17), созданных зарядами, фигурировали векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Однако  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определены через  $\varphi$  и  $\vec{A}$  с помощью линейных операций. Поэтому скалярно складываются  $\varphi$  и векторно  $\vec{A}$ , созданные отдельными зарядами.

Далее везде мы будем придерживаться обозначений рисунка 5.3:  $\vec{r}$  или  $x, y, z$  — координаты точки пространства, в которой вычисляем поле, или кратко — координаты точки наблюдения  $M$ ;  $\vec{r}_0$  или  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки пространства, в которой расположен заряд, или кратко — координаты заряда. По ним в наших формулах будет выполняться интегрирование, так как заряд распределен в пространстве непрерывно;  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от точечного заряда в точку, где поле рассчитывается, т. е. в точку наблюдения  $M$ .

Рассмотрим поле, созданное бесконечно малым зарядом  $\varrho dV_0$ , находящимся в точке пространства  $\vec{r}_0$ . Наши дальнейшие рассуждения о поле точечного заряда будут справедливы и для заряда

конечного по величине, но точечного; поэтому введем обозначение

$$q = qdV_0 \quad (5.19)$$

вместо  $dQ = qdV_0$ . Запишем уравнения поля в потенциалах (5.17) и (5.18) для этого заряда с помощью формул (2.25-а):

$$\Delta \varphi = - \frac{1}{\varepsilon_0} q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \quad (5.20)$$

$$\Delta \vec{A} = - \mu_0 q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (5.21)$$

Используя тождество (П. III, 9)

$$\Delta \frac{1}{r} = - 4\pi \delta(\vec{r}),$$

находим, что уравнение (5.20) удовлетворяется решением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}. \quad (5.22)$$

Полученная формула (5.22) имеет широкое применение сама по себе: это потенциал поля неподвижного точечного электрического заряда.

В процессе решения дифференциального уравнения в частных производных (5.20) потенциал может быть определен с точностью до любой функции  $\psi$ , являющейся решением уравнения Лапласа  $\Delta\psi = 0$ . В самом деле, новый потенциал  $\varphi' = \varphi + \psi$  в этом случае удовлетворяет уравнению (5.20). В частности, потенциал (5.22) определяют с точностью до константы.  $\varphi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} + C$ . В нашей формуле (5.22)  $C = 0$ . Это соответствует следующей нормировке потенциала:  $\varphi = 0$ , если  $r = \infty$ .

Соответственно для векторного потенциала имеем

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r'}. \quad (5.23)$$

Продолжим решение задачи о поле системы стационарно движущихся зарядов. Для этого вернемся к непрерывно распределенным по пространству зарядам. Потенциалы, созданные элементами тока и заряда, имеют вид

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q dV_0}{r'}; \quad (5.24)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV_0}{r'}. \quad (5.25)$$

Осталось согласно принципу суперпозиции просуммировать их по всему объему, занимаемому системой зарядов:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q(\vec{r}_0)}{r'} dV_0; \quad (5.26)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}_0)}{r'} dV_0. \quad (5.27)$$

Это и есть потенциалы поля в стационарном случае. Формулы

(5.26), (5.27) и уравнения (5.17) и (5.18) являются основой раздела электродинамики, изучающего стационарные поля (см. главу II).

**5.5. Запаздывающие потенциалы.** Изучим теперь решение уравнений поля со временем (4.10), т. е. для произвольно движущихся зарядов. Для этого запишем их для заряда в элементе объема, окружающего точку  $\vec{r}_0$  и принимаемого за точечный:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV_0, \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Очевидно, что везде, кроме точки  $\vec{r}_0$ , уравнения (5.28) сводятся к изученным ранее (5.13) с решениями, обладающими центральной симметрией. Такие решения уже найдены: это сферические волны вида (5.14). Их в данном случае следует считать испущенными точечными источниками, помещенными в точку  $\vec{r}_0$ . В выражении для потенциала (см. (5.14))

$$\frac{1}{r'} f\left(t \pm \frac{r'}{c}\right)$$

отношение  $\frac{r'}{c}$  показывает запаздывание (опережение) изменения поля в точке  $M$  по сравнению с точкой  $\vec{r}_0$ , происходящее вследствие конечной скорости распространения поля.

Однако вид функций  $f_1$  и  $f_2$  в формуле (5.14) не определен, мы же отыскиваем частное решение с конкретным видом функций. Для нахождения  $f_1$  и  $f_2$  рассмотрим малую окрестность точки  $\vec{r}_0$ . Пренебрегая запаздыванием значений потенциала в волне по времени, можно при  $r' \rightarrow 0$  взять вместо уравнений (5.28) асимптотические уравнения Пуассона, рассмотренные ранее (5.20) и (5.21). Их решения найдены: это выражения (5.24), (5.25). В нашем случае величины зарядов в элементах объема пространства не постоянны, а зависят от времени:  $\varrho = \varrho(\vec{r}_0, t)$ ,  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}_0, t)$ . Решения в виде сферических волн (5.14) и асимптотические решения (5.24) и (5.25) должны непрерывно переходить друг в друга. Поэтому поле, созданное элементом объема пространства, будет иметь скалярный потенциал:

$$d\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c}\right) dV_0}{r'} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c}\right) dV_0}{r'}.$$

Осталось просуммировать найденный потенциал по всем элементам объема пространства, где расположены заряды, чтобы получить искомое решение скалярного уравнения (4.10):

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c}\right)}{r'} dV_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho\left(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c}\right)}{r'} dV_0.$$

Аналогично получатся решения и для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} dV_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c})}{r'} dV_0.$$

(Интегрирование ведется по элементам объема, где находятся заряды, т. е. по точкам  $\vec{r}_0$  во всем бесконечном пространстве.)

Первые слагаемые найденных потенциалов носят название запаздывающих потенциалов:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} dV_0, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t - \frac{r'}{c})}{r'} dV_0, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

а вторые — опережающих:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c})}{r'} dV_0, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, t + \frac{r'}{c})}{r'} dV_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

Решения (5.29) и (5.30) скорее угаданы в наших рассуждениях, а не получены в результате строгой математической выкладки. Поэтому имеет смысл проверка их справедливости. Прямая подстановка решений в исходные уравнения убеждает нас в истинности решений. Подставим скалярный потенциал из (5.29) в уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} q$$

и произведем дифференцирование под интегралом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ \frac{1}{r'} \Delta q + 2 \nabla \frac{1}{r'} \nabla q - \frac{1}{r'c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right\} dV_0 + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int q \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c} \right) \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} q(\vec{r}). \end{aligned}$$

Последний интеграл в левой части этого равенства согласно тождеству (П. III, 9) дает  $-\frac{1}{\epsilon_0} q(\vec{r})$ . Следовательно, первый интеграл должен тождественно обратиться

в нуль. Выполним вычисления для всех трех слагаемых под интегралом:

$$1) \frac{1}{r'} \nabla \left[ \nabla q \left( t - \frac{r'}{c} \right) \right] = \frac{1}{r'} \nabla \left[ \dot{q} \left( -\frac{\vec{r}}{r'c} \right) \right] = \frac{1}{r'} \ddot{q} \frac{\vec{r}}{r'c} + \frac{1}{r'} \dot{q} \left( \frac{\vec{r}}{c} \frac{\vec{r}}{r'^3} - \frac{3}{r'c} \right) = \frac{1}{r'c^2} \ddot{q} - \frac{2}{c} \frac{\dot{q}}{r'^2}.$$

$$2) 2 \nabla \frac{1}{r'} \nabla q = - \left( \frac{\vec{r}}{r'^3} \right) \dot{q} \left( -\frac{\vec{r}}{r'c} \right) = \frac{2\dot{q}}{cr'^2}.$$

$$3) -\frac{1}{r'c^2} \ddot{q}.$$

Таким образом, подынтегральное выражение обратилось в нуль.

Подстановка (5.29) в уравнение (4.10) обратила его в тождество. Это доказывает, что формулы (5.29), (5.30) выражают решение уравнений поля. Осталось еще заметить, что они определены с точностью до любых функций  $\psi, \vec{A}'$ , являющихся решением соответствующего волнового уравнения. В принятом написании формул (5.29) и (5.30) потенциалы нормированы на нуль в бесконечном удалении от системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Решения в запаздывающих потенциалах имеют важный физический смысл и основополагающее для большинства задач электродинамики значение. Согласно формуле (5.29) поле в точке  $M(\vec{r})$  в момент времени  $t$  определяется значениями  $q$  и  $\vec{j}$  в точке  $\vec{r}_0$  в предыдущий момент времени  $t - \frac{r'}{c}$ . Таким образом, влияние зарядов и токов, создающих поле, на другие заряды и токи (внесенные в поле) передается в пустоте со скоростью  $c$ . С этой скоростью передаются изменения и возмущения поля. (Решение волнового уравнения уже привело ранее к этой скорости для распространения фазы волны или значения потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$ .)

Выводы о запаздывании являются выражением релятивистской идеи близкодействия, вытекающей в наших рассуждениях из уравнений Максвелла, а скорость распространения взаимодействия входит в уравнения через электрическую и магнитную постоянные  $\left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}\right)$ .

Итак, частное решение уравнений поля в потенциалах, отвечающее любому непрерывному распределению и движению зарядов в пространстве, найдено. Соответствующее найденным потенциалам поле и порождается непрерывной системой зарядов в вакууме. Если в соответствии с начальными условиями электромагнитных волн в пространстве нет, то решение в виде запаздывающих потенциалов для заданной системы зарядов однозначно определяет поле.

Что касается опережающего потенциала (5.30), то это решение возникло из-за симметрии уравнений электродинамики относительно обращения времени: преобразование  $t \rightarrow t' = -t$  не изменяет уравнений поля в потенциалах. Однако физического смысла обращения времени в макроскопической электродинамике не имеет, инвариантность уравнений относительно замены  $t$  на  $-t$  ни к каким наблюдаемым физическим явлениям не приводит. Опережающие потенциалы противоречат принципу причинности, в согласии с которым изменение заряда приводит к изменению поля и предшествует ему, а не наоборот. Поэтому решения в опережающих потенциалах нами далее не рассматриваются.

**Пример 5.1. Электромагнитное поле медленно ( $v \ll c$ ), равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.**

В этом случае можно воспользоваться решением уравнений (5.17) и (5.18) в виде (5.22) и (5.23):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r'}$$

для каждого момента времени, т. е. для каждого мгновенного значения  $r'$ . Выбирая начало координат на траектории заряда, имеем:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Напряженность и индукция поля определяются по формулам (4.7):

$$\vec{E} \approx -\text{grad } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{r'}; \quad (1)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \left[ \text{grad } \frac{1}{r'} \vec{v} \right] = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{r}' \vec{v}]}{r'^3}. \quad (2)$$

Из сравнения формул (1) и (2) усматривается их связь:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}].$$

**5.6. Характерные особенности и итоги общей задачи о расчете полей.** Найдем условия, при которых решения уравнений поля в потенциалах имеют физический смысл. Потенциалы должны быть конечны, т. е. интегралы в формулах (5.29), (5.30), распространенные на все пространство, должны быть сходящимися. Поместим начало координат в точку наблюдения. Тогда  $\vec{r} = 0$ ,  $\vec{r}' = \vec{r}_0$ . Вместо  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}_0$  используем обозначение  $\vec{r}$ . Формулы преобразуются к виду

$$\varphi_M(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV, \quad \vec{A}_M(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV.$$

Очевидно, что  $q$  и  $\vec{j}$  должны быть достаточно быстро убывающими функциями  $r$ , в противном случае интегралы расходятся.

Поле изолированной системы зарядов, занимающих ограниченную область пространства, должно достаточно быстро убывать на бесконечности. Можно уточнить необходимый характер убывания  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , привлекая на помощь формулу (3.8) для энергии поля и выражение для закона сохранения энергии (3.13), при выводе которых делалось существенное предположение об убыли  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  более быстрой, нежели  $\frac{1}{r}$ . Оно выполняется, если  $\varphi$  и  $\vec{A}$  стремятся к нулю как  $\frac{1}{r}$ .

Проверим, как ведет себя скалярный потенциал ограниченной в пространстве системы зарядов при  $r \rightarrow \infty$ . Из рисунка 5.3 видно, что  $r_0 \ll r'$ ,  $r' \approx r$ , так что можно взять общее запаздывание  $\frac{r}{c}$ . В таком случае

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int q\left(\vec{r}_0, t - \frac{r}{c}\right) dV_0 = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \sim \frac{1}{r},$$

что и требовалось. Аналогично обстоит дело и с потенциалом  $\vec{A}$ , модуль которого оказывается обратно пропорциональным расстоянию до системы.

Итак, потенциалы поля, а вместе с ними и векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , удовлетворяют имеющим физический смысл граничным условиям на бесконечности для системы зарядов, занимающей конечную область пространства.

Наконец, подведем итоги решения уравнений поля в потенциалах. Общее решение складывается из системы гармонических плоских волн всевозможных направлений и частот, а также решения в запаздывающих потенциалах:

$$\varphi_{\text{общ}} = \varphi_{\text{волн}} + \varphi_{\text{зап}},$$

$$\vec{A}_{\text{общ}} = \vec{A}_{\text{волн}} + \vec{A}_{\text{зап}}.$$

Поле складывается из свободного поля и поля, созданного системой зарядов, занимающих ограниченную область пространства.

Было выяснено, что при наличии точечного источника имеют место сферические волны. Но на больших расстояниях любая система зарядов конечных размеров может рассматриваться как точечная, а потенциалы, ею создаваемые, как сферические волны:

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

В свою очередь, если  $r$  велико по сравнению с областью, где ведутся наблюдения, то  $\frac{1}{r} = \text{const}$  и сферическая волна переходит в плоскую волну:

$$\varphi = f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поэтому плоские волны можно считать также испущенными некоторой системой зарядов, удаленной от точки наблюдения на очень большое расстояние. Обе составляющие поля — свободное поле и поле запаздывающего потенциала — можно считать имеющими общее происхождение, считать «порожденными» зарядами.

Однако далеко не всегда возможно восстановить предысторию движения и расположения зарядов за предшествующее настоящему моменту время и свести свободное поле к полю зарядов. Хорошим примером свободного поля служит так называемое реликтовое излучение, приходящее на Землю со всех точек небесной сферы. Оно было испущено зарядами на ранних стадиях образования Вселенной, т. е. 10 — 20 млрд. лет назад. Ясно, что при анализе поля, порожденного какой-либо наблюдаемой в настоящее время системой зарядов, реликтовое излучение в общем случае рассматривается как накладывающееся на поле системы, существующее независимо от нее. (Хотя по нему и получают некоторую информацию о ранних стадиях развития Вселенной.)

Второе слагаемое в общем решении — запаздывающий потенциал — соответствует полю, образованному зарядами в обозримом промежутке времени в прошлом и существующему в каждой точке

пространства в данный момент времени. Поскольку практический смысл имеет ограниченная в пространстве система зарядов, то историю ее движения – функции  $\rho(\vec{r}_0, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}_0, t)$  – необходимо знать только до некоторого начального момента времени в прошлом. Пусть  $R$  – максимальное расстояние до зарядов системы. В таком случае, зная плотности  $\rho$  и  $\vec{j}$  с момента времени  $t - \frac{R}{c}$ , можно в момент  $t$  и во все последующие моменты определить поле, создаваемое системой зарядов, в заданной точке наблюдения  $M$ .

На практике часто начальные условия упрощаются: до момента  $t = 0$  система находилась в стационарном движении ( $\rho(\vec{r}_0)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}_0)$ ), после чего – в нестационарном ( $\rho(\vec{r}_0, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}_0, t)$ ). Поэтому в момент  $t = 0$  потенциалы определяются постоянными начальными значениями, а затем – выражениями для запаздывающих потенциалов. Поле, имевшее в начальный момент статический характер, далее изменяется вместе изменением  $\rho$  и  $\vec{j}$  (с учетом запаздывания).

Наконец, типичны некоторые периодические изменения  $\rho$ ,  $\vec{j}$ , приводящие к периодическому же полю. В таком случае вопрос о начальном состоянии и о предыстории движения зарядов снимается.

Таковы в общих чертах итоги решения задачи электродинамики по нахождению поля в вакууме.

### Методические указания и рекомендации

I. Глава I курса содержит теоретические основы классической электродинамики: в ней введены основные понятия и величины, а также основные уравнения и принципы этой науки. Все остальное содержание электродинамики составляют выводы и следствия, полученные с помощью математических преобразований при решении системы уравнений Максвелла или Максвелла – Лоренца в тех или иных случаях конкретных систем полей и зарядов.

Основополагающее положение главы I определяет и методику ее изложения и изучения курса в целом; материал должен быть подробно изложен на лекциях; при изучении остальных глав курса, где возможности для самостоятельной работы студентов более благоприятны, следует постоянно возвращаться к этой главе.

Ввиду особой важности положений, изложенных в главе как для конкретных приложений теории к частным задачам, так и для понимания природы электромагнитных взаимодействий, студентам надо знать их качественные формулировки:

– Фундаментальные понятия электродинамики – это понятия электрического заряда и электромагнитного поля.

– Заряд – свойство элементарных частиц и тел, характеризующееся величиной заряда  $Q$ . Эта величина измеряется по силовому взаимодействию зарядов и токов. Заряды создают электромагнитное поле и испытывают силовое действие поля. Справедлив закон сохранения заряда.

– Электромагнитное поле – вид материи. Любой электрический заряд связан с собственным полем, но поле может существовать и в отрыве от зарядов, в свободном состоянии, в виде электромагнитных волн.

– Поле описывается величинами электрической напряженности  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ , характеризующими силовое действие поля на пробный точечный заряд. Сила определяется формулой Лоренца.

– Связь поля с зарядами описывается уравнениями Максвелла, которые позволяют рассчитать поле по заданному расположению и движению зарядов в пространстве, а при известном поле – определить расположение и движение зарядов, создающих поле.

– Для электромагнитного поля справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в векторном сложении электрических напряженностей  $\vec{E}_i$  и магнитных индукций  $\vec{B}_i$  полей, созданных в данной точке пространства разными зарядами. Векторы  $\vec{E}_i$  и  $\vec{B}_i$  характеризуют несколько полей, существующих одновременно в данной точке.

– Уравнения Максвелла, дополненные уравнением второго закона Ньютона, составляют систему уравнений Максвелла – Лоренца, описывающую систему поле-заряды. Изучение различных частных случаев проявления состояний этой системы составляет содержание всех вопросов электродинамики.

– Задача интегрирования уравнений Максвелла в общем случае решается с помощью перехода от напряженностей к потенциалам поля. Уравнения поля в потенциалах являются уравнениями Даламбера, хорошо изученными в математике.

– Общее решение уравнений поля в потенциалах представляет собой совокупность плоских монохроматических волн всевозможных частот, амплитуд, поляризаций, направлений распространения и запаздывающих потенциалов. Основная особенность электромагнитного поля состоит в том, что его переменные значения (возмущения) распространяются в пространстве со скоростью  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

– Закон сохранения энергии и импульса для поля справедлив для изолированной системы поле-заряды. В поле могут иметь место потоки энергии, переносящие ее с одного участка на другой.

– Все частные случаи полей содержатся в указанном общем решении и сводятся к электромагнитным волнам в пространстве, утратившим непосредственную связь с зарядами, и стационарному полю неподвижных или стационарно движущихся зарядов, к квазистационарным переменным полям (не излучающимся в пространство) и к излучаемым зарядами электромагнитным волнам.

II. В каждом разделе физики используется специфический математический аппарат. Для изучения электродинамики необходимо освоить векторную алгебру и векторный анализ (см. [3]). Чтобы

успешно работать с книгой, необходимо, по крайней мере, следующее:

- помнить наизусть определения (формулы) скалярного и векторного произведений, операций  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  (в декартовых координатах) и др.;

- уметь выполнять вычисления  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  для часто встречающихся выражений;

- помнить *основные* и уметь доказывать *все* часто встречающиеся тождества векторного анализа (П. II);

- знать свойства  $\delta$ -функции (П. III).

III. Полезно в процессе изучения курса составить для себя справочник по электродинамике, т. е. необходимо заносить в особый блокнот основные формулы с их названиями.

IV. По мере изучения параграфов курса контролируйте его усвоение, отвечая на вопросы к этим параграфам.

§ 1. Какие свойства материальных объектов характеризует электрический заряд? Какими свойствами обладает эта физическая величина? Выведите формулу (1.3). Получите размерности для  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Выведите формулу (1.10). Какие поля называют потенциальными, вихревыми? Как с помощью операций векторного анализа задать дифференциальные уравнения поля? Вспомните вид уравнений Лапласа, Пуассона, Даламбера (см. [2]). Решите задачу 1 из упражнений к главе.

§ 2. Выучите уравнения Максвелла наизусть. В каких задачах применимы уравнения (2.3)? Сформулируйте принцип суперпозиции полей. Предложите несколько задач, где он используется. Являются ли дифференциальная и интегральная формы уравнений физически и математически тождественными? Изобразите графически ряд электрических и магнитных полей. Назовите законы электромагнетизма, открытые до формулировки уравнений Максвеллом. Какие основания имеются для утверждения, что электромагнитное поле является видом материи? Чем поле отличается от вещества? Сравните постановку вопроса о поле в школьном и вузовском курсах. Как перейти от интегральной формы уравнений Максвелла к дифференциальной? Обсудите направление нормали к поверхности при использовании теоремы Гаусса, направление нормали и направление обхода контура в теореме Стокса. Решите задачи 2–6.

§ 3. Прodelайте самостоятельно выкладки, приводящие к формулам энергии и закону сохранения энергии поля. Назовите самые общие (философские) определения материи, движения, энергии применительно к полю, к системе поле-заряды. Назовите при выводе энергии поля исходные предположения. Обсудите вопрос о связи потенциальной энергии механической системы с энергией поля. Разберите все известные вам случаи перехода энергии электромагнитного поля в другие виды (в явлениях, механических устройствах и т. п.). Сопоставьте макроскопическую и микроскопическую (кванто-

вую) картины полей в связи с формулами энергии и импульса поля. Прочитайте об открытии светового давления в истории физики (см. [4]). Обсудите термин «поток энергии»: движется ли энергия как некая субстанция, или движется материя, обладающая энергией. Решите задачи 7–9.

§ 4. Вспомните свойства волнового уравнения и уравнения Даламбера (см. [2, 3]). Обсудите структуру общего решения уравнений поля в потенциалах. Почему функции  $\varphi$  и  $\vec{A}$  должны быть непрерывными вместе со своими первыми производными? Обсудите роль начальных условий, особенности граничных условий. Свяжите структуру общего решения с конкретными полями.

§ 5. Здесь дается основной аппарат для решения большинства задач курса. Для успешного изучения его необходимо повторение ряда вопросов из методов математической физики: решение волнового уравнения и уравнения Даламбера, разложение функций в ряд и интеграл Фурье и др. Полезно ответить на ряд вопросов: что называют в физике волновым движением, волной, плоскими волнами, сферическими волнами, гармоническими волнами? Определите амплитуду, фазу, частоту, длину волны. Докажите, что общее решение уравнения Даламбера имеет указанную в тексте структуру. Покажите, что условие  $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$  определяет плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{k}$ . Вспомните характеристическое уравнение для дифференциального уравнения. Вспомните формулы Эйлера и выразите  $\cos$ ,  $\sin$  через экспоненту. Покажите физический смысл запаздывающих потенциалов. Обсудите связь между плоскими и сферическими волнами. Рассмотрите стандартное обозначение векторов  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}_0$  в случае, если точка  $M$  совпадает с началом координат.

### Упражнения

1. Вычислить поток электрического поля через поверхность сферы радиусом  $r$ , если напряженность поля в системе с началом координат в центре сферы выражается формулой

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

2. Вычислить поток вектора однородного поля  $\vec{E}$  через произвольную конечную замкнутую поверхность.

3. Вычислить поток вектора магнитной индукции поля через произвольную конечную замкнутую поверхность.

4. Найти циркуляцию вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру, используя выражение для потенциала поля.

5. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции поля по любому замкнутому контуру и показать, что в общем случае она отлична от нуля.

6. Доказать, что циркуляция вектора однородного поля  $\vec{B}$  по замкнутому контуру равна нулю.

У к а з а н и е. Задачи 1–6 можно решить с помощью теорем Гаусса и Стокса.

7. Выразить работу по перемещению точечного электрического заряда в электромагнитном поле через потенциалы поля.

8. Обсудить вопрос о возможности или невозможности введения изолированной системы поле-заряды при наличии плоских электромагнитных волн.

9. Обсудить вопрос о возможности или невозможности введения изолированной системы при наличии сферических электромагнитных волн.

10. Показать, что задание ротора и дивергенции полностью определяет векторное поле.

$$\text{Пусть } \operatorname{div} \vec{a} = \vec{f}_1(\vec{r}), \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{f}_2(\vec{r}).$$

Разложим исходный вектор на составляющие  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , причем

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{div} \vec{a}_1 &= f_1, & 2) \operatorname{div} \vec{a}_2 &= 0. \\ 3) \operatorname{rot} \vec{a}_1 &= 0, & 4) \operatorname{rot} \vec{a}_2 &= \vec{f}_2. \end{aligned}$$

Положим  $\vec{a}_1 = -\operatorname{grad} \varphi$ . Тогда уравнение (3) удовлетворяется тождественно, а из уравнения (1) следует

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = f_1,$$

или

$$\Delta \varphi = f_1.$$

Последнее уравнение имеет решение

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{r}_0) dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \text{const},$$

тогда

$$\vec{a}_1 = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{r}_0) dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \text{вектор } \vec{a}_1 \text{ найден.}$$

Подстановка  $\vec{a}_2 = \operatorname{rot} \vec{A}$  обращает уравнение (2) в тождество, а из уравнения (3) имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{f}_2.$$

Дополняя выбор  $\vec{A}$  условием  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ , имеем

$$\Delta \vec{A} = -\vec{f}_2.$$

Это уравнение имеет решение

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0) dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad \vec{a}_2 = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{f}_2(\vec{r}_0) dV_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}.$$

(Условие  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  не ограничивает общность, так как преобразование  $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$  при произвольной  $\psi$  не изменяет  $\operatorname{rot} \vec{A}$ . Пусть

$\operatorname{div} \vec{A} = f$ . Для  $\vec{A}'$  имеем  $\operatorname{div} \vec{A}' - \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = f$ ; следовательно, для выполнения равенства  $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$  нужно, чтобы  $\Delta \psi = -f$ . Поскольку  $\psi$  — произвольный скаляр, это всегда возможно.)

## Глава II

### СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Выше рассмотрены общая система уравнений для электромагнитного поля и общее решение этой системы. Сейчас мы приступаем к анализу частных проявлений поля, образованного конкретными системами зарядов, в которых расположение и движение зарядов подчинены определенным ограничениям (например, заряды покоятся, движутся равномерно и т. д.). Сразу же оговорим одно условие для всех задач подобного рода. Общее решение уравнений поля в потенциалах складывается из общего решения уравнений (4.10) без правой части и частного решения этих полных уравнений — решения в виде запаздывающих потенциалов. С помощью принципа суперпозиции полей первое слагаемое — совокупность плоских волн — можно отнести к пустому пространству без зарядов; поэтому волны могут иметь место в любой задаче при любой системе зарядов и конкретно определяются начальными условиями. В задачах, где отыскивают поле зарядов, нет смысла рассматривать волновую часть решения, а следует сосредоточиться только на втором слагаемом, относящемся к полю, созданному данной системой зарядов. Иными словами, мы всякий раз решаем задачу с начальными условиями, соответствующими отсутствию волнового поля, не связанного с зарядами, данными в задаче.

#### § 6. Стационарное электрическое поле в вакууме

**6.1. Особенности стационарных полей.** Стационарное поле возникает при условии  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  и  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$ , т. е. плотности токов и зарядов постоянны во времени. В этом случае уравнения поля в потенциалах (4.10) допускают независящие от времени решения, найденные ранее в § 5; они выражены формулами (5.26) и (5.27). Решения можно получить и из формул для запаздывающих потенциалов (5.29), отбрасывая зависимость величин  $\rho$  и  $\vec{j}$  от времени:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}_0)}{r'} dV_0; \quad (6.1)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'} dV_0. \quad (6.2)$$

$$A_3 = -\frac{\mu_0 j}{2} \left\{ (b^2 - a^2) \ln r + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) + a^2 \ln a - b^2 \ln b \right\},$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{b^2 - a^2}{r}.$$

(При  $a = 0$  получается поле тока, текущего по сплошному цилиндру:

$$B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r, \quad 0 \leq r \leq b;$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad b \leq r \leq \infty;$$

$$I = j\pi b^2.)$$

### Глава III

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В данной главе исследуется свободное электромагнитное поле существующее и распространяющееся в пространстве в виде электромагнитных волн. Как показано в § 5, произвольное волновое поле может быть представлено суперпозицией плоских волн вида  $f\left(t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c}\right)$ . Ниже волны рассматриваются подробнее; кроме того, обсуждается их происхождение, т. е. излучение электромагнитных волн системой электрических зарядов.

### § 9. Плоские электромагнитные волны

**9.1. Уравнения Максвелла и образование электромагнитных волн.** Положим в уравнениях Максвелла (2.3)  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ , тогда уравнения описывают свободное электромагнитное поле в пустоте:

$$\left. \begin{array}{ll} 1. \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & 3. \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ 2. \operatorname{div} \vec{E} = 0, & 4. \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

Из уравнений (9.1) непосредственно вытекает, что электрическое и магнитное поля в данном случае соленоидальны, линии векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  являются замкнутыми. В отличие от общего случая, рассмотренного выше, в § 2, источников линий электрического поля нет, и они охватывают линии переменного вектора  $\vec{B}$ . Магнитная составляющая любого поля соленоидальна, но в данном случае магнитное поле вызвано только «токами смещения»: линии магнитного поля охватывают линии переменного вектора  $\vec{E}$ .

Ни о каком разделении электромагнитного поля на самостоятель-

ные электрическое и магнитное поля, как это имело место в стационарных полях, не может быть и речи: обе компоненты электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  оказываются взаимосвязанными и взаимообусловленными. Изменение во времени одной компоненты влечет за собой появление и согласованное изменение другой, а ее изменение приводит снова к возникновению первой и т. д.

Взаимосвязь переменных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а также конечная скорость распространения поля в пространстве приводят к электромагнитной волне; процесс изменения векторов поля в пространстве и времени имеет волновой характер, т. е. состояние полей, имеющее место в некоторой точке пространства, повторяется через определенный промежуток времени в другой точке, распространяясь со скоростью  $c$ .

Волновой характер свободного поля обнаруживается уже при ближайшем исследовании уравнений (9.1). Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1) из данной системы:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Выполняя действия в левой и правой частях равенства, получим с учетом (2)

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.2)$$

Аналогично доказывается, что уравнения (3) и (4) эквивалентны уравнению

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.3)$$

Но уравнения (9.2) и (9.3) являются волновыми уравнениями; они имеют решения в виде плоских волн (см. § 5, п. 5.1):

$$\vec{E} = \vec{E} \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right), \quad \vec{B} = \vec{B} \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right).$$

Таким образом, волновой характер свободного поля выяснен.

В работах Максвелла и его ближайших последователей электромагнитные волны рассматривались как распространение колебаний особой субстанции – эфира, заполнявшего все пространство. В ту эпоху преобладал механистический подход к физическим явлениям.

Все физические процессы стремились объяснить движением частиц или движением вещества, непрерывно заполняющего пространство некоторой сплошной среды. Однако в процессе теоретического анализа свойств эфира и сопоставления его результата с экспериментом возникли непреодолимые противоречия. Например, эфиру как упругой среде с огромной скоростью распространения волн следует приписать гигантскую жесткость. Тогда становится непонятной возможность движения тел в эфире без сопротивления. Мы обсуждали уже трудности гипотезы об эфире в связи с опытами Майкельсона (см. [1], ч. II). В итоге от эфира как упругой среды, в

которой существуют волны, пришлось отказаться. Окончательно вопрос был решен в связи с созданием СТО. Физики поняли, что электромагнитное поле способно существовать само по себе, реализуясь через цепочку взаимопревращений электрической и магнитной составляющих. Эти две компоненты единого поля возбуждают друг друга, обеспечивают движение поля из одной области пространства в другую. Электромагнитные волны имеют отнюдь не механический характер колебаний некоей упругой среды и для своего существования в такой среде не нуждаются; эти волны не только волновой процесс, но и вид материи, существующий наряду с веществом.

**9.2. Векторы напряженности и индукции плоской электромагнитной волны.** В предыдущем пункте получены волновые уравнения для векторов поля (9.2) и (9.3). Однако для анализа особенностей свободного электромагнитного поля нам удобнее воспользоваться ранее найденными решениями уравнений поля в потенциалах.

Для вакуума при отсутствии зарядов уравнения поля в потенциалах имеют вид волновых уравнений

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  связаны с векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  соотношениями

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Кроме того, на потенциалы наложено условие калибровки Лоренца:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Покажем, что в случае свободного поля калибровку можно дополнить с целью дальнейшего упрощения системы (9.4). Воспользуемся тем, что потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  заданы неоднозначно. Вместо них допустимо использовать другие функции  $\vec{A}'$  и  $\varphi'$ , причем

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где  $\psi$  — произвольное решение волнового уравнения

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Положим

$$\psi = \int \varphi dt + \text{const},$$

где  $\varphi$  — любое решение второго уравнения системы (9.4). Такая функция  $\psi$  тоже удовлетворяет волновому уравнению. Это значит, что потенциал  $\varphi'$  может быть выбран тождественно равным нулю. Если  $\varphi' = 0$ , то из калибровки Лоренца следует равенство нулю  $\text{div } \vec{A}'$ .

На решения уравнений (9.4) накладываются два условия:

$$\varphi = 0, \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (9.5)$$

Соотношения (9.5) носят название *волновой калибровки потенциалов*. Она возможна только в свободном от зарядов пространстве, где  $\varrho = 0$ , так как функция  $\varphi = 0$  удовлетворяет волновому уравнению, но не является решением уравнения Даламбера с отличной от нуля правой частью. Итак, второе из уравнений (9.4) отбрасывается, остается только первое. Векторы поля находятся из соотношений

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \operatorname{div} \vec{A} = 0; \quad (9.6)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (9.7)$$

Уравнение (9.6), как показано ранее, допускает решение в виде плоских волн:

$$\vec{A} = \vec{A} \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right),$$

где  $\vec{k}_0$  — единичный вектор, задающий направление движения фронта волны. Вычислим векторы поля плоской волны:

$$\vec{E} = -\dot{\vec{A}}; \quad (9.8)$$

$$\vec{B} = [\nabla \vec{A}] = \left[ \nabla \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right) \dot{\vec{A}} \right] = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}} \vec{k}_0] = \frac{1}{c} [\vec{k}_0 \vec{E}]. \quad (9.9)$$

В формулах (9.8) и (9.9) точка над буквой обозначает дифференцирование по аргументу  $\left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right)$ . При выводе (9.9) использована формула П. II, 23.

Из условия калибровки (9.5) следует

$$\dot{\vec{A}} \vec{k}_0 = 0.$$

(Применяется формула П. II, 16.) Но это означает, что  $\dot{\vec{A}} \perp \vec{k}_0$ , поэтому и  $\vec{E} \perp \vec{k}_0$ . В свою очередь, из (9.9) следует, что  $\vec{B} \perp \vec{E}$  и  $\vec{B} \perp \vec{k}_0$ .

Полученные соотношения показывают, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{k}_0$  составляют правую тройку. В плоской электромагнитной волне векторы поля всегда перпендикулярны лучу — линии, по которой распространяется фронт волны. Следовательно, электромагнитная волна относится к поперечным волнам, в которых колебания каких-то физических характеристик происходят в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{k}_0$ .

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  являются функциями координат и времени, причем согласно формулам (9.8) и (9.9)

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E} \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right), \\ \vec{B} = \vec{B} \left( t - \frac{\vec{k}_0 \vec{r}}{c} \right). \end{cases} \quad (9.10)$$

Модули векторов связаны соотношением

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|. \quad (9.11)$$

Формулы (9.10) и (9.11) вместе с условием, связывающим направления векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}_0$ , описывают *плоские волны напряженности и индукции*, распространяющиеся в пространстве со скоростью  $c$ . Обе волны согласованы друг с другом во времени: у них одинаковые фазы, поэтому изменения векторов в каждой точке пространства происходят синхронно. В частности, они одновременно достигают максимальных и минимальных по модулю значений.

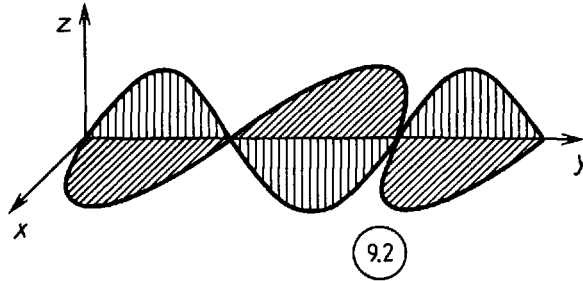
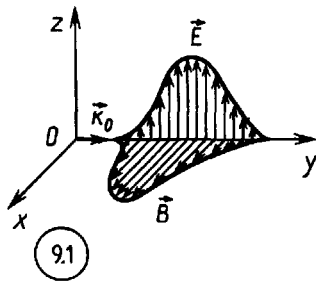
Графическая иллюстрация электромагнитной волны дана на рисунке 9.1, который представляет «мгновенную фотографию» поля, распространяющегося по оси  $Oy$  вправо.

Рассчитаем также значения плотности энергии, плотности потока энергии и плотности импульса электромагнитных волн. С помощью формул (9.9), (9.11) и общих формул (3.6), (3.7) и (3.17) для соответствующих величин имеем

$$\begin{cases} w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2, \\ \vec{\sigma} = c \varepsilon_0 E^2 \vec{k}_0 = c \frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{k}_0 = c w \vec{k}_0, \\ \vec{g} = \frac{1}{c} \varepsilon_0 E^2 \vec{k}_0 = \frac{1}{c} \frac{1}{\mu_0} B^2 \vec{k}_0 = \frac{w}{c} \vec{k}_0. \end{cases} \quad (9.12)$$

Отсюда, в частности, видно, что вся энергия плоских электромагнитных волн участвует в потоке, так что между энергией и импульсом поля выполняется релятивистское соотношение

$$w = gc.$$



**9.3. Гармонические составляющие свободного поля.** Важное значение имеет частный случай плоских волн: волны гармонические (или монохроматические). Для них

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t),$$

откуда

$$\begin{cases} \vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} = [\vec{A}_0 \vec{k}] \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t). \end{cases} \quad (9.13)$$

Последние формулы удобнее представить в виде

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t), \end{cases} \quad (9.14)$$

причем

$$\vec{B} = \frac{1}{c} [\vec{k}_0 \vec{E}], \quad \vec{E} \perp \vec{k}_0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \vec{k}_0 = \frac{\vec{k}}{k}. \quad (9.15)$$

(Графическая иллюстрация гармоник представлена на рисунке 9.2.)

В общем случае векторы свободного поля могут быть представлены суперпозицией плоских поперечных гармоник всевозможных частот, амплитуд и направлений распространения, например:

$$\vec{E} = \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)} d\vec{k}, \quad (9.16)$$

где применены сокращенные обозначения:

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \vec{E}_0(k_x, k_y, k_z), \quad d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z.$$

Аналогичное разложение может быть записано и для вектора  $\vec{B}$  с учетом формул связи (9.15) для каждой моды. (В физике часто используется термин «мода» для обозначения гармонических составляющих сложного колебательного движения.)

Вывод о существовании гармонических составляющих свободного поля следует и непосредственно из уравнений (9.2), (9.3), так как функции вида

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)}$$

являются их частными решениями.

Гармоника (9.14) оказывается элементом любого волнового электромагнитного поля.

**Пример 9.1. Волновой пакет.**

На практике строго монохроматические поля не встречаются, однако весьма характерен случай однонаправленных волн, близких по амплитуде и частоте. Рассмотрим в качестве примера спектрального разложения (9.16) векторы такого поля, как суперпозицию волн с примерно одинаковой амплитудой  $\vec{E}_0(k)$  и волновыми числами, лежащими в узком интервале  $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$ . Воспользовавшись разложением (9.16), пишем для одномерного случая, где порядок следования слагаемых в показателе удобнее изменить (см. § 5, П. 5.2):

$$\vec{E} = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} \vec{E}_0(k) e^{i(\omega_k t - kx)} dk \approx \vec{E}_0(k_0) \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} e^{i(\omega_k t - kx)} dk.$$

Переходя к новой переменной  $\xi = k - k_0$  и учитывая равенство  $\omega = kc$ , имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_0(k_0) \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{i(c\xi t - \xi x)} d\xi = 2E_0 \frac{\sin \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}{c \left(t - \frac{x}{c}\right)} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \quad (9.17)$$

Получена плоская волна с частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k_0$ , модулированная по амплитуде множителем

$$2E_0 \frac{\Delta\omega}{c} \frac{\sin \Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}{\Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)}. \quad (9.18)$$

График квадрата амплитудного множителя (при некотором фиксированном  $t$ ) изображен на рисунке 9.3, а.

Волновое поле (9.17) имеет заметно отличные от нуля амплитуды на отрезке  $(x_1, x_2)$  оси  $Ox$ , причем

$$\frac{\Delta\omega}{c} (x_2 - x_1) = 2\pi.$$

Таким образом, мы получили *волновой пакет*, размеры которого удовлетворяют соотношению

$$\Delta k \Delta x = 2\pi.$$

Фиксируя координату  $x$ , получаем развертку колебаний во времени. В соответствии с формулой (9.18)  $\Delta\omega \Delta t = 2\pi$  (рис. 9.3, б).

Если еще учесть существование дополнительных областей с отличной от нуля амплитудой, то получим неравенства

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi, \quad \Delta\omega \Delta t \geq 2\pi. \quad (9.19)$$

Волновой пакет движется в пространстве. Скорость перемещения его как целого называется групповой. Групповая скорость находится из условия:

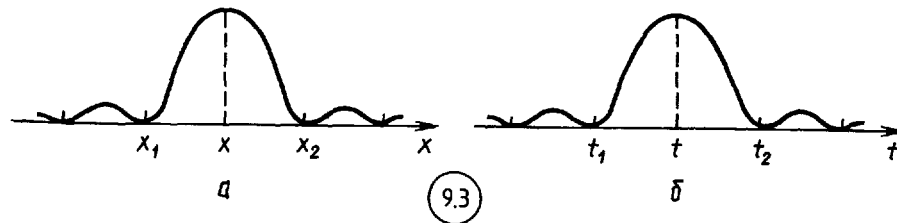
$$\Delta\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) = \text{const},$$

откуда

$$v_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = c. \quad (9.20)$$

Групповая скорость пакета в вакууме оказалась равной фазовой скорости волны:

$$c = \frac{\omega}{k}.$$



Электромагнитные волны играют чрезвычайно важную роль в окружающей нас природе, в применяемой человеком технике. Достаточно сказать, что свет, радиоволны, рентгеновы лучи и т. д. — все это электромагнитные волны. Простейший волновой сигнал содержит начало и окончание колебаний векторов поля  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ , что и фиксируется в точке наблюдения как цуг электромагнитных волн. С помощью неравенств (9.19) заключаем: чем короче сигнал, тем шире спектр его частот. Таким образом, чем больше скорость передачи информации (больше число сигналов в единицу времени), тем шире необходимый интервал частот и выше максимальные частоты, применяемые для передачи.

Указанная принципиальная закономерность имеет и другой аспект: монохроматическую волну может дать лишь бесконечно долго работающий излучатель. Если же он функционировал время  $\Delta t$ , то в излучении будут присутствовать волны с набором частот  $\Delta \omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ . Последнее означает, что *ширина спектральной линии* ( $\Delta \omega$ ) зависит от

времени действия излучающей системы. С помощью макроскопических излучателей в настоящее время удается получить весьма узкие спектральные линии (например, с помощью квантовых генераторов).

Наконец, существует еще один момент, отражаемый формулой (9.19): если необходимо создать электромагнитное поле в ограниченной области пространства, то нужно пользоваться набором частот тем большим, чем меньше область пространства.

**Пример 9.2. Разложение по плоским волнам.**

Пусть волновое поле задано на начальный момент времени:

$$E(x, 0) = e^{-x^2/a^2},$$

где  $a$  — некоторая постоянная.

В произвольный момент времени поле описывается разложением (9.16):

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (1)$$

Используя начальные условия, получаем

$$e^{-x^2/a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{ikx} dk. \quad (2)$$

Но это — разложение известной функции в интеграл Фурье по системе ортонормированных функций  $e^{ikx}$ . Наша задача сводится к нахождению коэффициентов Фурье  $E_0(k)$ :

$$E_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{ika}{2}\right)^2} dx.$$

Полученный интеграл известен, он равен  $a\sqrt{\pi}$ . Поэтому

$$E_0(k) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}.$$

Отсюда видно, что основной вклад дают компоненты, соответствующие интервалу значений волнового вектора:

$$-\frac{2}{a} \leq k \leq \frac{2}{a}.$$

Подставляя найденные значения  $E_0(k)$  в формулу (1) и выполняя интегрирование, получим выражение для волнового поля в произвольный момент времени

$$E(x, t) = e^{-\frac{(x - ct)^2}{a^2}}.$$

Волновой пакет движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $c$  без изменения формы.

**9.4. Поляризация электромагнитных волн.** В суперпозицию (9.16), описывающую произвольное свободное электромагнитное поле, входят монохроматические составляющие всевозможных частот, амплитуд и направлений распространения. При анализе этого выражения было оставлено без внимания направление колебаний в каждой гармонике. Вектор  $\vec{E}_0(\vec{k})$  перпендикулярен волновому вектору  $\vec{k}$ . В остальном его направление произвольно. Очевидно, что любую гармоническую составляющую поля  $\vec{E}_0(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$  можно представить состоящей из двух гармоник с амплитудами, направленными по двум заранее выбранным перпендикулярным друг другу и вектору  $\vec{k}$  направлениям. Обозначим соответствующие единичные векторы символами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ . Тогда

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \vec{e}_1 E_{0,1}(\vec{k}) + \vec{e}_2 E_{0,2}(\vec{k}).$$

Теперь разложение детализируется:

$$\vec{E} = \{ \vec{e}_1 E_{0,1}(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})} + \vec{e}_2 E_{0,2}(\vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})} \} d\vec{k}. \quad (9.21)$$

В зависимости от того, с какими амплитудами ( $E_{0,1}(\vec{k})$  и  $E_{0,2}(\vec{k})$ ) входят в разложение гармоники, получится то или иное направление вектора поля  $\vec{E}$ . Оно может оказаться переменным во времени и неодинаковым в различных точках пространства.

*Плоскополяризованной* называется волна, в которой направление вектора  $\vec{E}$  является постоянным. Ясно, что рассмотренные ранее монохроматические волны — гармоники (9.13) — плоскополяризованные. В пакете таких гармоник с одним и тем же направлением вектора  $\vec{E}$  также будет иметь место плоская поляризация.

Рассмотрим еще другой случай поляризации волн. Пусть имеются две гармоники одинаковой частоты, но с различными начальными фазами, причем одна из них имеет только отличную от нуля составляющую  $\vec{e}_1 E_1$ , а другая —  $\vec{e}_2 E_2$ . Направляя ось  $Oz$  по  $\vec{k}$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  — по  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , получим при разности фаз  $\frac{\pi}{2}$

$$E_x = E_{0,1} \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E_{0,2} \sin(\omega t - kz). \quad (9.22)$$

Геометрическим местом концов вектора  $\vec{E}$  в плоскости  $Oxy$  служит эллипс

$$\frac{E_x^2}{E_{0,1}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0,2}^2} = 1,$$

а в пространстве — эллиптическая спираль с шагом  $l = \frac{2\pi}{k} = \lambda$ . Это так называемая *эллиптическая поляризация*. Если  $E_{0,1} = E_{0,2}$ , то поляризация круговая. Волны типа (9.22) излучаются некоторыми простейшими системами, например ротатором (см. задачу 4 к данной главе). Понятно, что эллиптически поляризованным окажется волновой

пакет, если он образован двумя соответствующими совокупностями гармоник (9.22).

**Пример 9.3.** Выражения для векторов плоской монохроматической волны, распространяющейся по оси  $Ox$  (или против) и поляризованной в плоскости  $Oxz$ .

$$E_x = E_y = 0, \quad B_x = B_z = 0,$$

$$E_z = E_0 \cos(kx \mp \omega t), \quad B_y = \frac{E_0}{c} \cos(kx \mp \omega t).$$

**Пример 9.4.** Выражения для векторов поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $Oy$  и поляризованной по кругу.

Пусть при  $t = 0$  в точке  $y = 0$  вектор  $\vec{E}$  направлен по  $Oz$ . Тогда

$$E_{1z} = E_0 \cos(ky - \omega t), \quad B_{1x} = \frac{E_0}{c} \cos(ky - \omega t),$$

$$E_{2x} = E_0 \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad B_{2z} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(ky - \omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(С вращением по часовой стрелке, если смотреть с положительного «конца» оси  $Oy$ .)

**Пример 9.5.** Сложение двух монохроматических волн одинаковой частоты, фазы и направления распространения с круговой поляризацией в противоположных направлениях.

Для волн, движущихся вдоль оси  $Oy$ , имеем

$$E_z^{(1)} = a \cos(ky - \omega t), \quad E_x^{(1)} = a \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E_z^{(2)} = b \cos(ky - \omega t), \quad E_x^{(2)} = b \cos\left(ky - \omega t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

где  $a$  и  $b$  — амплитуды составляющих.

Результирующее поле найдется сложением соответствующих проекций:

$$E_z = (a + b) \cos(ky - \omega t),$$

$$E_x = (a - b) \cos\left(ky - \omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если  $a = b$ , то получается плоскополяризованная волна; при  $a > b$  — правая круговая; при  $a < b$  — левая круговая поляризация.

## § 10. Излучение электромагнитных волн

**10.1. Потенциалы электромагнитного поля вдали от системы зарядов.** В общем случае произвольного движения зарядов в системе потенциалы поля  $\varphi$  и  $\vec{A}$  описываются выражениями (5.29). Практическое вычисление потенциалов непосредственно по указанным формулам осложняется необходимостью учета запаздывания: величины  $\varphi$  и  $\vec{j}$  должны браться для каждой точки  $\vec{r}_0$  в различные моменты времени  $t - \frac{r'}{c}$ . Поэтому оказывается возможным рассчитать поле лишь приближенно и при некоторых ограничениях, касающихся системы зарядов.

Важное значение имеют электронеутральные системы зарядов,

занимающие ограниченную область пространства. Рассмотрим поле такой системы на больших расстояниях от нее. Система может быть охарактеризована в целом электрическим и магнитным дипольными моментами  $\vec{p}$  и  $\vec{m}$  так, как это было уже сделано в § 6 и § 8. Но теперь в силу нестационарности движения зарядов дипольные моменты не постоянны, они являются функциями времени. Произведем расчет потенциалов поля с учетом этой зависимости.

При  $r_0 \ll r$  (см. рис. 6.4) используем приближенные выражения для входящих в потенциалы величин  $\frac{1}{r'}$  и  $r'$ , ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \approx \frac{1}{r} + \left( \text{grad} \frac{1}{r} \right) (-\vec{r}_0) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{r^3}; \quad (10.1)$$

$$r' = |\vec{r} - \vec{r}_0| \approx r + (\text{grad } r) (-\vec{r}_0) = r - \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{r}. \quad (10.2)$$

В формулы для потенциалов входит величина  $t - \frac{r'}{c}$ . В первом приближении согласно (10.1)

$$t - \frac{r'}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc} = \tau + \frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc},$$

где  $\tau = t - \frac{r}{c}$  — время с учетом запаздывания на «общем» расстоянии  $r$  от системы до точки наблюдения, а слагаемое  $\frac{\vec{r} \vec{r}_0}{rc}$  имеет смысл собственного времени запаздывания по отношению к точке  $O$ , принятой за «центр» системы. Вводя единичный вектор направления на точку наблюдения  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ , имеем

$$t - \frac{r'}{c} \approx \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}. \quad (10.3)$$

Предполагается, что собственное время запаздывания для всех точек системы много меньше  $\tau$ . Это позволяет разложить функции  $q\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right)$  и  $\vec{j}\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right)$  в ряд по степеням малой величины  $\frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}$  и ограничиться двумя первыми членами разложения:

$$q\left(\tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right) \approx q(\tau) + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c} \dot{q}(\tau), \quad \vec{j}\left(\tau + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c}\right) \approx \vec{j}(\tau) + \frac{\vec{n} \vec{r}_0}{c} \dot{\vec{j}}(\tau).$$

Здесь точки обозначают частные производные функции по  $\tau$  или  $t$ . Выполняя подстановку полученных выражений в формулы для потенциалов поля (5.29) и используя (10.1), получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\varphi = k \int_{V_0} \frac{q(\vec{r}_0, \tau)}{r} dV_0 + k \int_{V_0} \frac{q(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{r^2} dV_0 + k \int_{V_0} \frac{\dot{q}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{cr} dV_0 + \dots \quad (10.4)$$

$$\vec{A} = f \int_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, \tau)}{r} dV_0 + f \int_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{r^2} dV_0 + f \int_{V_0} \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 \vec{n}}{cr} dV_0 + \dots \quad (10.5)$$

Эти приближенные выражения для потенциалов поля применимы, как уже говорилось, при условии малости собственного времени запаздывания по сравнению с общим запаздыванием. Кроме этого, необходимо, чтобы за время собственного запаздывания не слишком сильно изменялись плотности зарядов и токов  $q$  и  $\vec{j}$ : в противном случае нельзя будет пользоваться разложениями ввиду больших значений  $\dot{q}$  и  $\dot{\vec{j}}$ . Заряды в системе за время собственного запаздывания проходят расстояние порядка  $v \frac{r_0}{c}$ . Если это расстояние мало по сравнению с размерами системы  $r_0$ , то за время собственного запаздывания расположение зарядов существенно не изменяется и принятое приближение допустимо. Условием его применимости служит сильное неравенство

$$\frac{v}{c} r_0 \ll r_0,$$

из которого следует

$$v \ll c,$$

т. е. скорости движения зарядов в системе должны быть нерелятивистскими.

Приступаем к анализу формулы (10.4). Первое слагаемое

$$\varphi_1 = k \frac{Q}{r}$$

имеет смысл потенциала точечного заряда  $Q$ , равного заряду системы. Для электронейтральной системы оно равно нулю. Второе слагаемое дает потенциал, имеющий волновой характер и определяющийся дипольным электрическим моментом системы, взятым в момент времени  $\tau$ . Используя определение дипольного момента (6.15), получаем

$$\varphi_2 = \frac{k \vec{n}}{r^2} \int_{V_0} \vec{r}_0 q(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{r^2} \vec{n} \vec{p}(\tau).$$

Поле  $\varphi_2$  быстро убывает с ростом  $r$ , оказываясь на больших расстояниях от системы зарядов меньше третьего, основного в так называемой волновой зоне ( $r \gg r_0$ ), слагаемого:

$$\varphi_3 = \frac{k \vec{n}}{rc} \int_{V_0} \dot{\vec{r}}_0 q(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = k \frac{\vec{n}}{cr} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \vec{r}_0 q(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{cr} \vec{n} \dot{\vec{p}}(\tau). \quad (10.6)$$

Далее исследуем выражение (10.5) для векторного потенциала. Уже первое слагаемое не равно нулю и оказывается существенно важным в вопросе об излучении. (Здесь имеется отличие от выводов § 8, п. 8.3, где рассматривался стационарный случай и токи в системе были замкнутыми. Сейчас же движение зарядов произвольное.) Согласно формуле (10.5) в первом приближении

$$\vec{A} \simeq \vec{A}_1 = f \frac{1}{r} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0.$$

Покажем, что векторный потенциал  $\vec{A}_1$  и скалярный потенциал  $\varphi_3$  связаны друг с другом простым соотношением. Для этого преобразуем выражение (10.6), используя уравнение непрерывности (1.6):

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = -k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0.$$

Рассчитаем проекцию интеграла

$$\int_V \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0$$

на ось  $Ox$ . Для вычислений применим тождество (см. П. II, 15) и получим

$$\int_{V_0} x_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = \int_{V_0} \operatorname{div} (x_0 \vec{j}) dV_0 - \int_{V_0} j_x dV_0.$$

Преобразуем интеграл с дивергенцией в правой части равенства по теореме Гаусса:

$$\int_{V_0} \operatorname{div} (x_0 \vec{j}) dV_0 = \oint_S x_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Интегрирование производится по поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V_0$ . Так как заряды за пределы системы не выходят, интеграл обращается в нуль. Тогда

$$\int_{V_0} x_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = - \int_{V_0} j_x dV_0,$$

и поэтому

$$\int_{V_0} \vec{r}_0 \operatorname{div} \vec{j} dV_0 = - \int_{V_0} \vec{j} dV_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_3 = k \frac{\vec{n}}{cr} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 = \frac{k}{fc} \vec{A}_1 \vec{n}. \quad (10.7)$$

Вспоминая, что  $k = c^2 f$ , и учитывая формулу (10.6), имеем

$$\varphi_3 = c \vec{A}_1 \vec{n}, \quad \vec{A}_1 = \frac{f}{r} \dot{\vec{p}} = \frac{k}{c^2 r} \dot{\vec{p}}. \quad (10.8)$$

Обе величины  $-\varphi_3$  и  $A_1$  — задаются скоростью изменения электри-

ческого дипольного момента системы во времени, т. е. величиной  $\dot{\vec{p}}$ . Учитывая характер зависимости дипольного момента от времени  $\left(\vec{p} = \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$ , заключаем, что поле (10.8) представляет собой волну,

распространяющуюся по радиальным направлениям от системы зарядов. Следовательно, мы имеем дело с электромагнитными волнами, излучаемыми движущимися зарядами. Поле, определяемое потенциалами  $\varphi_3$  и  $\vec{A}_1$ , называется *электрическим дипольным излучением*.

По модулю скалярный потенциал  $\varphi_3$  в  $c$  раз больше векторного  $\vec{A}_1$ . Как мы увидим в следующем пункте, это приводит к соотношению между векторами поля  $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ . Но именно такая связь характерна для электромагнитных волн (см. формулу (9.15)). Поэтому оба потенциала  $\varphi_3$  и  $\vec{A}_1$  вносят равноценный вклад в излучение и являются однопорядковыми в разложениях.

Дипольное электрическое излучение системы может отсутствовать (см. § 10, п. 10.2). В таких случаях нужно использовать следующие члены в разложениях (10.4) и (10.5). Скалярный потенциал определяется четвертым слагаемым, не выписанным в формуле (10.4). Он ответствен за электрическое квадрупольное излучение, которое здесь изучаться не будет. Обратимся к слагаемым  $\vec{A}_2$  и  $\vec{A}_3$  в формуле (10.5). Выражения

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2} \int_{V_0} (\vec{r}_0 \vec{n}) \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 \quad \text{и} \quad \vec{A}_3 = \frac{f}{cr} \int_{V_0} (\vec{r}_0 \vec{n}) \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) dV_0$$

по структуре аналогичны рассматривавшемуся ранее выражению (8.9). После ряда преобразований соотношение (8.9) принимает вид (8.12). Используя те же приемы вычислений, можно получить новые формулы для потенциалов  $\vec{A}_2$  и  $\vec{A}_3$ , сходные по форме с выражением (8.12). Поэтому их можно записать сразу, минуя выкладки, по аналогии с формулой (8.12):

$$\vec{A}_2 = \frac{f}{r^2} [\vec{m}(\tau) \vec{n}]; \quad (10.9)$$

$$\vec{A}_3 = \frac{f}{cr} [\dot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}]. \quad (10.10)$$

На больших расстояниях от системы, в волновой зоне  $A_2 \ll A_3$ . Поэтому следует принимать в расчет только потенциал  $\vec{A}_3$ . Он определяет так называемое *магнитное дипольное излучение*.

**10.2. Электрическое дипольное излучение.** Пользуясь потенциалами поля  $\varphi_3$  и  $\vec{A}_1$ , найдем векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  электрического дипольного излучения. Сначала вычислим магнитную индукцию:

$$\vec{B} = \text{rot} \frac{k\vec{p}(\tau)}{c^2 r} = \frac{f}{r} \text{rot} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c}\right) + f \left[ \text{grad} \frac{1}{r} \vec{p} \right]$$

Последнее слагаемое дает величину, убывающую пропорционально квадрату расстояния, а первое – пропорционально первой степени. Поэтому, не уменьшая точности расчета, вторым слагаемым можно пренебречь и принять

$$\vec{B} = \frac{f}{r} \quad \vec{\dot{p}} = \frac{f}{r} \left[ \text{grad} \left( t - \frac{r}{c} \right) \ddot{p}(\tau) \right] = \frac{f}{cr} [\ddot{p}(\tau) \vec{n}]. \quad (10.11)$$

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  найдем по формуле (4.2). Предварительно заметим, что  $\text{grad} \varphi \left( t - \frac{r}{c} \right) = -\dot{\varphi}(\tau) \frac{\vec{n}}{c}$ . Тогда  $\vec{E} = \frac{\vec{n}\dot{\varphi}(\tau)}{c} - \dot{\vec{A}}(\tau)$ .

Используя соотношение (10.8), получаем

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{n}(\vec{n} \vec{A}) - \dot{\vec{A}} = [\dot{\vec{A}} \vec{n}] \vec{n}, \\ \text{или } \vec{E} &= \frac{f}{r} [\ddot{p} \vec{n}] \vec{n} = c [\vec{B} \vec{n}]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

В формулах (10.11) и (10.12) функции  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  зависят от характерного для сферических волн аргумента  $t - \frac{r}{c}$ . Волна распро-

страняется по радиусам от начала координат. (Именно в этой точке находится излучающая система зарядов.) Направление движения фронта волны в любой точке задается вектором  $\vec{n}$ . По мере удаления от систем напряженность и индукция поля уменьшаются пропорционально  $\frac{1}{r}$ . Однако сходство со сферической волной здесь не пол-

ное; далее мы увидим, что волновое поле (10.11), (10.12) не обладает сферической симметрией, интенсивность поля по различным направлениям неодинакова.

Как и для плоской волны, векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{n}$  образуют правую тройку. Связь между модулями  $E = cB$  та же, что и для плоской волны. (Это и свидетельствует о правильности отнесения потенциалов  $\varphi_3$  и  $\vec{A}_1$  к одному и тому же приближению.) Остается заметить, что излучение имеет место только при условии  $\ddot{p} \neq 0$ . Очевидно также, что волновое поле будет периодическим, если величина  $\ddot{p}$  – периодическая функция времени. Например, при гармонической зависимости дипольного момента  $\vec{p}$  от времени излучается соответствующая по частоте монохроматическая волна.

Рассмотрим также пространственное распределение поля (10.12) относительно заданного направления  $\ddot{p}$ . Пусть ось  $Oz$  направлена по вектору  $\ddot{p}$ . Тогда

$$\vec{E} = \frac{f}{r} \{ \vec{n}(\vec{n} \ddot{p}) - \ddot{p} \} = \{ \vec{n}|\ddot{p}| \cos \vartheta - \ddot{p} \} \frac{f}{r}.$$

Таким образом, вектор  $\vec{E}$  лежит в меридиональной плоскости, проходящей через векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{n}$  (рис. 10.1). Если воспользоваться тройкой единичных векторов  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\vartheta$  и  $\vec{e}_\alpha$  (рис. 10.2), то получим удобные выражения

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{f}{r} |\ddot{p}| \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta, \\ \vec{B} &= \frac{f}{cr} |\ddot{p}| \sin \vartheta \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (10.13)$$

Формулы (10.13) показывают, что максимум излучения лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{p}$  (плоскость  $Oxy$ ). Поле обладает осевой симметрией.

В соответствии с формулой (3.7) плотность потока энергии

$$\vec{\sigma} = \frac{f^2}{c\mu_0} \frac{|\ddot{p}|^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n} = \frac{f}{4\pi c} \frac{|\ddot{p}|^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}. \quad (10.14)$$

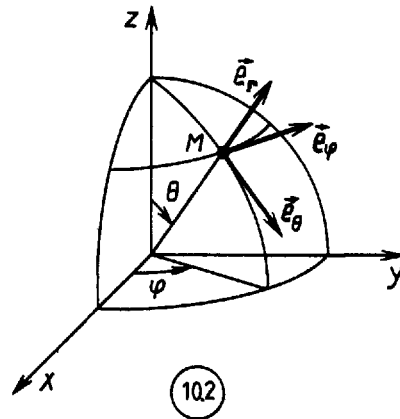
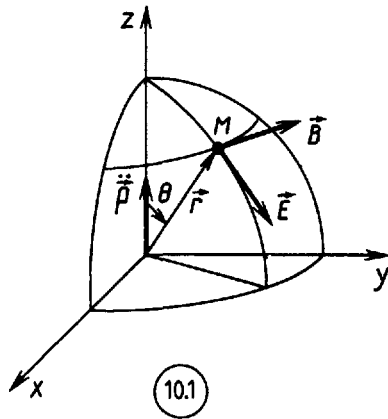
Часто нужно знать полный поток энергии по всем направлениям за единицу времени или мощность, излучаемую системой:

$$N = \oint \vec{\sigma} d\vec{S}.$$

Расчет удобнее сделать в сферических координатах. Получаем

$$N = \frac{f |\ddot{p}|^2}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{\sin^2 \vartheta r^2}{r^2} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2f}{3c} |\ddot{p}|^2. \quad (10.15)$$

Систему, излучающую электромагнитные волны, характеризуют также величиной, называемой *интенсивностью излучения*. По опре-



делению интенсивность — поток энергии, проходящий в некотором телесном угле  $d\Omega$  или проходящий через некоторую площадку  $dS = r^2 d\Omega$ . Так что для элементарной площадки

$$dN = \vec{\sigma} \cdot d\vec{S}. \quad (10.16)$$

Очевидно, излучаемая системой мощность (10.15) есть не что иное, как полная интенсивность излучения.

**Пример 10.1. Излучение ускоренно движущегося точечного заряда.**  
Воспользуемся выражением дипольного момента системы зарядов (6.16)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{0i} q_i$$

и найдем вторую производную от  $\vec{p}$  по времени, определяющую согласно изложенному выше все параметры излучения:

$$\ddot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^n \ddot{\vec{r}}_{0i} q_i = \sum_{i=1}^n \vec{a}_{0i} q_i,$$

где  $\vec{a}_{0i}$  — ускорение  $i$ -го заряда (рис. 10.3). В соответствии с принципом суперпозиции полей электромагнитная волна, излученная системой зарядов, есть суперпозиция волн, излученных каждым ускоренно движущимся зарядом  $q_i$ . Применимость этого положения в теории излучения обеспечивается линейностью связи векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с параметром  $\ddot{\vec{p}}$ . Благодаря указанному свойству формул (10.11) и (10.12) слагаемые  $\vec{a}_{0i} q_i$  могут рассматриваться как отдельные источники волн. Поле излучения  $i$ -го заряда характеризуется величинами

$$\vec{E}_i = \frac{f q_i}{r} [\vec{a}_i \vec{n}] \vec{n}_i, \quad \vec{B}_i = \frac{f q_i}{cr} [\vec{a}_i \vec{n}].$$

Все выводы о (мгновенном) пространственном распределении поля, о потоке энергии, сделанные в § 10, п. 10.2 для диполя, остаются в силе для отдельного ускоренно движущегося точечного заряда (при замене в формулах  $\ddot{\vec{p}}$  на  $q\vec{a}$ ). Важно подчеркнуть, что излучают электромагнитные волны только ускоренно движущиеся заряды, ибо в противном случае  $\ddot{\vec{p}} = 0$ . И наконец, следует сказать, что, сводя излучение движущегося заряда к излучению неподвижного диполя, мы неизбежно ограничиваемся нерелятивистскими скоростями движения заряда (см. общий анализ вопроса в § 10, п. 10.1).

**Пример 10.2. Излучение гармонического осциллятора.**

Изменяющийся со временем дипольный момент

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t$$

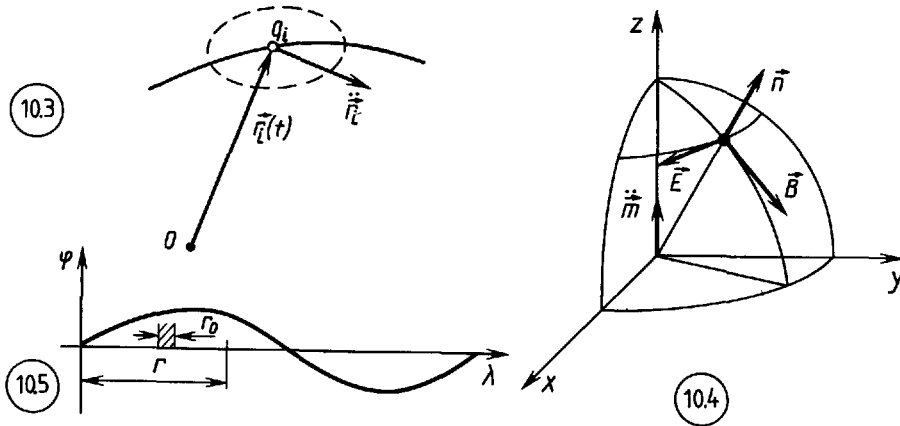
создает дипольное электрическое излучение, определяемое векторами

$$\vec{E} = \frac{f}{r} p_0 \omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{rc} p_0 \omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\varphi.$$

Мощность излучения равна:

$$N = \frac{2fp_0^2 \omega^4}{3c} \sin^2(\omega t - kr), \quad k = \frac{\omega}{c}.$$



Мощность быстро растет с частотой колебаний ( $\sim \omega^4$ ). Однако применимость формул ограничена условием:  $v \ll c$ , где  $v$  — скорость движения зарядов. Отсюда следует

$$\frac{r_0 \omega}{c} \ll 1,$$

где  $r_0$  — параметр, определяющий размеры системы. Для атомов  $r_0 \sim 10^{-10}$  м; следовательно,  $\omega \ll 10^{18} \frac{1}{c}$ . Частота света  $\omega \sim 10^{15} \frac{1}{c}$ , т. е. данный критерий выполняется.

Предлагаем читателям подумать над возможными путями практической реализации излучающего гармонического осциллятора.

**Пример 10.3. Расчет излучения атома и несостоятельность классической планетарной модели атома.**

Представим атом как систему, состоящую из ядра и электрона, обращающегося вокруг ядра по законам классической механики. Ускорение электрона найдется из условия:

$$ma = \frac{mv^2}{r} = k \frac{Ze^2}{r^2},$$

откуда

$$a = \frac{kZe^2}{mr^2}.$$

Вектор дипольного момента системы определится формулой

$$\vec{p} = e\vec{r}.$$

Он вращается в плоскости орбиты. Его вторая производная, необходимая для расчета параметров излучения, определяется через ускорение:

$$|\ddot{\vec{p}}| = e|\ddot{\vec{r}}| = \frac{kZe^3}{mr^2}.$$

Мощность излучения находим с помощью выражения (10.15). Она равна:

$$N = \frac{2fk^2Z^2e^6}{3cm^2r^4}.$$

Используя для оценки данные, указанные в примере 10.2, получим значение порядка  $0,6 \cdot 10^{-7}$  Дж/с. При излучении должна уменьшаться механическая энергия движения электрона, т. е. сумма его кинетической и потенциальной энергий. (При приближении электрона вплотную к ядру выделится энергия  $\sim \frac{kZe^2}{r_a} \approx 2 \cdot 10^{-13}$  Дж. Кинетическая энергия имеет порядок величины  $2 \cdot 10^{-18}$  Дж.) В результате потери энергии на излучение электрон не может стационарно двигаться по орбите и упадет на ядро. Отсюда следует вывод о несостоятельности использованной планетарной модели атома.

**10.3. Магнитное дипольное излучение.** Сопоставляя выражения электрического дипольного и магнитного дипольного потенциалов, можно показать, что отношение их модулей по порядку величины в общем случае равно  $\frac{c}{v}$ . (Это видно из того, что в плотность тока входит скорость движения заряда.) При условии  $v \ll c$  электрическое дипольное излучение по интенсивности на много порядков больше магнитного дипольного излучения. Однако при  $\ddot{\vec{r}} = 0$  на первый план выходит магнитное дипольное излучение, определяющееся векторным потенциалом (10.10).

Найдем векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в этом случае:

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr} [\ddot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}], \quad (10.17)$$

$$\vec{B} = \frac{f}{cr} \left[ \text{grad} \left( t - \frac{r}{c} \right) [\dot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}] \right] + \frac{f}{c} \left[ \text{grad} \frac{1}{r} [\dot{\vec{m}} \vec{n}] \right].$$

Второе слагаемое в формуле для индукции следует в рассматриваемом приближении отбросить, так как оно содержит множитель  $\frac{1}{r^2}$ , поэтому

$$\vec{B} = -\frac{f}{c^2 r} [\vec{n} [\ddot{\vec{m}}(\tau) \vec{n}]] = \frac{1}{c} [\vec{n} \vec{E}]. \quad (10.18)$$

Взаимное расположение векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$  показано на рисунке 10.4.

Таким образом, мы вновь имеем дело со сферической волной, аналогичной рассмотренной в § 10, п. 10.2. Несмотря на дополнительный множитель  $c$  в знаменателе, магнитное дипольное излучение может быть весьма значительным при больших значениях  $\ddot{\vec{m}}$ , что может иметь место в системе с большими и быстроизменяющимися токами.

Рамки пособия не позволили включить описание электрического квадрупольного излучения системы. Оно принимается в расчет, когда дипольное излучение отсутствует. Что касается отношения интенсивностей магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений, то в общем виде его оценить нельзя.

Мы рассмотрели магнитное дипольное излучение, опустив элек-

трическое квадрупольное потому, что первое очень важно в практике: широко применяются рамочные излучатели-антенны с переменным током.

**Пример 10.4. Расчет излучения рамки с током.**

Круглая рамка с током расположена в плоскости  $Oxy$ , центр ее совпадает с началом координат. Сила тока в рамке изменяется по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ . Определим магнитное дипольное излучение рамки.

Магнитный дипольный момент рамки равен:  $\vec{m} = \vec{k} \pi a^2 I_0 \sin \omega t$ , где  $a$  — радиус рамки, а  $\vec{k}$  — единичный вектор оси  $Oz$ . Для векторов поля с помощью формул (10.17) — (10.18) имеем (см. рис. 10.4)

$$\vec{E} = -\frac{f}{cr} |\ddot{m}| \sin \vartheta \vec{e}_a,$$

$$\vec{B} = \frac{f}{c^2 r} |\ddot{m}| \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$$

Здесь

$$\ddot{m} = \pi a^2 I_0 \omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{k}$$

Вектор Умова-Пойнтинга равен:

$$\vec{\sigma} = \frac{f}{4\pi c^3 r^2} |\ddot{m}|^2 \sin^2 \vartheta \vec{n}.$$

Полная мощность излучения получается интегрированием по сфере с  $r \gg a$

$$N = \frac{2\pi^2 f}{3c^3} a^4 I_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

Излучение сосредоточено преимущественно в плоскости рамки.

**10.4\*. Понятие о волновой и квазистатической зонах.** Допустим, что дипольный момент системы  $\vec{p}$  есть периодическая функция времени. В этом случае появляется характерный параметр, определяющий свойства излучающей системы зарядов. Им будет период  $T$  или соответствующая длина волны  $\lambda = cT$ . В § 10, п. 10.1 были найдены приближенные выражения для потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$ . Правомомерность их использования определялась только большими по сравнению с размерами системы расстояниями ( $r \gg r_0$ ). Теперь характер и степень точности принятого приближения можно уточнить, сравнивая  $r$  и  $r_0$  с  $\lambda$ . Напомним определение: длина волны есть наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковой фазе. За один период волна (возмущение, изменение состояния поля, фаза волны, волновой фронт и т. д.) сдвинется в пространстве на отрезок, равный  $\lambda$ .

Пусть размеры системы значительно меньше длины волны излучаемых электромагнитных волн, т. е.

$$r_0 \ll \lambda. \quad (10.19)$$

В таком случае возможно разделение пространства на ближнюю к системе зарядов зону ( $r \ll \lambda$ ) и дальнюю зону ( $r > \lambda$ ), причем разло-

жения (10.4) и (10.5) потенциалов применимы и в ближней зоне.

Дальняя зона уже исследована ранее достаточно полно. Рассмотрим поле в ближней зоне. Для электронейтральной системы сейчас нет оснований пренебрегать вторым слагаемым в формуле (10.4):

$$\varphi_2 = \frac{k}{r^2} \vec{p} \vec{n}.$$

Если

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t,$$

то

$$\varphi_2 = \frac{k p_0}{r^2} \cos \vartheta \cos \omega t.$$

Сравним  $\varphi_2$  с потенциалом  $\varphi_3$ . У нас

$$\varphi_3 = \frac{c f}{r} \dot{\vec{p}} \vec{n} = - \frac{k 2 \pi p_0 \cos \vartheta}{\lambda r} \sin \omega t.$$

В ближней зоне

$$\left| \frac{\varphi_2}{\varphi_3} \right| \sim \frac{\lambda}{r} > 1.$$

(Все остальные члены разложений для скалярного и векторного потенциалов в  $c$  раз меньше  $\varphi_3$ , см. § 10, п. 10.1.)

Становится очевидным, что поле в ближней зоне определяется членом  $\varphi_2$ , совпадающим по виду с потенциалом электростатического поля в дипольном приближении. Что касается его «волновой» зависимости от времени  $\tau = t - \frac{r}{c}$ , то она здесь малосущественна: для

области  $r \ll \lambda$  запаздывания пренебрежимо малы, и колебания потенциала в этих точках могут быть приняты за синхронные с колебаниями дипольного момента (рис. 10.5). Это верно и в отношении векторного потенциала  $\vec{A}_2$ . Таким образом, поле в ближней зоне является квазистатическим (почему данная зона и называется квазистатической).

Возможность выделения ближней и дальней зон, законность используемых приближений зависят от конкретных условий задачи. Не для всех систем возможно одновременное выполнение трех неравенств: при  $r > \lambda$  и  $\lambda \gg r_0$ ,  $r \gg r_0$ . В качестве примера предлагаем читателю установить границы зон для антенны телецентра ( $\lambda \approx 1$  м,  $r_0 \approx 1$  м) и провода длиной 1 м с переменным током технической частоты 50 Гц.

**10.5\*. Спектральное разложение излучения.** Как было показано выше, система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитные волны. В § 9, п. 9.3 было установлено, что электромагнитное поле в свободном состоянии всегда может быть разложено на гармоники (см. формулу (9.16)). Для того чтобы проследить связь

электромагнитных волн (по происхождению) с системой излучивших их зарядов, необходимо показать, как излучение системы распадается на гармонические составляющие. Сделаем это для волновой зоны в дипольном приближении.

В общем случае плотности заряда и тока как функции времени могут быть представлены разложениями в интеграл Фурье:

$$\varrho(\vec{r}_0, t) = \int \varrho_0(\omega, \vec{r}_0) e^{i\omega t} d\omega; \quad (10.20)$$

$$\vec{j}(\vec{r}_0, t) = \int \vec{j}_0(\vec{r}_0, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (10.21)$$

При расчете потенциалов поля по формулам (5.29) или непосредственно по формулам дипольного приближения (10.7), (10.8) в силу линейности производимых операций разложение повторится для промежуточных и окончательных результатов. Так, дипольные моменты примут вид

$$\vec{p}(\tau) = \int \vec{p}_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (10.22)$$

$$\vec{m}(\tau) = \int \vec{m}_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (10.23)$$

причем

$$\vec{p}_0(\omega) = \int \vec{r}_0 \varrho_0(\omega, \vec{r}_0) dV_0, \quad \vec{m}_0(\omega) = \frac{1}{2} \int [\vec{r}_0, \vec{j}_0(\vec{r}_0, \omega)] dV_0.$$

С помощью выражений (10.22) и (10.23) найдем формулы для векторов излучаемого поля:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{cr} \int \omega^2 [\vec{p}_0(\omega) \vec{n}] e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (10.24)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{f}{r} \int \omega^2 [\vec{p}_0(\omega) \vec{n}] \vec{n} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (10.25)$$

Если еще учесть, что

$$\omega\tau = \omega t - \frac{\omega r}{c} = \omega t - kr,$$

то формулы (10.24) и (10.25) предстают перед нами как спектральные разложения сферических волн на гармонические составляющие всевозможных частот, обусловленных соответствующими гармониками колебаний зарядов.

Коэффициенты разложения в данном случае равны:

$$\vec{B}_0 = -\frac{f\omega^2}{cr} [\vec{p}_0 \vec{n}], \quad \vec{E}_0 = -\frac{f\omega^2}{r} [[\vec{p}_0 \vec{n}] \vec{n}]. \quad (10.26)$$

Они зависят от частоты гармоник, направления и величины вектора  $\vec{p}_0(\omega)$ , а также от направления излучения.

Спектральный состав излучения определяется набором частот излучателей ( $\vec{p}_0(\omega)$ ,  $\vec{m}_0(\omega)$ ). Характерно, что при прочих равных усло-

виях амплитуды векторов поля пропорциональны квадратам частот, а потоки энергии — интенсивность излучения — даже четвертой степени частоты. Это означает, что «легче» излучают высокочастотные осцилляторы.

Из разложений также видно, что строго монохроматическая волна может быть испущена только строго гармоническим осциллятором. Всякие отклонения от гармоничности дают излучение, занимающее полосу частот той или иной ширины. В частности, как это было показано в примере 9.1, колебания, длящиеся конечное время, занимают некоторый частотный интервал.

Завершая теоретическое рассмотрение вопросов об электромагнитном поле в пространстве без зарядов и об излучении электромагнитных волн системами движущихся зарядов, необходимо подчеркнуть, что нами выяснена природа и происхождение радиоволн в широком диапазоне частот. Однако не все закономерности образования электромагнитных излучений могут быть поняты на основе изученного материала: короткие электромагнитные волны, в частности световые, излучаются микросистемами электрических зарядов (атом, молекула, кристалл), для которых макроскопическая электродинамика неприменима. И тем не менее многие формулы для излучения в дипольном приближении, выведенные выше в этом параграфе, остаются в силе как результат некоторого усреднения микрокартины излучения, носящего квантовый характер.

## **§ 11. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом**

**11.1. Постановка вопроса о движении заряда в электромагнитном поле.** Выше рассматривалось электромагнитное поле, создаваемое системой электрических зарядов. Поставим теперь вопрос о движении в этом поле точечного заряда. Поле может считаться внешним при условии, если движение рассматриваемого заряда  $q$  не изменяет векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Обсудим это условие детальнее. Пусть система  $Q$  создает поле  $(\vec{E}, \vec{B})$ , в которое помещен заряд  $q$ . Разумеется, заряд также создает собственное поле  $(\vec{E}', \vec{B}')$ , накладывающееся на поле  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Но практически осуществим случай, когда внешнее поле определяет движение заряда  $q$ , а собственное поле не меняет конфигурацию и движение зарядов  $Q$ , тем самым не оказывая влияние и на созданное ими поле  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Иными словами, поле  $(\vec{E}, \vec{B})$  никак не связано с движением заряда  $q$  и рассматривается по отношению к нему в качестве внешнего заданного поля. Так возникает задача о заряде, внесенном в электромагнитное поле. Кроме того, заметим, что самодействием, т. е. действием поля  $(\vec{E}', \vec{B}')$ , на движение создавшего его заряда  $q$  часто можно пренебречь.

Общая задача о заряде во внешнем поле подразделяется на несколько частных. Во-первых, возможен случай движения без излу-

ния — это просто задача механики на движение под действием заданной силы Лоренца. (Такая задача решена в релятивистской динамике для движения точечного заряда в постоянном электрическом и магнитном полях. (См. [1], ч. II, примеры 6.6 и 6.7.) Но в случае ускоренного движения заряд излучает, т. е. не вся сообщаемая ему внешним полем энергия идет на повышение кинетической энергии заряда: часть ее теряется вместе с излучаемыми электромагнитными волнами. Поэтому, во-вторых, имеется задача о движении заряда при наличии излучения. Здесь возникает необходимость учесть самодействие, т. е. действие собственного поля на заряд. В-третьих, возможна задача об излучении заряда вследствие его движения, вызванного внешним полем, причем излученная волна сопоставляется с падающей. Это задача на рассеяние. Самодействие здесь может учитываться или не учитываться.

Все три типа задач, связанных с движением зарядов в поле, имеют практическое значение. Мы в соответствии с рамками курса разберем лишь излучение свободного заряда под действием внешнего поля. Предварительно уточним ранее изученные (см. [1]) уравнения движения заряженной материальной точки в электромагнитном поле, учитывая теперь и излучение.

Движение заряженной материальной точки в электромагнитном поле описывается классическим или релятивистским механическим уравнением движения для силы Лоренца (2.25). Однако после рассмотрения вопроса об излучении электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом становится очевидным, что в таком виде уравнение движения не всегда будет правильно описывать движение излучающего заряда: потеря энергии и импульса на излучение с механической точки зрения эквивалентна действию на заряженную материальную точку некоторой тормозящей силы, называемой силой *радиационного трения*. Определим величину силы радиационного трения для излучения, которое можно рассматривать в дипольном приближении. Так как полная мощность излучения определяется согласно формуле (10.15) второй производной по времени от дипольного момента, а для точечного заряда  $\vec{p} = q\vec{r}$ , то

$$N = \frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \quad (11.1)$$

Поэтому сила, действующая на заряд и направленная навстречу скорости, удовлетворяет уравнению

$$\vec{F}_r \vec{v} = - \frac{2f}{3c} q^2 |\ddot{\vec{r}}|^2. \quad (11.2)$$

Выражая отсюда силу  $\vec{F}_r$ , учтем следующее важное обстоятельство: дипольное приближение справедливо для случая движения заряда в небольшой по сравнению с расстоянием до точки наблюдения области пространства. Это требование значительно ограничивает общность задачи.

Усредним силу торможения за время, в течение которого заряд многократно проходит указанную область. В таком случае на основании тождества  $\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}) - (\ddot{\vec{r}})^2$  можно заключить, что сила радиационного трения определяется выражением

$$\vec{F}_r = \frac{2fq^2}{3c} \ddot{\vec{r}} = \frac{2fq^2}{3c} \dot{\vec{a}}, \quad (11.3)$$

где  $\vec{a}$  — ускорение материальной точки, несущей заряд. Величина  $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})$  есть полная производная по времени. При усреднении по движению заряда в ограниченной области пространства она исчезает. Величина  $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}) dt = \frac{\dot{\vec{r}}(\tau)\dot{\vec{r}}(\tau) - \dot{\vec{r}}(0)\dot{\vec{r}}(0)}{\tau}$  достаточно мала, если

интервал изменения  $\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}$  конечен, а  $\tau$  велико.

Формула (11.3) применима с рядом ограничений. Во-первых, движение должно быть нерелятивистским ( $v \ll c$ ), иначе несправедливо само дипольное приближение. Во-вторых, как мы сейчас увидим, радиационная сила должна быть значительно меньше силы Лоренца, чтобы уравнение движения заряда имело смысл. Наконец, это лишь среднее значение силы.

Итак, мы пришли к силе, зависящей от скорости изменения ускорения. Такие силы в механике не рассматриваются, и, вообще говоря, они приводят к противоречащим опыту результатам. Запишем уравнение движения с учетом силы торможения (11.3):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{2fq^2}{3c} \ddot{\vec{r}}. \quad (11.4)$$

В случае, когда  $F \ll F_r$ , уравнение принимает вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{2fq^2}{3c} \ddot{\vec{r}} \quad (11.5)$$

и его решением служит, как в этом легко убедиться непосредственным дифференцированием, функция

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{\frac{3mc}{2fq^2} t}.$$

Отсюда следует, что ускорение движения неограниченно растет вследствие излучения, а это, в свою очередь, приводит к увеличению интенсивности излучения. Происходит неограниченный саморазгон частицы и рост излучения вопреки закону сохранения энергии. Поэтому уравнение (11.4) применяют только в случаях  $F \gg F_r$ , когда ускорение частице в основном придает сила Лоренца, а радиационное трение лишь незначительно влияет на скорость. В таких случаях уравнение (11.4) достаточно точно описывает движение.

### 11.2. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом.

Рассчитаем излучение точечного заряда, движущегося во внешнем переменном электромагнитном поле.

Пусть на заряд падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Заряд под ее действием приходит в ускоренное движение и излучает вторичную волну. Этот процесс называют *рассеянием* электромагнитных волн. На материальную точку с зарядом  $q$  электромагнитная волна действует с силой Лоренца. Магнитная составляющая силы Лоренца при нерелятивистских скоростях движения исчезающе мала по сравнению с электрической и может быть опущена. Для силы Лоренца ниже используется выражение.

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (11.6)$$

(Экспоненциальная форма удобна в вычислениях. При вещественном  $\vec{E}_0$  для перехода к тригонометрической форме в окончательном результате нужно взять действительную часть:  $\text{Re } e^{i\omega t} = \cos \omega t$ .) Предполагая, что длины волн велики по сравнению с областью движения заряда, имеем  $\vec{k}\vec{r} \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1$  и

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (11.7)$$

Найдем теперь условие, при котором сила радиационного трения оказывается малой по сравнению с внешней периодической силой. Если

$$|\vec{F}| \gg \frac{2fq^2}{3c} |\dot{\vec{a}}|,$$

то  $m\vec{a} \approx \vec{F}$  и

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2}{3c} \frac{|\dot{\vec{F}}|}{m},$$

или

$$qE_0 \gg \frac{2fq^2\omega}{3mc} qE_0,$$

откуда

$$\frac{2fq^2\omega}{3mc} \ll 1.$$

Учитывая, что  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ , получим условие малости силы радиационного трения в виде

$$\lambda \gg \frac{fq^2}{m}. \quad (11.8)$$

Неравенство (11.8) можно использовать для оценки применимости макроскопической электродинамики к процессам рассеяния света веществом. Рассеяние происходит на электронах. Для них

$$r_0 = \frac{fe^2}{m} \simeq 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м} \quad (11.9)$$

так называемый классический радиус электрона. Таким образом, взаимодействие электромагнитного поля с электронами правильно описывается макроскопической электродинамикой до тех пор, пока длина волны значительно превышает классический радиус электрона. (Но уже на расстоянии порядка  $10^{-10}$  м для описания движения этой частицы нужно использовать квантовую механику.)

Дальнейшие вычисления произведем для электрона, так как именно эта задача имеет очень важное практическое значение. Предположим, что при анализе движения радиационным трением можно пренебречь (т. е. «отдача» излучения мала). Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (11.10)$$

Отсюда найдем вторую производную дипольного момента, входящую во все формулы излучения в дипольном электрическом приближении:

$$\ddot{\mathbf{p}} = -e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (11.11)$$

Пользуясь далее формулами (10.11), (10.12), имеем

$$\vec{E} = \frac{r_0}{r} [ [\vec{E}_0 \vec{n}] \vec{n} ] e^{i\omega\tau}, \quad \vec{B} = \frac{r_0}{cr} [\vec{E}_0 \vec{n}] e^{i\omega\tau}, \quad (11.12)$$

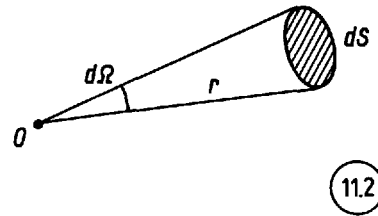
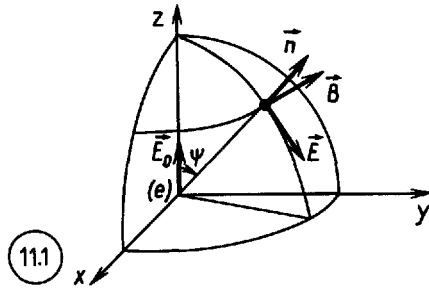
где  $r_0$  — классический радиус электрона (11.9). На рисунке 11.1 показано направление вектора напряженности падающей волны и векторов поля рассеянной волны. Угол между  $\vec{E}_0$  и направлением на точку наблюдения обозначим  $\psi$ .

Вычислим плотность потока энергии излучения по формуле (10.14):

$$\sigma = \frac{r_0^2 c}{r^2 c^2 \mu_0} (E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2 \psi = \frac{c \epsilon_0 r_0^2}{r^2} (E_0 e^{i\omega\tau})^2 \sin^2 \psi. \quad (11.13)$$

Выделяя в формуле (11.13) вещественную часть и усредняя поток за период, имеем

$$\bar{\sigma} = \frac{c \epsilon_0 r_0^2}{2} \frac{E_0^2 \sin^2 \psi}{r^2}. \quad (11.14)$$



Введем важные характеристики рассеяния: *интенсивность излучения* при рассеянии и *сечение рассеяния*.

Под *интенсивностью* излучения понимают поток энергии, проходящий на телесный угол  $d\Omega$ . Он проходит через площадку  $dS$  на поверхности сферы радиусом  $r$  (рис. 11.2). Ясно, что  $dS = r^2 d\Omega$  и

$$dN = \vec{\sigma} d\vec{S} = \frac{c\epsilon_0 r_0^2}{2} E_0^2 \sin^2 \psi d\Omega. \quad (11.15)$$

Вычислим среднюю плотность потока энергии в падающей волне. Знаем, что

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Подставляя это значение напряженности в формулу для потока (9.12) и усредняя по времени, получим

$$\sigma_{\text{пад}} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (11.16)$$

Теперь можно найти отношение интенсивности рассеянной волны в направлении  $\psi$  к плотности потока падающей волны:

$$d\sum = \frac{dN}{\sigma_{\text{пад}}} = r_0^2 \sin^2 \psi d\Omega. \quad (11.17)$$

Эта величина имеет размерность площади и пропорциональна квадрату классического радиуса электрона. Она носит название *дифференциального сечения рассеяния* электромагнитных волн на электро-троне.

Сечение рассеяния (11.17) получено для поляризованного излучения. Чтобы перейти к неполяризованному, результат следует усреднить по всевозможным ориентациям вектора  $\vec{E}_0$ . Пусть падающая волна движется вдоль  $Oz$ , а вектор  $\vec{E}_0$  направлен по  $Ox$  (рис. 11.3). Установим связь между углами  $\psi$  и  $\vartheta$ , для чего спроецируем вектор  $\vec{n}$  на ось  $Ox$ :

$$\cos \psi = \sin \vartheta \cos \alpha.$$

Как следствие,

$$\sin^2 \psi = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha.$$

Если вращать вектор  $\vec{E}_0$  в плоскости  $Oxy$ , то изменяется угол  $\alpha$ , а вместе с ним — и угол  $\psi$ . Различные ориентации вектора напряженности соответствуют той или иной поляризации падающей волны. Усредняя сечение рассеяния по  $\alpha$ , находим:

$$\overline{d\sum} = r_0^2 d\Omega \overline{\sin^2 \psi} = r_0^2 d\Omega (1 - \sin^2 \vartheta \overline{\cos^2 \alpha}).$$

Так как

$$\overline{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2},$$

а

$$1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2},$$

то

$$\overline{d\sum} = r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} d\Omega.$$

Из данной формулы следует, что имеются два направления, по которым сечение рассеяния максимально: это направление движения падающей волны и обратное ему направление.

Введем также *интегральное или полное сечение рассеяния* определением

$$\Sigma = \int d\Sigma.$$

Для неполяризованного излучения

$$\Sigma = \frac{r_0^2}{2} \int (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega,$$

что дает при вычислении выражение:

$$\Sigma = \frac{r_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi (1 + \cos^2 \vartheta) \cdot \sin \vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Применяемое в теории и на практике *полное сечение рассеяния* равно отношению мощности рассеянного излучения к плотности потока энергии падающей волны:

$$\Sigma = \frac{\bar{N}}{\sigma_{\text{пад}}}. \quad (11.18)$$

Подставляя сюда значения  $\sigma$  и  $\bar{N}$  по формулам (11.1), (11.11) и (11.16), получаем для электрона

$$\Sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (11.19)$$

что совпадает с выведенной выше формулой.

Полное сечение имеет наглядную геометрическую интерпретацию: из падающего потока энергии рассеивается та часть, которая попадает на площадку  $\Sigma$ . (Соответственно для электрона классический радиус  $r_0$  по порядку величины оказывается радиусом этой круговой площадки.)

Формула (11.19) известна в оптике под названием формулы Томсона. Она имеет фундаментальное значение для рассеяния электромагнитных волн свободными или слабосвязанными зарядами вещества. Ее можно использовать и при высоких частотах падающих волн, она применима вплоть до волн длиной в  $10^{-10}$  м.

### Методические указания и рекомендации

**I. Изучение свободного электромагнитного поля как самостоятельного физического объекта существенно в методологическом плане. В методическом же отношении — это продолжение решения волновых уравнений, начатого ранее в главе I. Теперь анализируются векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , рассчитываемые с помощью волновых потенциалов.**

В вопросах излучения электромагнитных волн избран единый для всего курса путь — решение с помощью найденных в главе I запаздывающих потенциалов. В принципиальном плане дипольное электрическое излучение исчерпывает существо явления. Для практики существенно и магнитное излучение, которое кратко рассмотрено. Следует заметить, что материал по излучению электромагнитных волн относится к наиболее трудному для усвоения и требует тщательной проработки под руководством преподавателя.

Вопросы о рассеянии электромагнитных волн могут изучаться

в ознакомительном плане, однако качественная сторона дела существенно важна для учителя.

**II.** По мере изучения данной главы необходимо выполнять задания и контролировать свои знания следующими вопросами:

**§ 9.** Составьте систему уравнений, описывающих свободное поле. Обдумайте характер связи между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , «механизм» распространения волны. Укажите особенности плоской волны, монохроматической. Запишите разложение произвольной плоской волны на гармоники. Что должно быть задано, чтобы разложение выражало конкретную волну? Разберите содержание примера 9.1. Что такое волновой пакет? Каково соотношение между реальными волнами и их моделями: пакетом, гармоникой? Оцените значение соотношения (9.19) для практики передачи информации с помощью электромагнитных волн. Обсудите вопросы поляризации волн в связи с общим решением волнового уравнения.

**§ 10.** Продумайте приближения, применяемые при выводе формул для излучения системы. Как связаны электромагнитные волны с зарядами? Проанализируйте поле излучения диполя. Обсудите роль зависимости интенсивности излучения от частоты. При каком движении точечный заряд излучает? От чего зависит спектральный состав излучения некоторой системы зарядов? Решите задачи 1–5 к данной главе.

**§ 11.** Поясните природу рассеяния электромагнитных волн веществом. В связи с этим поясните также явления отражения и преломления света. Подробно разберитесь в понятии сечения рассеяния. Как можно интерпретировать полное сечение рассеяния геометрически? Решите задачу 6 из упражнений.

### Упражнения

1. Найти средние по времени значения параметров излучения гармонического осциллятора (см. пример 10.2). Усреднение производится с помощью формулы

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

где  $T$  — период колебания.

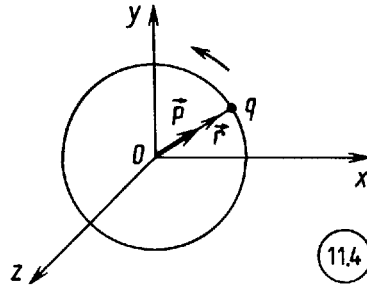
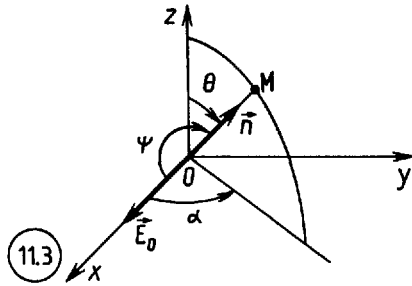
**Ответ:**  $\bar{E} = \frac{fp_0 \sin \vartheta \omega^2}{\sqrt{2}r}, \quad \bar{B} = \frac{fp_0 \sin \vartheta \omega^2}{\sqrt{2}cr},$

$$\bar{\sigma} = \frac{fp_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta}{8\pi cr^2}, \quad \bar{N} = \frac{fp_0^2 \omega^4}{3c}.$$

2. Проанализировать излучение точечного макроскопического заряда с заданным движением  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  в дипольном приближении при нерелятивистских скоростях.

Для участка траектории, малого по сравнению с расстоянием до точки наблюдения (см. рис. 10.3), возможно введение дипольного электрического момента заряда

$$\vec{p} = q\vec{r}(t).$$



В таком случае можно воспользоваться формулами (10.11), (10.12), (10.14), (10.15):

$$\vec{B} = \frac{fq}{cr} \left[ \vec{a} \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{n} \right],$$

$$\vec{E} = \frac{f}{r} \left[ \left[ \vec{a} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{n} \right] \cdot \vec{n} \right],$$

где  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  — ускорение заряда. Получаем

$$\sigma = \frac{fq a^2}{4\pi c r^2} \sin^2 \vartheta;$$

полная мощность излучения равна:  $N = \frac{2fq^2 a^2}{3c}$ .

3. Определить мощность излучения заряда, движущегося в постоянном однородном магнитном поле.

Как показано в [1], ч. II, заряд движется по окружности, причем при нерелятивистских скоростях выполняется соотношение

$$\frac{mv^2}{r} = qvB.$$

Ускорение постоянно по величине и равно  $a$ :

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}.$$

Используя результат предыдущей задачи, имеем  $N = \frac{2fq^4 v^2 B^2}{3cm^2}$ .

Излучение более интенсивно для легких частиц, что приводит к невозможности разгона электронов до очень высоких скоростей в циклических условиях: сообщаемая разгоняющим полем электрону энергия при некоторой его скорости вся идет на излучение. Однако само это так называемое циклотронное излучение находит применение на практике.

4. Рассчитать излучение электрического ротатора (заряд  $q$ , обращающийся с частотой  $\omega$  по окружности радиусом  $b$ ) на большом расстоянии от ротатора (рис. 11.4).

Радиус-вектор заряда изменяется по закону

$$\vec{r} = \vec{i}b \cos \omega t + \vec{j}b \sin \omega t,$$

соответственно дипольный момент системы — по закону

$$\vec{p} = \vec{i}bq \cos \omega t + \vec{j}bq \sin \omega t.$$

Система сводится к двум скрещенным осцилляторам, а поле находится как суперпозиция их полей. Для волны, идущей от первого осциллятора по оси  $Oz$ , имеем

$$\vec{B}_1 = -[\vec{i} \vec{k}] \frac{1}{z} B_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) = \vec{j} \frac{1}{z} B_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right),$$

$$\vec{E}_1 = [\vec{j} \vec{k}] \frac{c}{z} B_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) = \vec{i} \frac{1}{z} E_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right),$$

где

$$B_0 = \frac{fq b \omega^2}{c}, \quad E_0 = fq b \omega^2.$$

Соответственно для второго осциллятора

$$\vec{B}_2 = -\vec{i} \frac{1}{z} B_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right), \quad \vec{E}_2 = \vec{j} \frac{E_0}{z} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right).$$

5. Показать, что излучение ротатора в направлении оси  $Oz$  поляризовано по кругу.

Составляющие поля по осям  $Ox$  и  $Oy$  сдвинуты по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ :

$$E_x = \frac{1}{z} E_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right),$$

$$E_y = \frac{1}{z} E_0 \sin \left( \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right),$$

что и дает круговую поляризацию.

6. Пучок электромагнитных волн с сечением  $A = 10^{-6} \text{ м}^2$  и плотностью потока энергии  $\sigma_{\text{пад}} = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$  падает на слой электронного газа толщиной  $d = 10^{-6} \text{ м}$ , в котором концентрация электронов составляет  $n = 10^{12} \frac{1}{\text{м}^3}$ . Определить рассеиваемую мощность.

Решение: Для отдельного электрона

$$\Sigma_0 = \frac{N_0}{\sigma_{\text{пад}}}, \quad \text{где} \quad \Sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

и

$$r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Остается просуммировать поток энергии от всех электронов:

$$N = N_0 A d n = 6,7 \cdot 10^{-24} \text{ Вт.}$$

#### Глава IV

### РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Электромагнитное поле по своей природе является предельно релятивистским объектом: оно распространяется в пространстве со скоростью света. Уравнения поля ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. сохраняют одну и ту же форму написания во всех инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство не является очевидным, ибо уравнения Максвелла обычно используются в трехмерной форме, тогда как для ковариантной записи им следует придать четырехмерную форму.

Вышеизложенный материал не требовал анализа релятивистских особенностей уравнений поля, релятивистской природы законов электромагнетизма. Однако эти вопросы имеют принципиальное значение, и для них отводится специальная тема курса. При изучении данной темы требуется знание основ СТО; соответствующий материал изложен в главе I части II курса теоретической физики (см. [1]).

#### § 12. Релятивистская новариантность уравнений электродинамики

**12.1. Четырехмерный вектор плотности тока. Четырехмерная форма закона сохранения заряда.** Основные уравнения электромагнитного поля, их решения и следствия справедливы в инерциальных системах отсчета. Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к преобразованиям Лоренца. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad (12.1)$$

где  $\Lambda_{\alpha\beta}$  — элементы матрицы преобразований Лоренца:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.2)$$

В формуле (12.1) обозначения  $x'_\alpha$ ,  $x_\beta$  соответствуют радиус-векторам точек четырехмерного пространства с координатами

$$x_0 = ict, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$

т. е.

$$x_\alpha = (ict, x, y, z).$$

Может быть использована более короткая запись с выделением временной и пространственной частей 4-вектора:

$$x_\alpha = (ict, \vec{r}). \quad (12.3)$$

В матрице преобразований Лоренца (12.2)  $V$  – модуль скорости движения одной системы в другой (при совпадении осей  $Ox$  и  $O'x'$ ).

Ковариантность уравнений означает, что величины, характеризующие систему *электромагнитное поле-заряды*, должны быть или скалярами, или векторами, или тензорами преобразований Лоренца, преобразующимися при переходе от нештрихованной системы к штрихованной по закону:

для скаляра

$$f' = f, \quad (12.4-a)$$

для вектора

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (12.4-б)$$

для тензора (второго ранга)

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}. \quad (12.4-в)$$

Формулы (12.4) применяются как для преобразования величин, не зависящих от координат точки пространства, таких, например, как скаляр  $s$ , 4-вектор  $v_\alpha$ , так и для «полевых» величин, являющихся функциями координат точки 4-пространства  $x_\alpha$ . В последнем случае они требуют пояснений.

Пусть  $f = f(x_\alpha)$ ,  $A_\alpha = A_\alpha(x_\alpha)$ ,  $F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ . Вычислим значения этих функций для некоторой точки пространства-времени в разных ИСО. Если имеем дело со скаляром, то  $f(x_\alpha) = f(x'_\alpha)$ . Для векторов и тензоров такое равенство несправедливо:  $A_\alpha(x_\alpha) \neq A'_\alpha(x'_\alpha)$ ,  $F_{\alpha\beta}(x_\alpha) \neq F'_{\alpha\beta}(x'_\alpha)$ . Но между всеми проекциями 4-вектора или элементами тензора существуют зависимости, отраженные формулами (12.4). Иными словами, в общем случае формулы (12.4) устанавливают связь между полевыми величинами в одной и той же (любой) точке пространства-времени в разных ИСО.

Левые и правые части ковариантных уравнений электромагнетизма должны иметь одинаковые трансформационные свойства либо скаляров, либо векторов, либо тензоров одного и того же ранга.

Перечисляя свойства электрического заряда в § 1, п. 1.1, мы указали, что он считается скаляром или инвариантом преобразований Лоренца, т. е.

$$Q' = Q. \quad (12.5)$$

Положение об инвариантности заряда в релятивистской электродинамике берется в качестве исходного принципа.

Из определения плотности заряда (1.2) следует, что эта величина не является скаляром преобразований Лоренца. В самом деле,

$$\varrho = \frac{dQ}{dV},$$

но объем при переходе от одной системы к другой изменяется, вместе с ним изменяется и  $\varrho$ . С учетом соотношения [1], ч. II (2.1)

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

имеем формулу преобразования плотности заряда

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (12.6)$$

где  $\varrho_0$  — плотность зарядов в системе, где они покоятся. Заметим, что по определению  $\varrho_0$  есть скаляр преобразований Лоренца.

Три проекции вектора плотности тока  $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$  не образуют 4-вектор, однако вместе с плотностью заряда из них 4-вектор можно получить. Построим заведомый 4-вектор, умножая скаляр  $\varrho_0$  на 4-вектор:

$$j_\alpha = \varrho_0 v_\alpha, \quad (12.7)$$

где  $v_\alpha$  — 4-вектор скорости движения зарядов (см. [1], ч. II, § 3, п. 3.2). Вспоминая выражения проекций 4-вектора скорости

$$v_\alpha = \left( \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right),$$

запишем формулы (12.7) в развернутом виде:

$$j_\alpha = \left( \frac{ic\varrho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{\varrho_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) = (ic\varrho, \vec{j}). \quad (12.8)$$

Пространственная часть 4-вектора (12.8) есть вектор плотности тока, поэтому  $j_\alpha$  называют 4-вектором плотности тока.

**Пример 12.1. Преобразование 4-вектора плотности тока от одной ИСО к другой.**

Переход от одной инерциальной системы к другой совершается с помощью преобразований (12.4-6). Применим преобразования к вектору  $j_a$ . Пусть в нештрихованной системе заряды покоятся, т. е.

$$j_a = (ic\rho_0, 0).$$

В таком случае для штрихованной системы, движущейся в нештрихованной со скоростью  $\vec{V}$  вдоль оси  $Ox$ , получаем

$$j'_a = \left( \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \frac{-\rho_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right).$$

В нерелятивистском приближении результат очевиден:

$$\rho' = \rho_0, \quad \vec{j}' = -\rho_0 \vec{V}, \quad (12.9)$$

ток возникает вследствие движения зарядов в данной системе. Релятивистское же возрастание плотности заряда и тока связано с уменьшением размеров движущегося объема, занятого зарядами.

Запишем в четырехмерном виде уравнение непрерывности (1.6), являющееся выражением закона сохранения заряда в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

Используя обозначения координат точки 4-пространства (12.3), принятые в СТО, имеем

$$ic \frac{\partial \rho}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда с помощью формулы (12.8) получим

$$\sum_{a=0}^3 \frac{\partial j_a}{\partial x_a} = 0. \quad (12.10)$$

Уравнению непрерывности придана 4-мерная ковариантная форма. Она особенно наглядна при использовании 4-мерного оператора:

$$\nabla_a = \left( \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Если теперь записать формулу (12.10) в виде

$$\nabla_a j_a = 0, \quad (12.11)$$

то уравнение непрерывности (12.11) можно прочесть следующим образом: четырехмерная дивергенция 4-вектора плотности тока равна нулю.

Таким образом, полагая электрический заряд скаляром преобразований Лоренца, мы убедились в справедливости закона сохране-

ния заряда во всех инерциальных системах. Скалярный характер электрического заряда и закон сохранения этой величины оказались взаимосвязанными.

**12.2. Ковариантность уравнений электромагнитного поля в потенциалах.** Обратимся к потенциалам электромагнитного поля  $\varphi$  и  $\vec{A}$  и формально объединим скалярный и векторный потенциалы поля в матрицу-столбец:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{i}{c} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \quad (12.12)$$

Используем также 4-оператор Даламбера:

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

являющийся скаляром преобразований Лоренца.

Выпишем уравнения электромагнитного поля в потенциалах:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что с помощью введенной величины  $A_\alpha$  и оператора  $\square$  они принимают вид

$$\square A_\alpha = -\mu_0 j_\alpha. \quad (12.13)$$

Справа в выражении (12.13) стоит вектор преобразований Лоренца  $j_\alpha$ . Поэтому 4-вектором является и величина  $A_\alpha$ , если  $\mu_0$  — скаляр преобразований. Инвариантность  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  вытекает из соотношения

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2},$$

где  $c$  — инвариантная скорость света. (Разумеется, единицы измерения выбраны во всех ИСО одинаковые.)

Итак, если потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  объединяются в 4-вектор потенциала электромагнитного поля, то уравнения (12.13) сохраняют форму во всех инерциальных системах отсчета, т. е. ковариантны.

Запишем также в ковариантной форме условие калибровки потенциалов (4.5). Оно принимает вид

$$\sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

или  $\nabla_\alpha A_\alpha = 0.$  (12.14)

Четырехмерная форма записи уравнений поля не только наглядно показывает ковариантность их по отношению к лоренцовым преобразованиям, но и дает общий метод преобразования величин, входящих в уравнения. Так, по формулам (12.4) преобразуются потенциалы поля, а от них можно перейти и к векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Однако мы выберем другой, математически более простой способ нахождения формул пересчета напряженности и индукции.

**Пример 12.2 Формулы преобразования потенциалов поля.**

Используя формулы 12.4 и определение 4-потенциала (12.12), имеем

$$A'_0 = \frac{A_0 - i \frac{V}{c} A_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_1 = \frac{A_1 + i \frac{V}{c} A_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3$$

Переходя к трехмерным величинам, получаем для скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi' = \frac{\varphi - V A_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_x = \frac{A_x - \frac{V}{c^2} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z$$

### § 13. Тензор электромагнитного поля. Преобразование векторов напряженности и индукции электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы к другой

**13.1. Тензор электромагнитного поля.** В предыдущем параграфе доказана лоренц-ковариантность уравнений поля в потенциалах. Это значит, что они справедливы в любой инерциальной системе отсчета и в трехмерной форме, применявшейся нами ранее. Разумеется, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  изменяются при переходе от одной системы к другой. Пересчет их можно выполнить следующим способом. Рассмотрим величину, представляющую собой по определению антисимметричный тензор второго ранга:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (13.1)$$

Используя формулы  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,

а также определение 4-радиус-вектора (12.3), нетрудно найти все элементы тензора:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z \\ -\frac{i}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{i}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{i}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (13.2)$$

Тензор  $F_{\alpha\beta}$  называется тензором электромагнитного поля. В этой величине объединены электрические и магнитные характеристики поля, поэтому тензор дает полное описание поля.

С помощью тензора электромагнитного поля (13.2) уравнения Максвелла (2.1) или (2.3) записываются в ковариантной форме. Читателю предлагается в качестве примера проверить следующие утверждения.

Первая пара уравнений Максвелла (2.1) эквивалентна одному тензорному уравнению

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (13.3)$$

причем все три индекса  $\alpha, \beta, \gamma$  принимают только различные значения. (Если два или три индекса совпадают, то получается тождество  $0 = 0$ .)

Вторая пара уравнений (2.1) заменяется формулой

$$\sum_{\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mu_0 j_\alpha, \quad (13.4)$$

в которой индексы  $\alpha$  и  $\beta$  принимают значения 0, 1, 2, 3.

Полученные результаты в виде формул (13.3) и (13.4) замечательны в следующих отношениях. Во-первых, описание поля с помощью одной тензорной характеристики подчеркивает единство его и условность подразделения поля на электрическое и магнитное. Во-вторых, ковариантность уравнений Максвелла наглядно показывает релятивистскую природу электромагнитных полей, основных законов электродинамики, релятивистский их характер. В-третьих, открывается простой путь для нахождения формул преобразования векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  из одной инерциальной системы в другую (средствами тензорного исчисления).

**13.2. Преобразование векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при переходе от одной инерциальной системы к другой. Инварианты поля.** Проекция вектора электрической напряженности поля  $\vec{E}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$  связаны с компонентами тензора  $F_{\alpha\beta}$  (см. (13.2)). Поэтому формулы

преобразования их при переходе из одной ИСО в другую могут быть найдены из общего правила преобразования тензорных величин (12.4-в):

$$F'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}.$$

Давая индексам нужные для получения проекций  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  согласно матрице (13.2) значения (например,  $F_{1,2} = B_z$ ,  $F_{0,1} = \frac{i}{c} E_x$  и т. д.) получаем

$$\left\{ \begin{array}{ll} E'_x = E_x, & B'_x = B_x; \\ E'_y = \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B'_y = \frac{B_y + \frac{V}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ E'_z = \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B'_z = \frac{B_z - \frac{V}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (13.5)$$

Формулы обратных преобразований можно получить обращением знака скорости  $V$ . Они часто удобнее формул (13.5) по той причине, что, связывая с движущимся телом (частицей) штрихованную систему, имеем в нештрихованной для нее скорость движения  $\vec{V}$ , а не  $-\vec{V}$ , как в случае (13.5). Выпишем формулы преобразования от штрихованной системы к нештрихованной:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \\ E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{array} \right. \quad (13.6)$$

Из соотношений (13.5) или (13.6) отчетливо виден относительный характер разделения поля на электрическое и магнитное.

**Пример 13.1. Преобразование электрического поля к другим системам отсчета.**

Пусть в некоторой ИСО имеет место только электрическое поле  $\vec{E}'$  ( $\vec{B}' = 0$ ). В других системах имеются и электрическое, и магнитное поля:

$$E_x = E'_x, \quad B_x = 0;$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_y = \frac{-\frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{V}{c^2} E_z;$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad B_z = \frac{\frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{V}{c^2} E_y.$$

Связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в этом случае выражается формулой

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{V} \vec{E}].$$

Следовательно, магнитное поле перпендикулярно электрическому, а также направлению движения системы. Аналогично: если в штрихованной системе существует одно магнитное поле  $\vec{B}'$ , а  $\vec{E}' = 0$ , то в нештрихованной появляется и электрическое, причем

$$\vec{E} = -[\vec{V} \vec{B}].$$

Из примера видно, что проявление электрического или магнитного поля зависит от выбора системы отсчета.

В релятивистской физике особенно важное значение имеют не относительные, а абсолютные величины — инварианты (или скаляры) преобразований Лоренца.

Получим инвариантные для электромагнитного поля величины. По свойствам тензоров свертка тензора по обоим индексам есть скаляр преобразований Лоренца. Вычисление свертки тензора (13.2) дает

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2 \left( B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 \right), \quad (13.7)$$

так что

$$B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 = Inv^{(1)}.$$

Прямым применением формул (13.5) убеждаемся, что инвариантно и скалярное произведение векторов поля:

$$\vec{E} \vec{B} = Inv^{(2)}. \quad (13.8)$$

Инвариантные величины в каждой точке пространства не зависят от выбора ИСО. В ряде случаев их удобно использовать при пересчетах поля из одной системы в другую.

**Пример 13.2. Формулы преобразования векторов поля при нерелятивистских скоростях движения ( $V \ll c$ ).**

Из формул (13.6) получаем

$$\begin{cases} E_x = E'_x, & B_x = B'_x; \\ E_y = E'_y + VB'_z, & B_y = B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \approx B'_y; \\ E_z = E'_z - VB'_y, & B_z = B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \approx B'_z. \end{cases} \quad (13.9)$$

Во втором столбце формул (13.6) пренебрегаем не только членом  $\frac{V^2}{c^2}$ , но и  $\frac{V}{c^2} E'_z$  и  $\frac{V}{c^2} E'_y$ , что оправдано следующими условиями: действие поля на заряды задано силой Лоренца (1.8), а проекция ее магнитной составляющей на ось  $Oz$  (в нашем случае  $q \frac{V^2}{c^2} E'_z$ ) пренебрежимо мала по сравнению с электрической составляющей ( $q E'_z$ ), то же и для других проекций.

Из формул (13.9) видно, что относительный характер разделения поля на магнитное и электрическое имеет место и при нерелятивистских скоростях движения. Так, если в нештрихованной системе было только магнитное поле  $\vec{B}$  ( $\vec{E} = 0$ ), то в штрихованной появляется и электрическое

$$\vec{E}' = [\vec{V} \vec{B}].$$

**Пример 13.3. Сила Лоренца в нерелятивистской области.**

Если точечный заряд  $q$  покоится в штрихованной системе, то на него действует сила

$$\vec{F}' = q \vec{E}' = q [\vec{V} \vec{B}].$$

(См. конец примера 13.2) Так как в нерелятивистской области сила инвариантна (во всех инерциальных системах отсчета имеет одно и то же значение), то та же по величине сила действует на заряд и в нештрихованной системе, где он движется со скоростью  $\vec{V}$  в магнитном поле:

$$\vec{F} = q [\vec{V} \vec{B}]. \quad (13.10)$$

Таким образом получен вывод для магнитной составляющей силы Лоренца на основе формул преобразования вектора поля. (Формула (13.10) остается справедливой и при релятивистских скоростях, но вывод требует применения преобразований Лоренца к векторам поля и силы.)

**Пример 13.4. Вывод преобразования силы Лоренца при переходе от одной ИСО к другой.**

Выражение (1.8)

$$\vec{F} = q \vec{E} + q [\vec{v} \vec{B}] \quad (1)$$

преобразуем к штрихованной системе, вводя соответствующие значения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  по формулам (13.6) и заменяя  $\vec{v}$  на  $\vec{v}'$  с помощью формул преобразования скорости (см. [1], ч II, § 2, п. 2.4):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}$$

Получаем для проекции силы на ось  $Ox$

$$\begin{aligned} F_x &= q E_x + q (v_y B_z - v_z B_y) = q E_x + q \frac{v'_y B'_z - v'_z B'_y + \frac{V}{c^2} E'_y v'_y + \frac{V}{c^2} E'_z v'_z}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} = \\ &= \frac{q E'_x + q [\vec{v}' \vec{B}']_x + q \frac{V}{c^2} \vec{E}' \vec{v}'}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из формулы (2) видно, что если использовать для силы Лоренца во всех ИСО выражение (1), то  $F_x$  преобразуется в соответствии с равенством

$$F_x = \frac{F'_x + \vec{v}' \vec{F}' \frac{V}{c^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}},$$

совпадающим с формулой преобразования проекции силы, выведенной в СТО (см. [1], ч. II, пример 6.1) То же относится и к двум другим проекциям силы:

$$F_y = \frac{F'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad F_z = \frac{F'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}.$$

Таким образом доказано, что определение силы Лоренца ковариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. во всех ИСО справедлива формула (1).

**Пример 13.5. Ковариантная форма уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.**

В части II (см. [1], ч. II, § 6) обсуждалась ковариантная форма релятивистского уравнения динамики и было получено уравнение

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = f_\alpha, \quad (1)$$

где

$$p_\alpha = \left( \frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (2)$$

4-импульс, а  $f_\alpha$  — 4-сила, связанная с трехмерной силой соотношением

$$f_\alpha = \left( \frac{i\vec{F}\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (3)$$

Подставляя в (1) значения  $p_\alpha$  из (2) и вместо  $\vec{F}$  силу Лоренца (1.8), действующую на точечный электрический заряд  $q$ , получим уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q\vec{E}\vec{v},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]).$$

Это и есть ковариантные уравнения движения заряженной частицы в поле, т. е. сохраняющие свою форму во всех ИСО при условии, что векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  преобразуются с помощью формул (13.5).

**Пример 13.6. Лоренц-инвариантная функция Лагранжа.**

Обычный вид функции Лагранжа для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, известен (см. [1], ч. II, (4.2)).

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\vec{A}\vec{v}. \quad (1)$$

Это выражение сводится к инвариантному

$$\tilde{L} = -mc^2 + qA_\alpha v_\alpha, \quad (2)$$

откуда и следует ковариантность уравнений движения, получаемых по методу Лагранжа из выражения (1).

**13.3. Эффект Доплера для электромагнитных волн.** Явление изменения частоты волны в зависимости от скорости движения источника в системе наблюдателя составляет эффект Доплера для света. Поскольку электромагнитное поле является предельно релятивистским объектом, многие явления и эффекты, связанные с полем, имеют релятивистскую природу. Таковой обладает и названный эффект. Для его анализа применим преобразования Лоренца 4-векторов, инварианты, образованные из них.

Плоская электромагнитная волна в пустоте имеет инвариантную скорость распространения во всех инерциальных системах отсчета, равную  $c$ . Пользуясь другими инвариантами электромагнитного поля (13.7) и (13.8), легко устанавливаем, что перпендикулярность векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  и соотношение  $E = cB$  для их модулей сохраняются в любой системе отсчета. Однофазность колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  во всех ИСО свидетельствует о том, что фаза колебаний  $\Phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$  есть скаляр преобразований Лоренца, а входящие в нее волновой вектор  $\vec{k}$  и частота колебаний  $\omega$  преобразуются при переходе от одной системы к другой.

Изменение частоты представляет собой эффект Доплера, а изменение направления волнового вектора  $\vec{k}$  — абберацию света. Очевидно, что в силу равноправия систем эффекты одинаковы при движении источника и приемника, т. е. определяются их относительной скоростью.

Выведем теперь зависимость  $\omega$  от скорости движения источника света. Для этого выберем две системы, у которых оси  $Ox$  и  $O'x'$  параллельны этой скорости  $\vec{V}$ . В штрихованной системе источник покоится. На рисунке 13.1  $\vec{k}$  — волновой вектор в нештрихованной системе, где источник движется со скоростью  $\vec{V}$ ;  $\vartheta$  — угол, под которым свет приходит к наблюдателю в системе координат  $Ox$ . Аналогично  $\vec{k}'$  и  $\vartheta'$  — величины, измеряемые наблюдателем в штрихованной системе  $O'x'y'$ .

Заметим, что скаляр  $\Phi$  можно представить как произведение двух 4-векторов:

$$\Phi = k_\alpha x_\alpha,$$

$$\text{где } k_\alpha = \left( \frac{i\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

Пользуясь формулой (12.4-б) для преобразования 4-вектора

$$k'_\alpha = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} k_\beta$$

и матрицей преобразований Лоренца (12.1), имеем для временной составляющей волнового вектора выражение

$$k'_0 = \frac{k_0 - \frac{iV}{c} k_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (13.11)$$

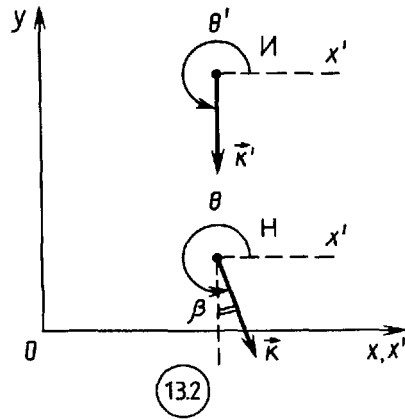
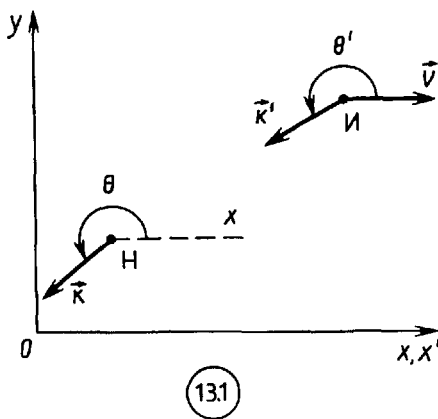
Из рисунка видно, что  $k_1 = k_x = k \cos \vartheta$ . Формула (13.11), если в нее подставить  $k_0 = \frac{i\omega}{c}$ ,  $k'_0 = \frac{i\omega'}{c}$ , дает правило преобразования частоты:

$$\omega' = \frac{\omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Обозначим через  $\omega_0$  частоту света в системе, где источник покоится, и назовем ее собственной частотой. Частота, измеренная в системе отсчета, где источник движется, выражается через собственную частоту следующим образом:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (13.12)$$

Согласно сделанным ранее разъяснениям формула (13.12) применима и в случае движения источника, и в случае движения наблюдателя.



дателя, тогда как для упругих волн, например волн в среде, имеют место разные формулы: если движется источник, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta},$$

если движется наблюдатель, то

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta \right).$$

Последние две формулы отличаются друг от друга членами второго порядка малости относительно величины  $\frac{V}{c}$ . В принципе эффект Доплера мог бы играть роль, аналогичную опыту Майкельсона: изменение частоты при движении источника и наблюдателя в соответствии с формулой (13.12) служит доказательством отсутствия светоносной среды и равноправия инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим важные частные случаи проявления эффекта Доплера:

а)  $\vartheta = 180^\circ$ , источник удаляется от наблюдателя. В таком случае

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}},$$

и  $\omega < \omega_0$ . Наблюдается, например, уменьшение частот известных линий излучения в спектрах далеких галактик. Это явление носит название «красного смещения» и интерпретируется как «разбегание» галактик, увеличение расстояний между ними. Красное смещение позволяет определить исходя из этих предположений радиальную составляющую скорости движения галактик (по отношению к Земле).

б)  $\vartheta = 0$ , источник приближается к наблюдателю. Частота увеличивается по формуле

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}.$$

в) Случай  $\vartheta = 90^\circ$  соответствует «поперечному» эффекту Доплера:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поперечный эффект Доплера может послужить прямым подтверждением замедления хода процессов на движущихся телах. В нерелятивистской физике его нет. В 1938 г. Айвсом были поставлены специальные опыты с каналовыми лучами, подтвердившие с высокой точностью этот релятивистский эффект.

Заметим, что с помощью эффекта Мессбауера в ядерной физике

фиксируется изменение частот  $\gamma$ -лучей, обусловленное движениями со скоростями всего несколько см/с, что позволяет зафиксировать эффект Доплера, вызванный весьма медленным движением источника.

**Пример 13.7. Абберация света.**

Явление абберации или изменения направления света, вызванное относительным движением источника и приемника света, можно рассмотреть как следствие преобразований Лоренца.

Напомним, что исходя из классической формулы сложения скоростей при направлении распространения света, перпендикулярном к направлению движения, имеем для угла абберации  $\beta$  (рис. 13.2)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{c}. \quad (1)$$

Понятно, что эта формула является приближенной и может использоваться лишь при  $v \ll c$ .

Для вывода релятивистской формулы абберации получим связь углов  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ . Для этого выпишем формулу преобразования компоненты  $k_1$

$$k'_1 = \frac{k_1 + \frac{iV}{c} k_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

откуда следует

$$k' \cos \vartheta' = \frac{k \cos \vartheta - \frac{V}{c} \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Вспомня, что  $\omega = ck$ , имеем

$$\omega' \cos \vartheta' = \frac{\omega \left( \cos \vartheta - \frac{V}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Теперь подставим сюда значение частоты из формулы эффекта Доплера:

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (3)$$

Используя преобразование для компоненты  $k'_2$ , аналогично получим

$$\sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}. \quad (4)$$

Однако нас интересует зависимость измеряемого угла  $\vartheta$  в системе, где источник света движется, от угла  $\vartheta'$ . Обратные формулы получим обращением знака скорости в формулах (3) и (4). Деля затем (4) почленно на (3), имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\cos \vartheta' + \frac{V}{c}} \quad (5)$$

Общая формула (5) для абберации света найдена

Пусть свет испускается перпендикулярно направлению движения, т. е.  $\vartheta' = 270^\circ$  (см. рис. 13.2), тогда

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{c}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (6)$$

Из рисунка видно, что  $-\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{ctg} \beta$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Это и есть релятивистская формула абберации, соответствующая рассмотренной в начале примера классической формуле (1)

В общем случае произвольного угла  $\vartheta'$  абберация определяется разностью углов  $\vartheta$  и  $\vartheta'$

### Методические указания и рекомендации

**I.** Важная в мировоззренческом плане тема изложена в главе с помощью аппарата тензорного исчисления в пространстве Минковского. При этом применен наиболее простой вариант для выражения метрики: использована мнимая единица у временной проекции векторов. Основа главы — преобразования поля при переходе от одной системы к другой. Все остальное имеет иллюстративный характер.

По данной главе может быть организована самостоятельная работа. Это в основном применение формулы преобразования 4-векторов, использование инвариантов в конкретных задачах.

**II.** При изучении главы контролируйте усвоение материала с помощью вопросов, углубляйте понимание его в упражнениях.

**§ 12.** Повторите основы СТО по книге [1], ч. II. На чем основана четырехмерная интерпретация преобразований Лоренца? В чем отличие пространства-времени от евклидова пространства? Какие величины являются инвариантами при переходе от одной ИСО к другой? Приведите примеры 4-векторов из релятивистской динамики. Продумайте, что означает инвариантность электрического заряда. Докажите инвариантность 4-оператора Даламбера, векторный характер  $\nabla_\alpha$ . Докажите, что четыре величины  $\frac{1}{c} \varphi, A_x, A_y, A_z$  образуют 4-вектор. Исходя из формул (12.4) найдите формулы преобразования плотностей заряда и тока. Выведите формулы преобразований потенциалов поля. Почему скалярный и векторный потенциалы объединяются в одну величину? Повторите определение и свойства тензорных величин. Докажите, что совокупность величин (13.1)

образует тензор преобразований Лоренца. Разбейте все величины, встречающиеся в § 12 и § 13, на скаляры, векторы, тензоры. Решите задачи 1–12 из упражнений к главе. Перечислите известные вам применения эффекта Доплера. Обсудите применение явления абберации света в астрономии.

### Упражнения

1. Пользуясь определениями тензора поля (13.1), 4-потенциала  $A_\alpha$  (12.12) и формулами  $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , получить все элементы тензора  $F_{\alpha\beta}$ .
2. Вывести закон преобразования проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с помощью формул (12.4) и (13.2).
3. Доказать эквивалентность ковариантной системы уравнений (13.3), (13.4) и системы уравнений Максвелла (2.1), используя компоненты тензора поля, заданные через проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и выполняя указанные в уравнениях действия.
4. Пользуясь инвариантами поля (13.7), (13.8), доказать, что перпендикулярность векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и отношение их модулей в электромагнитной волне сохраняются во всех ИСО.
5. Показать с помощью инвариантов  $Inv^{(1)}$  и  $Inv^{(2)}$ , что перпендикулярность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  сохраняется во всех ИСО только при условии сохранения определенного отношения их модулей.
6. Показать, что во всех ИСО имеется постоянное отношение  $|\vec{E}|$  и  $|\vec{B}|$  только при условии перпендикулярности векторов.
7. Выполнить непосредственную проверку инвариантности величин  $Inv^{(1)}$  и  $Inv^{(2)}$  с помощью преобразований Лоренца.
8. Найти закон преобразования векторов поля при  $V \ll c$  и записать его в векторной форме.

**Ответ:**  $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V} \vec{B}]$ ,  $\vec{B}' = \vec{B}$ .

9. С помощью результата предыдущей задачи показать, что для случая  $E = 0$ , а  $B \neq 0$  векторы  $\vec{E}'$  и  $\vec{B}'$  перпендикулярны.

10. Показать, что в случае  $Inv^{(2)} > 0$  и  $Inv^{(1)} = 0$  найдется система отсчета, в которой имеет место только магнитное поле, а при  $Inv^{(2)} < 0$  и  $Inv^{(1)} = 0$  — только электрическое.

11. Как должны соотноситься между собой векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , чтобы электрическое или магнитное поле нельзя было исключить никаким выбором системы отсчета?

12. Точечный заряд движется равномерно со скоростью  $\vec{v}$ . Найти потенциалы и векторы поля при  $v \ll c$ .

**Ответ:**  $\phi(\vec{r}) = k \frac{q}{R}$ ,  $\vec{A} = f \frac{q\vec{v}}{R}$ ,  $\vec{E} = kq \frac{\vec{R}}{R^3}$ ,  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v} \vec{E}]$ ,

где  $\vec{R}$  — вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку, где измеряются характеристики поля:  $R = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$ .

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ПРОЦЕССЫ В ВЕЩЕСТВЕ

---

### Глава V ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В этой части курса мы переходим к изучению электромагнитного поля в пространстве, заполненном веществом, т. е. поля в веществе или вещественной среде. Именно с полями в веществе чаще всего и приходится иметь дело на практике. (Изучение же поля в вакууме позволяло сосредоточить внимание на фундаментальных сторонах связей между полем и зарядами.)

Классическая электродинамика учитывает электрические и магнитные свойства вещества феноменологически посредством параметров:  $\epsilon$  — диэлектрической проницаемости вещества и  $\mu$  — магнитной проницаемости.

Кроме векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , для описания поля в веществе используются векторы:  $\vec{D}$  — индукция электрического и  $\vec{H}$  — напряженность магнитного полей.

В нашем курсе основные уравнения поля в веществе вводятся с помощью анализа роли зарядов, входящих в состав вещества. Этот подход в некоторой степени проясняет природу величин  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , их связь с другими характеристиками поля и вещества.

#### § 14. Усреднение уравнений микроскопического поля в веществе

**14.1. Свободные и связанные заряды.** В предыдущих темах изучалось электромагнитное поле электрических зарядов в вакууме. Сами заряды входили в уравнения через функции  $\rho(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Обсуждалось лишь одно свойство носителей электрических зарядов — создавать электромагнитное поле, а их связь с веществом не рассматривалась; заряды считались некоей подвижной субстанцией, принимающей различные стационарные или изменяющиеся конфигурации в пространстве.

Но электрический заряд — это не особая субстанция, а свойство элементарных частиц, и существует заряд только вместе с элементарной частицей. Так что заряд всегда связан с веществом. Одни из заряженных частиц входят в состав атомов, молекул или расположены в узлах кристаллической решетки твердых тел и поэтому неспособны к свободному перемещению. Заряды таких частиц называются *связанными*. Другие частицы утратили связь с атомами и могут перемещаться в пределах конкретной вещественной среды. Это, например, электроны внутри проводника или в вакууме. Аналогично обстоит

дело с положительными или отрицательными ионами в жидкости, газе, вакууме. Заряды таких частиц называются *свободными*.

Вещественная среда, в состав которой входят только связанные заряды (ядра и электроны), называется *диэлектриком*. Диэлектрик, если на нем не помещены внешние посторонние заряды, — электронейтральная система: число положительных связанных зарядов равно числу отрицательных. Если на твердый диэлектрик поместить свободный заряд, то последний сохраняет на нем свое положение неопределенно долго, т. е. распределение (конфигурация) свободного заряда на диэлектрике сохраняется. (Здесь заряд называется свободным в смысле утери связи с породившим его электронейтральным телом.)

В состав проводящих тел и сред (*проводников*) входят свободные заряды, т. е. при электронейтральности проводника в нем есть заряды, способные свободно перемещаться. Воздействие внешних полей создает в проводниках *направленное движение зарядов — электрический ток*. Если изолированный проводник заряжен, т. е. на него помещены извне свободные заряды, то последние распределяются по поверхности проводника.

Какие же заряды мы имели в виду, когда изучали электромагнитное поле в вакууме? Прежде всего мы имели дело со свободными зарядами, т. е. с зарядами, утратившими связь с веществом. Они располагались либо в вакууме (элементарные носители двигались в пустоте), либо на телах, но влиянием тел на поле, которое создано свободными зарядами, можно было пренебречь. О таких телах лишь говорилось, что именно они создают ту или иную конфигурацию зарядов. Например, при расчете поля заряженного тела из диэлектрика на больших расстояниях от него полем электронейтральной системы зарядов самого диэлектрика можно пренебречь. Аналогично можно пренебрегать собственным полем линейного проводника, по которому идет ток, и рассматривать только магнитное поле тока в окружающем пространстве.

Разумеется, указанный подход пригоден не всегда, и сейчас мы от него откажемся. Учтем, что в наблюдаемые электромагнитные поля вносят вклад не только свободные заряды, утратившие связь с веществом, но и заряды, входящие в его структуру. В оставшейся части курса электродинамики объект исследования есть *система, состоящая из свободных внешних по отношению к веществу зарядов, вещества, полностью или частично заполняющего пространство, и электромагнитного поля, созданного как внешними зарядами, так и зарядами, входящими в состав вещества*. (Внутренние заряды могут быть и связанными, и свободными. Далее выяснится, что подразделение свободных зарядов на внешние и входящие в состав вещества во многих случаях не нужно.) Основная задача электродинамики остается прежней — нахождение поля по заданному распределению и движению свободных зарядов, но теперь с учетом влияния на поле вещества.

Связанные заряды имеют дискретный характер; микрополя, ими созданные, весьма сильно изменяются при переходе от одной точки тела к другой и весьма быстро изменяются во времени. Вследствие квантовых эффектов уравнения Максвелла – Лоренца неприменимы для описания движения микрочастиц и расчета полей в масштабах отдельного атома или элементарной кристаллической ячейки. Но это сейчас и не требуется. Рассматривая поле, созданное микрозарядами в веществе, в макроскопическом плане следует усреднить микрополя по пространству и времени. Фактически также обстояло дело и с электромагнитным полем системы свободных зарядов в вакууме: для макроскопических проявлений не принимался в расчет дискретный характер зарядов и поля; определялись параметры некоторого усредненного макрополя  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , связанного с усредненной (по физически малому объему  $dV$  и промежутку времени  $dt$ ) плотностью зарядов и токов,  $\rho$  и  $\vec{j}$ .

Итак, в электродинамике для расчета поля в веществе подразделяют заряды на свободные и связанные. Те и другие считают непрерывно распределенными по пространству. Поле в веществе складывается из усредненных микрополей свободных и связанных зарядов. Подчеркнем условный характер термина «связанные заряды»: они ничем не отличаются от свободных, кроме того обстоятельства, что связанные заряды входят в состав атомов и молекул вещества, а свободные утратили связь с конкретным ядром. Важен следующий момент: свободные заряды могут быть для рассматриваемого тела как внешними, принесенными извне, так и внутренними, входящими в состав проводника. Связанные же заряды всегда внутренние. Так, если на диэлектрике помещен дополнительный заряд извне, то он свободен, хотя и не может в силу строения диэлектрика перемещаться.

**14.2. Усредненные уравнения поля для системы свободных и связанных зарядов.** Перед нами стоит задача определения векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в веществе по заданному распределению свободных токов и зарядов.

Рассмотрим с качественной стороны «механизм» образования поля в веществе. Окружающие нас тела и материальные среды в стабильном состоянии электронейтральны, а составляющие их заряды расположены таким образом, что не создают макроскопического поля. Иными словами, если нет внешних полей, то при усреднении распределения микрозарядов и микрополей мы получаем нулевые значения соответствующих величин: в диэлектриках  $\rho_{\text{св.з}} = 0$  и  $\vec{j}_{\text{св.з}} = 0$ , в проводниках равен нулю ток свободных зарядов  $\vec{j} = 0$ , а общая плотность распределения свободных и связанных зарядов также равна нулю. Соответственно отсутствует макроскопическое поле, созданное зарядами вещества.

Теперь допустим существование внешних свободных зарядов  $\rho$ ,  $\vec{j}$ . Они создают макроскопическое электромагнитное поле, под дей-

ствием которого перераспределяются заряды, входящие в вещество. В проводниках появляется макроскопический ток свободных зарядов, плотность зарядов в отдельных местах будет отлична от нуля. В диэлектриках за счет смещения связанных зарядов возникают отличные от нуля плотности связанных зарядов и токов. Вследствие этих изменений в состоянии вещества возникает дополнительное поле, накладывающееся на поле, созданное внешними свободными зарядами.

С помощью принципа суперпозиции (§ 2, п. 2.4) можно записать систему уравнений Максвелла (2.1) для электромагнитного поля, созданного совместными действиями свободных и связанных зарядов:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}_{\text{св.з}}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{\text{св.з}}}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (14.1)$$

В классической электродинамике рассматриваются только такие случаи взаимодействия зарядов и поля, при которых вещество остается в стабильном состоянии, не разрушаясь при действии на него поля. Это значит, что отдельно сохраняются и свободные, и связанные заряды:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}} + \frac{\partial \rho_{\text{св.з}}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (14.2)$$

По существу, усреднению при написании уравнений (14.1) и (14.2) подвергалось действие не только связанных, но и свободных зарядов: ведь дискретны те и другие и фиксируются при измерениях не микрополя, созданные отдельными микрозарядами, а их макроскопическое усредненное поле ( $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ) как в случае вошедших в рассмотрение связанных, так и ранее рассматривавшихся свободных зарядов. Однако практически использовать уравнения (14.1), как это делалось в электродинамике вакуума с уравнениями Максвелла (2.1), нельзя, так как величины  $\rho_{\text{св.з}}$  и  $\vec{j}_{\text{св.з}}$  не могут быть непосредственно измерены или вычислены. Чтобы использовать систему уравнений (14.1), необходимо учесть вклад зарядов вещества в общее поле, опираясь на некоторые измеримые параметры, и исключить из уравнений величины  $\rho_{\text{св.з}}$  и  $\vec{j}_{\text{св.з}}$ . А это невозможно без введения каких-то моделей строения вещества, его электромагнитных характеристик для описания поведения вещества в электромагнитном поле, т. е. включения в теорию *дополнительных* к исходным уравнениям поля положений.

В классической электродинамике используют простейшие

модели вещества. Прежде всего тела делят на диэлектрики и проводники. Мы уже охарактеризовали с качественной стороны их свойства ранее, в § 14, п. 14.1. В § 15, модели диэлектрика и проводника обсуждаются подробнее, вводятся их количественные характеристики.

**14.3. Уравнения Максвелла – Лоренца для микроскопического поля в электронной теории.** Электронная теория развилась в конце XIX века как естественное продолжение теории электромагнитного поля Максвелла. В историческом плане в теории Максвелла до определенного времени внимание сосредоточивалось на макроскопическом электромагнитном поле, а природа его источников – электрических зарядов – не рассматривалась (теория имела феноменологический характер). Открытие электрона как носителя элементарного электрического заряда (Дж. Дж. Томсон, 1897 г.) заставило физиков обратиться к изучению самих электрических зарядов, а вместе с тем и к изучению строения вещества. Первым шагом на этом пути стала классическая электронная теория вещества, основоположником которой был голландский физик Г. А. Лоренц. Его работы по электронной теории относятся к 1880–1909 гг. В теории принималось, что вещество представляет собой систему связанных между собой электронов и положительных ионов. Связь между зарядами осуществляется посредством создаваемого ими микроскопического электромагнитного поля в вакууме. Микроскопическое поле носит по отношению к макроскопическому полю первоначальный характер «истинного» поля и подчиняется уравнениям, совпадающим по форме с уравнениями Максвелла для макроскопического поля в вакууме (см. уравнения (2.1), (2.3) и др.). Движение же электронов подчиняется законам механики Ньютона.

Исходные положения классической электронной теории, как это сейчас известно, не во всех случаях применимы к микромиру, так как у микроскопических объектов и систем, в частности у электронов в атоме, наблюдаются новые, квантовые свойства. Ранее в нашем курсе система уравнений Максвелла – Лоренца применялась в макроскопическом случае, т. е. не к отдельному электрону, а к заряду, содержащему множество электронов. А в классической электронной теории ее применяли к микрозарядам, что, вообще говоря, неправомерно. Несмотря на это, классическая электронная теория не потеряла своего эвристического значения до настоящего времени. с качественной стороны она объясняет ряд свойств вещества и природу многих электромагнитных явлений, происходящих в веществе, позволяет установить их электронный механизм.

Строгий теоретический анализ для соответствующих вопросов выполняется в современной электронной теории, учитывающей квантовые особенности поля и движения микрочастиц. (Она изучается в курсе теоретической физики пединститута после статистической физики.)

Сейчас мы воспользуемся основными положениями электронной теории, чтобы установить вид уравнений макроскопического поля в веществе, опираясь на уравнения Максвелла для вакуума. Для этого рассмотрим микроскопические уравнения Максвелла – Лоренца и перейдем от них к макроскопическим уравнениям для поля в веществе. Пусть  $\vec{e}$  – вектор напряженности, а  $\vec{b}$  – индукции микроскопического поля, созданного его «первоначальными» источниками – электронами и соответствующими элементарными зарядами положительных ионов. Уравнения Максвелла – Лоренца для микрополя приобретают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{b} = 0, \\ \text{rot } \vec{b} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \mu_0 q \vec{u}, \\ \text{div } \vec{e} = \frac{1}{\varepsilon_0} q, \end{array} \right. \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (14.3)$$

где  $\vec{u}$  – скорость движения заряженных частиц.

$$\text{Уравнение непрерывности записывается так: } \operatorname{div} q\vec{u} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (14.4)$$

В систему входит также уравнение движения электрона. В классической электронной теории силы Лоренца для электрона выражается той же формулой, что и для макроскопического точечного заряда, т. е. если заряд электрона  $q$ , то

$$\vec{f} = q(\vec{e} + [\vec{u} \vec{b}]). \quad (14.5)$$

Система уравнений (14.3), (14.4) и (14.5) носит название системы Максвелла – Лоренца для «истинного микрополя» при условии, что  $\vec{u}$  – скорость движения элементарных зарядов,  $q$  – плотность микрочарядов в данной точке поля, а  $q$  – величина элементарного заряда. (Полезно заметить, что никаких предположений о дискретном распределении зарядов в пространстве в классической электронной теории не делается, т. е. электрон может рассматриваться как заряженный объект малых, но конечных размеров с конечной плотностью заряда.)

**14.4. Макроскопическое усреднение уравнений Максвелла – Лоренца.** В классической электронной теории предполагается, что система уравнений (14.3) описывает электромагнитное поле для элементарных зарядов на любом уровне проникновения в строение вещества, в том числе и в недрах атома. Микрополе как в самих атомах и молекулах, так и в пространстве между ними очень быстро изменяется во времени, а также при переходе от одной точки пространства к другой. Причина этих изменений заключается в дискретности вещества и быстром движении элементарных частиц. В макроскопическом плане микроскопические неоднородности и колебания поля не воспринимаются. Макроскопическое поле, измеряемое приборами и влияющее на макроскопические тела, – это усредненное в пространстве и во времени, «сглаженное» микроскопическое поле.

Поэтому в макроскопической электродинамике используются некоторые средние значения величин  $\vec{e}$  и  $\vec{b}$ ,  $q$  и  $\vec{u}$ . Имеется в виду, что используются значения, которые можно получить усреднением истинных, по физически малым элементам объема  $\Delta V$  и промежуткам времени  $\Delta t$ , принимаемых в макроскопической теории за бесконечно малые  $dV$  и  $dt$ . Объемы  $\Delta V$  весьма велики по сравнению с объемом атомов, а интервалы  $\Delta t$  – по сравнению с характерным временем (периодом) изменения микрополей.

Среднее от микроскопической величины, например  $\vec{e}$ , находится по формуле

$$\bar{\vec{e}} = \frac{1}{16\Delta V \Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} dt' \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} dx' \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} dy' \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} dz' \vec{e}(x', y', z', t'),$$

где  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ . Оно определено в каждой точке пространства в каждый момент времени.

Если продифференцировать среднее значение по любой из переменных  $x, y, z, t$  или найти среднее от соответствующей производной, то в соответствии с предыдущей формулой видно, что получатся совпадающие результаты. Это значит, что операции усреднения и дифференцирования перестановочны.

Пользуясь перестановочностью операции усреднения и дифференцирования по координатам и времени, усредняем выражения (14.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{\vec{e}} = -\frac{\partial \bar{\vec{b}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \bar{\vec{b}} = 0, \\ \operatorname{rot} \bar{\vec{b}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\vec{e}}}{\partial t} + \mu_0 \overrightarrow{qu}, \\ \operatorname{div} \bar{\vec{e}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{q}. \end{array} \right. \quad (14.6)$$

Формулы (14.6) образуют в электронной теории систему уравнений для поля в веществе.

Поскольку макроскопическое поле есть усредненное микроскопическое поле, то следует определить векторы напряженности и индукции макроскопического поля равенствами

$$\vec{E} = \vec{e}, \quad \vec{B} = \vec{b}, \quad (14.7)$$

Тогда уравнения поля в веществе (14.6-1) и (14.6-2) принимают вид, тождественный уравнениям поля в вакууме:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (14.8)$$

$$(2)$$

Если положить  $\vec{j} = \vec{q}u$ , то уравнения (14.6-3) и (14.6-4) запишутся так:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \\ \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{q}. \end{cases} \quad (1) \quad (14.9)$$

$$(2)$$

Для использования системы уравнений (14.8), (14.9) по схеме, аналогичной рассмотренной ранее для вакуума, нужно знать величины  $\vec{q}$  и  $\vec{j}$ . Измерить их невозможно.

В свою очередь, для конкретного расчета  $\vec{q}$  и  $\vec{j}$  в классической электронной теории не содержится необходимых сведений. Поэтому в теории должны быть привлечены дополнительные положения. Эти положения приводятся в курсе ниже и касаются электрических и магнитных свойств вещества. Они формулируются как обобщение опыта, т. е. как дополнительные к уравнениям Максвелла эмпирические соотношения.

В систему уравнений Максвелла—Лоренца, кроме уравнений (14.8), (14.9), входит еще уравнение непрерывности и уравнение движения заряженных частиц. Усредняя равенство (14.4), получаем

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}, \quad (14.10)$$

где  $\vec{j}$  и  $\vec{q}$  — средние значения плотностей для микрочарядов.

Усредненное выражение для силы Лоренца (14.5), действующей на микрочаряд, приводит к формуле, аналогичной вакуумной:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]), \quad (14.11)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — средние значения векторов, а  $\vec{v}$  — скорость движения в элементе объема  $\Delta V$ , по которому ведется усреднение.

Внимательный читатель заметит, что «истинные» уравнения микрополя (14.3) усредняются чисто формально, так как ничего об изменении  $\vec{e}$  и  $\vec{b}$  во времени и пространстве неизвестно. Но для получения уравнений поля в веществе они, по существу, и не нужны. Это понятно, так как в классической электродинамике мы всегда имеем дело уже с усредненными параметрами  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{j}$ , в том числе и для вакуума; поэтому с полным основанием мы начали рассуждения в § 14, п. 14.2, выписывая сразу систему (14.1).

## § 15. Уравнения Максвелла для поля в веществе

**15.1. Поляризация вещества в электрическом поле.** В § 14 электромагнитное поле в веществе представлено как поле всех электри-

ческих зарядов, входящих в систему: и свободных, и связанных. На этом пути нами получена система уравнений для усредненного макроскопического поля (14.1). Исключение из нее неизмеримых и не рассчитываемых непосредственно величин  $Q_{св\ з}$  и  $\vec{j}_{св\ з}$  составляет задачу, разрешаемую в данном параграфе. Сначала исключим плотность связанных зарядов.

Пусть диэлектрик находится в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Это поле создано внешними зарядами и зарядами диэлектрика. Система зарядов, входящих в состав диэлектрика, в целом электронейтральна. Не обладает она в отсутствие внешнего поля и макроскопическим дипольным моментом, так как его либо не имеют отдельные атомы и молекулы, либо молекулярные диполи ориентированы хаотически. Электрическое поле стремится раздвинуть заряды противоположных знаков в каждой молекуле и повернуть образовавшиеся (или готовые) диполи по направлению вектора  $\vec{E}$  (рис. 15.1, а). Хаотическое тепловое движение разрушает устанавливающийся порядок в расположении микроскопических диполей, но чем больше напряженность поля, тем большее число диполей выстраивается по полю. Благодаря этому вещество *поляризуется*, т. е. приобретает макроскопический дипольный момент.

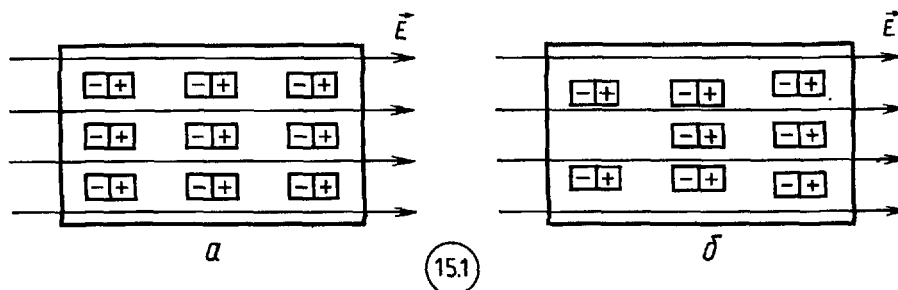
Мы будем рассматривать (впредь до специальных оговорок) пространство, целиком заполненное нейтральным диэлектриком. Под действием поля его физически малые элементы объема поляризуются и приобретают дипольные моменты  $d\vec{p}$ . Для описания поляризации диэлектрика в каждой его точке вводится величина, называемая *поляризованностью* или вектором поляризации:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}. \quad (15.1)$$

*Поляризованность есть удельный дипольный момент или плотность дипольного электрического момента диэлектрика. Она может иметь различные значения в разных точках диэлектрика и в общем случае изменяться во времени:*

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}, t),$$

так как поле, вызвавшее поляризацию, может быть переменным.



С микроскопической точки зрения поляризация вызвана возникновением распределенного по пространству связанного заряда, так что

$$d\vec{p} = \vec{r} \varrho_{\text{свз}} dV, \quad (15.2)$$

где  $\varrho_{\text{свз}}$  — средняя плотность связанных зарядов.

Из рисунка 15.1, б видно, что объемная плотность связанных зарядов отлична от нуля только в неоднородно поляризованном диэлектрике. Если вектор  $\vec{P}$  одинаков во всех точках пространства, то связанные заряды могут иметь место на границе раздела диэлектрика с вакуумом или с другим диэлектриком. В таком случае

$$d\vec{p} = \vec{r} \sigma_{\text{свз}} dS \quad (15.3)$$

(Обсуждение граничных эффектов мы отложим до § 16, п. 16.2)

Вектор поляризации  $\vec{P}$  и плотность зарядов  $\varrho_{\text{свз}}$  взаимосвязаны, как это видно из формул (15.1) и (15.2), и описывают в сущности один и тот же эффект — поляризацию вещества, причем

$$\vec{P} = \varrho_{\text{свз}} \vec{r}. \quad (15.4)$$

Найдем  $\varrho_{\text{свз}}$  из формулы (15.4). Для этого умножим скалярно равенство (15.4) на  $\vec{r}$ . После деления на  $r^2$  имеем

$$\varrho_{\text{свз}} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2}.$$

Так как плотность связанных зарядов нам нужна в основном для вычисления потенциала поля, выразим через нее потенциал (в начале координат) с помощью общей формулы (5.29). Если принять начало координат за точку наблюдения, то  $\vec{r}' = -\vec{r}_0$ ,  $\vec{r} = 0$  и

$$\varphi(0) = k \int \frac{\varrho_{\text{свз}}(\vec{r}) dV}{r} = -k \int \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV. \quad (15.5)$$

В этом выражении индекс 0 у переменной интегрирования опущен, а зависимость потенциала от времени, имеющая в формуле (5.29) характер запаздывания, сейчас не выписана, так как далее в выкладке не затрагивается. Интегрирование распространено по всему пространству.

Представим подынтегральное выражение в виде  $\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\vec{P} \cdot \text{grad} \frac{1}{r}$  и воспользуемся формулой (см. П. II, 15). Тогда  $\vec{P} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = \text{div} \left( \vec{P} \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \vec{P}$  и  $\varphi(0) = -k \int \frac{\text{div} \vec{P}}{r} dV + k \int \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) dV$ .

Второй интеграл вычислим при следующих дополнительных предположениях: электрическое поле, вызывающее поляризацию, достаточно быстро убывает с расстоянием от начала координат, так что  $\vec{P}$  — убывающая функция  $r$ , и эта величина уменьшается не медленнее, нежели  $\frac{1}{r}$ , при удалении на бесконечность. (Данное условие

выполняется для систем зарядов в диэлектрике, занимающих ограниченную область пространства, а также для тел из диэлектрика, имеющих ограниченный объем.) В таком случае, преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса, для бесконечно удаленной поверхности получим нулевой поток вектора  $\frac{\vec{P}}{r}$ . Отсюда

$$\varphi(0) = -k \int \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{r} dV. \quad (15.6)$$

Сравнивая формулы (15.5) и (15.6), получаем для начала координат  $q_{\text{свз}} = -\operatorname{div} \vec{P}$ . Так как эта точка была выбрана произвольно, формула справедлива для любой точки пространства независимо от выбора начала системы координат, т. е.

$$q_{\text{свз}}(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}). \quad (15.7)$$

Такова зависимость между плотностью связанных объемных зарядов и поляризованностью вещества. Связь поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma_{\text{свз}}$  с вектором поляризации  $\vec{P}$  установим позднее, в § 17, п. 17.2.

Для решения задачи, поставленной в начале параграфа, необходимо установить зависимость поляризованности диэлектрика от напряженности электрического поля в нем, что и позволит окончательно исключить  $q_{\text{свз}}$  из системы уравнений (14.1). Но в рамках классической электродинамики эта связь теоретически не определяется, поэтому приходится прибегнуть к экспериментальным данным. На основании опыта *принимается, что поляризация пропорциональна напряженности поля:*

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (15.8)$$

где  $\chi$  — эмпирически определяемый коэффициент — *диэлектрическая восприимчивость* вещества. Она считается не зависящей от напряженности поля. Для всех веществ  $\chi > 0$ . Коэффициент  $\varepsilon_0$  введен из соображений размерности;  $\chi$  удобно иметь безразмерной величиной. (Часто вместо  $\chi$  используется размерная величина — диэлектрическая восприимчивость  $\kappa$ , равная  $\chi \varepsilon_0$ .)

Подчеркнем, что пропорциональность поляризованности и напряженности поля, во-первых, закономерность эмпирическая; во-вторых, она заведомо приближительна и в сильных полях не выполняется. Поэтому введение формулы связи (15.8) в классической электродинамике является одним из источников значительного уменьшения общности ее выводов для поля в веществе по сравнению с вакуумом.

Но вернемся к решаемой задаче. С помощью равенств (15.7) и (15.8) можно исключить из уравнения поля (14.1) плотность связанных зарядов:

$$q_{\text{свз}} = -\varepsilon_0 \operatorname{div} (\chi \vec{E}). \quad (15.9)$$

(Это будет сделано окончательно в пп. 15.3, 15.4.)

При однородной поляризации объемных зарядов, как свидетельствует формула (15.7), нет. (Нет их и в проводниках.) Связанные заряды в этих случаях имеются только на границах раздела диэлектриков, и их поверхностная плотность находится по формулам, выводимым ниже.

**15.2. Намагничивание вещества.** Обратимся теперь к определению через измеримые параметры поля средней плотности, образованного связанными зарядами тока. При поляризации вещества имеют место упорядоченные смещения электрических зарядов, приводящие к току связанных зарядов. Плотность тока  $\vec{j}_{\text{св.з}}$  зависит от скорости изменения вектора поляризации  $\vec{P}$ . Покажем это, используя условие сохранения связанных зарядов:

$$-\frac{\partial \rho_{\text{св.з}}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}}.$$

С учетом формулы (15.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \vec{j}_{\text{св.з}},$$

откуда

$$\vec{j}_{\text{св.з}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (15.10)$$

На основании соотношения (15.8) пишем:

$$\vec{j}_{\Pi} = \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (15.11)$$

(Поскольку данная составляющая тока связанных зарядов обусловлена смещениями их под действием переменного электрического поля, можно сказать, что это ток поляризации, что и отражено в обозначении.)

Кроме тока поляризации, в веществе имеет место другая составляющая тока связанных зарядов, обусловленная упорядочением магнитных моментов атомов или молекул в магнитном поле. Магнитные свойства вещества в конечном счете определяются тем, что электроны при движении внутри атома уподобляются замкнутым токам и создают орбитальные магнитные моменты; кроме того, они обладают собственными (спиновыми) магнитными моментами.

Движение электронов и магнитные моменты электронов правильно описываются только в квантовой физике, что создает определенные трудности при классическом подходе к ним в электродинамике. Здесь можно получить только довольно грубую качественную картину явления намагничивания. Реальные носители магнитных моментов обычно заменяются так называемыми «молекулярными круговыми токами» (гипотеза о существовании таких токов была впервые высказана А. Ампером в 1820 г.).

Каждому молекулярному току соответствует элементарный магнитный диполь. По характеру поведения элементарных диполей вещества делятся на три основных класса: *парамагнитные*, *диамагнитные* и *ферромагнитные*. У пара- и ферромагнитных веществ ча-

стицы обладают элементарными магнитными моментами в отсутствие внешнего магнитного поля, но эти моменты ориентированы в пространстве хаотично, так что макроскопические объемы вещества магнитными моментами не обладают.

Во внешнем магнитном поле элементарные моменты выстраиваются по полю, тем самым усиливая его, — таков с качественной стороны механизм намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков. У парамагнетиков намагничивание имеет место только во внешнем поле, а у ферромагнетиков сохраняется и после снятия внешнего поля; кроме того, намагничиваются ферромагнетики гораздо сильнее.

Молекулярные магнитные моменты в диамагнетике возникают только во внешнем поле и ориентируются против поля, ослабляя его.

Основной величиной, описывающей макроскопические магнитные свойства вещества, являются *вектор намагниченности*, равный плотности магнитного момента:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (15.12)$$

(В формуле (15.12)  $dV$  — физически малый объем вещества, обладающий макроскопическим магнитным моментом  $d\vec{m}$ .) В общем случае  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$ .

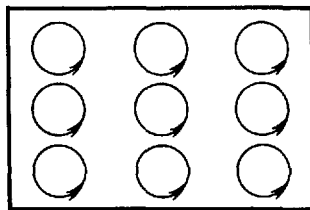
Возникновение намагниченности вызывается, как уже говорилось, упорядоченностью в пространстве элементарных магнитных диполей, соответственно — упорядоченностью молекулярных токов (рис. 15.2). Суммарное их действие может быть описано, если ввести плотность тока связанных зарядов, вызывающего намагничивание в соответствии с формулами для токов свободных зарядов. Поэтому должна использоваться общая формула (5.29) для векторного потенциала поля:

$$\vec{A}(\vec{r}) = f \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_0)}{r'} dV_0.$$

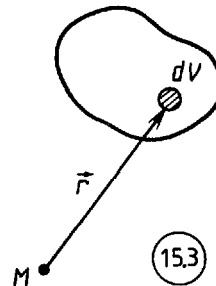
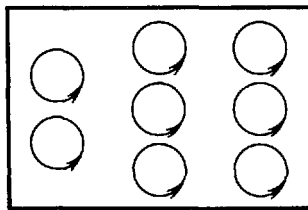
В точке наблюдения, совпадающей с началом координат, для связанных зарядов согласно ей имеем

$$\vec{A}(0) = f \int \frac{\vec{j}_{\text{св.з.}}(\vec{r})}{r} dV. \quad (15.13)$$

(Зависимость всех величин от времени опускаем.)



15.2



15.3

Так как в принятой модели магнитные свойства вещества исчерпываются магнитными моментами элементарных объемов  $d\vec{m} = \vec{j}dV$ , то потенциал можно вычислить и с помощью формулы (8.12) как созданный элементарными магнитными диполями:

$$d\vec{A} = f \frac{[d\vec{m}\vec{r}]}{r^3},$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента объема  $dV$  к точке наблюдения. Выбирая начало координат в точке наблюдения (рис. 15.3) и интегрируя по объему, получаем

$$\vec{A}(0) = -f \int \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3} dV.$$

На основании векторного тождества (см. П. II, 22)

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} \vec{j} + \frac{[\vec{j}\vec{r}]}{r^3},$$

так что

$$\vec{A}(0) = f \int \frac{\text{rot} \vec{j}}{r} dV - f \int \text{rot} \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Делая те же дополнительные предположения о характере поля, что и в § 15, п. 15.1, устанавливаем равенство нулю последнего интеграла.

Введем обозначения:

$$\vec{Z} = \int \text{rot} \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Если  $\vec{C}$  — постоянный вектор, то

$$\vec{C}\vec{Z} = \int \vec{C} \text{rot} \frac{\vec{j}}{r} dV.$$

Применяя формулу (см. П. II, 31), получаем

$$\vec{C}\vec{Z} = \int_V \text{div} \left[ \vec{C} \frac{\vec{j}}{r} \right] dV.$$

По теореме Гаусса

$$\vec{C}\vec{Z} = \oint_S \frac{[\vec{C}\vec{Z}]}{r} d\vec{S}.$$

Сдвигая поверхность интегрирования в бесконечность, получаем  $\vec{C}\vec{Z} = 0$ . Вследствие произвольности вектора  $\vec{C}$  оказывается, что  $\vec{Z} = 0$

Таким образом,

$$\vec{A}(0) = f \int \frac{\text{rot} \vec{j}}{r} dV. \quad (15.14)$$

Сравнивая формулу (15.13) с выражением (15.14), находим

$$\vec{j}_{\text{св.з}} = \text{rot} \vec{j}. \quad (15.15)$$

Эта составляющая тока связанных зарядов может быть названа током намагниченности  $-\vec{j}_M$ . Остается еще установить связь между

намагниченностью и индукцией поля в веществе. Здесь снова приходится выйти за пределы исходных уравнений электродинамики и обратиться к эксперименту — намагниченность оказывается пропорциональной индукции поля:

$$\vec{J} = \frac{\alpha}{\mu_0} \vec{B},$$

коэффициент пропорциональности записан так, чтобы  $\alpha$  была безразмерной величиной.

Однако в классической электродинамике употребляется другой коэффициент, носящий название *магнитной восприимчивости* и обозначаемый через  $\kappa$ . Он связан с введенным нами коэффициентом  $\alpha$  соотношением

$$\alpha = \frac{\kappa}{1 + \kappa}.$$

Итак, для зависимости намагниченности от индукции поля имеем формулу

$$\vec{J} = \frac{\kappa}{\mu_0 (1 + \kappa)} \vec{B}. \quad (15.16)$$

(Обычно  $\kappa$  определяется соотношением  $\vec{J} = \kappa \vec{H}$ . Но в нашем курсе для раскрытия физического смысла  $\vec{H}$  эта величина вводится позднее.)

Следует иметь в виду, что приблизительное постоянство  $\alpha$  и магнитной восприимчивости  $\kappa$  соблюдается только для парамагнитных и диамагнитных веществ. При этом у парамагнетиков  $\kappa > 0$ , у диамагнетиков  $\kappa < 0$ , а абсолютное значение много меньше единицы. У ферромагнетиков восприимчивость положительна и велика: она колеблется от десятков до многих тысяч единиц, причем зависит от индукции внешнего поля  $\vec{B}$ , и эта зависимость имеет сложный вид.

Явления намагничивания весьма сложны. В частности, магнитная восприимчивость различна для статических и переменных полей, так как в последних дополнительное намагничивание вызывают вихревые токи в веществе; сказываются и некоторые другие процессы. Классическая электродинамика, как уже говорилось, в детали не входит, ограничиваясь обычно довольно грубой моделью — пропорциональной зависимостью между намагниченностью и индукцией, отраженной в формуле (15.16).

Располагая формулами (15.15) и (15.16), можно решить ранее поставленную задачу, т. е. выразить ток намагничивания через индукцию поля в веществе:

$$\vec{j}_M = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \frac{\kappa}{1 + \kappa} \vec{B}. \quad (15.17)$$

Но необходимо заметить, что  $\vec{j}_M$  никакому реальному движению зарядов в точности не соответствует, так как намагниченность

вещества возникает не за счет макроскопических токов. Ток намагниченности – фиктивный ток, используемый при анализе усредненных уравнений поля и исключаемый из окончательных формул.

**15.3. Уравнения Максвелла для поля в веществе. Напряженность магнитного и индукция электрического полей.** Исключим теперь  $Q_{свз}$  и  $\vec{j}_{свз}$  из «усредненных» уравнений (14.1) с помощью формул (15.7), (15.10) и (15.15):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{J} + \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{P}. \end{cases} \quad (15.18)$$

Система (15.18) описывает поле в веществе с учетом электромагнитных свойств вещества и с привлечением двух дополнительно введенных векторов – характеристик электромагнитного состояния вещества  $\vec{P}$  и  $\vec{j}$ .

Третье и четвертое уравнения системы (15.18) можно преобразовать, группируя члены:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) + \vec{j}, \\ \operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \end{cases} \quad (15.19)$$

Отсюда видна целесообразность введения двух новых величин, упрощающих уравнения (15.19). Вместо  $\vec{P}$  и  $\vec{j}$  используются параметры  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$ , определяемые формулами

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J}; \quad (15.20)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (15.21)$$

Уравнения (15.18) с учетом формул (15.19), (15.20), (15.21) принимают следующий общепринятый вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, & (3) \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho. & (4) \end{cases} \quad (15.22)$$

Эта система уравнений для поля в веществе в честь основоположника электродинамики носит название уравнений Максвелла.

Система уравнений (15.22) отличается от уравнений поля в вакууме наличием двух новых векторов: напряженности магнитного

поля  $\vec{H}$  и индукции электрического поля  $\vec{D}$ . С помощью этих векторов учитывается «вклад» зарядов вещества в общее поле.

Так как векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  исчерпывающе характеризуют поле, определяя силу, действующую на заряды в поле, энергию и импульс поля, то дополнительные его характеристики  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  могут рассматриваться как вспомогательные величины, упрощающие запись уравнений: последние оказываются в таком случае наиболее симметричными по отношению к параметрам электрической и магнитной составляющих поля.

(В истории развития учения об электромагнетизме величина  $\vec{H}$  была введена в связи с «магнитными зарядами» и сопоставлялась с напряженностью поля  $\vec{E}$ ; индукции  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$  характеризовали поле зарядов в веществе.)

**15.4. Магнитная и диэлектрическая проницаемость вещества. Материальные уравнения.** В формулах (15.20) и (15.21) связано, соответственно, по три параметра. Однако, как это показано ранее в пунктах 15.1 и 15.2, поляризация  $\vec{P}$  определяется напряженностью электрического поля, а намагниченность — индукцией магнитного.

Подставляя в формулу (15.20) значение  $\vec{J}$  из (15.16), имеем

$$\vec{H} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\kappa)}.$$

Введем *магнитную проницаемость* вещества определением:

$$\mu = 1 + \kappa \quad (15.23)$$

Теперь

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B}. \quad (15.24)$$

Аналогично формула (15.21) при подстановке (15.8) дает

$$\vec{D} = \epsilon_0(1+\chi)\vec{E}.$$

Если ввести *диэлектрическую проницаемость* вещества определением

$$\epsilon = 1 + \chi, \quad (15.25)$$

то для электрической индукции имеем

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E} \quad (15.26)$$

Параметры  $\mu$  и  $\epsilon$ , характеризующие магнитные и электрические свойства вещества, в общем случае являются функциями координат точки пространства:

$$\mu = \mu(\vec{r}), \quad \epsilon = \epsilon(\vec{r})$$

и для неподвижной среды не зависят от времени.

В соответствии с формулами, определяющими проницаемости, для пара- и ферромагнетиков  $\mu > 1$ , для диамагнетиков  $\mu < 1$ , а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  всегда больше единицы.

Для нахождения поля в веществе используют систему уравнений

Максвелла (15.22), добавляя к ней два так называемых «материальных» уравнения (15.24) и (15.26), а также третье — эмпирическое соотношение

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (15.27)$$

выражающее связь тока свободных зарядов (тока проводимости) в веществе со свойствами вещества и напряженностью поля  $\vec{E}$ . Здесь  $\gamma$  — *удельная электрическая проводимость* вещества; она не зависит от напряженности поля  $\vec{E}$  и определяется, как и  $\epsilon$ ,  $\mu$ , экспериментально. Выражение (15.27) называется также дифференциальной формой закона Ома.

В важном частном случае стационарных полей, как это вытекает из уравнений (3) и (4) системы (15.22), напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  и индукция электрического  $\vec{D}$  определяются только свободными зарядами точно так же, как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  поля в вакууме. По этой причине величины  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  приобретают самостоятельное значение. При расчетах рационально найти сначала эти векторы, а к величинам  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  переходить в случае необходимости с помощью материальных уравнений (15.24) и (15.26).

Особо подчеркнем, что система уравнений Максвелла (15.22) описывает электромагнитное поле в неподвижной среде. По этой причине изменения во времени всех величин, входящих в уравнения ( $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$ ), рассматриваются в точке с неизменяющимися координатами, что и отражено в знаке частной производной по времени.

В уравнениях  $\rho$  — плотность свободных зарядов, не скомпенсированных связанными.

## § 16. Характерные особенности полей в веществе

**16.1. Уравнения поля в потенциалах.** Поля в веществе по сравнению с полями в вакууме приобретают некоторые особенности. К их выяснению в процессе применения основной системы уравнений Максвелла (15.22) для расчета полей мы и приступаем.

Для нахождения векторов поля, кроме плотности зарядов и плотности токов, должны быть заданы и величины, характеризующие свойства вещества:

$$\epsilon = \epsilon(\vec{r}), \quad \mu = \mu(\vec{r}), \quad \gamma = \gamma(\vec{r}).$$

Задача по расчету поля математически чрезвычайно сложна, и мы сначала рассмотрим частный, но в практическом и теоретическом отношении важный случай изотропного однородного вещества, непрерывно заполняющего все пространство. (Кроме того, действуют и другие ограничения, сформулированные в предыдущем параграфе.)

Для постоянных  $\mu$  и  $\epsilon$  систему уравнений (15.22) можно записать в

форме, удобной для сопоставления с вакуумными уравнениями (2.1) или (2.3):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & (1) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & (2) \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \vec{j}, & (3) \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho. & (4) \end{cases} \quad (16.1)$$

Далее при анализе и решении уравнений (16.1) мы широко используем соотношения, полученные ранее для поля в вакууме, не повторяя выкладок, если их конечный результат можно указать, опираясь на формальную аналогию между системой (16.1) и всесторонне исследованной ранее системой (2.1). Ввиду того что уравнения Максвелла для вакуума получаются из уравнений Максвелла для вещества при  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ , многие общие соотношения, полученные ранее для вакуума, справедливы для вещества при замене  $\mu_0$  на  $\mu\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon\varepsilon_0$ . Если этим правилом осмотрительно пользоваться (нужно помнить, что  $\mu$  и  $\varepsilon$  — функции координат точек пространства), то ряд результатов можно взять в готовом виде.

Определим потенциалы электромагнитного поля в веществе так же, как они определены для вакуума, т. е. формулами (4.1) и (4.2):

$$\begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \end{cases} \quad (16.2)$$

В таком случае уравнения (16.1) приводятся к потенциалам совершенно аналогично уравнениям (2.1). Не повторяя выкладки, проделанной в § 4, п. 4.2, пишем:

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j}, \\ \Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (16.3)$$

Условие Лоренца для калибровки потенциалов приобретает вид

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (16.4)$$

Далее нахождение потенциалов поля, созданного системой заря-

дов, ничем не отличается от рассмотренного ранее случая вакуума (§ 5). В результате имеем

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{j} \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)}{r'} dV_0, \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{V_0} \frac{\varrho \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}} \right)}{r'} dV_0.\end{aligned}\quad (16.5)$$

Потенциалы изменились в однородном веществе по сравнению с полем в пустоте кратно  $\frac{1}{\varepsilon}$  и  $\mu$ ; изменяются также векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а скорость распространения возмущений становится равной  $c'$ :

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (16.6)$$

Кроме вещественной непрерывной среды, часто приходится рассматривать отдельные тела конечных размеров или их системы, находящиеся в поле и отделенные от пустоты, вещественной среды, или друг от друга границами раздела.

Если заряды в вакууме в изученной ранее макроскопической теории считались распределенными непрерывно (кроме точечных), то при наличии тел такая непрерывность нарушается: имеют место заряды на поверхностях, являющихся границами тел или границами раздела между областями с различными значениями параметров  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ . Это значит, что приходится вводить и рассматривать поверхностные плотности зарядов и токов. В некоторых случаях имеются линейные проводник, нити из диэлектрика, поэтому приходится рассматривать линейные плотности. Соответствующие величины мы будем обозначать либо особыми буквами, либо теми же буквами, что и объемные плотности, но снабжать их поясняющими индексами:

$$\sigma = \varrho_{\text{пов}} = \frac{dQ}{dS}, \quad \vec{j}_{\text{пов}} = \varrho_{\text{пов}} \vec{v}.$$

(Во второй формуле вектор скорости движения физически бесконечно малого заряда касателен к поверхности, на которой находится заряд.)

$$\tau = \varrho_{\text{лин}} = \frac{dQ}{dl}, \quad \vec{j}_{\text{лин}} = \varrho_{\text{лин}} \vec{v}.$$

(В формуле для  $\vec{j}_{\text{лин}}$  вектор скорости касателен к заданной линии.)  
Поскольку общие формулы для потенциалов поля в непрерывной

среде (16.5) учитывают только объемные заряды, то при наличии заряженных поверхностей и линий в пространстве в них следует добавить слагаемые вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \mu f \int_{S_0} \frac{\vec{j}_{\text{пов}} \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dS_0, \\ \varphi = \frac{k}{\epsilon} \int_{S_0} \frac{q_{\text{пов}} \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dS_0, \end{array} \right. \quad (16.7)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} = \mu f \int_{L_0} \frac{\vec{j}_{\text{лин}} \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dl_0, \\ \varphi = \frac{k}{\epsilon} \int_{L_0} \frac{q_{\text{лин}} \left( \vec{r}_0, t - \frac{r'}{c/\sqrt{\epsilon\mu}} \right)}{r'} dl_0. \end{array} \right. \quad (16.8)$$

Соответствующие члены должны быть учтены в формулах для напряженности и индукции поля, а также в ряде других соотношений

Кроме этого, надо иметь в виду, что наличие тел и сплошных сред, отделенных друг от друга границами, порождает много задач, применение к которым известных общих уравнений поля в потенциалах (16.5), (16.7) и (16.8) либо невозможно, либо неэффективно. В конкретных случаях часто приходится обращаться к исходным уравнениям поля (15.22) или к уравнениям в потенциалах (16.3), записывая и решая их совместно для нескольких областей пространства при разнообразных граничных условиях.

**16.2. Граничные условия.** Общее решение уравнений поля при наличии вещества содержит некоторые произвольные функции. Эти функции при переходе к частным решениям исключаются при помощи заданных начальных и граничных условий. В случае системы зарядов в вакууме граничные условия фактически сводились к достаточно быстрой убыли векторов и потенциалов поля на бесконечном расстоянии от системы. При наличии вещественных тел помимо этого необходимо учитывать пространственные границы тел, на которых параметры поля имеют заданное значение. (Например, потенциал поверхности проводника постоянен во всех его точках, напряженность электрического поля перпендикулярна к поверхности проводника и т. д.)

Граничные условия теперь весьма разнообразны и существенно влияют на распределение поля в пространстве. Как мы увидим далее на примерах, может быть поставлен вопрос о расчете поля в ограни-

ченной области пространства около системы зарядов. В таком случае поле на границе должно быть задано, тогда в остальных точках оно определяется с помощью решения уравнений Максвелла.

Такова одна особенность поля в веществе, состоящая в наличии границ и необходимости задания граничных условий на конечных расстояниях от зарядов. Другая особенность поля, обусловленная границами раздела вещественных сред, состоит в поведении векторов поля на границах раздела двух сред с разными значениями их электромагнитных параметров. На границе раздела двух веществ величины  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  изменяются скачком, т. е. функции  $\varepsilon(\vec{r})$ ,  $\mu(\vec{r})$ ,  $\gamma(\vec{r})$  терпят конечный разрыв. Соответственно скачком изменяются и векторы поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ . Очевидно, что для описания поля необходимо знать поведение векторов поля на таких границах. Это важная новая задача электродинамики. Изменение полевых величин  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  на поверхности раздела двух материальных сред описывается равенствами, носящими название граничных условий.

Уравнения Максвелла дают возможность для всех векторов поля установить граничные условия, если прибегнуть к следующему приему. Пусть  $S$  — поверхность, являющаяся границей раздела двух сред с проницаемостями  $\mu_1$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_2$  и проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Окружим границу раздела двумя поверхностями, выделяющими тонкий слой (рис. 16.1). Считая, что параметры среды и поле изменяются не на самой границе, а в этом слое, причем изменяются непрерывно, применим к слою уравнения Максвелла. Затем устремим толщину слоя к нулю и получим граничные условия.

Найдем граничные условия для векторов поля  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$ , входящих в систему (15.22) под знаком дивергенции. На рисунке 16.2 около границы раздела выделен малый цилиндр высотой  $h$ . Интегрируя по объему цилиндра последнее уравнение системы, получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = Q,$$

где  $Q$  — заряд, находящийся внутри цилиндра. Преобразуем интеграл по теореме Гаусса, причем выделим интегрирование по основаниям и боковой поверхности:

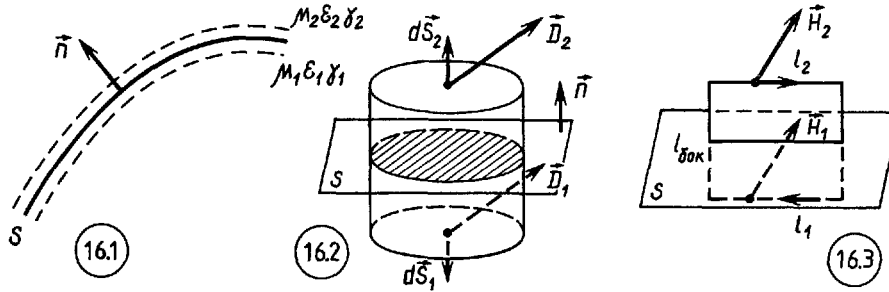
$$\int_{S_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} d\vec{S} = Q.$$

Учитывая, что  $S_1$  и  $S_2$  — малые равные величины, и применяя теорему о среднем, получаем

$$D_{2n}S - D_{1n}S + \langle D_{\text{бок}} \rangle 2\pi rh = Q.$$

Осталось устремить высоту цилиндра к нулю. Получается

$$D_{2n} - D_{1n} = \frac{Q}{S}, \text{ или } D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (16.9)$$



Таким образом, нормальная составляющая электрической индукции терпит разрыв на границе раздела, если только эта граница заряжена. Что касается нормальной составляющей электрической напряженности, то, пользуясь (15.26), имеем

$$\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n} = \sigma. \quad (16.10)$$

Напряженность терпит разрыв и на незаряженной поверхности:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (16.11)$$

Переходим к магнитной составляющей поля. Так как  $\text{div } \vec{B} = 0$ , то сразу имеем

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (16.12)$$

откуда следует

$$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (16.13)$$

Формулы (16.9), (16.11), (16.12) и (16.13) выражают граничные условия для нормальных составляющих векторов поля на границе раздела двух сред. Полезно заметить, что номера сред согласованы с направлением нормали: *нормаль идет от границы во вторую среду*.

Выведем далее граничные условия для тангенциальных составляющих, для чего выделим величины, входящие в уравнения Максвелла под знаком ротора. Выберем малый плоский контур  $L$ , пересекающий границу раздела двух сред (рис. 16.3), и проинтегрируем третье уравнение из системы (15.22) по площадке  $S$ , ограниченной этим контуром:

$$\oint_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства по теореме Стокса, а к первому интегралу в правой части применим теорему о среднем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\rangle \vec{S}.$$

Здесь  $I$  — полный ток через площадку. Выделим интегрирование по отдельным отрезкам контура и воспользуемся их малостью:

$$-H_{1t}l + H_{2t}l + 2\langle H_{\text{бок}} \rangle l_{\text{бок}} = I + \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\rangle \vec{S}.$$

Устремляя теперь  $l_{\text{бок}}$  к нулю, приходим к искомому соотношению

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{I}{l} = j_{\text{пов}}. \quad (16.14)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля терпит разрыв при условии, что по поверхности раздела течет ток. Очевидно, что терпит разрыв и тангенциальная составляющая магнитной индукции:

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2 \mu_0} - \frac{B_{1t}}{\mu_1 \mu_0} = j_{\text{пов}}, \quad (16.15)$$

но этот разрыв сохраняется и в случае отсутствия тока; при  $j_{\text{пов}} = 0$

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (16.16)$$

Обратим внимание на то, что теперь номера сред согласованы с выбором положительного направления касательной к сечению; во второй среде оно совпадает с направлением обхода контура.

Если исходить из последнего уравнения системы Максвелла, то рассуждения полностью повторяются, и для тангенциальной составляющей вектора  $\vec{E}$  получаем соотношение

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (16.17)$$

Она непрерывна, тогда как для электрической индукции в соответствии с формулой (15.26) имеем разрыв непрерывности, причем

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (16.18)$$

Выведем также граничные условия для плотности тока при переходе через границу двух проводящих сред. Поскольку  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , то для тангенциальной составляющей на основе формулы (16.17) имеем

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (16.19)$$

Граничное условие для нормальной составляющей выводится из закона сохранения заряда:

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Далее выкладка аналогична примененной при выводе формуле (16.9). Окончательный результат таков:

$$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (16.20)$$

т. е. плотность тока испытывает разрыв при условии увеличения или уменьшения заряда на поверхности раздела.

Для удобства использования поместим систему основных граничных условий в таблицу 1.

Таблица 1

Система граничных условий

	Нормальная составляющая		Тангенциальная составляющая	
Электрическое поле	Напряженность	Индукция	Напряженность	Индукция
	$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2t} - E_{1t} = 0$	$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$
Магнитное поле				
	$\frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$	$B_{2n} - B_{1n} = 0$	$H_{2t} - H_{1t} = j_{\text{пов}}$	$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \mu_0 j_{\text{пов}}$
Плотность тока				
	$j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$		$\frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	

Найденные соотношения, которым удовлетворяют векторы поля и плотность тока на границе раздела сред, являются очень важными: они широко используются в конкретных случаях отыскания полей, распределения зарядов и токов на проводниках и диэлектриках при наличии поля. Это очень общие заключения, сделанные нами относительно поля при наличии вещества с помощью уравнений Максвелла.

Как уже отмечалось выше, с введением в систему поле-заряды вещества возникает целый ряд новых задач на расчет полей и распределение зарядов, так как появляются границы тел и сред с различными значениями  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ . Так, в стационарных полях приходится рассматривать системы тел – проводников и диэлектриков, что составляет предмет электростатики. Отдельно в проводниках изучается постоянный и переменный ток и т. д. Наконец, требуется

исследовать поведение электромагнитных волн на границе раздела двух сред (например, теоретические основы законов отражения и преломления света). Эти и подобные им вопросы рассматриваются в последующих темах курса с применением формул граничных условий.

**16.3. Энергия и импульс поля в веществе.** Среди общих вопросов, которые следует выяснить заново, очень важна задача об энергии и импульсе электромагнитного поля. Для поля в веществе можно повторить выкладку, выполненную для вакуума в § 3, п. 3.2, опираясь на уравнения Максвелла (15.22). Умножая первое из них скалярно на  $\vec{H}$ , а третье – на  $\vec{E}$ , с помощью использованных ранее приемов приходим к равенству

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) = \text{div} [\vec{E} \vec{H}] + \vec{j} \vec{E}. \quad (16.21)$$

Заметим, что с использованием векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  для вакуума уравнение (3.4) имеет такой же вид, как и уравнение (16.21). Так что все последующие соотношения можно выписывать сразу, не повторяя рассуждений, а лишь заменяя в формулах § 3  $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  на  $\vec{H}$  и  $\epsilon_0 \vec{E}$  на  $\vec{D}$ .

Формула (16.21) выражает закон изменения энергии электромагнитного поля в веществе и дает основание для введения плотности энергии поля:

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) \quad (16.22)$$

и плотности потока энергии:

$$\vec{\sigma} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (16.23)$$

Полученные формулы имеют общий смысл, так как при их выводе никаких дополнительных ограничений на поле и среду не накладывалось. Они справедливы для неподвижной непрерывной неоднородной среды. Однако в толковании закона изменения энергии электромагнитного поля в веществе (16.21) в сравнении с вакуумом имеются некоторые особенности. Во-первых, вещество по ранее поставленному условию неподвижно; следовательно, работа поля  $\vec{j} \vec{E}$ , совершаемая при перемещении зарядов, относится к зарядам, движущимся в проводниках. Но в таком случае с помощью уравнения (15.27) имеем:

$$\vec{j} \vec{E} = \frac{I^2}{\gamma}. \quad (16.24)$$

Эта работа идет на повышение внутренней энергии тел в системе, т. е. мы приходим к закону Джоуля – Ленца (в дифференциальной форме): теплота  $\tilde{Q}$ , выделяемая при движении зарядов в проводнике в единице объема за 1 с, определяется формулой

$$\tilde{Q} = \frac{I^2}{\gamma}. \quad (16.24-a)$$

Таким образом, последнее слагаемое в (16.21) выражает теплоту, выделяемую в системе за счет убыли энергии поля.

Формула (16.21) справедлива и для случая кусочно-непрерывной среды, т. е. при наличии конечных разрывов непрерывности параметров  $\mu$  и  $\varepsilon$ . В частности, в пространстве могут иметь место участки, не заполненные веществом. Для них слагаемое  $\vec{j} \vec{E}$  имеет прежний «вакуумный» смысл. Это работа поля по повышению кинетической энергии свободных зарядов.

Вторая особенность применения формулы (16.21) состоит в том, что в веществе поле может иметь границы, через которые поток энергии не проходит. В таком случае закон сохранения энергии в изолированной системе (3.10) имеет место не только для бесконечно больших, но и *конечных* областей пространства, в которых «заперто» электромагнитное поле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) dV = \int_V \frac{I^2}{\gamma} dV. \quad (16.25)$$

В заключение несколько слов об импульсе электромагнитного поля. При тех же допущениях о неподвижности вещества по аналогии с формулой (3.17) имеем выражение для плотности импульса:

$$\vec{g} = [\vec{D} \vec{B}]. \quad (16.26)$$

Но вопрос об импульсе электромагнитного поля в веществе в классической электродинамике решается неоднозначно, о чем будет сказано ниже, в § 23.

### Методические указания и рекомендации

I. Уравнения электромагнитного поля для вещества (15.22) вместе с материальными уравнениями (15.24), (15.26), (15.27) являются теоретическим обобщением эмпирических законов электромагнетизма, выполненным Д. К. Максвеллом в 1860–1865 гг. Именно уравнения поля в веществе послужили основой электродинамики в процессе ее исторического развития и становления. К уравнениям поля в вакууме ((2.1), (2.3) и др.) можно, вообще говоря, перейти как к частному случаю уравнений системы (15.22), полагая  $\mu = 1$  и  $\varepsilon = 1$ .

Таким образом, в смысле математической общности уравнения Максвелла для вещества шире, чем исходные для нашего курса уравнения Максвелла для вакуума, так как последние содержатся в первых для частного случая среды с единичными значениями проницаемостей. Поэтому большинство курсов электродинамики основывается на уравнениях Максвелла для вещества. Однако фундаментальный характер имеют все же не они, а уравнения поля в вакууме, которые имеют обширнейшую область применения, простирающуюся от границ самых больших изученных расстояний во Вселен-

ной до расстояний порядка  $10^{-17}$  м. И везде электромагнитные взаимодействия подчиняются этим уравнениям. (Необходимо только заметить, что в квантовой физике прямая силовая трактовка векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  неприменима и эти величины заменяются их операторами. Так что переход от микроскопических уравнений электромагнитного поля к макроскопическим оказывается переходом от формул, связывающих операторы, к формулам, связывающим усредненные макроскопические значения величин.)

Уравнения для вакуума считаются строгими законами природы, и выводы из них не знают до сих пор каких-либо отклонений от эксперимента. Так, например, закон Кулона выполняется с доступной эксперименту точностью — от космических расстояний и вплоть до изученных самых малых.

Иное положение вещей имеет место в теории электромагнитного поля в веществе, основанной на уравнениях Максвелла (15.22). Область применимости этих уравнений ограничена допущениями об электромагнитных свойствах вещества, сделанными в материальных уравнениях. Эмпирические зависимости

$$\vec{D} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{J} = \frac{\kappa}{(1 + \kappa) \mu_0} \vec{B}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

являются довольно грубыми и далеко не общими. Линейность указанных соотношений — лишь приближение, справедливое не для всех веществ и не при всех значениях поля. Так, ферромагнетики и антиферромагнетики характерны не линейной, а весьма сложной и неоднозначной зависимостью между величинами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Для сегнетоэлектриков аналогично обстоит дело с зависимостью между величинами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ .

Неприменимы уравнения Максвелла и для полупроводников. При высоких частотах переменного электромагнитного поля уравнения также неприменимы, ибо при малых длинах волн теряет смысл макроскопическое усреднение. Наконец, при больших напряженностях и индукциях поля появляются нелинейные эффекты, лежащие за пределами рассматриваемой теоретической схемы.

Следует принять во внимание и то обстоятельство, что скалярный характер электромагнитных параметров вещества  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  говорит лишь об изучении изотропных сред. Поскольку кристаллы обладают анизотропией, то и к ним рассматриваемые уравнения не всегда применимы.

Сказанное об ограниченности системы уравнений Максвелла для вещества не умаляет их роли в различных приложениях. Дело в том, что уравнения (15.22), как правило, применяются не в общем случае, а в разнообразных частных случаях, когда указанные допущения справедливы. Хорошо описываются электромагнитные явления в

задачах, когда можно ограничиться частью уравнений, взять не все входящие в них члены.

Например, если в общем случае зависимость поляризованности и намагниченности от векторов поля не сводится к пропорциональной, то в частном случае электростатического и магнитостатического полей (в пара- и диамагнетиках) эта зависимость выполняется. Другим примером является использование уравнения (3) из системы (15.22). Как правило, для проводников  $\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}|$ , и тогда уравнение

имеет вид  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ . В диэлектриках же  $|\vec{j}| \ll \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|$ , и следует писать  $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Таким образом, с точки зрения природы физических

явлений в уравнении искусственно соединены две закономерности в одну.

Необходимо также заметить, что хотя точный количественный расчет электромагнитных процессов в веществе с помощью уравнений Максвелла возможен не всегда, качественное описание и понимание с их помощью достигается для очень широкого круга явлений. И это очень важно в познавательном отношении для создания определенных представлений об электромагнитных явлениях и свойствах вещества.

Все сказанное о меньшей общности, ограниченной применимости уравнений Максвелла в среде позволяет понять методическую целесообразность построения курса на основе уравнений в вакууме. Если переход от уравнений в пустоте к уравнениям в веществе и не является выводом последних из первых в полном смысле слова, то он, во всяком случае, полезен в методическом плане, поскольку вскрывает роль вещества в создании поля, вспомогательный характер векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$ , природу поляризации и намагничивания, связь между величинами  $\epsilon$  и  $\chi$ ,  $\mu$  и  $\kappa$ , выявляет эмпирические «добавки» к исходным постулатам электродинамики. Без такого анализа уравнения Максвелла (15.22) носят чисто феноменологический характер, а соотношение четырех векторов поля между собой далеко не очевидно.

В процессе усреднения уравнений Максвелла — Лоренца для микрополя, в частности, выяснилось, что напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в веществе (как и в вакууме) ставится в параллель индукция магнитного поля  $\vec{B}$ ; это две силовые характеристики действия поля на заряды, тогда как напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  аналогична индукции электрического поля  $\vec{D}$ . Названия векторов в настоящее время отражают не их сущность, а историю развития учения об электромагнетизме. Некогда напряженность магнитного поля определялась как отношение силы, действующей на магнитный заряд, к величине заряда. Поскольку магнитных зарядов в природе не оказалось, утратила свой первоначальный смысл и напряженность.

Для важного частного случая неизменяемой однородной среды  $\mu$  и  $\epsilon$  являются постоянными величинами, т. е. не зависят от координат точки пространства и времени. В таком случае систему уравнений (15.22) можно записать только для двух векторов поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в полной аналогии с системой уравнений (2.1) для вакуума:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0 \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \end{cases} \quad (16.27)$$

Если учесть еще выражение для силы Лоренца, в которое входят только векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , то можно видеть, что необходимости в векторах  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$  для однородной среды вообще нет. Можно избежать их использования и в случае неоднородной среды с помощью материальных уравнений (15.24) и (15.26). Применение всех четырех векторов поля оправдано более простым видом уравнений (15.22) по сравнению с уравнениями (16.27) и, по-видимому, традицией.

Сказанное выше позволяет понять, почему при изучении школьного курса электродинамики в последнее время во главу угла ставится поле в вакууме, а характеризуется поле во всех случаях только векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

**II.** При изучении главы V следует иметь в виду, что она является основополагающей для учения о поле в веществе. В то же время изложение здесь опирается на понятия и уравнения, изученные ранее: они либо видоизменяются, либо уточняются для вещества.

При чтении материала контролируйте себя, отвечая на вопросы, обсуждая назначение и последовательность выводов.

**§ 14.** Какие заряды называют свободными и связанными? В чем состоит усреднение микрополя? Какое поле мы фиксируем, измеряя напряженность и индукцию? Каковы простейшие модели диэлектрика и проводника?

**§ 15.** Обсудите постановку вопроса об уравнениях поля в веществе со связанными зарядами. Вспомните о явлении поляризации, изученном в общем курсе физики. Почему поляризованность и плотность связанных зарядов взаимозависимы? В чем состоит явление намагничивания вещества? Обсудите «механизм», соединяющий токи связанных зарядов с поляризацией, намагниченностью. Обсудите сходство и различие таких величин, как диэлектрическая и магнитная восприимчивости вещества. Сопоставьте систему уравнений Максвелла для поля в веществе с вакуумной. Выведите формулы, связывающие  $\vec{D}$  с  $\vec{E}$ , минуя  $\vec{P}$  и  $\vec{H}$  с  $\vec{B}$ , минуя  $\vec{j}$ .

**§ 16.** Обсудите аналогию между полем в однородной изотропной среде и вакууме. Рассмотрите вопрос об уравнениях поля в потенциа-

лах, пользуясь аналогией со случаем поля в вакууме. Найдите качественно механизмы, приводящие к ослаблению электрического поля некоторой системы зарядов в веществе и к усилению магнитного поля. Запишите формулы граничных условий, изменяя нумерацию сред. Как это повлияет на взаимосвязь определяющих формулы направлений? Выполните целиком вывод закона изменения и сохранения энергии поля в веществе.

## Глава VI ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Мы приступаем к обсуждению частных проблем электродинамики поля в веществе. Их классификация связана с соответствующими частными случаями электромагнитных полей; изучаются стационарные и квазистационарные поля, электромагнитные волны в веществе. Наличие вещества и особенно свободных зарядов в веществе приводит к значительным отличиям электромагнитных полей и методов их расчета от изученных ранее. Важнейшее новое явление в веществе — возникновение электрического тока, порождаемого электрическим полем. В свою очередь ток вызывает магнитное поле, а изменения последнего — явление электромагнитной индукции.

В данной главе изложены основные вопросы электростатики — учения о статическом электромагнитном поле в системе заряженных и нейтральных диэлектрических и проводящих тел. При этом введенные ранее в главе II для стационарного поля в вакууме формулы, соотношения, величины используются как известные.

### § 17. Электростатика диэлектриков

**17.1. Электростатическое поле в однородном диэлектрике.** Допустим существование однородной среды из диэлектрика, заполняющего пространство. (Такой средой, в частности, является воздух.) В диэлектриках могут иметь место различные конфигурации свободных зарядов, описываемые плотностью  $\rho(\vec{r})$ .

В статическом случае векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не зависят от времени, а заряды, создавшие поле, неподвижны (токов нет, так как по диэлектрику заряды не перемещаются). Система уравнений Максвелла (15.22) распадается на две независимые подсистемы:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (17.1)$$

и

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (17.2)$$

Это значит, что в данном случае может быть одно электростати-

## Приложения

### ПРИЛОЖЕНИЕ I

*Обозначения и единицы некоторых электрических  
и магнитных величин*

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Электрический заряд	$Q = It$	кулон, Кл	$\text{с} \cdot \text{А}$
Объемная плот- ность заряда	$q = \frac{Q}{V}$	кулон на кубический метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Напряженность электрического поля	$E = \frac{F}{Q}$	вольт на метр, $\frac{\text{В}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Поток напряжен- ности	$N(\psi) = ES$	вольт-метр, В · м	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Потенциал электри- ческого поля	$\varphi = \frac{A}{q}$	вольт, В	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-1}$
Дипольный элек- трический момент	$p = ql$	кулон-метр, Кл · м	$\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Поляризованность	$P = \frac{p}{V}$	кулон на квадратный метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\text{м}^{-2} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Электрическая по- стоянная	$\varepsilon_0 = \frac{Q^2}{4\pi Fr^2} =$ $= 8,85 \cdot 10^{-12}$	фарад на метр, $\frac{\Phi}{\text{м}}$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{А}^2$
Кулоновская по- стоянная	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$	метр на фарад, $\frac{\text{м}}{\Phi}$	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-4} \cdot \text{А}^{-2}$
Диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon = \frac{E_0}{E}$	—	—
Электрическая восприимчивость	$\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$	—	—

Продолжение

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Индукция электрического поля	$D = \varepsilon \varepsilon_0 E$	кулон на квадратный метр, $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\text{м}^{-2} \cdot \text{с} \cdot \text{А}$
Поток электрической индукции	$\Psi = DS$	кулон, Кл	$\text{с} \cdot \text{А}$
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	фарад, Ф	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Электрический ток	$I$	ампер, А	А
Плотность тока	$j = \frac{I}{S}$	ампер на квадратный метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}^2}$	$\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$
Сопротивление (омическое)	$R = \frac{U}{I}$	ом, Ом	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-3}$
Электрическая проводимость	$\frac{1}{R} = \frac{I}{U}$	сименс, См	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = \frac{j}{E}$	сименс на метр $\frac{\text{См}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{Il}$	тесла, Тл	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Поток магнитной индукции	$\Phi = BS$	вебер, Вб	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитный момент	$m = \frac{Fl}{B}$	ампер-квадратный метр, $\text{А} \cdot \text{м}^2$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	генри, Гн	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = \frac{2\pi r B}{I} = 1,26 \cdot 10^{-6}$	генри на метр, $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Индукционная постоянная	$f = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	генри на метр, $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$	ампер на метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$
Магнитная проницаемость	$\mu = \frac{B}{B_0}$	—	—
Намагниченность	$J = \frac{m}{V}$	ампер на метр, $\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$

Продолжение

Наименование величины	Определяющая формула	Название единицы, обозначение	Выражение через основные единицы
Магнитная восприимчивость	$\chi = \frac{I}{H}$	—	—
Соотношение между константами $k$ и $f$	$\frac{k}{f} = c^2 = \mu_0 \varepsilon_0$	—	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### Основные формулы векторного анализа

- $\text{grad } \varphi(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z) = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  — формула градиента в декартовых координатах.
- $\text{grad } \varphi(\varrho, z, \alpha) = \vec{e}_\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$  — формула градиента в цилиндрических координатах.
- $\text{grad } \varphi(r, \vartheta, \alpha) = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$  — формула градиента в сферических координатах.
- $\text{grad } (\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi$  — градиент суммы.
- $\text{grad } (C\varphi) = C \text{ grad } \varphi$  —  $C$  — константа.
- $\text{grad } (\varphi \cdot \psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi$  — градиент произведения.
- $\text{grad } U(\varphi(x, y, z)) = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \text{ grad } \varphi$  — градиент сложной функции.
- $d\varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi d\vec{r}$  — полный дифференциал скалярного поля.
- $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \text{grad } \varphi \frac{\vec{l}}{l}$  — производная скалярного поля по направлению  $\vec{l}$ .
- $\text{div } \vec{a}(xyz) = \nabla \vec{a}(xyz) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$  — формула дивергенции в декартовых координатах.

11.  $\operatorname{div} \vec{a}(\varrho, z, \alpha) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho a_\varrho) + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}$  — формула дивергенции в цилиндрических координатах.
12.  $\operatorname{div} \vec{a}(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) \right] + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) \right] + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}$  — формула дивергенции в сферических координатах.
13.  $\operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$ .
14.  $\operatorname{div} (C\vec{a}) = C \operatorname{div} \vec{a}$ .
15.  $\operatorname{div} \varphi (xyz) \vec{a} (xyz) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi$ .
16.  $\operatorname{div} \vec{a} (\varphi (xyz)) = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} \operatorname{grad} \varphi$  — дивергенция сложной функции.
17.  $\operatorname{rot} \vec{a} (xyz) = \vec{i} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$  — формула ротора в декартовых координатах.
18.  $\operatorname{rot} \vec{a}(\varrho, z, \alpha) = \vec{e}_\varrho \left( \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho a_\alpha)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial a_\varrho}{\partial \alpha} \right] + \vec{e}_\alpha \left( \frac{\partial a_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \varrho} \right)$  — формула ротора в цилиндрических координатах.
19.  $\operatorname{rot} \vec{a}(r, \vartheta, \alpha) = \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\alpha) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \alpha} \right] + \vec{e}_\vartheta \left[ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r a_\alpha) \right) \right] + \vec{e}_\alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r a_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right]$  — формула ротора в сферических координатах.
20.  $\operatorname{rot} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$ .
21.  $\operatorname{rot} (C\vec{a}) = C \operatorname{rot} \vec{a}$ .
22.  $\operatorname{rot} \varphi (xyz) \vec{a} (xyz) = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + [(\operatorname{grad} \varphi) \vec{a}]$ .
23.  $\operatorname{rot} \vec{a} (\varphi (xyz)) = - \left[ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} \operatorname{grad} \varphi \right]$  — ротор сложной функции.
24.  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ .
25.  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ .
26.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ .
27.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$ .
28.  $(\vec{a} \nabla) \vec{b} = a_x \frac{\partial \vec{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \vec{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}$  — определение оператора  $(\vec{a} \nabla)$  в декартовых координатах.

29.  $\text{grad}(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \nabla) \vec{b} + [\vec{b} \text{rot} \vec{a}] + [\vec{a} \text{rot} \vec{b}]$ .
30.  $\text{rot}[\vec{a} \vec{b}] = (\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{div} \vec{b} - \vec{b} \text{div} \vec{a}$ .
31.  $\text{div}[\vec{a} \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$ .
32.  $\Delta = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа в цилиндрических координатах.
33.  $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$  — оператор Лапласа в сферических координатах.
34.  $\int_V \text{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{a} \vec{dS}$  — теорема Остроградского — Гаусса.
35.  $\int_S \text{rot} \vec{a} \vec{dS} = \oint_L \vec{a} \vec{dl}$  — теорема Стокса.
36.  $\int_V \text{rot} \vec{a} \vec{dS} = \oint_S [d\vec{S} \vec{a}]$  — аналог теоремы Гаусса для ротора.
37.  $\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$  — формула Грина.

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

#### Сингулярная дельта-функция Дирака

- $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$   
 $\int_a^b \delta(x) dx = 1, \quad a \leq 0 \leq b$  — определение  $\delta$ -функции.
- $\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad a \leq 0 \leq b$ , или  $\int_c^d f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad c \leq a \leq d$  — основное свойство  $\delta$ -функции.
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x)$  — одно из аналитических выражений  $\delta$ -функции.
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x)$ .
- $\delta(-x) = \delta(x), \quad x\delta(x) = 0, \quad \delta'(-x) = -\delta'(x), \quad x\delta'(x) = -\delta(x),$   
 $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$  — важные свойства  $\delta$ -функции.
- $\delta(x, y, z) \equiv \delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  — трехмерное обобщение  $\delta$ -функции.

7.  $\int F(\vec{r}) \delta(\vec{r}) d\vec{r} = F(0)$ ,  $\int F(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{a}) d\vec{r} = F(\vec{a})$  — основное свойство трехмерной  $\delta$ -функции.
8.  $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$  — разложение  $\delta$ -функции в интеграл Фурье.
9.  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$ .

Равенство (9) показывает, что  $\frac{1}{r}$  есть решение уравнения  $\Delta U = 0$  везде, кроме точки  $\vec{r} = 0$ .

#### ПРИЛОЖЕНИЕ IV

*Доказательство равенства нулю интегралов, встречающихся при выводе формулы плотности импульса электромагнитного поля*

Пусть 
$$\vec{I} = \int_V \{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \} dV. \quad (1)$$

Рассмотрим проекцию вектора  $\vec{I}$  на ось  $Ox$ :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_V \left\{ E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - E_y \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + E_z \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right\} dV = \\ &= \int_V \left\{ \left( E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + E_x \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \left( E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right\} dV = \int_V \left( E_x \vec{E} - \vec{I} \frac{E^2}{2} \right) dV. \end{aligned}$$

Применяя теорему Гаусса, получим 
$$I_x = \oint_S \left( E_x \vec{E} - \vec{I} \frac{E^2}{2} \right) d\vec{S} = \oint_S E_x (\vec{E} d\vec{S}) - \frac{1}{2} \oint_S E^2 (d\vec{S})_x.$$

Аналогично записываются остальные проекции, а в векторной форме имеем

$$\vec{I} = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) - \frac{1}{2} \oint_S E^2 d\vec{S}. \quad (2)$$

В интеграле (2) распространим интегрирование на все пространство. При этом поверхность  $S$  сдвигается в бесконечность. Если напряженность поля убывает быстрее чем  $1/r$ , то в пределе получим  $\vec{I} = 0$ . Действительно, площадь поверхности возрастает пропорционально  $r^2$ , а подынтегральная функция уменьшается как  $1/r^{2\alpha}$ , где  $\alpha > 1$ .

Аналогично доказывается равенство нулю интеграла

$$\int_V \{ \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} - [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{B}] \} dV.$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ V

*Особенности применения Международной системы единиц в электродинамике*

Во всех разделах физики в настоящее время используется единая Международная система единиц (СИ). В различных областях науки и техники используются некоторые подсистемы, содержащиеся в СИ. В электродинамике используется подсистема метр — килограмм — секунда — ампер (МКСА). Система единиц МКСА представляет собой согласованную систему единиц для механики, электричества и магнетизма. Она основана на четырех основных единицах измерения — метр, килограмм, секунда, ампер — для четырех основных величин — длина, масса, время и электрический ток.

В уравнениях электродинамики использование единой системы МКСА приводит к появлению двух размерных коэффициентов —  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ . Кроме того, возникает во многих

случаях множитель 4 $\pi$ . В ряде случаев формулы оказываются перетруженными громоздкими коэффициентами. (Это оправдывает применение в теории наряду с СИ согласованной абсолютной гауссовой системы, основные единицы которой сантиметр – грамм – секунда. В ряде существующих пособий применяется гауссова система.)

Объясним возникновение размерных коэффициентов в уравнениях электромагнетизма. В третьем и четвертом уравнениях Максвелла (2.1) в левые части входят напряженность и индукция поля, а в правые – плотности зарядов и токов. Но единицы измерения для зарядов и токов, с одной стороны, и векторов поля – с другой, выбраны независимо от связи, выраженной уравнениями. По этой причине в уравнениях появляются размерные коэффициенты. Коэффициентов всего два, т. е. их столько, сколько независимых уравнений системы. Нетрудно определить размерность коэффициентов. На основе (2.1) записываем для размерностей:

$$\frac{[B]}{L} = \frac{[E][\mu_0][\varepsilon_0]}{T} + [\mu_0] \frac{I}{L^2}; \quad (a)$$

$$\frac{[E]}{L} = \frac{1}{[\varepsilon_0]} \frac{IT}{L^3}. \quad (б)$$

Из уравнения (б) 
$$[\varepsilon_0] = \frac{IT}{[E]L^2}.$$

Пользуясь размерностью 
$$[E] = \frac{ML}{T^2IT},$$

окончательно получаем 
$$[\varepsilon_0] = \frac{I^2T^4}{ML^3},$$

что соответствует наименованию единицы 
$$\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

Размерность  $\mu_0$  находится из уравнения (а) с учетом размерности  $B$ :

$$[\mu_0] = \frac{ML}{I^2T^2},$$

что соответствует наименованию единицы 
$$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}.$$

Очевидно, что значения постоянных  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  можно определить в частных случаях связи полей и зарядов. Так, закон Кулона 
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}.$$

открывает возможность (хотя бы в принципе) определения  $\varepsilon_0$ . Если располагать известными зарядами, например по 1 Кл, то, поместив их на определенном расстоянии друг от друга, например на 1 м, получим определенную силу взаимодействия –  $9 \cdot 10^9$  Н. Отсюда и может быть определена электрическая постоянная:

$$\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

(Разумеется, описан мысленный эксперимент. Определение  $\varepsilon_0$  может быть выполнено на основе любой другой формулы, куда  $\varepsilon_0$  входит.)

Остановимся на выборе единицы силы тока в связи с обсуждаемым вопросом о размерных коэффициентах. В § 1 упоминалось о том, что единица заряда определяется через единицу тока, а последняя – через взаимодействие токов: «ампер – единица тока равна неизменяющемуся току, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона на каждый метр длины».

Используя формулу для магнитной индукции прямого тока и формулу для силы Ампера, действующей на ток (обе формулы вытекают из уравнений Максвелла и формулы для магнитной составляющей силы Лоренца при определении  $\vec{B}$ ), получаем в случае однородного поля  $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l$

Если  $l = 1$  м,  $r = 1$  м,  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  Н, то  $I_1 = I_2 = 1$  А. Но тогда  $\mu_0 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2}$ .

Так как ампер – основная единица в СИ, то формула для силы  $F$  при указанном ее значении определяет величину и размерность коэффициента  $\mu_0$ . (При этом считается  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$  точно.)

Обратим также внимание на то, что при определении единиц заряда, напряженности и индукции поля никакие коэффициенты в соответствующие формулы не введены:

$$Q = It, \quad E = \frac{F}{q}, \quad B = \frac{F}{qv}.$$

Это влияет на форму уравнений Максвелла. Так, магнитную индукцию можно определить формулой

$$F_{\text{маг}} = \frac{q}{c} [\vec{v} \vec{B}],$$

а определение электрической напряженности сохранить без изменения. В таком случае уравнения (1) и (2) системы Максвелла приобретают вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}.$$

В свою очередь можно выбрать единицы заряда согласованно с уравнениями Максвелла, устраняя в системе  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  (абсолютная гауссова система единиц)

Обсудим еще смысл так называемой рационализации уравнений электромагнетизма. При принятой нами записи четвертого уравнения Максвелла в законе Кулона возникает коэффициент  $\frac{1}{4\pi}$ . Если же записать уравнение в виде

$$\text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \rho,$$

то коэффициента  $\frac{1}{4\pi}$  в законе Кулона не будет. Аналогично обстоит дело с третьим уравнением Максвелла: если оно пишется в принятой нами форме, то коэффициенты  $4\pi$  и  $2\pi$  возникают в формулах для индукции поля, сил, действующих на ток в поле, и т. д. Широко применяется так называемая рационализованная система записи уравнений Максвелла, которая используется и в нашем курсе. В ней коэффициентов  $4\pi$  в исходных уравнениях нет.

Процесс становления системы МКСа и выбора ее в качестве основной для электромагнетизма в историческом плане был длительным и довольно сложным, а мы рассмотрели лишь суть вопроса, пользуясь готовыми результатами. Укажем также, что

нами используются коэффициенты  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $f = \frac{\mu_0}{4\pi}$ , что продиктовано исключи-

тельно потребностями упрощения записи громоздких формул. Для возвращения в СИ в любой формуле следует заменить сокращенные обозначения ( $k$ ,  $f$ ) полными.

## Литература для дополнительного чтения

---

1. Мултановский В. В. Курс теоретической физики.—М.: Просвещение, 1988.—Ч. I и II.
2. Левин В. И. Методы математической физики.—М.: Учпедгиз, 1960.
3. Несис Е. И. Методы математической физики.—М.: Просвещение, 1977.
4. Кудрявцев П. С. Курс истории физики.—М.: Просвещение, 1982.
5. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике.—М.: Наука, 1970.
6. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике.—М.: Наука, 1977.
7. Чертов А. Г. Международная система единиц измерений.—М.: Высшая школа, 1977.
8. Стоцкий Л. Р. Физические величины и их единицы.—М.: Просвещение, 1984.
9. Енохович А. С. Справочник по физике.—М.: Просвещение, 1978.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля: Курс теоретической физики.—М.: Наука, 1967.—Т. II; Электродинамика сплошных сред: Курс теоретической физики.—М.: Наука, 1982.—Т. VIII.
11. Левич В. Г. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1969.—Т. I.

12. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
13. Сивухин Д. В. Общий курс физики: Электричество.— М.: Наука, 1983.
14. Калашников С. Г. Электричество.— М.: Наука, 1985.
15. Матвеев А. Н. Электродинамика и теория относительности.— М.: Высшая школа, 1964.
16. Пеннер Д. И., Угаров В. А. Электродинамика и специальная теория относительности.— М.: Просвещение, 1980.
17. Физика микромира (Серия «Маленькая энциклопедия»).— М.: Советская энциклопедия, 1980.
18. Ландсберг Г. С. Оптика.— М.: Наука, 1976.

С. В. ИЗМАЙЛОВ

# КУРС ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР  
Москва 1962

# Оглавление

## Часть первая

### МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

#### Глава I. Общие законы электромагнитного поля

§ 1. Электрическое поле и заряды . . . . .	7
§ 2. Закон Кулона . . . . .	9
§ 3. Принцип наложения полей. Теорема Гаусса . . . . .	11
§ 4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (теорема о дивергенции электрического поля) . . . . .	14
§ 5. Сила и плотность электрического тока. Закон сохранения электрического заряда . . . . .	18
§ 6. Магнитное поле . . . . .	19
§ 7. Принцип суперпозиции для магнитного поля. Закон Био — Савара . . . . .	22
§ 8. Связь вихря магнитного поля с полным током. Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца . . . . .	24
§ 9. Электродвижущая и магнитодвижущая силы и закон полного тока . . . . .	26
§ 10. Закон непрерывности магнитного потока . . . . .	29
§ 11. Связь вихря электрического поля с магнитным током смещения. Вторая группа уравнений Максвелла — Лоренца . . . . .	30
§ 12. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме . . . . .	32
§ 13. Скорость распространения электромагнитного поля. Электромагнитные волны. Электромагнитная теория света . . . . .	34
§ 14. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Плотность электромагнитной энергии. Вектор Умова — Пойнтинга . . . . .	36
§ 15. Закон сохранения импульса (количества движения). Электромагнитный импульс. Тензор плотности потока импульса . . . . .	39
§ 16. Электромагнитная масса. Пропорциональность массы и энергии . . . . .	45
§ 17. Натяжения Максвелла . . . . .	46
§ 18. Закон сохранения импульса для поля и частиц . . . . .	48
§ 19. Основные законы механики быстро движущихся частиц . . . . .	50
§ 20. Дефект массы и энергия связи . . . . .	54
§ 21. Перенос материи при взаимодействии . . . . .	56
§ 22. Полная система уравнений Максвелла — Лоренца . . . . .	57
§ 23. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса электромагнитного поля . . . . .	59
§ 24. Исторические замечания . . . . .	63

#### Глава II. Статические и стационарные поля

§ 25. Статическое электрическое и стационарное магнитное поля . . . . .	66
§ 26. Электростатический потенциал . . . . .	67
§ 27. Уравнение Пуассона. Определение потенциала по заданному распределению заряда . . . . .	69
§ 28. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Мультипольные потенциалы . . . . .	74
§ 29. Потенциал и напряженность поля диполя . . . . .	76
§ 30. Потенциал квадруполь . . . . .	77
§ 31. Энергия системы зарядов . . . . .	78
§ 32. Энергия недеформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему . . . . .	81
§ 33. Энергия деформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему . . . . .	83
§ 34. Векторный потенциал . . . . .	84
§ 35. Магнитное поле стационарного тока . . . . .	86
§ 36. Магнитное поле на большом расстоянии от тока. Магнитный диполь . . . . .	89
§ 37. Скалярный магнитный потенциал тока . . . . .	91
§ 38. Магнитные свойства атомной системы . . . . .	94
§ 39. Магнитная энергия стационарных токов . . . . .	97
§ 40. Исторические замечания . . . . .	99

### Глава III. Электромагнитные волны и теория излучения

§ 41. Плоские линейно-поляризованные электромагнитные волны . . .	101
§ 42. Монохроматические плоские поляризованные волны . . . . .	104
§ 43. Общее решение волнового уравнения. Группы волн . . . . .	106
§ 44. Скалярный и векторный электромагнитные потенциалы . . . . .	109
§ 45. Запаздывающие и опережающие потенциалы . . . . .	112
§ 46. Запаздывающие потенциалы на большом расстоянии от системы зарядов . . . . .	116
§ 47. Электрическое дипольное излучение (диполь Герца) . . . . .	121
§ 48. Гармонически колеблющийся диполь . . . . .	126
§ 49. Квадрупольное и магнитное дипольное излучение . . . . .	128
§ 50. Радиационное поле. Излучение ускоренно, но медленно движущегося заряда . . . . .	130
§ 51. Исторические замечания . . . . .	131

### Часть вторая

### МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### Глава V. Общие законы макроскопического электромагнитного поля

§ 65. Микроскопическое и макроскопическое электромагнитное поле . .	162
§ 66. Макроскопические (усредненные) величины . . . . .	163
§ 67. Вторая группа уравнений Максвелла. Вектор магнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея . . . . .	165
§ 68. Свободные и связанные заряды . . . . .	166
§ 69. Векторы электрической поляризации и электрической индукции. Теорема Гаусса . . . . .	168
§ 70. Вектор намагничивания и макроскопическое магнитное поле. Связанные магнитные заряды . . . . .	170
§ 71. Материальные соотношения. Электрические свойства тел . . . .	174
§ 72. Магнетики . . . . .	177
§ 73. Обобщенный закон Ома . . . . .	178
§ 74. Условия на границе двух тел . . . . .	180
§ 75. Полная система уравнений Максвелла . . . . .	182
§ 76. Закон сохранения энергии для макроскопического поля . . . . .	184
§ 77. Силы, действующие на тела в электрическом и магнитном полях	186
§ 78. Исторические замечания . . . . .	189

### Глава VI. Стационарное и квазистационарное макроскопическое поле

§ 79. Электростатика и магнитостатика . . . . .	191
§ 80. Влияние диэлектрика на электрическое поле . . . . .	193
§ 81. Неоднородные диэлектрики . . . . .	194
§ 82. Потенциал поляризованной среды . . . . .	196
§ 83. Диэлектрический шар в однородном поле . . . . .	197
§ 84. Энергия электрического поля в диэлектриках . . . . .	199
§ 85. Постоянные магниты . . . . .	200
§ 86. Проводник в электрическом поле. Емкость . . . . .	203
§ 87. Теорема о единственности решения электростатической задачи .	206
§ 88. Система двух проводников. Индукционные и потенциальные коэффициенты . . . . .	207
§ 89. Энергия системы проводников . . . . .	211
§ 90. Конденсаторы . . . . .	213
§ 91. Метод электрических изображений . . . . .	216
§ 92. Механические силы в системе проводников . . . . .	218
§ 93. Постоянный электрический ток . . . . .	220
§ 94. Превращение энергии в цепи постоянного тока . . . . .	223
§ 95. Термоэлектрические явления . . . . .	224
§ 96. Задача Бурсиана — Лангмюра (плоский диод) . . . . .	227
§ 97. Влияние магнетика на магнитное поле тока . . . . .	229
§ 98. Энергия магнитного поля токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции . . . . .	230
§ 99. Вычисление коэффициентов взаимной индукции и самоиндукции .	232
§ 100. Квазистационарные токи . . . . .	234
§ 101. Процессы установления . . . . .	237
§ 102. Свободные колебания в цепи с емкостью и самоиндукцией . . .	239
§ 103. Вынужденные колебания (переменный ток) . . . . .	241
§ 104. Превращения энергии в цепи переменного тока . . . . .	247
§ 105. Исторические замечания . . . . .	248

*Часть первая*  
**МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

---

ГЛАВА I  
**ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**§ 1. Электрическое поле и заряды**

Направленность действия электрических сил поля позволяет характеризовать поле некоторым вектором  $\vec{E}$ , который называется напряженностью электрического поля. Вектор  $\vec{E}$  является функцией координат точки в выбранной системе отсчета, а также времени, если создающие поле заряды движутся.

Опыт показывает, что при заданной напряженности поля  $\vec{E}$  силы, действующие на разные покоящиеся заряды, помещаемые в данную точку поля, различны. Поэтому надо считать, что электрическая сила не равна, а пропорциональна напряженности поля

$$\vec{F}_e = e\vec{E}. \quad (1.01)$$

Скалярный множитель пропорциональности  $e$  служит мерой величины заряда.

В выражении (1.01) предполагается, что заряд точечный и поле  $\vec{E}$  берется в точке, занимаемой зарядом. Состояние такого заряда определяется заданием его положения (радиус-вектора  $\vec{r}$ ) и скорости ( $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ) в выбранной системе отсчета. Законность подобной абстракции будет рассмотрена ниже. Соотношение (1.01) выражает принцип близкодействия для электрического поля.

Сила  $\vec{F}_e$ , действующая на неподвижный заряд, может быть как параллельной  $\vec{E}$ , так и антипараллельной  $\vec{E}$ , поэтому заряды могут быть разных знаков.

Если в точку поля с напряженностью  $\vec{E}$  поместить два точечных заряда  $e_1$  и  $e_2$ , то, как показывает опыт, действующая сила будет

$$\vec{F}_e = e_1 \vec{E} + e_2 \vec{E} = (e_1 + e_2) \vec{E} = e \vec{E}. \quad (1.02)$$

Это значит, что заряд аддитивен.

Единицу заряда можно выбрать произвольно. Выбрав некоторый заряд  $e_0$  за единицу, мы можем остальные заряды измерить по отношению к единичному, пользуясь тем, что согласно (1.01)

$$e : e_0 = F : F_0,$$

где  $F$  и  $F_0$  — силы, действующие в данном поле на заряды  $e$  и  $e_0$ .

Если электрический заряд занимает некоторый конечный объем  $V$ , то его распределение можно характеризовать объемной плотностью заряда  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ , численно равной заряду в единице объема. Заряд в элементе объема  $dV$  равен  $de = \rho dV$ , а полный заряд в объеме  $V$  получается в силу аддитивности заряда интегрированием по всему объему

$$e = \int_{(V)} \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (1.03)$$

Сила, действующая в электрическом поле на заряд в элементе объема  $dV$ , равна  $d\vec{F}_e = \vec{E} de = \rho \vec{E} dV$ . Силу, действующую на заряд в объеме  $V$ , получим интегрированием по объему

$$\vec{F}_e = \int_{(V)} \rho \vec{E} dV. \quad (1.04)$$

Формула (1.04) обобщает (1.01) на случай объемно распределенных зарядов. Формулы (1.01) или (1.04) определяют действие электрического поля на заряд, то есть характеризуют заряды с пассивной стороны. Но, как показывает опыт, заряды проявляют себя активно. Всякий точечный заряд  $e'$  окружен электрическим полем, напряженность которого в точке, определяемой радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно заряда, выражается формулой

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{e'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{e'}{r^2} \vec{r}^0, \quad (1.05)$$

где  $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$  — единичный радиус-вектор. Здесь выбрана абсолютная система единиц, при которой множитель пропорциональности в (1.05) равен единице.

Для наглядного изображения поля, следуя Фарадею, вводят понятие о силовых линиях вектора  $\vec{E}$ . Линия вектора представляет собой

пространственную кривую, проведенную так, что касательная в каждой ее точке направлена по вектору  $\vec{E}$  в этой точке. Дифференциальное уравнение линии вектора  $\vec{E}$  имеет вид

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.06)$$

Так как силовую линию можно провести через каждую точку пространства, то поле характеризуется бесконечным числом силовых

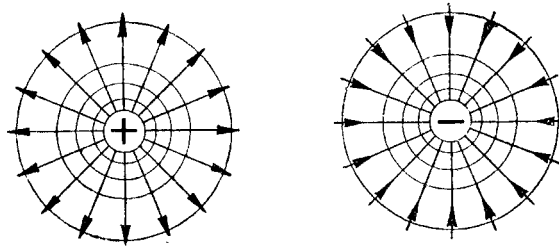


Рис. 1.

линий. Обычно изображаются только некоторые линии. Поля точечных (положительного и отрицательного) зарядов представлены на рисунке 1.

## § 2. Закон Кулона

Электрический заряд  $e'$  окружен электрическим полем, определяемым формулой (1.05). На всякий заряд  $e$ , помещенный в это поле, будет действовать сила. Отвлекаясь от поля, действующую на заряд  $e$  силу можно выразить через величины зарядов  $e'$  и  $e$  и расстояние между ними. Из уравнений (1.01) и (1.05) следует, что сила, с которой заряд  $e'$  действует на заряд  $e$ , находящийся на расстоянии  $r$ , равна

$$\vec{F} = e\vec{E} = \frac{ee'}{r^2} \vec{r}^0. \quad (2.01)$$

С другой стороны, радиус-вектор заряда  $e'$  относительно заряда  $e$  равен  $-\vec{r}$ . Поэтому напряженность поля заряда  $e$  в точке, занимаемой зарядом  $e'$ , равна

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \frac{(-\vec{r})}{r} = -\frac{e}{r^2} \vec{r}^0.$$

Следовательно, сила, с которой заряд  $e$  действует на заряд  $e'$ , равна

$$\vec{F}' = e'\vec{E} = -\frac{ee'}{r^2} \vec{r}^0. \quad (2.02)$$

Из сравнения (2.01) и (2.02) видно, что для взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов выполняется 3-й закон Ньютона.

Формулы (2.01) и (2.02) выражают закон Кулона, установленный им в 1794 году на основании опытов с макроскопическими зарядами. Закон гласит, что два заряда действуют друг на друга с силами, пропорциональными произведению зарядов и обратно пропорциональными квадрату расстояния между зарядами. При этом заряды одинаковых знаков отталкиваются ( $ee' > 0$ ), а различных — притягиваются ( $ee' < 0$ ).

В 1913 году Резерфорд, изучая рассеивание  $\alpha$ -частиц ядрами атомов, доказал, что для заряженных микрочастиц закон Кулона остается верным до расстояний порядка  $10^{-12}$  см.

Закон Кулона, подобно закону тяготения Ньютона, выражает взаимодействие зарядов в соответствии с представлениями о дальном действии: сила, с которой каждый из зарядов действует на другой, зависит только от величины зарядов и от расстояния между зарядами. Поле, играющее роль промежуточного агента, передающего действие от одного заряда к другому, в закон Кулона явно не входит. Получается впечатление, что силы взаимодействия передаются мгновенно через пространство.

Представление о дальном действии, основанное на законах Ньютона и Кулона, господствовало в физике до середины XIX в., до введения поля (принципа близкого действия) Фарадеем и Максвеллом. В действительности действие от заряда к заряду передается при помощи поля, и закон взаимодействия зарядов в форме (2.01) перестает быть справедливым, если заряды движутся и учет процесса распространения поля оказывается существенным.

Законом Кулона обычно пользуются для установления единицы заряда. Полагая  $e = e' = 1$  и  $r = 1$  см, получим  $F = 1$  дине. Таким образом, в абсолютной (гауссовой) системе единиц такой заряд равен единице, который отталкивает в пустоте равный ему заряд, расположенный на расстоянии в 1 см, с силой в одну дину. В рационализированной системе единиц вводится для измерения заряда в  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  раз меньшая единица и выражения (1.01), (1.05) и (2.01) принимают вид:

$$\vec{F} = e\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{e}{4\pi r^2} \vec{r}^0, \quad \vec{F} = \frac{ee'}{4\pi r^2} \vec{r}^0. \quad (2.03)$$

Выше указывалось, что электрический заряд имеет атомное строение. Заряд „элементарных“ частиц равен  $\pm e_0$ , где

$$e_0 = 4,802 \cdot 10^{-10} \text{ СГС ед.}$$

Заряды атомных ядер равны  $Ze_0$ , где  $Z$  — число Менделеева (номер элемента в периодической системе элементов). В „атомной“ системе единиц за единицу заряда берется величина  $e_0$ .

### § 3. Принцип наложения полей. Теорема Гаусса

Опыт показывает, что электрическое поле подчиняется принципу наложения (суперпозиции) полей: поле двух или нескольких зарядов равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, то есть

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_a \vec{E}_a(\vec{r}, t), \quad (3.01)$$

где  $\vec{E}_a(\vec{r}, t)$  — поле, создаваемое зарядом с индексом  $a$  в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$ ;  $\vec{E}$  — результирующее поле в той же точке и в тот же момент времени.

Принцип суперпозиции вытекает из факта векторного сложения сил, действующих на заряд, находящийся в точке  $\vec{r}$ , со стороны других зарядов.

Введем понятие о потоке вектора напряженности. Обозначим элемент площади некоторой поверхности  $\sigma$  с нормалью  $\vec{n}$  через  $d\sigma$  (рис. 2). Поток вектора  $\vec{E}$  через  $d\sigma$  определится формулой

$$\begin{aligned} d\Psi &= \vec{E} d\vec{\sigma} = \vec{E} \vec{n} d\sigma = E_n d\sigma = \\ &= E \cos \alpha d\sigma. \end{aligned} \quad (3.02)$$

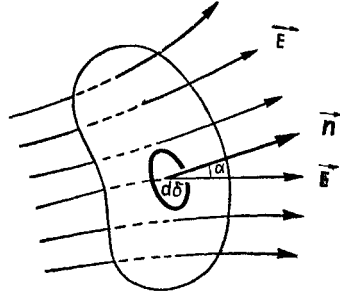


Рис. 2.

Поток вектора  $\vec{E}$  через всю поверхность  $\sigma$  будет равен

$$\Psi = \int_{(\sigma)} E_n d\sigma. \quad (3.03)$$

Если поле  $\vec{E}$  создается несколькими зарядами, то на основании (3.01) имеем  $E_n = \sum_a E_{an}$  и

$$\Psi = \sum_a \int_{(\sigma)} E_{an} d\sigma = \sum_a \Psi_a, \quad (3.04)$$

то есть поток равнодействующего поля через некоторую поверхность  $\sigma$  равен алгебраической сумме потоков составляющих.

В § 1 указывалось, что для графического изображения поля проводят силовые линии. Поток  $\Psi$  вектора  $E$  через поверхность  $\sigma$  можно интерпретировать как число силовых линий, пронизывающих поверхность  $\sigma$ . Выбирая площадку  $d\sigma$  перпендикулярной к  $\vec{E}$ , из (3.02) имеем

$$E = |\vec{E}| = \frac{d\Psi}{d\sigma}, \quad (3.05)$$

то есть напряженность поля равна числу силовых линий, проходящих через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению поля. Заметим, что силовые линии служат лишь для наглядного изображения поля, а не являются реальными образованиями.

Рассмотрим теперь поток поля через произвольную замкнутую поверхность  $\sigma$ . Допустим, что поле создается точечными зарядами.

Для одного точечного заряда  $e_a$  поток через площадку  $d\sigma$  равен согласно (1.05) и (3.02)

$$d\Psi_a = \vec{E}_a \cdot \vec{n} d\sigma = e_a \frac{\cos \alpha d\sigma}{r_a^2},$$

где  $\alpha$  — угол, образованный вектором  $\vec{E}_a$  (рис. 3) и нормалью  $\vec{n}$  к площадке  $d\sigma$  (нормаль берем всегда внешней). Поскольку

$$\frac{\cos \alpha \cdot d\sigma}{r_a^2} = d\Omega_a,$$

( $d\Omega_a$  — элемент телесного угла, под которым видна площадь  $d\sigma$  из точки, занимаемой зарядом  $e_a$ ), то

$$d\Psi_a = e_a d\Omega_a. \quad (3.06)$$

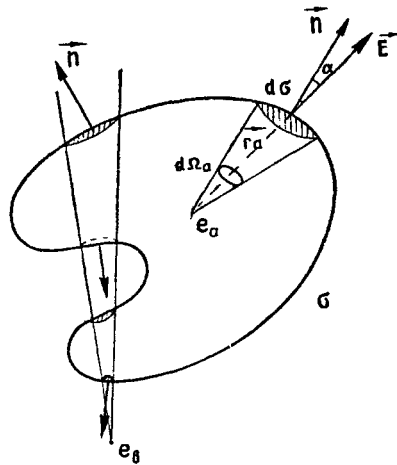


Рис. 3.

Поток через всю замкнутую поверхность равен

$$\Psi_a = e_a \oint d\Omega_a, \quad (3.07)$$

где  $\oint d\Omega_a$  есть полный телесный угол, под которым видна поверхность из точки, занимаемой зарядом. Если заряд  $e_a$  находится внутри поверхности, то телесный угол, под которым видна вся замкнутая поверхность, равен  $4\pi$ . Если заряд  $e_a$  находится вне замкнутой поверхности, то замкнутая поверхность видна под телесным углом, равным нулю. Итак,

$$\oint d\Omega_a = \begin{cases} 4\pi, & \text{если заряд } e_a \text{ находится внутри} \\ & \text{поверхности } \sigma, \\ 0, & \text{если заряд } e_a \text{ находится вне по-} \\ & \text{верхности } \sigma. \end{cases} \quad (3.08)$$

Поэтому поток через замкнутую поверхность

$$\Psi_a = \begin{cases} 4\pi e_a, & \text{если заряд } e_a \text{ находится внутри} \\ & \text{поверхности } \sigma, \\ 0, & \text{если заряд } e \text{ находится вне по-} \\ & \text{верхности } \sigma. \end{cases} \quad (3.09)$$

Разделим теперь все заряды на две группы: а) заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности, б) заряды, находящиеся вне замкнутой поверхности. Тогда согласно (3.04) полный поток через замкнутую поверхность равен

$$\Psi = \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = \sum_a \Psi_a + \sum_b \Psi_b.$$

Но по (3.09) все  $\Psi_a = 4\pi e_a$ , а все  $\Psi_b = 0$ . Поэтому

$$\Psi = \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = 4\pi e, \quad (3.10)$$

где  $e = \sum_a e_a$  — полный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности. Формула (3.10) выражает теорему Гаусса: поток напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на полный заряд, находящийся внутри этой поверхности. Знак потока определяется знаком суммарного заряда. Поток  $\Psi$  характеризует число силовых линий и не зависит от размеров и формы замкнутой поверхности, охватывающей точечный заряд (поверхность можно сделать сколь угодно малой). Следовательно, из положительного заряда  $+e$  выходит  $4\pi e$ , а в отрицательный заряд  $-e$  входит  $4\pi e$  силовых линий.

Теорема Гаусса говорит о том, что источниками электрического поля являются электрические заряды. Ею удобно пользоваться для определения поля зарядов, распределенных со сферической, цилиндрической или плоской симметрией.

### Задачи

1. Определить электрическое поле неподвижного заряда  $e$ , равномерно распределенного по поверхности шара радиуса  $a$ .

Решение. Вследствие сферической симметрии распределения заряда напряженность поля в данной точке должна быть направлена вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$  этой точки (если за начало координат взять центр шара) и величина напряженности поля должна зависеть только от расстояния  $r$ . Положив  $\vec{E} = E(r) \vec{r}^0$ , получим для потока напряженности через шаровую поверхность радиуса  $r$  выражение

$$\Psi = \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = E(r) \oint_{(\sigma)} d\sigma = 4\pi r^2 E(r)$$

(так как нормаль к шаровой поверхности совпадает с  $\vec{r}^0$ ). Обозначим через  $e(r)$  заряд, находящийся внутри шаровой поверхности радиуса  $r$ . По теореме Гаусса имеем

$$\Psi = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi e(r), \quad \text{откуда} \quad E(r) = \frac{e(r)}{r^2}.$$

Если точка, определяемая радиус-вектором  $\vec{r}$ , лежит вне шара ( $r > a$ ), то  $e(r)$  равняется полному заряду шара  $e$ ; поэтому

$$E(r) = \frac{e}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}^0.$$

Если точка лежит внутри шара ( $r < a$ ), то  $e(r) = 0$  и

$$E(r) = 0, \quad \vec{E} = 0.$$

Таким образом, напряженность поля внутри равномерно заряженного по поверхности шара равна нулю, а вне шара — совпадает с напряженностью поля точечного заряда, равного заряду шара и расположенного в центре его. На поверхности шара  $r = a$  напряженность поля меняется скачком:

$$E_r(a+0) - E_r(a-0) = \frac{e}{a^2} = 4\pi\eta,$$

где  $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$  — поверхностная плотность заряда.

2. Определить электрическое поле заряда  $e$ , равномерно распределенного по объему шара радиуса  $a$ .

Решение. Вследствие сферической симметрии распределения заряда вектор  $\vec{E}$  направлен по  $\vec{r}^0$  и мы можем применить формулу  $E(r) = \frac{e(r)}{r^2}$ ,

полученную в предыдущей задаче. Плотность заряда равна  $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ .

Если точка лежит вне шара ( $r > a$ ), то, как и в предыдущей задаче,  $e(r) = e$ . Поэтому

$$E(r) = \frac{e}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}^0.$$

Если точка лежит внутри шара ( $r < a$ ), то  $e(r)$  есть заряд внутри шара радиуса  $r$ :

$$e(r) = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = e \left( \frac{r}{a} \right)^3.$$

Поэтому

$$E(r) = \frac{\frac{4\pi}{3} r^3 \rho}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \rho r, \quad \vec{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \vec{r}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля заряда, распределенного равномерно по объему шара, внутри шара возрастает пропорционально расстоянию  $r$  от центра, а вне шара — совпадает с напряженностью поля точечного заряда, равного полному заряду шара и сосредоточенного в центре его. На границе шара ( $r = a$ ) поле непрерывно.

#### § 4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме (теорема о дивергенции электрического поля)

Соотношение (3.10) суммарным образом связывает поле  $\vec{E}$  с зарядами («источниками» поля), находящимися внутри произвольного объема. Для приложений гораздо удобнее дифференциальная формулировка теоремы Гаусса.

Разделим (3.10) на объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $\sigma$ ; тогда слева мы получим средний поток, выходящий из единицы объема, а справа — среднюю плотность заряда

$$\frac{1}{V} \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = 4\pi \frac{e}{V} = 4\pi\rho.$$

Будем стягивать поверхность  $\sigma$  к некоторой точке (считая, что поверхность  $\sigma$ , охватывающая объем  $V$ , — односвязная); тогда предел левой части дает дивергенцию поля

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = \operatorname{div} \vec{E},$$

а предел правой части — плотность заряда в точке, определяемой радиус-вектором  $\vec{r}$ , к которой стягивается поверхность  $\sigma$ :

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{e}{V} = \rho(\vec{r}).$$

Поэтому формула (3.10) приводится к виду

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (4.01)$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля являются заряды.

Выше указывалось, что «элементарные» заряды мы рассматриваем как точечные. Но для удобства математического рассмотрения некоторых вопросов можно вводить плотность заряда  $\rho$ , которая равна нулю везде, кроме тех точек, в которых находятся точечные заряды. В этих точках плотность заряда обращается в бесконечность. Для одного точечного заряда  $e_a$  можно написать

$$\rho_a(\vec{r}) = e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (4.02)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения, а  $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$  — радиус-вектор заряда. Функция  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$  есть так называемая несобственная функция Дирака, характеризующая точечный источник поля.

Несобственная функция  $\delta(x - \xi)$  одного независимого переменного  $x$  может быть определена следующим образом:  $\delta(x - \xi) = 0$  при  $x \neq \xi$  и  $\delta(x - \xi)$  обращается в бесконечность при  $x = \xi$ , причем для любой непрерывной функции  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} f(\xi), & \text{если } a < \xi < b \\ 0, & \text{если } \xi \text{ вне } (a, b). \end{cases} \quad (4.03)$$

В частности, при  $f(x) = 1$

$$\int_a^b \delta(x - \xi) dx = 1, \quad \text{если } a < \xi < b. \quad (4.04)$$

Область интегрирования может быть бесконечной. Имеют место равенства:

$$\delta(x - \xi) = \delta(\xi - x), \quad \delta[\alpha(x - \xi)] = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x - \xi). \quad (4.05)$$

Смысл этих равенств заключается в том, что их правая и левая части дают одинаковые результаты, если их применить в качестве множителя под знаком интегрирования.

Аналогично можно ввести трехмерную  $\delta$ -функцию  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ , равную нулю везде, кроме точки  $\vec{r}_a$ , и такую, что интеграл по объему равен

$$\int_{(V)} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_a), & \text{если } \vec{r}_a \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } \vec{r}_a \text{ вне } V. \end{cases} \quad (4.06)$$

В частности,

$$\int_{(V)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{r}_a \text{ внутри } V, \\ 0, & \text{если } \vec{r}_a \text{ вне } V. \end{cases} \quad (4.07)$$

В качестве такой функции можно взять, например, произведение

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_a) = \delta(x - x_a) \delta(y - y_a) \delta(z - z_a). \quad (4.08)$$

Возвращаясь к плотности заряда, видим, что в силу (4.07) полный заряд, соответствующий плотности (4.02), равен

$$\int_{(V)} \rho_a(\vec{r}) dV = e_a \int_{(V)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = e_a,$$

где интегрирование проводится по бесконечному объему или любому объему, содержащему точку  $\vec{r}_a$ .

Плотность заряда системы точечных зарядов может быть написана при помощи  $\delta$ -функций в форме

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (4.09)$$

где сумма берется по всем зарядам. Тогда

$$\int_{(V)} \rho dV = \sum_a e_a$$

есть сумма всех зарядов, находящихся в объеме  $V$ . Для точечного заряда дифференциальная теорема Гаусса согласно (4.01) и (4.02) принимает вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (4.10)$$

Подставляя сюда напряженность поля заряда  $e_a$ , которую согласно (1.05) можно написать в форме

$$\vec{E} = \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3} (\vec{r} - \vec{r}_a) = \frac{e_a \vec{R}}{R^3},$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a$ , получим математическое соотношение

$$\nabla \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi \delta(\vec{R}), \quad (4.11)$$

определяющее  $\delta$ -функцию через дивергенцию вектора  $\frac{\vec{R}}{R^3}$ .

### Задачи

1. Показать, что решением уравнения поля точечного заряда  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e \delta(\vec{r})$  является поле  $\vec{E} = \frac{e \vec{r}}{r^3}$ .

Решение. Поле точечного заряда сферически (радиально) симметрично. Обозначая через  $E_r = |\vec{E}|$  единственную радиальную составляющую напряженности, получим в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = 4\pi e \delta(\vec{r}).$$

Откуда

$$r^2 E_r = 4\pi \int_0^r e \delta(\vec{r}) r^2 dr = e \int \delta(\vec{r}) dV,$$

где  $dV = 4\pi r^2 dr$  — элемент объема в сферической системе координат.

Замечая, что согласно (4.07) интеграл  $\delta$ -функции по объему, окружающему заряд, равен единице, получим  $E_r = \frac{e}{r^2}$ , откуда

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r} = \frac{e \vec{r}}{r^3}.$$

2. Показать, что напряженность поля заряда, равномерно распределенного по объему шара радиуса  $a$ , удовлетворяет уравнению (4.01).

Решение. Пользуясь результатами задачи 2 (§ 3), получим для  $r < a$   $E_r = \frac{4\pi}{3} \rho r$ . Поэтому в сферических координатах

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{4\pi}{3} \rho r^3 \right) = 4\pi \rho.$$

Для точки вне шара ( $r > a$ )  $\vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \nabla \cdot \frac{e\vec{r}}{r^3} = e \left( \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \right) = \\ &= e \left( -\frac{3}{r^4} \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \right) = e \left( -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \right) = 0,\end{aligned}$$

так как

$$\nabla r = 3, \quad \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^3} \right) \cdot \nabla r = -\frac{3}{r^4} \vec{r} \quad (\nabla r = \vec{r}^0).$$

### § 5. Сила и плотность электрического тока. Закон сохранения электрического заряда

Всякий движущийся заряд образует конвекционный электрический ток. Заряд, проходящий в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению движения заряда, определяет плотность электрического тока. Если  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  есть скорость непрерывно распределенного заряда в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$ , то вектор плотности тока равен

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (5.01)$$

Для системы точечных зарядов согласно (4.02)

$$\vec{j} = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (5.02)$$

где  $\vec{v}_a$  — скорость движения заряда  $e_a$ .

Проведем некоторую поверхность  $\sigma$ . Если  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к элементу поверхности  $d\sigma$  (в случае замкнутой поверхности будем всегда брать внешнюю нормаль), то сила электрического тока через поверхность  $\sigma$  определяется как поток вектора  $\vec{j}$  через эту поверхность

$$I = \int_{(\sigma)} \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{(\sigma)} j_n d\sigma. \quad (5.03)$$

В силу исторической традиции за направление тока принимается направление движения положительных зарядов.

Электрический заряд подчиняется закону сохранения: заряд замкнутой системы сохраняет постоянную величину. По-видимому, закон сохранения электрического заряда столь же общий и универсальный, как и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Физический смысл закона сохранения заряда заключается, вероятно, в следующем. Заряд есть постоянная величина, определяющая связь одного вида материи — частиц вещества с другим видом материи — электромагнитным полем (подобно тому, как массу можно

рассматривать как постоянную связи вещества и гравитационного поля). Если бы заряд не сохранялся, то можно представить себе момент, когда отсутствовала бы связь между веществом и электрическим полем. Однако подобное явление не наблюдается.

Математическую формулировку закона сохранения электрического заряда получим, если рассмотрим незамкнутую систему. Уменьшение заряда в объеме  $V$  в единицу времени равняется силе электрического тока, идущего через замкнутую поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $V$ . Поэтому

$$-\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = \oint_{(\sigma)} j_n d\sigma. \quad (5.04)$$

Это уравнение есть выражение того факта, что изменение заряда в объеме  $V$  может происходить только за счет перераспределения заряда. Из (5.04) легко получить дифференциальную формулировку закона сохранения заряда. Применяя к (5.04) формулу Остроградского

$$\oint_{(\sigma)} a_n d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

получим для неизменного по величине и форме объема  $V$

$$\int_{(V)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0.$$

Так как это справедливо для любого объема  $V$ , то должно иметь место уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (5.05)$$

дающее дифференциальную формулировку закона сохранения электрического заряда. Это уравнение часто называют уравнением непрерывности. Заметим, что закон сохранения любого скаляра, являющегося функцией координат и времени, должен иметь форму (5.05).

## § 6. Магнитное поле

Магнитное поле проявляется в механических силах, которые действуют на движущиеся в нем заряды. Магнитное поле характеризуется вектором напряженности  $\vec{B}$ .

Как показывает опыт, на заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле, действует сила, пропорциональная скорости и перпендикулярная как вектору  $\vec{v}$ , так и вектору  $\vec{B}$ . Эта сила определяется формулой Лоренца

$$\vec{F}_m = e \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right], \quad (6.01)$$

где  $c'$  — постоянная, зависящая от выбора системы единиц. Если выбрать систему единиц Гаусса, в которой размерность напряженности магнитного поля  $\vec{B}$  совпадает с размерностью напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , то отношение  $\frac{v}{c'}$  должно быть безразмерным. Это значит, что постоянная  $c'$  должна иметь размерность скорости.

Формула (6.01) определяет действие магнитного поля на движущиеся заряды (токи), то есть характеризует заряды как объекты воздействия магнитного поля. Но токи проявляют себя активно — они определяют связанное с ними магнитное поле. Всякий равномерно и прямолинейно движущийся со скоростью  $\vec{v}$  точечный заряд окружен

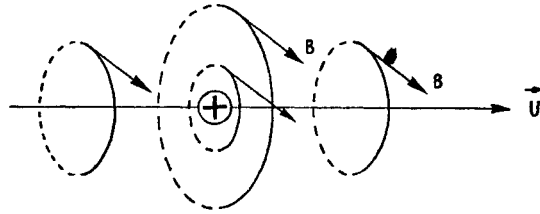


Рис. 4.

магнитным полем, напряженность которого  $\vec{B}$  в точке, характеризуемой радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно заряда, определяется формулой

$$\vec{B} = \frac{e [\vec{v}, \vec{r}^0]}{c'' r^2}, \quad (6.02)$$

где  $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$  — единичный радиус-вектор.

Из (6.02) видно, что напряженность поля  $\vec{B}$  перпендикулярна к скорости  $\vec{v}$  заряда и радиус-вектору  $\vec{r}$  точки наблюдения и образует с  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$  правовинтовую систему. Легко убедиться, что линии вектора  $\vec{B}$  суть окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к  $\vec{v}$  и имеющие общей осью линию вектора  $\vec{v}$  (рис. 4).

Следует подчеркнуть, что формула (6.02) имеет место лишь для достаточно малых скоростей  $v$  заряда, значительно меньших, чем скорость распространения электромагнитного поля.

Постоянная  $c''$  зависит от выбора системы единиц. Поскольку мы уже выбрали размерность  $\vec{B}$ , равной размерности  $\vec{E}$ , то отношение  $\frac{v}{c''}$  должно быть безразмерно, то есть постоянная  $c''$  должна иметь размерность скорости. Покажем теперь, что единицы для маг-

нитного поля могут быть выбраны так, что численные значения  $c'$  (см. 6.01) и  $c''$  совпадут. Изменим единицу для  $\vec{B}$  (не меняя размерности), положив  $\vec{B} = \alpha \vec{B}'$ . Тогда (6.01) и (6.02) примут вид:

$$\vec{F}_m = e \frac{\alpha}{c'} [\vec{v}, \vec{B}'], \quad \vec{B} = \frac{1}{\alpha c''} e \left[ \vec{v}, \frac{\vec{r}_0}{r^2} \right].$$

Величину  $\alpha$  можно выбрать так, что

$$\frac{\alpha}{c'} = \frac{1}{\alpha c''} = \frac{1}{c}, \quad \text{то есть } \alpha = \left( \frac{c'}{c''} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad c = (c' c'')^{\frac{1}{2}}.$$

Соотношения, определяющие магнитное поле, напишутся теперь в форме

$$\vec{F}_m = e \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right], \quad (6.03)$$

$$\vec{B} = \frac{e [\vec{v}, \vec{r}^0]}{c r^2}. \quad (6.04)$$

Постоянная  $c$ , имеющая размерность скорости, носит название электродинамической постоянной. Численное значение ее в гауссовой системе единиц равно

$$c \cong 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}. \quad (6.05)$$

Значение  $c$  находится из опыта. Для определения  $c$  можно, например, найти  $c'$  и  $c''$  при произвольном выборе единицы для напряженности  $B$  и затем вычислить электродинамическую постоянную по формуле  $c = (c' c'')^{1/2}$ .

Выше было указано, что (6.04) имеет место только для медленно движущихся зарядов, то есть если

$$v \ll c. \quad (6.06)$$

Заметив, что  $\frac{e \vec{r}^0}{r^2} = \vec{E}$  есть напряженность поля точечного заряда, мы можем написать (6.04) в форме

$$\vec{B} = \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right]. \quad (6.07)$$

В это выражение входят напряженности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и скорость  $\vec{v}$ , которую можно рассматривать как скорость передвижения поля  $\vec{E}$  (так как вместе с зарядом  $e$  с той же скоростью передвигается и его поле). Поскольку заряд в (6.07) исключен, мы можем это выражение истолковать как утверждение, что всякое движущееся

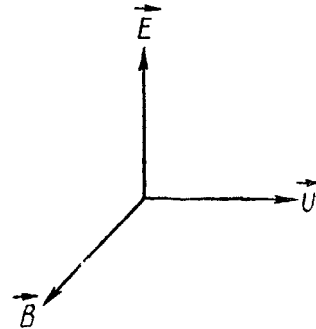


Рис. 5.

(в данной системе отсчета) электрическое поле всегда сопровождается магнитным полем, направленным перпендикулярно как к  $\vec{v}$ , так и к  $\vec{E}$  (рис. 5). Это соотношение устанавливает связь между электрическим и магнитным полями.

## § 7. Принцип суперпозиции для магнитного поля. Закон Био — Савара

Опыт показывает, что магнитное поле, так же как и электрическое, подчиняется принципу суперпозиции (наложения): поле, создаваемое в данной точке несколькими движущимися зарядами (токами), равно векторной сумме полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности,

$$\vec{B} = \sum_a \vec{B}_a(\vec{r}, t), \quad (7.01)$$

где  $\vec{B}_a(\vec{r}, t)$  — поле, создаваемое движущимся зарядом с индексом  $a$ .

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем вычислить магнитное поле произвольного стационарного распределения тока. Действительно, магнитное поле, создаваемое зарядом  $d\vec{e} = \rho(\vec{r}') dV'$ , находящимся в малом объеме  $dV'$ , можно написать в форме

$$d\vec{B} = \frac{[\rho \vec{v}, \vec{R}^0]}{cR^2} dV' = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}^0]}{cR^2} dV', \quad (7.02)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  — радиус-вектор, проведенный от  $dV'$  к точке наблюдения  $\vec{r}$ . Чтобы определить полное поле  $\vec{B}$ , создаваемое произвольным стационарным распределением тока, надо применить принцип наложения полей, то есть сложить поля, создаваемые отдельными элементами тока  $\vec{j} dV'$ ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}^0]}{cR^2} dV'. \quad (7.03)$$

Формулы (7.02) и (7.03) выражают закон Био и Савара для магнитного поля стационарных токов.

### Задачи

1. Показать, что сила, действующая в магнитном поле на единицу объема движущегося заряда, равна

$$\vec{f} = \rho \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] = \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}].$$

Решение. Считая, что  $e = \rho dV$ , где  $dV$  — элемент объема, разделим (6.03) на  $dV$ . Получим плотность силы  $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$ , равную  $\frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}]$ .

2. Определить магнитное поле линейного элемента тока  $d\vec{l}$  на большом расстоянии от него.

Решение. Для линейного элемента тока объем  $dV' = \sigma dl$ , где  $\sigma$  — поперечное сечение тока. Поэтому  $\vec{j} dV' = \vec{j} \sigma dl = I d\vec{l}$ , где  $I = j \cdot \sigma$  — сила тока через сечение  $\sigma$ . Подставляя последнее в (7.02), имеем

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}.$$

Здесь  $R$  считается одним и тем же для всех точек сечения тока ( $R$  велико по сравнению с поперечными размерами тока). Полученное выражение есть обычное выражение закона Био — Савара для линейного тока. Величина магнитного поля, созданного элементом тока, равна

$$dB = \frac{I dl \sin \alpha}{cR^2},$$

где  $\alpha$  — угол между  $d\vec{l}$  и  $\vec{R}$ .

3. Определить силу, действующую на линейный элемент тока в магнитном поле напряженностью  $\vec{B}$ .

Решение. Сила, действующая в магнитном поле на элемент объема тока  $dV$  (см. задачу 1), равна

$$d\vec{F} = \vec{j} dV = \left[ \frac{\vec{j}}{c}, \vec{B} \right] dV.$$

Заменяя для линейного тока  $\vec{j} dV$  через  $I d\vec{l}$ , получим

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}].$$

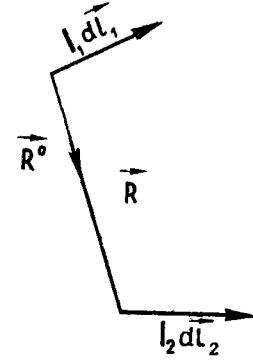


Рис. 6.

Эта сила перпендикулярна к  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

4. Определить силы, с которыми действуют друг на друга два линейных элемента тока  $I_1 d\vec{l}_1$  и  $I_2 d\vec{l}_2$  (рис. 6).

Решение. Если  $\vec{R}$  — радиус-вектор элемента  $I_2 d\vec{l}_2$  относительно  $I_1 d\vec{l}_1$ , то согласно результатам задачи 2 магнитное поле, созданное элементом  $I_1 d\vec{l}_1$  в точках  $d\vec{l}_2$ , равно

$$d\vec{B}_1 = \frac{I_1}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}_1, \vec{R}^0]}{R^2}.$$

Сила, действующая на  $I_2 d\vec{l}_2$ , равна

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= \frac{I_2}{c} [d\vec{l}_2, d\vec{B}_1] = \frac{I_1 I_2}{c^2} \cdot \frac{[d\vec{l}_2 [d\vec{l}_1, \vec{R}^0]]}{R^2} = \\ &= \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \left\{ d\vec{l}_1 (d\vec{l}_2, \vec{R}^0) - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{R}^0 \right\}. \end{aligned}$$

Меняя местами  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$  и заменяя  $\vec{R}$  на  $-\vec{R}$ , получим силу, с которой элемент тока  $I_2 d\vec{l}_2$  действует на элемент  $I_1 d\vec{l}_1$ ,

$$d\vec{F}_1 = -\frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} [d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2, \vec{R}^0]] = -\frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \left\{ d\vec{l}_2 (d\vec{l}_1, \vec{R}^0) - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{R}^0 \right\}.$$

Отсюда видно, что  $d\vec{F}_2 \neq -d\vec{F}_1$  и, следовательно, силы взаимодействия двух элементов тока не удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Если, например, элемент  $d\vec{l}_1$  параллелен  $\vec{R}$ , а  $d\vec{l}_2$  перпендикулярен  $\vec{R}$ , то  $d\vec{F}_1 = 0$ , а  $d\vec{F}_2 \neq 0$ . Но если элементы  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$  параллельны или антипараллельны друг другу, то, полагая  $d\vec{l}_2 = \epsilon d\vec{l}_1$  ( $\epsilon = \pm 1$ ), получим

$$d\vec{F}_2 = \epsilon \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_1, \vec{R}^0) - (dl_1)^2 \vec{R}^0\},$$

$$d\vec{F}_1 = -\epsilon \frac{I_1 I_2}{c^2 R^2} \{d\vec{l}_1 (d\vec{l}_1, \vec{R}^0) - (dl_1)^2 \vec{R}^0\} = -d\vec{F}_2.$$

Следовательно, в этом случае силы равны и противоположны по направлению, но все же не удовлетворяют третьему закону Ньютона, так как не направлены по одной прямой, соединяющей элементы тока. Если токи параллельны ( $\epsilon = +1$ ), то они взаимно притягиваются, если токи антипараллельны ( $\epsilon = -1$ ), то они отталкиваются. Заметим, что полученные выражения описывают взаимодействие элементов тока в соответствии с представлениями о дальнем действии. Но действие одного тока на другой передается при помощи магнитного поля, то есть на самом деле всегда имеет место близкое действие.

## § 8. Связь вихря магнитного поля с полным током. Первая группа уравнений Максвелла — Лоренца

Выведем основное дифференциальное уравнение, связывающее магнитное поле с плотностью тока. Для этого продифференцируем выражения для напряженностей электрического и магнитного полей заряда, движущегося относительно медленно ( $v \ll c$ ):

$$\vec{B}_a(\vec{r}) = \left[ \frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{E}_a \right], \quad \vec{E}_a = \frac{e\vec{R}}{R^3},$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a$ ,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$  — радиус-вектор заряда  $e_a$ , являющийся функцией от времени. Выражение для  $\vec{E}_a$  получено при условии, что заряд неподвижен. Однако оно справедливо и в том случае, если заряд движется относительно медленно с постоянной скоростью. Для равномерно движущегося со скоростью  $\vec{v}_a$  заряда  $e_a$  напряженность поля в точке  $A(\vec{r})$  будет функцией ее расстояния  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_a(t)$  от заряда

$$\vec{E}_a = \vec{E}_a(\vec{R}) = \vec{E}_a(\vec{r} - \vec{r}_a(t)).$$

Составим вихрь вектора  $\vec{B}$ . Пользуясь формулой

$$[\vec{a} [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b}) \vec{c}$$

и принимая во внимание, что  $\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$  не зависит от  $\vec{r}$ , получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B}_a &= \left[ \nabla, \left[ \frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{E}_a \right] \right] = \frac{\vec{v}_a}{c} \text{div } \vec{E}_a - \left( \frac{\vec{v}_a}{c}, \nabla \right) \vec{E}_a = \\ &= \frac{4\pi}{c} \rho_a \vec{v}_a - \left( \frac{\vec{v}_a}{c}, \nabla \right) \vec{E}_a, \end{aligned} \quad (8.01)$$

ибо согласно (4.01)  $\text{div } \vec{E}_a = 4\pi\rho_a$ . С другой стороны

$$\frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t} = \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}, \nabla \right) \vec{E}_a = -(\vec{v}_a, \nabla) \vec{E}_a.$$

Подставляя это в (8.01), находим

$$\text{rot } \vec{B}_a = \frac{4\pi}{c} \rho_a \vec{v}_a + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_a}{\partial t}.$$

Суммируя по всем движущимся зарядам и учитывая, что

$$\sum_a \vec{B}_a = \vec{B}, \quad \sum_a \vec{E}_a = \vec{E} \quad \text{и} \quad \sum_a \rho_a \vec{v}_a = \vec{j},$$

получим

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.02)$$

Это уравнение показывает, что вихри магнитного поля создаются не только токами, но также и переменным во времени электрическим полем.

Уравнение (8.02) выведено для равномерно и медленно движущихся зарядов. Опыт показывает, что оно справедливо и для произвольного движения зарядов. Последнее нашло отражение в том, что в (8.02) полностью исключены все особенности поля равномерно движущегося заряда, а входят только суммарные величины — плотность тока  $\vec{j}$  и напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Переписывая (8.02) в форме

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

видим, что можно ввести полную плотность тока, равную

$$\vec{i} = \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.03)$$

поэтому

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{i}. \quad (8.04)$$

Полная плотность тока  $\vec{i}$  есть сумма плотности конвекционного тока  $\vec{j}$  и плотности так называемого тока смещения

$$\vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8.05)$$

введенного Максвеллом. Ток смещения существует везде, где есть меняющееся со временем электрическое поле.

Обычно уравнения (4.01) и (8.02) объединяют в так называемую первую группу уравнений Максвелла — Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (8.06)$$

Здесь в левых частях стоят только поля, в правых — заряды и токи. Таким образом, первая группа уравнений Максвелла — Лоренца связывает напряженности полей  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с зарядами и токами.

### Задачи

1. Доказать, что плотность полного тока  $\vec{i}$  не имеет источников.

Решение. Беря дивергенцию от  $\vec{i}$ , получим

$$\operatorname{div} \vec{i} = \operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}.$$

Но согласно (8.06)  $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ ; поэтому в силу закона сохранения заряда

$$\operatorname{div} \vec{i} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, вектор  $\vec{i}$  не имеет источников, то есть токовые линии  $\vec{i}$  всегда замкнуты.

2. Доказать, что из уравнений 1-й группы Максвелла — Лоренца непосредственно вытекает закон сохранения электрического заряда.

Решение. Действительно, из (8.06) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left\{ c \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \right\} = 0. \end{aligned}$$

## § 9. Электродвижущая и магнитодвижущая силы и закон полного тока

Иногда вместо дифференциальной формы выражения (8.02) удобно пользоваться его интегральной формой. Введем понятия о электродвижущей силе и магнитодвижущей силе. Пусть заряд  $e$  передвигается в электрическом поле по некоторому контуру  $C$ . Работа

электрической силы  $\vec{F}_e = e\vec{E}$  при таком передвижении равна

$$A = \int_{(c)} \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = e \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

где  $d\vec{r}$  — элемент пути. Работа передвижения единичного заряда вдоль контура  $C$  равна электродвижущей силе (э. д. с.), действующей в контуре

$$\mathcal{E}_e = \frac{A}{e} = \int_{(c)} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (9.01)$$

По аналогии с (9.01) циркуляция  $\vec{B}$  по контуру  $C$

$$\mathcal{E}_m = \int_{(c)} \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (9.02)$$

носит название магнитодвижущей силы (м. д. с.), действующей в контуре  $C$ .

Пусть  $C$  — замкнутый контур (рис. 7). По теореме Стокса магнитодвижущая сила в этом контуре будет равна.

$$\mathcal{E}_m = \oint_{(c)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{(\sigma)} \text{rot}_n \vec{B} \cdot d\vec{\sigma},$$

где  $\sigma$  — произвольная поверхность, опирающаяся на контур  $C$ ,  $\vec{n}$  — нормаль к поверхности. Подставляя значение  $\text{rot}_n \vec{B}$  из (8.02) и считая поверхность  $\sigma$  неизменной (чтобы производную по времени можно было вынести за знак интеграла), получим

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} \left( I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} \right). \quad (9.03)$$

Здесь  $I = \int_{(\sigma)} j_n d\sigma$  есть сила конвекционного тока через поверхность  $\sigma$ ,  $\Psi = \int_{(\sigma)} E_n d\sigma$  — поток вектора напряженности электрического поля через ту же поверхность. Величина

$$I_{\text{смещ.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} \quad (9.04)$$

есть ток смещения через поверхность  $\sigma$ . Сумму

$$I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi}{dt} = \int_{(\sigma)} \vec{i} \cdot d\vec{\sigma} \quad (9.05)$$

называют полным током. Выражение (9.03) дает закон полного тока: магнитодвижущая сила в произвольном контуре пропорциональна силе полного тока, идущего через площадь, ограниченную контуром.

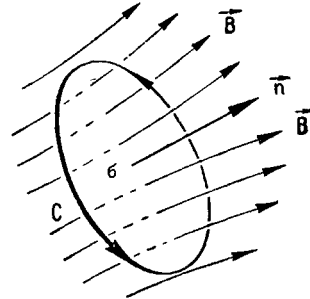


Рис. 7.

### Задача

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечного цилиндрического провода радиуса  $a$ , по которому идет равномерно распределенный по сечению провода ток силой  $I$ .

Решение. В силу цилиндрической симметрии напряженность поля будет зависеть только от расстояния  $r$  (рис. 8). Поэтому можно применить

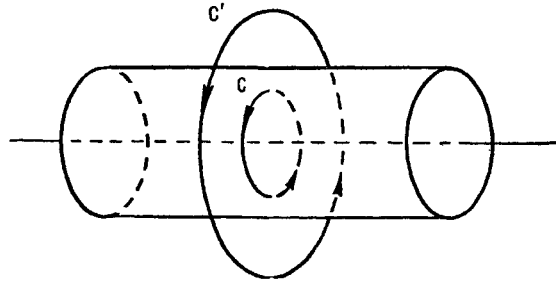


Рис. 8.

закон полного тока. Выберем в качестве контура силовую линию  $C$ . Заметим, что  $\vec{B}$  направлено по касательной к силовой линии и имеет постоянную величину. Тогда

$$\oint_C \vec{B} d\vec{r} = B \cdot 2\pi r.$$

С другой стороны, ток смещения равен нулю, а конвекционный ток через площадь  $\pi r^2$ , ограниченную контуром  $C$ , равен

$$\pi r^2 j = \pi r^2 \frac{I(r)}{\pi a^2} = I \left( \frac{r}{a} \right)^2.$$

Согласно (9.03)

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \left( \frac{r}{a} \right)^2.$$

Отсюда напряженность поля внутри проводника на расстоянии  $r$  от его оси ( $r \leq a$ ) равна

$$B_i = \frac{2I}{ca} \cdot \frac{r}{a},$$

то есть возрастает линейно с расстоянием  $r$  от оси к поверхности цилиндра.

Вне цилиндра в качестве контура возьмем силовую линию  $C'$ . Сила тока через площадь, ограниченную любым контуром, охватывающим проводник, равна  $I$ . Поэтому  $B \cdot 2\pi r = I$  и напряженность магнитного поля вне проводника ( $r \geq a$ ) на расстоянии  $r$  от оси его равна

$$B = \frac{2I}{cr},$$

то есть падает обратно пропорционально расстоянию. На границе проводника ( $r = a$ ) оба выражения совпадают.

## § 10. Закон непрерывности магнитного потока

Опыт показывает, что магнитное поле всегда имеет непрерывные замкнутые линии вектора  $\vec{B}$ . Так, например, в § 6 мы видели, что линии вектора  $\vec{B}$  поля движущегося заряда суть окружности.

Закон непрерывности магнитного потока можно сформулировать математически, если рассмотреть произвольную замкнутую поверхность  $\sigma$  в магнитном поле. Тогда поток вектора  $\vec{B}$  через такую поверхность будет всегда равен нулю

$$\oint_{(\sigma)} B_n d\sigma = 0. \quad (10.01)$$

Это значит, что магнитное поле не имеет источников. Если назвать гипотетические источники магнитного поля «магнитными зарядами», то (10.01) показывает, что магнитных зарядов в природе не существует, в отличие от электрического поля, для которого справедлива теорема Гаусса

$$\oint_{(\sigma)} E_n d\sigma = 4\pi e.$$

Применяя теорему Остроградского, получим

$$\oint_{(\sigma)} B_n d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{B} dV = 0.$$

Ввиду произвольности объема  $V$ , по которому производится интегрирование, имеем

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (10.02)$$

Соотношение (10.02) — соотношение неразрывности — показывает, что вектор  $\vec{B}$  имеет чисто вихревой характер и объемная плотность магнитных зарядов в любой точке пространства всегда равна нулю.

### Задача

Доказать, что для магнитного поля заряда, движущегося равномерно и медленно, соблюдается уравнение неразрывности (10.02).

Решение. Согласно (6.07)

$$\vec{B} = \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right], \quad \vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3}.$$

Вычисляя дивергенцию, имеем

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right] = -\frac{\vec{v}}{c} [\nabla, \vec{E}] = -\frac{\vec{v}}{c} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Но для статического поля

$$\operatorname{rot} \vec{E} = e \operatorname{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0,$$

поэтому

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

### § 11. Связь вихря электрического поля с магнитным током смещения. Вторая группа уравнений Максвелла — Лоренца

Мы видели, что магнитное поле всегда имеет вихревой характер. Покажем, что и электрическое поле при известных условиях может быть вихревым.

Пусть заряд  $e$  движется в системе отсчета  $K'$  со скоростью  $\vec{v}'$ . Сила Лоренца, действующая на заряд  $e$  в магнитном поле  $\vec{B}$ , равна

$$\vec{F}_m = \frac{e}{c} [\vec{v}', \vec{B}].$$

Перейдем к системе отсчета  $K$ , в которой заряд мгновенно покоится (следовательно, поле движется со скоростью  $\vec{v} = -\vec{v}'$ ). В этой системе на заряд действует та же сила  $\vec{F}_m$ , но ее удобнее теперь написать в форме

$$\vec{F}_m = -\frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}].$$

При переходе к системе  $K$  существенно меняется интерпретация силы  $\vec{F}_m$ : сила, действующая в электромагнитном поле на покоящийся заряд, должна быть истолкована как электрическая сила (см. введение). Поэтому отношение  $\frac{\vec{F}_m}{e} = \vec{E}$  надо рассматривать как напряженность электрического поля, существующего в системе  $K$ . Она равна

$$\vec{E} = -\left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right]. \quad (11.01)$$

Соотношение (11.01), аналогичное (6.07), можно истолковать как утверждение, что всякое движущееся магнитное поле создает электрическое поле, направленное перпендикулярно к  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  (по правилу правого винта). Это электрическое поле можно обнаружить по возникновению электрического тока в проводниках, по отношению к которым поле перемещается. Возникающее при этом электрическое поле называется индукционным.

Явление электромагнитной индукции используется в технике для получения переменного тока: в неподвижном статоре генератора пе-

ременного тока заложены проводники, а магнитное поле создается вращающимися магнитами (рис. 9).

Докажем, что индукционное поле (11.01) имеет вихревой характер. Беря ротор (11.01), получим

$$\text{rot } \vec{E} = - \left[ \nabla, \left[ \frac{\vec{v}}{c}, B \right] \right] = - \frac{\vec{v}}{c} (\nabla B) + \left( \frac{\vec{v}}{c} \nabla \right) B.$$

Так как магнитное поле не имеет источников (§ 10), то  $\nabla B = 0$  и

$$\text{rot } \vec{E} = \left( \frac{\vec{v}}{c}, \nabla \right) B.$$

Правая часть может быть преобразована. В системе  $K'$  магнитное поле  $\vec{B}$  есть некоторая функция от координат  $\vec{r}'$ :  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}')$ . Но в системе  $K$  напряженность  $\vec{B}$  есть функция от  $\vec{r}$  и  $t$  (в простейшем случае равномерного движения  $K'$  относительно  $K$  напряженность  $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{r} - \vec{v}t)$ ), поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{r}'} \cdot \frac{d\vec{r}'}{dt} = -(\vec{v} \nabla) \vec{B}, \\ \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} &= -\vec{v} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (11.02)$$

Это уравнение носит общий характер и аналогично уравнению

(8.02). Вектор  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  можно назвать по аналогии с (8.05) магнитным током смещения.

Уравнение (11.02) показывает что вихревое электрическое поле создается переменным во времени магнитным полем, то есть магнитным током смещения. Заметим, что в правой части (11.02) можно было ожидать появление магнитного конвекционного тока  $\rho_m \vec{v}$ . Но поскольку магнитных зарядов в природе не существует, не существует и магнитных токов.

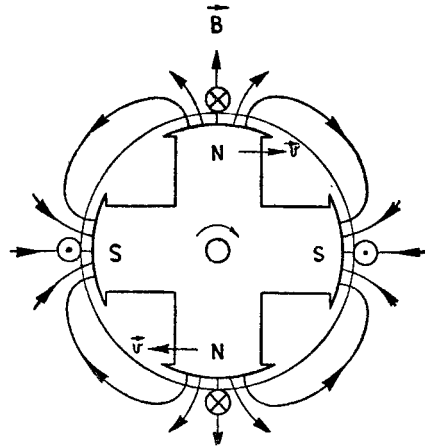


Рис. 9.

Совокупность уравнений (11.02) и (10.02) образует вторую группу уравнений Максвелла — Лоренца

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.03)$$

В отличие от уравнений первой группы (8.06), связывающих электромагнитное поле с зарядами, уравнения второй группы характеризуют свойства поля, не зависящие от зарядов.

## § 12. Закон электромагнитной индукции в интегральной форме

Из формулы (11.02) вытекает формула Неймана для электродвижущей силы индукции. Рассмотрим некоторый замкнутый контур  $C$  в переменном магнитном поле. Согласно (9.01) э. д. с. в контуре равна

$$\mathcal{E}_e = \oint_C \vec{E} d\vec{r}.$$

На основании теоремы Стокса и (11.02) имеем

$$\mathcal{E}_e = \oint_{(\sigma)} \operatorname{rot}_n \vec{E} d\sigma = -\frac{1}{c} \int_{(\sigma)} \frac{\partial B_n}{\partial t} d\sigma.$$

Интегрирование проводится по любой поверхности, опирающейся на контур. Направление нормали  $\vec{n}$  выбрано в соответствии с направлением обхода контура. Если контур и поверхность неподвижны, то, вынося знак производной по времени за знак интеграла, получим

$$\mathcal{E}_e = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (12.01)$$

где

$$\Phi = \int_{(\sigma)} B_n d\sigma \quad (12.02)$$

есть магнитный поток, идущий через поверхность  $\sigma$ , ограниченную контуром  $C$ . Формула (12.01) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея: электродвижущая сила, возникающая в замкнутом контуре, определяется скоростью изменения магнитного потока, проходящего через площадь, ограниченную контуром. Направление э. д. с. определяется знаком  $\mathcal{E}_e$ : если  $\mathcal{E}_e > 0$ , то направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, а если  $\mathcal{E}_e < 0$ , то эти направления противоположны.

Чтобы обнаружить э. д. с. индукции, контур надо сделать проводящим. Тогда в направлении э. д. с. в контуре возникнет электрический ток, обнаруживаемый приборами.

Рассмотрим в качестве примера индукцию в контуре  $C$  (рис. 10). Пусть магнитное поле создается постоянным током  $I'$ , идущим по контуру  $C'$ . При выбранных на рисунке направлениях обхода контура  $C$  и тока  $I'$  магнитный поток через площадь  $\sigma$ , ограниченную контуром  $C$ , положительный. Если расстояние между контурами уменьшается, то магнитный поток  $\Phi$  через  $\sigma$  возрастает ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) и согласно (12.01)  $\mathcal{E}_e < 0$ , то есть э. д. с. индукции направлена

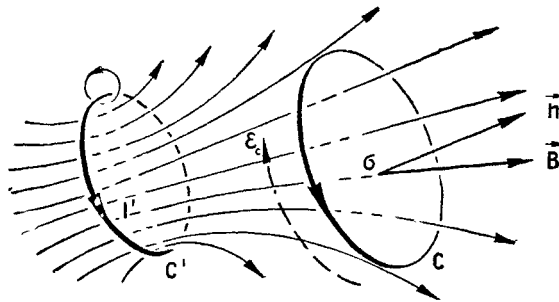


Рис. 10.

в сторону, противоположную направлению обхода контура  $C$  (показано пунктирной стрелкой). Если расстояние между контурами увеличивается, то  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$  и  $\mathcal{E}_e > 0$ , т. е. направление э. д. с. индукции совпадает с направлением обхода контура.

Еще в 1834 году, до того как была получена формула (12.01), Э. Х. Ленц установил закон для направления э. д. с. индукции: направление э. д. с. индукции таково, что магнитное поле соответствующего индукционного тока препятствует движению, вызывающему индукцию. Действительно, в случае сближения контуров индукционный ток  $I$  в контуре  $C$  имеет направление, антипараллельное току  $I'$  в контуре  $C'$ . Но антипараллельные токи отталкиваются (задача 4, § 7), то есть магнитное взаимодействие токов  $I$  и  $I'$  препятствует сближению контуров. Если контуры удаляются друг от друга, то токи  $I$  и  $I'$  параллельны и возникающая сила притяжения препятствует удалению.

Следует иметь в виду, что ток  $I'$  в контуре  $C'$  не обязан быть током проводимости. Это может быть ток смещения, также создающий магнитное поле (см. § 8 и 9). Кроме того, под движением, вызывающим индукцию, понимается всякое изменение, приводящее к изменению магнитного потока через площадь контура  $C$ , например изменение силы тока в контуре  $C'$ .

### Задачи

1. Имеются два параллельных проводника  $AB$  и  $CD$  (рис. 11). В проводнике  $AB$  идет ток в направлении от  $A$  к  $B$ . Определить направление э. д. с. индукции в проводнике  $CD$ , если: а) проводник  $CD$  движется вниз; б) проводник  $CD$  движется вверх.

Решение. На основании закона Ленца находим, что в первом случае токи в обоих проводниках имеют одинаковое направление, так как их взаимное притяжение препятствует взаимному удалению проводников, а во втором — токи антипараллельны, так как при сближении проводников возникает сила взаимного отталкивания.

2. Замкнутый круговой контур радиуса  $a$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг одного из своих диаметров в однородном магнитном

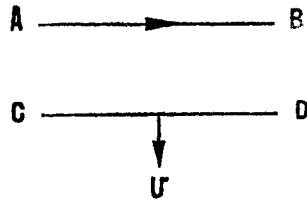


Рис. 11.

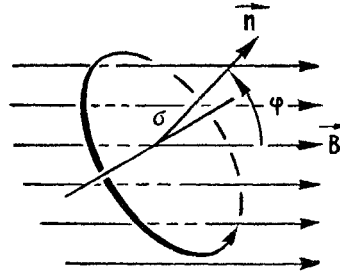


Рис. 12.

ном поле, перпендикулярном к оси вращения (рис. 12). Определить э. д. с. индукции, возникающую в контуре.

Решение. Обозначая через  $\varphi$  угол между направлением  $\vec{B}$  и нормалью  $\vec{n}$  к контуру, получаем поток через площадь контура

$$\Phi = \pi a^2 B \cos \varphi.$$

Так как  $\varphi = \omega t + \alpha$ , где  $\alpha$  — начальная фаза, то

$$\Phi = \pi a^2 B \cos (\omega t + \alpha).$$

Тогда по (12.01)

$$\mathcal{E}_e = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \pi a^2 \omega B \sin (\omega t + \alpha).$$

Таким образом,  $\mathcal{E}_e$  меняется периодически с циклической частотой  $\omega$ . Когда  $\sin (\omega t + \alpha) > 0$ , направление э. д. с. совпадает с направлением обхода контура, указанного стрелкой. Амплитуда э. д. с. равна  $\mathcal{E}_0 = \frac{\pi a^2 \omega B}{c}$  абс. ед.  $= \pi a^2 \omega B \cdot 10^{-8}$  вольт.

### § 13. Скорость распространения электромагнитного поля.

#### Электромагнитные волны. Электромагнитная теория света

Рассмотрим свободное электромагнитное поле (поле, не связанное с зарядами). Свободное поле, очевидно, должно быть вихревым.

Согласно (6.07) и (11.01) свободное поле удовлетворяет уравнениям

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}\right], \quad \vec{B} = \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E}\right], \quad (13.01)$$

где  $\vec{v}$  — скорость распространения поля. Из (13.01) следует, что свободное поле всегда имеет электрическую и магнитную составляющие, которые образуют единое электромагнитное поле, и что в любой системе отсчета скорость распространения свободного поля не может быть равна нулю (из  $\vec{v} = 0$  следует  $E = B = 0$ ). Кроме того, из (13.01) вытекает, что векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  перпендикулярны друг к другу. Последнее можно записать в форме

$$(\vec{v}, \vec{E}) = 0, \quad (\vec{v}, \vec{B}) = 0. \quad (13.02)$$

Чтобы определить скорость распространения свободного поля, подставим значение  $\vec{B}$  в выражение для  $\vec{E}$  и воспользуемся формулами (13.02).

$$\vec{E} = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}\right] = -\left[\frac{\vec{v}}{c}, \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{E}\right]\right] = -\frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{E}\right) + \frac{v^2}{c^2} \vec{E} = \frac{v^2}{c^2} \vec{E}.$$

Из последнего следует, что  $v^2 = c^2$ , то есть

$$v = c.$$

Мы получили фундаментальный результат: скорость распространения свободного электромагнитного поля равна электродинамической постоянной (§ 6). Итак, электромагнитное поле распространяется в пустоте со скоростью

$$v = c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}. \quad (13.03)$$

Эта скорость распространения электромагнитных волн одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Распространяющееся электромагнитное поле образует электромагнитные волны. Джемс Максвелл, открывший теоретически электромагнитные волны, нашел, что эти волны аналогичны световым волнам. Действительно, векторы напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне перпендикулярны к направлению распространения волны, то есть электромагнитные волны, подобно световым, — поперечные. Скорость распространения электромагнитных волн  $c$  равна скорости света. Поэтому Максвелл высказал гипотезу, что световые волны являются частным случаем электромагнитных волн. Гипотеза Максвелла была блестяще подтверждена на опыте и развилась в современную электромагнитную теорию света.

#### § 14. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Плотность электромагнитной энергии и вектор Умова — Пойнтинга

Выше указывалось, что для частиц (вещества) имеют место законы сохранения энергии, импульса (количества движения) и момента импульса. Представление о единстве материи требует, чтобы законы сохранения, справедливые для одного из видов материи, были справедливы и для других видов, если для них сохраняющаяся величина имеет смысл. Покажем, что для электромагнитного поля можно ввести величины, которые можно истолковать как энергию, импульс и момент импульса поля.

Прежде всего рассмотрим закон сохранения энергии. Экспериментально доказано, что создание поля требует затраты энергии. Следовательно, на основании закона сохранения энергии электромагнитное поле обладает некоторой энергией. Но в отличие от механической энергии, связанной с частицами, энергия поля не может быть локализована. Она распределена по всей области, в которой электромагнитное поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  отлично от нуля.

Обозначим объемную плотность распределения энергии  $w(\vec{r}, t)$ . Полная энергия поля в объеме  $V$  получается интегрированием плотности по объему

$$W = \int_{(V)} w(\vec{r}, t) dV. \quad (14.01)$$

Закон сохранения энергии для поля при отсутствии зарядов формально может быть выражен либо в форме подобной (5.04)

$$-\frac{d}{dt} \int_{(V)} w dV = \oint_{(\sigma)} S_n d\sigma \quad (14.02)$$

(уменьшение энергии поля в объеме  $V$  за единицу времени равно потоку электромагнитной энергии через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $V$ ), либо в дифференциальной форме типа (5.05), вытекающей из (14.02)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0. \quad (14.03)$$

Идея о движении энергии была впервые высказана Н. А. Умовым в 1873 году. Вектор  $\vec{S}$ , характеризующий плотность потока энергии (количество энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярную к направлению потока), называется вектором Умова. Конкретный вид вектора Умова для потока электромагнитной энергии был установлен Пойнтингом в 1884 году.

Выражение для плотности энергии  $w$  и потока энергии  $\vec{S}$  электромагнитного поля можно получить из уравнений Максвелла — Лоренца.

Из (8.06) и (11.03) имеем

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{B} - \vec{j}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{E}.$$

Умножив скалярно первое уравнение на  $\vec{E}$ , второе на  $\vec{B}$  и затем сложив эти уравнения, получим

$$\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \text{rot } \vec{E}) - \vec{j} \vec{E}.$$

Так как

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2}{2}, \quad \vec{E} \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \text{rot } \vec{E} = -\text{div } [\vec{E}, \vec{B}],$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = -\text{div } \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] - \vec{j} \vec{E}. \quad (14.04)$$

Величина  $N' = \vec{j} \vec{E} = \rho \vec{E} \vec{v}$  есть работа, произведенная полем в единицу времени над зарядами в единице объема. Следовательно, скаляр

$$\varpi = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (14.05)$$

имеет размерность плотности энергии и может быть истолкован как плотность энергии электромагнитного поля, а вектор

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] \quad (14.06)$$

может быть истолкован как вектор плотности потока энергии. Этот вектор называют вектором Умова — Пойнтинга.

При отсутствии зарядов уравнение (14.04) в полном согласии с (14.03) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \text{div } \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = 0. \quad (14.07)$$

Таким образом, для свободного электромагнитного поля скаляр  $\varpi$  (14.05), истолкованный как плотность энергии, действительно удовлетворяет закону сохранения.

Энергия поля не сохраняется, если имеет место взаимодействие поля с зарядами (14.04).

Получим общую формулировку закона сохранения энергии. Совершенная в единицу времени работа сил, действующих на заряды в единице объема, равна скорости изменения кинетической энергии  $T'$  зарядов в единице объема

$$(\rho \vec{E} + \vec{f}^{\text{стр.}}) \vec{v} = \frac{\partial T'}{\partial t}, \quad (14.08)$$

где  $\vec{f}^{\text{стр.}}$  — плотность «сторонних» сил, действующих на заряды и имеющих неэлектромагнитное происхождение. Исключая из (14.04) работу электрического поля с помощью (14.08), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( T' + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) = - \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] + \vec{f}^{\text{стр.}} \cdot \vec{v}. \quad (14.09)$$

Проинтегрируем (14.09) по некоторому неизменному объему  $V$  (производную по времени выносим за знак интеграла). Пользуясь теоремой Остроградского и тем, что для медленно движущихся частиц  $T' = \frac{1}{2} \mu v^2$ , где  $\mu$  — плотность массы частиц и

$$\int_{(V)} T' dV = \int_{(V)} \frac{1}{2} \mu v^2 dV = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2$$

(суммирование производится по всем заряженным частицам в объеме  $V$ )<sup>1</sup>, имеем

$$N^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \int_{(V)} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV \right\} + \oint_{(\sigma)} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]_n d\sigma. \quad (14.10)$$

Здесь

$$N^{\text{стр.}} = \int_{(V)} \vec{f}^{\text{стр.}} \cdot \vec{v} dV \quad (14.11)$$

есть работа сторонних сил, совершаемая в единицу времени в объеме  $V$ . Выражение (14.10) дает общую формулировку закона сохранения и превращения энергии: работа сторонних сил в объеме идет на увеличение кинетической энергии частиц, энергии электромагнитного поля в объеме  $V$  и на поток энергии через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую этот объем.

Если сторонних сил нет ( $N^{\text{стр.}} = 0$ ) и объем  $V$  охватывает все поле, так что на его границе  $\vec{E} = 0$  и  $\vec{B} = 0$ , то

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV \right\} = 0. \quad (14.12)$$

Это значит, что сумма кинетической энергии частиц и энергии электромагнитного поля сохраняется. При этом кинетическая энергия частиц может превращаться в энергию поля и обратно. Энергию

<sup>1</sup> Для точечных масс по (4.09)  $\mu(\vec{r}) = \sum_a m_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ . Поэтому

$$\int_{(V)} \frac{1}{2} \mu v^2 dV = \frac{1}{2} \sum_a m_a \int_{(V)} v^2(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2.$$

поля, связанного с заряженными частицами, можно рассматривать как взаимную потенциальную энергию частиц (ниже мы увидим, что взаимная энергия частиц составляет только часть энергии поля).

### Задачи

1. Показать, что поток энергии для свободного электромагнитного поля, определяемого формулами (13.01), можно представить в виде

$$\vec{S} = w c \vec{n} = w \vec{c},$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении распространения поля.

Решение. Так как  $v = c$ , то  $\vec{v} = c \vec{n}$  и формулы (13.01) принимают вид  $\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}]$ ,  $\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]$ .

Отсюда

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} [\vec{n}, \vec{E}]] = \frac{E^2}{4\pi} c \vec{n},$$

так как  $(\vec{E}, \vec{n}) = 0$ . С другой стороны,  $E^2 = B^2$ , следовательно,

$$E^2 = \frac{1}{2} (E^2 + B^2)$$

и

$$\vec{S} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} c \vec{n} = w \vec{c}.$$

Таким образом, в случае электромагнитной волны вектор Умова — Пойнтинга представляется как произведение плотности энергии на скорость ее распространения (подобно тому, как конвекционная плотность тока представляется в виде  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ ).

2. Определить энергию электрического поля неподвижного заряда  $e$ , распределенного равномерно по поверхности шара радиуса  $a$ .

Решение. Пользуясь результатами задачи 1 (§ 3), получаем для плотности электрической энергии

$$w_e = 0 \text{ при } r < a \text{ и } w_e = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{e^2}{8\pi r^4} \text{ при } r \geq a.$$

Интегрируя по всему объему поля (по области вне шара), получим

$$W_e = \int w_e dV = \frac{e^2}{8\pi} \int_a^\infty \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{e^2}{2a},$$

то есть энергия шара обратно пропорциональна его радиусу.

## § 15. Закон сохранения импульса. Электромагнитный импульс. Тензор плотности потока импульса

Покажем, что для электромагнитного поля существует величина, которая имеет смысл импульса (количества движения) поля и для которой при отсутствии заряженных частиц выполняется закон сохранения. В присутствии заряженных частиц в замкнутой системе выполняется закон сохранения суммарного импульса поля и частиц.

Так же как и энергия, импульс поля не локализован в какой-либо точке, а непрерывно распределен в поле. Поэтому можно ввести вектор плотности импульса поля  $\vec{g}$ , определяющий полный импульс  $\vec{G}$  поля в объеме  $V$ ,

$$\vec{G} = \int_{(V)} \vec{g} dV. \quad (15.01)$$

Вектор  $\vec{g}$  есть функция координат точки и времени. Найдем математический вид закона сохранения для любого вектора  $\vec{g}$ .

Рассмотрим какую-либо составляющую вектора плотности  $\vec{g}$ , например  $g_x$ . Закон ее сохранения можно представить согласно (14.03) в форме

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \text{div} \vec{t}_x = 0. \quad (15.02)$$

Здесь  $\vec{t}_x$  — вектор плотности потока величины  $g_x$ , характеризующий количество величины  $g_x$ , проходящее в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению потока. Составляющие  $t_{xx}$ ,  $t_{xy}$  и  $t_{xz}$  вектора  $\vec{t}_x$  определяют плотности потока величины  $g_x$  соответственно в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Аналогично (15.02) законы сохранения  $g_y$  и  $g_z$  могут быть выражены с помощью векторов плотности потока  $\vec{t}_y$  и  $\vec{t}_z$  величин  $g_y$  и  $g_z$  в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_y}{\partial t} + \text{div} \vec{t}_y &= 0, \\ \frac{\partial g_z}{\partial t} + \text{div} \vec{t}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.03)$$

Совокупность трех векторов  $\vec{t}_x$ ,  $\vec{t}_y$  и  $\vec{t}_z$  образует новую величину, которая называется тензором 2-го ранга. Обычно тензор 2-го ранга  $^{(2)}t$  записывается в виде матрицы, составленной из составляющих  $t_{xx}$ ,  $t_{xy}$  ... векторов  $\vec{t}_a$ .

$$^{(2)}t = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}. \quad (15.04)$$

Вектор с составляющими

$$\left. \begin{aligned} (\text{div } ^{(2)}t)_x &= \text{div} \vec{t}_x = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \\ (\text{div } ^{(2)}t)_y &= \text{div} \vec{t}_y = \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \\ (\text{div } ^{(2)}t)_z &= \text{div} \vec{t}_z = \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (15.05)$$

называется дивергенцией тензора  $^{(2)}t$ . Пользуясь обозначением (15.05), законы сохранения (15.02) и (15.03) для трех составляющих вектора  $\vec{g}$  можно написать в виде одного тензорного уравнения, выражающего закон сохранения вектора  $\vec{g}$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \operatorname{div} ^{(2)}t = 0. \quad (15.06)$$

Для дивергенции тензора можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Остроградского. Если  $\sigma$  — замкнутая поверхность, окружающая объем  $V$ , и  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к элементу  $d\sigma$  поверхности, то для вектора  $\vec{t}_x$  имеем по теореме Остроградского

$$\oint_{(\sigma)} \vec{t}_x \vec{n} d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{t}_x dV \quad (15.07)$$

(аналогичные выражения имеют место для  $\vec{t}_y$  и  $\vec{t}_z$ ). Стоящие справа величины  $\operatorname{div} \vec{t}_x$ ,  $\operatorname{div} \vec{t}_y$ ,  $\operatorname{div} \vec{t}_z$  согласно (15.05) являются составляющими вектора  $\operatorname{div} ^{(2)}t$ .

Введем вектор  $^{(2)}t\vec{n}$  (произведение тензора  $^{(2)}t$  на вектор  $\vec{n}$ ) с составляющими

$$\left. \begin{aligned} ^{(2)}t\vec{n}_x &= \vec{t}_x \vec{n} = t_{xx}n_x + t_{xy}n_y + t_{xz}n_z \\ ^{(2)}t\vec{n}_y &= \vec{t}_y \vec{n} = t_{yx}n_x + t_{yy}n_y + t_{yz}n_z \\ ^{(2)}t\vec{n}_z &= \vec{t}_z \vec{n} = t_{zx}n_x + t_{zy}n_y + t_{zz}n_z \end{aligned} \right\} \quad (15.08)$$

Тогда три соотношения типа (15.07) для  $\vec{t}_x$ ,  $\vec{t}_y$  и  $\vec{t}_z$  можно записать в компактной форме тензорного равенства

$$\oint_{(\sigma)} ^{(2)}t\vec{n} d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} ^{(2)}t dV. \quad (15.09)$$

Эта формула, представляющая собой обобщение теоремы Остроградского, утверждает, что поток тензора через замкнутую поверхность  $\sigma$  равен интегралу от дивергенции тензора по объему, ограниченному поверхностью  $\sigma$ .

Вернемся к закону сохранения импульса поля. Задача заключается в определении вектора плотности импульса  $\vec{g}$  и тензора плотности потока импульса  $^{(2)}t$  через напряженности электромагнитного поля. Рассмотрим силу Лоренца, действующую на заряд  $e$  в электромагнитном поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ .

Согласно (1.01) и (6.03) эта сила равна

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = e \left\{ \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\}. \quad (15.10)$$

Плотность силы (сила, действующая на единицу объема заряда) равна

$$\vec{f} = \rho \left\{ \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\}. \quad (15.11)$$

Преобразуем плотность силы, исключив из нее плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  с помощью уравнений 1-й группы Максвелла — Лоренца.

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E}, \quad \frac{\vec{j}}{c} = \frac{\rho \vec{v}}{c} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тогда

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \vec{B} \right] \right\}.$$

Правую часть последнего выражения можно привести к более симметричному виду, если использовать уравнения (11.03) 2-й группы Максвелла — Лоренца

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Умножая первое уравнение векторно слева на  $\frac{1}{4\pi} \vec{E}$ , второе на  $\frac{1}{4\pi} \vec{B}$  и прибавляя их к правой части предыдущего соотношения, получим

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}] + \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{4\pi c} = \\ &= \vec{\theta} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}]. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Величину

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}^{(e)} + \vec{\theta}^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}] \right\} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \vec{B} \operatorname{div} \vec{B} + [\operatorname{rot} \vec{B}, \vec{B}] \right\}$$

легко преобразовать и показать, что  $\vec{\theta}$  есть дивергенция некоторого тензора 2-го ранга. Рассмотрим проекцию  $\vec{\theta}^{(e)}$  на ось  $x$ :

$$\begin{aligned} \theta_x^{(e)} &= \frac{1}{4\pi} \{ E_x \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \vec{E}, \vec{E}]_x \} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ E_x \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{4\pi} E_x E_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi} E_x E_z. \end{aligned}$$

Поэтому  $\theta_x^{(e)}$  можно рассматривать как  $x$ -ую составляющую дивергенции тензора с составляющими

$$t_{xx}^{(e)} = \frac{1}{8\pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) = \frac{1}{4\pi} \left( E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right),$$

$$t_{xy}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} E_x E_y, \quad t_{xz}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} E_x E_z \quad \text{и т. д.}$$

Аналогично преобразуется магнитный вектор  $\vec{\theta}^{(m)}$ . Вводя симметричный тензор  ${}^{(2)}t$  с составляющими

$$t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{\alpha\beta} \right\}, \quad (15.13)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  пробегает значения  $x, y, z$  и

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

мы можем  $\vec{\theta}$  написать в форме  $\vec{\theta} = \text{div } {}^{(2)}t$ . В итоге плотность силы Лоренца определится формулой

$$\vec{f} = \text{div } {}^{(2)}t - \frac{\partial}{\partial t} \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{4\pi c}. \quad (15.14)$$

Так как  $\vec{f}$  есть плотность силы, то  $\frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}]$  имеет размерность плотности импульса  $\left( \frac{\text{кол. дв.}}{\text{объем}} \right)$ . Поэтому вектор

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (15.15)$$

( $\vec{S}$  — вектор Умова — Пойнтинга) можно рассматривать как вектор плотности количества движения электромагнитного поля.

При отсутствии зарядов  $\vec{f} = 0$  и (15.14) можно написать в форме

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \text{div } ({}^{(2)}t) = 0. \quad (15.16)$$

Из сравнения (15.16) с (15.06) видно, что вектор  $\vec{g}$  при отсутствии зарядов действительно подчиняется закону сохранения, причем роль тензора потока импульса поля играет тензор  $({}^{(2)}t)$ .

Интегрируя (15.16) по некоторому неизменному объему  $V$  и пользуясь (15.01), (15.08) и (15.09), получим

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \oint_{(\sigma)} ({}^{(2)}t) \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (15.17)$$

где  $\sigma$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ , а  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к элементу поверхности  $d\sigma$ . Таким образом, при отсутствии

зарядов изменение импульса поля в объеме  $V$  в единицу времени равно потоку тензора  $^{(2)}t$  через ограничивающую объем поверхность. Если поверхность охватывает все поле, так что на ней  $E$  и  $B$  равны нулю, то и  $^{(2)}t = 0$ . Тогда

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0, \quad \vec{G} = \text{const}, \quad (15.18)$$

то есть при отсутствии зарядов полный импульс всего электромагнитного поля сохраняется.

### Задача

Определить электромагнитное количество движения медленно движущегося заряда  $e$ , распределенного сферически симметрично.

**Решение.** Электрическое поле медленно движущегося заряда совпадает с его статическим полем  $\vec{E}$ . Магнитное поле по (6.07) равно  $\vec{B} = \left[ \frac{\vec{v}}{c}, E \right]$ , где  $\vec{v}$  — скорость заряда. Поэтому плотность импульса поля, связанного с зарядом, равна

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \left[ \vec{E}, \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{E} \right] \right] = \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ \vec{v} E^2 - (\vec{v} \vec{E}) \vec{E} \right\}.$$

Примем, что заряд движется вдоль оси  $x$ , так что  $\vec{v} = v\vec{i}$ ; тогда

$$g_x = \frac{1}{4\pi c^2} (E_y^2 + E_z^2) v, \quad g_y = -\frac{1}{4\pi c^2} E_x E_y v, \quad g_z = -\frac{1}{4\pi c^2} E_x E_z v.$$

Следовательно, интегрируя по всему объему поля, получим

$$G_x = \frac{v}{4\pi c^2} \int (E_y^2 + E_z^2) dV, \quad G_y = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_x E_y dV,$$

$$G_z = -\frac{v}{4\pi c^2} \int E_x E_z dV.$$

Но поле заряда сферически симметрично, поэтому

$$\int E_x^2 dV = \int E_y^2 dV = \int E_z^2 dV = \frac{1}{3} \int E^2 dV,$$

$$\int E_x E_y dV = \int E_x E_z dV = \dots = 0.$$

Следовательно,

$$G_x = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot \frac{2}{3} \int E^2 dV \cdot v, \quad G_y = G_z = 0.$$

Но  $\frac{1}{8\pi} \int E^2 dV = W_e$  есть энергия электрического поля заряда, поэтому

$$G_x = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2} v, \quad G_y = G_z = 0$$

или

$$\vec{G} = \frac{4}{3} \frac{W_e}{c^2} \vec{v},$$

то есть количество движения поля движущегося заряда пропорционально вектору скорости заряда. Чтобы вычислить коэффициент при  $\vec{v}$ , надо знать распределение заряда.

### § 16. Электромагнитная масса. Пропорциональность массы и энергии

Мы доказали, что при отсутствии зарядов энергия и импульс электромагнитного поля сохраняются, подчиняясь уравнениям сохранения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S}, \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\operatorname{div} (-\vec{t}). \quad (16.01)$$

В классической механике импульс  $\vec{p}$  частицы имеет два множителя: массу  $m$  и скорость  $\vec{v}$ . Плотность импульса поля  $\vec{g}$  также можно представить в форме

$$\vec{g} = \mu_f \vec{u}, \quad (16.02)$$

где  $\mu_f$  — масса единицы объема поля, а  $\vec{u}$  — некоторая скорость, которую можно связать с потоком энергии и плотностью энергии  $w$  поля, положив

$$\vec{S} = w \vec{u}. \quad (16.03)$$

Формулу (16.03) следует рассматривать как определение скорости  $\vec{u}$ , а формулу (16.02) — как определение плотности массы поля  $\mu_f$ . Легко показать, что  $\vec{u}$  не может превышать по величине скорости  $c$ .

Согласно (15.15) вектор количества движения связан с  $\vec{S}$  соотношением  $\vec{g} = \vec{S}/c^2$ . Следовательно,

$$\vec{g} = \frac{w}{c^2} \vec{u}. \quad (16.04)$$

Сопоставляя (16.04) с (16.02), получим связь между плотностью массы и плотностью энергии электромагнитного поля

$$\mu_f = \frac{w}{c^2}. \quad (16.05)$$

Тем самым мы приходим к новому понятию массы — массы, связанной не с отдельными частицами, а с полем. Поле обладает массой,

которая называется электромагнитной. Масса поля в некотором объеме  $V$ , равная

$$m_f = \int_{(V)} \mu_f dV, \quad (16.06)$$

определяется, очевидно, его энергией

$$m_f = \frac{W}{c^2}. \quad (16.07)$$

Заметим, что наличие массы у поля можно было бы предвидеть заранее, исходя из представления о поле как виде материи. Соотношения (16.07) и (16.05) показывают, что масса поля однозначно определяется его энергией.

На основании представления о единстве материи можно предполагать, что соотношение (16.07) должно выполняться для любого вида материи. Это положение строго доказывается в специальной теории относительности. Если какой-либо материальный объект обладает массой  $m$  и полной энергией  $W$ , то они связаны соотношением

$$m = \frac{W}{c^2}. \quad (16.08)$$

Справедливость уравнения (16.08) подтверждается на опыте.

### Задача

Определить электромагнитную массу заряда  $e$ , равномерно распределенного по поверхности сферы радиуса  $a$ .

Решение. Энергия шара, равномерно заряженного по поверхности, равна  $W_e = \frac{e^2}{2a}$  (задача 2, § 14). Поэтому согласно (16.08)

$$m = \frac{e^2}{2ac^2}.$$

## § 17. Натяжения Максвелла

Тензор  $(-{}^{(2)}t)$  был истолкован как плотность потока импульса поля. Следуя Максвеллу, тензору  ${}^{(2)}t$  можно дать другое толкование.

Изменение импульса тела в единицу времени равняется действующей силе. Поэтому в выражении

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \text{div } {}^{(2)}t$$

вектор  $\text{div } {}^{(2)}t$  есть плотность объемной силы, действующей на объем  $V$  электромагнитного поля. Преобразование (15.09) позволяет приве-

сти силы, действующие на объем, к поверхностным силам. В выражении

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \oint_{(V)} {}^{(2)}t\vec{n} d\sigma \equiv \vec{F} \quad (17.01)$$

слева стоит изменение импульса поля в объеме  $V$  в единицу времени, а справа — величина, которую следует рассматривать как поверхностную силу, действующую на объем  $V$ . Поэтому стоящая под знаком интеграла величина

$${}^{(2)}t \cdot \vec{n} = \vec{t}_n = \vec{f}^{(n)} \quad (17.02)$$

есть плотность поверхностной электромагнитной силы, то есть сила, действующая на единицу площади ограничивающей поверхности с нормалью  $\vec{n}$ . Из (17.02) видно, что поверхностная сила, приложенная к произвольно наклоненной единичной площадке, получается путем линейного преобразования с компонентами  $t_{\alpha\beta}$  единичного вектора нормали  $\vec{n}$  к этой площадке. Сила, действующая на единичную площадку, нормалью к которой является ось  $x$  ( $\vec{n} = \vec{i}$ ), имеет согласно (15.08) составляющую по оси  $x$ , равную

$$f_x^{(x)} = ({}^{(2)}t \cdot \vec{i}) = t_{xx}i_x + t_{xy}i_y + t_{xz}i_z = t_{xx},$$

так как  $i_x = 1$ ,  $i_y = i_z = 0$ . Аналогично  $f_y^{(x)} = t_{yx}$ ,  $f_z^{(x)} = t_{zx}$ .

Итак,  $t_{\alpha\beta}$  суть составляющие силы, действующей на единичную площадку с нормалью  $\vec{i}_\beta$  ( $i_1 = \vec{i}$ ,  $i_2 = \vec{j}$ ,  $i_3 = \vec{k}$ ). Диагональный элемент  $t_{\beta\beta}$  есть нормальное напряжение, приложенное к площадке. Смешанные компоненты суть касательные или скалывающие напряжения. Весь тензор  ${}^{(2)}t$  с компонентами (15.13) называется тензором максвелловских натяжений.

В качестве примера рассмотрим натяжение при  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{E} \neq 0$ . Направим ось  $x$  вдоль  $\vec{E}$ , тогда  $E_x = E$ ,  $E_y = E_z = 0$ . Ось  $z$  направим перпендикулярно нормали  $\vec{n}$  к элементу поверхности и напряженности поля (рис. 13). Обозначим через  $\vartheta$  угол между нормалью к поверхности и полем. Тогда  $n_x = \cos \vartheta$ ,  $n_y = \sin \vartheta$ ,  $n_z = 0$  и согласно (17.02)

$$f_x^{(n)} = t_{xx}n_x + t_{xy}n_y, \quad f_y^{(n)} = t_{yx}n_x + t_{yy}n_y, \quad f_z^{(n)} = t_{zx}n_x + t_{zy}n_y.$$

Но из (15.13)

$$t_{xx} = \frac{E_x^2}{8\pi} = \frac{E^2}{8\pi}, \quad t_{yy} = -\frac{E^2}{8\pi}, \quad t_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

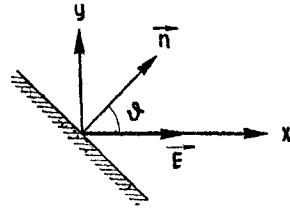


Рис. 13.

Поэтому составляющие поверхностной плотности силы, действующей на элемент с нормалью  $\vec{n}$ , равны

$$f_x^{(n)} = \frac{E^2}{8\pi} \cos \vartheta, \quad f_y^{(n)} = -\frac{E^2}{8\pi} \sin \vartheta, \quad f_z^{(n)} = 0. \quad (17.03)$$

Абсолютная величина поверхностной плотности силы, равная

$$|f^{(n)}| = \frac{1}{8\pi} E^2 = w_e, \quad (17.04)$$

не зависит от ориентации элемента поверхности по отношению к полю и равна плотности энергии электрического поля. Угол между нормалью к поверхности  $\vec{n}$  и вектором плотности силы  $\vec{f}^{(n)}$  всегда делится пополам вектором поля  $\vec{E}$ . Тензор натяжений переносит чистое натяжение, если  $\vec{E}$  перпендикулярно к поверхности, и чистое давление, если  $\vec{E}$  лежит в плоскости поверхности.

Для магнитного поля получаются аналогичные результаты.

### Задача

Определить давление электромагнитной волны, падающей на поверхность тела под углом  $\alpha$  и полностью поглощаемой.

Решение. Объем наклонного цилиндра, построенного на единичной площадке поверхности тела, с образующей, равной скорости света  $\vec{c}$ , равен  $\vec{c}n = c \cdot \cos \alpha$ . Количество движения поля в этом объеме  $\vec{G} = \vec{g}c \cdot \cos \alpha = \frac{\vec{S}}{c} \cos \alpha$ , где  $\vec{S}$  — вектор Умова — Пойнтинга для падающей волны. Если волна полностью поглощается телом, то в одну секунду единице поверхности тела передается количество движения  $\vec{G}$ . Нормальная составляющая  $\vec{G}$  дает давление, а касательная — касательное напряжение

$$P = -\vec{n}\vec{G} = \frac{S}{c} \cos^2 \alpha, \quad T = \vec{G} \cdot \vec{\tau} = \frac{S}{c} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Тот же результат можно получить с помощью максвелловских натяжений.

## § 18. Закон сохранения импульса для поля и частиц

В присутствии заряженных частиц законы сохранения энергии и импульса согласно (14.04) и (15.14) могут быть написаны в форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = -\operatorname{div} \vec{S}, \quad (18.01)$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{f} = -\operatorname{div} ({}^{(2)}t). \quad (18.02)$$

Из первого уравнения вытекает, что в присутствии заряженных частиц энергия поля расходуется не только на поток энергии, выходящей из рассматриваемого единичного объема, но и на работу,

совершаемую над частицами, находящимися в этом объеме. Второе уравнение показывает, что импульс поля меняется не только вследствие существования потока импульса через ограничивающую поверхность, но и вследствие взаимодействия с заряженными частицами.

Рассмотрим интегральную форму закона сохранения импульса. Проинтегрируем (18.02) по некоторому объему  $V$ . Пользуясь (15.01) и (15.09), получим

$$\frac{d\vec{G}}{dt} + \int_{(V)} \vec{f} dV = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}t\vec{n} d\sigma. \quad (18.03)$$

Интеграл, стоящий в левой части, равен силе Лоренца  $\vec{F}$ , действующей на совокупность заряженных частиц в объеме  $V$ . Обозначив через  $\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a$  импульс всех заряженных частиц в объеме  $V$ , мы можем написать закон изменения импульса частиц

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}^{\text{стр}}, \quad (18.04)$$

где  $\vec{F}$  — электромагнитная сила Лоренца, действующая на частицы в объеме  $V$ , а  $\vec{F}^{\text{стр}}$  — сторонняя сила неэлектромагнитного происхождения. Исключая из (18.03) и (18.04) силу  $\vec{F}$ , получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}t\vec{n} d\sigma + \vec{F}^{\text{стр}}, \quad (18.05)$$

то есть изменение в единицу времени импульса поля и заряженных частиц, заключенных в объеме  $V$ , определяется максвелловскими натяжениями, приложенными к границе объема  $V$  (иначе говоря, потоком импульса через эту границу) и равнодействующей сил  $\vec{F}^{\text{стр}}$  неэлектромагнитного происхождения. При этом предполагается, что заряды не переходят за границу  $\sigma$  объема  $V$  (в противном случае следовало бы добавить поток количества движения частиц).

Если объем  $V$  охватывает все поле (на его границе тензор  ${}^{(2)}t$  равен нулю) и сил неэлектромагнитного происхождения нет, то

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = 0, \quad \vec{P} + \vec{G} = \text{const}. \quad (18.06)$$

Таким образом, при отсутствии сторонних сил полный импульс, состоящий из импульса поля и импульса частиц, сохраняется.

В электронной теории Г. Лоренца предполагалось, что все силы, действующие между частицами вещества, имеют электромагнитное происхождение и всегда  $\vec{F}^{\text{стр}} = 0$ . Исследование сил взаимодействия между тяжелыми ядерными частицами — протонами и нейтронами — показало, что существуют сторонние силы неэлектромагнитного

происхождения (ядерные силы). Поэтому вообще  $\vec{F}^{\text{стр.}} \neq 0$ . Если при этом, как и в (18.06), рассматривать объем, охватывающий все поле, то

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} + \vec{G}) = \vec{F}^{\text{стр.}}. \quad (18.07)$$

Следует подчеркнуть, что в (18.06) сохраняется не каждая из величин  $\vec{P}$ ,  $\vec{G}$  в отдельности, а их сумма — полный импульс. В процессе движения поля и частиц импульс поля превращается в импульс частиц и обратно. Происходит качественное изменение импульса. Поэтому следует говорить не просто о законе сохранения импульса, а о законе сохранения и превращения импульса.

### § 19. Основные законы механики быстро движущихся частиц

Выражение для кинетической энергии частицы  $\frac{1}{2}mv^2$  справедливо только при  $v \ll c$ . Учитывая пропорциональность массы и энергии (§ 16), получим для кинетической энергии более общее выражение. Предполагая, что соотношение (16.08) справедливо не только для поля, но и для частиц, можно сформулировать следующие законы движения для частицы:

1) изменение импульса в единицу времени равно действующей силе

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}; \quad (19.01)$$

2) изменение энергии частицы в единицу времени равно мощности действующей силы

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}; \quad (19.02)$$

3) масса и энергия пропорциональны

$$W = mc^2. \quad (19.03)$$

Поскольку энергия частицы зависит от скорости, то из (19.03) следует зависимость массы от скорости. Подставляя (19.03) в (19.02) и пользуясь (19.01), получим

$$c^2 dm = \vec{v} d(m\vec{v}) = m\vec{v} d\vec{v} + v^2 dm.$$

Вводя вектор  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$  и разделяя переменные, имеем

$$\frac{dm}{m} = \frac{\vec{\beta} d\vec{\beta}}{1 - \beta^2}.$$

Интегрируя это выражение и обозначая постоянную интегрирования через  $\ln m_0$ , найдем

$$\ln m = -\frac{1}{2} \ln(1 - \beta^2) + \ln m_0,$$

откуда

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.04)$$

Чтобы выяснить смысл постоянной интегрирования, положим  $v = 0$ , тогда  $m = m_0$ . Таким образом,  $m_0$  есть масса покоящейся частицы — так называемая масса покоя.

Формула (19.04), дающая зависимость массы от скорости, была впервые получена Г. Лоренцем для так называемой электромагнитной массы и затем распространена А. Эйнштейном в его специальной теории относительности на обычную «механическую» массу. Поскольку  $c$  имеет величину  $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ , то для малых скоростей ( $v \ll c$ )

членом  $\frac{v^2}{c^2}$  можно пренебречь по сравнению с единицей и считать массу постоянной, равной массе покоя  $m_0$ . По мере приближения скорости к значению  $c$  масса неограниченно возрастает, стремясь к бесконечности. Зависимость (19.04) подтверждена экспериментально многочисленными опытами с быстрыми частицами.

Подставляя выражение для массы (19.04) в (19.03), получим новое выражение для энергии частицы

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19.05)$$

При  $v = 0$  имеем

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (19.06)$$

Эта величина называется энергией покоя частицы. Покоящаяся частица обладает энергией, пропорциональной массе покоя частицы. Эта энергия определяется внутренней структурой частицы и, возможно, складывается из энергий полей, с которыми связана частица, в частности и энергии ее электрического поля (см. задачи 2, § 14; 1, § 16).

Кинетическая энергия частицы определяется как разность энергии  $W$  и энергии покоя  $W_0$

$$T = W - W_0 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (19.07)$$

(Заметим, что часто кинетической энергией называют величину  $W$ , отличающуюся от  $T$  энергией покоя.)

Легко показать, что при  $v \ll c$  выражение (19.07) превращается в классическую кинетическую энергию  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ . Действительно, по

формуле бинорма Ньютона

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

$$\dots = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots$$

При  $v \ll c$  существенен лишь первый «классический» член разложения.

При скорости  $v$ , стремящейся к  $c$ , энергия  $W$ , как и масса, стремится к бесконечности. Поэтому скорость, равная скорости распространения электромагнитных действий, недостижима для частицы с отличной от нуля массой покоя — для достижения такой скорости требуется затратить бесконечную энергию.

Скорость распространения электромагнитных действий в любой системе отсчета является предельной скоростью. Материальные объекты не могут двигаться в любой системе отсчета со скоростью, превышающей скорость света, которая, как подчеркивалось выше, инвариантна. Со скоростью, равной скорости света  $c$ , могут двигаться лишь те материальные объекты, масса покоя которых равна нулю. Такими частицами являются кванты электромагнитного поля (фотоны) и, может быть, нейтрино.

Учитывая (19.04), импульс частицы можно написать в виде

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W}{c^2} \vec{v}. \quad (19.08)$$

Законы импульса и энергии для частицы принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}, \quad (19.09)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F} \vec{v}. \quad (19.10)$$

Соответственно можно уточнить формулировку (14.10) закона сохранения и превращения энергии. Заменяя в (14.10) классическую кинетическую энергию системы частиц  $\sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2$  значением энергии,

применимым для любых скоростей,

$$W = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} \quad (19.11)$$

( $m_a$  — масса покоя частицы с индексом  $a$ ), получим

$$N^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + \int_{(V)} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv \right\} + \oint_{(\sigma)} \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]_n d\sigma. \quad (19.12)$$

Смысл этого выражения остается, конечно, прежним: работа сторонних сил в объеме  $V$  идет на увеличение энергии частиц, энергии электромагнитного поля в этом объеме и на поток энергии через поверхность, ограничивающую объем.

Импульс системы частиц согласно (19.08) принимает вид

$$\vec{P} = \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (19.13)$$

Обобщенный закон сохранения и превращения импульса (18.05) может быть написан в форме

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} + \int_{(V)} \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}] dv \right\} = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}t \cdot \vec{n} \cdot d\sigma + \vec{F}^{\text{стр.}}, \quad (19.14)$$

то есть изменение в единицу времени полного импульса в объеме  $V$ , равного сумме импульсов частиц и поля, определяется равнодействующей максвелловских натяжений, приложенных к границе объема, и равнодействующей сторонних сил, действующих на частицы.

### Задача

Выразить энергию  $W$  частицы через ее импульс  $\vec{p}$ .

Решение.

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^2 \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = -m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^2}{1 - \beta^2} \left( \beta = \frac{v}{c} \right).$$

С другой стороны  $W^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \beta^2}$ . Следовательно,

$$\left( \frac{W}{c} \right)^2 = p^2 + m_0^2 c^2 \quad \text{и} \quad W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

## § 20. Дефект массы и энергия связи

Смысл взаимосвязи между массой и энергией, определяемой формулой

$$W = mc^2, \quad (20.01)$$

делается более ясным при рассмотрении движения сложной системы, состоящей из нескольких частиц. Сложная система, как целое, характеризуется некоторой массой покоя  $m_0$  и скоростью движения  $\vec{v}$ . Покоящаяся система массы  $m_0$  согласно (19.06) обладает внутренней энергией покоя  $W_0 = m_0 c^2$ . Так как  $m_0$  положительная величина, то и внутренняя энергия положительна. Если  $\vec{v}$  — скорость движения системы как целого, то полная энергия (изолированной) движущейся системы равна

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (20.02)$$

Энергия  $W$  положительна, если корень взять с положительным знаком. Но принципиально можно взять корень с отрицательным знаком; тогда мы получим область отрицательных энергий, отдаленную от положительных энергий разрывом шириной  $2m_0 c^2$  (от  $+m_0 c^2$  до  $-m_0 c^2$ ).

В классической теории переход системы из области  $W \geq m_0 c^2$  в область  $W \leq -m_0 c^2$  невозможен. Поэтому ограничимся рассмотрением только области положительных энергий.

Внутренняя энергия системы  $m_0 c^2$  содержит в себе, кроме энергий покоя частиц, входящих в систему, еще и кинетические энергии относительного движения этих частиц и энергии их взаимодействия друг с другом. Следовательно, внутренняя энергия системы  $m_0 c^2$  не равна сумме энергий покоя  $m_a c^2$  составляющих ее частиц ( $m_a$  — масса покоя  $a$ -той частицы), то есть

$$m_0 c^2 \neq \sum_a m_a c^2.$$

Отсюда

$$m_0 \neq \sum m_a. \quad (20.03)$$

Это значит, что масса покоя не является аддитивной величиной и не существует закона сохранения массы покоя. Сохраняющейся величиной является полная энергия  $W$  и связанная с ней масса  $m = \frac{W}{c^2}$ .

Разность

$$\Delta m_0 = m_0 - \sum_a m_a \quad (20.04)$$

называется дефектом массы системы, а величина

$$\Delta W = \Delta m_0 c^2 = c^2 \left( m_0 - \sum_a m_a \right) \quad (20.05)$$

называется энергией связи системы. Если  $\Delta W > 0$ , то система может самопроизвольно распасться на составляющие ее частицы. Действительно, если частицы, первоначально составляющие систему, удалены друг от друга так, что их взаимная потенциальная энергия равна нулю, то их кинетическая энергия (с учетом энергий покоя) равна

$$W = \sum_a W_a = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}.$$

Каждый член этой суммы положителен. Если совокупность рассматриваемых движущихся частиц первоначально составляла покоящуюся систему с массой  $m_0$ , то по закону сохранения энергии  $m_0 c^2 = W$ , то есть

$$m_0 c^2 = \sum_a W_a = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \quad (20.06)$$

Но это уравнение (при  $v_a \neq 0$ ) может выполняться только в том случае, когда  $m_0 > \sum_a m_a$ , то есть если дефект массы системы  $\Delta m_0$  положителен. Итак, сложная система может самопроизвольно распасться на части только в том случае, если ее дефект массы относительно суммы масс частей, на которые она распадается, положителен. С подобными явлениями мы встречаемся при радиоактивном  $\alpha$ - и  $\beta$ -распаде ядер или при распаде космических  $\pi$ -,  $\mu$ -,  $K$ -мезонов и гиперонов.

Пусть, например, покоящаяся система с массой  $m_0$  распадается на две частицы с массами  $m_a$  и  $m_b$ . Законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид

$$m_0 c^2 = W_a + W_b, \quad \vec{p}_a + \vec{p}_b = 0, \quad (20.07)$$

где  $W_a$ ,  $W_b$  и  $\vec{p}_a$ ,  $\vec{p}_b$  — соответственно энергии и импульсы частиц распада. Из второго равенства  $p_a^2 = p_b^2$ . Так как (см. § 19, задача 1)

$$W^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4, \quad \text{то} \quad W_a^2 - W_b^2 = (m_a^2 - m_b^2) c^4.$$

Решая это уравнение совместно с первым уравнением (20.07), получим

$$W_a = c^2 \frac{m_0^2 + m_a^2 - m_b^2}{2m_0}, \quad W_b = c^2 \frac{m_0^2 - m_a^2 + m_b^2}{2m_0}. \quad (20.08)$$

Таким образом, энергии частиц распада, а следовательно, и их скорости (в системе отсчета, в которой первоначальная система покоилась), будут вполне определенными.

Если дефект массы системы  $\Delta m_0$  по отношению к сумме масс покоя частей отрицателен, то система устойчива и на части самопроизвольно не распадается. В этом случае, чтобы разложить систему

на части, надо сообщить ей энергию, равную или большую чем абсолютная величина энергии связи  $|\Delta m_0| c^2$  системы.

### Задачи

1. Частица массы покоя  $m_0$  распадается на две частицы с массами покоя  $m_a$  и  $m_b$ . Определить скорости продуктов распада.

Решение. Так как  $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , то по (20.08) имеем

$$v_a^2 = c^2 \left( 1 - \frac{m_a^2 c^4}{W_a^2} \right) = c^2 \left[ 1 - \frac{4m_0^2 m_a^2}{(m_0^2 + m_a^2 - m_b^2)^2} \right],$$

$$v_b^2 = c^2 \left[ 1 - \frac{4m_0^2 m_b^2}{(m_0^2 - m_a^2 - m_b^2)^2} \right].$$

2.  $\pi$ -мезон с массой покоя  $m_\pi = 276m_e$  ( $m_e$  — масса электрона) распадается на  $\mu$  мезон с массой  $m_\mu = 216m_e$  и нейтрино с массой покоя, равной нулю. Определить энергии и скорости продуктов распада.

## § 21. Перенос материи при взаимодействии

Рассмотрим заряженную частицу, которая в начальный момент времени  $t=0$  покоилась в рассматриваемой системе отсчета и на которую другие частицы действуют с некоторой силой. Согласно обычной концепции действие силы сводится к изменению количества движения и энергии частицы — происходит передача движения от тела воздействующего телу, испытывающему воздействие. Однако подобная концепция не передает полностью происходящего явления, если учесть, что электромагнитное поле материально и частица имеет заряд. По мере изменения скорости частицы происходят два типа изменений в электромагнитном поле: 1) изменяется электромагнитное поле, непосредственно связанное с частицей, в частности, появляется магнитное поле частицы; 2) возникает поле излучения. По мере увеличения скорости частицы увеличивается энергия и импульс связанного с ней поля, растет электромагнитная масса частицы. Кроме того, поскольку ускорение частицы отлично от нуля, существует поток электромагнитного излучения, то есть поток энергии, импульса, электромагнитной массы.

Возникает вопрос, откуда берется материя, которая заключена в возрастающем поле, связанном с частицей, и испускается в виде электромагнитного излучения. Опираясь на закон сохранения материи (закон М. В. Ломоносова), необходимо допустить, что вся эта материя должна быть подведена к нашему заряду. Мы приходим к новой концепции действия силы: при воздействии тел на заряженную частицу происходит перенос материи от воздействующих тел к частице, а вместе с переносом материи происходит и перенос движения. Это

относится как к действию электромагнитного поля, так и к действию сторонних сил неэлектромагнитного происхождения.

В случае действия на частицу электромагнитного поля, это поле должно изменяться — частично превращаться из поля, связанного с воздействующими телами, в поле, связанное с частицей, и в поле излучения. Когда движение заряда происходит в стационарных полях, подобное превращение поля обычно не рассматривается, так как забывается необходимость поддерживать эти внешние условия стационарными.

Если на частицу действуют сторонние силы, то процесс взаимодействия более сложен. Действительно, опираясь на представления о близкодействии, следует действие сторонней силы связать с наличием некоторого материального стороннего (неэлектромагнитного) поля. В процессе взаимодействия стороннее поле превращается в электромагнитное поле, связанное с частицей, и в поле электромагнитного излучения.

Так как вещество построено из заряженных частиц (электронов и ядер), то все обычно наблюдаемые взаимодействия в веществе сопровождаются переносом и превращением материи.

Очевидно, что новая концепция взаимодействия тел носит универсальный характер. Всякое взаимодействие связано с материальными полями и должно сопровождаться переносом материи и ее превращением из одного вида в другой.

## § 22. Полная система уравнений Максвелла — Лоренца

Электромагнитное поле как вид материи характеризуется системой уравнений Максвелла — Лоренца, которые мы объединили в две группы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v}, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad (22.01)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (22.02)$$

Группа уравнений (22.01) характеризует связь между полем и заряженными частицами, являющимися источниками поля; слева стоят напряженности поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , справа — величины, характеризующие заряженные частицы. Группа уравнений (22.02) характеризует само электромагнитное поле и указывает на отсутствие источников магнитного поля. Обе группы уравнений в совокупности описывают общие свойства материального электрического поля, выражают законы движения и принцип причинности для поля.

Можно показать, что уравнения Максвелла — Лоренца определяют состояние поля в любой момент времени  $t$ , если задано состояние поля в начальный момент времени  $t_0$  и плотности зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  как функции времени и координат (состояние поля задано, если в данный момент определены значения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  во всех точках пространства). Таким образом, уравнения Максвелла — Лоренца выражают принцип причинности для электромагнитного поля.

Однако приведенная выше задача определения поля предполагает, что  $\rho$  и  $\vec{j}$  даны заранее как функции координат и времени. В действительности заряженные частицы движутся под действием электромагнитного поля и сторонних сил.

Электромагнитную силу, действующую на частицу, заряд которой распределен с плотностью  $\rho$ , можно, согласно (15.11), представить в форме

$$\vec{F} = \int_{(V)} \vec{j} dV = \int_{(V)} \rho \left\{ \vec{E} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right\} dV,$$

где интегрирование производится по всему объему частицы. Существенно учесть действие на частицу не только внешнего поля, но и поля, создаваемого самой частицей. Поэтому, полагая  $\vec{E} = \vec{E}^{(a)} + \vec{E}^{(i)}$ ,  $\vec{B} = \vec{B}^{(a)} + \vec{B}^{(i)}$  (значок  $a$  относится к внешнему, а  $i$  — к внутреннему полю), получим

$$\vec{F} = \vec{F}^{(a)} + \vec{F}^{(i)},$$

где

$$\vec{F}^{(a)} = \int_{(V)} \rho \left\{ \vec{E}^{(a)} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(a)} \right] \right\} dV,$$

$$\vec{F}^{(i)} = \int_{(V)} \rho \left\{ \vec{E}^{(i)} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(i)} \right] \right\} dV.$$

Вычисление силы  $\vec{F}^{(i)}$  («силы самодействия») требует более подробных сведений о частице и будет рассмотрено позже. Здесь отметим, что  $\vec{F}^{(i)}$  складывается из двух членов: один, равный  $-\frac{d}{dt}(m_e \vec{v})$  (где  $m_e$  — электромагнитная масса частицы), соответствует некоторой силе инерции; второй — имеет характер силы трения и при  $v \ll c$  равен  $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2}$  (где  $e$  — заряд частицы).

Внешнюю электромагнитную силу для квазитоочечной частицы можно написать в форме (15.10)

$$\vec{F} = e \left\{ \vec{E}^{(a)} + \left[ \frac{\vec{v}}{c}, \vec{B}^{(a)} \right] \right\}, \quad (22.03)$$

поскольку в пределах частицы внешнее поле  $\vec{E}^{(a)}$ ,  $\vec{B}^{(a)}$  слабо меняется и поэтому его можно вынести из-под знака интеграла.

Теперь уравнение движения  $a$ -той частицы можно написать в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{m_a \vec{v}_a}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} = e_a \left\{ \vec{E}_a + \left[ \frac{\vec{v}_a}{c}, \vec{B}_a \right] \right\} + \vec{F}_a^{(i)} + \vec{F}_a^{\text{стр.}}, \quad (22.04)$$

( $a = 1, 2, 3, \dots$ ).

В (22.04)  $m_a$  — масса покоя частицы, включающая электромагнитную массу,  $\vec{F}_a^{(i)}$  — сила самодействия (без силы электромагнитной инерции, которая включена в левую часть),  $\vec{F}_a^{\text{стр.}}$  — сторонняя сила. Значок  $a$  сверху, обозначающий внешнее поле, опущен; значок  $a$  внизу указывает, что поле берется в точке, занимаемой  $a$ -той частицей.

Плотность зарядов и токов системы квазиточечных частиц определяется формулами:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad \vec{j} = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (22.05)$$

Таким образом, полная система уравнений Максвелла — Лоренца, характеризующих движение поля и квазиточечных частиц, включает уравнения (22.01), (22.02), (22.04), (22.05). Для частиц, имеющих конечные размеры, уравнения движения формулируются гораздо сложнее.

Первые интегралы движения полной системы уравнений Максвелла — Лоренца были получены выше. Это интеграл энергии (19.11) и интеграл импульса (19.13). Интеграл момента импульса будет рассмотрен в § 23. Однако обычно мы встречаемся с более частными задачами: а) с задачей определения поля по заданным зарядам и токам и б) с задачей определения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. Эти задачи будут рассмотрены в следующих главах.

### § 23. Закон сохранения момента импульса.

#### Момент импульса электромагнитного поля

В механике частицы из закона импульса вытекает закон сохранения момента импульса. Для электромагнитного поля закон сохранения момента импульса можно получить преобразованием уравнения (15.14), выражающего закон сохранения импульса поля

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{f} = \text{div } {}^{(2)}t. \quad (23.01)$$

Умножая (23.01) векторно на радиус-вектор  $\vec{r}$  элемента объема  $dV$ , имеем

$$\left[ \vec{r}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right] + [\vec{r}, f] = [\vec{r}, \operatorname{div}^{(2)} t]. \quad (23.02)$$

Так как элементы объема  $dV$  неподвижны, то  $\vec{r}$  не зависит от  $t$ ; следовательно,  $\left[ \vec{r}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{r}, \vec{g}]$ . Очевидно, что вектор

$$\vec{l} = [\vec{r}, \vec{g}] \quad (23.03)$$

можно истолковать как вектор плотности момента импульса электромагнитного поля. Тогда

$$\vec{L}_f = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{g}] dV \quad (23.04)$$

есть момент импульса объема  $V$  поля.

Преобразуем правую часть (23.02). Пользуясь симметрией тензора  $^{(2)}t$ ; имеем для  $x$ -овой составляющей

$$\begin{aligned} [\vec{r}, \operatorname{div}^{(2)} t]_x &= y \left( \frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \right) - z \left( \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (yt_{xz} - zt_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (yt_{yz} - zt_{yy}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (yt_{zz} - zt_{yz}) = (\operatorname{div} [\vec{r}, ^{(2)}t])_x. \end{aligned}$$

Произведение  $[\vec{r}, ^{(2)}t]$  можно рассматривать как некоторый асимметричный тензор  $^{(2)}N$  с компонентами

$$\left. \begin{aligned} N_{xx} &= yt_{xz} - zt_{xy}, & N_{xy} &= yt_{yz} - zt_{yy}, & N_{xz} &= yt_{zz} - zt_{zy} \\ N_{yx} &= zt_{xx} - xt_{xz}, & N_{yy} &= zt_{yx} - xt_{yz}, & N_{yz} &= zt_{zx} - xt_{zz} \\ N_{zx} &= xt_{xy} - yt_{xx}, & N_{zy} &= xt_{yy} - yt_{yx}, & N_{zz} &= xt_{zy} - yt_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (23.05)$$

Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — циклическая перестановка индексов  $x, y, z$ , то (23.05) запишется в виде

$$N_{\alpha\lambda} = x_{\beta} t_{\lambda\gamma} - x_{\gamma} t_{\lambda\beta}. \quad (23.06)$$

Введем векторы  $\vec{t}_{\lambda} \equiv (t_{\lambda x}, t_{\lambda y}, t_{\lambda z})$  — плотность потока величины  $g_{\lambda}$  (с обратным знаком). Тогда

$$N_{\alpha\lambda} = [\vec{r}, \vec{t}_{\lambda}]_{\alpha}. \quad (23.07)$$

Теперь можно написать

$$[\vec{r}, \operatorname{div}^{(2)} t] = \operatorname{div}^{(2)} N.$$

Закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{r}, \vec{g}] + [\vec{r}, \vec{f}] = \text{div } {}^{(2)}N. \quad (23.08)$$

Для произвольного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $\sigma$ , пользуясь формулой (15.09), получим

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{g}] dV + \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}] dV = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}N \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (23.09)$$

Так как  $\frac{d}{dt} (\mu \vec{v}) = \vec{f} + \vec{f}^{\text{стр.}}$ , где  $\vec{f}^{\text{стр.}}$  — плотность сторонней силы, а  $\mu$  — плотность массы частиц, то

$$\int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}] dV = \frac{d}{dt} \int_{(V)} [\vec{r}, \mu \vec{v}] dV - \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}^{\text{стр.}}] dV.$$

Здесь

$$\vec{L} = \int_{(V)} [\vec{r}, \mu \vec{v}] dV = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] \quad (23.10)$$

есть момент импульса частиц в объеме  $V$ , а

$$\vec{K}^{\text{стр.}} = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}^{\text{стр.}}] dV \quad (23.11)$$

есть главный момент сторонних сил, действующих в объеме  $V$ .

Уравнение (23.09) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_p) = \vec{K}^{\text{стр.}} + \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}N \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (23.12)$$

Поверхностный интеграл, стоящий в правой части,

$$\vec{K} = \oint_{(\sigma)} {}^{(2)}N \cdot \vec{n} d\sigma \quad (23.13)$$

можно толковать двояко. С одной стороны, его можно рассматривать как главный момент поверхностных электромагнитных сил, действующих на границу  $\sigma$  объема  $V$ . Действительно, момент силы, действующей на единичную площадку с нормалью  $\vec{n}$ , согласно (23.13) есть  ${}^{(2)}N \cdot \vec{n}$ . Его проекция на ось  $x$  в силу (23.07) и (15.08) равна

$$\begin{aligned} ({}^{(2)}N \cdot \vec{n})_x &= N_{xx}n_x + N_{xy}n_y + N_{xz}n_z = [\vec{r}, \vec{t}_x]_x n_x + \\ &+ [\vec{r}, \vec{t}_y]_x n_y + [\vec{r}, \vec{t}_z]_x n_z = [\vec{r}, \vec{t}_x n_x + \vec{t}_y n_y + \vec{t}_z n_z]_x. \end{aligned}$$

Но вектор  $\vec{t}_x n_x + \vec{t}_y n_y + \vec{t}_z n_z = \vec{t}$  есть сила максвелловских натяжений, действующая на единичную площадку с нормалью  $\vec{n}$ . Поэтому

$${}^{(2)}\vec{N} \cdot \vec{n} = [\vec{r}, \vec{t}] \quad (23.14)$$

есть поверхностная плотность момента этих сил, так что

$$\vec{K} = \oint_{(\sigma)} [\vec{r}, \vec{t}] d\sigma \quad (23.15)$$

есть полный момент сил максвелловских натяжений, приложенных к поверхности  $\sigma$  объема  $V$ .

С другой стороны, тензор —  ${}^{(2)}N$  с составляющими

$$-N_{\alpha\lambda} = x_\beta (-t_{\lambda\gamma}) - x_\gamma (-t_{\lambda\beta})$$

можно рассматривать как тензор плотности потока момента электромагнитного импульса, а (23.13) — как поток момента электромагнитного импульса через поверхность  $\sigma$ , взятый со знаком минус.

Пользуясь первым истолкованием величины  $\vec{K}$ , уравнение (23.12) можно формулировать так: изменение в единицу времени полного момента импульса в объеме  $V$ , равного сумме моментов импульса частиц и электромагнитного поля в этом объеме, равно сумме главного момента сторонних сил, действующих на частицы в объеме  $V$ , и главного момента поверхностных сил максвелловских натяжений, действующих на границу объема.

При второй интерпретации  $\vec{K}$  уравнение (23.12) запишем в форме

$$\vec{K}^{\text{стр.}} = \frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_f) + \oint_{(\sigma)} ({}^{(2)}N) \vec{n} d\sigma, \quad (23.16)$$

то есть главный момент сторонних сил идет на изменение полного момента импульса в объеме  $V$  и на поток электромагнитного момента импульса через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем  $V$ . Предполагается, что частицы не пересекают поверхности  $\sigma$  и не переносят через нее момент импульса.

Если сторонних сил нет и поверхность  $\sigma$  охватывает все поле так, что на  $\sigma$   ${}^{(2)}N = 0$  (система замкнутая), то

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} + \vec{L}_f) = 0, \quad \vec{L} + \vec{L}_f = \text{const}, \quad (23.17)$$

то есть сохраняется полный момент импульса, равный сумме моментов импульса частиц и поля. Так как в процессе движения момент импульса поля может превращаться в момент импульса частиц и обратно (происходит качественное изменение момента импульса), то следует говорить о законе сохранения и превращения момента импульса.

## § 24. Исторические замечания

Количественное изучение электромагнитных явлений началось с работ Шарля Огюстена Кулона (1736—1806), который в серии работ, опубликованных в 1784—1789 гг., доложил о закономерностях электрических и магнитных взаимодействий. Еще ранее Ф. У. Эпинус (1724—1802) положил в основу учения об электрических и магнитных явлениях представление о силах дальнего действия. Сходство закона Кулона с законом тяготения усилило позиции сторонников дальнего действия и до работ М. Фарадея, а также и некоторое время после них математическая теория электрических и магнитных явлений строилась целиком на основе этого представления.

В 1791 году Луиджи Гальвани (1737—1798) открыл электрический ток. Правильное толкование опытов Гальвани дал в 1792 году Александр Вольта (1745—1827).

В 1820 году Ганс Христиан Эрстед (1777—1851) открыл действие электрического тока на магнитную стрелку — открыл магнитное поле электрического тока. В том же году Жан-Батист Био (1774—1862) и Феликс Савар (1791—1841) с помощью Пьера Симона Лапласа (1749—1827) установили закон силы, с которой ток действует на магнитный полюс. Однако только в 1826 году Колладон показал, что эта сила пропорциональна силе электрического тока. Таким образом, закон Био — Савара — Лапласа (задача 2, § 7) в окончательном виде получен в 1826 году (при этом понятие о напряженности поля еще не существовало, вместо  $\vec{B}$  давалась сила  $\vec{F} = e_m \vec{B}$ , с которой поле действует на магнитный полюс  $e_m$ ).

В том же 1820 году несколько раньше Био и Савара, Андре-Мари Ампер (1775—1836) экспериментально установил закон взаимодействия токов. Ампер исследовал взаимодействие замкнутых линейных токов и, опираясь на принцип суперпозиции сил, пытался установить закон взаимодействия двух элементов тока. При этом он исходил из предположения, что силы взаимодействия элементов тока должны удовлетворять третьему закону Ньютона, поэтому полученное им выражение отличается от результатов, приведенных в задаче 4, § 7. Формулы задачи 4, § 7 были установлены в 1844 году Германом Грассманом (1809—1877). Отметим, что выражения Ампера и Грассмана отличаются на полный дифференциал некоторой функции и поэтому при вычислении взаимодействия двух замкнутых токов дают один и тот же результат (подробнее см. в книге: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, М., 1954).

Идею о близком действии впервые высказал Михаил Фарадей (1791—1867). В период с 1831 по 1855 год он опубликовал свои «Экспериментальные исследования по электричеству»<sup>1</sup>. В них он неоднократно возвращается к идее близкого действия, вместе с которой в науку вошло представление о поле. Но в этот период поле рассматривалось как некоторое свойство специального материального носителя, заполняющего все пространство, — «электромагнитного эфира». Представления Фарадея о близком действии и изображение поля силовыми линиями не встретили первоначально сочувствия у современников.

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Направление э. д. с. индукции определяется законом, установленным Эмилем Христиановичем Ленцом (1804—1865) в 1833 году<sup>2</sup>. На работы Ленца опираясь Франц Нейман (1798—1895), установивший в 1845 году закон электромагнитной индукции в форме (12.01).

Следует отметить, что Нейман исходил из представления о дальнем действии и опирался на формулу Ампера для взаимодействия токов. Другой

<sup>1</sup> М. Фарадей, Экспериментальные исследования по электричеству, т. 1, 2 и 3, изд. АН СССР, 1947—1959.

<sup>2</sup> Э. Х. Ленц, Избранные труды, изд. АН СССР 1950.

вывод формулы (12.01), основанный на законе сохранения энергии, дал Герман Гельмгольц (1821—1894) в мемуаре «О сохранении силы»<sup>1</sup>, вышедшем в 1847 году и сыгравшем большую роль в установлении закона сохранения энергии. В нем было показано значение закона сохранения энергии в области электромагнитных явлений.

Идеи Фарадея о близкодействии были обобщены и развиты в стройную теорию электромагнитного поля в работах Джемса Клерка Максвелла<sup>2</sup>. В работе «О фарадеевых силовых линиях» (1855—1856 гг.) Максвелл доказывает, что применение идеи о близкодействии в электростатике и магнетостатике приводит к результатам, тождественным результатам теорий, основанных на дальноедействии, и следовательно, в этой области оба метода равноправны.

В работах 1861—1862 годов под общим названием «О физических силовых линиях» Максвелл пытается дать механическую картину среды, носителя электромагнитного поля (эфира). В частности, он ставит себе задачей свести силы дальноедействия к напряжениям и давлениям в поле. Здесь впервые появляется тензор максвелловских напряжений, рассмотренный нами (для поля в вакууме) в § 15.

Несмотря на большие усилия, Максвеллу не удалось далеко продвинуться с конкретными механическими представлениями о поле в эфире. Поэтому он обратился к чисто феноменологической точке зрения, согласно которой механика среды, заполняющей пространство, не рассматривается.

Среда (эфир) служит носителем векторов поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , а свойства поля характеризуются уравнениями, установленными из опыта. При этом Максвелл предполагает, что возможно механическое истолкование феноменологических уравнений поля на основе движений упругого эфира. На этой основе он в 1864 году развил (в работе «Динамическая теория электромагнитного поля») учение об электромагнитном поле. Поле в веществе Максвелл характеризует четырьмя векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ . Он устанавливает систему уравнений поля (в несколько отличной от современной форме), вводит представление о плотности энергии поля. Кульминационным пунктом теории явилось предсказание существования электромагнитных волн и построение электромагнитной теории света.

Работы Максвелла по электромагнитному полю завершаются «Трактатом об электричестве и магнетизме» (2 тома, 1873), в котором подведены итоги развития теории. Для представлений Максвелла характерно перенесение электромагнитных явлений в промежуточную среду. Электрические заряды в его теории перестают самостоятельно существовать — они являются лишь особыми точками электрического поля, из которых выходят или в которые сходятся силовые линии.

Несмотря на отсутствие непосредственных экспериментальных подтверждений теории Максвелла, начало 80-х годов XIX в. ознаменовалось дальнейшим развитием этой теории. В 1874 году появилась диссертация Н. А. Умова «Уравнения движения энергии в телах». В ней дана наиболее общая формулировка закона сохранения энергии и проводится идея о движении энергии. При этом вводится вектор плотности потока энергии  $\vec{S}$  (см. § 14). Идеи Умова оказали серьезное влияние на развитие учения об электромагнитном поле. Опираясь на эти идеи, Джон Генри Пойнтинг (1852—1914) в работе «О переносе энергии в электромагнитном поле» (1884) дал весьма полную формулировку закона сохранения энергии для поля. В то же время к тем же результатам (но в более общей форме) пришел О. Хивисайд.

Окончательное утверждение теории Максвелла связано с экспериментальным открытием в 1887—1888 гг. Генрихом Герцем (1857—1894) электро-

<sup>1</sup> Г. Гельмгольц, О сохранении силы, Госиздат, М., 1922.

<sup>2</sup> Дж. Клерк Максвелл, Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, ГИТТЛ, М., 1952.

магнитных волн <sup>1</sup>. В работе Герца «Силы электрических колебаний, рассматриваемые с точки зрения теории Максвелла» (1889) впервые система уравнений Максвелла для вакуума была написана в современном виде. Герцем заложен новый взгляд на теорию поля, согласно которому уравнения Максвелла выражают физические свойства электромагнитного поля, независимо от каких-либо механических представлений об эфире.

В конце XIX в. возникает и развивается электронная теория. Законы электролиза, открытые М. Фарадеем еще в 1834 году, не укладывались в рамки теории Максвелла. В 1881 году Г. Гельмгольц и Дж. Стони (1826—1911) показали, что законы электролиза непосредственно приводят к выводу об атомистическом строении электрического заряда. В 1895 году Генрих Антон Лоренц (1853—1928) в работе «Опыт теории электрических и оптических свойств движущихся тел» детально разработал новую теорию, являющуюся синтезом максвелловского учения об электромагнитном поле, и представления о реально существующих заряженных частицах (электронах). Электронная теория сыграла большую роль в понимании электромагнитных свойств веществ и подготовила почву для теории относительности Эйнштейна.

Теория Лоренца опиралась на представление о том, что электромагнитное поле есть свойство заполняющего все пространство неподвижного (не принимающего участия в движении тел) электромагнитного эфира, играющего роль абсолютной системы координат. Электромагнитное поле (характеризуемое векторами напряженности) создается в эфире движущимися заряженными частицами (электронами) и описывается уравнениями (22.01) и (22.02). Поле действует на электрон с силой, плотность которой определяется формулой Лоренца (15.11). Проблему динамики электрона разрабатывают Лоренц, Макс Абрагам (1875—1922) и др. Итоги исследований Лоренц опубликовал в 1909 году в монографии «Теория электронов и ее применения к явлениям света и теплового излучения» <sup>2</sup>.

Электронная теория Лоренца встретила с серьезными затруднениями при попытке построить электродинамику движущихся тел. Эти затруднения были разрешены Альбертом Эйнштейном (1879—1955) в его специальной теории относительности <sup>3</sup> (1905). Эйнштейн показал, что уравнения (22.01) и (22.02) справедливы в любой инерциальной системе координат и скорость распространения поля инвариантна. Поэтому Эйнштейн отказался от представлений об эфире — носителе поля. После работ Эйнштейна постепенно создавалось современное представление об электромагнитном поле как самостоятельном виде материи, не нуждающемся в особом носителе. На материальность поля указывал в 1909 году В. И. Ленин в работе «Материализм и эмпириокритицизм». Дальнейшие открытия, в частности рождение пар электрон-позитрон при поглощении света, заставили физиков признать материальность поля. Существенную роль в формулировке и пропаганде этого представления о поле сыграл академик С. И. Вавилов.

<sup>1</sup> H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der Elektrischen Kraft, Leipzig, 1892. См. также сборник «50 лет волн Герца», изд. АН СССР, М. — Л., 1938.

<sup>2</sup> Г. А. Лоренц, Теория электронов, ГТТИ, М. — Л., 1934.

<sup>3</sup> А. Эйнштейн, К электродинамике движущихся тел. Русский перевод в сборнике «Принцип относительности», ОНТИ, 1935.

## ГЛАВА II

### СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

#### § 25. Статическое электрическое и стационарное магнитное поля

Уравнения Максвелла — Лоренца характеризуют поля, меняющиеся с течением времени. Но мы рассмотрим прежде всего статические и стационарные поля — поля, создаваемые такими распределениями зарядов и токов, которые не меняются с течением времени. В этом случае плотность заряда, плотность тока, а также напряженности поля не зависят от времени. Поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (25.01)$$

и уравнения Максвелла — Лоренца (22.01) и (22.02) распадаются на две независимые группы:

уравнения электростатического поля

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (25.02)$$

и уравнения для стационарного магнитного поля

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (25.03)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (25.04)$$

Магнитное поле называется статическим, если отсутствует конвекционный ток ( $\vec{j} = \rho\vec{v} = 0$ ). Поле называется стационарным, если существуют неменяющиеся с течением времени потоки. Как видно из (25.04), стационарный ток не имеет источников, линии стационарного тока должны быть замкнутыми.

Из уравнений (25.02) и (25.03) видно, что электростатическое поле — потенциальное, а магнитное поле — вихревое. Источниками электростатического поля являются неподвижные заряды, а магнитное поле не имеет источников и создается токами.

## § 26. Электростатический потенциал

Из уравнения электростатического поля  $\text{rot } \vec{E} = 0$  следует, что электростатическое поле имеет потенциальный характер, то есть

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (26.01)$$

Скалярная функция координат  $\varphi$  называется электростатическим потенциалом. Введение электростатического потенциала упрощает вычисление напряженности поля. Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциалы двух или нескольких зарядов складываются алгебраически. Если  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  — напряженности поля, создаваемые двумя зарядами, то согласно (26.01)  $\vec{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1$ ,  $\vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — соответственно потенциалы, создаваемые зарядами. Тогда полное поле

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2) = -\text{grad } \varphi,$$

то есть определяется потенциалом  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Электростатический потенциал имеет простой физический смысл: работа, которую производит электростатическое поле при переносе единичного заряда из одной точки во вторую, равна разности потенциалов начальной и конечной точек пути и, следовательно, не зависит от формы пути. Действительно, замечая, что составляющая градиента по направлению  $l$  равна  $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ , имеем

$$A'_{1,2} = \int_1^2 E_l dl = - \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (26.02)$$

Работа поля при передвижении заряда  $e$  будет в  $e$  раз больше

$$A_{12} = e A'_{12} = e (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (26.03)$$

Очевидно, что работа передвижения заряда в электростатическом поле по замкнутому контуру равна нулю.

С помощью (26.02) можно установить единицу разности потенциалов: разность потенциалов двух точек поля равна абсолютной единице (СГС), если работа переноса заряда в одну абсолютную единицу равна одному эргу. Практическая единица разности потенциалов (вольт) в 300 раз меньше абсолютной.

Предполагая, что заряды (источники поля) занимают конечную область пространства, введем условие нормировки потенциала: потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю

$$\varphi|_{r=\infty} = 0. \quad (26.04)$$

Тогда из (26.02) следует, что потенциал данной точки поля численно равен работе, которую производит поле при передвижении единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность.

Для характеристики распределения потенциала введем эквипотенциальные поверхности, то есть поверхности равного потенциала

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 = \text{const.} \quad (26.05)$$

Так как проекция напряженности поля на направление  $l$ , согласно (26.01), равна

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad (26.06)$$

то проекция напряженности поля на любое направление, касательное к эквипотенциальной поверхности, равна нулю. Отсюда следует, что вектор напряженности электростатического поля в каждой точке поля перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, и направлен в сторону убывания потенциала. Обозначая через  $\vec{n}$  единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности, направленный в сторону возрастания потенциала, можно (26.01) переписать в форме

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n}, \quad (26.07)$$

явно указывающей направление вектора напряженности поля.

### Задачи

1. Определить потенциал, создаваемый точечным зарядом  $e$ .

Решение. Согласно (1.05) напряженность поля точечного заряда равна  $\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}_0$ , если заряд поместить в начале координат. Так как работа переноса заряда не зависит от формы пути, то, перенося единичный положительный заряд из данной точки  $\vec{r}$  в бесконечность вдоль радиус-вектора, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{e}{r^2} dr = \frac{e}{r}.$$

2. Определить потенциал системы точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$ , находящихся в точках  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_a, \dots$  соответственно.

Решение. Обозначая через  $R_a = |\vec{r} - \vec{r}_a|$  расстояние точки  $A$  от заряда  $e_a$ , получим согласно результатам задачи 1 потенциал этого заряда в точке  $A$

$$\varphi_a(\vec{r}) = \frac{e_a}{R_a}.$$

Согласно принципу наложения потенциал, создаваемый в точке  $A$  всеми зарядами, равен

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \varphi_a(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{R_a}.$$

## § 27. Уравнение Пуассона. Определение потенциала по заданному распределению заряда

Потенциал  $\varphi$ , создаваемый распределением заряда  $\rho = \rho(\vec{r})$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению, называемому уравнением Пуассона. Подставляя (26.01) в первое уравнение (25.02) и замечая, что  $\text{div grad} = \nabla^2$  есть операция Лапласа, получим

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho. \quad (27.01)$$

Это уравнение, выведенное впервые Пуассоном, однозначно определяет потенциал  $\varphi$ , если учесть естественное граничное условие (26.04). Частный случай уравнения Пуассона при  $\rho = 0$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (27.02)$$

называется уравнением Лапласа.

Будем искать решение уравнения Пуассона (27.01) в форме

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'. \quad (27.03)$$

Здесь  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки  $A$ , в которой наблюдается поле,  $\vec{r}'$  — радиус-вектор элемента  $dV'$  объема заряда,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  — так называемая функция Грина. Интегрирование ведется по части объема заряда, для которой определяется потенциал. Если надо определить потенциал всего заряда, то интеграл берется по всему объему заряда. Тогда, поскольку вне объема заряда  $\rho = 0$ , интеграл можно распространить на все бесконечное пространство. Задача сводится к определению функции Грина. Применяя к (27.03) оператор Лапласа  $\nabla^2$  и пользуясь (27.01), получим

$$\int \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = -4\pi\rho(\vec{r}),$$

где дифференцирование  $G$  производится по аргументу  $\vec{r}$ , а интегрирование по  $\vec{r}'$  — по всему бесконечному пространству. Последнее уравнение должно выполняться для любой достаточно гладкой функции  $\rho(\vec{r})$ . Сравнивая его с определением (4.06)  $\delta$ -функции Дирака, получим уравнение для функции Грина

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (27.04)$$

Таким образом, функция Грина удовлетворяет уравнению Пуассона для потенциала, создаваемого единичным положительным точечным зарядом.

Чтобы решить уравнение (27.04), воспользуемся тем обстоятельством, что функция  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  сферически симметрична и потенциал точечного заряда должен быть также сферически симметричным. Вводя

сферическую систему координат с началом в точке  $\vec{r}'$  и обозначив  $|\vec{r} - \vec{r}'| = R$ , приведем (27.04) для всех точек вне точечного заряда к виду

$$\nabla^2 G = \frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG) = 0 \quad (R > 0).$$

Общий интеграл этого уравнения равен  $RG = C_1 R + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Введем нормировочное условие — потребуем, чтобы в бесконечности  $G$  исчезала. Тогда  $C_1 = 0$  и

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{C_2}{R}.$$

Таким образом, функция Грина есть симметричная функция от  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ , обращающаяся в бесконечность в точке  $\vec{r} = \vec{r}'$ , занимаемой точечным зарядом. Коэффициент  $C_2$  определяется из условия, что электрическое поле, определяемое потенциалом  $G$ ,

$$E = -\frac{dG}{dR} = \frac{C_2}{R^2},$$

должно совпадать с полем  $\frac{1}{R^2}$  единичного точечного заряда. Поэтому  $C_2 = 1$  и функция Грина принимает вид

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (27.05)$$

Следовательно, электростатический потенциал произвольно распределенного заряда равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (27.06)$$

Это выражение можно истолковать согласно принципу суперпозиции потенциалов как алгебраическую сумму потенциалов  $\frac{de}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ , создаваемых в данной точке всеми бесконечно малыми элементами  $de = \rho(\vec{r}') dV'$  заряда.

Функция Грина (27.05) обращается в бесконечность при  $\vec{r} = \vec{r}'$ . Поэтому возникает вопрос о применимости формулы (27.06) в том случае, когда точка наблюдения  $A(\vec{r})$  лежит внутри объема  $V$ , занятого зарядом, и при интегрировании  $\vec{r}'$  принимает значение  $\vec{r}$ . Докажем, что формула (27.06) остается применимой и в этом случае.

Выберем точку  $A$  за начало сферической системы координат  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $\vartheta, \alpha$ . Тогда  $dV' = R^2 \sin \vartheta dR d\vartheta d\alpha$  и  $\rho(\vec{r}') = \rho(R, \vartheta, \alpha)$ .

Потенциал в точке  $A$  равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{R} = \int \int \int_{(V)} \rho(R, \vartheta, \alpha) R dR \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.$$

Этот интеграл сходится, если плотность заряда  $\rho$  конечна во всем объеме  $V$ . Поэтому (27.06) определяет потенциал распределенного с плотностью  $\rho$  заряда в любой точке  $A$  пространства, как внешней, так и внутренней.

Если имеется система точечных зарядов, то плотность заряда определяется формулой (4.09)

$$\rho(\vec{r}') = \sum_a e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a),$$

подстановка которой в (27.06) дает потенциал системы точечных зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (27.07)$$

В частности, потенциал одного точечного заряда  $e$ , сосредоточенного в начале координат, равен

$$\varphi(\vec{r}) = eG(\vec{r}, 0) = \frac{e}{r}. \quad (27.08)$$

Из (27.08) видно, что для одного точечного заряда эквипотенциальные поверхности представляют собой семейство концентрических сферических поверхностей  $r = \frac{e}{\varphi} = \text{const}$ . Линии вектора напряженности  $E$  имеют вид прямолинейных лучей, расходящихся из заряда, и в каждой точке перпендикулярны к соответствующей эквипотенциальной поверхности (рис. 1).

Беря градиент от  $\varphi$  (27.06), получаем общее выражение для напряженности электростатического поля объемно распределенного заряда

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (27.09)$$

### Задачи

1. Определить с помощью уравнения Пуассона потенциал и напряженность поля внутри и вне шара радиуса  $a$ , равномерно заряженного с плотностью  $\rho$ .

Решение. Потенциал равномерно заряженного шара сферически симметричен и, следовательно, должен зависеть только от расстояния  $r$  от центра шара. Выбирая сферическую систему координат с началом в центре шара, получим уравнение Пуассона для области внутри шара ( $r \leq a$ )

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi}{dr^2} = -4\pi\rho.$$

Для области вне шара ( $r \geq a$ )

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi_a}{dr^2} = 0.$$

Из последнего уравнения в связи с граничным условием (16.04) следует  $\varphi_a = \frac{C_1}{r}$ , а из первого —

$$\varphi_i = -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 + C_3 + \frac{C_4}{r}.$$

Потенциал в центре шара ( $r=0$ ) должен быть конечен. Поэтому следует положить  $C_4 = 0$ . На границе шара  $\varphi$  и  $\frac{d\varphi}{dr}$  должны быть непрерывны (в противном случае на границе шара поле или  $\rho$  принимали бы бесконечное значение), то есть

$$\text{при } r = a, \varphi_i = \varphi_a, \frac{d\varphi_i}{dr} = \frac{d\varphi_a}{dr};$$

отсюда получаем систему двух уравнений для определения  $C_1$  и  $C_3$ :

$$-\frac{2}{3} \pi \rho a^2 + C_3 = \frac{C_1}{a}, \quad -\frac{4}{3} \pi \rho a = -\frac{C_1}{a^2}.$$

Окончательно для потенциала поля имеем

$$\varphi_i = -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 + 2\pi \rho a^2, \quad \varphi_a = \frac{e}{r}, \quad e = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho.$$

Напряженность поля (сравните задачу 2, § 3) равна

$$\vec{E}_i = +\frac{4}{3} \pi \rho \vec{r} \quad (r \leq a), \quad \vec{E}_a = \frac{e}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (r \geq a).$$

2. Определить потенциал заряда, распределенного с некоторой поверхностной плотностью  $\eta(\vec{r})$  по поверхности  $\sigma$ .

Решение. На элементе поверхности  $d\sigma'$  находится элемент заряда  $de' = \eta(\vec{r}') d\sigma'$ , который в точке  $\vec{r}$  на расстоянии  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  создает потенциал  $d\varphi(\vec{r}) = \frac{de'}{R}$ . Складывая потенциалы, создаваемые всеми элементами заряда, получим

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{de'}{R} = \int \frac{\eta(\vec{r}') d\sigma'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Тот же результат можно получить из (27.06), если учесть, что объемная плотность поверхностно распределенного заряда может быть написана в форме  $\rho = \eta(\vec{r}') \delta(n')$  ( $n'$  — расстояние по нормали от поверхности), а элемент объема  $dV' = d\sigma' \cdot dn'$ .

3. Диск радиуса  $a$  равномерно заряжен по поверхности с плотностью  $\eta$ . Определить поле на оси диска на расстоянии  $x$ .

Решение. В качестве элемента площади берем кольцо  $d\sigma = 2\pi r dr$  (рис. 14). Следовательно,

$$\varphi' = 2\pi\eta \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{1/2}} = 2\pi\eta (\sqrt{a^2 + x^2} - |x|).$$

Поле по нормали равно

$$E'_n = E'_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + 2\pi\eta.$$

По другую сторону плоскости диска  $x < 0$  и  $|x| = -x$ , так что

$$\varphi'' = 2\pi\eta(\sqrt{a^2 + x^2} + x), \quad E''_n = E''_x = -\frac{d\varphi''}{dx} = -\frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 2\pi\eta.$$

Отсюда следует, что при переходе через заряженную поверхность потенциал меняется непрерывно, а нормальная составляющая напряженности поля терпит разрыв, пропорциональный поверхностной плотности заряда

$$\Delta E_n = (E'_n - E''_n)_{x=0} = 4\pi\eta.$$

Если радиус диска неограниченно увеличивать, то диск превращается в равномерно заряженную плоскость. Потенциал поля при этом неограниченно возрастает (так как при  $a \rightarrow \infty$  полный заряд  $e = \pi a^2 \eta \rightarrow \infty$ ), но напряженность поля остается конечной, равной  $E = E_n = \pm 2\pi\eta$ .

4. Определить потенциал и эквипотенциальные поверхности заряда  $e$ , равномерно распределенного вдоль отрезка  $2c$  (рис. 15) с линейной плотностью  $q = \frac{e}{2c}$ .

Решение. Вследствие осевой симметрии достаточно рассмотреть поле в плоскости, проходящей через ось  $x$  (на которой лежит отрезок  $2c$ ).

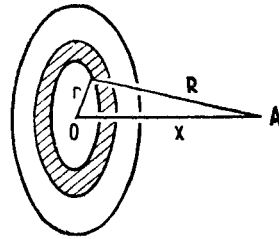


Рис. 14.

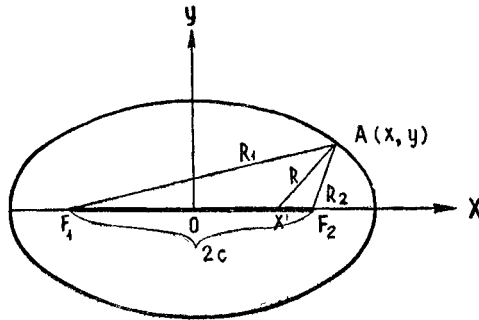


Рис. 15.

Выберем начало координат  $O$  в середине отрезка. Для потенциала в точке  $A(x, y)$  имеем

$$\varphi = \frac{e}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{dx'}{R} = \frac{e}{2c} \int_{-c}^{+c} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}.$$

Интеграл приводится к элементарному подстановкой Эйлера  $\xi = x - x' + \sqrt{(x-x')^2 + y^2}$  и дает

$$\varphi = \frac{e}{2c} \ln \frac{x+c + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x-c + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}.$$

Линии равного потенциала в плоскости определяются уравнением

$$\frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=k=\text{const.}$$

Докажем, что это уравнение определяет семейство эллипсов с фокусами в точках  $F_1$  и  $F_2$  на концах отрезка  $2c$ . Обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  расстояния точки  $A$  от концов  $F_1$  и  $F_2$  отрезка, а через  $x_1$  и  $x_2$  — проекции  $R_1$  и  $R_2$  на ось  $x$ . Тогда

$$k = \frac{x_1 + R_1}{x_2 + R_2} = \frac{R_2 - x_2}{R_1 - x_1}.$$

Последнее равенство вытекает из того, что  $y^2 = R_1^2 - x_1^2 = R_2^2 - x_2^2$  или  $(R_1 + x_1)(R_1 - x_1) = (R_2 + x_2)(R_2 - x_2)$ . Имеем два уравнения:

$$R_1 + x_1 = kR_2 + kx_2, \quad R_2 - x_2 = kR_1 - kx_1.$$

Складывая эти уравнения и замечая, что  $x_1 - x_2 = 2c$ , получим

$$R_1 + R_2 = 2c \frac{k+1}{k-1} = 2a.$$

Следовательно, точки  $\varphi = \frac{e}{2c} \ln k = \text{const}$  лежат на эллипсе с большой полуосью  $a$  и линейным эксцентриситетом  $e$ . Из осевой симметрии следует, что эквипотенциальные поверхности суть вытянутые вдоль оси  $x$  конфокальные эллипсоиды вращения.

Потенциал в точке  $A(x, y, z)$  равен

$$\varphi = \frac{e}{2c} \ln \frac{x+c+\sqrt{(x+c)^2+y^2+z^2}}{x-c+\sqrt{(x-c)^2+y^2+z^2}}.$$

Легко видеть, что линии вектора  $E$  расположены в меридиональных плоскостях, проходящих через ось вращения  $x_1$ , и являются гиперболами с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .

5. Доказать, что в задаче 4 при  $c \rightarrow 0$  ( $e = \text{const}$ ) потенциал переходит в потенциал точечного заряда, а при  $c \rightarrow \infty$  (но  $q = \frac{e}{2c} = \text{const}$ ) — в потенциал бесконечной равномерно заряженной прямой (с точностью до бесконечной постоянной).

6. Доказать, что формула (27.09) применима для вычисления напряженности поля в точке  $A(\vec{r})$ , лежащей внутри области, занятой объемным зарядом.

(Решение подобно тому, которое дано в тексте параграфа).

## § 28. Поле на больших расстояниях от системы зарядов. Мультипольные потенциалы

Выражение (27.06) позволяет исследовать зависимость потенциала от координат точки наблюдения, если рассматривать поле на большом расстоянии от заряда (на расстоянии большом по сравнению с размерами  $a$  области, занятой зарядом).

Выберем начало координат внутри области, занятой зарядом. Пусть  $\vec{r}'$  — радиус-вектор элемента объема  $dV'$  заряда, а  $\vec{r}$  — радиус-

вектор точки наблюдения  $A$ . Согласно (27.06) потенциал в точке  $A$  равен

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (28.01)$$

При больших  $r$  ( $r \gg a \gg r'$ ) функцию Грина можно разложить в ряд Тейлора по степеням координат  $x'_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}') &= G(\vec{r}) - \sum_\alpha x'_\alpha \frac{\partial G(\vec{r})}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta x'_\alpha x'_\beta \frac{\partial^2 G(\vec{r})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \\ &\dots = G(\vec{r}) - (\vec{r}' \nabla) G(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{r}' \nabla)(\vec{r}' \nabla) G(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (28.02)$$

Подставляя (28.02) в (28.01) и пользуясь тем, что  $G(\vec{r}) = \frac{1}{r}$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' - \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \int x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}') dV' \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} + \dots = \\ &= \varphi^0(\vec{r}) + \varphi^{(1)}(\vec{r}) + \varphi^{(2)}(\vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (28.03)$$

Разложение (28.03) называется разложением по мультипольным потенциалам. Первый член можно написать в форме

$$\varphi^0(\vec{r}) = \frac{e}{r}, \quad e = \int \rho dV', \quad (28.04)$$

где  $e$  — полный заряд системы (распределения). Таким образом,  $\varphi^0$  соответствует потенциалу точечного заряда („полюса“), равного полному заряду системы и расположенного в начале координат. Следующие члены разложения носят названия:  $\varphi^{(1)}$  — дипольный потенциал,  $\varphi^{(2)}$  — квадрупольный потенциал и вообще  $\varphi^{(n)}$  — мультипольный потенциал.

Потенциал  $\varphi^{(n)}$ , как видно из (28.03), содержит производные от  $G = \frac{1}{r}$  только порядка  $n$  и поэтому пропорционален  $\frac{1}{r^{n+1}}$ . Это значит, что зависимость потенциала от расстояния будет определяться в основном первым мультипольным потенциалом, не обращающимся в нуль. В зависимости от того, какой из потенциалов первый не обращается в нуль, система называется заряженной (ионом), диполем, квадруполем и т. д.

Если система не нейтральная (например, ионизированный атом или молекулярный ион), то на больших расстояниях потенциал будет

определяться членом  $\varphi^{(1)}$ . Если система нейтральная (атом или молекула), то  $e=0$  и разложение будет начинаться по крайней мере с  $\varphi^{(1)}$ , то есть потенциал будет убывать с расстоянием по крайней мере как  $\frac{1}{r^2}$ . Какой из потенциалов будет первым, не обращающимся в нуль, зависит от распределения заряда в системе.

### § 29. Потенциал и напряженность поля диполя

Дипольный потенциал согласно (28.03) определяется формулой

$$\varphi^{(1)}(\vec{r}) = -\vec{p} \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3}, \quad (29.01)$$

где вектор

$$\vec{p} = \int_{(V)} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (29.02)$$

называется дипольным моментом или моментом первого порядка системы зарядов.

Если система нейтральная ( $e=0$ ), то дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Переносим начало координат в точку  $O'$  с радиус-вектором  $\vec{r}_0$ , получим новый радиус-вектор заряда  $\vec{r}'' = \vec{r}' - \vec{r}_0$  и новый дипольный момент

$$\vec{p}' = \int \vec{r}'' \rho dV'' = \int \vec{r}' \rho dV' - \vec{r}_0 \int \rho dV' = \int \vec{r}' \rho dV' = \vec{p},$$

так как

$$e = \int \rho dV' = 0.$$

Если имеется система точечных зарядов  $\rho(\vec{r}') = \sum_a e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)$ ,

где  $\vec{r}_a$  — радиус-вектор заряда  $e_a$ , то

$$\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a. \quad (29.03)$$

Простейшая нейтральная система, имеющая момент 1-го порядка, состоит, очевидно, из двух зарядов, равных по величине, но противоположных по знаку ( $e' = +e$ ,  $e_2 = -e$ ). Для нее

$$\vec{p} = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = e\vec{r}_{21}, \quad (29.04)$$

то есть момент равен произведению положительного заряда на радиус-вектор положительного заряда относительно отрицательного. Отсюда и происходит название „дипольный момент“.

Напряженность поля диполя равна

$$\vec{E} = -\text{grad} \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \quad (29.05)$$

(так как  $\nabla(\vec{p}\vec{r}) = \vec{p}$  и  $\nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$ ). Таким образом, напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

Чтобы наглядно представить поле диполя, начертим линии вектора  $E$ . Из (29.05) видно, что поле диполя обладает осевой симметрией. Ось симметрии направлена по моменту  $\vec{p}$ . Поэтому достаточно рассмотреть поле в какой-либо плоскости, проходящей через эту ось.

Введем в плоскости полярные координаты  $r, \vartheta$  ( $\vartheta$  — угол, отсчитанный от направления  $\vec{p}$  и меняющийся в пределах от 0 до  $\pi$ ). Тогда из (29.05)

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}. \quad (29.06)$$

Дифференциальное уравнение силовой линии согласно (1.06) имеет вид

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta} \quad \text{или} \quad \frac{dr}{2 \cos \vartheta} = \frac{r d\vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Отсюда

$$r = C \cos^2 \vartheta,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Меняя  $C$ , получим семейство силовых линий диполя, изображенное на рисунке 16.

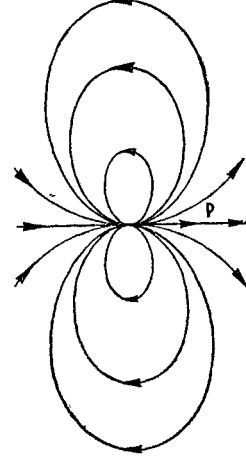


Рис. 16.

### § 30. Потенциал квадруполь

Если полный заряд системы и ее дипольный момент равны нулю, то разложение (28.03) начинается с члена

$$\varphi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \int x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}') dV' \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}. \quad (30.01)$$

Этот потенциал называется квадрупольным. Название происходит от того, что простейшей системой, для которой полный заряд и

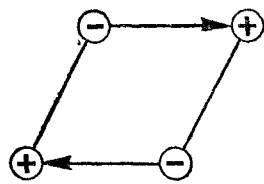


Рис. 17.

дипольный момент равны нулю, но  $\varphi \neq 0$ , является система из двух равных антипараллельных диполей, заряды которых расположены по углам параллелограмма (рис. 17). Квадрупольный потенциал зависит от шести величин вида

$$\int x'_\alpha x'_\beta \rho(\vec{r}') dV',$$

образующих симметричный тензор 2-го ранга. Этот тензор называется квадрупольным моментом системы. Можно показать, что квадрупольный момент имеет только пять независимых компонент.

Определим компоненты квадрупольного момента формулами

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} = \int \rho(\vec{r}') (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) dV'. \quad (30.02)$$

Сумма его диагональных элементов равна нулю

$$\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} = 0, \quad (30.03)$$

поэтому независимых компонент только пять.

Квадрупольный потенциал можно написать в форме

$$\varphi^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{6} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \cdot \frac{1}{r}, \quad (30.04)$$

что отличается от (30.01) членом, обращающимся в нуль.

### § 31. Энергия системы зарядов

Энергию системы зарядов можно определить, исходя из представления об энергии поля. Энергия поля системы зарядов, согласно (14.01) и (14.05) (магнитное поле отсутствует), равна

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad (31.01)$$

где интегрирование производится по всему полю, то есть по бесконечному пространству. Если система состоит из двух частей 1 и 2, создающих в данной точке напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ , то  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  и энергия

$$W_e = W_1 + W_2 + W_{12}, \quad (31.02)$$

где

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 dV, \quad W_2 = \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 dV, \quad W_{12} = U = \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV. \quad (31.03)$$

Предполагается, что части 1 и 2 не деформируемы и поле каждой из них не меняется от наличия другого заряда. Энергии  $W_1$  и  $W_2$  зависят только от свойств частей 1 и 2 и называются собственными энергиями этих частей. Энергия  $W_{12}$  зависит от обеих частей и называется их взаимной энергией. В отличие от собственной энергии, которая, очевидно, всегда положительна, взаимная энергия может быть отрицательной, так как  $\vec{E}_1 \vec{E}_2 \geq 0$ .

Энергия  $W_e$  есть собственная энергия всей системы зарядов. Из (31.02) видно, что собственная энергия системы складывается из собственных энергий ее частей и их взаимной энергии. Взаимная энергия должна зависеть от взаимного расположения частей системы и поэтому является их взаимной потенциальной энергией.

Приведем (31.01) к виду, явно содержащему заряды. Подставляя  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , получим

$$W_e = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \text{grad } \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div } \vec{E} dV - \frac{1}{8\pi} \int \text{div } (\vec{E} \varphi) dV.$$

Второй интеграл по формуле Остроградского равен интегралу от  $E_n \varphi$  по бесконечно удаленной поверхности, ограничивающей поле, на которой произведение  $E\varphi$  обращается в нуль. Поэтому интеграл равен нулю. В первый интеграл подставим  $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$ , тогда энергия системы зарядов примет вид

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \varphi dV. \quad (31.04)$$

Интегрирование (31.04) можно проводить только по объему  $V$ , внутри которого  $\rho$  не равно нулю.

Выражение (31.04) может быть получено также вычислением работы, затрачиваемой на создание системы зарядов. Будем создавать данное распределение зарядов, подводя заряды из бесконечности.

Пусть в некоторый момент плотность заряда равна  $\rho' = \lambda\rho$ , где  $\rho$  — окончательная плотность и  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Тогда согласно (27.06) потенциал в данной точке будет равен  $\varphi' = \lambda\varphi$ , где  $\varphi$  — окончательный потенциал. Подведем бесконечно малый заряд и распределим его в системе с плотностью  $d\rho' = \rho d\lambda$ . Из (26.03) работа, которую производят внешние силы против сил поля при переносе заряда  $de$  из бесконечности ( $\varphi_1 = 0$ ) в точку с потенциалом  $\varphi_2 = \varphi'$ , равна  $\delta A = -de(\varphi_1 - \varphi_2) = de\varphi'$ . В нашем случае заряд  $de$  переносится в разные точки и распределяется по объему, так что

$$\delta A = \int_{(V)} d\rho' \varphi' dV = \lambda d\lambda \int_{(V)} \rho \varphi dV,$$

где  $\lambda$  меняется от 0 до 1. Поэтому, интегрируя по  $\lambda$  от 0 до 1, получим полную работу зарядения

$$A = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV,$$

которая, очевидно, равна электростатической энергии системы.

Этот вывод создает впечатление, что энергия системы зарядов локализована на зарядах. Однако энергию надо связывать не с зарядами, а с полем. В рамках электростатики оба представления равномерны. Перенос энергии полем (гл. I) показывает, что второе представление ближе к истине.

Для системы точечных зарядов  $\rho = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ . Подставив это в (31.04), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \quad (31.05)$$

где  $\varphi_a$  — полный потенциал, создаваемый системой в точке, занимаемой зарядом с индексом  $a$ . Он равен

$$\varphi_a = \varphi'_a + \varphi''_a = \sum_b \frac{e_b}{R_{ab}} + \varphi''_a, \quad (31.06)$$

где  $R_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|$  — расстояние между зарядами  $e_a$  и  $e_b$  (суммирование производится по всем зарядам, кроме  $a$ -того),  $\varphi''_a$  — потенциал, создаваемый самим зарядом  $e_a$ .

Поскольку заряд  $e_a$  — точечный, потенциал  $\varphi''_a$  — бесконечно велик. Поэтому подстановка (31.06) в (31.05) позволяет разложить  $W_e$  на бесконечную (но постоянную) собственную энергию зарядов  $\sum_a e_a \varphi''_a$  и их взаимную (потенциальную) энергию  $U$ , зависящую от конфигурации системы. Последняя равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi'_a = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (31.07)$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов равна

$$U = \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (31.08)$$

Так как заряды могут иметь разные знаки, то взаимная энергия может быть как положительной, так и отрицательной. Появление бесконечной собственной энергии показывает, что представление о точечных зарядах имеет определенные границы применимости.

### Задачи

1. Определить собственную энергию шара радиуса  $a$ , равномерно заряженного по объему с плотностью  $\rho$ .

Решение. Выберем в качестве элемента  $dV$  объем шарового слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Пользуясь выражением для потенциала шара (задача 1, § 27), получим согласно (31.04)

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^a \left( 2\pi \rho a^2 - \frac{2}{3} \pi \rho r^2 \right) 4\pi r^2 dr = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 a^5 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a},$$

где  $e = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$  — полный заряд шара. Заметим, что для вычисления по формуле (31.01) потребовалось бы учитывать поле как внутри, так и вне шара.

2. Определить собственную энергию заряда, распределенного с плотностью  $\eta(\vec{r})$  по некоторой поверхности  $\sigma$ .

Решение. Будем рассматривать поверхностный заряд как заряд, распределенный в тонком слое. Положим в (31.04)  $dV = d\sigma \cdot dn$  и  $\rho \cdot dn = \eta$ . Тогда

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma,$$

где интеграл распространен по всей поверхности.

3. Определить собственную энергию заряда  $e$ , распределенного с постоянной плотностью  $\eta$  по поверхности шара радиуса  $a$ .

Решение. Пользуясь результатом предыдущей задачи и тем, что потенциал поверхностно заряженного шара равен  $\frac{e}{r}$ , получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma = \frac{e}{2a} \int_{(\sigma)} \eta d\sigma = \frac{e^2}{2a}.$$

### § 32. Энергия недеформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему

Рассмотрим недеформируемую (твердую) систему зарядов (систему, в которой внешние электрические силы не вызывают перераспределения зарядов). Вычислим энергию такой системы, находящейся во внешнем поле. Пусть  $\varphi(\vec{R})$  — потенциал внешнего поля в точке  $\vec{R}$ . Энергия заряда  $de = \rho dV'$ , расположенного в элементе объема  $dV'$ , равна  $\varphi(\vec{R}) de$ , а полная потенциальная энергия системы во внешнем поле равна

$$U = \int \rho \varphi(\vec{R}) dV'. \quad (32.01)$$

Множитель  $1/2$  отсутствует в согласии с (31.03).

Исследуем это выражение в предположении, что внешнее поле слабо меняется на протяжении области, занятой зарядом. Выберем внутри системы некоторую точку  $O$  с радиус-вектором  $\vec{r}$  за начало координат. Тогда  $\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}'$ . Разложив потенциал  $\varphi(\vec{R})$  вблизи начала  $O(\vec{r})$ , получим

$$\varphi(\vec{R}) = \varphi(\vec{r}) + \vec{r}' \cdot \text{grad } \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x'_{\alpha} x'_{\beta} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \dots$$

Подстановка  $\varphi(\vec{R})$  в (32.01) дает

$$U = \varphi(\vec{r}) \int \rho(\vec{r}') dV' + \text{grad } \varphi(\vec{r}) \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \int x'_{\alpha} x'_{\beta} \rho dV' + \dots = \overset{0}{U} + \overset{(1)}{U} + \overset{(2)}{U} + \dots \quad (32.02)$$

Так как  $\int \rho dV' = e$  есть полный заряд системы, то первый член равен

$$\overset{0}{U} = e \varphi(\vec{r}) \quad (32.03)$$

и выражает энергию, которой обладал бы заряд системы, будучи сосредоточенным в точке  $O(\vec{r})$ .

Поскольку  $\text{grad } \varphi = -\vec{E}(\vec{r})$  и согласно (29.02)  $\int \vec{r}' \rho dV' = \vec{p}$  есть дипольный момент системы, то энергия диполя во внешнем поле равна

$$U^{(1)} = -\vec{p} \vec{E}(\vec{r}) = -pE \cos \vartheta, \quad (32.04)$$

где  $\vartheta$  — угол, образованный направлением диполя с направлением внешнего поля.

Третий член разложения (энергию квадрупольного поля во внешнем поле) легко представить (см. § 30) в форме

$$U^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \quad (32.05)$$

Итак, энергию системы зарядов во внешнем поле можно представить как сумму энергии точечного заряда, равного полному заряду системы, энергии точечного диполя, энергии квадрупольного и т. д.

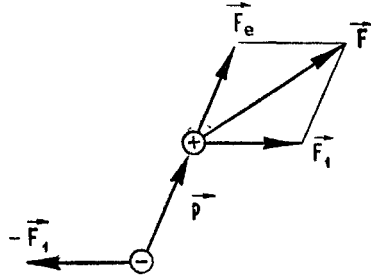


Рис. 18.

Вычислим электрические силы, действующие на систему во внешнем поле. Пусть потенциальная энергия системы задана как функция координат  $q_\alpha$ . Обобщенная сила, действующая на координату  $q_\alpha$ , равна

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}. \quad (32.06)$$

Если система нейтральная ( $e=0$ ), но  $\vec{p} \neq 0$ , то энергия  $U^{(1)}$  (32.04) есть функция от координат диполя и от угла  $\vartheta$ . Поэтому в неоднородном электрическом поле на диполь будет действовать сила

$$\vec{F}_e = -\nabla U = \nabla (\vec{p} \vec{E}) = (\vec{p} \nabla) \vec{E} \quad (32.07)$$

(так как  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ). Кроме того, в любом поле на диполь действует пара сил с моментом

$$K = -\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vartheta} = -pE \sin \vartheta, \quad (32.08)$$

или в векторной форме

$$\vec{K} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (32.09)$$

Этот момент стремится повернуть диполь параллельно полю.

Наглядно эти силы легко представить для простейшего диполя во внешнем поле (рис. 18). Если поле однородное, то система сил приводится к паре сил с моментом  $\vec{K}$ . Если поле неоднородное, то система сил приводится к паре и равнодействующей  $\vec{F}_e$ .

### Задачи

1. Определить взаимную энергию диполя  $\vec{p}$  и электрического заряда  $e$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга.

Решение. Заряд образует поле напряженностью  $\vec{E} = \frac{e\vec{r}_0}{r^2}$ . Согласно (32.04) взаимная энергия заряда и диполя равна

$$U^{(1)} = -\frac{e}{r^2} \vec{p} \vec{r}_0 = -\frac{ep}{r^2} \cos \vartheta.$$

Тот же результат получится из (32.03), если подставить потенциал диполя из (29.01).

2. Определить взаимную энергию двух точечных диполей, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга.

Решение. Согласно (32.04) и (29.05)

$$U = -\vec{p}_2 \vec{E}_1 = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \vec{r})(\vec{p}_2 \vec{r})}{r^5},$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор одного из диполей относительно другого.

### § 33. Энергия деформируемой системы зарядов во внешнем поле. Силы, действующие на систему

Существующие в природе системы заряженных частиц, например атомы или молекулы, нельзя считать жесткими. Заряды в таких деформируемых системах могут смещаться относительно своих положений равновесия. Вследствие деформации системы в ней возникает дипольный момент, который в первом приближении пропорционален внешнему полю

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (\alpha > 0). \quad (33.01)$$

Коэффициент  $\alpha$  называется поляризуемостью системы и имеет размерность объема. Для атомов  $\alpha$  имеет величину порядка величины их объема ( $\sim 10^{-24} \text{ см}^3$ ).

Система, в которой индуцированный момент параллелен полю, называется изотропной. Система, в которой  $\vec{p}$  не параллельно полю, называется анизотропной. Для анизотропных систем составляющие индуцированного дипольного момента являются линейными функциями составляющих напряженности поля

$$p_\beta = \sum_{\gamma} \alpha_{\beta\gamma} E_\gamma, \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (33.02)$$

или

$$\vec{p} = {}^{(2)}\alpha \vec{E}. \quad (33.03)$$

Совокупность коэффициентов  $\alpha_{\beta\gamma}$  образует симметричный тензор  ${}^{(2)}\alpha$  поляризуемости системы.

Сила, действующая в поле на индуцированный момент, равна

$$F_{\beta} = (\vec{p} \nabla) E_{\beta} = \sum_{\gamma \delta} \alpha_{\gamma \delta} E_{\delta} \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} = \sum_{\gamma \delta} \alpha_{\gamma \delta} E_{\delta} \frac{\partial E_{\gamma}}{\partial x_{\beta}},$$

так как в электростатическом поле  $\text{rot } \vec{E} = 0$  и, следовательно,  $\frac{\partial E_{\beta}}{\partial x_{\gamma}} = \frac{\partial E_{\gamma}}{\partial x_{\beta}}$ . Переставляя значки суммирования  $\gamma$  и  $\delta$  и пользуясь симметрией тензора поляризуемости, получим

$$F_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \delta} \alpha_{\gamma \delta} \left( E_{\delta} \frac{\partial E_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} + E_{\gamma} \frac{\partial E_{\delta}}{\partial x_{\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \frac{1}{2} \sum_{\gamma \delta} \alpha_{\gamma \delta} E_{\gamma} E_{\delta} = - \frac{\partial U}{\partial x_{\beta}}.$$

Отсюда потенциальная энергия индуцированного диполя во внешнем поле

$$U_{\text{инд.}} = - \frac{1}{2} \sum_{\gamma \delta} \alpha_{\gamma \delta} E_{\gamma} E_{\delta} = - \frac{1}{2} \vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}. \quad (33.04)$$

Для изотропной системы ( $\alpha_{\gamma \delta} = \alpha \delta_{\gamma \delta}$ )

$$U_{\text{инд.}} = - \frac{1}{2} \alpha E^2. \quad (33.05)$$

Так как энергия диполя во внешнем поле равна  $-\vec{p} \vec{E} = -\vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}$ , то разность

$$U_{\text{инд.}} - (-\vec{E}^{(2)} \alpha \vec{E}) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \gamma} \alpha_{\beta \gamma} E_{\beta} E_{\gamma}$$

надо рассматривать как упругую энергию деформированной внешним полем системы зарядов. Момент вращения, действующий на индуцированный диполь, согласно (32.09) и (33.03) равен

$$\vec{K} = [\vec{p}, \vec{E}] = [^{(2)} \alpha \vec{E}, \vec{E}]. \quad (33.06)$$

Момент  $\vec{K}$  равен нулю для изотропной системы (так как в этом случае вектор  $\vec{p}$  параллелен  $\vec{E}$ ), но отличен от нуля для анизотропной системы.

### § 34. Векторный потенциал

Рассмотрим магнитное поле стационарного тока. Пусть плотность тока  $\vec{j}(\vec{r})$  зависит только от координат и отлична от нуля в конечной области пространства. Поскольку стационарный ток не имеет источников, то

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (34.01)$$

и линии плотности стационарного тока замкнуты. Электрическое поле такого статического распределения заряда определяется формулами § 27.

Магнитное поле стационарного тока согласно (25.03) удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (34.02)$$

Последнее равенство показывает, что магнитное поле является вихревым. Поэтому можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (34.03)$$

Вектор  $\vec{A}$  называется векторным потенциалом магнитного поля. В случае стационарного поля  $\vec{A}$  зависит только от координат точки.

Векторный потенциал однозначно определяет напряженность магнитного поля. Магнитное поле определяет векторный потенциал с точностью до градиента некоторого скаляра. Действительно, векторный потенциал  $\vec{A}'$ , равный

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad (34.04)$$

где  $\chi$  — некоторый скаляр, определяет то же самое поле:

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \chi = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}.$$

Векторный потенциал можно сделать однозначным, если наложить на него добавочное условие

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (34.05)$$

называемое условием калибровки. Условие калибровки всегда может быть выполнено: если  $\operatorname{div} \vec{A} = \omega \neq 0$ , то всегда можно подобрать функцию<sup>1</sup>  $\chi$  такую, что  $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$ .

Для определения векторного потенциала подставим  $\vec{B}$  из (34.03) в первое уравнение (34.02). Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

В силу условия калибровки (34.05)

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (34.06)$$

<sup>1</sup> Из (34.04) следует, что  $\operatorname{div} \vec{A}' = \omega + \nabla^2 \chi = 0$ , поэтому  $\chi$  — решение уравнения Пуассона  $\nabla^2 \chi = -\omega$ .

Это уравнение определяет векторный потенциал по заданному распределению тока. Оно аналогично уравнению Пуассона (27.01) для скалярного потенциала. Так как функция Грина для оператора Лапласа определена в § 27, то решение (34.06) можно написать сразу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (34.07)$$

Убедимся, что условие калибровки (34.05) удовлетворяется. Обозначим через  $\nabla$  оператор, взятый по координатам точки наблюдения  $\vec{r}$ , а через  $\nabla'$  — оператор, взятый по координатам точки источника  $\vec{r}'$ . Заметим, что в применении к функциям от  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\nabla = -\nabla'$$

и

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} = \nabla \frac{\vec{j}}{R} = \vec{j}(\vec{r}') \nabla \frac{1}{R} = -\vec{j}(\vec{r}') \nabla' \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} + \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{R}.$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \nabla \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' = -\frac{1}{c} \int \operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{c} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{R} dV'.$$

Оператор  $\nabla$  введен под знак интеграла потому, что дифференцирование производится по  $\vec{r}$ , играющему роль параметра. Первый интеграл исчезает, так как его можно по формуле Остроградского преобразовать в интеграл по замкнутой поверхности, на которой нормальная составляющая тока обращается в нуль. Второй интеграл исчезает в силу (34.01). Поэтому условие калибровки выполнено.

Если ток линейный, то  $\vec{j} dV = I d\vec{r}'$ , где  $I$  — сила тока,  $d\vec{r}' = d\vec{l}$  — элемент длины тока (см. задачу 2 § 7), и векторный потенциал приводится к виду

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{r}'}{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (34.08)$$

(интегрирование производится по замкнутому контуру  $C$  линейного тока).

### § 35. Магнитное поле стационарного тока

Вычислим напряженность магнитного поля тока. В силу (34.03) и (34.07) имеем

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Но

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{R} = \left[ \nabla \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \left[ \vec{j}, \frac{\vec{R}}{R^3} \right] = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3}.$$

Поэтому

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{(V)} \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV'. \quad (35.01)$$

Формула (35.01) выражает закон Био и Савара. Ее можно истолковать как выражение принципа суперпозиции поля: магнитное поле некоторого объемно распределенного стационарного тока может быть получено путем векторного сложения элементарных полей

$$d\vec{B} = \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{cR^3} dV', \quad (35.02)$$

создаваемых элементами тока  $\vec{j} dV'$ . Уравнение (35.02) можно рассматривать как следствие выражения для магнитного поля медленно движущегося точечного заряда (§ 7).

### Задачи

1. Определить векторный потенциал однородного магнитного поля ( $\vec{B} = \text{const}$ ).

Решение. Так как  $\operatorname{rot} [\vec{a}, \vec{r}] = \vec{a} \operatorname{div} \vec{r} - (\vec{a} \nabla) \vec{r} = 2\vec{a}$ , то можно положить  $2\vec{a} = \vec{B}$ . Тогда

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}, \vec{r}], \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

2. Определить векторный потенциал, создаваемый прямолинейным отрезком линейного тока  $I$  длиной  $2l$ .

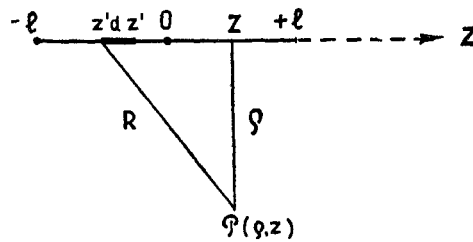


Рис. 19.

Решение. Выберем начало координат в центре отрезка, а ось  $z$  направим вдоль отрезка. Согласно (34.08) получим в точке  $P(\rho, z)$  (рис. 19)

$$\vec{A}(\rho, z) = \vec{k} \frac{I}{c} \int_{-l}^{+l} \frac{dz'}{\sqrt{(z'-z)^2 + \rho^2}} = \vec{k} \frac{I}{c} \ln \frac{\sqrt{(l-z)^2 + \rho^2} + l - z}{\sqrt{(l+z)^2 + \rho^2} - l - z}.$$

3. Определить магнитное поле бесконечного прямолинейного тока силой  $I$ .

Решение. Используем выражение для потенциала из предыдущей задачи. В нем положить сразу  $l = \infty$  нельзя, так как тогда потенциал получается бесконечно большим (ср. аналогичную задачу электростатики, § 28). Поэтому сначала вычислим напряженность, а затем перейдем к пределу  $l = \infty$ .

Для бесконечного тока потенциал не должен зависеть от  $z$ . Поэтому положим  $z = 0$ . Тогда  $A = A_z$  будет зависеть только от  $\rho$ . В цилиндрических координатах имеем

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial \rho}, \quad B_\alpha = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \quad B_z = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \alpha}.$$

При больших  $l$   $\sqrt{l^2 + \rho^2} = l \left(1 + \frac{\rho^2}{2l^2} + \dots\right)$ . Следовательно,

$$\frac{\sqrt{l^2 + \rho^2} + l}{\sqrt{l^2 + \rho^2} - l} \approx \frac{2l}{\rho^2/2l} = \frac{4l^2}{\rho^2},$$

так что

$$A_z = \frac{2I}{c} (\ln 2l - \ln \rho).$$

Отсюда

$$B_\alpha = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{2I}{c\rho} = \frac{2I}{c\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad B_\rho = B_z = 0.$$

При переходе к  $l = \infty$  результат не меняется (ср. с результатом, найденным в задаче 1, § 9).

4. Определить векторный потенциал и напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечного прямолинейного цилиндра радиуса  $a$ . По цилиндру идет ток с плотностью  $j = \frac{I}{\pi a^2}$ .

Решение. Выберем ось цилиндра за полярную ось. Уравнение (34.06) напомним в цилиндрических координатах  $\rho, \alpha, z$ .

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \vec{A}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Поле цилиндрического однородного тока цилиндрически симметрично и  $A = A_z$  зависит только от  $\rho$ . Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\frac{4\pi}{c} j$$

и решения для внутренней и внешней областей будут

$$A_z^{(i)} = -\frac{\pi}{c} j \rho^2 + C_1 \ln \rho + C_2, \quad A_z^{(a)} = C_3 \ln \rho + C_4.$$

На оси тока ( $\rho = 0$ ) потенциал должен быть конечным, поэтому  $C_1 = 0$ .

Так как цилиндр бесконечен, считать  $A_z^{(a)} = 0$  при  $\rho = \infty$  нельзя. Используя

условия непрерывности  $A_z^{(i)} = A_z^{(a)}$  и  $\frac{dA_z^{(i)}}{d\rho} = \frac{dA_z^{(a)}}{d\rho}$  при  $\rho = a$ , получим

$$A_z^{(i)} = \frac{I}{c} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - \frac{2}{c} I \ln a + C_4, \quad A_z^{(a)} = C_4 - \frac{2}{c} I \ln \rho$$

(знание  $C_4$  не существенно). Выражение для  $A_z^{(a)}$  совпадает с полученным в задаче 3. Из выражения для  $A_z^{(i)}$  получаем напряженность поля внутри цилиндра

$$B_a^{(i)} = -\frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial \rho} = \frac{2I}{ca^2} \rho.$$

### § 36. Магнитное поле на большом расстоянии от тока. Магнитный диполь

Исследование зависимости векторного потенциала или напряженности магнитного поля стационарного тока от координат точки наблюдения можно сделать в общем виде лишь для расстояний, больших по сравнению с размерами области, занятой током.

Рассмотрим линейный ток, векторный потенциал которого определяется формулой (34.08). Введем систему координат с началом  $O$  где-либо внутри системы токов. Так же как и в § 28, разложим функцию Грина  $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  по степеням  $\vec{r}'$  и, подставив в (34.08), получим разложение векторного потенциала по мультипольным магнитным потенциалам

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{I}{cr} \oint d\vec{r}' - \frac{I}{c} \oint d\vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) + \dots \quad (36.01)$$

Интеграл в первом члене, очевидно, обращается в нуль. Подынтегральная функция во втором члене может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} d\vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) + \vec{r}' \left( d\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ d\vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \vec{r}' \left( d\vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} = \frac{1}{2} d \left\{ \vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} - \frac{1}{2} \left[ \nabla \frac{1}{r}, [\vec{r}', d\vec{r}'] \right], \end{aligned}$$

поэтому

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{I}{2c} \oint d \left\{ \vec{r}' \left( \vec{r}' \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} - \frac{I}{2c} \oint [\vec{r}', d\vec{r}'] \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots$$

Первый интеграл опять исчезает как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Во втором члене введем вектор

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \oint \frac{1}{2} [\vec{r}', d\vec{r}'], \quad (36.02)$$

который называется магнитным дипольным моментом тока.

Если  $\vec{m} \neq 0$ , то первый, необращающийся в нуль член разложения (36.01) векторного потенциала принимает вид

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = - \left[ \vec{m}, \nabla \frac{1}{r} \right]. \quad (36.03)$$

Это есть так называемый магнитный дипольный потенциал. Следующие члены разложения (36.01), приводящие к магнитным мультипольным потенциалам, рассматривать не будем.

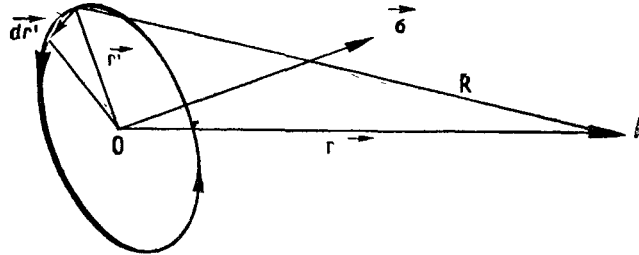


Рис. 20.

Интеграл в (36.02) равен площади  $\vec{\sigma}$ , обтекаемой током (рис. 20). Поэтому

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \vec{\sigma}, \quad (36.04)$$

то есть магнитный момент замкнутого линейного тока пропорционален произведению силы тока  $I$  на вектор обтекаемой площади.

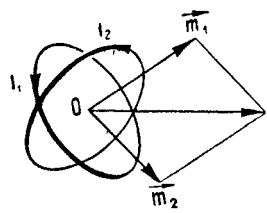


Рис. 21.

Если имеется система токов с моментами  $\vec{m}_a$  (рис. 21), то для удаленной точки имеем

$$\vec{A} = \sum_a \vec{A}_a = - \sum_a \left[ \vec{m}_a, \nabla \frac{1}{r} \right] = - \left[ \vec{m}, \nabla \frac{1}{r} \right], \quad (36.05)$$

где  $\vec{m} = \sum_a \vec{m}_a$  — полный магнитный момент системы. Может оказаться, что магнитные

моменты токов взаимно компенсируются и  $\vec{m} = 0$ , тогда в разложении (36.01) главным будет следующий (квадрупольный) член.

Для объемно распределенного тока можно произвести замену  $I d\vec{r}' = \vec{j} dV'$ , где  $\vec{j}$  — плотность тока в элементе объема  $dV'$ . Тогда формула (36.02) дает выражение для магнитного момента объемно распределенного тока

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}', \vec{j}] dV'. \quad (36.06)$$

Вычислим магнитное поле, создаваемое магнитным диполем. Пользуясь тем, что

$$\text{rot} [\vec{m}, \vec{j}(\vec{r})] = [\nabla, [\vec{m}, \vec{j}]] = \vec{m} (\nabla \vec{j}) - (\vec{m} \nabla) \vec{j}, \quad \vec{j} = \nabla \frac{1}{r} = - \frac{\vec{r}}{r^3},$$

получим

$$\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}. \quad (36.07)$$

Итак, магнитное поле выражается через магнитный момент так же, как электрическое поле через электрический дипольный момент (29.05). Поэтому картина поля электрического диполя, полученная в § 29, целиком переносится на магнитный диполь.

Необходимо отметить, что картины поля магнитного и электрического диполей совпадают только на больших расстояниях от диполей. Вблизи диполей они существенно различаются: линии вектора  $\vec{B}$  замыкаются, а линии вектора  $\vec{E}$  начинаются и заканчиваются на зарядах, образующих диполь.

### § 37. Скалярный магнитный потенциал тока

Совпадение магнитного поля диполя (36.07) с электрическим полем диполя наводит на мысль ввести скалярный магнитный потенциал  $\varphi_m$ . Определим  $\varphi_m$  так, чтобы

$$\vec{B} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (37.01)$$

Для магнитного диполя по аналогии с (29.01) можно положить

$$\varphi_m = \frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3}. \quad (37.02)$$

Магнитный потенциал  $\varphi_m$  в отличие от электростатического имеет бесконечное множество значений. Действительно, циркуляция электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю. Циркуляция же магнитного поля по замкнутому контуру, охватывающему ток, равна согласно (9.03)  $\pm \frac{4\pi}{c}I$ . Если за начальное значение магнитного потенциала взять (37.01), то после  $n$  обходов вокруг тока в исходной точке получим

$$\varphi'_m = \frac{\vec{m}\vec{r}}{r^3} \pm \frac{4\pi}{c}In. \quad (37.03)$$

Магнитный потенциал можно считать однозначным, если условиться рассматривать лишь такие контуры, которые не пересекают некоторой поверхности, опирающейся на рассматриваемый замкнутый ток. Однако для вычисления поля по (37.02) многозначность магнитного потенциала не существенна.

Магнитным потенциалом можно воспользоваться для вычисления магнитного поля произвольного линейного тока на расстоянии, которое не велико по сравнению с размерами тока.

Допустим, что на контур  $C$  тока опирается некоторая поверхность  $\sigma$ , направление нормали  $\vec{n}$  к любому элементу которой свя-

зано с направлением тока правилом правого винта. Мысленно разобьем площадь поверхности двумя системами пересекающихся кривых на элементы площади  $d\sigma$  (рис. 22). Допустим, что по каждой кривой текут два равных по величине  $I$ , но противоположно направленных тока. Введение таких токов позволяет считать каждый элемент площади  $d\sigma$  поверхности обтекаемым замкнутым током  $I$ . При этом ток  $I$  по направлению совпадает с идущим по контуру  $C$  током. Ток, обтекающий площадку, обладает магнитным моментом

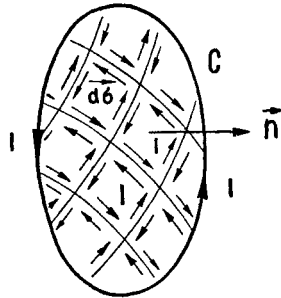


Рис. 22.

$$d\vec{m} = \frac{I}{c} d\vec{\sigma} = \frac{I}{c} \vec{n} d\sigma. \quad (37.04)$$

Таким образом, получается, что на поверхности  $\sigma$  распределен магнитный момент с поверхностной плотностью  $\frac{I}{c} \vec{n}$ . Эта поверхность называется двойным магнитным слоем или магнитным листком.

Площадка  $d\sigma$  может быть сделана сколь угодно малой. Магнитный потенциал, создаваемый площадкой в точке  $\vec{r}$ , равен согласно (37.02)

$$d\varphi_m = \frac{I}{c} \frac{\vec{n} \cdot \vec{R}}{R^3} d\sigma = \frac{I}{c} d\Omega, \quad (37.05)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\vec{r}'$  — радиус-вектор  $d\sigma$ ,  $d\Omega$  — телесный угол, под которым видна площадка  $d\sigma$  из точки наблюдения. Телесный угол  $d\Omega$  считается положительным, если луч зрения от  $d\sigma$  к точке наблюдения образует острый угол с направлением нормали  $\vec{n}$  к  $d\sigma$ . Полный потенциал, создаваемый всем двойным слоем, равен

$$\varphi_m = \frac{I}{c} \Omega(\vec{r}), \quad (37.06)$$

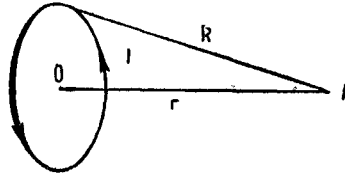


Рис. 23.

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым виден контур тока  $C$ . Если магнитный потенциал определен, то магнитное поле вычисляется по формуле (37.01).

### Задачи

1. Определить магнитное поле на оси кругового тока радиуса  $a$  на расстоянии  $r$  от него (рис. 23).

Решение. Круговой ток эквивалентен двойному магнитному слою с плотностью  $\frac{d\vec{m}}{d\sigma} = \frac{I}{c} \vec{n}$ . Из точки наблюдения  $A$  контур тока виден под

углом  $\Omega = \frac{\sigma'}{R^2}$ , где  $\sigma'$  — площадь сегмента сферы радиуса  $R$ , ограниченного контуром тока. Так как  $d\sigma = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta$ , то

$$\Omega = \int_0^{\vartheta_0} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi (1 - \cos \vartheta_0).$$

Но  $\cos \vartheta_0 = \frac{r}{R}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + a^2}$ . Поэтому согласно (37.06) магнитный потенциал в точке наблюдения равен

$$\varphi_m = \frac{2\pi I}{c} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right).$$

Отсюда напряженность магнитного поля на оси равна

$$B_r = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{2m}{c(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

где  $m = \frac{I}{c} \pi a^2$  — магнитный момент тока.

2. Определить напряженность магнитного поля на оси кругового однослойного соленоида радиуса  $a$ , имеющего длину  $l$  и  $n$  витков на единицу длины (рис. 24).

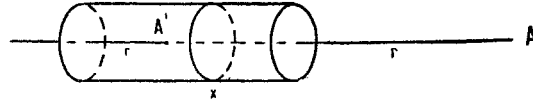


Рис. 24.

Решение. Из точки  $A$  вне соленоида сечение  $x$  видно под телесным углом  $\Omega = 2\pi \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$ . Магнитный потенциал равен

$$\begin{aligned} \varphi_m^{(a)} &= \frac{2\pi I n}{c} \int_{l+r}^r \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) dx = \\ &= \frac{2\pi I n}{c} \{ \sqrt{a^2 + (l+r)^2} - \sqrt{a^2 + r^2} - l \}. \end{aligned}$$

Отсюда магнитное поле на оси вне соленоида равно

$$B_x^{(a)} = -\frac{\partial \varphi_m^{(a)}}{\partial r} = -\frac{2\pi I n}{c} \left\{ \frac{l+r}{\sqrt{a^2 + (l+r)^2}} - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right\}.$$

Аналогично вычисляется поле на оси внутри соленоида. В этом случае точка  $A'$  (на расстоянии  $r$  от левого торца) делит соленоид на две части. Левая часть создает потенциал, который можно по-

лучить из выражения для  $\varphi_m^{(a)}$ , если положить  $r=0$  и заменить  $l$  через  $r$ :

$$\varphi_m^{(+)} = \frac{2\pi In}{c} \{ \sqrt{a^2 + r^2} - a - r \}.$$

Правая часть соленоида создает отрицательный потенциал (так как  $\vec{n}\vec{R} < 0$ ), который получается так же, если положить  $r=0$  и  $l$  заменить через длину правой части  $l-r$ :

$$\varphi_m^{(-)} = + \frac{2\pi In}{c} \{ l - r - \sqrt{a^2 + (l-r)^2} + a \}.$$

Потенциал внутри соленоида равен

$$\varphi_m^{(i)} = \frac{2\pi In}{c} \{ l - 2r + \sqrt{a^2 + r^2} - \sqrt{a^2 + (l-r)^2} \};$$

напряженность

$$B_x^{(i)} = - \frac{\partial \varphi_m^{(i)}}{\partial r} = \frac{2\pi In}{c} \left\{ 2 + \frac{l-r}{\sqrt{a^2 + (l-r)^2}} - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right\}.$$

Если соленоид бесконечно длинный, то  $r = \frac{l}{2} \rightarrow \infty$  и напряженность поля внутри бесконечно длинного соленоида равна

$$B = \frac{4\pi In}{c} = \frac{4\pi IN}{cl}, \quad N = n \cdot l.$$

### § 38. Магнитные свойства атомной системы

Применение результатов предыдущих параграфов к атомным системам встречает некоторое затруднение. Атом представляет собой динамическую систему, в которой вокруг положительного ядра с зарядом  $+Ze$  движется  $Z$  электронов. Движущийся со скоростью  $\vec{v}_a$  точечный заряд, радиус-вектор которого меняется со временем  $\vec{r}_a = \vec{r}_a(t)$ , создает ток с плотностью

$$j_a(\vec{r}, t) = \rho_a \vec{v}_a = e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)). \quad (38.01)$$

Этот ток не стационарен и непосредственное применение к нему результатов § 35 и § 36 незаконно. Выясним, при каких условиях можно считать, что движущиеся точечные заряды создают стационарный ток.

В квантовой теории атома получается автоматически, что стационарному состоянию атома соответствуют некоторое статическое (не зависящее от времени) распределение отрицательного заряда электронной оболочки и некоторый стационарный замкнутый ток. В классической теории следует принять, что все заряды атома (или

молекулы) движутся все время в конечной области пространства и импульсы их остаются все время конечными. Такое движение называется стационарным (финитным). При этом все величины, связанные с зарядами, меняются в определенных конечных интервалах и можно рассматривать средние по времени значения этих величин.

Среднее по времени значение некоторой функции  $f(\vec{r}, t)$ , меняющейся в конечных пределах, определяется формулой

$$\overline{f(\vec{r})}^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\vec{r}, t) dt. \quad (38.02)$$

Промежуток времени  $T$  не обязательно бесконечен, но должен быть микроскопически большим, то есть содержать большое число периодов (или квазипериодов) движения зарядов.

Легко видеть, что если функция  $f(\vec{r}, t)$  меняется лишь в конечных пределах, то среднее значение ее производной по времени обращается в нуль

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(\vec{r}, T) - f(\vec{r}, 0)}{T} = 0, \quad (38.03)$$

так как  $f(\vec{r}, T)$  и  $f(\vec{r}, 0)$  ограничены.

Покажем, что усредненные по времени заряды, токи и напряженности полей финитной системы зарядов будут стационарными. Усредняя по времени уравнение сохранения заряда и пользуясь тем, что знаки усреднения по времени и дифференцирования по координатам можно переставлять местами, получим

$$\overline{\text{div } \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}}^t = \overline{\text{div } \rho \vec{v}}^t + \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^t = 0.$$

Так как  $\rho$  меняется в конечных пределах и поэтому  $\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^t = 0$ , то

$$\overline{\text{div } \rho \vec{v}}^t = 0. \quad (38.04)$$

Это уравнение совпадает с (34.01), если под  $\vec{j}$  понимать среднее значение  $\overline{\rho \vec{v}}^t = \vec{j}$ .

Аналогичное уравнение может быть получено из (34.06) для среднего векторного потенциала

$$\nabla^2 \overline{\vec{A}}^t = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (38.05)$$

Векторный потенциал финитно движущегося заряда получим используя (34.07).

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \overline{\vec{A}(\vec{r}, t)}^t = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{e_a \vec{v}_a}{c |\vec{r} - \vec{r}_a|} = \frac{\vec{v}_a}{c} \varphi.\end{aligned}\quad (38.06)$$

Для системы зарядов надо просуммировать по всем зарядам. Далее, для системы зарядов

$$\int [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] dV' = \sum_a e_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a],$$

поэтому магнитный момент финитно движущейся системы зарядов равен

$$\vec{m} = \sum_a \frac{e_a}{2c} \overline{[\vec{r}_a, \vec{v}_a]}^t. \quad (38.07)$$

Последнее выражение можно связать с моментом импульса системы зарядов. Замечая, что

$$\overline{[\vec{r}_a, \vec{v}_a]}^t = \frac{\vec{L}_a}{\mu_a},$$

где  $\vec{L}_a$  — момент импульса и  $\mu_a$  — масса заряда  $e_a$ , получим

$$\vec{m}_L = \sum_a \frac{e_a}{2\mu_a c} \vec{L}_a. \quad (38.08)$$

Этот магнитный момент, связанный с орбитальным движением зарядов, называется орбитальным магнитным моментом. Если у всех зарядов отношение  $\frac{e_a}{\mu_a}$  одинаково (электроны в атоме или молекуле) и равно  $\frac{e}{\mu}$ , то

$$\vec{m}_L = \frac{e}{2\mu c} \vec{L}, \quad (38.09)$$

где  $\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a$  есть полный орбитальный момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно

$$\frac{m}{L} = \frac{e}{2\mu c}. \quad (38.10)$$

Исследование атомных спектров в начале 20-х годов нашего столетия показало, что электрон обладает собственным моментом импульса, не связанным с его поступательным движением. Обозначим этот собственный момент электрона, называемый спином, через  $\vec{S}$ . Со спином связан собственный магнитный момент электрона, равный

$$\vec{m}_S = \frac{e}{\mu c} \vec{S}. \quad (38.11)$$

Поэтому полный магнитный момент атомной системы определяется равенством

$$\vec{m} = \vec{m}_L + \vec{m}_S = \frac{e}{2\mu c} (\vec{L} + 2\vec{S}), \quad (38.12)$$

где  $\vec{L}$  — полный орбитальный, а  $\vec{S} = \sum_a \vec{S}_a$  — полный спиновой момент электронов. Из (38.12) видно, что магнитный момент атома может быть равен нулю лишь в том случае, когда  $\vec{L} + 2\vec{S} = 0$ . Последнее имеет место, например, у атомов благородных газов (гелий, неон и т. д.), обладающих так называемыми замкнутыми электронными оболочками.

### § 39. Магнитная энергия стационарных токов

Энергия магнитного поля согласно (14.01) и (14.05) определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV, \quad (39.01)$$

где интегрирование производится по всему магнитному полю. Если магнитное поле создается двумя (или несколькими) системами токов, то магнитную энергию, подобно электрической, можно разложить на собственную и взаимную энергию систем.

В случае стационарных токов выражение (39.01) можно преобразовать так, что энергия будет явно выражена через плотность тока. Действительно, замечая, что

$$B^2 = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B} + \operatorname{div} [\vec{A}, \vec{B}],$$

получим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B} dV + \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} [\vec{A}, \vec{B}] dV.$$

Здесь второй интеграл исчезает, так как по формуле Остроградского его можно преобразовать в интеграл по поверхности, охватывающей

все поле, на которой  $[\vec{A}, \vec{B}]_n$  обращается в нуль. В первом интеграле в случае стационарных токов  $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  и

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_{(V)} \vec{j} \vec{A} dV. \quad (39.02)$$

Выражение (39.02) для магнитной энергии тока напоминает (31.04) для электростатической энергии — разница заключается в замене  $\varphi$  через  $\vec{A}$  и  $\rho$  через  $\frac{\vec{j}}{c}$ .

Для системы финитно движущихся точечных зарядов получим

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \vec{v}_a \vec{A}_a, \quad (39.03)$$

где  $\vec{A}_a$  — полный векторный потенциал в точке, занимаемой зарядом  $e_a$ .

Рассмотрим стационарный ток во внешнем магнитном поле. В этом случае магнитная (взаимная) энергия равна

$$U_m = W_m = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{A}(\vec{r}') dV', \quad (39.04)$$

где  $\vec{A}$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля. Дальнейшее преобразование (39.04) удобнее сделать для линейных токов. Заменяя  $\vec{j} dV'$  для линейного тока через  $I d\vec{R}'$ , получим

$$W_m = \frac{I}{c} \oint_C \vec{A}(\vec{R}') d\vec{R}', \quad (39.05)$$

где интегрирование производится по контуру тока  $C$ . Считая векторный потенциал медленно меняющимся с координатами в области пространства, занятого током, разложим  $\vec{A}(\vec{R})$  в ряд вблизи некоторой точки  $O(\vec{r})$ , взятой за начало отсчета.

$$\vec{A}(\vec{R}) = \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}) + (\vec{r}' \nabla) \vec{A}(\vec{r}) + \dots$$

Подставив разложение в (39.05), получим (так как  $d\vec{R}' = d\vec{r}'$ )

$$W_m = \frac{I}{c} \vec{A}(\vec{r}) \oint_C d\vec{r}' + \frac{I}{c} \oint_C d\vec{r}' (\vec{r}' \nabla) \vec{A}(\vec{r}) + \dots$$

Первый интеграл обращается в нуль, а второй преобразуем так же, как в § 36 (с той разницей, что вместо вектора  $\vec{r}$ , не зависящего

от  $\vec{r}'$ , стоит оператор  $\nabla$ , также не зависящий от  $\vec{r}'$ ). Таким образом, для линейного стационарного тока

$$W_m = \oint_C d\vec{r}' (\vec{r}' \nabla) \vec{A} = \frac{I}{2c} \oint_C [\vec{r}', d\vec{r}'] \nabla \vec{A} = \frac{I}{2c} \oint_C [\vec{r}', d\vec{r}'] \text{rot } \vec{A}.$$

Так как множитель перед  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$  есть согласно (36.02) магнитный момент тока, то выражение для энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле принимает вид

$$W_m = \vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (39.06)$$

В отличие от энергии электрического диполя во внешнем поле (32.04) правая часть (39.06) имеет знак плюс. Это отличие объясняется тем, что магнитная энергия имеет смысл кинетической энергии (см. § 55 и 56).

#### § 40. Исторические замечания

Понятие о потенциале возникло в классической механике. В 1777 году Ж. Л. Лагранж (1736—1813) показал, что силу тяготения, действующую на массу  $m = 1$  со стороны других точечных масс, можно получить дифференцированием по координатам этой массы функции  $\varphi = \sum_a \frac{m_a}{R_a}$ . Особого

названия этой функции Лагранж не дал. В 1782 году П.-С. Лаплас перешел к непрерывному распределению масс и доказал, что функция

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV$$

вне масс удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi = 0$  (символ  $\nabla^2$  был введен позже В. Гамильтоном). Лаплас решил знаменитую задачу о притяжении трехосным эллипсоидом точки вне его. Частный случай этой задачи рассмотрен в задаче 6 § 27.

В 1812 году С.-Д. Пуассон (1781—1840) показал, что в точках, в которых плотность масс отлична от нуля, функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (27.01)  $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$ .

Учение о потенциале было разработано Георгом Грином. Его книга «Опыт приложения математического анализа к теории электричества и магнетизма» вышла в 1828 году. Независимо от Грина термин «потенциал» ввел К. Ф. Гаусс (1777—1855). Он разработал теорию потенциала в мемуаре «Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния»<sup>1)</sup>. В § 22—23 этого мемуара содержится известная теорема Гаусса о потоке вектора напряженности через замкнутую поверхность.

Работы Грина и Гаусса послужили источником многочисленных исследований по математической теории потенциала. С современным состоянием вопроса о потенциале можно ознакомиться по книгам: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, ГИТТЛ, 1946 и Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, ГИТТЛ, М., 1953.

<sup>1)</sup> Русский перевод см. в книге: К. Ф. Гаусс, Избранные труды по земному магнетизму, изд. АН СССР, 1952.

В работе Гаусса «Общая теория земного магнетизма» впервые устанавливается связь между работой потенциальной силы и изменением потенциала и, таким образом, дается физический смысл потенциалу. [Подробнее этот вопрос рассмотрен позже (в 1847 г.) Г. Гельмгольцем в работе «О сохранении силы»]. В той же работе Гаусс вводит понятие о мультипольных потенциалах и разлагает земной магнитный потенциал в ряд по мультипольным потенциалам. Эта задача по отношению к электростатическому потенциалу разобрана нами в § 28, 29, 30.

Магнитное поле тока исследовалось Био, Саваром и Лапласом, а взаимодействие токов — А. Ампером. Ампер ввел понятие магнитного момента замкнутого тока (§ 36) и двойного магнитного слоя (§ 37). Векторный потенциал магнитного поля тока ввел в 1845 году Ф. Э. Нейман (1798—1895).

Соотношение  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  установлено Максвеллом.

Заметим, что все работы по теории потенциала (Грин, Гаусс) и взаимодействию токов (Ампер, Био, Лаплас и др.) проводились на основе представлений о дальнем действии. Трактовка явлений с точки зрения близкого действия была дана в работах Максвелла.

Решение многих задач на вычисление различных полей можно найти в книгах: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма, ГИТТЛ, М. — Л., 1948; В. Смайт, Электростатика и электродинамика, Изд. иностранной литературы, М., 1954.

### Г Л А В А III

#### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

##### § 41. Плоские линейно-поляризованные электромагнитные волны

В § 13 показано, что свободное электромагнитное поле должно распространяться со скоростью, равной электродинамической постоянной  $c$ . Рассмотрим более подробно свободное электромагнитное поле.

Общие уравнения свободного электромагнитного поля получаются из уравнений Максвелла — Лоренца, если положить  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ (I)} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ (II)} \quad (41.01)$$

Установим уравнения, которым подчиняются напряженности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Беря производную  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  от обоих членов второго уравнения (41.01, I) и пользуясь первым уравнением, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Так как  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = - \nabla^2 \vec{E}$ , то

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (41.02)$$

Аналогичному уравнению подчиняется вектор  $\vec{B}$ :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (41.03)$$

Уравнение вида (41.02) называется волновым уравнением или уравнением Даламбера. Введем оператор Даламбера:

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (41.04)$$

Тогда волновое уравнение можно написать в форме

$$\square^2 \psi = 0, \quad (41.05)$$

где  $\psi$  обозначает  $\vec{E}$  или  $\vec{B}$ .

Рассмотрим электромагнитное поле, зависящее только от времени и одной из координат, например  $x$ . Такое поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (41.06)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (41.07)$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции<sup>1)</sup>. Действительно, если введем новые переменные  $\xi = x - ct$  и  $\eta = x + ct$ , то

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

откуда и следует (41.07).

Решение  $\psi = f(x - ct)$  описывает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью  $c$  в положительном направлении оси  $x$ . В момент  $t = 0$  поле во всех точках произвольно выбранной плоскости  $x_0$  имеет одно и то же значение  $f(x_0)$  (поэтому волна называется плоской). С течением времени поле в плоскости  $x_0$  будет изменяться, а значение  $f(x_0)$  перейдет к моменту  $t$  в другую плоскость, координата  $x$  которой удовлетворяет соотношению  $x - ct = x_0$ . Другими словами, плоскость  $x$ , в которой поле имеет заданное значение  $f(x_0)$ , будет передвигаться вдоль оси  $x$  по закону  $x = x_0 + ct$ .

Аналогично решение  $\psi = g(x + ct)$  описывает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью  $c$  в отрицательном направлении оси  $x$ .

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Если вектор  $\vec{E}$  остается коллинеарным постоянному единичному вектору  $\vec{e}$ , то волна называется линейно-поляризованной, а вектор  $\vec{e}$  называется вектором поляризации. Плоскую линейно-поляризованную волну можно записать в форме

$$\vec{E} = \vec{e} f(x - ct). \quad (41.08)$$

Обозначим через  $\vec{n}$  единичный вектор в направлении распространения волны, совпадающий с направлением нормали к волновой по-

<sup>1)</sup> Функции  $f$  и  $g$  можно определить, если в начальный момент  $t = 0$  задано поле  $\psi$  и его производная  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  как функции  $x$ .

верхности  $x = \text{const}$ . Очевидно,  $\vec{n} = \nabla x = \nabla(x - ct)$ . Пользуясь (41.01), находим

$$\text{div } \vec{E} = \vec{e} \nabla f(x - ct) = f' \vec{e} \cdot \vec{n} = 0, \quad \left(f' = \frac{df}{dx}\right). \quad (41.09)$$

Из (41.09) следует, что  $\vec{e} \cdot \vec{n} = 0$ , то есть электрическое поле перпендикулярно к направлению распространения. То же самое следует из уравнения  $\text{div } \vec{B} = 0$  для магнитного поля. Итак, электромагнитные волны в вакууме всегда поперечные, то есть векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны к направлению распространения.

Найдем магнитную составляющую поля. Из второй группы уравнений (41.01) и (41.08) имеем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{e} f = -[\nabla f, \vec{e}] = -[\vec{n}, \vec{e}] f'(x - ct).$$

Поэтому

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{e}] f(x - ct)$$

(постоянная интегрирования взята равной нулю, поскольку рассматривается лишь переменное поле). Окончательно,

$$\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (41.10)$$

Аналогично для вектора  $\vec{E}$  получаем

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}]. \quad (41.11)$$

Равенства (41.10) и (41.11) совпадают с соотношениями (13.01), если положить согласно (13.03)  $\vec{v} = c\vec{n}$ . Таким образом, в плоской электромагнитной волне электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны. При этом

зависимость  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  от  $x - ct$  одинаковая и в каждой точке в каждый момент времени напряженности равны одна другой по величине (рис. 25).

Легко видеть, что электромагнитная волна переносит с собой энергию и импульс, причем плотности потока энергии и импульса равны соответственно:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{cE^2}{4\pi} \vec{n} = \frac{cB^2}{4\pi} \vec{n} = c\omega \vec{n}, \quad \vec{g} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{n}. \quad (41.12)$$

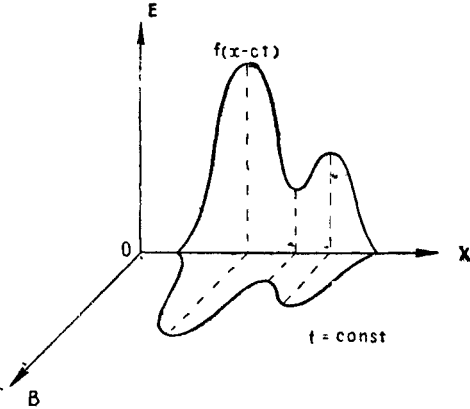


Рис. 25.

### Задачи

1. Показать, что если плоская электромагнитная волна распространяется в направлении  $\vec{n}$ , не совпадающем ни с одной координатной осью, то ее уравнение можно написать в форме

$$\vec{E} = \vec{e} f(\vec{n} \vec{r} - ct), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}], \quad \vec{e} \cdot \vec{n} = 0.$$

Решение. Выберем направление  $\vec{n}$  за ось  $x'$ , тогда  $\vec{E} = \vec{e} f(x' - ct)$ . Замечая, что  $x' = \vec{n} \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения, получим искомое уравнение.

2. Вывести уравнение (41.03).

3. Написать волновое уравнение в сферических координатах и исследовать решение, зависящее только от  $r$  и  $t$ .

Решение. Волновое уравнение в сферических координатах  $r, \vartheta, \alpha$  имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Если  $\psi$  зависит лишь от  $r$  и  $t$ , то оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Из него следует, что  $r\psi = f(r - ct) + g(r + ct)$ , где  $f$  и  $g$  — произвольные функции, которые надо выбрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия. Функция  $f(r - ct)$  изображает сферическую волну, расходящуюся со скоростью  $c$  из начала координат по всем направлениям, а функция  $g(r + ct)$  — сферическую волну, идущую из бесконечности и сжимающуюся к началу координат.

### § 42. Монохроматические плоские поляризованные волны

Волна, в которой поле меняется гармонически с некоторым периодом  $\tau$ , называется монохроматической. Напряженности поля в такой волне меняются со временем по закону  $\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \alpha\right)$ , где  $\alpha$  — начальная фаза. Напишем функцию  $f(x - ct)$  в форме  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . Тогда для монохроматической волны будем иметь

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right], \quad (42.01)$$

где  $\vec{E}_0$  — постоянная амплитуда колебаний.

Введем циклическую частоту колебаний  $\omega$  и волновое число  $k$ , определяемые равенствами

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad k = \frac{2\pi}{c\tau} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (42.02)$$

( $\lambda = c\tau$  — длина волны). Согласно (42.01) и (41.10) имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}_0] \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (42.03)$$

Величина  $\chi = \omega t - kx + \alpha$  называется фазой волны. Поверхность постоянной фазы  $\chi = \chi_0 = \text{const}$  есть плоскость  $kx = \omega t + \alpha - \chi_0$ , передвигающаяся с «фазовой» скоростью  $\frac{\omega}{k} = c$ .

Если направление  $\vec{n}$  распространения волны не совпадает с какой-либо из осей координат, то уравнения волны (42.03) могут быть написаны в форме

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}_0] \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha). \quad (42.04)$$

Вектор

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (42.05)$$

называется волновым вектором.

В силу исторической традиции для линейно поляризованной волны плоскость, в которой лежит вектор  $\vec{E}$ , называют плоскостью колебаний, а плоскость, в которой лежит вектор  $\vec{B}$ , — плоскостью поляризации.

Часто пользуются комплексной формой уравнения монохроматической волны, которая имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha)} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}. \quad (42.06)$$

Здесь  $\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{E}_0 e^{-i\alpha}$  — комплексный вектор. Чтобы получить (42.04), от выражения (42.06) надо взять вещественную часть.

Наряду с линейно- (или плоско-) поляризованными волнами существуют эллиптически поляризованные волны. Пусть в положительном направлении оси  $x$  одновременно распространяются две сдвинутые по фазе линейно-поляризованные волны, векторы поляризации которых  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  взаимно перпендикулярны:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 a_1 \cos(\omega t - kx), \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_2 a_2 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (42.07)$$

Если разность фаз  $\alpha = 0$ , то эти две волны, накладываясь, дают одну линейно-поляризованную волну с амплитудой  $\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2$ . Но если  $\alpha \neq 0$ , то в каждой точке пространства вектор напряженности  $\vec{E}$  вращается в плоскости  $\vec{e}_1 \vec{e}_2$ , причем его конец описывает эллипс. Полуоси и ориентация эллипса определяются  $a_1$ ,  $a_2$  и разностью фаз  $\alpha$ . Такая волна называется эллиптически поляризованной. В частности, если  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\vec{E}_2 = \mp \vec{e}_2 a_2 \sin(\omega t - kx)$ , а единичные векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  выбрать в качестве ортов осей  $y$  и  $z$ , то уравнение эллипса, описываемого концом вектора  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , имеет вид

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} = 1. \quad (42.08)$$

Знаки  $\pm$  определяют направление вращения вектора  $\vec{E}$ . Эллиптическая поляризация называется правой (знак положительный), если для наблюдателя, смотрящего навстречу волне, вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке. Поляризация называется левой, если вектор  $\vec{E}$  вращается против часовой стрелки.

Если  $a_1 = a_2$ , то эллипс превращается в круг (вектор  $\vec{E}$  не меняет своей величины). Такая волна называется поляризованной по кругу.

### Задача

Определить расположение эллипса поляризации в случае произвольной разности фаз  $\alpha$ .

Решение. Из (42.07)  $E_z = a_2 (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha)$ , где  $\varphi = \omega t - kx$ . Исключая фазу  $\varphi$  при помощи уравнения  $\cos \varphi = \frac{E_y}{a_1}$ , получим уравнение эллипса

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} - 2 \frac{E_y E_z}{a_1 a_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

### § 43. Общее решение волнового уравнения. Группы волн

Общее решение волнового уравнения (41.02) или (41.03) можно представить в форме наложения (суперпозиции) плоских монохроматических линейно-поляризованных волн с различными волновыми векторами  $\vec{k}$ , частотами  $\omega = ck$  и направлениями поляризации

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (43.01)$$

Подобное разложение называется спектральным. Так как  $\vec{k}$  меняется, вообще говоря, непрерывно, вместо суммы следует писать трехкратный интеграл Фурье по всем трем составляющим вектора  $\vec{k}$  (по  $\vec{k}$ -пространству). Если потребовать, чтобы поле было вещественным, надо брать сумму (43.01) и комплексно сопряженной величины. Итак,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (d\vec{k}) \{ \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}^*(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \}. \quad (43.02)$$

Здесь  $\vec{E}(\vec{k})$  — комплексная амплитуда,  $\vec{E}^*$  — сопряженная величина,  $(d\vec{k}) = dk_x dk_y dk_z$  — элемент объема в  $\vec{k}$ -пространстве. Аналогично пишется спектральное разложение магнитного поля.

Монохроматические плоские волны (42.06) не ограничены в пространстве и времени, поэтому они являются математической абстракцией, реализующейся с некоторым приближением. В природе источники излучают волновое поле всегда за конечное время. Поэтому поле всегда занимает конечную часть пространства. В этом случае говорят

о волновом пакете или группе волн. Группу волн всегда можно представить в форме спектрального разложения (43.02) по плоским волнам. Эти волны, налагаясь друг на друга, создают в данный момент в определенном объеме некоторое суммарное поле, а вне этого объема интерферируют так, что полностью гасят друг друга.

Пусть поле  $\psi$  (то есть  $\vec{E}$  или  $\vec{B}$ ) представляется группой плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ ,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad (43.03)$$

Амплитуда  $\psi(k)$  равна

$$\psi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) e^{-i(kx - \omega t)} dx. \quad (43.04)$$

Последнее выражение легко получается из (43.03), если умножить (43.03) на  $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-ik'x}$ , проинтегрировать по всем  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и учесть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k'). \quad (43.05)$$

Допустим, что волновые числа накладываются монохроматических волн лежат в интервале  $k_0 - \frac{\Delta k}{2} \leq k \leq k_0 + \frac{\Delta k}{2}$ , где  $\Delta k \ll k_0$ , а амплитуда  $\psi(k) = \psi_0$  — одна и та же для всех  $k$  из этого интервала и равна нулю вне его. Так как  $\Delta k$  мало, то частоту  $\omega$ , которая есть функция  $k$ , можно разложить в ряд по степени  $k - k_0$

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 (k - k_0) + \dots, \quad \omega_0 = \omega(k_0). \quad (43.06)$$

Теперь интеграл (43.03) дает

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{\psi_0}{(2\pi)^{1/2}} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(kx - \omega t)} dk = \\ &= \frac{\psi_0}{(2\pi)^{1/2}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{+\frac{\Delta k}{2}} e^{i\left[x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right] \xi} d\xi = \\ &= \frac{\psi_0 \Delta k}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin\left[\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right) \frac{\Delta k}{2}\right]}{\left[x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right] \frac{\Delta k}{2}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \end{aligned} \quad (43.07)$$

где  $\xi = k - k_0$ . Это есть «модулированная» плоская волна со средней «несущей» частотой  $\omega_0$  и соответствующим ей волновым числом  $k_0$ . Но амплитуда волны

$$a(x, t) = \frac{\psi_0 \Delta k}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\sin \chi}{\chi}, \quad \chi = \left[ x - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right] \frac{\Delta k}{2} \quad (43.08)$$

уже не постоянна в пространстве и времени. Она имеет резкий максимум при  $\chi = 0$ , то есть  $x = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t$  (рис. 26). Это значит, что максимум  $a(x, t)$  движется равномерно с так называемой групповой скоростью

$$v = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0. \quad (43.09)$$

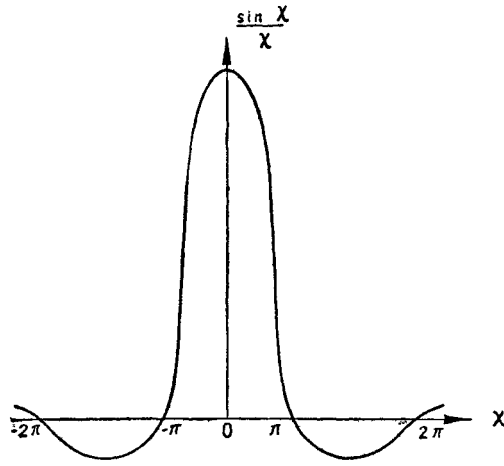


Рис. 26.

В случае волн в вакууме  $\omega = ck$  и  $v = c$ , то есть групповая скорость совпадает с фазовой. При более сложной зависимости  $\omega$  от  $k$  групповая скорость будет отлична от фазовой (см. гл. VIII).

Из рисунка 26 видно, что множитель  $a$  существенно отличен от нуля лишь в области первого максимума; он обращается в нуль при  $\chi = \Delta\chi = \pi$  и затем колеблется с быстро уменьшающейся амплитудой. Для момента  $t$  область  $\Delta x$ , в которой поле  $\psi$  существенно отлично от нуля, определяется из условия  $\Delta\chi = \Delta x \cdot \frac{\Delta k}{2} \gtrless \pi$ . Откуда  $\Delta x \Delta k \gtrless 2\pi$ . Аналогично при данном  $x$  длительность  $\Delta t$  группы волн во времени определяется из условия  $|\Delta\chi| = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 \Delta t \frac{\Delta k}{2} \gtrless \pi$ . Так как  $\left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 \Delta k = \Delta\omega$ , то  $\Delta\omega \Delta t \gtrless 2\pi$ . Таким образом,

$$\Delta x \Delta k \gtrless 2\pi, \quad \Delta t \cdot \Delta\omega \gtrless 2\pi. \quad (43.10)$$

Эти «соотношения неопределенности» показывают, что чем меньше область пространства, в которой локализована группа волн, тем шире интервал волновых чисел этой группы; чем меньше длительность  $\Delta t$  группы волн, тем шире ее интервал частот.

#### § 44. Скалярный и векторный электромагнитные потенциалы

Вернемся к вопросу о вычислении электромагнитного поля произвольно движущихся электрических зарядов. В общем случае электромагнитное поле заданного распределения заряда  $\rho(\vec{r}, t)$  и тока  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  характеризуется уравнениями Максвелла — Лоренца

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (44.01)$$

причем

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (44.02)$$

Так как  $\rho$  и  $\vec{j}$  отличны от нуля, то при выводе волновых уравнений с помощью (44.01) появятся производные от  $\rho$  и  $\vec{j}$ . Поэтому для определения поля по заданным  $\rho$  и  $\vec{j}$  обычно пользуются электромагнитными потенциалами, которые являются обобщением электростатического потенциала  $\varphi$  и векторного потенциала  $\vec{A}$  (гл. II) на случай переменного электромагнитного поля.

Рассмотрим вторую группу уравнений (44.01). Из  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  следует, что магнитное поле вихревое и можно положить

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (44.03)$$

Вектор  $\vec{A}$  зависит от координат и времени и называется электромагнитным векторным потенциалом. Подставив (44.03) в первое уравнение, находим

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что  $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  — потенциальный вектор, который можно положить равным  $-\operatorname{grad} \varphi$ . Таким образом,

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (44.04)$$

Скаляр  $\varphi$ , зависящий от координат и времени, называется электромагнитным скалярным потенциалом.

Из (44.04) видно, что электрическое поле в общем случае определяется не только скалярным, но и векторным потенциалом  $\vec{A}$ .

Член  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  определяет вихревую часть электрического поля, или, другими словами, его индукционную часть, циркуляция которой

(работа переноса единичного заряда) по замкнутому контуру отлична от нуля. Если  $\vec{A}$  не зависит от времени, то (44.04) переходит в уравнение (26.01) для статического электрического поля.

Чтобы определить потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , подставим (44.03) и (44.04) в уравнения (44.01). Замечая, что  $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \\ &+ \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 4\pi\rho. \end{aligned} \right\} \quad (44.05)$$

Для разделения неизвестных введем дополнительное условие Лоренца (условие калибровки)

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (44.06)$$

Это условие обобщает условие (34.05) для векторного потенциала стационарного магнитного поля.

Возможность наложения условия (44.06) вытекает из того, что потенциалы полем определены неоднозначно. Действительно, электромагнитные потенциалы можно подвергнуть градиентному преобразованию

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (44.07)$$

( $\chi$  — произвольная функция координат и времени), при котором напряженности не изменяются,

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \\ \vec{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \end{aligned}$$

Учитывая, что непосредственно измеряются только  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а потенциалы  $\varphi$  и  $\vec{A}$  имеют вспомогательный характер и непосредственно не измеряются, всегда можно выбрать функцию так, что будет выполнено условие Лоренца (44.06). В этом случае уравнения (44.05) принимают вид

$$\square^2 \vec{A} \equiv \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (44.08)$$

$$\square^2 \varphi \equiv \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r}, t). \quad (44.09)$$

Уравнения (44.08) и (44.09) являются обобщением уравнений Пуассона (27.01) и (34.06) и переходят в последние, если  $\rho$  и  $\vec{j}$  не зависят от времени. Они называются неоднородными уравнениями Даламбера или неоднородными волновыми уравнениями. При  $\vec{j} = 0$  и  $\rho = 0$  эти уравнения обращаются в обычные волновые уравнения.

### Задачи

1. Доказать, что  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  удовлетворяют однородным волновым уравнениям, если этим уравнениям удовлетворяют  $\vec{A}$  и  $\varphi$ .

2. Показать, что при  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$  для электромагнитных потенциалов можно выбрать калибровку

$$\varphi = 0, \quad \text{div } \vec{A} = 0$$

и получить результаты § 41. Показать, что поперечность электромагнитных волн вытекает из условия калибровки.

Решение. Очевидно, что условия  $\varphi = 0$ ,  $\text{div } \vec{A} = 0$  сразу разделяют переменные в (44.05) и приводят к волновому уравнению для  $\vec{A}$ . Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , получим  $\vec{A} = \vec{A}(x - ct)$ . Далее,  $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$ . Следовательно,  $A_x = 0$ , то есть волна поперечная.

3. Показать, что для монохроматической плоской волны

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$$

имеют место соотношения

$$\vec{E} = i\vec{k} \vec{A}, \quad \vec{B} = i[\vec{k}, \vec{A}].$$

4. Показать, что при условии (44.06) скалярный и векторный потенциалы монохроматической волны связаны соотношением  $\vec{k} \vec{A} - \frac{\omega}{c} \varphi = 0$ , которое приводит к поперечности волн.

5. Показать, что условие калибровки автоматически удовлетворяется, если  $\varphi$  и  $\vec{A}$  выразить через вектор Герца («поляризационный потенциал»)  $\vec{Z}$ :

$$\varphi = -\text{div } \vec{Z}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}.$$

6. Показать, что вектор Герца будет удовлетворять уравнению

$$\square \vec{Z} = -4\pi \vec{P},$$

если согласно закону сохранения заряда положить

$$\rho = -\text{div } \vec{P}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

( $\vec{P}$  имеет смысл вектора электрической поляризации, то есть дипольного момента единицы объема).

## § 45. Запаздывающие и опережающие потенциалы

Определение электромагнитного поля по заданному распределению заряда и тока сводится к нахождению частных решений неоднородных волновых уравнений (44.08) и (44.09). Для определения потенциала воспользуемся методом, примененным в § 27: определим потенциал  $\varphi$ , создаваемый достаточно малым, квазитоочечным источником, а затем, пользуясь принципом суперпозиции, определим потенциал произвольного распределения заряда.

Предположим, что плотность заряда во всем пространстве, кроме точки  $Q(\vec{r}')$ , равна нулю, а в точке  $Q(\vec{r}')$  находится меняющийся со временем заряд  $e(t)$ . Тогда плотность заряда можно написать в форме  $\rho(\vec{r}, t) = e(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . Наше предположение противоречит закону сохранения заряда, однако вычисление поля переменного точечного источника имеет лишь вспомогательный характер — окончательный результат, полученный применением принципа суперпозиции, удовлетворяет закону сохранения заряда.

Потенциал переменного точечного источника удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi e(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (45.01)$$

Очевидно, что потенциал точечного заряда должен быть сферически симметричен и можно положить  $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(R, t)$ , где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  — расстояние точки наблюдения  $A(\vec{r})$  от источника  $Q(\vec{r}')$ . Поэтому, написав  $\nabla^2$  в сферических координатах и учитывая, что  $\rho = 0$  вне точки  $Q$ , получим

$$\frac{\partial^2 R\varphi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 R\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением (41.06). Поэтому его общий интеграл имеет вид  $R\varphi = f\left(t - \frac{R}{c}\right) + g\left(t + \frac{R}{c}\right)$ , откуда

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{g\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

Рассмотрим сначала частное решение

$$\varphi = \frac{f\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad (45.02)$$

Определим функцию  $f$ . Заметим, что при  $R = 0$  должно удовлетворяться уравнение (45.01). При  $R \rightarrow 0$  потенциал неограниченно возрастает и  $\nabla^2 \varphi$  возрастает значительно быстрее, чем  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ . Поэтому

уравнение (45.01) переходит в уравнение для кулоновского потенциала

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e(t) \delta(\vec{R}).$$

Таким образом, при  $R \rightarrow 0$  потенциал (45.02) должен переходить в кулоновский потенциал  $\frac{e(t)}{R}$ ; поэтому  $f(t) = e(t)$  и

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad (45.03)$$

Это значит, что потенциал в момент  $t$  в точках, находящихся на расстоянии  $R$  от заряда, определяется не величиной заряда  $e(t)$ , а величиной  $e(t')$ , где  $t' = t - \frac{R}{c}$ . Другими словами, поле заряда  $e$  распространяется из точки  $Q(\vec{r}')$  в виде сферической волны, расширяющейся со скоростью  $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ , и достигает точки  $A(\vec{r})$  не мгновенно, а запаздывая на время  $t - t' = \frac{R}{c}$ . Поэтому потенциал (45.03) называется запаздывающим.

Второе частное решение уравнения (45.01) приводит к опережающему потенциалу

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R}, \quad (45.04)$$

определяющему потенциал в точке  $A(\vec{r})$  в момент  $t$  через значение заряда в момент  $t + \frac{R}{c}$ .

Выбор одного из двух решений определяется начальными условиями задачи. Если дано распределение заряда  $\rho$  в пространстве для  $t \geq 0$ , дан потенциал  $\varphi$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  для момента  $t = 0$  во всем пространстве, а требуется отыскать потенциал в любой момент  $t > 0$ , то решение уравнения (45.01) определяется однозначно в виде запаздывающего потенциала. Если дано  $\rho$  для  $t \leq 0$ , а надо определить потенциал  $\varphi$  для  $t \leq 0$ , то однозначным решением (45.01) будет опережающий потенциал.

Таким образом асимметрия решения во времени, содержащаяся в (45.03) или (45.04), есть следствие постановки задачи, известной под названием задачи Коши: даны начальные (или конечные) условия, требуется определить значения потенциала в будущем (или в прошлом). Исходные дифференциальные уравнения электродинамики (44.08) и (44.09) не содержат временной асимметрии, они полностью обратимы во времени.

Перейдем к общему случаю меняющегося со временем произвольного распределения заряда и тока. Бесконечно малый заряд

$de' = \rho(\vec{r}', t') dV'$ , находящийся в элементе объема  $dV'$  около точки  $Q(\vec{r}')$ , создает в точке  $A(\vec{r})$  в момент  $t$  согласно (45.03) запаздывающий потенциал

$$d\varphi(\vec{r}, t) = \frac{de'}{R} = \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV',$$

где  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  — расстояние  $QA$ . Полный потенциал в точке  $A$  равен

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV', \quad (45.05)$$

где интегрирование производится по всему пространству, точнее, по всем точкам  $Q(\vec{r}')$ , которые имели заряд в соответствующий «эффективный» момент

$$t' = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (45.06)$$

Уравнение для векторного потенциала (44.08) по форме совпадает с уравнением для  $\varphi$ . Поэтому его решение может быть также представлено в форме запаздывающего потенциала

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'. \quad (45.07)$$

Чтобы получить общий интеграл неоднородного волнового уравнения, надо к частному решению неоднородного уравнения прибавить общий интеграл однородного уравнения. Последний можно взять в форме суммы плоских волн, как это сделано в § 43. Выбирая соответствующим образом амплитуды волн, можно удовлетворить заданным начальным условиям.

### Задачи

1. Показать, что запаздывающий потенциал (45.05) удовлетворяет уравнению (44.09).

Решение. Обозначив  $\rho' = \rho(\vec{r}', t')$ , где  $t' = t - \frac{R}{c}$ ,  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , имеем

$$\nabla^2 \varphi = \int dV' \nabla^2 \frac{\rho'}{R} = \int dV' \left\{ \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} + 2 \nabla \frac{1}{R} \cdot \nabla \rho' + \frac{1}{R} \nabla^2 \rho' \right\}.$$

Но

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{R} &= -\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \nabla \rho' = \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\vec{R}}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \\ \nabla^2 \rho' &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t'^2} - \frac{2}{cR} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \end{aligned}$$

Поэтому

$$\nabla^2 \varphi = \int dV' \left\{ \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t'^2} \right\}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int \frac{dV'}{R} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t'^2}.$$

Поэтому

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \int \rho' \nabla^2 \frac{1}{R} dV' = -4\pi \rho(\vec{r}, t),$$

так как по (4.11)

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{R}) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

2. Доказать, что потенциалы (45.05) и (45.07) удовлетворяют условию калибровки (44.06).

Решение. Введем  $\vec{j}' = \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$ . Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{div} \frac{\vec{j}'}{R} dV' = \frac{1}{c} \int \left( \vec{j}' \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \operatorname{div} \vec{j}' \right) dV'.$$

Здесь  $\operatorname{div} \vec{j}' = \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla R$ . Перейдем от дифференцирования по координатам точки  $A$  к дифференцированию по координатам  $\vec{r}'$  точки  $Q$ . Пользуясь равенством  $\nabla = -\nabla'$ , имеем

$$\operatorname{div} \vec{j}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla R = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t'} \nabla' R = -\{ \operatorname{div}' \vec{j}' - (\operatorname{div}' \vec{j}')_{t' = \text{const}} \}.$$

Последняя дивергенция берется при  $t' = t - \frac{R}{c} = \text{const}$ . Теперь

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\vec{j}' \nabla' \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \nabla' \vec{j}' + \frac{1}{R} (\nabla' \vec{j}')_{t' = \text{const}} \right\} dV' = \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\operatorname{div}' \frac{\vec{j}'}{R} + \frac{(\operatorname{div}' \vec{j}')_{t'}}{R} \right\} dV'. \end{aligned}$$

Первый член равен нулю, так как может быть преобразован по формуле Остроградского в интеграл по поверхности, охватывающей все поле, на которой  $j'_n = 0$ . Так как

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int \frac{1}{R} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dV',$$

то

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} \left\{ (\operatorname{div}' \vec{j}')_{t' = \text{const}} + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \right\} dV'.$$

Следовательно, условие (44.06) выполнено, если  $\rho'$  и  $\vec{j}'$  удовлетворяют закону сохранения заряда.

3. Доказать, что если  $\vec{P}$  (плотность поляризации некоторого объема) меняется со временем, то вектор Герца (задачи 5, 6, § 45) равен

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{P}(\vec{r}', t')}{R} dV', \quad t' = t - \frac{R}{c}.$$

#### § 46. Запаздывающие потенциалы на большом расстоянии от системы зарядов

Вычисление запаздывающих потенциалов по формулам (45.05) и (45.07) затруднено тем, что интегрирование производится по зарядам  $\rho'$  и токам  $\vec{j}'$ , взятым в различные моменты времени  $t' = t - \frac{R}{c}$ . Значительное упрощение получается в двух предельных случаях: 1) если расстояние от точки наблюдения до системы, создающей поле, велико по сравнению с размерами системы и 2) если имеется движущийся точечный или квазипочечный заряд. Рассмотрим первый случай.

Пусть начало  $O$  системы отсчета выбрано внутри области, занятой системой зарядов, а  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  — радиус-векторы точки наблюдения  $A$  и элемента объема  $dV'$ . Если размеры системы малы по сравнению с  $r$ , то есть  $r' \leq a \ll r$ , то потенциалы можно разложить в ряд по степеням  $\frac{a}{r}$ . Этот метод был уже применен в § 28 и 36 для исследования стационарных полей.

Введем единичный вектор  $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ , тогда

$$R^2 = (\vec{r} - \vec{r}')^2 = r^2 + r'^2 - 2r(\vec{n}\vec{r}').$$

Разлагая  $R$  и  $\frac{1}{R}$  в ряд по  $\frac{r'}{r}$ , получим

$$R = [r^2 - 2r(\vec{n}\vec{r}') + r'^2]^{\frac{1}{2}} = r - (\vec{r}'\vec{n}) + \frac{1}{2r} [r'^2 - (\vec{r}'\vec{n})^2] + \dots \quad (46.01)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}'\vec{n})}{r^2} + \frac{1}{2r^3} [-r'^2 + 3(\vec{r}'\vec{n})^2] - \dots \quad (46.02)$$

Будем вести разложение  $R$  до членов порядка  $\frac{1}{r}$  включительно. Подставим  $R$  в выражение для плотности заряда  $\rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})$ , которое разложим в ряд по степеням  $\frac{r'}{r}$ :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) &= \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\vec{r}'}{c} + \frac{(\vec{n}\vec{r}')^2 - r'^2}{2cr} + \dots) = \\ &= \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) + \left\{ (\vec{n}\vec{r}') + \frac{(\vec{n}\vec{r}')^2 - r'^2}{2r} \right\} \frac{\dot{\rho}'}{c} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n}\vec{r}')^2 + \frac{(\vec{n}\vec{r}')^2 - r'^2}{r} (\vec{n}\vec{r}') \right\} \frac{\ddot{\rho}'}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

Здесь через  $\rho'$  обозначено  $\rho$  в момент  $t' = t - \frac{r}{c}$ ,  $\dot{\rho}$  обозначает  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Разделив это разложение на  $R$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} = & \frac{1}{r} \left\{ \rho' + \frac{(\vec{n} \vec{r}')}{c} \dot{\rho}' + \frac{(\vec{n} \vec{r}')^2}{2c^2} \ddot{\rho}' + \dots \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2} \left\{ (\vec{n} \vec{r}') \rho' + \frac{3(\vec{n} \vec{r}')^2 - r'^2}{2c} \dot{\rho}' + \dots \right\} + \dots \quad (46.03) \end{aligned}$$

Разложение вектора  $\frac{\vec{j}}{R}$  аналогично (46.03):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} = & \frac{1}{r} \left\{ \vec{j}' + \frac{\vec{n} \vec{r}'}{c} \dot{\vec{j}}' + \frac{(\vec{n} \vec{r}')^2}{2c^2} \ddot{\vec{j}}' + \dots \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2} \left\{ (\vec{n} \vec{r}') \vec{j}' + \frac{3(\vec{n} \vec{r}')^2 - r'^2}{2c} \dot{\vec{j}}' + \dots \right\}. \quad (46.04) \end{aligned}$$

Подставив (46.03) в (45.05) и вынеся операцию дифференцирования по времени за знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) = & \frac{1}{r} \int \rho' dV' + \frac{\vec{n}}{cr} \frac{d}{dt} \int \vec{r}' \rho' dV' + \\ & + \frac{1}{2rc^2} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{d^2}{dt^2} \int x'_\alpha x'_\beta \rho' dV' + \frac{\vec{n}}{r^2} \int \vec{r}' \rho' dV' + \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \int \frac{3(\vec{n} \vec{r}')(\vec{n} \vec{r}') - r'^2}{2c} \rho' dV' + \dots \quad (46.05) \end{aligned}$$

Здесь  $\int \rho' dV' = e$  есть полный заряд системы, а  $\int \vec{r}' \rho' dV' = \vec{p}'$  согласно (29.02) есть дипольный момент системы, взятый в момент времени  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Третий член приводится к квадрупольному моменту. Действительно, поле не изменится, если над потенциалами произвести градиентное преобразование с помощью некоторой функции  $\chi$ , которую выберем равной

$$\chi = \frac{1}{2cr} \frac{d}{dt} \int \frac{r'^2}{3} \rho' dV'. \quad (46.06)$$

Приведем третий член (46.05), вычитая из него  $\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$  и замечая, что  $1 = n^2 = \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \delta_{\alpha\beta}$ , к виду

$$\frac{1}{6r} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho' dV'.$$

Стоящая под знаком производной величина есть согласно (30.02) компонента  $Q_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента, взятая в момент времени  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Выражение для потенциала принимает вид

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \left\{ e + \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}'}{c} + \frac{1}{6c^2} \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} + \dots \right\} + \\ + \frac{1}{r^2} \left\{ \vec{n} \cdot \vec{p}' + \frac{1}{3c} \left( \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \dot{Q}'_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha} \dot{Q}'_{\alpha\alpha} \right) + \dots \right\} + \dots \quad (46.07)$$

Первые члены фигурных скобок — известные из второй главы потенциалы точечного заряда и диполя. Члены, обратно пропорциональные  $r$ , называются радиационными мультипольными потенциалами, так как они медленнее других членов убывают с расстоянием и определяют поле излучения (радиации) рассматриваемой системы. Член

$$\varphi_{\text{дип.}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}'}{cr} \quad (46.08)$$

называется скалярным дипольным радиационным потенциалом, а член

$$\varphi_{\text{кв.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} = \frac{\vec{n}^{(2)} \cdot \ddot{\vec{Q}}' \vec{n}}{c^2 r} \quad (46.09)$$

— скалярным квадрупольным радиационным потенциалом.

Векторный потенциал преобразуется аналогично (46.07). Подставим разложение (46.04) в (45.07). Вынося операцию дифференцирования по времени за знак интегрирования, получим

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}' dV' + \frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}' dV' + \\ + \frac{1}{cr^2} \int (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}' dV' + \dots \quad (46.10)$$

Первый член (46.10) аналогичен первому члену в (36.01). Но в рассматриваемом случае ток  $\vec{j}$  — переменный (может быть не замкнутым). Поэтому интеграл  $\int \vec{j}' dV'$  не исчезает. Преобразуем его следующим образом:

$$\int \vec{j}' dV' = \sum_a e_a \vec{v}'_a = \frac{d}{dt} \sum_a e_a \vec{r}'_a = \frac{d\vec{p}'}{dt} = \dot{\vec{p}}'.$$

Первый член (46.10)

$$\vec{A}_{\text{дип.}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}' dV = \frac{\dot{\vec{p}}'}{cr} \quad (46.11)$$

есть так называемый векторный дипольный радиационный потенциал. Второй член (46.10) преобразуется аналогично преобразованию второго члена в (36.01)

$$\frac{1}{c} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c} \int \{\vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) + \vec{r}'(\dot{j}'\vec{n})\} dV' + \left[ \frac{1}{2c} \int [\vec{r}', \dot{j}'] dV', \vec{n} \right].$$

В этом выражении первый член правой части преобразуем, перейдя к точечным зарядам.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \{\vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) + \vec{r}'(\dot{j}'\vec{n})\} dV' &= \frac{1}{2} \sum_a e_a \{\vec{v}_a(\vec{r}_a\vec{n}) + \vec{r}_a(\dot{\vec{v}}_a\vec{n})\} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_a e_a \vec{r}_a(\vec{r}_a\vec{n}) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{c} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV' + [\vec{m}', \vec{n}].$$

Здесь согласно (36.06)  $\vec{m}'$  — магнитный дипольный момент системы, взятый в момент  $t'$ . Поэтому

$$\frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' = \frac{1}{2c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) \rho' dV' + \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}}', \vec{n}]. \quad (46.12)$$

Первый член (46.12) содержит часть квадрупольного момента. Его можно преобразовать, учитывая, что нами было сделано калибровочное преобразование с функцией  $\chi$  (46.06). К векторному потенциалу согласно (44.07) надо добавить  $\text{grad} \chi$ .

$$\text{grad} \chi = -\frac{1}{2c} \frac{\vec{n}}{r^2} \frac{d}{dt} \int \frac{r'^2}{3} \rho' dV' - \frac{\vec{n}}{2c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \frac{r'^2}{3} \rho' dV',$$

так как  $\nabla \rho' = \dot{\rho}' \nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c} \dot{\rho}'$ ,  $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$ . Первый член складывается с первым членом второй фигурной скобки в выражении для  $\vec{A}$ ; второй член складывается с первым членом в (46.12) и образует вторую производную от тензора  $Q_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2 r} \frac{d}{dt} \int \vec{j}'(\vec{r}'\vec{n}) dV' + \nabla \chi &= \frac{1}{6c^2 r} \frac{d^2}{dt^2} \int \{3\vec{r}'(\vec{r}'\vec{n}) - r'^2 \vec{n}\} \rho' dV' + \\ &+ \frac{1}{cr} [\dot{\vec{m}}', \vec{n}] + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий под знаком  $\frac{d^2}{dt^2}$ , равен, очевидно, произведению  $\vec{n}^{(2)}Q$ . Поэтому получаем

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\dot{\vec{p}}'}{c} + \frac{\vec{n}^{(2)}\ddot{Q}'}{6c^2} + \frac{[\dot{\vec{m}}', \vec{n}]}{c} + \dots \right\} + \\ + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{[\vec{m}', \vec{n}]}{c} + \frac{\vec{n}^{(2)}\dot{Q}'}{c} + \dots \right\} + \dots \quad (46.13)$$

Первый член в первой фигурной скобке, как уже указано, есть дипольный радиационный потенциал; второй

$$\vec{A}_{\text{кв.}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}^{(2)}\ddot{Q}'}{6c^2 r} \quad (46.14)$$

есть векторный квадрупольный радиационный потенциал; третий член

$$\vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{[\dot{\vec{m}}', \vec{n}]}{cr} \quad (46.15)$$

есть магнитный радиационный потенциал. Заметим, что имеют место соотношения

$$\varphi_{\text{дип.}} = \vec{n}\vec{A}_{\text{дип.}}, \quad \varphi_{\text{кв.}} = \vec{A}_{\text{кв.}}\vec{n}. \quad (46.16)$$

Первый член во второй фигурной скобке есть магнитный дипольный потенциал, взятый в момент  $t'$ .

Рассмотрим условия применимости нашего разложения. Если  $a$  — размеры области, занятой зарядами, то  $p \sim ea$ ,  $^{(2)}Q \sim ea^2$  и т. д. Соответствующие производные будут иметь порядки  $\dot{p} \sim \frac{ea}{\tau}$ ,  $^{(2)}\ddot{Q} \sim \frac{ea^2}{\tau^2}$ , где  $\tau$  — некоторое характеристическое время изменения системы. Если моменты меняются периодически, то  $\tau$  есть период колебаний; если моменты меняются непериодически, то  $\tau$  есть время, в течение которого они меняются заметным образом, например на порядок своей величины. В фигурных скобках в выражениях (46.07) и (46.13) мультипольные моменты делятся на различные степени скорости  $c$  и мы можем заключить, что в этих скобках производится разложение по степеням параметра  $\frac{a}{c\tau}$ . Разложение, очевидно, применимо, если

$$\frac{a}{c\tau} \ll 1. \quad (46.17)$$

Критерий (46.17) означает, что для применимости разложения надо, чтобы характеристическое время  $\tau$  было велико по сравнению

со временем  $\frac{a}{c}$  распространения поля через систему, то есть чтобы за время  $\tau$  мультипольные моменты менялись незначительно. В случае периодического изменения моментов  $c\tau = \lambda$  есть длина волны излучения. Поэтому (46.17) принимает вид

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1, \quad (46.18)$$

то есть размеры излучающей системы должны быть малы по сравнению с длиной волны излучения.

Заметив, что  $a \sim v\tau$ , где  $v$  есть скорость движения зарядов, можно написать критерий (46.17) в форме

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad (46.19)$$

показывающей, что разложение применимо, если скорость зарядов мала по сравнению со скоростью света.

Если (46.17) имеет место, то в фигурных скобках (46.13) можно ограничиться первыми членами разложения. Следующие члены будут играть главную роль, если в силу особо симметричного распределения заряда в системе первые члены исчезают. Если при этом

$$r \gg \lambda \gg a, \quad (46.20)$$

то членами порядка  $\frac{1}{r^2}$  и высшими вообще можно пренебречь и рассматривать только радиационное поле. Область на больших расстояниях, для которой выполнено (46.20), называется волновой зоной; область, для которой имеет место  $r \lesssim \lambda$ , называется статической.

### Задачи

1. Показать, что для точечного диполя вектор Герца (см. задачу § 45) равен

$$\vec{Z} = \frac{\vec{p}(t')}{r}.$$

2. Вывести дипольные радиационные потенциалы (46.08) и (46.11), пользуясь вектором Герца из предыдущей задачи.

## § 47. Электрическое дипольное излучение (диполь Герца)

Рассмотрим поле, соответствующее радиационным дипольным потенциалам. Допустим, что в начале координат расположен переменный во времени диполь с моментом  $\vec{p}(t)$ . Поле такого диполя впервые было изучено Генрихом Герцем (1887) и поэтому часто

пользуются термином «диполь Герца». Согласно (46.07) и (46.13) потенциалы переменного диполя определяются формулами

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}'}{cr} + \frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}'}{r^2}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}'}{cr}. \quad (47.01)$$

Штрих у дипольного момента обозначает, что последний берется в момент времени  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Дипольный статический член сохранен в выражении для  $\varphi$ , чтобы рассмотреть поле в статической зоне.

Поле вычисляется по формулам (44.03) и (44.04)

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (47.02)$$

При дифференцировании по координатам следует учитывать, что  $\vec{r}$  входит не только явно, но и неявно через  $t'$ . Поэтому

$$\nabla f(t') = \frac{df}{dt'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{df}{dt'} \vec{n}, \quad (47.03)$$

так как  $\nabla r = \vec{n}$  и  $\nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c}$ . Вычислим сперва магнитное поле

$$\vec{B} = \text{rot } \frac{\dot{\vec{p}}'}{cr} = \frac{1}{c} \left[ \nabla, \frac{\dot{\vec{p}}'}{r} \right] = \frac{1}{c} \left[ \nabla \frac{1}{r}, \dot{\vec{p}}' \right] + \frac{1}{c} [\nabla t', \ddot{\vec{p}}'],$$

то есть

$$\vec{B} = \frac{[\dot{\vec{p}}', \vec{n}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{\vec{p}}', \vec{n}]}{c^2 r}. \quad (47.04)$$

Первый член (47.04) есть квазистационарное магнитное поле, соответствующее полю Био — Савара (7.03). Отличие состоит лишь в том, что учитывается запаздывание и ток выражен через производную по времени от дипольного момента. Второй член есть радиационное магнитное поле.

Рассмотрим электрическое поле. Вычислим  $\nabla\varphi$  и  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

$$\nabla\varphi = \nabla \left( \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}'}{cr} + \frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}'}{r^2} \right) = \left\{ \nabla \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}'}{c} + \frac{\nabla(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}')}{cr} \right\} + \nabla \frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}'}{r^2}. \quad (47.05)$$

Но

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}') &= \nabla \left( \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}'}{r} \right) = -\frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}')}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}'}{r} + (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}') \nabla t' = \\ &= \frac{\dot{\vec{p}}'}{r} - \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}')}{r} - \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}')}{c}. \end{aligned}$$

Последний член в (47.05) есть поле диполя (см. § 29) плюс добавочный член, возникающий вследствие наличия  $\vec{r}$  в выражении для  $t'$

$$\nabla \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2} = \frac{\vec{p}' - 3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{r^3} - \frac{\vec{n} \vec{p}'}{r^2} \cdot \frac{\vec{n}}{c}.$$

Поэтому (47.05) приводится к виду

$$\nabla \varphi = -\frac{\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}'})}{c^2 r} + \frac{\ddot{\vec{p}'} - 3\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}'})}{cr^2} + \frac{\vec{p}' - 3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}')}{r^3}.$$

Далее,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}'}}{cr} = \frac{\ddot{\vec{p}'}}{c^2 r},$$

поэтому

$$\vec{E} = \frac{\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}'}) - \ddot{\vec{p}'}}{c^2 r} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \dot{\vec{p}'}) - \dot{\vec{p}'}}{cr^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \vec{p}'}{r^3}. \quad (47.06)$$

Первый член (47.06) есть радиационное поле; последний — поле электрического диполя с учетом того, что поле в момент  $t$  в точке  $\vec{r}$  определяется значением дипольного момента в предшествующий момент  $t' = t - \frac{r}{c}$ ; средний член дает добавочное поле, исчезающее при  $\dot{\vec{p}'} = 0$ .

Итак, поле переменного диполя можно разложить на два поля: квазистатическое и радиационное. Квазистатическое поле диполя равно

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{дип.}} &= \frac{3\vec{n}(\vec{n} \dot{\vec{p}'}) - \dot{\vec{p}'}}{cr^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \vec{p}') - \vec{p}'}{r^3}, \\ \vec{B}_{\text{дип.}} &= \frac{[\dot{\vec{p}'}, \vec{n}]}{cr^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47.07)$$

Магнитное поле перпендикулярно к  $\vec{n}$  и  $\dot{\vec{p}'}$ . Электрическое поле, зависящее от  $\dot{\vec{p}'}$ , лежит в плоскости  $\dot{\vec{p}'}, \vec{n}$ . Поэтому эти электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны в любой точке пространства. Полное поле  $\vec{E}_{\text{дип.}}$  будет перпендикулярно к  $\vec{B}_{\text{дип.}}$  лишь в том случае, когда  $\dot{\vec{p}'}$  параллельно  $\vec{p}'$ .

Радиационное поле переменного диполя выражается формулами

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{n}(\vec{n} \ddot{\vec{p}'}) - \ddot{\vec{p}'}}{c^2 r} = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}'}, \vec{n} \vec{n}], \\ \vec{B} &= \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}'}, \vec{n}]. \end{aligned} \right\} \quad (47.08)$$

Отсюда видно, что радиационное электромагнитное поле диполя обладает следующими свойствами:

1) Электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к радиус-вектору  $\vec{r}$  точки наблюдения относительно диполя,

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}], \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (47.09)$$

Формулы (47.09) совпадают с формулам (41.10) и (41.11) для плоской волны.

Если ввести сферическую систему координат с началом в диполе и в качестве полярной оси выбрать направление вектора  $\vec{p}$ , то электрическое поле будет направлено по меридиану в сторону возрастания полярного угла  $\vartheta$  (угол между  $\vec{p}$  и  $\vec{n}$ ), а магнитное поле — по параллели в сторону возрастания азимута  $\alpha$  (рис. 27).

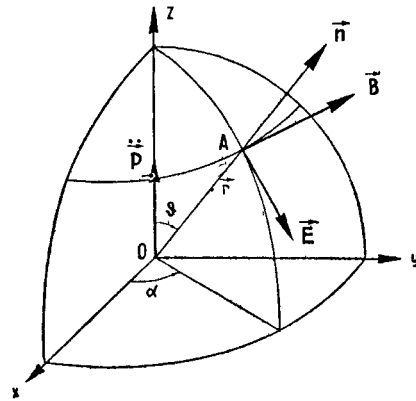


Рис. 27.

2) Электрическое и магнитное поля обратно пропорциональны расстоянию от переменного диполя и численно равны друг другу,

$$E = B = \frac{\ddot{p}'}{c^2 r} \sin \vartheta. \quad (47.10)$$

Если поле наблюдается в точке  $A(\vec{r})$  в момент  $t$ , то значение  $\ddot{p}'$  следует брать в момент  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Это значение будет одно и то же для сферы, радиус которой растет по закону  $r = c(t - t')$ . Таким образом, поверхности постоянной «фазы» суть концентрические сферы и радиационное поле образует сферическую волну, распространяющуюся во все стороны от диполя со скоростью  $c$ .

Напряженности радиационного поля пропорциональны  $\frac{1}{r}$ . Квазистатическое поле (47.07) пропорционально  $\frac{1}{r^2}$ . Поэтому на больших расстояниях от диполя играет роль только радиационное поле.

Электромагнитное поле есть вид материи. Следовательно, диполь Герца непрерывно испускает по всем направлениям материю в виде электромагнитных волн. Излучаемое поле уносит с собой энергию и количество движения. Направление вектора Умова — Пойнтинга (плотности потока энергии) совпадает с направлением распространения волны в данной точке,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{[\ddot{p}', \vec{n}]^2}{4\pi c^3 r^2} \cdot \vec{n} = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3 r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}. \quad (47.11)$$

Из (47.11) следует, что интенсивность излучения  $S$  обратно пропорциональна квадрату расстояния от диполя, равна нулю в направлениях к полюсам ( $\vartheta = 0, \pi$ ) и достигает максимума в экваториальной плоскости ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ). Так как коэффициент при  $\vec{n}$  положителен, то вектор  $\vec{S}$  всегда направлен от переменного диполя, то есть переменный во времени диполь будет непрерывно терять энергию в виде электромагнитного излучения.

Вычислим полную энергию, излучаемую диполем в единицу времени и равную потоку  $\vec{S}$  через замкнутую поверхность, охватывающую диполь. Выберем сферу радиуса  $r$  с центром в диполе. Элемент поверхности  $d\vec{\sigma} = r^2 d\Omega \vec{n}$ , где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым  $d\sigma$  видно из начала координат. Количество энергии  $d\mathcal{J}$ , протекающей в единицу времени через элемент шаровой поверхности, равно

$$d\mathcal{J} = \vec{S} d\vec{\sigma} = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (47.12)$$

Полная энергия, излучаемая диполем в единицу времени, получается интегрированием по всей поверхности сферы (по всему телесному углу). Так как  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ , то

$$d\mathcal{J} = \frac{\ddot{p}'^2}{4\pi c^3} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (47.13)$$

Интегрируя по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi$ , а по  $\alpha$  — от 0 до  $2\pi$ , получим

$$\mathcal{J} = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}'^2. \quad (47.14)$$

Таким образом, излучаемая в единицу времени энергия определяется второй производной дипольного момента по времени. Излучаемая энергия равна нулю, если  $\ddot{p}' = 0$ .

### Задача

Найти составляющие радиационного поля в декартовых координатах.

Решение. Выберем за ось  $z$  направление  $\vec{p}'$  (рис. 27). Согласно (47.08)

$$B_x = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{p}'_y n_z - \ddot{p}'_z n_y) = -\frac{\ddot{p}'_y}{c^2 r^2}, \quad B_y = \frac{\ddot{p}'_x}{c^2 r^2}, \quad B_z = 0.$$

$$E_x = [\vec{B}, \vec{n}]_x = \frac{\ddot{p}'_y}{c^2 r} \cdot \frac{xz}{r^2}, \quad E_y = \frac{\ddot{p}'_x}{c^2 r} \frac{yz}{r^2}, \quad E_z = -\frac{\ddot{p}'_x}{c^2 r} \frac{x^2 + y^2}{r^2}.$$

## § 48. Гармонически колеблющийся диполь

Применим результаты § 47 к диполю Герца, колеблющемуся гармонически,

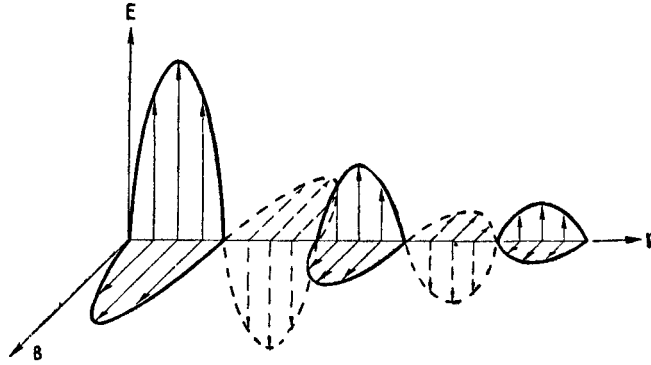
$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin \omega t. \quad (48.01)$$

Такой диполь служит простейшей моделью излучающего атома или антенны радиостанции. Если излучаемая диполем энергия непрерывно восполняется или мала по сравнению с энергией колеблющейся системы, то затуханием колебаний вследствие излучения за некоторый промежуток времени можно пренебречь. Тогда для нее применимо (48.01).

Согласно (47.10)

$$E = B = \frac{p_0 \omega^2}{c^2 r} \sin \vartheta \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (48.02)$$

Отсюда следует, что частота излучения равна механической частоте колебаний диполя. Поле излучения меняется периодически во времени



с периодом  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  и в пространстве с длиной волны  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально расстоянию от диполя (рис. 28).

Энергия, излучаемая в единицу времени внутрь телесного угла  $d\Omega$ , согласно (47.12) равна

$$d\mathcal{J} = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta \sin^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) d\Omega. \quad (48.03)$$

Излучение не равномерно в течение периода. В среднем по периоду оно равно

$$d\overline{\mathcal{J}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega, \quad (48.04)$$

так как  $\overline{\sin^2 \omega t'} = \frac{1}{2}$ . Полная энергия, излучаемая в среднем в единицу времени, получается интегрированием по всем направлениям и равна

$$\bar{\mathcal{J}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}, \quad (48.05)$$

то есть излучаемая энергия пропорциональна квадрату амплитуды дипольного момента и четвертой степени частоты колебаний. Поэтому при одинаковых амплитудах колебаний интенсивность излучения очень сильно растет с увеличением частоты.

В общем случае дипольный момент  $\vec{p}$  может меняться не гармонически. Тогда его можно разложить в ряд (или интеграл) Фурье по частотам:

$$\vec{p} = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{p}_k e^{i\omega_k t}, \quad \vec{p}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (48.06)$$

Так как  $\vec{p}$  — вещественно, то  $\vec{p}_{-k} = \vec{p}_k^*$  (звездочка [\*] обозначает комплексно сопряженную величину),  $\omega_{-k} = -\omega_k$ . В случае обыкновенного ряда Фурье  $\omega_k = k\omega$ , где  $\omega$  — основная частота.

Вычислим среднее по времени от квадрата  $\vec{p}$ :

$$\begin{aligned} \bar{p}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k, l=-\infty}^{+\infty} \vec{p}_k \vec{p}_l \omega_k^2 \omega_l^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega_k + \omega_l)t} dt = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k, l} \vec{p}_k \vec{p}_l \omega_k^2 \omega_l^2 \delta(\omega_k + \omega_l), \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\omega_k + \omega_l)t} dt = \delta(\omega_k + \omega_l)$$

есть  $\delta$ -функция. Таким образом, отличны от нуля лишь те члены, для которых  $\omega_k + \omega_l = 0$ , то есть  $l = -k$ , поэтому

$$\vec{p}_k \vec{p}_l = |\vec{p}_k|^2$$

и

$$\bar{p}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\vec{p}_k|^2 \omega_k^4 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |\vec{p}_k|^2 \omega_k^4. \quad (48.07)$$

Подставляя (48.07) в (47.14), получим

$$\bar{\mathcal{J}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k^2 \omega_k^4}{3c^3}, \quad (48.08)$$

то есть полная интенсивность излучения равна сумме интенсивностей отдельных гармонических составляющих.

## § 49. Квадрупольное и магнитное дипольное излучение

Если вторая производная дипольного момента системы обращается в нуль, то излучение возникает вследствие изменения квадрупольного или магнитного момента системы. В первом случае излучение называется электрическим квадрупольным, во втором — магнитным дипольным.

Рассмотрим поле излучения. На больших расстояниях  $r \gg \lambda \gg a$  сферическую электромагнитную волну можно рассматривать как плоскую. Тогда согласно (41.11) электрическое поле связано с магнитным и вектором распространения волны  $\vec{n}$  соотношением

$$\vec{E} = [\vec{B}, \vec{n}]. \quad (49.01)$$

Поэтому для определения поля излучения достаточно найти магнитное поле. По (46.14) векторный квадрупольный потенциал равен

$$\vec{A}_{\text{кв.}} = \frac{\vec{n}^{(2)} \ddot{Q}'}{6c^2 r} = \frac{\ddot{\vec{Q}}'}{6c^2 r}, \quad (49.02)$$

где для удобства введен вектор

$$\ddot{\vec{Q}}' = \vec{n}^{(2)} Q'. \quad (49.03)$$

Поскольку мы ограничиваемся лишь полем излучения, при вычислении  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$   $r$  и  $\vec{n}$  надо считать постоянными, и зависимость  $\vec{A}_{\text{кв.}}$  от  $r$  учитывать только через  $t'$ . Так как  $\nabla t' = -\frac{\vec{n}}{c}$ , то

$$\vec{B} = \frac{1}{6c^2 r} [\nabla t', \ddot{\vec{Q}}'] = \frac{[\ddot{\vec{Q}}, \vec{n}]}{6c^3 r}, \quad \vec{E} = \frac{1}{6c^3 r} [\ddot{\vec{Q}}', \vec{n}, \vec{n}]. \quad (49.04)$$

Сравнение (49.04) с (47.08) показывает, что поле излучения квадрупольного поля получается из поля диполя заменой  $\vec{p}'$  вектором  $\frac{\ddot{\vec{Q}}'}{6c}$ . Но угловая зависимость поля (49.04) сложнее, чем в (47.08), так как вектор  $\vec{n}$  входит в определение  $\ddot{\vec{Q}}$ .

Энергия, излучаемая в единицу времени внутрь телесного угла  $d\Omega$ , согласно (49.03) и (49.04) равна

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{144\pi c^5} \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta \right\} d\Omega. \quad (49.05)$$

Полная энергия излучения в единицу времени по всем направлениям получается интегрированием по всему телесному углу. Обозначим

среднее по всему телесному углу от некоторой  $f$  через  $\bar{f}$ . Тогда

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi} \int f d\Omega,$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{36c^5} \left\{ \sum_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} \overline{n_\beta n_\gamma} - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} \right\}. \quad (49.06)$$

Средние значения произведений  $n_\alpha$  вычисляются следующим способом. Так как  $\vec{n}$  — единичный вектор, а  $n_\alpha n_\beta$  — симметричный тензор, то  $\overline{n_\alpha n_\beta}$  может выражаться только через единичный тензор  $\delta_{\alpha\beta}$ , то есть  $\overline{n_\alpha n_\beta} = a \delta_{\alpha\beta}$ . Суммируя по  $\alpha = \beta$  и пользуясь тем, что  $\sum_\alpha n_\alpha^2 = 1$ , получаем  $a = \frac{1}{3}$ . Далее,  $n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta$  есть компоненты симметричного тензора четвертого ранга. В силу симметрии имеем  $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = a' (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$ . Суммируя по  $\alpha = \beta$  и  $\gamma = \delta$ , находим  $a' = 1/15$ . Фигурная скобка в (49.06) равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{\alpha\beta\gamma} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{15} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \ddot{Q}'_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\gamma\delta} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) = \\ = \frac{1}{5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15} \left( \sum_{\alpha\beta} \ddot{Q}'_{\alpha\alpha} \right)^2 = \frac{1}{5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2, \end{aligned}$$

так как  $\sum_\alpha Q_{\alpha\alpha} = 0$ . Окончательно,

$$\mathcal{J} = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha\beta} (\ddot{Q}'_{\alpha\beta})^2. \quad (49.07)$$

Если  $\vec{p} = 0$  и  $\ddot{Q} = 0$ , но вторая производная от магнитного момента не исчезает, то существует магнитное дипольное излучение. Примером такой системы служит замкнутый линейный проводник («рамка»), по которому идет переменный ток (магнитный момент меняется со временем). Согласно (46.16) магнитные радиационные потенциалы равны

$$\varphi_m = 0, \quad \vec{A}_m(\vec{r}, t) = \frac{[\vec{m}', \vec{n}]}{cr}. \quad (49.08)$$

Пренебрегая членами, содержащими степени  $\frac{1}{r}$  выше первой, получим:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n}, \vec{m}'], \\ \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}_m = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n}, [\vec{n}, \vec{m}']]. \end{aligned} \right\} \quad (49.09)$$

Отсюда

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{B}], \quad \vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]. \quad (49.10)$$

Как и следовало ожидать, электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и равны:

$$E = B = \frac{\ddot{m}'}{c^2 r} \sin \vartheta, \quad (49.11)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\vec{m}'$  и  $\vec{r}$ . Если  $\vec{m}$  направить по полярной оси, то  $\vec{B}$  будет направлено по меридиану в сторону возрастания  $\vartheta$ ,

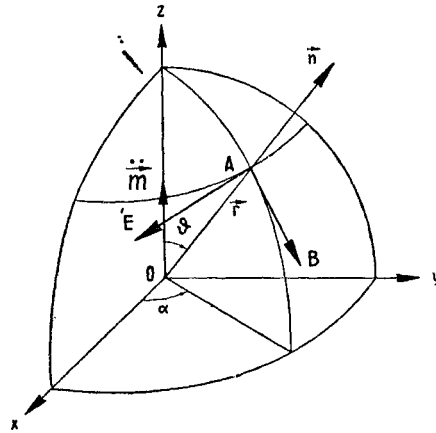


Рис. 29.

а  $\vec{E}$  — по параллели в сторону убывания азимута  $\alpha$  (рис. 29). В формулах для интенсивности (47.12) и (47.14) заменяется  $\vec{p}$  на  $\vec{m}$ :

$$d\mathcal{J} = \frac{\ddot{m}'^2}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega, \quad \mathcal{J} = \frac{2}{3c^3} \ddot{m}'^2. \quad (49.12)$$

## § 50. Радиационное поле и излучение ускоренно, но медленно движущегося заряда

Рассмотрим поле излучения ускоренно движущегося квазитоочечного заряда. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Действительно, для равномерно движущегося заряда существует инерциальная система отсчета, в которой он неподвижен. Излучение же возникает лишь при ускоренном движении заряда.

Воспользуемся результатами § 47. Пусть имеется точечный заряд  $e$ , скорость которого  $v \ll c$ , но ускорение  $\vec{v}$  отлично от нуля. Обозначим радиус-вектор заряда через  $\vec{r}$ . Если представить, что в начале координат расположен неподвижный заряд  $-e$ , то получим диполь

с моментом  $\vec{p} = e\vec{r}'$ . Поэтому  $\vec{p} = e\vec{v}$ . Подставив последнее в (47.08), найдем:

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 r} [\dot{\vec{v}}', \vec{n}], \quad \vec{B} = \frac{e}{c^2 r} [\vec{v}', \vec{n}]. \quad (50.01)$$

Штрих в (50.01) обозначает, что ускорение заряда надо брать не в момент наблюдения  $t$ , а в момент  $t' = t - \frac{r}{c}$ . Если ось  $z$  считать направленной по  $\vec{v}'$ , то графически поле может быть представлено рисунком 27.

Согласно (47.11) и (47.14) вектор Умова — Пойнтинга и полная энергия, излучаемая ускоренно, но медленно движущимся зарядом в единицу времени по всем направлениям, равны

$$\vec{S} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\dot{\vec{v}}', \vec{n}]^2}{r^2} \vec{n} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{\dot{v}'^2}{r^2} \sin^2 \vartheta \vec{n}, \quad (50.02)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\dot{\vec{v}}$  и  $\vec{n}$ ;

$$\mathcal{J} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}'^2. \quad (50.03)$$

Таким образом, энергия излучаемого электромагнитного поля зависит только от величины заряда и его ускорения.

## § 51. Исторические замечания

Существование электромагнитных волн теоретически было предсказано Максвеллом в 1864 году в работе «Динамическая теория электромагнитного поля». В третьей части работы Максвелл устанавливает основные уравнения, причем вместо уравнений второй группы пользуется выражениями (44.03) и (44.04). В шестой части работы Максвелл показывает, что при отсутствии зарядов система построенных им уравнений имеет решение в виде плоской волны, распространяющейся в вакууме со скоростью  $c$ . Сравнивая значение электродинамической постоянной со скоростью света, Максвелл приходит к выводу, что «совпадение результатов, по-видимому, показывает, что свет и магнетизм являются проявлением свойств одной и той же субстанции и что свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле в соответствии с законами электромагнетизма». Таким образом была создана теория электромагнитных волн и электромагнитная теория света, значение которых в современной физике трудно переоценить. Представления Максвелла первоначально не встретили поддержки. Например, в 1888 году видный физик Э. Кон читал курс теоретической оптики на основе классической теории Юнга — Френеля, а Томсон (Кельвин) до конца своей жизни не принимал теории Максвелла.

Постепенно идеи Максвелла завоевали признание в широких кругах физиков. Существенную роль в их пропаганде сыграл А. Г. Столетов, разработавший (1871—1876) метод весьма точного измерения электродинамической постоянной. Совпадению значений электродинамической постоянной и скорости света в вакууме Столетов придавал особое значение, так как тогда это было единственной экспериментальной опорой электромагнитной теории света.

Перелом в отношении к теории Максвелла наступил в результате экспериментальных работ Герца, (1857—1894), предпринятых с целью доказательства существования магнитного поля, определяемого максвелловским током смещения, и электрического поля, определяемого магнитным током смещения. В работе «О весьма быстрых электрических колебаниях» Герц описывает открытый вибратор (диполь Герца), с помощью которого были обнаружены электромагнитные волны. В работах «Об электромагнитных волнах в воздухе и об их отражении» (1888) и «Силы электрических колебаний, рассмотренные с точки зрения теории Максвелла» (1889) Герц дает теорию излучения открытого вибратора, рассмотренную нами в § 47 и 48. Работа «О лучах электрической силы» (1889) завершает исследования Герца по электромагнитным волнам и доказательству совпадения их свойств с предсказанными теорией.

Результатом работ Герца явилось полное признание электромагнитной теории Максвелла, а после замечательных работ А. С. Попова развилась новая отрасль техники — радиотехника. В связи с теорией излучения антенн в радиотехнике были рассмотрены излучения квадруполь и магнитного диполя.

С развитием электронной теории возникла задача об излучении ускоренно движущегося заряда. Результаты, изложенные в § 50, были получены впервые Ларморов в 1897 году.

*Часть вторая*  
**МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

---

ГЛАВА V  
**ОБЩИЕ ЗАКОНЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**§ 65. Микроскопическое и макроскопическое  
электромагнитное поле**

Уравнения Максвелла — Лоренца (22.01) и (22.02) не применимы к исследованию явлений в веществе, так как внутри тела и даже внутри каждого атома тела все величины, входящие в уравнения микроскопического поля, являются сложными и быстро меняющимися функциями координат и времени.

Способ описания электромагнитных явлений в веществе был найден Максвеллом в 1855—1873 гг. Этот способ опирается на четыре вектора макроскопического электромагнитного поля: векторы напряженности  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и векторы индукции  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , которые удовлетворяют макроскопическим уравнениям Максвелла — Герца:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \end{aligned} \right\} \quad \text{(I)} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(II)} \quad (65.01)$$

Векторы макроскопического поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  принципиально отличаются от напряженностей микроскопического поля (обозначим их  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$ ), входящих в уравнения (22.01) и (22.02). Достаточно указать, что даже в однородных телах (например, в диэлектрике между пластинами плоского конденсатора) напряженности микрополя  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$  значительно изменяются как в пространстве (внутри атома и между атомами), так и со временем с частотами, характерными для внутриатомных процессов. Макроскопические же величины  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  или постоянны, или меняются в пространстве и времени настолько медленно, что их изменение можно непосредственно изме-

ритель. Изменение макроскопических величин с течением времени определяется, вообще говоря, изменением внешних условий. Микро-скопические величины меняются почти независимо от внешних усло-вий, так как они определяются движением и расположением микро-частиц — электронов и атомных ядер.

Покажем, что уравнения Максвелла (65.01) могут быть получены из микро-скопических уравнений (22.01) и (22.02) путем некоторого пространственно-временного усреднения.

Особенности, связанные с квантовыми эффектами, неявно учи-тываются уравнениями Максвелла через эмпирические коэффициенты, входящие в полную систему уравнений.

### § 66. Макроскопические (усредненные) величины

Связь между микро-скопическими и макроскопическими величи-нами можно получить путем пространственно-временного усреднения уравнений Лоренца. Задача усреднения заключается в получении величин, непосредственно сравнимых с измеренными на опыте.

Допустим, что надо измерить вектор электрической напряжен-ности в теле. Измерение производится посредством макроскопиче-ских приборов и сводится к измерению силы  $\vec{F}$ , действующей на некоторый пробный заряд  $e_0$ . Если в качестве пробного заряда взять электрон или  $\alpha$ -частицу, то можно измерить напряженность  $\vec{E}'$  ми-кроскопического электрического поля. При макроскопических изме-рениях пробный заряд занимает объем  $V_0$ , в котором содержится большое число атомов тела (в противном случае будет измеряться микро-скопическое поле). С другой стороны, объем пробного заряда  $V_0$  должен быть мал по сравнению с размерами тела, в котором изме-ряется поле (иначе невозможно найти распределение макроскопиче-ского поля внутри тела). Объемы  $V_0$ , малые по сравнению с разме-рами тела, но большие по сравнению с размерами атомов, называются макроскопически малыми или физически бесконечно малыми.

Мгновенная сила, действующая на пробный заряд, равна

$$\vec{F} = \int_{(V_0)} \vec{F}' dV = \int_{(V_0)} \rho_0 \vec{E}' dV,$$

где  $\vec{F}' dV = \rho_0 \vec{E}' dV$  — микро-скопическая сила, действующая на объем  $dV$  пробного заряда, распределенного с плотностью  $\rho_0$ . Не нарушая общности, можно считать, что пробный заряд распределен по объему  $V_0$  равномерно. Тогда

$$\vec{F} = \rho_0 \int_{(V_0)} \vec{E}' dV.$$

Следует принять во внимание, что безынерционных физических приборов не существует и всякое измерение имеет свою длитель-

ность. Промежуток времени  $t_0$ , в течение которого производится измерение, должен быть велик по сравнению с периодами изменения микроскопических полей, но мал по сравнению со временем изменения внешних воздействий или условий опыта. Такие промежутки времени называются макроскопически малыми (или физически бесконечно малыми).

Таким образом, измерение напряженности электрического поля сводится к измерению изменения количества движения пробного заряда за макроскопически малый промежуток времени:

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{F}t_0 = \rho_0 \int_{(t_0)} dt \int_{(V_0)} \vec{E}' dV.$$

Напряженность  $\vec{E}$  макроскопического электрического поля получается делением  $\vec{F}$  на величину пробного заряда  $e_0 = \rho_0 V_0$

$$\vec{E} = \frac{1}{t_0 V_0} \int_{(t_0)} dt \int_{(V_0)} \vec{E}' dV. \quad (66.01)$$

Заметим, что плотность пробного заряда в (66.01) не входит. Поэтому будем считать, что пробный заряд всегда можно выбрать настолько малым, чтобы он своим полем не вызывал изменений в распределении зарядов тела (не вызывал бы искажений микроскопического поля  $\vec{E}'$ ). На самом деле электрический заряд имеет атомистическое строение и принципиально не существует сколь угодно малых пробных зарядов, распределенных равномерно по объему  $V_0$ .

Поэтому величину  $\vec{E}$ , даваемую выражением (66.01), следует рассматривать как определение напряженности макроскопического электрического поля. Всякое измерение напряженности поля действительным пробным зарядом будет давать величину, несколько отличающуюся от  $\vec{E}$ , поскольку микроскопическое поле  $\vec{E}'$  изменяется под воздействием пробного заряда. Обычно считается, что искажение поля мало и измеряемая на опыте напряженность практически не отличается от идеальной макроскопической напряженности (66.01).

Таким образом, всякой микроскопической величине  $f(\vec{r}, t) \equiv f(x, y, z, t)$  можно сопоставить макроскопическую величину  $\bar{f}(x, y, z, t)$ , получающуюся путем усреднения по макроскопически малому объему  $V_0$ , окружающему точку  $\vec{r}(x, y, z)$ , и макроскопически малому промежутку времени  $t_0$  вблизи момента  $t$ :

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0 t_0} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{+\frac{t_0}{2}} \int_{(V_0)} f(x+x', y+y', z+z', t+t') \times \\ \times dx' dy' dz' dt'. \quad (66.02)$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты некоторой точки внутри  $V_0$ , например центра, если  $V_0$  есть некоторая сфера радиуса  $a$ . Поэтому средние (макроскопические) величины можно рассматривать как функции точки  $\vec{r}$  тела и момента времени  $t$ , около которых производится усреднение. В действительности макроскопические величины суть функции области, по которой производится усреднение.

Усреднение, дифференцирование и интегрирование (66.02) по любому из четырех аргументов представляют собой при заданных  $V_0$  и  $t_0$  переместительные операции — производная от среднего значения равна среднему значению от производной, интеграл от среднего значения равняется среднему значению от интеграла

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}, \quad \int \bar{f} dx = \overline{\int f dx} \quad (66.03)$$

и т. д.

Кроме того, среднее значение от суммы равно сумме средних значений, то есть

$$\overline{f \pm g} = \bar{f} \pm \bar{g}. \quad (66.04)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак усреднения

$$(\overline{cf}) = c\bar{f}, \quad c = \text{const.} \quad (66.05)$$

В силу перечисленных свойств имеем

$$\overline{\text{div } \vec{a}} = \text{div } \vec{a}, \quad \overline{\text{rot } \vec{a}} = \text{rot } \vec{a} \quad (66.06)$$

и т. д.

### § 67. Вторая группа уравнений Максвелла. Вектор магнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Вторая группа уравнений Максвелла получается путем усреднения второй группы уравнений Максвелла — Лоренца по макроскопически малому объему и промежутку времени. Пользуясь (66.03) и (66.06), получим

$$\overline{\text{rot } \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}} = \text{rot } \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = 0, \quad \overline{\text{div } \vec{B}'} = \text{div } \vec{B}' = 0.$$

Среднее значение напряженности микроскопического электрического поля  $\vec{E}' = \vec{E}$  по (66.01) есть напряженность макроскопического электрического поля. Среднее значение напряженности микроскопического магнитного поля  $\vec{B}' = \vec{B}$  в силу исторически сложившейся традиции принято называть вектором магнитной индукции.

Уравнения второй группы Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (67.01)$$

Формально эти уравнения совпадают со второй группой уравнений Максвелла — Лоренца, но принципиально отличаются от последних тем, что содержат макроскопические величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Первое уравнение показывает, что вихревое электрическое поле создается меняющейся со временем магнитной индукцией. Второе уравнение показывает, что магнитная индукция не имеет источников (то есть не существует «свободных» магнитных зарядов).

Из первого уравнения (67.01) вытекает закон электромагнитной индукции. Электродвижущая сила в замкнутом контуре  $C$  равна

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = \oint_C \vec{E} d\vec{r}.$$

По формуле Стокса и по (67.01) получим

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (67.02)$$

где

$$\Phi = \int_{(\sigma)} B_n d\sigma \quad (67.03)$$

есть поток вектора магнитной индукции через поверхность  $\sigma$ , ограниченную контуром  $C$ .

Проинтегрируем  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  по произвольному объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $\sigma$ . Пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\oint_{(\sigma)} B_n d\sigma = 0 \quad (67.04)$$

— поток магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это эквивалентно утверждению, что линии вектора магнитной индукции замкнуты.

## § 68. Свободные и связанные заряды

Усредняя по макроскопически малому объему и промежутку времени уравнения первой группы Максвелла — Лоренца, получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \bar{\rho}', \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}'. \quad (68.01)$$

Для усреднения зарядов и токов разделим все заряды в макроскопическом теле на свободные и связанные. Пусть микроскопическая плотность свободных зарядов равна  $\rho'_f$ , а микроскопическая плотность

связанных зарядов —  $\rho_g$ . Соответственно микроскопические плотности токов свободных и связанных зарядов будут  $\vec{j}_f = \rho'_f \vec{v}_f$  и  $\vec{j}_g = \rho'_g \vec{v}_g$ .

В классической теории свободными зарядами называются заряды, способные под влиянием сколь угодно малых воздействий перемещаться внутри тела на макроскопические расстояния, практически от одной границы тела до другой. Таковы, например, электроны в металлах, ионы в газах и электролитах. К свободным зарядам относят также заряды, введенные в тело (или нанесенные на его поверхность). Связанными зарядами называются заряды, которые не могут свободно перемещаться в теле. Под влиянием внешних воздействий такие заряды могут лишь смещаться из своих положений равновесия на расстояния атомного порядка.

Можно считать, что макроскопическое тело состоит из электрически нейтральных атомов или молекул. Атом или молекула представляет собой сложную систему заряженных микрочастиц — положительных ядер и отрицательных электронов. Законы движения микрочастиц устанавливаются квантовой механикой. Позаимствуем из квантовой теории упрощенное представление о движении микрочастиц, согласно которому ядра колеблются около положений равновесия, а электроны движутся вокруг ядер и образуют объемные заряды, распределенные с постоянной плотностью и дающие стационарные токи. Под влиянием внешних воздействий изменяется движение зарядов и распределение плотности. При достаточно большом воздействии связанные заряды превращаются в свободные. Таким образом, разделение зарядов на свободные и связанные условно и зависит от воздействия на них. Это разделение может считаться достаточно определенным лишь в том случае, когда воздействия, например создаваемые в телах внешние поля, достаточно малы.

Усреднив микроскопические плотности зарядов и токов, получим макроскопические плотности свободных зарядов  $\rho_f$ , связанных зарядов  $\rho_g$  и соответствующие им плотности токов —  $\vec{j}_f = \vec{j}$  (плотность тока проводимости) и  $\vec{j}_g$  (плотность тока связанных зарядов)

$$\rho = \rho_f = \bar{\rho}'_f, \quad \rho_g = \bar{\rho}'_g, \quad \vec{j} = \vec{j}_f = \overline{\rho'_f \vec{v}'_f}, \quad \vec{j}_g = \overline{\rho'_g \vec{v}'_g}. \quad (68.02)$$

Плотности заряда и тока свободных зарядов определяются распределением и движением свободных зарядов. Пусть  $n_a$  — число зарядов сорта  $a$  в кубическом сантиметре,  $\vec{v}_a$  — скорость этих зарядов. Тогда

$$\rho = \rho_f = \sum_a n_a e_a, \quad \vec{j} = \vec{j}_f = \sum_a n_a e_a \vec{v}_a \quad (68.03)$$

(суммирование производится по всем сортам зарядов). Связанные заряды требуют более детального рассмотрения (§ 69).

В случае слабых воздействий, когда превращений связанных зарядов в свободные (и обратно) не происходит, имеют место законы сохранения

$$\operatorname{div} \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j}_g + \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = 0. \quad (68.04)$$

Последнее уравнение удовлетворяется автоматически, если положить

$$\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j}_g = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{I}, \quad (68.05)$$

где  $\vec{P}$  и  $\vec{I}$  — векторы электрической и магнитной поляризации (§ 69, 70).

### § 69. Векторы электрической поляризации и электрической индукции. Теорема Гаусса.

Макроскопическую плотность зарядов в теле можно представить в форме  $\bar{\rho} = \rho_f + \rho_g$  (§ 68), тогда первое уравнение (68.01) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_f + \rho_g). \quad (69.01)$$

Это значит, что источниками макроскопического электрического поля являются как свободные, так и связанные заряды. Вычислим среднее значение плотности связанных зарядов  $\bar{\rho}_g$ . Перенумеруем все

сорта зарядов в молекулах тела  $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$ . Пусть  $\vec{r}_a$  — радиус-вектор заряда  $e_a$  относительно некоторого начала координат  $O$  (центра тяжести), выбранного внутри молекулы (атома),  $n_a$  — число атомов в кубическом сантиметре, содержащих заряд  $e_a$ .

Поверхность  $\sigma$  произвольного макроскопически малого объема  $V_0$  разделит все молекулы на три типа: 1) молекулы, целиком находящиеся внутри объема  $V_0$ , 2) молекулы, целиком находящиеся вне объема  $V_0$ , и 3) молекулы, которые поверхностью  $\sigma$  разрезаются на две части. Часть молекулы, попадающую внутрь объема  $V_0$ , условно назовем «хвостом». Хотя в целом молекулы электронейтральны, хвосты будут, вообще говоря, заряженными. Плотность связанных зарядов в объеме  $V_0$  определяется суммой всех зарядов хвостов внутри поверхности  $\sigma$ , то есть

$$\rho_g = \frac{1}{V_0} \sum e_{\text{хв.}}$$

Заряд  $e_a$  будет находиться внутри объема  $V_0$ , если начало координат  $O$  (центр тяжести молекулы) находится внутри цилиндра с образующей  $\vec{r}_a$ , построенного на элементе поверхности  $d\sigma$  с нормалью  $\vec{n}$  (рис. 31). Объем цилиндра равен  $-(\vec{r}_a \vec{n}) d\sigma$ . Следовательно, заряд сорта  $a$ , вошедший в объем  $V_0$ , равен произведению  $e_a$  на

число центров тяжести молекул, находящихся в этом цилиндре, т. е. равен  $e_a n_a (\vec{r}_a \vec{v}) d\sigma$ .

Просуммировав по всем сортам зарядов и проинтегрировав по поверхности  $\sigma$ , ограничивающей объем  $V_0$ , получим полный заряд хвостов в этом объеме. По теореме Остроградского

$$\sum e_{\text{хв.}} = - \oint_{(\sigma)} \left( \sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right) \vec{v} d\sigma = - \int_{(V_0)} dV \operatorname{div} \left( \sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right).$$

Разделив это выражение на  $V_0$ , получим мгновенную плотность зарядов,

$$\rho_g(t) = - \frac{1}{V_0} \int_{(V_0)} \operatorname{div} \left( \sum_a e_a n_a \vec{r}_a \right) dV = - \overline{\operatorname{div} \vec{P}'}^V = - \operatorname{div} \overline{\vec{P}'}^V.$$

Здесь

$$\vec{P}' = \sum_a e_a n_a \vec{r}_a \quad (69.02)$$

есть вектор микроскопической электрической поляризации (микроскопический дипольный момент единицы объема). Интегрирование по объему с последующим делением на объем области интегрирования дает усреднение только по координатам (указано значком  $V$  у черты, обозначающей усреднение). Так как усреднение по

времени не сделано, то  $\overline{\vec{P}'}^V$  колеблется с атомными частотами. После усреднения по времени получим

$$\rho_g = - \operatorname{div} \vec{P}, \quad (69.03)$$

где

$$\vec{P} = \overline{\vec{P}'} = \sum_a \overline{e_a n_a \vec{r}_a} \quad (69.04)$$

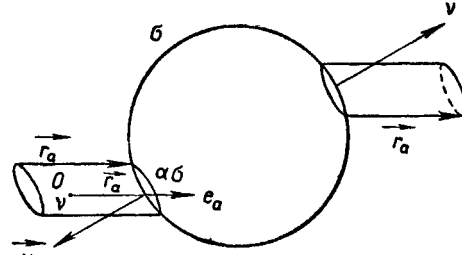


Рис. 31.

есть вектор электрической поляризации (дипольный момент единицы объема вещества).

Полная макроскопическая плотность заряда равна

$$\bar{\rho} = \rho_f + \rho_g = \rho_f - \operatorname{div} \vec{P}. \quad (69.05)$$

Подставив (69.05) в (69.01) и соединив члены с дивергенцией, получим

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_f, \quad (69.06)$$

где

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \quad (69.07)$$

есть вектор электрической индукции (электрическое смещение Максвелла). Из (69.07) видно, что вектор электрической индукции связан

как с электрическим полем, так и с распределением зарядов в веществе. Уравнение (69.06) показывает, что электрическая индукция обусловлена только свободными зарядами.

Из (69.06) следует теорема Гаусса:

$$\oint_{(\sigma)} D_n d\sigma = 4\pi e_f, \quad (69.08)$$

то есть поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на свободный заряд  $e_f = \int_{(V)} \rho_f dV$ , находящийся внутри поверхности.

Уравнение (69.03) показывает, что связанные заряды сосредоточены там, где начинаются и оканчиваются линии вектора поляризации  $\vec{P}$  ( $\text{div } \vec{P} \neq 0$ ). Знак минус указывает на то, что линии вектора поляризации начинаются на отрицательных связанных зарядах и оканчиваются на положительных.

## § 70. Вектор намагничивания и макроскопическое магнитное поле. Связанные магнитные заряды

Макроскопическую плотность тока можно написать в форме  $\vec{j}' = \vec{j}_f + \vec{j}_g$ , тогда второе уравнение (68.01) примет вид

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_g. \quad (70.01)$$

Таким образом, вихри магнитной индукции создаются изменением во времени макроскопического электрического поля и токами как свободных, так и связанных зарядов.

Вычислим среднее значение плотности тока связанных зарядов  $\vec{j}_g$ . Заметим, что  $\vec{j}_g$  состоит из двух частей — тока хвостов и тока поляризации.

Каждый заряд  $e_a$  образует ток  $e_a \vec{v}_a n_a$ . Заряды молекул, центры которых находятся в цилиндрах, построенных на  $d\sigma$  (рис. 31), образуют в объеме  $V_0$  ток хвостов —  $\sum_a e_a \vec{v}_a n_a (\vec{r}_a \vec{v}) d\sigma$ . Суммируя ток по всей поверхности и деля на объем  $V_0$ , получим мгновенную плотность тока хвостов

$$\vec{j}_{g, \text{хв.}}^V = -\frac{1}{V_0} \oint_{(\sigma)} \sum_a e_a n_a \vec{v}_a (\vec{r}_a \vec{v}) d\sigma.$$

Последнее выражение может быть преобразовано методом, примененным в § 36 при рассмотрении магнитного момента тока. Так как  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , то

$$\sum_a e_a \vec{v}_a (\vec{r}_a \vec{v}) n_a = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_a e_a n_a \vec{r}_a (\vec{r}_a \vec{v}) - c \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{v} [\vec{r}_a, \vec{v}_a]] n_a.$$

Здесь первый член исчезает при усреднении по времени, так как движение связанных зарядов финитно. Поэтому

$$\vec{j}_{g, \text{хв.}} = \vec{j}'_{g, \text{хв.}} = \frac{c}{V_0} \oint_{(\sigma)} \left[ \vec{v}, \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a}^t \right] d\sigma. \quad (70.02)$$

Введем микроскопический магнитный момент единицы объема

$$\vec{l}' = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a. \quad (70.03)$$

По известной теореме

$$\frac{1}{V_0} \oint_{(\sigma)} [\vec{v}, \vec{l}'] d\sigma = \frac{1}{V_0} \int_{(V_0)} \text{rot } \vec{l}' dV = \overline{\text{rot } \vec{l}'}^V.$$

После усреднения по времени получим

$$\vec{j}_{g, \text{хв.}} = c \text{rot } \vec{l},$$

где

$$\vec{l} = \vec{l}' = \overline{\sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] n_a} \quad (70.04)$$

есть вектор намагничивания (или намагничения) — макроскопический магнитный момент единицы объема тела. Выражение (70.04) соответствует гипотезе Ампера: намагниченность тела определяется магнитными моментами элементарных (электронных) токов, текущих в молекулах или атомах.

Под воздействием переменного внешнего поля распределение зарядов в молекулах становится нестационарным и возникает ток поляризации. Представим радиус-вектор  $\vec{r}_a$  заряда  $e_a$  в форме  $\vec{r}_a = \vec{r}_{a0} + \vec{r}'_a$ , где  $\vec{r}_{a0}$  — радиус-вектор «электрического центра тяжести орбиты», а  $\vec{r}'_a$  — мгновенный радиус-вектор заряда  $e_a$  относительно этого центра тяжести. Вектор  $\vec{r}'_a$  меняется периодически и среднее по времени  $\overline{\vec{r}'_a}^t = 0$ . Вектор  $\vec{r}_{a0}$  оказывается постоянным только в статических полях.

Производная по времени от микроскопического вектора поляризации (69.02) равна

$$\frac{\partial \vec{P}'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_a e_a n_a (\vec{r}_{a0} + \vec{r}'_a) = \sum_a e_a n_a \left( \frac{d\vec{r}_{a0}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_a}{dt} \right).$$

Так как  $\vec{r}'_a$  есть периодическая функция времени, то  $\overline{\frac{d\vec{r}'_a}{dt}} = 0$ .

Среднее  $\overline{\frac{d\vec{r}_{a0}}{dt}}$  отлично от нуля (радиус-вектор электрического центра тяжести орбиты меняется с изменением внешнего поля) и дает макроскопическую скорость смещения электрического центра тяжести орбиты заряда  $e_a$ . Производя усреднение по макроскопически малому объему, получим

$$\overline{\frac{\partial \vec{P}'}{\partial t}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \sum_a e_a n_a \overline{\frac{d\vec{r}_{a0}}{dt}}.$$

Правая часть есть искомый ток поляризации  $\vec{j}_{g, \text{поляр.}}$ , поэтому

$$\vec{j}_{g, \text{поляр.}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (70.05)$$

Полная плотность тока связанных зарядов принимает вид

$$\vec{j}_g = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{I}, \quad (70.06)$$

что совпадает с (68.05).

Подставив (70.06) в (70.01), получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f. \quad (70.07)$$

Здесь  $\vec{D}$  — вектор электрической индукции, а вектор  $\vec{H}$  равен

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{I} \quad (70.08)$$

и называется напряженностью макроскопического магнитного поля. Название вектора  $\vec{H}$  не соответствует содержанию его: вектор  $\vec{H}$  подобен вектору  $\vec{D}$  и состоит из величины  $\vec{B}$ , относящейся только к полю (хотя и называемой индукцией), и величины  $\vec{I}$ , определяемой только движением и распределением зарядов вещества. Поэтому в действительности  $\vec{H}$  есть индукция. Но в силу исторически сложившейся традиции вектор  $\vec{H}$  называют напряженностью, а вектор  $\vec{B}$ , аналогичный  $\vec{E}$ , называют индукцией.

Уравнение (70.07) показывает, что вихревое магнитное поле создается токами проводимости  $\vec{j}_f = \vec{j}$  и полным током смещения. Величину

$$\vec{j}_{\text{смещ.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (70.09)$$

Максвелл назвал плотностью тока смещения. Ток смещения складывается из тока, связанного с изменением макроскопического электрического поля, и из тока смещения связанных зарядов.

Определим магнитодвижущую силу в макроскопическом магнитном поле формулой

$$\mathcal{E}_m = \oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{r}, \quad (70.10)$$

где  $C$  — произвольный замкнутый контур. Применяя к (70.10) формулу Стокса и пользуясь (70.07), получим

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi}{c} \left( I + \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi_D}{dt} \right), \quad (70.11)$$

то есть магнитодвижущая сила, действующая в некотором контуре, пропорциональна полному току, идущему через площадь, ограниченную контуром. Полный ток складывается из тока проводимости

$$I = \int \vec{j}_f \cdot d\vec{\sigma} \quad (70.12)$$

и из тока смещения

$$I_{\text{смещ.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\psi_D}{dt}, \quad (70.13)$$

где

$$\psi_D = \int_{(\sigma)} D_n \cdot d\vec{\sigma}. \quad (70.14)$$

Подставив в уравнение  $\text{div } \vec{B} = 0$  значение  $\vec{B}$  из (70.08), получим

$$\text{div } \vec{H} = 4\pi \rho_m, \quad (70.15)$$

где

$$\rho_m = -\text{div } \vec{I}. \quad (70.16)$$

Следовательно, магнитное поле  $H$ , в отличие от магнитной индукции, имеет источники. Плотность источников (связанных магнитных масс или зарядов) определяется дивергенцией вектора намагничивания (70.16).

Из (70.15) следует теорема Гаусса для магнитного поля

$$\oint_{(\sigma)} H_n \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi e_m \quad (70.17)$$

— поток вектора напряженности магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен произведению  $4\pi$  на полный «связанный магнитный заряд»

$$e_m = \int_{(V)} \rho_m dV, \quad (70.18)$$

находящейся внутри поверхности  $\sigma$ .

### § 71. Материальные соотношения. Электрические свойства тел

Восьми уравнений Максвелла недостаточно для определения двенадцати неизвестных составляющих четырех векторов поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ . Необходимо установить добавочные связи между этими векторами. Эти добавочные связи называются материальными соотношениями или уравнениями состояния. Материальные соотношения зависят от природы вещества (материала), в котором рассматривается поле, и являются менее общими, нежели дифференциальные уравнения Максвелла.

Рассмотрим связь между вектором электрической поляризации вещества и напряженностью макроскопического электрического поля. В дальнейшем будем называть вещество диэлектриком, если рассматриваются только электрические свойства вещества, и магнетиком, если рассматриваются только его магнитные свойства.

Вектор поляризации (дипольный момент единицы объема) диэлектрика определяется формулой (69.04)

$$\vec{P} = \sum_a e_a \vec{r}_a n_a.$$

Вычисление этого вектора для произвольного диэлектрика представляет задачу микроскопической теории электрических и магнитных свойств тел (гл. VIII). Здесь же используем феноменологический метод установления связей: отвлекаясь от микростроения диэлектрика или магнетика, будем характеризовать связи между векторами поля и индукциями (или поляризациями) соотношениями, в которые входят численные коэффициенты, устанавливаемые для каждого вещества экспериментально.

Изменение напряженности  $\vec{E}$  поля сопровождается изменением электрических сил, действующих на заряды. Следовательно, должны изменяться радиус-векторы  $\vec{r}_a$  зарядов  $e_a$ , то есть  $\vec{r}_a$  будут функциями от  $\vec{E}$ . Это значит, что вектор поляризации должен быть некоторой функцией от  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ . Вид этой функции различен для различных диэлектриков. Для слабых полей можно получить ее общее выражение, если разложить  $\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}(E_x, E_y, E_z)$  в ряд и ограничиться первыми членами разложения. Для изотропных тел получаем

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \chi \vec{E} + \dots \quad (71.01)$$

Здесь  $\vec{P}_0$  есть вектор поляризации при  $\vec{E}=0$ . Он называется вектором остаточной (или спонтанной) поляризации. Для большинства тел  $P_0=0$ . Коэффициент  $\chi$  называется коэффициентом электрической поляризации вещества. При  $\vec{P}_0=0$

$$\vec{P} = \chi \vec{E}.$$

Опыт показывает, что для изотропных тел поляризация диэлектрика по направлению совпадает с направлением электрического поля. Поэтому  $\chi$  есть положительная величина.

Подставив (71.01) в (69.07), получим электрическую индукцию

$$\vec{D} = 4\pi\vec{P}_0 + \epsilon\vec{E}, \quad (71.02)$$

где

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi \quad (71.03)$$

есть диэлектрический коэффициент (диэлектрическая постоянная или электрическая проницаемость) вещества. Так как для всех тел  $\chi \geq 0$ , то  $\epsilon \geq 1$ . Для вакуума  $\epsilon = 1$  ( $\chi = 0$ ). Диэлектрический коэффициент многих веществ зависит от температуры по закону

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\text{const}}{T}.$$

Для анизотропных тел (кристаллов)  $\chi$  и  $\epsilon$  уже не скаляры, а симметричные тензоры 2-го ранга. Поэтому вместо (71.02) имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} D_x &= 4\pi P_{0x} + \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= 4\pi P_{0y} + \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= 4\pi P_{0z} + \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \right\}, \quad (71.04)$$

причем

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

Таким образом, электрические свойства анизотропного тела характеризуются не одним коэффициентом  $\epsilon$ , а шестью в общем случае различными коэффициентами  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , отчего даже при  $\vec{P}_0=0$  векторы  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  не параллельны друг другу.

Вернемся к веществам, в которых может существовать остаточная поляризация. К ним относятся сегнетоэлектрики, искусственно приготовленные электреты, пьезоэлектрические кристаллы (пьезоэлектрики) и пироэлектрические кристаллы (пироэлектрики).

Сегнетоэлектрики названы так по их основному представителю — сегнетовой соли (двойной натриево-калиевой соли винной кислоты  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6$ ). Большое применение имеет титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ). Для сегнетоэлектриков характерно существование остаточной поляризации лишь в некоторой области температур. Обычно существует характерная температура  $\theta$ , такая, что при  $T < \theta$  вещество оказывается сегнетоэлектриком, а при  $T > \theta$  остаточная поляризация исче-

зает и вещество перестает быть сегнетоэлектриком. С термодинамической точки зрения такой переход является фазовым переходом второго рода.

В сегнетоэлектрической области проявляется явление гистерезиса: поляризация зависит не только от поля, а от всей предшествовавшей истории данного образца и оказывается многозначной функцией поля. Если взять неполяризованный образец ( $P_0 \neq 0$ ) и постепенно увеличивать поле  $\vec{E}$  внутри образца, то поляризация постепенно увеличивается и стремится к постоянному значению (насыщению)  $P_{\text{нас.}} = P_s$  (рис. 32, кривая  $OAB$ ). При уменьшении напряженности поля  $\vec{E}$

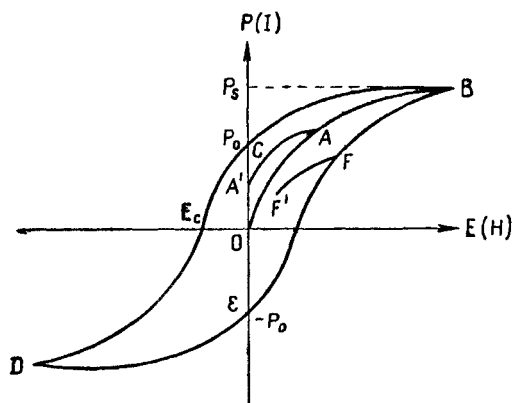


Рис. 32.

поляризация уменьшается медленнее, чем она возрастала, и при  $E = 0$  каждая единица объема образца будет обладать остаточной поляризацией  $\vec{P}_0$ . Чтобы уничтожить остаточную поляризацию, надо создать поле  $\vec{E}_c$  (коэрцитивная сила), противоположное первоначальному. Увеличение обратного поля ведет к насыщению поляризации в направлении, противоположном первоначальному. Меняя напряженность

поля  $\vec{E}$  в обратном порядке, получим нижнюю кривую предельного цикла гистерезиса  $BCD\&B$ . Если не доводить поляризацию до насыщения, а начать уменьшать поле, например, в точке  $A$  или  $F$ , то изменение поляризации будет происходить соответственно по  $AA'$  или  $FF'$ .

Из вышеизложенного видно, что соотношение (71.01) применимо лишь в малой области изменения поля — вблизи какой-либо точки оси ординат, лежащей в интервале от  $-P_0$  до  $+P_0$ .

Электретами называются электрически поляризованные тела, полученные при переводе в твердую фазу жидкости, состоящей из дипольных молекул. При этом отвердевание жидкости производится в сильном электрическом поле и диполи частично остаются закрепленными ориентированно.

Пьезоэлектриками называются ионные кристаллы, в которых под действием деформирующей силы (сжатия или растяжения) возникает дипольный электрический момент. В пьезоэлектриках дипольный электрический момент зависит от температуры. Пьезоэлектрический и пьезоэлектрический эффекты обычно связаны друг с другом.

### § 73. Магнетики

В § 70 показано, что магнитные свойства тел определяются вектором намагничивания  $\vec{I}$ . По аналогии с диэлектриками вектор намагничивания следовало бы рассматривать как функцию усредненного микроскопического поля, то есть как функцию индукции  $\vec{B}$ . Но по традиции считают  $\vec{I}$  функцией макроскопического поля  $\vec{H}$ :  $\vec{I} = \vec{I}(\vec{H})$ . При достаточно слабых полях в изотропных магнетиках

$$\vec{I} = \vec{I}_0 + \chi \vec{H} + \dots \quad (72.01)$$

Здесь  $\vec{I}_0$  — остаточное (спонтанное) намагничивание, существующее лишь в ферромагнетиках и антиферромагнетиках,  $\chi$  — магнитная восприимчивость (для анизотропных тел  $\chi$  — симметричный тензор второго ранга). Магнитная индукция

$$\vec{B} = 4\pi \vec{I}_0 + \mu \vec{H} + \dots, \quad (72.02)$$

где  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  — магнитная проницаемость среды.

В последнее время в электротехнической литературе величины  $\chi$  и  $\epsilon$  часто называют по аналогии с магнитными электрической восприимчивостью и электрической проницаемостью. Эти названия противоречат физическому смыслу этих величин. Действительно, соотношению  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  соответствует соотношение  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$  (так как аналогами являются  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (соответственно  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$ ). Поэтому электрической проницаемостью следовало бы называть не  $\epsilon$ , а  $\frac{1}{\epsilon}$  — коэффициент, стоящий при  $\vec{D}$ .

Магнетики можно разделить на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

Диамагнетики характеризуются тем, что возникающее в магнитном поле намагничивание по направлению противоположно магнитному полю. Поэтому для них  $\chi < 0$ ,  $0 \leq \mu < 1$ . Обычно вводят атомную (или грамм-молекулярную) восприимчивость  $\chi_a = \chi \cdot \frac{A}{\rho}$ , где  $A$  — атомный или молекулярный вес вещества,  $\rho$  — его плотность, а  $\chi$  — восприимчивость единицы объема вещества. Диамагнитная восприимчивость не зависит от температуры и агрегатного состояния вещества. Порядок атомной восприимчивости  $\chi_a$  — несколько миллионов долей единицы. Поэтому для диамагнетиков  $\mu$  мало отличается от единицы.

В парамагнетиках возникающее под действием поля  $\vec{H}$  намагничивание по направлению совпадает с полем (изотропный парамагнетик), так что  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ . Зависимость восприимчивости парамагнети-

ков от температуры дается законом Кюри — Вейса:  $\chi = \frac{c}{T - \theta}$  ( $T > \theta$ ), где  $c$  и  $\theta$  — постоянные, характерные для данного парамагнетика.

Ферромагнетики характеризуются гистерезисом (рис. 32) и большим значением восприимчивости  $\chi$ , зависящей от  $\vec{H}$ . К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель, гадолиний, их сплавы и некоторые соединения, а также некоторые сплавы неферромагнитных веществ (тройные сплавы Mn, Cu и Al). Последнее говорит о том, что ферромагнетизм — не атомное, а структурное свойство вещества. Для каждого ферромагнетика существует характерная ферромагнитная температура Кюри  $\theta_f$ . При этой температуре происходит фазовый переход второго рода из ферромагнитного состояния (при  $T < \theta_f$ ) в парамагнитное (при  $T > \theta_f$ ). Парамагнитная температура Кюри  $\theta_p$  всегда несколько выше температуры перехода  $\theta_f$ . Например, для железа  $\theta_f = 1043^\circ \text{K}$ ,  $\theta_p = 1100^\circ \text{K}$ . Кристаллы ферромагнетиков обладают сильно выраженной анизотропией.

Если ферромагнитное тело конечных размеров вводится во внешнее однородное магнитное поле  $\vec{H}_a$  и однородно намагничивается, то поле  $\vec{H}$  внутри тела связано с  $\vec{H}_a$  соотношением

$$\vec{H} = \vec{H}_a + \vec{H}_0 = \vec{H}_a - N\vec{I}, \quad (72.03)$$

где  $\vec{H}_0 = -N\vec{I}$  — так называемое размагничивающее или деполяризующее поле, создаваемое связанными магнитными зарядами на поверхности тела. Множитель  $N$  есть постоянная, зависящая от восприимчивости, геометрических размеров и формы образца и называемая размагничивающим или деполяризующим фактором. Экспериментально измеряют зависимость  $\vec{B}$  от внешнего поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_a, \quad (72.04)$$

где  $\mu_0$  — проницаемость, зависящая от вещества, формы и размеров тела. Легко видеть, что в области линейности

$$\mu_0 = \frac{1 + 4\pi\chi}{1 + N\chi}. \quad (72.05)$$

### § 73. Обобщенный закон Ома

В электрическом поле движение свободных зарядов оказывается направленным, то есть возникает макроскопический электрический ток. Плотность тока свободных зарядов  $\vec{j}$  есть функция от напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Влияние  $\vec{H}$  на  $\vec{j}$  незначительно и будет рассмотрено в § 122. Зависимость  $\vec{j}$  от напряженности  $\vec{E}$  при не очень больших  $\vec{E}$  линейная,

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (73.01)$$

Коэффициент  $\gamma$  характеризует свойства вещества и называется коэффициентом электропроводности или удельной электропроводностью вещества. Соотношение (73.01) выражает закон Ома в дифференциальной форме. В случае анизотропного тела коэффициент электропроводности является симметричным тензором второго ранга.

Наряду с внешним электрическим полем ток свободных зарядов может быть вызван причинами неэлектрического происхождения, например градиентом концентрации, градиентом температуры, химическими силами и т. п. Все такие причины неэлектрического происхождения, вызывающие ток, по предложению И. Е. Тамма, называются сторонними. Сторонний ток можно написать по аналогии с (73.01) в форме

$$\vec{j}^{\text{стр.}} = \gamma \vec{E}^{\text{стр.}}, \quad (73.02)$$

где  $\vec{E}^{\text{стр.}}$  — условно вводимое стороннее электродвижущее поле, характеризующее причины движения свободных зарядов. Полная плотность тока в изотропном теле равна

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}).$$

Это соотношение выражает обобщенный закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент электропроводности в практических единицах имеет наименование  $(\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$ .

По величине  $\gamma$  все вещества делят на проводники  $\gamma \geq 10^4 (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$ , полупроводники  $10^{-10} < \gamma < 10^4 (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$ , изоляторы  $\gamma < 10^{-10} (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$ . Это деление основано также на зависимости  $\gamma$  от температуры. Твердые изоляторы и полупроводники обладают положительным температурным коэффициентом электропроводности  $(\frac{d\gamma}{dT} > 0)$ , металлические проводники — отрицательным  $(\frac{d\gamma}{dT} < 0)$ .

В зависимости от носителей тока различают проводимости: электронную (и дырочную), ионную и смешанную. Все металлы обладают электронной проводимостью. Проводимость полупроводников и изоляторов может быть электронной, ионной или смешанной. Ионная проводимость характерна для жидких электролитов. Подробнее природа электропроводности будет рассмотрена в главе VIII.

Для объемной плотности свободных зарядов  $\rho_f = \rho$  не существует какого-либо соотношения связи с полем. Для однородного и изотропного тела  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . Так как  $\text{div } \vec{j} = \gamma \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi\gamma}{\epsilon} \rho$ , то в силу закона сохранения получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\gamma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (73.04)$$

Решая это уравнение, находим

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (73.05)$$

где  $\rho_0$  — плотность заряда в начальный момент времени, а

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}. \quad (73.06)$$

Из (73.05) следует, что в однородном и изотропном проводящем теле невозможно длительное существование объемного распределения свободного заряда. В каждой точке объема плотность  $\rho$  должна экспоненциально убывать вследствие взаимного расталкивания зарядов, которые выходят на поверхность тела. Скорость установления равновесия, при котором  $\rho=0$ , тем больше, чем меньше время релаксации  $\tau$ . Для металлов  $\gamma \simeq 10^{16}$  СГС и, следовательно,  $\tau \simeq 10^{-17}$  сек (если  $\epsilon \sim 1$ ). Для изоляторов соотношение (73.05) дает, например,  $\tau \simeq 2,5 \cdot 10^3$  сек, если  $\gamma \sim 10^{-16} (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1} \simeq 10^{-4}$  СГС, а  $\epsilon = 3$ .

#### § 74. Условия на границе двух тел

С макроскопической точки зрения границу двух тел надо рассматривать как поверхность разрыва, на которой  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ , а также векторы поля изменяются скачком. Дифференциальные уравнения

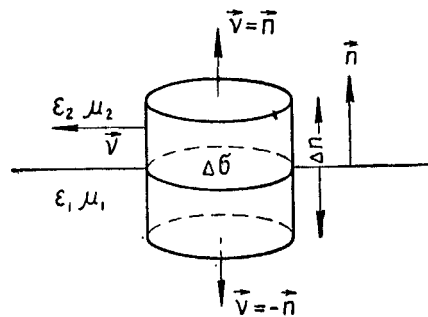


Рис. 33.

Максвелла на такой границе не применимы, так как входящие в них производные по координатам делаются бесконечными. Поэтому для границы двух тел устанавливаются граничные условия, которые являются своего рода предельной формой уравнений Максвелла.

Для вывода граничных условий допустим, что в слое толщиной  $\Delta l$  тело 1 непрерывно переходит в тело 2, то есть  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  меняются непрерывно. На гра-

нице раздела 1-го и 2-го тел выберем малую площадку  $\Delta\sigma$  (рис. 33). На этой площадке построим цилиндр высотой  $\Delta l$  так, чтобы площадка  $\Delta\sigma$  находилась внутри цилиндра. Обозначим внешнюю нормаль к поверхности цилиндра через  $\vec{v}$ , а нормаль, проведенную к границе раздела из первой среды во вторую, через  $\vec{n}$ . Интегрируя

$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho$  по объему цилиндра, получим

$$\int \operatorname{div} \vec{D} dV = \oint D_n d\sigma = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta\sigma + \Psi_{\text{бок}} = \\ = 4\pi \int \rho dV = 4\pi \Delta e.$$

Здесь  $\Psi_{\text{бок}}$  — поток индукции через боковую поверхность цилиндра, а  $\Delta e$  — свободный заряд внутри цилиндра. Если высоту цилиндра  $\Delta n$  стремить к нулю, то  $\Psi_{\text{бок}}$  обращается в нуль. При этом  $\Delta e$  может не обращаться в нуль, так как на границе раздела может существовать свободный поверхностный заряд конечной плотности  $\eta = \frac{\Delta e}{\Delta\sigma}$ . Таким образом, в пределе получаем соотношение

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\eta, \quad (74.01)$$

показывающее, что нормальная составляющая вектора электрической индукции при переходе через границу раздела меняется скачком, если есть поверхностный свободный заряд.

Преобразуем уравнение (70.07). Интегрируя по объему цилиндра, получим

$$\int \operatorname{rot} \vec{H} dV = \oint_{(\sigma)} [\vec{v}, \vec{H}] d\sigma = [\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] \Delta\sigma + \int_{(\text{бок.})} [\vec{v}, \vec{H}] d\sigma = \\ = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} dV + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} dV.$$

При  $\Delta n \rightarrow 0$  интеграл по боковой поверхности и  $\int \vec{D} dV$  исчезают, а  $\int \vec{j} dV = \vec{i} \Delta\sigma$ , где  $\vec{i}$  — линейная плотность поверхностного тока на границе раздела. Окончательно имеем

$$[\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (74.02)$$

Преобразуем это граничное условие. Разложим  $\vec{H}$  на составляющие вдоль касательной  $\vec{\tau}$  и нормали  $\vec{n}$ :  $\vec{H} = H_\tau \vec{\tau} + H_n \vec{n}$ . Подставим последнее в (74.02) и спроектируем на направление вектора  $\vec{l} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$ . Получим

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_l. \quad (74.03)$$

Таким образом, касательная составляющая магнитного поля меняется скачком, если есть поверхностный ток.

Аналогично из уравнений второй группы Максвелла (67.01) получаем

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0, \quad B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (74.04)$$

то есть касательная составляющая  $\vec{E}$  и нормальная составляющая  $\vec{B}$  на границе двух сред непрерывны.

Применяя тот же метод к уравнениям (69.03) и (70.06), получим

$$P_{1n} - P_{2n} = \eta_g, \quad I_{2\tau} - I_{1\tau} = \frac{1}{c} i_{gl}. \quad (74.05)$$

Итак, плотность поверхностного связанного заряда определяется скачком нормальной составляющей вектора поляризации, а поверхностная плотность тока связанных зарядов определяется скачком касательной составляющей вектора намагничивания.

На границе тела 1 и вакуума 2, в котором  $\vec{I} = 0$ ,  $\vec{P} = 0$ , имеем

$$\eta_g = P_n, \quad \vec{i}_g = -[\vec{n}, \vec{I}], \quad (74.06)$$

то есть поверхностный связанный заряд определяется нормальной составляющей вектора поляризации, а поверхностный ток связанных зарядов определяется магнитной поляризацией вещества.

Из уравнения (70.16) получим

$$I_{1n} - I_{2n} = \eta_m. \quad (74.07)$$

Следовательно, поверхностная плотность  $\eta_m$  связанных магнитных зарядов определяется скачком нормальной составляющей вектора намагничивания.

Из граничных условий вытекает явление преломления силовых линий и линий индукции на границе двух сред. Так, например, пользуясь соотношениями  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , (74.03) при  $i = 0$  и (74.04), получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Введем углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , образованные векторами  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  с нормалью  $\vec{n}$  так, что  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}}$ . Тогда

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (74.08)$$

то есть при переходе в среду с большей магнитной проницаемостью линии индукции преломляются, удаляясь от нормали, и при этом сгущаются. Аналогично получается преломление линий электрической индукции (если  $\eta = 0$ ).

## § 75. Полная система уравнений Максвелла

Уравнения макроскопического электромагнитного поля в веществе можно записать в виде четырех групп уравнений Максвелла. Первая группа

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (I) \quad (75.01)$$

определяет связь электрической индукции и макроскопического магнитного поля со свободными зарядами и токами проводимости. Вторая группа

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II}) \quad (75.02)$$

характеризует свойства поля. К уравнениям (75.01) и (75.02) добавляются материальные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}, \\ \vec{j} &= \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ср.}}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}) \quad (75.03)$$

Для изотропных тел в малом интервале изменений поля имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= 4\pi\vec{P}_0 + \epsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = 4\pi\vec{I}_0 + \mu\vec{H}, \\ \vec{j} &= \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ср.}}), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}') \quad (75.04)$$

которые справедливы при условии, что можно пренебречь гистерезисом. Для анизотропного вещества скаляры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  заменяются соответствующими тензорами второго ранга.

Если вещество неоднородно и есть явно выраженные границы раздела, то необходимо ввести граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 4\pi\eta, \quad [\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c} i \\ \vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0, \quad [\vec{n}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}) \quad (75.05)$$

или

$$\left. \begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= 4\pi\eta, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_l \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0, \quad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (\text{IV}') \quad (75.06)$$

где  $i_l$  — плотность поверхностного тока в направлении, перпендикулярном к  $\vec{\tau}$ .

Система уравнений (I—IV) выражает принцип причинности для макроскопического электромагнитного поля и позволяет однозначно вычислять электромагнитное поле в веществе. Область применимости этих уравнений не одинакова. Наиболее широка область применимости уравнений (I), (II) и (IV) групп. Уравнения (III) применимы лишь при условии, что можно пренебречь гистерезисом, последствием, дисперсией  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$ .

## § 76. Закон сохранения энергии для макроскопического поля

Макроскопическое поле есть усредненное микроскопическое поле. Однако плотность энергии макрополя нельзя получить усреднением плотности энергии микрополя, так как полная энергия, выраженная через квадраты микроскопических величин поля, не может быть представлена через усредненные величины. В нормальном состоянии макроскопического тела, соответствующем отсутствию электромагнитного возбуждения, то есть при  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ,  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{D} = 0$  и  $\vec{H} = 0$  тело все же обладает электромагнитной энергией, так как  $\overline{\vec{E}^2}$  и  $\overline{\vec{B}^2}$  отличны от нуля. Энергия нормального состояния тела содержит собственную энергию всех составляющих его частиц, взаимные энергии электронов и ядер в атомах, атомов относительно друг друга, механическую энергию поступательного движения частиц и т. д. С макроскопической точки зрения эти составные части энергии микрополя рассматриваются как качественно различные формы энергии. Электромагнитной энергией тела с макроскопической точки зрения является лишь та часть энергии микрополя, которая соответствует переходу от нормального состояния тела к некоторому состоянию макроскопического электромагнитного возбуждения, в котором отлична от нуля хотя бы одна из макроскопических величин  $\rho$ ,  $\vec{j}$ ,  $\eta$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и т. д. Эта макроскопическая электромагнитная энергия выражается квадратичной функцией макроскопических полей.

Найдем выражение для энергии макроскопического поля и формулировку закона сохранения энергии поля. Возьмем уравнения Максвелла

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \vec{j}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H};$$

умножим скалярно первое на  $\vec{E}$ , а второе на  $\vec{H}$  и, сложив их, получим

$$\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) - \vec{j} \vec{E}. \quad (76.01)$$

Допустим, что

$$\frac{1}{4\pi} (\vec{E} d\vec{D} + \vec{H} d\vec{B}) = d\omega \quad (76.02)$$

есть полный дифференциал. Тогда (76.01) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\text{div } \vec{S} - \vec{j} \vec{E}, \quad (76.03)$$

где

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (76.04)$$

Произведение  $\vec{j} \vec{E}$  есть работа, произведенная макроскопическим полем над свободными зарядами в единице объема в единицу времени.

Поэтому  $w$  надо истолковать как плотность макроскопической электромагнитной энергии, а  $\vec{S}$  — как вектор плотности потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга).

Для существования плотности энергии  $w$  необходимо, чтобы левая часть (76.02) была полным дифференциалом или чтобы из нее можно было выделить полный дифференциал. Если  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  зависят соответственно от  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  линейно и среда однородная и изотропная, то  $\vec{E} d\vec{D} = \epsilon \vec{E} d\vec{E} = d \frac{\epsilon E^2}{2}$ . Аналогично  $\vec{H} d\vec{B} = d \frac{\mu H^2}{2}$ . Поэтому

$$w = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}}{8\pi}. \quad (76.05)$$

В случае анизотропных тел  $d w$  будет полным дифференциалом лишь при условии, что  $^{(2)}\epsilon$  и  $^{(2)}\mu$  — симметричные тензоры, то есть

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (76.06)$$

Действительно, если  $\vec{E} d\vec{D} = d(\vec{E} \vec{D}) - \vec{D} d\vec{E}$  — полный дифференциал, то и  $\vec{D} d\vec{E} = \sum_{\alpha} D_{\alpha} dE_{\alpha}$  есть полный дифференциал. Тогда

$$\frac{\partial D_{\beta}}{\partial E_{\alpha}} = \frac{\partial D_{\alpha}}{\partial E_{\beta}}$$

то есть  $\epsilon_{\beta\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}$ . Аналогично для  $^{(2)}\mu$ .

Таким образом, для анизотропных тел

$$w = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha, \beta} (\epsilon_{\alpha\beta} E_{\alpha} E_{\beta} + \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha} H_{\beta}). \quad (76.07)$$

Если связь между индукциями и напряженностями нелинейная (сегнетоэлектрики, ферромагнетики), то согласно (76.02)

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\vec{D}} \vec{E} d\vec{D} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B}$$

(предполагается, что гистерезиса нет). При наличии гистерезиса можно написать  $\frac{1}{4\pi} \vec{H} d\vec{B} = \frac{1}{4\pi} d \left( \vec{H} \vec{B} - \frac{1}{2} H^2 \right) - \vec{I} d\vec{H}$ . Интегрируя последнее по всей петле гистерезиса (рис. 32), получим

$$\frac{1}{4\pi} \oint \vec{H} d\vec{B} = - \oint \vec{I} d\vec{H} = - q_{\text{гист.}} \quad (76.09)$$

Интеграл в (76.09) равен площади петли гистерезиса и не обращается в нуль. Величина  $q_{\text{гист.}}$  дает теплоту, выделяющуюся в единице объема тела при перемагничивании. Аналогично рассматривается теплота гистерезиса в сегнетоэлектриках.

Вернемся к выражению (76.03). При наличии сторонних э. д. с.  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})$ . Поэтому  $\vec{j}\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} - \vec{j}\vec{E}^{\text{стр}}$ . Подставляя это в (76.03), получим

$$\vec{j}\vec{E}^{\text{стр}} = \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{S} + \frac{j^2}{\gamma}. \quad (76.10)$$

Интегрируя (76.10) по некоторому объему тела  $V$  и применяя теорему Остроградского, имеем

$$N^{\text{стр}} = \int_{(V)} \vec{j}\vec{E}^{\text{стр}} dV = \frac{d}{dt} \int_{(V)} w dV + \oint S_n d\sigma + \int_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} dV. \quad (76.11)$$

Последний член

$$Q' = \int_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} dV \quad (76.12)$$

выражает теплоту Джоуля—Ленца, выделяющуюся в объеме тела в единицу времени.

Уравнение (76.11) выражает закон сохранения энергии: работа сторонних сил в объеме  $V$  идет на изменение энергии макроскопического поля в этом объеме, на поток электромагнитной энергии через поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объем, и на выделение теплоты Джоуля—Ленца. Заметим, что  $Q'$  всегда положительно, то есть в проводящем макроскопическом теле всегда происходит необратимый процесс превращения макроскопической электромагнитной энергии во внутреннюю энергию тела. Поскольку работа сторонних сил рассматривалась при постоянной температуре тела, электромагнитную энергию

$$W = \int_{(V)} w dV = \int_{(V)} \frac{\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}}{8\pi} dV \quad (76.13)$$

следует рассматривать как часть свободной энергии тела. Так как  $\epsilon$  и  $\mu$  являются, вообще говоря, функциями абсолютной температуры  $T$  тела, то и электромагнитная энергия  $W$  есть функция не только  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , но и  $T$ .

## § 77. Силы, действующие на тела в электрическом и магнитном полях

Рассмотрим несколько упрощенно силы, действующие на тело во внешнем поле (подробно этот вопрос разобран, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Электродинамика сплошных сред»). Будем рассматривать тело как совокупность молекул, обладающих электрическим моментом  $\vec{p}$  и магнитным моментом  $\vec{m}$ . Получим для электрической и магнитной сил, действующих в неоднородном поле

на диполи, по (32.07) выражения<sup>1</sup>

$$\vec{F}'_e = (\vec{p} \nabla) \vec{E}'_\partial, \quad \vec{F}'_m = (\vec{m}, \nabla) \vec{H}'_\partial. \quad (77.01)$$

Здесь  $\vec{E}'_\partial$  и  $\vec{H}'_\partial$  — микрополя, действующие на каждую молекулу. Умножая выражения (77.01) на число молекул в единице объема и усредняя их по макроскопически малому объему, получим плотности сил, действующих в электрическом и магнитном полях на связанные заряды,

$$\vec{f}_g^{(e)} = \overline{(\vec{P}' \nabla) \vec{E}'_\partial}, \quad \vec{f}_g^{(m)} = \overline{(\vec{I}' \nabla) \vec{H}'_\partial}.$$

В первом приближении среднее от произведения можно заменить произведением средних значений и среднее значение действующего поля  $\vec{E}'_\partial$  заменить макроскопическим полем  $\vec{E}$ . Тогда

$$\vec{f}_g^{(e)} = (\vec{P} \nabla) \vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I} \nabla) \vec{H}. \quad (77.02)$$

Рассмотрим силу, действующую на магнетик. Вводя в (77.02) по (72.01)  $\vec{I} = \vec{I}_0 + \chi \vec{H}$ , где  $\vec{I}_0$  — остаточное намагничивание, получим

$$\vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I}_0 \nabla) \vec{H} + \frac{\mu - 1}{4\pi} (\vec{H} \nabla) \vec{H}. \quad (77.03)$$

Если в объеме магнетика  $\vec{j} = 0$  и  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ , то  $\text{rot } \vec{H} = 0$  и, следовательно,  $(\vec{H} \nabla) \vec{H} = \frac{1}{2} \nabla H^2 - [\vec{H}, \text{rot } \vec{H}] = \frac{1}{2} \nabla H^2$ ; поэтому

$$\vec{f}_g^{(m)} = (\vec{I}_0 \nabla) \vec{H} + \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2. \quad (77.04)$$

Первый член в (77.04) отличен от нуля только для ферромагнетиков, второй — для любого магнетика. Для парамагнетиков  $\mu - 1 > 0$ , для диамагнетиков  $\mu - 1 < 0$ . Поэтому сила  $\vec{f}_2 = \frac{\mu - 1}{8\pi} \nabla H^2$  увлекает пара- и ферромагнетики в области наибольшей напряженности поля, а диамагнетики — выталкивает из этих областей.

<sup>1</sup> Эти выражения справедливы для произвольного поля. Действительно, главный вектор сил, действующих на все заряды, равен  $\vec{F}' = \sum_a e_a \vec{E}(\vec{r}_0 + \vec{r}_a)$ , где  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор центра молекулы,  $\vec{r}_a$  — радиус-вектор заряда  $e_a$  относительно этого центра. Разлагая  $\vec{F}'$  в ряд и пользуясь тем, что  $\sum_a e_a = 0$ , получим

$$\vec{F}' = \sum_a e_a (\vec{r}_a \nabla) \vec{E}(\vec{r}_0) = (\vec{p} \nabla) \vec{E}.$$

Выражение (77.03) не учитывает зависимости магнитной восприимчивости от объема и поэтому не содержит так называемых стрикционных сил, которые здесь не рассматриваются.

Проектируя  $\vec{f}_g^{(m)}$  в (77.02) на произвольное направление  $\vec{a}$ , получим

$$f_a^{(m)} = (\vec{I} \nabla) (\vec{a} \vec{H}) = \vec{I} \text{grad } H_a = \\ = \text{div} (\vec{I} H_a) - H_a \text{div } \vec{I}.$$

Проекция силы, действующей на объем  $V$  магнита, равна

$$F_a^{(m)} = \int_{(V)} f_a^{(m)} dV = \oint_{(\sigma)} I_n H_a d\sigma - \int_{(V)} H_a \text{div } \vec{I} dV.$$

Здесь  $I_n = \eta_m$  есть плотность поверхностных магнитных зарядов, а  $-\text{div } \vec{I} = \rho_m$  — плотность объемных магнитных зарядов. Поэтому

$$F_a^{(m)} = \vec{a} \int_{(V)} \rho_m \vec{H} dV + \vec{a} \oint \eta_m \vec{H} d\sigma.$$

Но  $\vec{a}$  — произвольный постоянный вектор, поэтому сила, действующая на магнит, равна

$$\vec{F}^{(m)} = \int_{(V)} \rho_m \vec{H} dV + \oint \eta_m \vec{H} d\sigma. \quad (77.05)$$

Отсюда следует, что плотности объемных и поверхностных сил, испытываемых магнитными зарядами магнита, равны

$$\vec{f}^{(m)} = \rho_m \vec{H}, \quad \vec{f}_\sigma^{(m)} = \eta_m \vec{H}. \quad (77.06)$$

Мы показали, таким образом, что магнитное поле действует на связанные магнитные заряды совершенно так же, как электрическое поле действует на электрические заряды. Однако в отличие от реально существующих электрических зарядов магнитные заряды фиктивны. Свободных магнитных зарядов в природе не существует, а связанные заряды определяются вектором намагничивания, то есть электрическим током.

Аналогично (77.03) для диэлектрика в электростатическом поле получим

$$f^{(e)} = (\vec{P}_0 \nabla) \vec{E} + \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2. \quad (77.07)$$

Первый член в (77.07) отличен от нуля лишь для сегнетоэлектриков и электретов. Так как  $\epsilon > 1$ , диэлектрик (при  $\vec{P}_0 = 0$ ) всегда будет увлекаться в область, где напряженность поля наибольшая.

В заключение рассмотрим силу, действующую на свободные заряды. Усреднив плотность силы Лоренца

$$\vec{f}' = \rho' \vec{E}' + \frac{1}{c} [\vec{j}', \vec{B}']$$

и заменив приближенно среднее от произведения произведением средних значений, получим макроскопическую силу

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}, \vec{B}]. \quad (77.08)$$

Существенно отметить, что магнитная сила определяется вектором индукции  $\vec{B}$ .

## § 78. Исторические замечания

Влияние вещества на электрическое и магнитное поля было установлено М. Фарадеем. Многочисленные опыты, устанавливающие влияние среды на электрические явления (электростатическую индукцию), изложены Фарадеем в 11-й серии его «Экспериментальных исследований» (1837). В частности, он установил влияние диэлектрической прослойки на емкость сферического конденсатора. Им введены термины «диэлектрик», «диэлектрическая константа». Исследование влияния среды на поле привело Фарадея к формулировке принципа близкого действия, лежащего в основе современного учения о поле. Фарадей открыл влияние вещества на магнитное поле (1845) и установил существование диамагнитных и парамагнитных тел (термины предложены Фарадеем). Названия «магнитная проницаемость», «магнитная восприимчивость» предложены Томсоном (Кельвином).

Первые исследования свойств ферромагнетиков провел Александр Григорьевич Столетов и изложил в диссертации «Исследование о функции намагничивания мягкого железа»<sup>1</sup>. Гистерезис ферромагнетиков был открыт в 1880 году Варбургом (1846—1931) и независимо от него в 1882 году Юингом (1855—1935).

В 1895 году Пьер Кюри (1859—1906) нашел, что диамагнетизм независим от температуры, а парамагнитная восприимчивость подчиняется закону  $\chi T = \text{const}$  (частный случай закона Кюри—Вейса). Кюри открыл также фазовый переход из ферромагнитного состояния в парамагнитное.

Гистерезис для сегнетоэлектриков был открыт значительно позже. Свойства сегнетовой соли исследованы И. В. Курчатовым с сотрудниками. Свойства титаната бария были изучены Б. М. Вулом и И. М. Гольдманом (1945).

Первые теоретические работы по магнетикам, основанные на представлении о дальнем действии, принадлежат Пуассону (1845). Теорию Пуассона применил к диэлектрикам Моссотти. Клаузиус (1822—1888) развил эту теорию в своих работах.

Законы электрического тока были установлены экспериментально и обоснованы теоретически в 1826—1827 гг. Омом (1787—1854). Закон выделения теплоты током найден экспериментально в 1841 году Джоулем (1818—1889) и более точно исследован академиком Э. Х. Ленцом.

Максвелл в своих работах опирался на идеи Фарадея о близком действии и на математическую теорию Пуассона, Моссотти и других. Вместо сил

Максвелл ввел соответствующие напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  и индукции  $\vec{B}$  и  $\vec{D}$ .

<sup>1</sup> А. Г. Столетов, Собрание сочинений, т. I, М.—Л., ГИТТЛ, 1939.

Максвелл открыл ток смещения, в результате чего уравнение (75.01) для магнитного поля приняло форму, симметричную уравнению электромагнитной индукции (75.02).

В уравнениях Максвелла для электромагнитного поля вещество характеризуется суммарным образом при помощи определяемых из опыта величин  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$ . При этом оставалось неясным, почему поле в веществе характеризуется не двумя напряженностями, как в вакууме, а четырьмя векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{D}$ . Неясной была также природа коэффициентов  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ , характеризующих вещество.

Крупным шагом в развитии учения об электромагнитном поле явилась электронная теория Лоренца (§ 24). Эта теория позволила понять (по крайней мере в принципе) электромагнитные свойства вещества с микроскопической точки зрения и выяснила природу макроскопических величин как усредненных микроскопических напряженностей, а также величин  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  как смешанных величин, зависящих не только от поля, но и от вещества.

## ГЛАВА VI

### СТАЦИОНАРНОЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### § 79. Электростатика и магнитостатика

Законы статических, стационарных и квазистационарных полей вытекают из уравнений Максвелла (§ 75). Статическое и стационарное поля не меняются с течением времени и  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ . Поэтому уравнения поля в 1-й и 2-й группах принимают вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (79.01)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (79.02)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (79.03)$$

Уравнения (79.01) представляют собой основные уравнения электростатики. Уравнения (79.02) — основные уравнения магнитного поля стационарных токов и постоянных магнитов. Уравнение (79.03) есть основное уравнение стационарных токов и выражает замкнутость линий тока.

Дифференциальные уравнения поля должны быть дополнены материальными соотношениями (уравнениями состояния) и граничными условиями. Материальные соотношения для диэлектриков и магнетиков согласно (75.03) имеют вид

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{I}, \quad (79.04)$$

где  $\vec{P}$  и  $\vec{I}$  — векторы электрической и магнитной поляризации, зависящие от свойств среды. Для изотропного диэлектрика или ферромагнетика, в котором существует остаточная поляризация, для слабых полей можно написать

$$\vec{D} = 4\pi\vec{P}_0 + \epsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = 4\pi\vec{I}_0 + \mu\vec{H}. \quad (79.05)$$

Здесь  $\vec{P}_0$  и  $\vec{I}_0$  — соответственно векторы остаточной (спонтанной), электрической и магнитной поляризации, а  $\epsilon$  и  $\mu$  — электрический коэффициент и магнитная проницаемость вещества. Кроме того, необходимо добавить уравнение для плотности тока

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}}), \quad (79.06)$$

где  $E^{\text{стр.}}$  — напряженность стороннего поля, а  $\gamma$  — коэффициент электропроводности вещества.

Граничные условия имеют вид:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\eta, \quad E_{2t} - E_{1t} = 0, \quad (79.07)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (79.08)$$

$$j_{2n} = j_{1n}, \quad (79.09)$$

где  $\eta$  — поверхностная плотность свободных зарядов,  $i$  — поверхностная плотность свободных токов (в направлении, перпендикулярном к касательной  $\vec{\tau}$ ). Нормаль  $\vec{n}$  направлена из первой среды во вторую.

Пользуясь уравнениями (79.02), (79.05) и (79.08), легко получить общие идеализированные уравнения поля постоянных магнитов. Постоянный магнит есть тело, в котором существует остаточное намагничивание  $\vec{I}_0$ . В силу (79.05) система (79.02) принимает вид

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{H} = \frac{4\pi}{\mu} \rho_m. \quad (79.10)$$

Здесь  $\rho_m = -\text{div } I_0$  есть плотность связанных магнитных зарядов. Вещество считается однородным, поэтому  $\mu$  вынесено из-под знака дивергенции. Граничные условия (79.08) принимают вид:

$$\mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 4\pi\eta_m, \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (79.11)$$

где  $\eta_m = I_{01} - I_{02}$  — поверхностная плотность связанных магнитных зарядов, обусловленная остаточным намагничиванием граничащих тел.

При отсутствии токов ( $j = 0$ ,  $i = 0$ ) уравнения (79.10) и (79.11) совпадают с уравнениями электростатики, с той лишь разницей, что магнитное поле постоянных магнитов определяется связанными магнитными зарядами, а электростатическое поле определяется как связанными, так и свободными зарядами. Поэтому при решении задачи электростатики одновременно решается задача магнитостатики. Основная задача электростатики — определить поле по заданному распределению зарядов.

## § 80. Влияние диэлектрика на электрическое поле

Электростатическое поле в произвольном (неоднородном) диэлектрике описывается уравнениями (79.01)

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (80.01)$$

где  $\rho$  — плотность свободных зарядов, которая предполагается заданной. Из второго уравнения следует, что  $\vec{E}$  есть потенциальный вектор и может быть выражен через электростатический потенциал

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (80.02)$$

Задача, таким образом, сводится к определению электростатического потенциала.

Подставим в (80.01)  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ ; получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}). \quad (80.03)$$

Отсюда следует, что источниками электростатического поля являются свободные заряды  $\rho$  и связанные заряды  $\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P}$ . Из (80.02) и (80.03) получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi(\rho - \operatorname{div} \vec{P}), \quad (80.04)$$

определяющее распределение потенциала в зависимости от распределения свободных зарядов и поляризации  $\vec{P}$ . Поляризация учитывает влияние диэлектрика на поле свободных зарядов.

В случае изотропного однородного диэлектрика, не обладающего сегнетоэлектрическими свойствами, поляризация пропорциональна напряженности или индукции,

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \vec{D}.$$

Поэтому объемная плотность связанных зарядов равна

$$\rho_g = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \operatorname{div} \vec{D}$$

или в силу (80.01)

$$\rho_g = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho. \quad (80.05)$$

Это значит, что возникающий в однородном диэлектрике связанный объемный заряд всегда противоположен по знаку свободному заряду в той же точке. Поэтому действие диэлектрика сводится к уменьшению абсолютной величины суммарного заряда, определяющего поле.

Суммарный заряд, стоящий в правой части уравнения Пуассона (80.04), в случае однородного диэлектрика равен

$$\rho - \operatorname{div} \vec{P} = \rho + \rho_g = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (80.06)$$

Уравнение Пуассона принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = - \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (80.07)$$

Тот же результат получается, если в (80.01) подставить  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  и, считая  $\epsilon = \text{const}$ , разделить на  $\epsilon$ .

Из (80.07) видно, что действие диэлектрика сводится к уменьшению свободных зарядов в  $\epsilon$  раз. Для неограниченного однородного диэлектрика решение уравнения (80.07) получается из (27.06) заменой  $\rho$  через  $\frac{\rho}{\epsilon}$ .

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (80.08)$$

Следовательно, потенциал системы свободных зарядов, погруженных в однородный и изотропный диэлектрик, в  $\epsilon$  раз меньше потенциала, создаваемого тем же распределением заряда  $\rho$  в вакууме.

Обозначим через  $\varphi_0(\vec{r})$  интеграл (27.06). Получим:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\epsilon} \quad \text{и} \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_0, \quad \text{где} \quad \vec{E}_0 = -\nabla \varphi_0$$

— поле при отсутствии диэлектрика. Но  $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$ . Следовательно,  $\vec{D} = \vec{E}_0$ . Таким образом, вектор электрической индукции есть напряженность электрического поля, создаваемого свободными зарядами в вакууме, что вытекает также из уравнения (80.01).

Для свободного точечного заряда  $e$  в диэлектрике

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon r}, \quad \vec{E} = \frac{e}{\epsilon r^2} \vec{r}_0 = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}. \quad (80.09)$$

Последней формулой обычно пользуются для определения диэлектрического коэффициента в элементарном курсе электричества.

## § 81. Неоднородные диэлектрики

Рассмотрим два типа неоднородных диэлектриков: 1) диэлектрики, в которых  $\epsilon$  является непрерывной функцией координат и 2) диэлектрики, состоящие из разделенных резкими границами однородных частей, каждая из которых обладает своим значением диэлектрического коэффициента  $\epsilon$ .

В первом случае потенциал определяется уравнением

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} \varphi = -4\pi \rho, \quad (81.01)$$

из которого можно определить  $\varphi$ , если известны  $\rho$  и  $\varepsilon$  как функции координат.

Во втором случае потенциал в каждой однородной области удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_a = -\frac{4\pi}{\varepsilon_a} \rho, \quad (81.02)$$

где  $a$  — номер области. На границе каждой двух областей  $a$  и  $b$  надо учитывать граничные условия

$$D_{bn} - D_{an} = \varepsilon_b E_{bn} - \varepsilon_a E_{an} = 4\pi \eta_{ab}, \quad E_{bt} - E_{at} = 0, \quad (81.03)$$

и в бесконечности  $\varphi = 0$ .

Чтобы на границах областей поле было конечно, необходимо потребовать непрерывность потенциала на границе

$$\varphi_b = \varphi_a. \quad (81.04)$$

Это условие предполагает отсутствие двойных электрических слоев.

### Задача

В бесконечный однородный диэлектрик с диэлектрическим коэффициентом  $\varepsilon_2$  введен диэлектрический шар радиуса  $a$  с диэлектрическим коэффициентом  $\varepsilon_1$ . В центре шара находится свободный точечный заряд  $e$ . Определить векторы  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  и поверхностный связанный заряд на границе диэлектриков.

Решение. Начало координат выберем в точке, занимаемой зарядом. В силу сферической симметрии  $\nabla^2 \varphi$  сводится к  $\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi)$ ; поэтому потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в областях 1 и 2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi_2) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi_1) = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} \rho = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} e \delta(\vec{r}). \quad (a)$$

Отсюда

$$\varphi_2 = \frac{C_2}{r} + C_3, \quad \varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + C_1. \quad (б)$$

Из условия  $\varphi_2(\infty) = 0$  следует, что  $C_3 = 0$ . Касательные составляющие напряженностей равны нулю. Поэтому граничное условие  $E_{2\tau} = E_{1\tau}$  автоматически выполнено. Постоянная  $C_2$  определяется из граничного условия для индукции. Напряженности и векторы индукции согласно (б) равны

$$E_1 = E_{1r} = \frac{e}{\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 = E_{2r} = \frac{C_2}{r^2}, \quad D_{1r} = \frac{e}{r^2}, \quad D_{2r} = \frac{\varepsilon_2 C_2}{r^2}. \quad (в)$$

Нормаль  $\vec{n}$  к границе раздела совпадает с  $\vec{r}_0$ . Свободных поверхностных зарядов нет. Поэтому при  $r = a$   $D_{2r} = D_{1r}$ . Откуда  $C_2 = \frac{e}{\varepsilon_2}$ . Следовательно,

$$E_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r^2}, \quad D_1 = D_2 = \frac{e}{r^2}. \quad (г)$$

Постоянная  $C_1$  находится из условия непрерывности потенциала  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ , то есть

$$\frac{e}{\varepsilon_1 a} + C_1 = \frac{e}{\varepsilon_2 a}, \quad C_1 = \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{e}{a}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{e}{a}, \quad \varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 r}. \quad (\text{д})$$

Поверхностный связанный заряд на границе  $r = a$

$$\eta_g = P_{1r} - P_{2r} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1r} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_{2r} = \frac{e}{4\pi a^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Следовательно, при  $e > 0$ ,  $\eta_g > 0$ , если  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , и  $\eta_g < 0$ , если  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ . Картина линий векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  в случае  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  изображена соответственно на

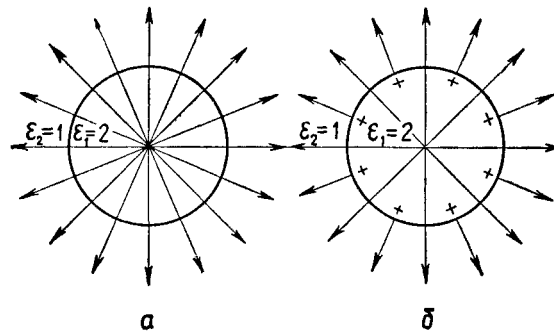


Рис. 34.

рисунке 34, а и б. На границе  $r = a$  линии  $\vec{D}$  непрерывны, так как  $\eta = 0$ , а линии  $\vec{E}$  разрывны, так как  $\eta_g \neq 0$ .

## § 82. Потенциал поляризованной среды

В уравнении (80.04)  $\vec{P}$  содержит как поляризацию, индуцированную полем, так и остаточную поляризацию диэлектрика. Если  $\rho$  и  $\vec{P}$  отличны от нуля в конечной области диэлектрика, то потенциал

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int_{(V)} \frac{\rho - \text{div } \vec{P}}{R} dV', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (82.01)$$

Учитывая, что на границе раздела двух диэлектриков плотность связанного заряда  $\eta_g = P_{1n} - P_{2n}$ , получим для потенциала поверхностного заряда

$$\varphi_2(\vec{r}) = \oint_{(\sigma)} \frac{\eta + P_{1n} - P_{2n}}{R} d\sigma'. \quad (82.02)$$

Полный поляризационный потенциал, создаваемый первой областью, будет равен сумме объемного и поверхностного потенциалов,

$$\varphi_p(\vec{r}) = \int \frac{-\text{div } \vec{P}_1}{R} dV' + \oint_{(\sigma)} \frac{P_{1n}}{R} d\sigma'. \quad (82.03)$$

Второй интеграл берется по всей поверхности, ограничивающей первую область. Учитывая, что в  $\text{div}' \vec{P}_1$  дифференцирование производится по  $\vec{r}'$ , имеем

$$\frac{1}{R} \text{div}' \vec{P} = \text{div}' \frac{\vec{P}}{R} - \vec{P} \nabla' \frac{1}{R}.$$

Интеграл по объему от  $\text{div}' \frac{\vec{P}}{R}$  преобразуется в поверхностный интеграл, который сокращается со вторым членом в (82.03). Поэтому потенциал поляризованной среды равен

$$\varphi_p(\vec{r}) = \int \vec{P} \nabla' \frac{1}{R} dV' = \int_{(V)} \frac{\vec{P} \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (82.04)$$

Согласно (29.01)  $d\varphi = \frac{\vec{P} \vec{R}}{R^3} dV'$  есть потенциал бесконечно малого диполя  $d\vec{p} = \vec{P} dV'$ , находящегося в объеме  $dV'$ . Таким образом, потенциал  $\varphi_p$  поляризованного тела равен сумме потенциалов всех бесконечно малых диполей, из которых состоит полная поляризация.

### § 83. Диэлектрический шар в однородном поле

Предположим, что в неограниченной диэлектрической среде с коэффициентом  $\epsilon_a$  имеется однородное электрическое поле  $E_z = E_0$ , направленное вдоль оси  $oz$ . Определим, как изменится это поле, если в среду внести диэлектрический шар радиуса  $a$  с диэлектрическим коэффициентом  $\epsilon_i$ . Искомый потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  и на больших расстояниях от шара ( $r \rightarrow \infty$ ) переходить в потенциал однородного поля

$$\varphi(z) = -E_0 z. \quad (83.01)$$

Внутри шара поле вызовет однородную поляризацию и останется однородным. Поэтому при  $r \leq a$

$$\varphi_i = -C_1 z = -C_1 r \cos \vartheta \quad (83.02)$$

(центр шара выбран за начало сферической системы координат, а направление поля — за полярную ось). Вне шара потенциал будет определяться потенциалом (83.01) и потенциалом связанного поверхностного заряда, соответствующего некоторому дипольному моменту  $p$ , т. е. при  $r \geq a$

$$\varphi_a = -E_0 z + \frac{p \cos \vartheta}{r^2} = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{p \cos \vartheta}{r^2}. \quad (83.03)$$

Очевидно,  $\varphi_i$  и  $\varphi_a$  удовлетворяют уравнению Лапласа.

Постоянные  $C_1$  и  $p$  должны быть определены из граничных условий — условия непрерывности нормальной составляющей вектора индукции и условия непрерывности касательной составляющей напряженности. Из (83.02) и (83.03) для составляющих поля имеем

$$E_r^{(i)} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = C_1 \cos \vartheta, \quad E_\vartheta^{(i)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} = -C_1 \sin \vartheta,$$

$$E_r^{(a)} = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} = E_0 \cos \vartheta + \frac{2p \cos \vartheta}{r^3},$$

$$E_\vartheta^{(a)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta} = -E_0 \sin \vartheta + p \frac{\sin \vartheta}{r^3}.$$

В силу симметрии азимутальная составляющая  $E_\alpha = 0$ . Из условия непрерывности  $D_n = D_r$  и  $E_t = E_\vartheta$  при  $r = a$  получаем

$$\epsilon_i C_1 = \epsilon_a \left( E_0 + \frac{2p}{a^3} \right), \quad -C_1 = -E_0 + \frac{p}{a^3}.$$

Откуда

$$p = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0, \quad C_1 = \frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0. \quad (83.04)$$

Потенциал и напряженность поля даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= -\frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 r \cos \vartheta, \\ \varphi_a &= -E_0 r \cos \vartheta + \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (83.05)$$

$$\left. \begin{aligned} E_r^{(i)} &= \frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \cos \vartheta, \quad E_\vartheta^{(i)} = -\frac{3\epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \sin \vartheta, \\ E_r^{(a)} &= E_0 \cos \vartheta + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_a)}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^3}, \\ E_\vartheta^{(a)} &= -E_0 \sin \vartheta + \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} a^3 E_0 \frac{\sin \vartheta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (83.06)$$

Дипольный момент  $p$  определяется связанным зарядом, возникшим на поверхности шара вследствие поляризации шара и окружающей среды. Радиальные составляющие векторов поляризации равны

$$P_r^{(i)} = \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} E_r^{(i)}, \quad P_r^{(a)} = \frac{\epsilon_a - 1}{4\pi} E_r^{(a)},$$

откуда находим поверхностную плотность связанного заряда

$$\eta_g = (P_r^{(i)} - P_r^{(a)})_{r=a} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} E_0 \cos \vartheta = \frac{p}{\frac{4}{3} \pi a^3} \cos \vartheta.$$

Таким образом, одна половина шара получает положительный заряд, а другая — отрицательный.

### Задачи

1. В неограниченном однородном диэлектрике создано однородное поле  $E$ . В диэлектрике вырезана шаровая полость радиуса  $a$ . Определить напряженность поля в полости.

**Решение.** Полость можно рассматривать как диэлектрик с  $\epsilon_i = 1$ . Обозначим диэлектрический коэффициент среды через  $\epsilon$ . Пользуясь (83.05), получим

$$\varphi_i = -\frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} Ez, \quad E^i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} E.$$

2. В неограниченном однородном диэлектрике создано однородное поле  $E$ . В диэлектрике вырезана цилиндрическая полость радиуса  $a$  с образующей  $l$ , параллельной полю. Определить напряженность поля на оси полости и рассмотреть случаи  $l \gg a$  и  $l \ll a$ .

**Решение.** Напряженность поля внутри полости складывается из напряженности  $E$  и напряженностей  $E_+$  и  $E_-$  полей, создаваемых поверхностными зарядами  $\pm \eta$  на торцах цилиндра. Напряженность поля заряда  $+\eta$  в точке  $x$  определяется формулой (задача 3, § 27):

$$E_+(x) = 2\pi\eta - \frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Напряженность поля заряда  $-\eta$  в той же точке равна

$$E_-(x) = 2\pi\eta + \frac{2\pi\eta(x-l)}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}}.$$

Поэтому  $E_i = E + E_+ + E_- = E + 4\pi\eta - \frac{2\pi\eta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{2\pi\eta(x-l)}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}}$ . Если  $x \approx \frac{l}{2} \ll a$ , то  $E_i = E + 4\pi\eta = E + 4\pi P = D$ . Если  $x \approx \frac{l}{2} \gg a$ , то  $E_i = E + 4\pi\eta - 2\pi\eta \frac{x}{|x|} - 2\pi\eta \frac{l-x}{|l-x|} = E$ . Таким образом, в вытянутой полости ( $l \gg_F a$ ) действующая на пробный заряд  $e$  сила равна  $F = eE_i = eE$ . Отношение  $\frac{F}{e}$  измеряет напряженность поля. В сплюснутой полости ( $l \ll a$ )  $F = eE_i = eD$  и отношение  $\frac{F}{e}$  измеряет индукцию.

#### § 84. Энергия электрического поля в диэлектриках

Свободную энергию поля в диэлектрике можно определить по формуле

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \vec{D} dV, \quad (84.01)$$

где интегрирование производится по всему объему, занятому полем. Это выражение удобно представить в форме интеграла по объему, занятому свободными зарядами. Допустим, что поверхностных зарядов нет (всякий поверхностный заряд будем считать распределенным в слое конечной толщины с конечной объемной плотностью). Так как  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ,  $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$ , то, повторяя рассуждения § 31, получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \varphi dV. \quad (84.02)$$

Отсюда можно перейти к случаю поверхностных зарядов. Пусть на поверхности  $\rho = \eta \delta(n)$ , где  $n$  — координата, отсчитанная по нормали к поверхности,  $\eta$  — поверхностная плотность свободных зарядов. Вблизи поверхности  $dV = d\sigma dn$  ( $d\sigma$  — элемент поверхности). Выделим область интегрирования в (84.02) непосредственно вблизи заряженной поверхности. Получим

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma. \quad (84.03)$$

Первый интеграл берется по всему объему, в котором свободный объемный заряд  $\rho$  отличен от нуля, второй — по всем поверхностям, на которых свободный поверхностный заряд отличен от нуля.

### § 85. Постоянные магниты

Остаточное намагничивание вещества характеризуется вектором остаточного намагничивания  $\vec{I}_0$  (см. § 72). Плотность связанных магнитных зарядов определяется формулами

$$\rho_m = -\operatorname{div} \vec{I}_0, \quad \eta_m = I_{0n}. \quad (85.01)$$

Для однородно намагниченного вдоль оси цилиндрического стержня (идеализированный пример, взятый для простоты рассмотрения)

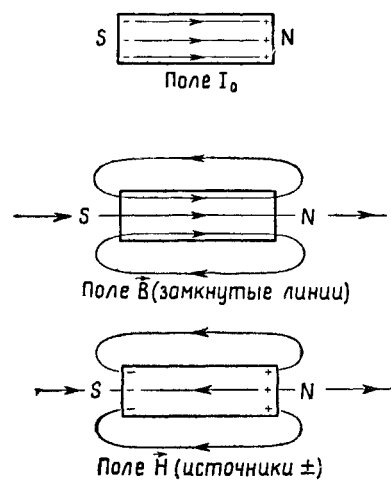


Рис. 35.

$\rho_m = 0$ . На торцовых поверхностях такого стержня имеются поверхностные магнитные заряды с плотностью  $\eta_m = \pm I_0$ , которые образуют северный (положительный) и южный (отрицательный) полюсы магнита.

Намагничивание  $\vec{I}_0$  направлено от южного полюса к северному. Линии вектора  $\vec{B}$  замкнуты и вне магнита проходят от северного полюса к южному, а внутри — от южного к северному.

Согласно (70.08) магнитное поле  $\vec{H}$  равно  $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{I}$ . Источниками этого поля являются связанные магнитные заряды. Поэтому силовые линии его начинаются на положительных магнитных зарядах и

оканчиваются на отрицательных (рис. 35). Рисунок 35 сделан в предположении, что магнитная проницаемость среды равна единице, поэтому вне магнита  $\vec{H} = \vec{B}$ . Таким образом, внутри магнита поле  $\vec{H}$  направлено противоположно векторам  $\vec{B}$  и  $\vec{I}$ . Оно действует на маг-



есть магнитный момент магнита. Потенциал (85.08) совпадает с рассмотренным в § 29 потенциалом диполя. Поэтому согласно (29.04) и (29.05) магнитное поле магнита на большом расстоянии определяется формулой

$$\vec{H} = -\nabla\varphi_m = \frac{3(\vec{m}\vec{R})\vec{R}}{\mu R^5} - \frac{\vec{m}}{\mu R^3}. \quad (85.10)$$

Заметим, что если магнитные проницаемости магнита и окружающей среды различны, то простой зависимости поля магнита от проницаемости среды нет. Зависимость  $H \sim \frac{1}{\mu}$  имеет место для внешнего поля длинных тонких магнитов.

### Задачи

1. В неограниченной среде с магнитной проницаемостью  $\mu_a$  создано однородное магнитное поле напряженностью  $\vec{H}_0$ . Определить, как изменится поле, если в среду внести шарообразный магнетик радиуса  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu_i$ .

Решение. Шар поляризуется однородно и получает магнитный дипольный момент  $\vec{m} = \frac{\mu_i - \mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} a^3 \vec{H}_0$  (см. задачу § 83). Напряженность вне и внутри шара определяется формулами (в сферических координатах):

$$H_r^{(i)} = \frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0 \cos \vartheta, \quad H_\vartheta^{(i)} = -\frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0 \sin \vartheta, \\ H_r^{(a)} = H_0 \cos \vartheta + \frac{2m \cos \vartheta}{r^3}, \quad H_\vartheta^{(a)} = -H_0 \sin \vartheta + \frac{m \sin \vartheta}{r^3}.$$

2. Определить размагничивающее поле и размагничивающий фактор  $N$  для шарообразного магнетика задачи 1.

Решение. Согласно задаче 1 поле внутри шара

$$H^{(i)} = \frac{3\mu_a}{\mu_i + 2\mu_a} H_0.$$

С другой стороны, по (72.03)  $\vec{H}^{(i)} = \vec{H}_0 - N\vec{I}$ . Поэтому размагничивающее поле

$$\vec{H}_O = -N\vec{I} = \vec{H}^{(i)} - \vec{H}_0 = \frac{\mu_a - \mu_i}{\mu_i + 2\mu_a} \vec{H}_0.$$

Так как  $\vec{I} = \chi_i \vec{H}^{(i)} = \frac{\mu_i - 1}{4\pi} \vec{H}^{(i)}$ , то  $N = \frac{4\pi}{3} \frac{\mu_i - \mu_a}{\mu_a (\mu_i - 1)}$ . Таким образом, размагничивающий фактор зависит от проницаемостей шара и окружающей среды (для тела произвольной формы  $N$  зависит еще и от формы тела). Если шар находится в вакууме (или воздухе), то  $\mu_a = 1$  и  $N = \frac{4\pi}{3}$ .

3. Определить магнитное поле постоянного магнита, имеющего форму шара радиуса  $a$ , внутри которого создано однородное остаточное намагничивание  $\vec{I}_0$ .

Решение. Поле внутри шара однородно, а вне шара совпадает с полем точечного диполя, с некоторым моментом  $\vec{m}$ . Обозначим через  $\vec{m}$

момент диполя, а через  $\mu_i$  и  $\mu_a$  — магнитные проницаемости вещества магнита и окружающего магнетика. В сферических координатах согласно (79.06) и (85.10) получим

$$B_r^{(i)} = 4\pi I_0 \cos \vartheta + \mu_i H_r^{(i)} \cos \vartheta, \quad H_r^{(a)} = \frac{2m \cos \vartheta}{r^3}, \quad H_\vartheta^{(a)} = \frac{m \sin \vartheta}{r^3}.$$

Из граничных условий (79.09) находим

$$4\pi I_0 + \mu_i H_r^{(i)} = \mu_a \frac{2m}{a^3}, \quad -H_r^{(i)} = \frac{m}{a^3},$$

откуда

$$\vec{m} = \frac{4\pi \vec{I}_0}{\mu_i + 2\mu_a} a^3.$$

$$H_r^{(a)} = \frac{8\pi I_0}{\mu_i + 2\mu_a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos \vartheta, \quad H_\vartheta^{(a)} = \frac{4\pi I_0}{\mu_i + 2\mu_a} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \vartheta, \quad \vec{H}_i = -\frac{4\pi \vec{I}_0}{\mu_i + 2\mu_a}.$$

### § 86. Проводник в электрическом поле. Емкость

Рассмотрим незаряженный проводник произвольной формы в электрическом поле. При введении проводника в поле в проводнике возникает электрический ток с плотностью  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_i$  ( $\vec{E}_i$  — поле внутри проводника, приводящее к перераспределению свободного заряда и к установлению нового равновесия). В равновесном состоянии плотность тока в любой точке внутри проводника должна быть равна нулю. Поэтому и поле  $\vec{E}_i$  внутри проводника также равно нулю.

Заметим, что микроскопическое поле зарядов атомов не исчезает; обращается в нуль лишь макроскопическое поле  $\vec{E}_i$ . Равенство нулю поля  $\vec{E}_i$  обусловлено тем, что в результате перераспределения свободных зарядов (электронов проводимости) возникает добавочное поле, которое внутри проводника компенсирует внешнее поле. Перераспределение свободного заряда под действием внешнего поля называется электростатической индукцией.

Из  $\vec{E}_i = 0$  следует, что вектор индукции внутри проводника также равен нулю. Следовательно, внутри проводника

$$\vec{E}_i = 0, \quad \vec{D}_i = 0, \quad \rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D}_i = 0. \quad (86.01)$$

Подобный результат был получен в § 73.

Так как  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , то из  $\vec{E}_i = 0$  следует, что  $\varphi = \text{const}$  (объем и поверхность проводника эквипотенциальны). Вне проводника потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  при граничном условии на поверхности  $\sigma$  проводника

$$\varphi|_\sigma = V, \quad (86.02)$$

где  $V = \text{const}$  — потенциал проводника.

Распределение заряда на поверхности проводника определяется из граничного условия (79.07). Внутри проводника  $D_i = 0$ . Снаружи проводника  $D_n = \epsilon E_n = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , где производная берется по внешней нормали к поверхности проводника, а  $\epsilon$  — диэлектрический коэффициент окружающей среды. Поэтому

$$\eta = \frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (86.03)$$

Отсюда полный заряд проводника

$$e = -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \quad (86.04)$$

(интегрирование производится по всей поверхности проводника).

Рассмотрим уединенный заряженный до потенциала  $V$  проводник. Потенциал вне проводника удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  и граничному условию (86.02). Кроме того, должно быть

$$\varphi(\infty) = 0. \quad (86.05)$$

При условиях (86.02) и (86.05) решением уравнения Лапласа будет

$$\varphi(\vec{r}) = V\varphi_1(\vec{r}), \quad (86.06)$$

где  $\varphi_1(\vec{r})$  — безразмерная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, условию (86.05) и граничному условию на поверхности проводника

$$\varphi_1|_{\sigma} = 1. \quad (86.07)$$

Подставим (86.06) в (86.04); получим

$$e = CV, \quad (86.08)$$

где

$$C = -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma. \quad (86.09)$$

Множитель  $C$  называется емкостью уединенного проводника. Если проводник находится в вакууме ( $\epsilon = 1$ ), то его емкость

$$C_0 = -\frac{1}{4\pi} \oint_{(\sigma)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma = \frac{C}{\epsilon} \quad (86.10)$$

зависит только от размеров и формы проводника и имеет размерность длины. Проводник, погруженный в среду с диэлектрическим коэффициентом  $\epsilon$ , имеет емкость в  $\epsilon$  раз большую.

Рассмотрим замкнутую полость внутри проводника. Если в полости нет зарядов, то потенциал в ней будет удовлетворять уравнению Лапласа. На границе полости потенциал должен иметь значение потенциала проводника  $V$ , поэтому и во всей полости потенциал будет равен  $V$ . Если поддерживать потенциал проводника постоянным (например, равным нулю), то изменения поля вне проводника не будут

влиять на потенциал в полости. На внутренней поверхности проводника плотность заряда равна нулю, так как поле в проводнике и в полости равно нулю.

### Задачи

1. Определить емкость шара радиуса  $a$ .

Решение. Потенциал  $\varphi_1$ , удовлетворяющий уравнению  $\nabla^2\varphi = 0$  и условиям (86.07) и (86.05), имеет вид  $\varphi_1 = \frac{a}{r}$  (начало координат взято в центре шара). Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{a}{r^2} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} = \text{const.}$$

Следовательно,

$$C = \frac{\epsilon}{4\pi a} \oint_{(s)} d\sigma = \frac{\epsilon}{4\pi a} \cdot 4\pi a^2 = \epsilon a.$$

2. Определить емкость вытянутого эллипсоида вращения с полуосями  $a, b$  ( $a > b$ ).

Решение. В задаче 4 § 27 показано, что заряд  $e$ , распределенный равномерно на отрезке длиной  $2c$ , образует поле, эквипотенциальные поверхности которого суть вытянутые эллипсоиды вращения. Если эквипотенциальную поверхность с полуосями  $a, b$  заполнить металлом, то распределение потенциала не изменится. Поэтому на поверхности эллипсоида потенциал равен

$$\varphi = V = \frac{e}{2c} \ln k.$$

Так как  $c$  — линейный эксцентриситет, а  $a$  — большая полуось, то  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . С другой стороны,

$$k = \frac{a+c}{a-c} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Поэтому

$$V = \frac{e}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$C_0 = \frac{e}{V} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}.$$

3. Доказать, что при  $b = a$  емкость  $C_0$ , полученная в предыдущей задаче, переходит в емкость шара ( $C_0 = a$ ).

4. Определить емкость цилиндрического провода длиной  $2a = l$ . Радиус провода равен  $b$ .

Решение. Цилиндрический провод можно рассматривать как эллипсоид вращения, для которого  $a \gg b$ . Тогда

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \approx \frac{2a + \dots}{a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)} = \frac{2a + \dots}{a \left(1 - 1 + \frac{b^2}{2a^2} + \dots\right)} \approx \frac{4a^2}{b^2} = \frac{l^2}{b^2}$$

и

$$C_0 = \frac{C}{\epsilon} \approx \frac{l}{2 \ln \frac{l}{b}}.$$

5. Металлический шар радиуса  $a$  введен в однородное электрическое поле напряженностью  $E_z = E_0$ . Определить поле и распределение индуцированного заряда на поверхности шара.

Решение. В электростатике незаряженный проводник можно рассматривать как вещество с  $\epsilon = \infty$ . Поэтому, полагая в (83.05) и (83.07)  $\epsilon_t = \infty$ ,  $\epsilon_a = \epsilon$  (диэлектрический коэффициент среды), получим

$$\varphi_i = 0, \quad \varphi_a = -E_0 r \cdot \cos \vartheta + a^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2}, \quad \eta = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \vartheta.$$

### § 87. Теорема о единственности решения электростатической задачи

Электростатическая задача заключается в определении потенциала  $\varphi(\vec{r})$ , создаваемого произвольным распределением объемных поверхностных и точечных зарядов в неоднородной диэлектрической среде. Теорема о единственности утверждает, что эта задача имеет только одно решение.

Рассмотрим задачу в предположении, что поле создается заряженными проводниками, диэлектрик — однороден. В этом случае задача имеет три формулировки.

1. Дана система проводников и их потенциалы  $V_1, V_2, \dots, V_a, \dots$

Существует только один потенциал  $\varphi(\vec{r})$  в среде, окружающей проводники, удовлетворяющий уравнению Лапласа и принимающий значения  $V_1, V_2, \dots, V_a, \dots$  соответственно на поверхностях 1-го, 2-го, ...,  $a$ -го, ... проводников и обращающийся в нуль в бесконечности.

Допустим, что существует второе решение  $\varphi'$ , удовлетворяющее уравнению Лапласа и тем же граничным условиям. Тогда функция  $\psi = \varphi' - \varphi$  должна удовлетворять уравнению Лапласа  $\nabla^2 \psi = 0$  и обращаться в нуль на поверхностях всех проводников и в бесконечности. Рассмотрим энергию этого поля. Так как  $\text{div}(\psi \text{grad} \psi) = \text{grad}^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi$ , то, применяя формулу Остроградского, получим

$$8\pi \frac{W_e}{\epsilon} = \int \text{grad}^2 \psi dV = \oint_{(\Sigma)} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma - \int \psi \nabla^2 \psi dV, \quad (87.01)$$

где поверхность  $\Sigma$  ограничивает весь объем (состоит из поверхностей проводников и бесконечно удаленной поверхности). Но во всем объеме  $\nabla^2 \psi = 0$  и  $\psi$  обращается в нуль на всей поверхности  $\Sigma$ .

Поэтому  $8\pi \frac{W_e}{\epsilon} = \int \text{grad}^2 \psi dV = 0$ , отсюда следует, что  $\text{grad} \psi = 0$ , то есть  $\psi = \text{const}$ . Но на поверхностях проводников  $\psi = 0$ . Следовательно,  $\psi = 0$  везде, а поэтому  $\varphi' = \varphi$ .

2. Даны заряды проводников  $e_1, e_2, \dots, e_a, \dots$ . Докажем единственность решения задачи. Допустим, что существуют два решения  $\varphi$

и  $\varphi'$ , удовлетворяющие уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} d\sigma_a = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi'}{\partial n_a} d\sigma_a = -e_a, \quad (a=1, 2, \dots),$$

где  $\sigma_a$  — поверхность проводника. Кроме того, в бесконечности  $\varphi$  и  $\varphi'$  обращаются в нуль.

Разность  $\psi = \varphi' - \varphi$  должна удовлетворять уравнению Лапласа  $\nabla^2 \psi = 0$  и условиям

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = 0. \quad (87.02)$$

На поверхности каждого проводника потенциал  $\psi$  должен иметь постоянное значение  $\psi_a$ . Применим формулу (87.01). Объемный интеграл в ее правой части исчезает, так как  $\nabla^2 \psi = 0$ . Поверхностный интеграл разобьем на интегралы по поверхностям проводников и интеграл по бесконечно удаленной поверхности. Последний исчезает, так как  $\psi(\infty) = 0$ . Интеграл по поверхности каждого проводника исчезает в силу соотношения (87.02) и соотношения  $\psi = \psi_a$ .

$$\oint_{(\sigma_a)} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = \psi_a \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \psi}{\partial n_a} d\sigma_a = 0.$$

Поэтому правая часть (87.01) исчезает. Следовательно,  $\text{grad } \psi = 0$  и  $\psi = \text{const}$ , так как  $\psi(\infty) = 0$ , то  $\psi = 0$  везде. Поэтому  $\varphi = \varphi'$ .

3. Возможны смешанные граничные условия — на одних проводниках заданы потенциалы, на других — заряды. Повторив рассуждения предыдущих задач, легко убедиться, что и в этом случае  $\varphi' = \varphi$ .

## § 88. Система двух проводников. Индукционные и потенциальные коэффициенты

Рассмотрим систему двух изолированных проводников произвольной формы и размеров, окруженных диэлектриком. Пусть первый проводник заряжен до потенциала  $V_1$ , а второй — до потенциала  $V_2$ . Потенциал  $\varphi(\vec{r})$  вне проводников будет удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\varphi|_{\sigma_1} = V_1, \quad \varphi|_{\sigma_2} = V_2, \quad \varphi(\infty) = 0. \quad (88.01)$$

Допустим, что найдены два вспомогательных безразмерных потенциала  $\varphi_1(\vec{r})$  и  $\varphi_2(\vec{r})$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1|_{\sigma_1} &= 1, & \varphi_1|_{\sigma_2} &= 0, & \varphi_1(\infty) &= 0, \\ \varphi_2|_{\sigma_1} &= 0, & \varphi_2|_{\sigma_2} &= 1, & \varphi_2(\infty) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88.02)$$

Тогда искомый потенциал можно написать в форме

$$\varphi(\vec{r}) = V_1 \varphi_1 + V_2 \varphi_2. \quad (88.03)$$

Потенциал (88.03) удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям (88.01) в силу условий (88.02).

Плотность свободного заряда на поверхности первого проводника согласно (86.03) равна

$$\eta_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} V_1 - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} V_2, \quad (88.04)$$

где  $\vec{n}_1$  — внешняя нормаль к поверхности первого проводника. Аналогично получим плотность заряда  $\eta_2$  на поверхности второго проводника. Интегрируя теперь  $\eta_1$  по поверхности  $\sigma_1$  первого проводника и  $\eta_2$  по поверхности  $\sigma_2$  второго проводника, получим

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= C_{11} V_1 + C_{12} V_2, \\ e_2 &= C_{21} V_1 + C_{22} V_2, \end{aligned} \right\} \quad (88.05)$$

Соотношения (88.05) обобщают (86.08); коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} d\sigma_1, \\ C_{22} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (88.06)$$

называются емкостными коэффициентами проводников. Коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} C_{12} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1, \\ C_{21} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (88.07)$$

называются индукционными коэффициентами.

Выясним физический смысл коэффициентов. Предположим, что потенциал первого проводника  $V_1 = 1$ , а второго  $V_2 = 0$ . Тогда (88.05) принимает вид

$$e_1 = C_{11}, \quad e_2 = C_{21}.$$

Таким образом, коэффициент емкости  $C_{11}$  численно равен заряду первого проводника, если его потенциал равен единице, а потенциал второго проводника равен нулю. Коэффициент индукции  $C_{21}$  численно равен заряду, появляющемуся на поверхности второго проводника, если потенциал первого проводника равен единице, а второго — нулю. Коэффициент  $C_{21}$  определяет индукционное действие первого проводника на второй. Аналогично  $C_{22}$  есть коэффициент емкости второго проводника, а  $C_{21}$  — коэффициент индукции второго проводника на первый.  $C_{11}$  и  $C_{22}$  — положительные.

Докажем, что

$$C_{12} = C_{21}.$$

В формуле Грина

$$\int (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{(\sigma)} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

произведем интегрирование по всему объему вне проводников. Тогда интегрирование по поверхности  $\sigma$  производится по бесконечно удаленной поверхности и по поверхностям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  проводников. Положим  $\psi = \varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_2$ ; тогда  $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ ,  $\nabla^2 \varphi_2 = 0$  и объемный интеграл обращается в нуль. Поверхностный интеграл, в силу граничных условий, будет

$$\oint_{(\sigma_1)} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1 - \oint_{(\sigma_2)} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = \oint_{(\sigma_1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} d\sigma_1 - \oint_{(\sigma_2)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_2} d\sigma_2 = 0.$$

В силу определений (88.06) и (88.07)  $C_{12} = C_{21}$ .

Решая систему (88.05) относительно потенциалов проводников  $V_1$  и  $V_2$ , получим

$$V_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2, \quad V_2 = p_{21}e_1 + p_{22}e_2. \quad (88.09)$$

Коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{C_{22}}{\Delta}, & p_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Delta}, & p_{21} &= -\frac{C_{21}}{\Delta}, \\ p_{22} &= \frac{C_{11}}{\Delta}, & \Delta &= C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \end{aligned} \right\} \quad (88.10)$$

называются потенциальными коэффициентами (предполагается, что определитель  $\Delta \neq 0$ ). Из (88.09) видно, что каждый из потенциалов  $V_1$  и  $V_2$  зависит от зарядов  $e_1$  и  $e_2$ . Так как  $C_{12} = C_{21}$ , то  $p_{12} = p_{21}$ . Это значит, что если заряд  $e_1 = 1$  создает на втором незаряженном проводнике потенциал  $p_{21}$ , то и заряд  $e_2 = 1$  создает на первом незаряженном проводнике потенциал  $p_{21}$ .

Рассмотрим знаки коэффициентов  $p_{ab}$ . Заметим, что в среде, где нет объемного заряда, потенциал не может иметь экстремума. Действительно, точка, в которой  $\varphi$  имеет минимум (или максимум), со всех сторон окружена областью, где падение потенциала направлено к ней или от нее. Следовательно, в этой точке сходятся линии сил и в ней находится отрицательный (положительный) заряд, что противоречит условию. Если первый проводник имеет заряд  $e_1 > 0$ , то изолированный и лишенный заряда второй проводник должен иметь меньший, но положительный потенциал, так как от поверхности первого проводника потенциал может лишь убывать и обращаться в нуль на бесконечности. Поэтому  $V_1 > V_2 > 0$ . Но при  $e_2 = 0$ ,  $V_1 = p_{11}e_1$ ,  $V_2 = p_{21}e_1$ . Следовательно,

$$p_{11} > 0, \quad p_{21} > 0, \quad p_{21} < p_{11}. \quad (88.11)$$

Аналогично доказывается, что  $p_{21} > p_{12} > 0$ . Поэтому определитель

$$\Delta' = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0.$$

Решая уравнение (88.09) относительно  $e_1$  и  $e_2$ , находим

$$C_{11} = \frac{p_{22}}{\Delta'}, \quad C_{22} = \frac{p_{11}}{\Delta'}, \quad C_{12} = -\frac{p_{12}}{\Delta'}, \quad C_{21} = -\frac{p_{21}}{\Delta'}. \quad (88.12)$$

Из (88.12) и (88.11) следует, что  $C_{11} > 0$ ,  $C_{22} > 0$ ,  $C_{12} < 0$ ,  $C_{21} < 0$ , то есть индуцированный заряд всегда имеет знак, противоположный знаку индуцирующего.

Полученные результаты легко обобщаются на систему любого числа проводников. Обозначая заряд и потенциал проводника через  $e_a$  и  $V_a$ , получим

$$\left. \begin{aligned} e_a &= \sum_b C_{ab} V_b, \quad V_a = \sum_b p_{ab} e_b, \quad a, b = 1, 2, \dots, n \\ C_{ab} &= -\frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{(\sigma_a)} \frac{\partial \varphi_b}{\partial n_a} d\sigma_a \end{aligned} \right\} \quad (88.13)$$

где  $n_a$  — нормаль к поверхности  $\sigma_a$  проводника  $a$ ,  $\varphi_a$  — безразмерный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничным условиям, аналогичным условиям (88.02).

### Задача

Два проводника с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  помещены на расстоянии  $R$  друг от друга в среде с диэлектрическим коэффициентом  $\epsilon$ . Предполагая, что  $R$  велико по сравнению с размерами проводников, определить коэффициенты  $C_{ab}$ .

Решение. Если  $e_1 \neq 0$ ,  $e_2 = 0$ , то приближенно  $V_1' = \frac{e_1}{C_1}$ . Потенциал, создаваемый первым проводником на расстоянии  $R$ , равен  $\varphi_2' = \frac{e_1}{R}$ . Такой же потенциал будет иметь второй проводник, если пренебречь его поляризацией и изменением поля вдоль него. С другой стороны, если  $e_1 = 0$ ,  $e_2 \neq 0$ , то приближенно потенциал второго проводника будет  $V_2'' = \frac{e_2}{C_2}$ , а потенциал первого —  $\varphi_1'' = \frac{e_2}{R}$ . Приближенные выражения потенциалов проводников при  $e_1 \neq 0$ ,  $e_2 \neq 0$  равны

$$V_1 = \frac{e_1}{C_1} + \frac{e_2}{R}, \quad V_2 = \frac{e_1}{R} + \frac{e_2}{C_2},$$

то есть

$$p_{11} = \frac{1}{C_1}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{R}, \quad p_{22} = \frac{1}{C_2}.$$

Отсюда по (88.12)

$$C_{11} = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}, \quad C_{22} = \frac{C_2}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}, \quad C_{12} = C_{21} = -\frac{C_1 C_2}{R} \frac{1}{1 - \frac{C_1 C_2}{R^2}}.$$

## § 89. Энергия системы проводников

Энергия поля системы заряженных проводников получается из формулы (84.03). Так как объемного заряда нет, то энергия равна

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma = \frac{1}{2} \sum_a \oint_{(\sigma_a)} \eta \varphi d\sigma,$$

где интегрирование производится по поверхности проводника, а суммирование — по всем проводникам. На поверхности проводника  $\varphi|_{\sigma_a} = V_a$ . Поэтому вынесем  $V_a$  за знак интеграла. Так как

$\int_{(\sigma_a)} \eta d\sigma = e_a$  есть полный заряд проводника, энергия поля будет

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_a e_a V_a. \quad (89.01)$$

Подставим  $V_a$  из (88.13), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{ab} p_{ab} e_a e_b. \quad (89.02)$$

Для двух проводников

$$W_e = \frac{1}{2} (p_{11} e_1^2 + 2p_{12} e_1 e_2 + p_{22} e_2^2) \quad (\text{так как } p_{21} = p_{12}).$$

Энергия  $W_e$  есть собственная энергия системы заряженных проводников и должна быть положительной. Переписав ее в форме

$$2W_e = p_{11} \left( e_1 + \frac{p_{12}}{p_{11}} e_2 \right)^2 + \left( p_{22} - \frac{p_{12}^2}{p_{11}} \right) e_2^2 > 0,$$

видим, что

$$p_{11} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0. \quad \text{Аналогично } p_{22} > 0. \quad (89.03)$$

Рассмотрим другой вывод выражения для энергии системы двух проводников. Пусть сначала заряды и потенциалы обоих проводников равны нулю. Внесем на первый проводник заряд  $e_1$ . Тогда потенциалы проводников станут равными  $V'_1 = p_{11} e_1$ ,  $V'_2 = p_{21} e_1$ .

Работа заряджения первого проводника равна

$$A_1 = \frac{1}{2} \int \eta \varphi d\sigma = \frac{1}{2} V'_1 e_1 = \frac{1}{2} p_{11} e_1^2.$$

Будем постепенно увеличивать заряд второго проводника до  $e_2$ . Когда заряд второго проводника равен  $e'_2$ , его потенциал равен

$$V'_2 = p_{21} e_1 + p_{22} e'_2.$$

Работа переноса заряда  $de'_2$  из бесконечности на второй проводник равна  $\delta A_2 = V'_2 de'_2$ . Поэтому полная работа заряджения второго про-

водника от заряда  $e'_2 = 0$  до заряда  $e'_2 = e_2$  равна

$$A_2 = \int_0^{e_2} (p_{21}e_1 + p_{22}e'_2) de'_2 = p_{21}e_1e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Полная работа заряджения проводников равна энергии системы двух проводников

$$W_e = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} p_{11}e_1^2 + p_{21}e_1e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Если заряжать сначала второй проводник, а затем первый, то получим

$$W'_e = \frac{1}{2} p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + \frac{1}{2} p_{22}e_2^2.$$

Так как энергия не зависит от пути процесса, то

$$W'_e = W_e.$$

Отсюда следует, что  $p_{12} = p_{21}$  и в силу (88.12)  $C_{12} = C_{21}$ .

Выразим энергию системы проводников через потенциалы. Подставляя  $e_a$  из (88.13) в (89.01), получим

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{ab} V_a V_b. \quad (89.04)$$

Для уединенного проводника

$$W_e = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 = \frac{e_1^2}{2C_{11}}. \quad (89.05)$$

### Задача

Определить энергию и емкость заряженного прямолинейного цилиндрического проводника радиуса  $a$ , длина которого  $l$  велика по сравнению с радиусом.

Решение. Если  $l \gg a$ , то влиянием концов цилиндра можно пренебречь и считать заряд распределенным равномерно вдоль цилиндра с плотностью  $q = \frac{e}{l}$ . Тогда поле будет радиально симметричным в области, для которой  $r \leq l$ . Напряженность поля будет равна  $E_r = \frac{2q}{\epsilon r}$  ( $r$  — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра). На больших расстояниях ( $r \gg l$ ) энергией поля можно пренебречь.

Поэтому приближенно (с логарифмической точностью)

$$W_e = \frac{\epsilon}{8\pi} \int E_r^2 dV = \frac{4q}{8\pi\epsilon} \int_a^l \frac{2\pi r l dr}{r^2} = \frac{e^2}{\epsilon l} \ln \frac{l}{a}.$$

Откуда согласно (89.05)

$$C_{11} = \frac{e^2}{2W_e} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{l}{a}},$$

что совпадает с результатом задачи 4 § 86.

## § 90. Конденсаторы

Особый интерес представляет система двух проводников, образующих конденсатор. Пусть первый проводник находится в замкнутой полости, вырезанной внутри второго (рис. 36). Пространство между проводниками может быть заполнено изолятором с диэлектрическим коэффициентом  $\epsilon$ . Такая система называется замкнутым конденсатором, а проводники 1 и 2 — его обкладками. Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — потенциалы проводников, а  $e_1$  и  $e_2$  — их заряды. Заряд  $e_2$  складывается из заряда  $e'_2$ , индуцированного зарядом  $e_1$  на внутренней поверхности второго проводника, и из заряда  $e''_2$  на его наружной поверхности. Проведем во втором проводнике замкнутую поверхность, охватывающую всю полость. Поток вектора индукции через эту поверхность будет равен  $\psi_D = 4\pi(e_1 + e'_2)$ . Но в проводнике  $\vec{D} = 0$ , поэтому  $\psi_D = 0$ . Следовательно,  $e'_2 = -e_1$ , т. е. индуцированный на внутренней поверхности второго проводника заряд равен по величине и противоположен по знаку индуцирующему заряду. Поэтому все линии индукции, начинающиеся на внутренней обкладке, будут оканчиваться на внешней.

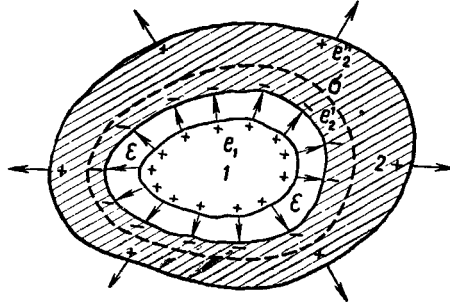


Рис. 36.

Полный заряд второго проводника согласно (88.05) равен

$$e_2 = e'_2 + e''_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2. \quad (90.01)$$

С другой стороны, заряд  $e''_2$ , расположенный на внешней поверхности проводника, не оказывает влияния на полость. Поле вне второго проводника зависит только от потенциала, размеров и формы внешней поверхности проводника. Поэтому можно написать

$$e''_2 = C'_{22}V_2, \quad (90.02)$$

где  $C'_{22}$  — есть емкость уединенного второго проводника. Поэтому из (90.01)

$$e'_2 = C_{21}V_1 + (C_{22} - C'_{22})V_2. \quad (90.03)$$

С другой стороны,

$$e_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2.$$

Следовательно,

$$e_1 + e'_2 = (C_{11} + C_{21})V_1 + (C_{12} + C_{22} - C'_{22})V_2 = 0. \quad (90.04)$$

Равенство (90.04) должно выполняться при всех значениях потенциалов  $V_1$  и  $V_2$ . Поэтому

$$C_{11} + C_{21} = 0, \quad C_{22} + C_{12} - C'_{22} = 0.$$

Так как  $C_{12} = C_{21}$ , то для конденсатора

$$C_{11} = C_{22} - C'_{22} = -C_{12} = -C_{21} = C. \quad (90.05)$$

Тогда

$$e_1 = -e'_2 = C(V_2 - V_1). \quad (90.06)$$

Таким образом, заряд каждой из обкладок конденсатора пропорционален разности потенциалов обкладок. Общее значение  $C$  коэффициентов  $C_{11}$ ,  $C_{22} - C'_{22}$ ,  $-C_{12}$  называется емкостью конденсатора. Заметим, что в случае замкнутого конденсатора

$$C_{22} = C_{11} + C'_{22} > C_{11} = C.$$

На практике обычно употребляются незамкнутые конденсаторы — системы двух проводников, форма и взаимное расположение которых таковы, что  $|C_{12}|$  почти равно  $C_{11}$  (будем считать  $C_{22} > C_{11}$ ). Чтобы  $C_{12}$  было сравнимо с  $C_{11}$ , надо проводники сблизить.

Энергию конденсатора можно написать согласно (89.04) и (90.05) в форме

$$W_e = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 + C_{12} V_1 V_2 + \frac{1}{2} C_{22} V_2^2 = \frac{1}{2} C'_{22} V_2^2 + \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2. \quad (90.07)$$

Поле замкнутого конденсатора распадается на поле внешнее и поле внутреннее. Первый член (90.07), зависящий от потенциала второго проводника и его емкости  $C'_{22}$ , есть энергия внешнего поля; второй член, зависящий от разности потенциалов проводников и емкости  $C$ , есть энергия внутреннего поля. Обычно  $C'_{22}$  мало по сравнению с  $C$ , и первым членом в (90.07) можно пренебречь. Поэтому считают, что энергия заряженного конденсатора равна  $\frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$ . Последнее выполняется точно лишь при  $V_2 = 0$ .

Для незамкнутого конденсатора  $|C_{12}| \leq C_{11} \leq C_{22}$ .

Энергию можно представить в форме

$$W_e = \frac{1}{2} (C_{11} - |C_{12}|) V_1^2 + \frac{1}{2} (C_{22} - |C_{12}|) V_2^2 + \frac{1}{2} |C_{12}| (V_1 - V_2)^2. \quad (90.08)$$

Если разности  $C_{11} - |C_{12}|$  и  $C_{22} - |C_{12}|$  малы по сравнению с  $|C_{12}|$ , и  $V_1 - V_2$  порядка  $V_1$  и  $V_2$ , то значение энергии будет определять последний член.

Вышеизложенное относится к конденсаторам, в которых для диэлектрика, расположенного между обкладками, имеется линейная

связь между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ . Для сегнетоэлектриков связь между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  нелинейная, поверхностная плотность заряда и заряд обкладки определяются формулами

$$\eta_1 = -\frac{1}{4\pi} D_n, \quad e_1 = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\sigma_1} D_{1n} d\sigma. \quad (90.09)$$

### Задачи

1. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических сферических электродов (радиус внутреннего электрода равен  $R_1$ , внутренний и внешний радиусы внешнего — соответственно  $R_2$  и  $R_3$ ). Промежуток между электродами заполнен диэлектриком с коэффициентом  $\epsilon$ . Определить емкостные и индукционные коэффициенты.

Решение. Потенциал между обкладками удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2 r \varphi}{dr^2} = 0$  и граничным условиям

$$\varphi|_{R_1} = V_1, \quad \varphi|_{R_2} = V_2.$$

Поэтому

$$\varphi = a + \frac{b}{r},$$

где

$$a = \frac{V_2 R_2 - V_1 R_1}{R_2 - R_1}, \quad b = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Поверхностные плотности зарядов равны

$$\eta_1 = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{R_1} = \frac{\epsilon b}{4\pi R_1^2}, \quad \eta_2' = -\frac{\epsilon b}{4\pi R_2^2}.$$

Следовательно, заряды

$$e_1 = 4\pi R_1^2 \eta_1 = -e_2' = -4\pi R_2^2 \eta_2' = \frac{\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} (V_1 - V_2).$$

Отсюда

$$C_{11} = C_{22} - C_{22}' = -C_{12} = -C_{21} = C = \frac{\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Заряд на внешней поверхности наружного электрода равен  $e_2'' = C_{22}' V_2$ , где  $C_{22}' = \epsilon' R_3$ .

Если  $R_2 - R_1 \ll R_1$ , то относительная емкость  $C_{22} - C_{22}' \gg C_{22}'$  (это неравенство усиливается, если коэффициент  $\epsilon$  диэлектрика внутри конденсатора больше коэффициента  $\epsilon'$  диэлектрика вне конденсатора).

2. Определить емкостные и индукционные коэффициенты цилиндрического конденсатора, состоящего из двух коаксиальных цилиндров длины  $l$  и радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Промежуток между цилиндрами заполнен диэлектриком с коэффициентом  $\epsilon$ . Влиянием концов цилиндров пренебречь.

Решение. Потенциал удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$  и граничным условиям  $\varphi|_{R_1} = V_1$ ,  $\varphi|_{R_2} = V_2$ . Методом, аналогичным приме-

ненному в задаче 1, получаем

$$C = C_{11} = C_{22} - C'_{22} = -C_{12} = -C_{21} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

3. Определить емкость плоского конденсатора с площадью обкладки  $\sigma$ , в котором диэлектрик состоит из плоских слоев, параллельных обкладкам и имеющих диэлектрические коэффициенты  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_a, \dots$ . Толщины слоев диэлектрика равны соответственно  $d_1, d_2, \dots, d_a, \dots$ , причем  $\sum_a d_a = d$  есть расстояние между обкладками.

Решение. Проведем ось  $x$  нормально к плоскости обкладок. Если линейные размеры обкладок велики по сравнению с расстоянием  $d$ , то поле внутри конденсатора можно считать однородным. Тогда разность потенциалов

$$V_1 - V_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{D dx}{\epsilon} = D \int_0^d \frac{dx}{\epsilon} = D \sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a},$$

так как вектор индукции направлен по нормали и остается постоянным. Заряд обкладки равен

$$e = \sigma \eta = \sigma \frac{D}{4\pi} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a} \frac{V_1 - V_2}{\sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a}},$$

откуда емкость

$$C = \frac{e}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma}{4\pi} \sum_a \frac{d_a}{\epsilon_a}.$$

В частности, для однослойного конденсатора

$$C = \frac{\epsilon \sigma}{4\pi d}.$$

## § 91. Метод электрических изображений

Общие методы решения уравнения Лапласа при данных граничных условиях рассматриваются в курсах математической физики. В некоторых случаях решение задачи можно получить при помощи более простых методов, основанных на теореме о единственности решения электростатической задачи (§ 87).

Рассмотрим метод электрических изображений. Этот метод сводится к подбору таких дополнительных точечных зарядов, которые вместе с заданными зарядами образуют поле, удовлетворяющее граничным условиям и уравнению Лапласа.

В качестве примера рассмотрим поле точечного заряда  $e$  в однородном изотропном диэлектрике. Пусть заряд находится в точке  $Q$  на расстоянии  $a$  от бесконечной плоскости, образующей поверхность некоторого проводника (рис. 37). Пусть потенциал  $\varphi$  равен нулю на поверхности проводника и в бесконечности (граничные условия).

Заряд  $e$  будет индуцировать на плоскости заряд  $-e$ . Чтобы удовлетворить граничному условию, введем электрическое изображение заряда  $e$ —фиктивный заряд  $e' = -e$ , расположенный в точке  $Q'$ , представляющий собой зеркальное отражение точки  $Q$  в плоской поверхности проводника. Потенциал, создаваемый зарядом  $e$  и его изображением  $e'$ , в точке  $A$  в диэлектрике равен

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (91.01)$$

где  $r$  и  $r'$  — расстояния точки  $A$  от точек  $Q$  и  $Q'$ . На поверхности проводника ( $r = r'$ )  $\varphi = 0$ , поэтому граничное условие выполнено. Кроме того, в бесконечности  $\varphi = 0$  и  $\nabla^2 \varphi = 0$  во всех точках диэлектрика, кроме точки  $Q$ . Внутри проводника  $\varphi = 0$ . В силу теоремы о единственности полученный потенциал дает искомое решение задачи.

Распределение заряда, индуцированного на граничной поверхности проводника, определяется формулой (86.03). Выбирая начало координат  $O$  в точке, делящей отрезок  $QQ'$  пополам, а направление  $OQ$  за ось  $x$ , получим

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + \rho^2}, \quad r' = \sqrt{(x+a)^2 + \rho^2}, \quad \rho^2 = y^2 + z^2$$

( $x, y, z$  — координаты точки наблюдения  $A$ ). Тогда

$$\eta = - \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r=r'} = - \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{e}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (91.02)$$

Таким образом,  $\eta$  быстро убывает по мере удаления от точки  $O$ . Легко видеть, что полный индуцированный заряд равен  $-e$ ; как и должно быть.

Заметим, что заряд  $e$  будет притягиваться к проводнику с силой  $\frac{e^2}{(2a)^2}$  (сила изображения), а энергия взаимодействия заряда с поверхностью равна  $\frac{e^2}{4a}$ .

Таким же образом можно решить задачу, если заряд  $e$  находится на расстоянии  $a$  от плоской границы раздела двух диэлектриков. В среде, где находится заряд  $e$ , потенциал можно искать в форме суперпозиции потенциалов заряда  $e$  и фиктивного заряда  $e'$ , находящегося в точке  $Q'$  (зеркальном изображении  $Q$ ), то есть

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e'}{\varepsilon_1 r'}. \quad (91.03)$$

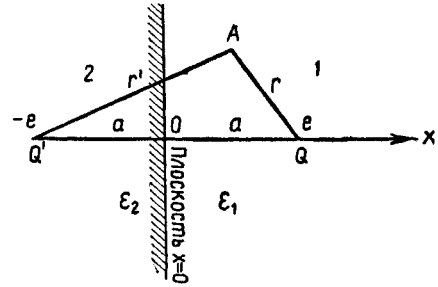


Рис. 37.

Потенциал во второй среде ищется как потенциал, создаваемый некоторым фиктивным зарядом  $e''$  в точке  $Q$

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}. \quad (91.04)$$

На границе раздела ( $x=0$ ,  $r=r'$ ) должны быть выполнены условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad D_{1n} = D_{2n}, \text{ то есть } D_{1x} = D_{2x}.$$

Откуда

$$\frac{e+e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}, \quad e-e' = e''.$$

Решая эту систему относительно  $e'$  и  $e''$ , получим

$$e' = e \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad e'' = e \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (91.05)$$

Выше отмечалось, что в электростатике незаряженный проводник можно рассматривать как среду с бесконечной диэлектрической постоянной. Если положить в (91.05)  $\varepsilon_2 = \infty$ , то получим  $e' = -e$ ,  $e'' = 2e$ . Из (91.04) во второй среде  $\varphi_2 = 0$  и (91.03) превращается в (91.01).

### Задачи

1. Ось цилиндрического проводника радиуса  $a$  расположена параллельно проводящей поверхности на расстоянии  $d$  от нее ( $d > a$ ). Заряд цилиндра на единицу длины равен  $q$ . Найти потенциал поля и емкость проводника.

Решение. Цилиндрический проводник можно заменить бесконечно тонкой прямолинейной нитью, расположенной параллельно плоскости на некотором расстоянии  $R$  от плоскости. Тогда потенциал в точке  $A(x, y)$ , находящейся на расстоянии  $r$  от нити и расстоянии  $r'$  от ее изображения в плоскости, равен

$$\varphi = \frac{2q}{\varepsilon} \ln \frac{r'}{r}, \quad r = \sqrt{(x-R)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(x+R)^2 + y^2}.$$

На плоскости  $r' = r$  и  $\varphi = 0$ ; с другой стороны поверхность цилиндра будет эквипотенциальной поверхностью, если  $R^2 = d^2 - a^2$ . Тогда потенциал цилиндра и емкость на единицу длины равны

$$\varphi_n = V = \frac{q}{\varepsilon} \ln \frac{d+R}{d-R}, \quad C_1 = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon}{\ln \frac{d+R}{d-R}}.$$

2. Показать, что в предыдущей задаче при  $d \rightarrow l$ , где  $l$  — длина проводящего цилиндра ( $l \gg a$ ), емкость  $C = C_1 l$  стремится к емкости уединенного цилиндрического провода (задача 1, § 89).

## § 92. Механические силы в системе проводников

Индукционные и потенциальные коэффициенты зависят от размеров и взаимного расположения проводников. Если независимые параметры  $Q_a$ , характеризующие взаимное расположение и размеры проводников, взять в качестве обобщенных координат, то обобщенная сила  $F_a$ , изменяющая координату  $Q_a$ , может быть найдена из

работы  $\delta A = \sum_{\alpha} F_{\alpha} dQ_{\alpha}$  ( $\alpha$  — номер обобщенной координаты). Но работа равна изменению энергии системы зарядов (если заряд постоянен), то есть

$$\delta A = -dW_e = - \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_e dQ_{\alpha}.$$

Откуда

$$F_{\alpha} = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{e=\text{const}}. \quad (92.01)$$

Подставляя сюда энергию из (89.02), получим

$$F_{\alpha} = - \frac{1}{2} \sum_{a, b} \frac{\partial p_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} e_a e_b. \quad (92.02)$$

Вычисление силы усложняется, если при передвижении проводников поддерживать постоянными их потенциалы. На поддержание потенциалов постоянными сторонние источники должны произвести дополнительную работу. Изменение заряда  $e_a$  проводника при изменении конфигурации (параметров  $Q_{\alpha}$ ) при  $V = \text{const}$  равно

$$de_a = \sum_b V_b dC_{ab} = \sum_b V_b \sum_a \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha}.$$

Работа сторонних сил при перезарядке проводника  $a$  равна

$$V_a de_a = \sum_b V_a V_b \sum_a \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha}.$$

Полная работа, затрачиваемая на поддержание потенциалов постоянными, равна

$$\delta A' = \sum_a V_a de_a = \sum_a \sum_b V_a V_b \sum_a \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} dQ_{\alpha} = 2 \sum_a \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} dQ_{\alpha}. \quad (92.03)$$

Изменение энергии  $dW_e$  складывается из работы  $\delta A'$  дополнительного заряжения и работы  $\delta A$ , производимой системой,  $dW_e = \delta A' - \delta A$ . Откуда

$$\delta A = \sum_{\alpha} F_{\alpha} dQ_{\alpha} = \delta A' - dW_e = 2 \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_V dQ_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_V dQ_{\alpha},$$

то есть

$$\delta A = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} dQ_{\alpha}. \quad (92.04)$$

В силу (89.04)

$$F_{\alpha} = \left( \frac{\partial W_e}{\partial Q_{\alpha}} \right)_{V=\text{const}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \frac{\partial C_{ab}}{\partial Q_{\alpha}} V_a V_b. \quad (92.05)$$

### Задача

Определить силу, с которой притягиваются обкладки плоского конденсатора.

Решение. Обозначим через  $Q$  расстояние между обкладками. Энергия согласно задаче 3, § 91 равна

$$W_e = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{\varepsilon \sigma}{8\pi Q} (V_1 - V_2)^2 \quad \text{или} \quad W_e = \frac{e^2}{2C} = \frac{2\pi Q}{\varepsilon \sigma} e^2.$$

Отсюда при  $V = \text{const}$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial Q} = -\frac{\varepsilon \sigma}{8\pi Q^2} (V_1 - V_2)^2 = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \sigma,$$

где  $E = \frac{V_1 - V_2}{Q}$  — напряженность поля между обкладками. Знак минус обозначает, что сила  $F$  стремится уменьшить параметр  $Q$ , то есть  $F$  есть сила притяжения. Сила, действующая на единицу площади обкладки, равна

$$p = \frac{F}{\sigma} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = -w_e.$$

При  $e = \text{const}$  получим  $F = -\frac{2\pi e^2}{\varepsilon \sigma}$ , что с помощью соотношения  $e = C(V_1 - V_2)$  приводится к тому же результату.

### § 93. Постоянный электрический ток

Постоянный электрический ток течет по проводнику, если на концах его поддерживается постоянная разность потенциалов. Плотность постоянного тока в проводящем теле удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (93.01)$$

На границе двух тел должно удовлетворяться условие

$$j_{an} = j_{bn}. \quad (93.02)$$

Уравнение (93.01) показывает, что линии стационарного тока всегда замкнуты.

Плотность тока и количество теплоты, выделяемое током, определяются для изотропного проводника дифференциальными законами Ома и Ленца — Джоуля

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}}), \quad q = \frac{j^2}{\gamma}, \quad (93.03)$$

где  $\vec{E}^{\text{стр}}$  — напряженность стороннего поля.

Рассмотрим узел, в котором сходятся несколько токов. Вычислим силу тока через замкнутую поверхность  $\sigma$ , охватывающую узел. Получим

$$\oint_{(\sigma)} j_n d\sigma = \sum_a \int_{(\sigma_a)} j_n d\sigma = \sum_a I_a,$$

здесь  $I_a$  — сила тока, идущая через сечение проводника  $a$ . Так как  $\vec{n}$  внешняя нормаль, то ток считается положительным, если он течет от узла, и отрицательным, если он течет к узлу. По формуле Остроградского согласно (93.01) получим

$$\oint_{(\vec{\sigma})} j_n d\sigma = \int_{(V)} \operatorname{div} \vec{j} dV = 0.$$

Таким образом, алгебраическая сумма сил стационарных токов, сходящихся в узле, равна нулю (первый закон Кирхгофа)

$$\sum_a I_a = 0. \quad (93.04)$$

Найдем силу тока, возникающего в проводнике. Рассмотрим квазилинейный проводник. Квазилинейным проводником называется проводник, поперечное сечение  $\sigma(s)$  которого и электропроводность  $\gamma(s)$  зависят только от положения сечения, то есть от длины  $s$ , отсчитываемой вдоль линии, соединяющей центры сечений. Примером квазилинейного проводника служит обычный линейный проводник, представляющий собой однородный круговой цилиндр, длина которого велика по сравнению с диаметром.

В квазилинейном проводнике напряженности  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}^{\text{стр.}}$  и плотность тока  $\vec{j}$  постоянны во всех точках данного сечения и изменяются от сечения к сечению как функции от координаты  $s$ .

Если квазилинейный проводник граничит с изолятором, то на боковой поверхности его  $j_n = 0$ , линии тока проходят касательно к этой поверхности, образуя трубку тока.

Рассмотрим два сечения  $\sigma_1(s_1)$  и  $\sigma_2(s_2)$  квазилинейного проводника. Обозначим через  $I_1$  и  $I_2$  токи, идущие через эти сечения. Рассматривая участок, лежащий между сечениями как узел и пользуясь законом Кирхгофа, получим  $I_2 = I_1$ , то есть сила стационарного тока во всех сечениях неразветвленного квазилинейного проводника одинакова.

Проинтегрируем равенство

$$E_s + E_s^{\text{стр.}} = \frac{j}{\gamma} = \frac{j\sigma}{\gamma\sigma}$$

по  $s$  от сечения  $\sigma_1$  до сечения  $\sigma_2$ . Замечая, что  $j\sigma = I = \text{const}$  и  $E_s = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ , имеем

$$\int_{s_1}^{s_2} (E_s + E_s^{\text{стр.}}) ds = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр.}} = I \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\gamma\sigma}. \quad (93.05)$$

Здесь

$$R_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\gamma\sigma} \text{ и } \mathcal{E}_{12}^{\text{стр.}} = \int_{s_1}^{s_2} E_s^{\text{стр.}} ds \quad (93.06)$$

— сопротивление участка квазилинейного проводника и действующая на этом участке сторонняя э. д. с. Отсюда получается обобщенный закон Ома

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}^{\text{стр.}}}{R_{12}}. \quad (93.07)$$

Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = V_{12}$  называется напряжением на участке цепи.

Количество теплоты, выделяющееся в проводнике в единицу времени, равно

$$Q'_{12} = \int \frac{j^2}{\gamma} dV = R_{12} I^2, \quad (93.08)$$

так как

$$dV = \sigma \cdot ds \quad \text{и} \quad j^2 dV = I^2 \frac{ds}{\sigma}.$$

Из (93.07) следует, что для замкнутой цепи  $\varphi_1 = \varphi_2$  и сила тока отлична от нуля лишь в том случае, если в цепи существует сторонняя э. д. с.

Рассмотрим замкнутую неразветвленную цепь. Пусть на участке 1—2 действует стороннее поле  $\vec{E}^{\text{стр.}}$ , а вне участка  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ . Участок 1—2 цепи называется источником сторонней э. д. с., которая равна

$$\mathcal{E}^{\text{стр.}} = \oint E_s^{\text{стр.}} ds = \int_1^2 E_s^{\text{стр.}} ds. \quad (93.09)$$

Роль сторонней э. д. с. заключается в том, что она непрерывно вызывает движение положительных зарядов внутри источника в направлении от 1 к 2. Назовем точки 1 и 2 зажимами источника.

Применим (93.07) к внешнему участку цепи и ко всей цепи. Обозначим внешнее и внутреннее сопротивления участков через  $R_a$  и  $R_i$ , а через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы на зажимах источника; получим

$$IR_a = \varphi_1 - \varphi_2, \quad I(R_a + R_i) = \mathcal{E}. \quad (93.10)$$

Следовательно,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{R_a}{R_a + R_i} \mathcal{E}. \quad (93.11)$$

Из (93.07) следует, что если  $I = 0$ , то  $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}^{\text{стр.}}$ ; то есть сторонняя э. д. с. измеряется разностью потенциалов на зажимах источника, когда цепь разомкнута. Во внешней цепи потенциал падает в направлении тока, так что  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Наоборот, внутри источника э. д. с. потенциал падает в направлении, противоположном направлению тока.

### Задачи

1. Определить сопротивление изоляции кабеля длины  $l$ , состоящего из цилиндрического проводника радиуса  $a$  и цилиндрической изоляции с наружным радиусом  $b$ . Изоляция соприкасается с окружающей средой, которая считается хорошим проводником.

Решение. Обозначим электропроводность изоляции через  $\gamma$ . Боковая поверхность цилиндра радиуса  $r$  равна  $2\pi r l$ . Согласно (93.06) получим

$$R = \int_a^b \frac{dr}{\gamma \cdot 2\pi r l} = \frac{1}{2\pi \gamma l} \ln \frac{b}{a}.$$

2. В качестве заземления в почву зарыт металлический шар радиуса  $a$ . Определить сопротивление заземления.

Решение. Здесь координатой  $s$  квазилинейного проводника служит радиус  $r$ ,  $a s = 4\pi r^2$ . Поэтому

$$R = \int_a^\infty \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma} = \frac{1}{4\pi \gamma a},$$

где  $\gamma$  — коэффициент электропроводности грунта. Из формулы видно, что существенна электропроводность непосредственно у поверхности шара.

### § 94. Превращение энергии в цепи постоянного тока

Закон сохранения энергии согласно (76.11) имеет вид:

$$N^{\text{стр.}} = \int \vec{j} \vec{E}^{\text{стр.}} dV = \frac{dW}{dt} + \oint_{(\sigma)} S_n d\sigma + Q'. \quad (94.01)$$

Для стационарного поля  $\frac{dW}{dt} = 0$ . Рассмотрим поверхность, охватывающую все поле. Тогда  $S_n = 0$  и, следовательно,  $N^{\text{стр.}} = Q'$ . Для квазилинейного неразветвленного проводника элемент объема можно взять в форме  $dV = \sigma ds$ . Тогда

$$N^{\text{стр.}} = \int_{(V)} \vec{j} \vec{E}^{\text{стр.}} dV = I \oint E_s^{\text{стр.}} ds = I \mathcal{E}^{\text{стр.}}, \quad (94.02)$$

где  $\mathcal{E}^{\text{стр.}}$  — сторонняя э. д. с., действующая в цепи. Из  $N^{\text{стр.}} = Q'$  в силу (93.08) вытекает закон Ома для замкнутой цепи  $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = RI$ .

Работа сторонних сил производится лишь там, где  $\vec{E}^{\text{стр.}} \neq 0$ , а теплота Ленца — Джоуля выделяется во всем проводнике. Возникает вопрос: за счет чего выделяется теплота на тех участках цепи, где  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ ?

Рассмотрим участок цилиндрического провода радиуса  $r$  и длины  $l$ . Пусть по участку идет ток силой  $I$ . На поверхности проводника напряженность магнитного поля приближенно равна (задача 1, § 9)

$$H = \frac{2I}{cr} = \frac{2\pi r j}{c}.$$

Если на участке  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ , то  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$  и вектор Умова — Пойнтинга равен

$$S = \frac{c}{4\pi\gamma} |\vec{j}, \vec{H}| = \frac{c}{4\pi\gamma} jH = \frac{j^2 r}{2\gamma}.$$

Вектор  $S$  направлен внутрь проводника (рис. 38), так как вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль тока, а  $\vec{H}$  — по касательной к окружности, концентрической току, перпендикулярно к  $\vec{E}$ . Поэтому в единицу времени через поверхность проводника утекает энергия

$$\oint S_n d\sigma = S \cdot 2\pi r l = R I^2 = Q,$$

где  $R$  — сопротивление проводника. Таким образом, энергия, выделяющаяся в виде количества теплоты на участках, где  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ , утекает в проводник из окружающего поля. Но в окружающее поле энергия поступает из участков цепи, в которых совершается работа сторонних сил. Там, где

$$\vec{E}^{\text{стр.}} \neq 0, \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}^{\text{стр.}}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi\gamma} [\vec{j}, \vec{H}] - \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^{\text{стр.}}, \vec{H}].$$

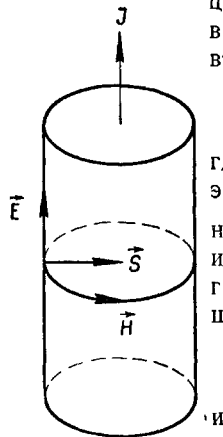


Рис. 38.

Первый член правой части рассмотрен выше. Второй член представляет собой поток энергии из источника э. д. с. наружу, так как внутри источника э. д. с.  $\vec{E}^{\text{стр.}}$  и  $\vec{j}$ , вообще говоря, параллельны. Вся вытекающая энергия возвращается в другие участки цепи (в которых  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ ) и превращается там в теплоту. Действительно, если предположить, что источник э. д. с. имеет цилиндрическую форму (длина  $l'$ , радиус  $r$ ) и магнитное поле на его поверхности определяется формулой  $H = \frac{2I}{cr}$ , то полный поток энергии, выходящий через боковую поверхность источника в единицу времени, равен

$$- \int \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^{\text{стр.}}, \vec{H}]_n d\sigma = \frac{c}{4\pi} E^{\text{стр.}} H 2\pi l' r = \mathcal{E}^{\text{стр.}} I$$

и равняется мощности сторонней э. д. с.  $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = E^{\text{стр.}} \cdot l'$ .

## § 95. Термоэлектрические явления

В неравномерно нагретом теле (металле или полупроводнике) нет термодинамического равновесия для электронов. В таком теле появляется добавочный ток в направлении падения температуры. Плотность этого тока в первом приближении пропорциональна градиенту

температуры. Поэтому обобщенный закон Ома может быть написан в форме

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр.}} - \alpha \nabla T), \quad (95.01)$$

где  $\alpha$  — величина, характеризующая термоэлектрические свойства вещества и имеющая смысл термо-э. д. с., рассчитанной на 1 градус.

Рассмотрим участок разомкнутой цепи, в котором  $\vec{E}^{\text{стр.}} = 0$ . Пусть рассматриваемый участок неоднороден, причем крайние проводники 1 (рис. 39) представляют собой одинаковые вещества. Пусть спай  $b$  и  $c$  имеют температуры  $T_1$  и  $T_2$ , а температуры концов  $a$  и  $d$  цепи одинаковы. В такой разомкнутой цепи ( $j = 0$ ) возникнет электрическое поле  $\vec{E} = \alpha \nabla T$  и между точками  $a$  и  $d$  установится разность потенциалов

$$\mathcal{E}_T = \int_a^d E_s ds = \int_a^d \alpha \frac{dT}{ds} ds = \int_a^d \alpha dT,$$

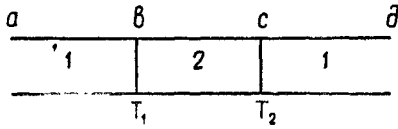


Рис. 39.

которая называется термоэлектродвижущей силой. Обозначим величину  $\alpha$  в первом и втором веществах через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Интегрирование от  $a$  до  $b$  и от  $b$  до  $d$  есть интегрирование по  $T$  от  $T_2$  до  $T_1$  в первом веществе, а интегрирование от  $b$  до  $c$  есть интегрирование по  $T$  от  $T_1$  до  $T_2$  во втором веществе. Поэтому

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) dT. \quad (95.02)$$

Зависимость термо-э. д. с. от температуры может быть получена, если известна зависимость  $\alpha$  от  $T$ . Из (95.02) видно, что для получения термо-э. д. с. необходим не только градиент температуры, но и неоднородность цепи.

Рассмотрим энергетические превращения в цепи постоянного тока при наличии термо-э. д. с.. Согласно (76.03) изменение плотности энергии поля можно написать в форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{j} \vec{E}.$$

Подставим сюда из (95.01)  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \vec{E}^{\text{стр.}} + \alpha \nabla T$ , получим мощность сторонних сил в единице объема

$$\vec{j} \vec{E}^{\text{стр.}} = \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} + \frac{j^2}{\gamma} + \alpha \vec{j} \nabla T. \quad (95.03)$$

Последний член в (95.03) определяет количество теплоты, выделяющееся при термоэлектрических явлениях в единицу времени в еди-

нице объема. Проинтегрируем (95.03) по некоторому объему, введя обозначения § 76, получим

$$N^{\text{стр.}} = \frac{dW}{dt} + \oint_{(\sigma)} S_n d\sigma + \int_{(V)} \frac{j^2}{\gamma} dV + \int \alpha \vec{j} \nabla T dV. \quad (95.04)$$

Преобразуем это выражение для случая стационарного поля, когда

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{j} = 0.$$

Тогда

$$\vec{j} \alpha \nabla T = \text{div} (\alpha T \vec{j}) - T \vec{j} \nabla \alpha$$

и

$$N^{\text{стр.}} = \oint_{(\sigma)} (\vec{S} + \alpha T \vec{j})_n d\sigma + \int \frac{j^2}{\gamma} dV - \int T \vec{j} \nabla \alpha dV. \quad (95.05)$$

Последний член выражает так называемый эффект Томсона. Если проводник однороден, то изменение величины  $\alpha$  определяется лишь изменением температуры

$$\nabla \alpha = \frac{d\alpha}{dT} \nabla T.$$

Поэтому в единице объема при наличии градиента температуры будет выделяться количество теплоты

$$q_T = \rho \vec{j} \nabla T, \quad \text{где} \quad \rho = -T \frac{d\alpha}{dT} \quad (95.06)$$

( $\rho$  — коэффициент Томсона). При  $\rho > 0$  количество теплоты выделяется в проводнике, если  $\vec{j}$  и  $\nabla T$  параллельны, и поглощается — если  $\vec{j}$  и  $\nabla T$  антипараллельны; при  $\rho < 0$  — соотношения обратные.

Первый член правой части в (95.05) содержит сумму потока электромагнитной энергии и потока теплоты  $\alpha T \vec{j}$ , переносимого током. На границе объема  $V$ , где имеется контакт двух проводников,  $T$  и  $j_n$  непрерывны, величина же  $\alpha$  различна. Поэтому поток количества теплоты, подводимого к контакту током в проводнике 1, будет  $\alpha_1 T j_n$ , а поток количества теплоты, отводимого от контакта током в проводнике 2, будет  $\alpha_2 T j_n$ . Таким образом, на единице площади контакта в единицу времени будет выделяться «тепло Пельтье»

$$q'_{12} = \Pi_{12} j_n, \quad \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (95.07)$$

где  $\Pi_{12}$  — коэффициент Пельтье.

Оба эффекта — Томсона и Пельтье — пропорциональны первой степени тока и меняют знак при изменении направления тока. Поэтому их можно исключить, беря полусумму тепловых эффектов для равных прямого и обратного токов. Эта полусумма равна теплоте Джоуля — Ленца.

Легко видеть, что коэффициенты Пельтье и Томсона связаны соотношением

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \frac{\Pi_{12}}{T}, \quad (95.08)$$

а термо-э. д. с. выражается через коэффициент Пельтье соотношением Томсона

$$\mathcal{E}_T = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \quad (95.09)$$

### § 96. Задача Бурсиана — Лангмюра (плоский диод)

Простейший электронный прибор — плоский диод — состоит из двух плоских параллельных электродов (катода и анода), помещенных в вакууме на расстоянии  $l$  друг от друга. К электродам приложено напряжение  $V_a$ . Катод нагрет и испускает термоэлектроны, вследствие чего через диод идет электрический ток. Определим плотность этого тока.

Эта задача впервые была решена Бурсианом в 1919 году. Позже она рассматривалась в более общей постановке рядом авторов: Богуславским, Лангмюром и др.

Пусть потенциалы катода и анода соответственно равны  $\varphi_k = 0$  и  $\varphi_a = V_a$ . При больших анодных напряжениях все электроны, выходящие из катода, доходят до анода и плотность тока (ток насыщения) не зависит от  $V_a$ . Величина тока насыщения зависит лишь от эмиссионной способности катода и определяется формулой Ричардсона — Дэшмана (гл. VIII)

$$j_{\text{нас.}} = a T^2 e^{-\frac{b}{T}}, \quad (96.01)$$

где  $a$  — постоянная,  $T$  — абсолютная температура,  $b = \frac{W}{k}$ ,  $W$  — работа выхода электрона из катода,  $k$  — постоянная Больцмана.

Рассмотрим изменение распределения потенциала  $\varphi(x)$  между электродами при постепенном увеличении эмиссии электронов с повышением температуры  $T$  катода. Ограничимся случаем, когда  $V_a$  достаточно велико и начальными скоростями эмитированных электронов можно пренебречь.

При низких температурах эмиссии нет и  $j = 0$ . Поэтому между электродами нет объемного заряда. Потенциал зависит от  $x$  линейно  $\varphi = \frac{V_a}{l} x$  (рис. 40, прямая 1). При некотором повышении температуры появляется ток, по величине совпадающий с  $j_{\text{нас.}}$  (влияние объемного заряда еще не сказывается). По мере роста  $j$  растет и отрицательный объемный заряд, понижающий потенциал. Кривая  $\varphi = \varphi(x)$  «провисает» относительно прямой 1. При дальнейшем увеличении объемного заряда напряженность поля у катода обращается

в нуль и может изменить свой знак. Минимум потенциала будет достигаться не у катода, а на некотором расстоянии от него (кривая 3). Плотность тока в диоде уменьшается, так как медленные электроны не могут преодолеть возникшее задерживающее поле и возвращаются на катод.

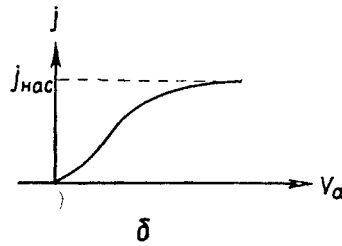
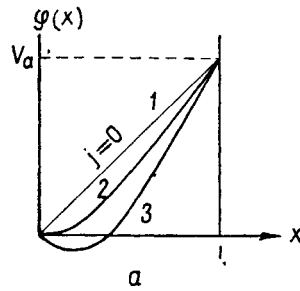


Рис. 40.

Найдем распределение потенциала. Плотность  $\rho$  объемного заряда равна  $\rho = -en$ , если  $n$  — число электронов в кубическом сантиметре.

Плотность тока равна  $j = env$ , где  $v$  — скорость электрона. В плоскости с потенциалом  $\varphi(x)$  скорость электрона равна

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}.$$

Поэтому плотность заряда равна

$$\rho = -en = -\frac{j}{v} = -j \left( \frac{m}{2e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

где  $j$  не зависит от  $x$  (для стационарного тока). Уравнение Пуассона принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= -4\pi\rho = \frac{4}{9} A \frac{j}{\sqrt{\varphi}}, \\ A &= 9\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}. \end{aligned} \right\} \quad (96.02)$$

Нелинейное уравнение (96.02) проинтегрируем при следующих граничных условиях:

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad \varphi(l) = V_a. \quad (96.03)$$

Второе условие соответствует упомянутому выше обращению поля в нуль на катоде и кривой 2 (рис. 40, а). Случай, соответствующий кривой 3, при сделанном предположении о нулевой начальной скорости электронов не осуществляется.

Умножим уравнение (96.02) на  $2\frac{d\varphi}{dx}$ . Тогда

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{16}{9} A j \frac{d}{dx} \varphi^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{16}{9} A j \varphi^{\frac{1}{2}} + C.$$

Из граничных условий при  $x=0$  следует  $C=0$ . Поэтому

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{4}{3} (Aj)^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{4}}, \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{3} \varphi^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} (Aj)^{\frac{1}{2}} x,$$

то есть

$$\varphi(x) = (Aj)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}.$$

Граничное условие при  $x=l$  дает

$$V_a = (Aj)^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}}.$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{A} \frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{l^2} = \frac{1}{9\pi} \left( \frac{2e}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_a^{\frac{3}{2}}}{l^2}, \quad \varphi(x) = V_a \left( \frac{x}{l} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (96.04)$$

Таким образом, для зависимости  $j$  от  $V_a$  имеет место «закон 3/2». При больших  $V_a$  рост  $j$  постепенно замедляется и достигает тока насыщения (96.01). Вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке 40, б.

### § 97. Влияние магнетика на магнитное поле тока

Рассмотрим влияние магнетика на магнитное поле тока. Уравнения постоянного магнитного поля тока, распределенного с плотностью  $\vec{j}$ , при отсутствии ферромагнетиков и поверхностных токов имеют вид (§ 79)

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (97.01)$$

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}. \quad (97.02)$$

Если ток распределен в однородном магнетике с магнитной проницаемостью  $\mu$ , то первое уравнение (97.01) дает

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (97.03)$$

Из  $\text{div } \vec{B} = 0$  следует

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (97.04)$$

где  $\vec{A}$  — векторный потенциал магнитного поля тока.

В связи с условием калибровки (§ 34)

$$\text{div } \vec{A} = 0, \quad (97.05)$$

получаем

$$\nabla^2 \vec{A} = - \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (97.06)$$

поэтому потенциал в точке  $\vec{r}$  равен

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (97.07)$$

Отсюда следует, что магнитная индукция  $\vec{B}$ , создаваемая током в магнетике, в  $\mu$  раз больше напряженности поля, создаваемого таким же током, распределенным в вакууме. Это объясняется тем, что напряженность  $\vec{H}$  создается только токами свободных зарядов, а индукция  $\vec{B}$  создается токами как свободных, так и связанных зарядов. Действительно, согласно (79.04) и (97.01)

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \text{rot } \vec{I}), \quad (97.08)$$

где  $\vec{I}$  — вектор намагничивания. Подставим  $\vec{B}$  из (97.04) в (97.08). Учитывая (97.05), получим

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} (\vec{j} + c \text{rot } \vec{I}). \quad (97.09)$$

Так что

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \text{rot } \vec{I}(\vec{r}')}{R} dV', \quad (97.10)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Для однородной неферромагнитной среды  $\vec{I} = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H}$ . Плотность тока связанных зарядов пропорциональна плотности тока свободных зарядов

$$\vec{j}_g = \frac{\mu-1}{4\pi} c \text{rot } \vec{H} = (\mu-1) \vec{j}.$$

Полный ток равен

$$\vec{j} + \vec{j}_g = \mu \vec{j}. \quad (97.11)$$

Поэтому векторный потенциал возрастает в  $\mu$  раз.

### § 98. Энергия магнитного поля токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции

Энергия магнитного поля тока, погруженного в магнетик, согласно (76.13) равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \vec{H} dV.$$

Это выражение может быть преобразовано (§ 39) к виду

$$W_m = \frac{1}{2c} \int \vec{j} \vec{A} dV. \quad (98.01)$$

Для системы проводников интеграл по объему разбивается на сумму интегралов по объему каждого проводника

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n \int_{(V_a)} \vec{j} \vec{A} dV_a.$$

Если проводники линейные, то  $\vec{j} dV_a$  можно заменить через  $I_a d\vec{r}_a$ , где  $I_a$  — сила тока, идущего по проводнику  $a$ ,  $d\vec{r}_a$  — элемент длины этого проводника. Тогда

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n I_a \oint_{C_a} \vec{A} d\vec{r}_a, \quad (98.02)$$

где интеграл берется по контуру  $C_a$  проводника  $a$ . По формуле Стокса

$$\oint_{C_a} \vec{A} d\vec{r}_a = \int_{(\sigma_a)} \text{rot}_n \vec{A} d\sigma_a = \int_{(\sigma_a)} B_n d\sigma_a = \Phi_a. \quad (98.03)$$

Величина  $\Phi_a$  есть, очевидно, поток магнитной индукции, идущей через площадь  $\sigma_a$ , охватываемую контуром тока  $a$ . Поэтому магнитная энергия равна

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^n I_a \Phi_a. \quad (98.04)$$

Рассмотрим систему двух замкнутых токов (рис. 41). Пусть в проводнике 1 идет ток  $I_1$ . Поток магнитной индукции, пронизывающий площадь контура проводника 2, будет пропорционален  $I_1$

$$\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} I_1.$$

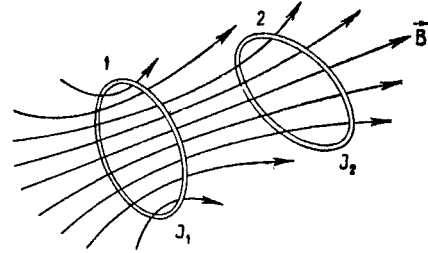


Рис. 41.

Коэффициент  $L_{21}$  называется коэффициентом индукции первого проводника на второй. Точно так же поток индукции, пронизывающий площадь, ограниченную контуром проводника 1, и обусловленный током  $I_2$  во втором проводнике, равен

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2.$$

Кроме того, площадь, охваченная каждым проводником, пронизывается магнитным потоком, обусловленным собственным током. Собственные магнитные потоки равны

$$\Phi_{11} = \frac{1}{c} L_{11} I_1, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{c} L_{22} I_2.$$

Коэффициенты  $L_{11}$  и  $L_{22}$  называются коэффициентами самоиндукции проводников 1 и 2. Полные потоки, идущие через площади, ограниченные токами 1 и 2, равны

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \frac{1}{c} (L_{11}I_1 + L_{12}I_2),$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = \frac{1}{c} (L_{21}I_1 + L_{22}I_2).$$

Для  $n$  проводников поток, проходящий через площадь контура  $a$ , есть линейная функция сил токов и равен

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} I_b. \quad (98.05)$$

Энергия системы токов принимает вид

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_a I_a \Phi_a = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} I_a I_b. \quad (98.06)$$

Заметим, что работа, которую надо затратить, чтобы перенести ток 2 из бесконечности в данное положение относительно тока 1, равна  $\frac{1}{2c^2} L_{21} I_2 I_1$ ; работа переноса тока 1 из бесконечности в данное положение относительно тока 2 равна  $\frac{1}{2c^2} L_{12} I_1 I_2$  (предполагается, что в процессе переноса  $I_1 = \text{const}$  и  $I_2 = \text{const}$ ). Так как энергия системы не зависит от пути ее построения, то названные работы равны. Следовательно,  $L_{12} = L_{21}$ . Поэтому коэффициент  $L_{12} = L_{21}$  называется коэффициентом взаимной индукции проводников 1 и 2.

Так как  $W_m \geq 0$ , то для системы двух проводников должно выполняться неравенство  $L_{11}L_{22} \geq L_{12}^2$  (§ 89).

Отношение

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

называется коэффициентом связи двух контуров.

### § 99. Вычисление коэффициентов взаимной индукции и самоиндукции

Вычислим коэффициент взаимной индукции. Согласно (98.03) поток индукции, созданный током  $I_2$  и пронизывающий площадь проводника 1, равен

$$\Phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 d\vec{r}_1, \quad \text{где} \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu I_2}{c} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2}{R}$$

есть векторный потенциал, создаваемый током  $I_2$ . Поэтому

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2 = \frac{\mu I_2}{c} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dr}_1 \cdot \vec{dr}_2}{R}. \quad (99.01)$$

Здесь  $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  есть расстояние между элементами  $\vec{dr}_1$  и  $\vec{dr}_2$  токов. Коэффициент взаимной индукции равен

$$L_{12} = \mu \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dr}_1 \cdot \vec{dr}_2}{R} = L_{21}. \quad (99.02)$$

Из (99.02) видно, что  $L_{12}$  имеет размерность длины (измеряется в сантиметрах), пропорционален магнитной проницаемости магнетика и зависит от формы, взаимного расположения и размеров проводников.

Для вычисления коэффициента самоиндукции формула (99.02) непригодна, так как интеграл расходится. Чтобы вычислить  $L_{11}$ , найдем магнитную энергию, подставив (97.07) в (98.01).

$$W_m = \frac{1}{2c^2} L_{11} I_1^2 = \frac{\mu}{2c^2} \int_{(V)} \int_{(V)} \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}'}{R} dV dV'. \quad (99.03)$$

Поэтому

$$L_{11} = \frac{\mu}{I_1^2} \int_V \int_V \frac{\vec{j} \cdot \vec{j}'}{R} dV dV' = \frac{2c^2 W_m}{I_1^2}. \quad (99.04)$$

### Задачи.

1. Определить коэффициент самоиндукции отрезка  $l$  линейного проводника радиуса  $a$  ( $a \ll l$ ), по которому идет стационарный ток силой  $I$ .

Решение. Прямолинейный проводник длины  $l$  можно рассматривать как часть замкнутого проводника с током. На расстояниях  $r \leq l$  магнитное поле будет совпадать с полем диполя и убывать как  $\frac{1}{r^3}$ . Поэтому энергией поля на таких расстояниях можно пренебречь. На расстояниях  $r > l$  магнитное поле прямолинейного провода равно  $H = \frac{2I}{cr}$ . Магнитная энергия равна

$$W_m^{(a)} = \frac{\mu}{8\pi} \int_a^l H^2 2\pi l r dr = \frac{\mu I^2 l}{c^2} \int_a^l \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2}{c^2} l \ln \frac{l}{a},$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды и  $a$  — радиус провода. Магнитной энергией внутри провода можно пренебречь. Теперь согласно (99.04) коэффициент самоиндукции приближенно (с логарифмической точностью) равен

$$L = 2\mu l \ln \frac{l}{a}.$$

2. Определить коэффициент самоиндукции длинного однослойного соленоида, имеющего  $N$  витков.

**Решение.** Напряженность магнитного поля внутри очень длинного соленоида можно считать равной напряженности на его оси (задача 2, § 37),  $H = \frac{4\pi IN}{cl}$ . Пренебрегая влиянием концов, магнитную энергию можно вычислить как произведение плотности энергии  $\frac{\mu H^2}{8\pi}$  на объем соленоида  $V = l\sigma$ , где  $\sigma$  — площадь поперечного сечения. Отсюда коэффициент самоиндукции равен

$$L = \frac{2c^2 W_m}{I^2} = \frac{2c^2}{I^2} \frac{\mu H^2}{8\pi} l\sigma = \frac{4\pi\mu N^2 \sigma}{l}.$$

3. Показать, что коэффициент взаимной индукции двух соленоидов, намотанных на одном и том же сердечнике, равен

$$L_{12} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2 \sigma}{l}.$$

### § 100. Квазистационарные токи

Для исследования переменных во времени токов необходимо пользоваться общей системой уравнений Максвелла. Однако задача значительно упрощается для так называемых квазистационарных токов (сравнительно медленно меняющихся с течением времени).

Обозначим период изменения тока (если ток периодически меняется со временем) через  $T$ . Если изменения тока не периодические, обозначим через  $T$  время, в течение которого ток изменяется на порядок своей величины. Линейные размеры системы (области, занятой током) обозначим через  $l$ . Тогда ток можно считать квазистационарным, если

$$cT \gg l. \quad (100.01)$$

Произведение  $cT$  есть расстояние, на которое распространяется поле за время  $T$ . Соотношение (100.01) показывает, что размеры системы малы и всякое изменение поля практически мгновенно охватывает всю систему проводников. Поэтому запаздыванием электромагнитных действий (гл. III) в такой системе можно пренебречь — можно считать, что во всех точках системы ток (или поле) в каждый момент времени находится в одной и той же фазе. Например, для промышленного переменного тока  $T = \frac{1}{50}$  сек, а  $cT = 6 \cdot 10^8$  см = 6000 км. Поэтому, если размеры тока  $a \ll 6000$  км, то можно считать ток квазистационарным.

Кроме условия квазистационарности (100.01), будем предполагать, что: 1) на границе области электромагнитное поле практически равно нулю; 2) проводники квазилинейны; 3) внутри проводников ток смещения  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  мал по сравнению с током проводимости  $\vec{j}$  и током смещения можно пренебречь; если в цепь включен конденсатор (сосредоточенная емкость), то в конденсаторе можно пренебречь

током проводимости по сравнению с током смещения; 4) диэлектрики и проводники однородны.

Рассмотрим энергию квазистационарного тока.

Повторяя рассуждения § 39, в силу уравнения Максвелла получим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \vec{H} dV = \frac{1}{8\pi} \int \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H} dV = \frac{1}{2c} \int_{(V)} \vec{A} \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV.$$

Аналогично преобразуется выражение для электрической энергии.

Для переменного поля  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Предполагая, что объемных зарядов нет, получим

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \int \vec{D} \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \eta \varphi dV - \frac{1}{8\pi c} \int \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV.$$

Полная энергия равна

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \int_{(\sigma)} \eta \varphi d\sigma + \frac{1}{2c} \int_{(V)} \vec{A} \vec{j} dV + \\ + \frac{1}{8\pi c} \int \left( \vec{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV.$$

Покажем, что последний член может быть опущен. Векторный потенциал, пренебрегая запаздыванием, можно представить в форме (97.07). Тогда

$$\int_{(V)} \left( \vec{A} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{D} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV = \frac{\epsilon \mu}{c} \int dV \int_{(V)} dV' \frac{1}{R} \left( \vec{j}' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{j}'}{\partial t} \right),$$

где штрих означает, что функция зависит от радиус-вектора  $\vec{r}'$  элемента объема  $dV'$ . В проводниках, где нет сторонних сил,  $\vec{j}' = \gamma \vec{E}'$ . Поэтому правая часть обращается в нуль

$$\int_{(V)} dV \int_{(V)} dV' \frac{1}{R} \left( \vec{E}' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right) = 0.$$

В этом легко убедиться, произведя в одном из членов замену аргументов  $\vec{r}'$  на  $\vec{r}$  и  $\vec{r}$  на  $\vec{r}'$ . Для тех объемов  $V_1$  проводников, в которых действуют сторонние силы, будем иметь

$$\frac{\epsilon \mu \gamma}{c} \int_{(V_1)} dV \int_{(V_1)} dV' \frac{1}{R} \left( \vec{E}^{\text{стр.}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{E}^{\text{стр.}}}{\partial t} \right).$$

Но объем  $V_1$ , в котором действуют сторонние силы, можно считать очень малым по сравнению с объемом  $V$  всех проводников системы. Поэтому этим членом можно пренебречь.

Таким образом, выражение для энергии квазистационарного поля по форме совпадает с выражением для энергии стационарного поля

$$W = \frac{1}{2} \int_{(s)} \eta \varphi d\sigma + \frac{1}{2c} \int_{(V)} \vec{j} \vec{A} dV. \quad (100.02)$$

Для системы линейных проводников и конденсаторов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ab} p_{ab} e_a e_b + \frac{1}{2c^2} \sum_{ab} L_{ab} I_a I_b, \quad (100.03)$$

где  $p_{ab}$  — потенциальные коэффициенты,  $L_{ab}$  — коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции проводников.

Рассмотрим систему из емкости  $C$ , самоиндукции  $L$ , сопротивления  $R$  (рис. 42) и сосредоточенного источника сторонней э. д. с.

(емкостью и сопротивлением катушки самоиндукции пренебрегаем, сопротивление источника э. д. с. включаем в  $R$ ). Энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2c^2} L I^2 + \frac{e^2}{2C}, \quad (100.04)$$

где  $e$  — заряд одной из обкладок конденсатора.

Применим к системе закон сохранения энергии. На границе области в силу условия (1) вектор Умова —

Пойнтинга  $\vec{S}$  обращается в нуль (это значит, что система не излучает). Уравнение энергии принимает вид

$$N^{\text{стр.}} = \frac{dW}{dt} + Q'. \quad (100.05)$$

Согласно (93.08) и (94.02) для линейного проводника  $N^{\text{стр.}} = I \mathcal{E}^{\text{стр.}}$  и  $Q' = RI^2$ ; поэтому, подставив  $N^{\text{стр.}}$ ,  $Q'$  и  $W$  в (100.05), получим

$$I \mathcal{E}^{\text{стр.}} = \frac{1}{c^2} LI \frac{dI}{dt} + \frac{e}{C} \frac{de}{dt} + RI^2.$$

Замечая, что  $\frac{de}{dt} = -I$ , получаем

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{e}{C} = \mathcal{E}^{\text{стр.}}. \quad (100.06)$$

Уравнение (100.06) выражает обобщенный закон Ома для цепи квазистационарного тока. Перепишем его в форме

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{стр.}} + \frac{e}{C} - \frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}}{R}. \quad (100.07)$$

В числителе имеем: стороннюю э. д. с., разность потенциалов  $\frac{e}{C} = \varphi_1 - \varphi_2$  между обкладками конденсатора, электродвижущую силу индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд.}} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} = -L' \frac{dI}{dt}, \quad (100.08)$$

возникающую в катушке самоиндукции при изменении силы тока (все величины выражены в абсолютной гауссовой системе единиц, а коэффициент самоиндукции  $L' = \frac{L}{c^2}$  — в системе СГСЕ).

Можно получить более общее выражение для электродвижущей силы индукции из закона Фарадея (67.02). Согласно (98.05) э. д. с. индукции в проводнике  $a$  равна

$$\mathcal{E}_a^{\text{инд.}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_a}{dt} = -\frac{1}{c^2} \sum_b L_{ab} \frac{dI_b}{dt} - \frac{1}{c^2} \sum_b \frac{dL_{ab}}{dt} I_b. \quad (100.09)$$

Первый член определяет э. д. с. индукции, вызванную изменением силы тока в проводниках, а второй — изменением взаимного расположения и формы проводников с током.

В случае системы  $n$  неподвижных проводников, связанных друг с другом индуктивно, обобщенный закон Ома дает систему

$$R_a I_a = \mathcal{E}^{\text{стр.}} + V_a - \sum_{b=1}^n L'_{ab} \frac{dI_b}{dt} \quad (a = 1, 2, 3 \dots n); \quad (100.10)$$

член  $V_a$  отличен от нуля лишь для незамкнутого проводника и равен разности потенциалов на его концах.

## § 101. Процессы установления

Рассмотрим процесс установления стационарного тока. Допустим, что замыкается цепь, состоящая из последовательно включенных самоиндукции  $L$  и сопротивления  $R$ . Под  $R$  понимается полное омическое сопротивление цепи, включая и сопротивление источника постоянной э. д. с.  $\mathcal{E}_0$ . Согласно (100.06) сила тока в цепи определяется дифференциальным уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0, \quad (101.01)$$

которое надо решить при условии, что в начальный момент времени  $t=0$  сила тока  $I=0$ . Решение имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (101.02)$$

Из (101.02) следует, что стационарное значение тока  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$  устанавливается постепенно. Скорость установления определяется постоянной времени цепи

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (101.03)$$

Ток (101.02) можно рассматривать как сумму стационарного тока  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$  и индукционного экстратока замыкания

$$I_{\text{инд.}} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (101.04)$$

имеющего противоположное  $I_0$  направление. Индукционный ток замыкания постепенно затухает, через время  $t = \tau$  он убывает в  $e = 2,7183 \dots$  раза.

Аналогично можно рассмотреть процесс исчезновения тока. Допустим, что в цепи в момент  $t = 0$  электродвижущая сила  $\mathcal{E}_0$  обращается в нуль, но цепь остается замкнутой и ее сопротивление равно  $R$ . Решение уравнения (101.01) при  $\mathcal{E}_0 = 0$  имеет вид

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (101.05)$$

где  $I_0$  — сила тока в момент выключения э. д. с. Отсюда следует, что ток исчезает не сразу. Постоянная времени  $\tau$  (время релаксации) пропорциональна самоиндукции  $L$ , так как именно э. д. с. самоиндукции вызывает растягивание процесса установления во времени.

С другой стороны,  $\tau$  обратно пропорционально сопротивлению  $R$ , так как чем больше  $R$ , тем быстрее электромагнитная энергия расходуется на нагревание проводов.

### Задачи.

1. Конденсатор емкости  $C$  с разностью потенциалов на пластинах  $V_0$  разряжается через сопротивление  $R$ . Определить законы изменения заряда, тока и разности потенциалов. Самоиндукцией цепи пренебречь.

Решение. Так как  $L = 0$ ,  $\mathcal{E}^{\text{стр.}} = 0$  и  $I = -\frac{de}{dt}$ , то уравнение (100.06) приводится к виду

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e}{RC}.$$

Отсюда  $e(t) = e_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ , где  $e_0 = CV_0$  — начальный заряд обкладки конденсатора. Поэтому

$$V = \frac{e}{C} = \frac{e_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I = -\frac{de}{dt} = \frac{e_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Таким образом,  $e$ ,  $V$  и  $I$  убывают экспоненциально с постоянной времени  $\tau = RC$ .

2. Определить количество электричества  $e$ , проходящее через сечение проводника при изменении магнитного потока через ограниченную контуром проводника площадь.

Решение. Если сопротивление проводника  $R$ , то сила индукционного тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд.}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если поток индукции изменяется от  $\Phi_0$  до  $\Phi$ , то

$$e = \int I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_0}^{\Phi} d\Phi = \frac{\Phi_0 - \Phi}{R}.$$

Установленной зависимостью пользуются для измерения магнитного поля (заряд  $e$  измеряют при помощи баллистического гальванометра).

3. Определить разрядный и зарядный токи плоского конденсатора, диэлектрик которого имеет удельное сопротивление  $\gamma$ .

Решение. Сопротивление конденсатора  $R_C = \frac{d}{\gamma\sigma}$  ( $\sigma$  — площадь обкладки,  $d$  — расстояние между обкладками) можно считать включенным параллельно внешней цепи, сопротивление которой  $R_a$ . Поэтому полное сопротивление определяется из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C}.$$

Пользуясь результатами задачи 1, получим

$$I_{\text{разр.}} = \frac{e_0}{C} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right) e^{-\frac{t}{C} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right)}.$$

Зарядный ток

$$I_{\text{зар.}} = V \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right) \left( 1 - e^{-\frac{t}{C} \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_C} \right)} \right),$$

где  $V$  — приложенное к обкладкам конденсатора напряжение.

## § 102. Свободные колебания в цепи с емкостью и самоиндукцией

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включенных емкости  $C$ , сопротивления  $R$  и самоиндукции  $L$  (рис. 42). Пусть в начальный момент  $t=0$  конденсатор заряжен (заряд обкладки  $e$ ) и тока нет. Замечая, что  $\mathcal{E}_{\text{стр.}} = 0$  и  $I = -\frac{de}{dt}$ , уравнение (100.06) можно написать в форме

$$L \frac{d^2 e}{dt^2} + R \frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = 0. \quad (102.01)$$

Ищем частное решение этого уравнения в форме<sup>1</sup>  $e = e^{\mu t}$ . Характеристическое уравнение  $L\mu^2 + R\mu + \frac{1}{C} = 0$  имеет корни

$$\mu = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (102.02)$$

Отсюда следует, что при  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \geq 0$  корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны. В случае разных корней общее решение имеет вид

$$e = C_1 e^{-|\mu_1|t} + C_2 e^{-|\mu_2|t} \quad (102.03)$$

и характеризует так называемый аperiодический разряд конденсатора (см. задачи).

Рассмотрим случай комплексных корней, если  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \leq 0$ .

Введем обозначения

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad k = \frac{R}{2L}. \quad (102.04)$$

Тогда  $\mu = -k \pm i\omega$ , где  $i = \sqrt{-1}$ . Общий интеграл может быть написан в форме

$$e = A_0 e^{-kt} \cos(\omega t + \alpha). \quad (102.05)$$

Начальная амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\alpha$  — постоянные, определяемые начальными условиями. Таким образом, в контуре будут происходить затухающие колебания

(рис. 43) с циклической частотой  $\omega$ . Из (102.04) получаем период затухающих колебаний (формула Томсона)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (102.06)$$

Амплитуда колебаний  $A(t) = A_0 e^{-kt}$  убывает со временем по показательному закону. Затухание характеризуется обычно логарифмическим декрементом затухания

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = kT = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}. \quad (102.07)$$

<sup>1</sup> Буквой  $e$  обозначены и заряд и основание натуральных логарифмов ( $e = 2,718 \dots$ ). Это не должно вызывать недоразумения, так как основание натурального логарифма всегда входит с буквенным показателем степени.

Поэтому затухающие колебания можно представить в форме

$$e = A_0 e^{-\delta \frac{t}{T}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right), \quad (102.08)$$

то есть затухание тем больше, чем больше логарифмический декремент затухания.

Если сопротивление  $R$  мало, колебания будут затухать медленно. Таким «незатухающим» колебаниям соответствует период

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (102.09)$$

Переписав (102.04) в форме  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ , видим, что циклическая частота затухающих колебаний тем меньше, чем больше сопротивление  $R$ . При большом  $R$   $\omega$  обращается в нуль и колебательный разряд конденсатора переходит в апериодический.

### Задачи

1. Показать, что если в начальный момент  $t = 0$   $e = e_0$ ,  $I = 0$ , то сила тока при апериодическом разряде определяется формулой

$$I(t) = e_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \{e^{\mu_2 t} - e^{\mu_1 t}\},$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — корни (102.02) характеристического уравнения.

2. Показать, что в случае равных корней характеристического уравнения ( $R^2 = 4 \frac{L}{C}$ ) сила тока в контуре при начальных условиях  $e = e_0$ ,  $I = 0$  выражается формулой

$$I(t) = e_0 \mu_1^2 t e^{\mu_1 t}, \quad \mu_1 = -\frac{R}{2L}.$$

У к а з а н и е. В формуле задачи 1 перейти к пределу при  $\mu_2 = \mu_1$ .

3. Показать, что при  $L = 0$  результат задачи 1 переходит в результат задачи 1 § 101.

## § 103. Вынужденные колебания (переменный ток)

Предположим, что в цепи, состоящей из последовательно включенных самоиндукции  $L$ , емкости  $C$  и сопротивления  $R$ , действует сторонняя э. д. с., меняющаяся со временем гармонически с циклической частотой  $\omega$ ,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (103.01)$$

Согласно (100.06) сила тока в цепи будет характеризоваться дифференциальным уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{e}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t. \quad (103.02)$$

Если взять производную по  $t$  и заменить  $-\frac{de}{dt}$  через  $I$ , то сила тока будет подчиняться уравнению второго порядка

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -\omega \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Однако удобнее решать уравнение (103.02), применяя метод комплексных решений. Напишем э. д. с. в комплексной форме  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ .

Так как  $e = -\int I dt$ , заменим (103.02) уравнением

$$L \frac{d\dot{I}}{dt} + R\dot{I} + \frac{1}{C} \int \dot{I} dt = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (103.03)$$

Здесь  $\dot{I}$  — комплексная сила тока<sup>1</sup>. Сила тока, определяемая уравнением (103.02), будет равна вещественной части  $\dot{I}$

$$I = \operatorname{Re} \dot{I}.$$

Ищем решение (103.03) в форме

$$\dot{I} = \dot{I}_0 e^{i\omega t}, \quad (103.04)$$

где  $\dot{I}_0$  — постоянная комплексная амплитуда. Представим ее в форме  $\dot{I}_0 = |I_0| e^{i\varphi}$ , где  $|I_0|$  — модуль, а  $\varphi$  — фаза (начальная фаза тока). Тогда

$$\dot{I} = |I_0| e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (103.05)$$

Комплексные числа будем изображать векторами на плоскости (рис. 44). Число  $\dot{I}$  изобразится вектором длины  $|I_0|$ , образующим угол  $\omega t + \varphi$  с неподвижным направлением  $OX$ . С течением времени угол  $\omega t + \varphi$  изменяется и вектор  $\dot{I}$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$ . Проекция вектора на ось  $OX$  дает, очевидно, вещественную часть  $\dot{I}$ . Искомый ток равен

$$I = \operatorname{Re} \dot{I} = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (103.06)$$

Таким образом, задача сводится к определению комплексной амплитуды тока. Возьмем производную по времени от (103.05). Так как  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ , то

$$\frac{d\dot{I}}{dt} = i\omega \dot{I}_0 e^{i\varphi} = \omega \dot{I}_0 e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (103.07)$$

<sup>1</sup> В электротехнике комплексное число, соответствующее вещественному числу  $a$ , обозначается  $\dot{a}$ .

Следовательно, дифференцирование комплексного вектора по времени сводится к умножению на  $\omega$  и повороту в положительном направлении на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Интегрируя  $\dot{I}$ , получим

$$-\dot{e} = \int \dot{I} dt = \dot{I}_0 \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \dot{I}_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega} \dot{I}_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (103.08)$$

то есть интегрирование тока по времени сводится к делению на  $\omega$  и повороту вектора в отрицательном направлении на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Подставим (103.04) в (103.03). Получим комплексное уравнение

$$\dot{I}(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}) = \mathcal{E}e^{i\omega t} = \mathcal{E}. \quad (103.09)$$

Величина

$$\dot{Z} = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (103.10)$$

называется комплексным сопротивлением. Из (103.09) вытекает закон Ома в комплексной форме

$$\dot{I} = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}} \quad \text{или} \quad \dot{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\dot{Z}}. \quad (103.11)$$

Напишем комплексное сопротивление в форме

$$\dot{Z} = R + iX = Ze^{-i\varphi}, \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (103.12)$$

Вещественная часть комплексного сопротивления  $R$  называется активным сопротивлением, а мнимая часть  $X$  — реактивным сопротивлением. Из (103.12) получаем

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (103.13)$$

Уравнение (103.11) принимает вид

$$\dot{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{\dot{Z}} e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (103.14)$$

Перейдем к вещественной части согласно (103.06); получим силу тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \cos(\omega t + \varphi). \quad (103.15)$$

Амплитуда силы тока равна

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (103.16)$$

Величина  $Z$  называется кажущимся сопротивлением цепи или импедансом. Импеданс зависит не только от  $R$ ,  $L$  и  $C$  цепи, но и от частоты  $\omega$ .

Если цепь состоит из одной индуктивности, то  $R=0$ ,  $\frac{1}{C}=0$  и  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}$ . Поэтому величина

$$X_L = \omega L \quad (103.17)$$

называется индуктивным сопротивлением самоиндукции. Если цепь состоит лишь из емкости  $C$ , то

$$R=0, L=0 \text{ и } I_0 = \omega C \mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{X_C};$$

поэтому величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (103.18)$$

называется емкостным сопротивлением. Из (103.17) и (103.18) видно, что с увеличением частоты индуктивное сопротивление возрастает, а емкостное уменьшается.

Сравнение (103.15) и (103.01) показывает, что сила тока отличается от электродвижущей силы по фазе на угол  $\varphi$ .

Из второго соотношения (103.13) видно, что если  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , то есть  $X_L > X_C$ , то ток отстает по фазе от электродвижущей силы, а если  $X_L < X_C$ , то опережает ее. При  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , то есть когда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (103.19)$$

ток совпадает по фазе с электродвижущей силой, а кажущееся сопротивление достигает наименьшего значения  $R$ . При этом амплитуда тока достигает максимума и определяется формулой  $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ . В этом случае говорят о резонансе. Зависимость амплитуды тока  $I_0$  от частоты (резонансная кривая) изображена на рисунке 45.

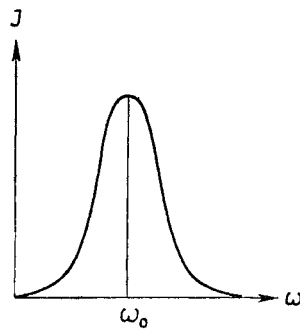


Рис. 45.

При  $\omega = \omega_0$  напряжение (разность потенциалов) на концах катушки самоиндукции или между обкладками конденсатора может достигать очень больших значений. Действительно, согласно (103.08) для напряжения на емкости при резонансе имеем

$$V_{C \text{ рез.}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{e_1}{C} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 R C},$$

а для напряжения на индуктивности —

$$V_{L \text{ рез.}} = \left| L \frac{dI}{dt} \right| = \omega_0 L \frac{\mathcal{E}_0}{R} = V_{C \text{ рез.}}$$

Поэтому, если  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} > R$ , то напряжения  $V_{C \text{ рез.}}$  и  $V_{L \text{ рез.}}$  будут больше амплитуды  $\mathcal{E}_0$ , приложенной э. д. с.

Из рассмотренного метода комплексного переменного для синусоидальных токов вытекает метод векторных диаграмм. Уравнение (103.09) можно рассматривать как векторное уравнение, показывающее, что векторная сумма падения напряжения на омическом сопротивлении  $R\dot{I}$ , падения напряжения на индуктивности  $i\omega L\dot{I}$  и падения напряжения на емкости  $\frac{1}{i}\frac{\dot{I}}{\omega C}$  равна комплексному вектору напряжения  $\mathcal{E}$ . Построим это векторное равенство графически (рис. 46), отложив вектор  $R\dot{I}$  из точки  $O$  в произвольном направлении. Тогда вектор  $i\omega L\dot{I}$  надо отложить под углом  $+\frac{\pi}{2}$ , а вектор  $\frac{\dot{I}}{i\omega C}$  — под углом  $(-\frac{\pi}{2})$ . Разность  $i(\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}$  изобразится отрезком  $OA$  (если  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ), а  $\mathcal{E}$  — диагональю  $OB$  прямоугольника, построенного на  $OA$  и  $R\dot{I}$ . Легко видеть, что длина этой диагонали равна

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_0 Z.$$

Угол  $\varphi$ , показывающий, на сколько ток отстает по фазе от напряжения, определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{OA}{R\dot{I}} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

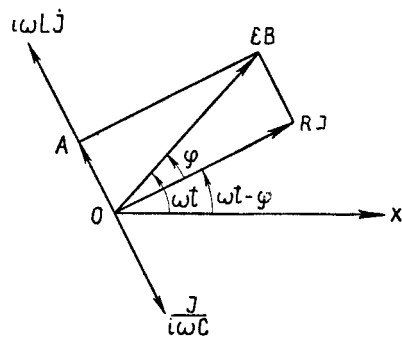


Рис. 46.

Таким образом, снова получены выражения (103.13) и (103.16).

В заключение отметим, что для разветвления цепи переменного тока емкость узла можно считать исчезающе малой. Поэтому первый закон Кирхгофа сохраняет свое значение, и его можно записать в комплексной форме

$$\sum_a \dot{I}_a = 0. \quad (103.20)$$

### Задачи

1. В цепи переменного тока с последовательным соединением элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  определить зависимость заряда  $q$  конденсатора от времени.  
Решение. Согласно (103.08) и (103.14)

$$\dot{q} = \frac{i\dot{I}}{\omega} = \frac{\dot{I}}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}};$$

откуда

$$e = \operatorname{Re} \dot{e} = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega Z} \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)}{\sqrt{R^2 \omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

2. Определить частоту  $\omega_m$ , при которой амплитуда заряда  $e$  на обкладке конденсатора достигает максимума. Найти значение  $e_{\max}$ .

У к а з а н и е. Разыскать минимум подкоренного выражения.

О т в е т.

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2} = \omega_0^2 - 2k^2,$$

где  $k$  — коэффициент затухания контура;

$$e_{\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{\omega_0^2 - k^2}}.$$

3. Показать, что при параллельном соединении элементов цепи переменного тока с комплексными сопротивлениями  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots$  складываются комплексные проводимости  $\frac{1}{\dot{Z}_1},$

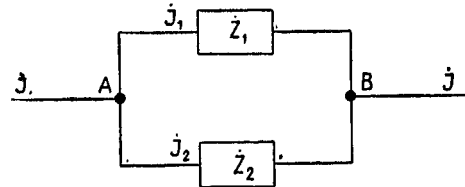


Рис. 47.

$\frac{1}{\dot{Z}_2}, \dots$  (рис. 47).

Решение. Для узла  $A$  согласно (103.20) имеем  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots$ . С другой стороны, если напряжение на  $AB$  равно  $\mathcal{E}$ , то  $\dot{I}_1 = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}_1}, \dot{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}_2}, \dots$

Полагая,  $\dot{I} = \frac{\mathcal{E}}{\dot{Z}}$ , получим комплексную проводимость разветвления

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \dots$$

4. Определить комплексное сопротивление и импеданс контура, состоящего из параллельно включенных емкости  $C$  и самоиндукции  $L$ .

Решение. Так как проводимости емкости и самоиндукции соответственно равны

$$\frac{1}{\dot{Z}_1} = i\omega C \text{ и } \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{1}{i\omega L} = -i \frac{1}{\omega L},$$

то проводимость разветвления и комплексная сила тока равны

$$\frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

$$\dot{I} = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \mathcal{E}_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Поэтому

$$Z = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}, \quad I = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Если  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ , то импеданс такого контура бесконечно велик — контур может играть роль фильтра, не пропускающего колебания частоты  $\omega_0$ .

5. Для измерения активного сопротивления самоиндукции или емкости пользуются мостом Уитстона (рис. 48). Показать, что для того чтобы в ветви  $BD$  не было тока, необходимо выполнение следующего соотношения между комплексными сопротивлениями ветвей:

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_4}.$$

6. Для измерения емкости или самоиндукции неизвестную емкость  $C_x$  или самоиндукцию  $L_x$  (с учетом сопротивления  $R_x$ ) берут в качестве одной из ветвей моста Уитстона (например,  $\dot{Z}_1$ ). Ветви  $\dot{Z}_3$  и  $\dot{Z}_4$  делают чисто активными ( $\dot{Z}_3 = R_3$ ,  $\dot{Z}_4 = R_4$ ), а в ветвь  $\dot{Z}_2$  помещают эталон ( $C_2$  или  $R_2 + i\omega L_2$ ). Показать, что

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_4}, \quad L_x = \frac{R_3}{R_4} L_2, \quad C_x = \frac{R_4}{R_2} \cdot C_2.$$

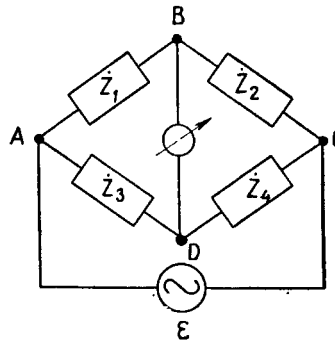


Рис. 48.

#### § 104. Превращения энергии в цепи переменного тока

Рассмотрим произвольную цепь, содержащую сопротивления, емкости и самоиндукции и приключенную к источнику косинусоидальной э. д. с. частоты  $\omega$ . Если цепь обладает комплексным сопротивлением  $\dot{Z}$ , то между приложенным напряжением  $V$  и током  $I$  возникает разность фаз  $\varphi$ ,

$$V = V_0 \cos \omega t, \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Согласно (94.02) мгновенная мощность (скорость поступления энергии в цепь) равна

$$N = VI = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]. \quad (104.01)$$

Таким образом, мощность имеет постоянную составляющую  $\frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi$  и переменную составляющую с циклической частотой  $2\omega$ . Если  $\varphi \neq 0$ , то в течение каждого периода имеются промежутки времени, в которые  $I$  и  $V$  имеют разные знаки (направления), а мощность, поступающая в цепь, отрицательна. В эти промежутки времени энергия, запасенная в самоиндукции и емкости, возвращается из цепи источнику напряжения,

Средняя или активная мощность, отдаваемая в цепь, получается усреднением по периоду

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi \quad (104.02)$$

( $\cos \varphi$  называется коэффициентом мощности).

Количество теплоты, выделяющееся в цепи в единицу времени, определяется формулой (93.08)

$$Q = RI^2 = RI_0^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (104.03)$$

Среднее значение количества теплоты равно

$$\bar{Q} = RI_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} RI_0^2. \quad (104.04)$$

Обычно для переменного тока вводятся действующие (или эффективные) значения тока и напряжения

$$I_s = \sqrt{\bar{I}^2} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad V_s = \sqrt{\bar{V}^2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}; \quad (104.05)$$

тогда  $\bar{Q} = RI_s^2$ . Следовательно, действующее значение переменного тока равно такому значению постоянного тока, при котором за время, равное одному периоду, выделяется такое же количество теплоты, как и для тока переменного. Действующие значения  $I_s$  и  $V_s$  измеряются тепловыми измерительными приборами.

## § 105. Исторические замечания

Сведения о развитии идей электродинамики были уже рассмотрены в § 24, 40, 51, 64 и 78. Здесь ограничимся краткой хронологической справкой.

Рассмотренная в § 79—85 феноменологическая теория поля в диэлектриках и магнетиках была основана Пуассоном, Клаузиусом, Моссотти, Томсоном и развита Максвеллом.

Термоэлектрический ток был открыт Томасом Иоганном Зеебеком (1770—1831) в 1821 году. Открытие Зеебека сыграло большую роль в установлении закона Омом, а пользуясь термоэлектрической батареей, позволяющей получить стационарную э. д. с., Ом смог установить свой закон.

Термоэлектричество исследовал В. Томсон (1856). В 1863 году Авенариус (1835—1895) экспериментально показал, что дифференциальная термо-э. д. с.

есть линейная функция абсолютной температуры:  $\frac{d\mathcal{E}}{dT} = a + bT$ . Пельтье

(1785—1845) в 1834 году открыл явление, названное его именем. Однако он дал этому явлению неправильное объяснение. Явление Пельтье исследовано Э. Х. Ленцом (1838). В 1853 году Квинтус-Ицилиус экспериментально показал, что тепло Пельтье пропорционально силе тока. Явление Томсона было

открыто в 1856 году. Несколько раньше (1854) В. Томсон построил термодинамическую теорию термоэлектрических явлений.

Исследование электрического тока стимулировалось расширением его технических применений. В 1832 году Шиллинг (1786—1857) изобрел первый действующий телеграф, в котором магнитная стрелка (указатель) отклонялась током. В 1837 году Морзе предложил телеграфный аппарат, а в 1844 году между Вашингтоном и Балтиморой была открыта первая телеграфная линия, оборудованная аппаратами Морзе. В 50-х годах XIX в. началась прокладка трансатлантического кабеля, а с 1866 года действует регулярная трансатлантическая связь.

Силовое применение электрического тока началось в 1839 году, когда Б. С. Якоби (1801—1874) сконструировал первый электродвигатель.

Открытие Фарадеем закона электромагнитной индукции привело к созданию электромагнитных источников тока. Первыми появились машины с постоянными магнитами. В 1866 году Уайльд в Манчестере сконструировал первую динамо-машину с электромагнитом, имеющую независимое возбуждение. В это же время открыт принцип самовозбуждения остаточным полем (Вернер и Вильгельм Сименсы, Уитстон и др.).

Механическое выпрямление тока при помощи коллектора было предложено Пачинотти. Первая практически пригодная динамо-машина постоянного тока была построена независимо от Пачинотти бельгийцем Граммом в 1868 году.

В 70-х годах XIX в. делаются попытки передачи электрической энергии на расстояние. В 1880 году русский электротехник Д. А. Лачинов (1842—1902) высказал принцип: для экономически выгодной передачи электрической энергии на большие расстояния необходимо с увеличением расстояния и передаваемой мощности увеличивать напряжение. Первую передачу электрической энергии постоянным током осуществил Марсель Депре (1843—1918) в 1882 году.

Передача больших мощностей энергии с помощью постоянного тока сопряжена с рядом затруднений. Большие возможности в этом отношении открывало в то время применение переменного тока. Пионером в применении переменного тока был П. Н. Яблочков (1847—1894). Он разработал первую систему электрического освещения (свечи Яблочкова). Эта система вытеснена впоследствии более совершенной, основанной на применении ламп накаливания, изобретенных в 1873 году А. Н. Лодыгиным (1847—1923).

Первые трансформаторы были созданы Яблочковым в 1877 году и И. Ф. Усагиным (1855—1919) в 1882 году.

Победа переменного тока была обеспечена трудами М. О. Доливо-Добровольского (1862—1919). Доливо-Добровольский получил вращающееся магнитное поле с помощью трехфазного тока, построил первый асинхронный двигатель (1889), первым осуществил передачу электрической энергии на большое расстояние трехфазным током.

Первые задачи о распределении постоянного тока в сложных цепях были рассмотрены Омом, Поггендорфом, Уитстоном и др. Законы Кирхгофа (1824—1887) были сформулированы в 1845 году. В 1847 году Кирхгоф дал вывод своих законов и общее решение задачи о разветвлении токов.

Коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции введены в 1845 году Ф. Нейманом. Теорию процессов замыкания и размыкания тока в цепи с самоиндукцией (§ 101) рассмотрел Г. Гельмгольц в 1855 г. Однако утверждение о том, что разряд конденсатора носит колебательный характер, было высказано Гельмгольцем уже в 1847 г.

В 1853 году В. Томсон в работе «О преходящих электрических токах» дал теорию колебательного разряда и вывел формулу (102.06). Теория Томсона была подтверждена экспериментальными исследованиями В. Феддербена в 1858—1862 годах.

В 1874 году Н. Н. Шиллер для определения емкости применил метод измерения периода разряда, а по емкости определил коэффициент  $\epsilon$  диэлектрика конденсатора.

Вынужденные колебания в цепи с последовательно включенными емкостью и самоиндукцией рассматривали Максвелл, Обербек и ряд других авторов.

Общую теорию разветвления цепей переменного тока рассмотрел в 1886 году Релей (1842—1919).

После исследований по радиотехнике А. С. Попова (1859—1906) началось изучение колебаний в связанных и в нелинейных электрических цепях. Теория явлений в линейных связанных цепях была разработана в 1891 году Бьеркнесом (1862—1939) в работе «О затухании быстрых электрических колебаний». Дальнейшее развитие теории электрических колебаний связано с работами акад. Л. И. Мандельштама (1879—1944) и его школы.

Детальное изложение вопросов электрических колебаний читатель найдет в книге В. И. Калинина и Г. С. Герштейна «Введение в радиофизику», М., ГИТТЛ, 1957.

# **Introduction to Electrodynamics**

David J. Griffiths

Reed College



Prentice Hall

Upper Saddle River, New Jersey 07458

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Griffiths, David J. (David Jeffrey)

Introduction to electrodynamics / David J. Griffiths — 3rd ed.  
p. cm.

Includes bibliographical references and index.

ISBN 0-13-805326-X

1. Electrodynamics. I. Title.

OC680.G74 1999

537.6—dc21

98-50525

CIP

Executive Editor: *Alison Reeves*

Production Editor: *Kim Dellas*

Manufacturing Manager: *Trudy Piscioti*

Art Director: *Jayne Conte*

Cover Designer: *Bruce Kenselaar*

Editorial Assistant: *Gillian Keiff*

Composition: *PreTeX, Inc.*



© 1999, 1989, 1981 by Prentice-Hall, Inc.  
Upper Saddle River, New Jersey 07458

All rights reserved. No part of this book may be  
reproduced, in any form or by any means,  
without permission in writing from the publisher.

Reprinted with corrections September, 1999

Printed in the United States of America

10 9 8 7 6 5

**ISBN 0-13-805326-X**

Prentice-Hall International (UK) Limited, *London*

Prentice-Hall of Australia Pty. Limited, *Sydney*

Prentice-Hall Canada Inc., *Toronto*

Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., *Mexico City*

Prentice-Hall of India Private Limited, *New Delhi*

Prentice-Hall of Japan, Inc., *Tokyo*

Prentice-Hall Asia Pte. Ltd., *Singapore*

Editora Prentice-Hall do Brasil, Ltda., *Rio de Janeiro*

# Contents

<b>9</b>	<b>Electromagnetic Waves</b>	<b>364</b>
9.1	Waves in One Dimension . . . . .	364
9.1.1	The Wave Equation . . . . .	364
9.1.2	Sinusoidal Waves . . . . .	367
9.1.3	Boundary Conditions: Reflection and Transmission . . . . .	370
9.1.4	Polarization . . . . .	373
9.2	Electromagnetic Waves in Vacuum . . . . .	375
9.2.1	The Wave Equation for $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ . . . . .	375
9.2.2	Monochromatic Plane Waves . . . . .	376
9.2.3	Energy and Momentum in Electromagnetic Waves . . . . .	380
9.3	Electromagnetic Waves in Matter . . . . .	382
9.3.1	Propagation in Linear Media . . . . .	382
9.3.2	Reflection and Transmission at Normal Incidence . . . . .	384
9.3.3	Reflection and Transmission at Oblique Incidence . . . . .	386
9.4	Absorption and Dispersion . . . . .	392
9.4.1	Electromagnetic Waves in Conductors . . . . .	392
9.4.2	Reflection at a Conducting Surface . . . . .	396
9.4.3	The Frequency Dependence of Permittivity . . . . .	398
9.5	Guided Waves . . . . .	405
9.5.1	Wave Guides . . . . .	405
9.5.2	TE Waves in a Rectangular Wave Guide . . . . .	408
9.5.3	The Coaxial Transmission Line . . . . .	411
<b>10</b>	<b>Potentials and Fields</b>	<b>416</b>
10.1	The Potential Formulation . . . . .	416
10.1.1	Scalar and Vector Potentials . . . . .	416
10.1.2	Gauge Transformations . . . . .	419
10.1.3	Coulomb Gauge and Lorentz* Gauge . . . . .	421
10.2	Continuous Distributions . . . . .	422
10.2.1	Retarded Potentials . . . . .	422
10.2.2	Jefimenko's Equations . . . . .	427
10.3	Point Charges . . . . .	429
10.3.1	Liénard-Wiechert Potentials . . . . .	429
10.3.2	The Fields of a Moving Point Charge . . . . .	435
<b>A</b>	<b>Vector Calculus in Curvilinear Coordinates</b>	<b>547</b>
A.1	Introduction . . . . .	547
A.2	Notation . . . . .	547
A.3	Gradient . . . . .	548
A.4	Divergence . . . . .	549
A.5	Curl . . . . .	552
A.6	Laplacian . . . . .	554
<b>B</b>	<b>The Helmholtz Theorem</b>	<b>555</b>
<b>C</b>	<b>Units</b>	<b>558</b>

## Chapter 9

# Electromagnetic Waves

### 9.1 Waves in One Dimension

#### 9.1.1 The Wave Equation

What is a “wave?” I don’t think I can give you an entirely satisfactory answer—the concept is intrinsically somewhat vague—but here’s a start: A wave is a *disturbance of a continuous medium that propagates with a fixed shape at constant velocity*. Immediately I must add qualifiers: In the presence of absorption, the wave will diminish in size as it moves; if the medium is dispersive different frequencies travel at different speeds; in two or three dimensions, as the wave spreads out its amplitude will decrease; and of course *standing* waves don’t propagate at all. But these are refinements; let’s start with the simple case: fixed shape, constant speed (Fig. 9.1).

How would you represent such an object mathematically? In the figure I have drawn the wave at two different times, once at  $t = 0$ , and again at some later time  $t$ —each point on the wave form simply shifts to the right by an amount  $vt$ , where  $v$  is the velocity. Maybe the wave is generated by shaking one end of a taut string;  $f(z, t)$  represents the displacement of the string at the point  $z$ , at time  $t$ . Given the *initial* shape of the string,  $g(z) \equiv f(z, 0)$ ,

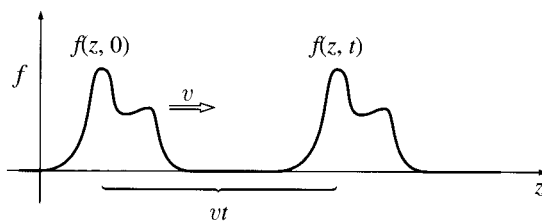


Figure 9.1

what is the subsequent form,  $f(z, t)$ ? Evidently, the displacement at point  $z$ , at the later time  $t$ , is the same as the displacement a distance  $vt$  to the left (i.e. at  $z - vt$ ), back at time  $t = 0$ :

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt). \quad (9.1)$$

That statement captures (mathematically) the essence of wave motion. It tells us that the function  $f(z, t)$ , which *might* have depended on  $z$  and  $t$  in *any* old way, in *fact* depends on them only in the very special combination  $z - vt$ ; when that is true, the function  $f(z, t)$  represents a wave of fixed shape traveling in the  $z$  direction at speed  $v$ . For example, if  $A$  and  $b$  are constants (with the appropriate units),

$$f_1(z, t) = Ae^{-b(z-vt)^2}, \quad f_2(z, t) = A \sin[b(z - vt)], \quad f_3(z, t) = \frac{A}{b(z - vt)^2 + 1}$$

all represent waves (with different shapes, of course), but

$$f_4(z, t) = Ae^{-b(bz^2 + vt)}, \quad \text{and} \quad f_5(z, t) = A \sin(bz) \cos(bvt)^3,$$

do *not*.

Why does a stretched string support wave motion? Actually, it follows from Newton's second law. Imagine a very long string under tension  $T$ . If it is displaced from equilibrium, the net transverse force on the segment between  $z$  and  $z + \Delta z$  (Fig. 9.2) is

$$\Delta F = T \sin \theta' - T \sin \theta,$$

where  $\theta'$  is the angle the string makes with the  $z$ -direction at point  $z + \Delta z$ , and  $\theta$  is the corresponding angle at point  $z$ . Provided that the distortion of the string is not too great, these angles are small (the figure is exaggerated, obviously), and we can replace the sine by the tangent:

$$\Delta F \cong T(\tan \theta' - \tan \theta) = T \left( \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_z \right) \cong T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Delta z.$$

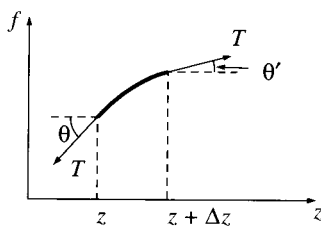


Figure 9.2

If the mass per unit length is  $\mu$ , Newton's second law says

$$\Delta F = \mu(\Delta z) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

and therefore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Evidently, small disturbances on the string satisfy

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}, \quad (9.2)$$

where  $v$  (which, as we'll soon see, represents the speed of propagation) is

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (9.3)$$

Equation 9.2 is known as the (classical) **wave equation**, because it admits as solutions all functions of the form

$$f(z, t) = g(z - vt), \quad (9.4)$$

(that is, all functions that depend on the variables  $z$  and  $t$  in the special combination  $u \equiv z - vt$ ), and we have just learned that such functions represent waves propagating in the  $z$  direction with speed  $v$ . For Eq. 9.4 means

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{du}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{dg}{du},$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{dg}{du} \right) = \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d^2 g}{du^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dg}{du} \right) = -v \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 g}{du^2}, \end{aligned}$$

so

$$\frac{d^2 g}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad \text{qed}$$

Note that  $g(u)$  can be *any* (differentiable) *function whatever*. If the disturbance propagates without changing its shape, then it satisfies the wave equation.

But functions of the form  $g(z - vt)$  are not the *only* solutions. The wave equation involves the *square* of  $v$ , so we can generate another class of solutions by simply changing the sign of the velocity:

$$f(z, t) = h(z + vt). \quad (9.5)$$

This, of course, represents a wave propagating in the *negative*  $z$  direction, and it is certainly reasonable (on physical grounds) that such solutions would be allowed. What is perhaps

surprising is that the *most general* solution to the wave equation is the sum of a wave to the right and a wave to the left:

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt). \quad (9.6)$$

(Notice that the wave equation is **linear**: The sum of any two solutions is itself a solution.) Every solution to the wave equation can be expressed in this form.

Like the simple harmonic oscillator equation, the wave equation is ubiquitous in physics. If something is vibrating, the oscillator equation is almost certainly responsible (at least, for small amplitudes), and if something is waving (whether the context is mechanics or acoustics, optics or oceanography), the wave equation (perhaps with some decoration) is bound to be involved.

**Problem 9.1** By explicit differentiation, check that the functions  $f_1$ ,  $f_2$ , and  $f_3$  in the text satisfy the wave equation. Show that  $f_4$  and  $f_5$  do *not*.

**Problem 9.2** Show that the **standing wave**  $f(z, t) = A \sin(kz) \cos(kvt)$  satisfies the wave equation, and express it as the sum of a wave traveling to the left and a wave traveling to the right (Eq. 9.6).

### 9.1.2 Sinusoidal Waves

(i) **Terminology.** Of all possible wave forms, the sinusoidal one

$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta] \quad (9.7)$$

is (for good reason) the most familiar. Figure 9.3 shows this function at time  $t = 0$ .  $A$  is the **amplitude** of the wave (it is positive, and represents the maximum displacement from equilibrium). The argument of the cosine is called the **phase**, and  $\delta$  is the **phase constant** (obviously, you can add any integer multiple of  $2\pi$  to  $\delta$  without changing  $f(z, t)$ ; ordinarily, one uses a value in the range  $0 \leq \delta < 2\pi$ ). Notice that at  $z = vt - \delta/k$ , the phase is zero; let's call this the “central maximum.” If  $\delta = 0$ , the central maximum passes the origin at time  $t = 0$ ; more generally,  $\delta/k$  is the distance by which the central maximum (and

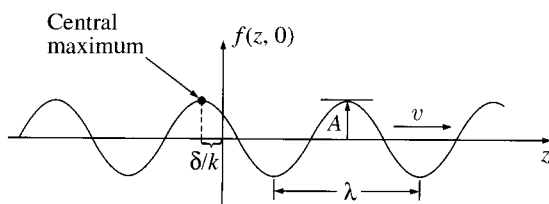


Figure 9.3

therefore the entire wave) is “delayed.” Finally,  $k$  is the **wave number**; it is related to the **wavelength**  $\lambda$  by the equation

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (9.8)$$

for when  $z$  advances by  $2\pi/k$ , the cosine executes one complete cycle.

As time passes, the entire wave train proceeds to the right, at speed  $v$ . At any fixed point  $z$ , the string vibrates up and down, undergoing one full cycle in a **period**

$$T = \frac{2\pi}{kv}. \quad (9.9)$$

The **frequency**  $\nu$  (number of oscillations per unit time) is

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}. \quad (9.10)$$

For our purposes, a more convenient unit is the **angular frequency**  $\omega$ , so-called because in the analogous case of uniform circular motion it represents the number of radians swept out per unit time:

$$\omega = 2\pi\nu = kv. \quad (9.11)$$

Ordinarily, it’s nicer to write sinusoidal waves (Eq. 9.7) in terms of  $\omega$ , rather than  $\nu$ :

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta). \quad (9.12)$$

A sinusoidal oscillation of wave number  $k$  and (angular) frequency  $\omega$  traveling to the *left* would be written

$$f(z, t) = A \cos(kz + \omega t - \delta). \quad (9.13)$$

The sign of the phase constant is chosen for consistency with our previous convention that  $\delta/k$  shall represent the distance by which the wave is “delayed” (since the wave is now moving to the *left*, a delay means a shift to the *right*). At  $t = 0$ , the wave looks like Fig. 9.4. Because the cosine is an *even* function, we can just as well write Eq. 9.13 thus:

$$f(z, t) = A \cos(-kz - \omega t + \delta). \quad (9.14)$$

Comparison with Eq. 9.12 reveals that, in effect, *we could simply switch the sign of  $k$*  to produce a wave with the same amplitude, phase constant, frequency, and wavelength, traveling in the opposite direction.

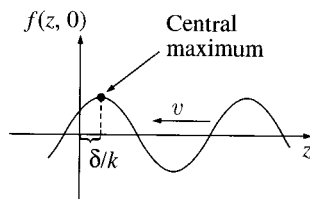


Figure 9.4

(ii) **Complex notation.** In view of **Euler's formula**,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (9.15)$$

the sinusoidal wave (Eq. 9.12) can be written

$$f(z, t) = \text{Re}[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}], \quad (9.16)$$

where  $\text{Re}(\xi)$  denotes the real part of the complex number  $\xi$ . This invites us to introduce the **complex wave function**

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}, \quad (9.17)$$

with the **complex amplitude**  $\tilde{A} \equiv Ae^{i\delta}$  absorbing the phase constant. The *actual* wave function is the real part of  $\tilde{f}$ :

$$f(z, t) = \text{Re}[\tilde{f}(z, t)]. \quad (9.18)$$

If you know  $\tilde{f}$ , it is a simple matter to find  $f$ ; the *advantage* of the complex notation is that exponentials are much easier to manipulate than sines and cosines.

---

### Example 9.1

Suppose you want to combine two sinusoidal waves:

$$f_3 = f_1 + f_2 = \text{Re}(\tilde{f}_1) + \text{Re}(\tilde{f}_2) = \text{Re}(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) = \text{Re}(\tilde{f}_3),$$

with  $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ . You simply add the corresponding *complex* wave functions, and then take the real part. In particular, if they have the same frequency and wave number,

$$\tilde{f}_3 = \tilde{A}_1 e^{i(kz - \omega t)} + \tilde{A}_2 e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{A}_3 e^{i(kz - \omega t)},$$

where

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, \text{ or } A_3 e^{i\delta_3} = A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}; \quad (9.19)$$

evidently, you just add the (complex) amplitudes. The combined wave still has the same frequency and wavelength,

$$f_3(z, t) = A_3 \cos(kz - \omega t + \delta_3),$$

and you can easily figure out  $A_3$  and  $\delta_3$  from Eq. 9.19 (Prob. 9.3). Try doing this *without* using the complex notation—you will find yourself looking up trig identities and slogging through nasty algebra.

---

(iii) **Linear combinations of sinusoidal waves.** Although the sinusoidal function 9.17 is a very special wave form, the fact is that *any* wave can be expressed as a linear combination of sinusoidal ones:

$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk. \quad (9.20)$$

Here  $\omega$  is a function of  $k$  (Eq. 9.11), and I have allowed  $k$  to run through negative values in order to include waves going in both directions.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>This does not mean that  $\lambda$  and  $\omega$  are negative—wavelength and frequency are *always* positive. If we allow negative wave numbers, then Eqs. 9.8 and 9.11 should really be written  $\lambda = 2\pi/|k|$  and  $\omega = |k|v$ .

The formula for  $\tilde{A}(k)$ , in terms of the initial conditions  $f(z, 0)$  and  $\dot{f}(z, 0)$ , can be obtained from the theory of Fourier transforms (see Prob. 9.32), but the details are not relevant to my purpose here. The *point* is that any wave can be written as a linear combination of sinusoidal waves, and therefore if you know how sinusoidal waves behave, you know in principle how *any* wave behaves. So from now on we shall confine our attention to sinusoidal waves.

**Problem 9.3** Use Eq. 9.19 to determine  $A_3$  and  $\delta_3$  in terms of  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\delta_1$ , and  $\delta_2$ .

**Problem 9.4** Obtain Eq. 9.20 directly from the wave equation, by separation of variables.

### 9.1.3 Boundary Conditions: Reflection and Transmission

So far I have assumed the string is infinitely long—or at any rate long enough that we don't need to worry about what happens to a wave when it reaches the end. As a matter of fact, what happens depends a lot on how the string is *attached* at the end—that is, on the specific boundary conditions to which the wave is subject. Suppose, for instance, that the string is simply tied onto a *second* string. The tension  $T$  is the same for both, but the mass per unit length  $\mu$  presumably is not, and hence the wave velocities  $v_1$  and  $v_2$  are different (remember,  $v = \sqrt{T/\mu}$ ). Let's say, for convenience, that the knot occurs at  $z = 0$ . The **incident** wave

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0), \quad (9.21)$$

coming in from the left, gives rise to a **reflected** wave

$$\tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0), \quad (9.22)$$

traveling *back* along string 1 (hence the minus sign in front of  $k_1$ ), in addition to a **transmitted** wave

$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0), \quad (9.23)$$

which continues on to the right in string 2.

The incident wave  $f_I(z, t)$  is a sinusoidal oscillation that extends (in principle) all the way back to  $z = -\infty$ , and has been doing so for all of history. The same goes for  $f_R$  and  $f_T$  (except that the latter, of course, extends to  $z = +\infty$ ). *All parts of the system are oscillating at the same frequency  $\omega$*  (a frequency determined by the person at  $z = -\infty$ , who is shaking the string in the first place). Since the wave velocities are different in the two strings, however, the wavelengths and wave numbers are also different:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (9.24)$$

Of course, this situation is pretty artificial—what's more, with incident and reflected waves of infinite extent traveling on the same piece of string, it's going to be hard for a spectator to

tell them apart. You might therefore prefer to consider an incident wave of *finite* extent—say, the pulse shown in Fig. 9.5. You can work out the details for yourself, if you like (Prob. 9.5). The *trouble* with this approach is that no *finite* pulse is truly sinusoidal. The waves in Fig. 9.5 may *look* like sine functions, but they're *not*: they're little *pieces* of sines, joined onto an entirely *different* function (namely, zero). Like any other waves, they can be built up as *linear combinations* of true sinusoidal functions (Eq. 9.20), but only by putting together a whole range of frequencies and wavelengths. If you want a *single* incident frequency (as we shall in the electromagnetic case), you must let your waves extend to infinity. In practice, if you use a very *long* pulse with many oscillations, it will be *close* to the ideal of a single frequency.

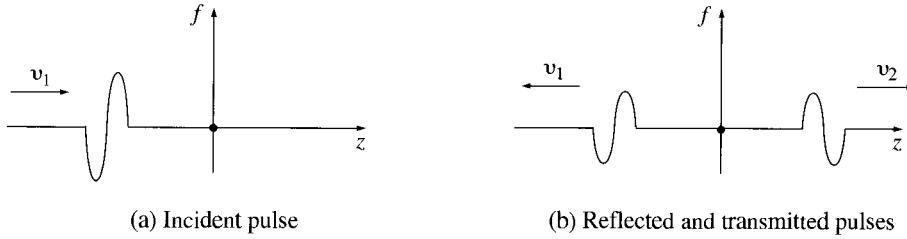


Figure 9.5

For a sinusoidal incident wave, then, the net disturbance of the string is:

$$\tilde{f}(z, t) = \begin{cases} \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, & \text{for } z < 0, \\ \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, & \text{for } z > 0. \end{cases} \quad (9.25)$$

At the join ( $z = 0$ ), the displacement just slightly to the left ( $z = 0^-$ ) must equal the displacement slightly to the right ( $z = 0^+$ ), or else there would be a break between the two strings. Mathematically,  $f(z, t)$  is *continuous* at  $z = 0$ :

$$f(0^-, t) = f(0^+, t). \quad (9.26)$$

If the knot itself is of negligible mass, then the *derivative* of  $f$  must *also* be continuous:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^+}. \quad (9.27)$$

Otherwise there would be a net force on the knot, and therefore an infinite acceleration (Fig. 9.6). These boundary conditions apply directly to the *real* wave function  $f(z, t)$ . But since the imaginary part of  $\tilde{f}$  differs from the real part only in the replacement of cosine by sine (Eq. 9.15), it follows that the complex wave function  $\tilde{f}(z, t)$  obeys the same rules:

$$\tilde{f}(0^-, t) = \tilde{f}(0^+, t), \quad \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right|_{0^+}. \quad (9.28)$$

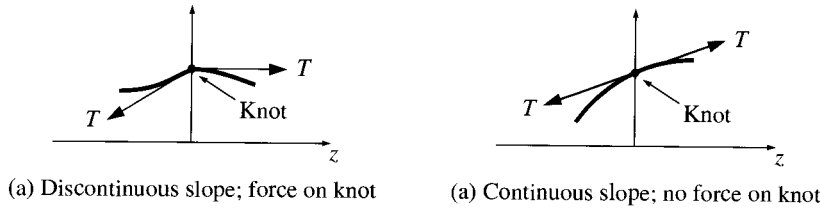


Figure 9.6

When applied to Eq. 9.25, these boundary conditions determine the outgoing amplitudes ( $\tilde{A}_R$  and  $\tilde{A}_T$ ) in terms of the incoming one ( $\tilde{A}_I$ ):

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \quad k_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2\tilde{A}_T,$$

from which it follows that

$$\tilde{A}_R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left( \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I. \quad (9.29)$$

Or, in terms of the velocities (Eq. 9.24):

$$\tilde{A}_R = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I. \quad (9.30)$$

The *real* amplitudes and phases, then, are related by

$$A_R e^{i\delta_R} = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I}, \quad A_T e^{i\delta_T} = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I e^{i\delta_I}. \quad (9.31)$$

If the second string is *lighter* than the first ( $\mu_2 < \mu_1$ , so that  $v_2 > v_1$ ), all three waves have the same phase angle ( $\delta_R = \delta_T = \delta_I$ ), and the outgoing amplitudes are

$$A_R = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I, \quad A_T = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I. \quad (9.32)$$

If the second string is *heavier* than the first ( $v_2 < v_1$ ) the reflected wave is out of phase by  $180^\circ$  ( $\delta_R + \pi = \delta_T = \delta_I$ ). In other words, since

$$\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I - \pi) = -\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I),$$

the reflected wave is “upside down.” The amplitudes in this case are

$$A_R = \left( \frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I \quad \text{and} \quad A_T = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I. \quad (9.33)$$

In particular, if the second string is *infinitely* massive—or, what amounts to the same thing, if the first string is simply *nailed down* at the end—then

$$A_R = A_I \text{ and } A_T = 0.$$

Naturally, in this case there is *no* transmitted wave—all of it reflects back.

- ! **Problem 9.5** Suppose you send an incident wave of specified shape,  $g_I(z - v_1 t)$ , down string number 1. It gives rise to a reflected wave,  $h_R(z + v_1 t)$ , and a transmitted wave,  $g_T(z - v_2 t)$ . By imposing the boundary conditions 9.26 and 9.27, find  $h_R$  and  $g_T$ .

**Problem 9.6**

- (a) Formulate an appropriate boundary condition, to replace Eq. 9.27, for the case of two strings under tension  $T$  joined by a knot of mass  $m$ .
- (b) Find the amplitude and phase of the reflected and transmitted waves for the case where the knot has a mass  $m$  and the second string is massless.

- ! **Problem 9.7** Suppose string 2 is embedded in a viscous medium (such as molasses), which imposes a drag force that is proportional to its (transverse) speed:

$$\Delta F_{\text{drag}} = -\gamma \frac{\partial f}{\partial t} \Delta z.$$

- (a) Derive the modified wave equation describing the motion of the string.
- (b) Solve this equation, assuming the string oscillates at the incident frequency  $\omega$ . That is, look for solutions of the form  $\tilde{f}(z, t) = e^{i\omega t} \tilde{F}(z)$ .
- (c) Show that the waves are **attenuated** (that is, their amplitude decreases with increasing  $z$ ). Find the characteristic penetration distance, at which the amplitude is  $1/e$  of its original value, in terms of  $\gamma$ ,  $T$ ,  $\mu$ , and  $\omega$ .
- (d) If a wave of amplitude  $A_I$ , phase  $\delta_I = 0$ , and frequency  $\omega$  is incident from the left (string 1), find the reflected wave's amplitude and phase.

### 9.1.4 Polarization

The waves that travel down a string when you shake it are called **transverse**, because the displacement is perpendicular to the direction of propagation. If the string is reasonably elastic, it is also possible to stimulate *compression* waves, by giving the string little tugs. Compression waves are hard to see on a string, but if you try it with a slinky they're quite noticeable (Fig. 9.7). These waves are called **longitudinal**, because the displacement from equilibrium is along the direction of propagation. Sound waves, which are nothing but compression waves in air, are longitudinal; electromagnetic waves, as we shall see, are transverse.

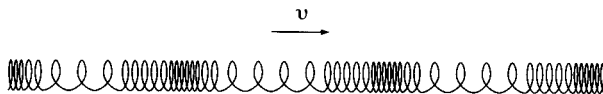


Figure 9.7

Now there are, of course, *two* dimensions perpendicular to any given line of propagation. Accordingly, transverse waves occur in two independent states of **polarization**: you can shake the string up-and-down (“vertical” polarization—Fig. 9.8a),

$$\tilde{\mathbf{f}}_v(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad (9.34)$$

or left-and-right (“horizontal” polarization—Fig. 9.8b),

$$\tilde{\mathbf{f}}_h(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (9.35)$$

or along any other direction in the  $xy$  plane (Fig. 9.8c):

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}. \quad (9.36)$$

The **polarization vector**  $\hat{\mathbf{n}}$  defines the plane of vibration.<sup>2</sup> Because the waves are transverse,  $\hat{\mathbf{n}}$  is perpendicular to the direction of propagation:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0. \quad (9.37)$$

In terms of the **polarization angle**  $\theta$ ,

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}. \quad (9.38)$$

Thus, the wave pictured in Fig. 9.8c can be considered a superposition of two waves—one horizontally polarized, the other vertically:

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = (\tilde{A} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} + (\tilde{A} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (9.39)$$

**Problem 9.8** Equation 9.36 describes the most general **linearly** polarized wave on a string. Linear (or “plane”) polarization (so called because the displacement is parallel to a fixed vector  $\hat{\mathbf{n}}$ ) results from the combination of horizontally and vertically polarized waves of the *same phase* (Eq. 9.39). If the two components are of equal amplitude, but *out of phase* by  $90^\circ$  (say,  $\delta_v = 0$ ,  $\delta_h = 90^\circ$ ), the result is a *circularly* polarized wave. In that case:

(a) At a fixed point  $z$ , show that the string moves in a circle about the  $z$  axis. Does it go *clockwise* or *counterclockwise*, as you look down the axis toward the origin? How would you construct a wave circling the *other way*? (In optics, the clockwise case is called **right circular polarization**, and the counterclockwise, **left circular polarization**.)

(b) Sketch the string at time  $t = 0$ .

(c) How would you shake the string in order to produce a circularly polarized wave?

<sup>2</sup>Notice that you can always switch the *sign* of  $\hat{\mathbf{n}}$ , provided you simultaneously advance the phase constant by  $180^\circ$ , since both operations change the sign of the wave.

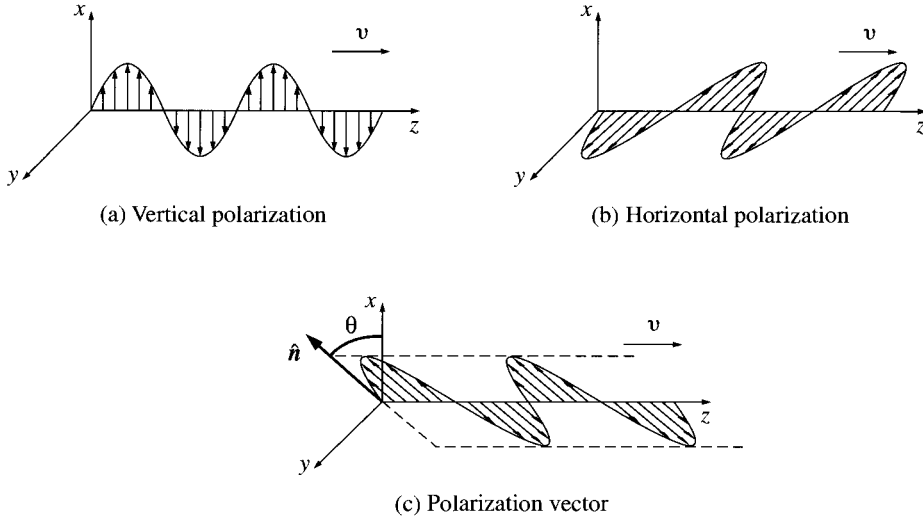


Figure 9.8

## 9.2 Electromagnetic Waves in Vacuum

### 9.2.1 The Wave Equation for $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$

In regions of space where there is no charge or current, Maxwell's equations read

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right\} \quad (9.40)$$

They constitute a set of coupled, first-order, partial differential equations for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . They can be *decoupled* by applying the curl to (iii) and (iv):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Or, since  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  and  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (9.41)$$

We now have *separate* equations for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ , but they are of *second* order; that's the price you pay for decoupling them.

In vacuum, then, each Cartesian component of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  satisfies the **three-dimensional wave equation**,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

(This is the same as Eq. 9.2, except that  $\partial^2 f / \partial z^2$  is replaced by its natural generalization,  $\nabla^2 f$ .) So Maxwell's equations imply that empty space supports the propagation of electromagnetic waves, traveling at a speed

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (9.42)$$

which happens to be precisely the velocity of light,  $c$ . The implication is astounding: Perhaps light *is* an electromagnetic wave.<sup>3</sup> Of course, this conclusion does not surprise anyone today, but imagine what a revelation it was in Maxwell's time! Remember how  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$  came into the theory in the first place: they were constants in Coulomb's law and the Biot-Savart law, respectively. You measure them in experiments involving charged pith balls, batteries, and wires—experiments having nothing whatever to do with light. And yet, according to Maxwell's theory you can calculate  $c$  from these two numbers. Notice the crucial role played by Maxwell's contribution to Ampère's law ( $\mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ ); without it, the wave equation would not emerge, and there would be no electromagnetic theory of light.

### 9.2.2 Monochromatic Plane Waves

For reasons discussed in Sect. 9.1.2, we may confine our attention to sinusoidal waves of frequency  $\omega$ . Since different frequencies in the visible range correspond to different *colors*, such waves are called **monochromatic** (Table 9.1). Suppose, moreover, that the waves are traveling in the  $z$  direction and have no  $x$  or  $y$  dependence; these are called **plane waves**,<sup>4</sup> because the fields are uniform over every plane perpendicular to the direction of propagation (Fig. 9.9). We are interested, then, in fields of the form

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (9.43)$$

<sup>3</sup>As Maxwell himself put it, "We can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena." See Ivan Tolstoy, *James Clerk Maxwell, A Biography* (Chicago: University of Chicago Press, 1983).

<sup>4</sup>For a discussion of *spherical* waves, at this level, see J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3rd ed., Sect. 17-5 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1979). Or work Prob. 9.33. Of course, over small enough regions *any* wave is essentially plane, as long as the wavelength is much less than the radius of the curvature of the wave front.

The Electromagnetic Spectrum		
Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
$10^{22}$		$10^{-13}$
$10^{21}$	gamma rays	$10^{-12}$
$10^{20}$		$10^{-11}$
$10^{19}$		$10^{-10}$
$10^{18}$	x rays	$10^{-9}$
$10^{17}$		$10^{-8}$
$10^{16}$	ultraviolet	$10^{-7}$
$10^{15}$	visible	$10^{-6}$
$10^{14}$	infrared	$10^{-5}$
$10^{13}$		$10^{-4}$
$10^{12}$		$10^{-3}$
$10^{11}$		$10^{-2}$
$10^{10}$	microwave	$10^{-1}$
$10^9$		1
$10^8$	TV, FM	10
$10^7$		$10^2$
$10^6$	AM	$10^3$
$10^5$		$10^4$
$10^4$	RF	$10^5$
$10^3$		$10^6$

The Visible Range		
Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
$1.0 \times 10^{15}$	near ultraviolet	$3.0 \times 10^{-7}$
$7.5 \times 10^{14}$	shortest visible blue	$4.0 \times 10^{-7}$
$6.5 \times 10^{14}$	blue	$4.6 \times 10^{-7}$
$5.6 \times 10^{14}$	green	$5.4 \times 10^{-7}$
$5.1 \times 10^{14}$	yellow	$5.9 \times 10^{-7}$
$4.9 \times 10^{14}$	orange	$6.1 \times 10^{-7}$
$3.9 \times 10^{14}$	longest visible red	$7.6 \times 10^{-7}$
$3.0 \times 10^{14}$	near infrared	$1.0 \times 10^{-6}$

Table 9.1

where  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  are the (complex) amplitudes (the *physical* fields, of course, are the real parts of  $\tilde{\mathbf{E}}$  and  $\tilde{\mathbf{B}}$ ).

Now, the wave equations for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  (Eq. 9.41) were derived from Maxwell's equations. However, whereas every solution to Maxwell's equations (in empty space) must obey the wave equation, the converse is *not* true; Maxwell's equations impose extra constraints on

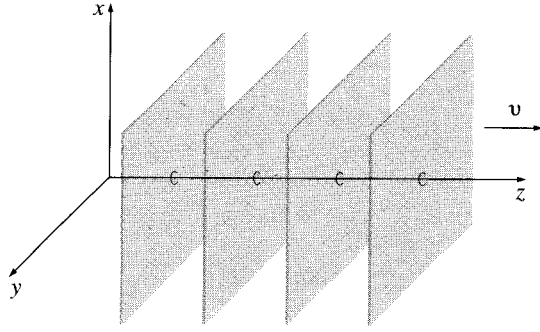


Figure 9.9

$\tilde{\mathbf{E}}_0$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_0$ . In particular, since  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  and  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , it follows<sup>5</sup> that

$$(\tilde{E}_0)_z = (\tilde{B}_0)_z = 0. \quad (9.44)$$

That is, *electromagnetic waves are transverse*: the electric and magnetic fields are perpendicular to the direction of propagation. Moreover, Faraday's law,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , implies a relation between the electric and magnetic amplitudes, to wit:

$$-k(\tilde{E}_0)_y = \omega(\tilde{B}_0)_x, \quad k(\tilde{E}_0)_x = \omega(\tilde{B}_0)_y, \quad (9.45)$$

or, more compactly:

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0). \quad (9.46)$$

Evidently,  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  are *in phase* and *mutually perpendicular*; their (real) amplitudes are related by

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0. \quad (9.47)$$

The fourth of Maxwell's equations,  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ , does not yield an independent condition; it simply reproduces Eq. 9.45.

### Example 9.2

If  $\mathbf{E}$  points in the  $x$  direction, then  $\mathbf{B}$  points in the  $y$  direction (Eq. 9.46):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}},$$

or (taking the real part)

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{y}}.$$

(9.48)

<sup>5</sup>Because the real part of  $\tilde{\mathbf{E}}$  differs from the imaginary part only in the replacement of sine by cosine, if the former obeys Maxwell's equations, so does the latter, and hence  $\tilde{\mathbf{E}}$  as well.

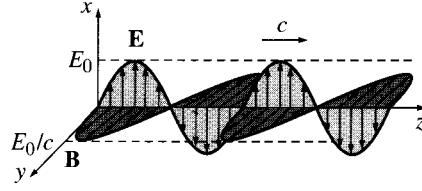


Figure 9.10

This is the paradigm for a monochromatic plane wave (see Fig. 9.10). The wave as a whole is said to be polarized in the  $x$  direction (by convention, we use the direction of  $\mathbf{E}$  to specify the polarization of an electromagnetic wave).

There is nothing special about the  $z$  direction, of course—we can easily generalize to monochromatic plane waves traveling in an arbitrary direction. The notation is facilitated by the introduction of the **propagation** (or **wave**) **vector**,  $\mathbf{k}$ , pointing in the direction of propagation, whose magnitude is the wave number  $k$ . The scalar product  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  is the appropriate generalization of  $kz$  (Fig. 9.11), so

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}},\end{aligned}\tag{9.49}$$

where  $\hat{\mathbf{n}}$  is the polarization vector. Because  $\mathbf{E}$  is transverse,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0.\tag{9.50}$$

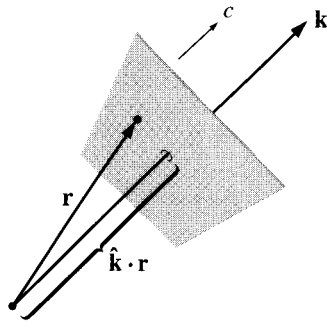


Figure 9.11

(The transversality of  $\mathbf{B}$  follows automatically from Eq. 9.49.) The actual (real) electric and magnetic fields in a monochromatic plane wave with propagation vector  $\mathbf{k}$  and polarization  $\hat{\mathbf{n}}$  are

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}}, \quad (9.51)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (9.52)$$

**Problem 9.9** Write down the (real) electric and magnetic fields for a monochromatic plane wave of amplitude  $E_0$ , frequency  $\omega$ , and phase angle zero that is (a) traveling in the negative  $x$  direction and polarized in the  $z$  direction; (b) traveling in the direction from the origin to the point  $(1, 1, 1)$ , with polarization parallel to the  $xz$  plane. In each case, sketch the wave, and give the explicit Cartesian components of  $\mathbf{k}$  and  $\hat{\mathbf{n}}$ .

### 9.2.3 Energy and Momentum in Electromagnetic Waves

According to Eq. 8.13, the energy per unit volume stored in electromagnetic fields is

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad (9.53)$$

In the case of a monochromatic plane wave (Eq. 9.48)

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2, \quad (9.54)$$

so the *electric and magnetic contributions are equal*:

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta). \quad (9.55)$$

As the wave travels, it carries this energy along with it. The energy flux density (energy per unit area, per unit time) transported by the fields is given by the Poynting vector (Eq. 8.10):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (9.56)$$

For monochromatic plane waves propagating in the  $z$  direction,

$$\mathbf{S} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = cu \hat{\mathbf{z}}. \quad (9.57)$$

Notice that  $\mathbf{S}$  is the energy density ( $u$ ) times the velocity of the waves ( $c \hat{\mathbf{z}}$ )—as it *should* be. For in a time  $\Delta t$ , a length  $c \Delta t$  passes through area  $A$  (Fig. 9.12), carrying with it an energy  $uAc \Delta t$ . The energy per unit time, per unit area, transported by the wave is therefore  $uc$ .

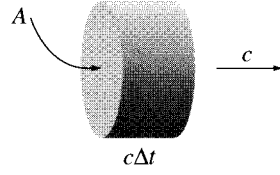


Figure 9.12

Electromagnetic fields not only carry *energy*, they also carry *momentum*. In fact, we found in Eq. 8.30 that the momentum density stored in the fields is

$$\mathbf{\wp} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (9.58)$$

For monochromatic plane waves, then,

$$\mathbf{\wp} = \frac{1}{c} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c} u \hat{\mathbf{z}}. \quad (9.59)$$

In the case of *light*, the wavelength is so short ( $\sim 5 \times 10^{-7}$  m), and the period so brief ( $\sim 10^{-15}$  s), that any macroscopic measurement will encompass many cycles. Typically, therefore, we're not interested in the fluctuating cosine-squared term in the energy and momentum densities; all we want is the *average* value. Now, the average of cosine-squared over a complete cycle<sup>6</sup> is  $\frac{1}{2}$ , so

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2, \quad (9.60)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}, \quad (9.61)$$

$$\langle \mathbf{\wp} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (9.62)$$

I use brackets,  $\langle \rangle$ , to denote the (time) average over a complete cycle (or *many* cycles, if you prefer). The average power per unit area transported by an electromagnetic wave is called the **intensity**:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2. \quad (9.63)$$

<sup>6</sup>There is a cute trick for doing this in your head:  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , and over a complete cycle the average of  $\sin^2 \theta$  is equal to the average of  $\cos^2 \theta$ , so  $\langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = 1/2$ . More formally,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - 2\pi t/T + \delta) dt = 1/2.$$

When light falls on a perfect absorber it delivers its momentum to the surface. In a time  $\Delta t$  the momentum transfer is (Fig. 9.12)  $\Delta \mathbf{p} = \langle \mathbf{p} \rangle A c \Delta t$ , so the **radiation pressure** (average force per unit area) is

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}. \quad (9.64)$$

(On a perfect *reflector* the pressure is *twice* as great, because the momentum switches direction, instead of simply being absorbed.) We can account for this pressure qualitatively, as follows: The electric field (Eq. 9.48) drives charges in the  $x$  direction, and the magnetic field then exerts on them a force ( $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) in the  $z$  direction. The net force on all the charges in the surface produces the pressure.

**Problem 9.10** The intensity of sunlight hitting the earth is about  $1300 \text{ W/m}^2$ . If sunlight strikes a perfect absorber, what pressure does it exert? How about a perfect reflector? What fraction of atmospheric pressure does this amount to?

**Problem 9.11** In the complex notation there is a clever device for finding the time average of a product. Suppose  $f(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_a)$  and  $g(\mathbf{r}, t) = B \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_b)$ . Show that  $\langle fg \rangle = (1/2) \text{Re}(\tilde{f} \tilde{g}^*)$ , where the star denotes complex conjugation. [Note that this only works if the two waves have the same  $\mathbf{k}$  and  $\omega$ , but they need not have the same amplitude or phase.] For example

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}(\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^*) \quad \text{and} \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}^*).$$

**Problem 9.12** Find all elements of the Maxwell stress tensor for a monochromatic plane wave traveling in the  $z$  direction and linearly polarized in the  $x$  direction (Eq. 9.48). Does your answer make sense? (Remember that  $\tilde{\mathbf{T}}$  represents the momentum flux density.) How is the momentum flux density related to the energy density, in this case?

## 9.3 Electromagnetic Waves in Matter

### 9.3.1 Propagation in Linear Media

Inside matter, but in regions where there is no *free* charge or *free* current, Maxwell's equations become

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{array} \right\} \quad (9.65)$$

If the medium is *linear*,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (9.66)$$

and *homogeneous* (so  $\epsilon$  and  $\mu$  do not vary from point to point), Maxwell's equations reduce to

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\} \quad (9.67)$$

which (remarkably) differ from the vacuum analogs (Eqs. 9.40) only in the replacement of  $\mu_0\epsilon_0$  by  $\mu\epsilon$ .<sup>7</sup> Evidently electromagnetic waves propagate through a linear homogeneous medium at a speed

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (9.68)$$

where

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (9.69)$$

is the **index of refraction** of the material. For most materials,  $\mu$  is very close to  $\mu_0$ , so

$$n \cong \sqrt{\epsilon_r}, \quad (9.70)$$

where  $\epsilon_r$  is the dielectric constant (Eq. 4.34). Since  $\epsilon_r$  is almost always greater than 1, light travels *more slowly* through matter—a fact that is well known from optics.

All of our previous results carry over, with the simple transcription  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$ , and hence  $c \rightarrow v$  (see Prob. 8.15). The energy density is<sup>8</sup>

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right), \quad (9.71)$$

and the Poynting vector is

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (9.72)$$

For monochromatic plane waves the frequency and wave number are related by  $\omega = kv$  (Eq. 9.11), the amplitude of  $\mathbf{B}$  is  $1/v$  times the amplitude of  $\mathbf{E}$  (Eq. 9.47), and the intensity is

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2. \quad (9.73)$$

<sup>7</sup>This observation is mathematically pretty trivial, but the physical implications are astonishing: As the wave passes through, the fields busily polarize and magnetize all the molecules, and the resulting (oscillating) dipoles create their own electric and magnetic fields. These combine with the original fields in such a way as to create a *single* wave with the same frequency but a different speed. This extraordinary conspiracy is responsible for the phenomenon of **transparency**. It is a distinctly *nontrivial* consequence of the *linearity* of the medium. For further discussion see M. B. James and D. J. Griffiths, *Am. J. Phys.* **60**, 309 (1992).

<sup>8</sup>Refer to Sect. 4.4.3 for the precise *meaning* of “energy density,” in the context of linear media.

The interesting question is this: What happens when a wave passes from one transparent medium into another—air to water, say, or glass to plastic? As in the case of waves on a string, we expect to get a reflected wave and a transmitted wave. The details depend on the exact nature of the electrodynamic boundary conditions, which we derived in Chapter 7 (Eq. 7.64):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel, \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp = B_2^\perp, & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel. \end{array} \right\} \quad (9.74)$$

These equations relate the electric and magnetic fields just to the left and just to the right of the interface between two linear media. In the following sections we use them to deduce the laws governing reflection and refraction of electromagnetic waves.

### 9.3.2 Reflection and Transmission at Normal Incidence

Suppose the  $xy$  plane forms the boundary between two linear media. A plane wave of frequency  $\omega$ , traveling in the  $z$  direction and polarized in the  $x$  direction, approaches the interface from the left (Fig. 9.13):

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \end{array} \right\} \quad (9.75)$$

It gives rise to a reflected wave

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \end{array} \right\} \quad (9.76)$$

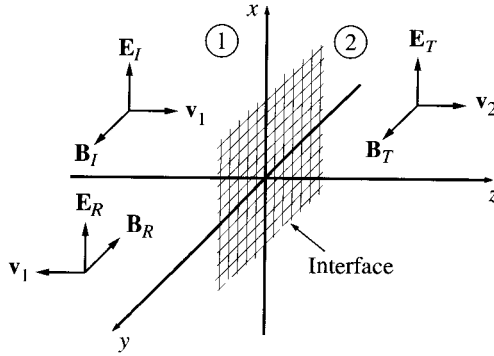


Figure 9.13

which travels back to the left in medium (1), and a transmitted wave

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.77)$$

which continues on the the right in medium (2). Note the minus sign in  $\tilde{\mathbf{B}}_R$ , as required by Eq. 9.49—or, if you prefer, by the fact that the Poynting vector aims in the direction of propagation.

At  $z = 0$ , the combined fields on the left,  $\tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_R$ , must join the fields on the right,  $\tilde{\mathbf{E}}_T$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_T$ , in accordance with the boundary conditions 9.74. In this case there are no components perpendicular to the surface, so (i) and (ii) are trivial. However, (iii) requires that

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}, \quad (9.78)$$

while (iv) says

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0T} \right), \quad (9.79)$$

or

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}, \quad (9.80)$$

where

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}. \quad (9.81)$$

Equations 9.78 and 9.80 are easily solved for the outgoing amplitudes, in terms of the incident amplitude:

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}. \quad (9.82)$$

These results are strikingly similar to the ones for waves on a string. Indeed, if the permittivities  $\mu$  are close to their values in vacuum (as, remember, they *are* for most media), then  $\beta = v_1/v_2$ , and we have

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad (9.83)$$

which are *identical* to Eqs. 9.30. In that case, as before, the reflected wave is *in phase* (right side up) if  $v_2 > v_1$  and *out of phase* (upside down) if  $v_2 < v_1$ ; the real amplitudes are related by

$$E_{0R} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) E_{0I}, \quad (9.84)$$

or, in terms of the indices of refraction,

$$E_{0R} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right) E_{0I}. \quad (9.85)$$

What fraction of the incident energy is reflected, and what fraction is transmitted? According to Eq. 9.73, the intensity (average power per unit area) is

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2.$$

If (again)  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , then the ratio of the reflected intensity to the incident intensity is

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (9.86)$$

whereas the ratio of the transmitted intensity to the incident intensity is

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (9.87)$$

$R$  is called the **reflection coefficient** and  $T$  the **transmission coefficient**; they measure the fraction of the incident energy that is reflected and transmitted, respectively. Notice that

$$R + T = 1, \quad (9.88)$$

as conservation of energy, of course, requires. For instance, when light passes from air ( $n_1 = 1$ ) into glass ( $n_2 = 1.5$ ),  $R = 0.04$  and  $T = 0.96$ . Not surprisingly, most of the light is transmitted.

**Problem 9.13** Calculate the *exact* reflection and transmission coefficients, *without* assuming  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Confirm that  $R + T = 1$ .

**Problem 9.14** In writing Eqs. 9.76 and 9.77, I tacitly assumed that the reflected and transmitted waves have the same *polarization* as the incident wave—along the  $x$  direction. Prove that this *must* be so. [*Hint*: Let the polarization vectors of the transmitted and reflected waves be

$$\hat{\mathbf{n}}_T = \cos \theta_T \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_T \hat{\mathbf{y}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_R = \cos \theta_R \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_R \hat{\mathbf{y}},$$

and prove from the boundary conditions that  $\theta_T = \theta_R = 0$ .]

### 9.3.3 Reflection and Transmission at Oblique Incidence

In the last section I treated reflection and transmission at *normal* incidence—that is, when the incoming wave hits the interface head-on. We now turn to the more general case of *oblique* incidence, in which the incoming wave meets the boundary at an arbitrary angle  $\theta_I$  (Fig. 9.14). Of course, normal incidence is really just a special case of oblique incidence, with  $\theta_I = 0$ , but I wanted to treat it separately, as a kind of warm-up, because the algebra is now going to get a little heavy.

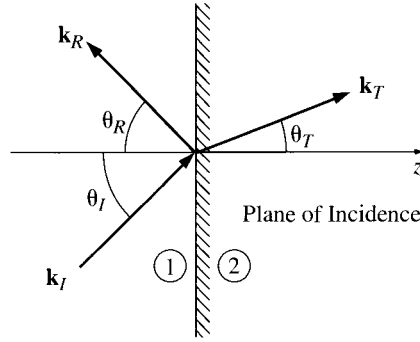


Figure 9.14

Suppose, then, that a monochromatic plane wave

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I) \quad (9.89)$$

approaches from the left, giving rise to a reflected wave,

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R), \quad (9.90)$$

and a transmitted wave

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T). \quad (9.91)$$

All three waves have the same *frequency*  $\omega$ —that is determined once and for all at the source (the flashlight, or whatever, that produces the incident beam). The three wave numbers are related by Eq. 9.11:

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \quad \text{or} \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (9.92)$$

The combined fields in medium (1),  $\tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_R$ , must now be joined to the fields  $\tilde{\mathbf{E}}_T$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_T$  in medium (2), using the boundary conditions 9.74. These all share the generic structure

$$(\ ) e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\ ) e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\ ) e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{at } z = 0. \quad (9.93)$$

I'll fill in the parentheses in a moment; for now, the important thing to notice is that the  $x$ ,  $y$ , and  $t$  dependence is confined to the exponents. *Because the boundary conditions must hold at all points on the plane, and for all times, these exponential factors must be equal.* Otherwise, a slight change in  $x$ , say, would destroy the equality (see Prob. 9.15). Of

course, the time factors are *already* equal (in fact, you could regard this as an independent confirmation that the transmitted and reflected frequencies must match the incident one). As for the spatial terms, evidently

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}, \quad \text{when } z = 0, \quad (9.94)$$

or, more explicitly,

$$x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y, \quad (9.95)$$

for all  $x$  and all  $y$ .

But Eq. 9.95 can *only* hold if the components are separately equal, for if  $x = 0$ , we get

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y, \quad (9.96)$$

while  $y = 0$  gives

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x. \quad (9.97)$$

We may as well orient our axes so that  $\mathbf{k}_I$  lies in the  $xz$  plane (i.e.  $(k_I)_y = 0$ ); according to Eq. 9.96, so too will  $\mathbf{k}_R$  and  $\mathbf{k}_T$ . *Conclusion:*

**First Law:** The incident, reflected, and transmitted wave vectors form a plane (called the **plane of incidence**), which also includes the normal to the surface (here, the  $z$  axis).

Meanwhile, Eq. 9.97 implies that

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T, \quad (9.98)$$

where  $\theta_I$  is the **angle of incidence**,  $\theta_R$  is the **angle of reflection**, and  $\theta_T$  is the angle of transmission, more commonly known as the **angle of refraction**, all of them measured with respect to the normal (Fig. 9.14). In view of Eq. 9.92, then,

**Second Law:** The angle of incidence is equal to the angle of reflection,

$$\theta_I = \theta_R. \quad (9.99)$$

This is the **law of reflection**.

As for the transmitted angle,

**Third Law:**

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (9.100)$$

This is the **law of refraction**, or **Snell's law**.

These are the three fundamental laws of geometrical optics. It is remarkable how little actual *electrodynamics* went into them: we have yet to invoke any *specific* boundary conditions—all we used was their generic form (Eq. 9.93). Therefore, any *other* waves (water waves, for instance, or sound waves) can be expected to obey the same “optical” laws when they pass from one medium into another.

Now that we have taken care of the exponential factors—they cancel, given Eq. 9.94—the boundary conditions 9.74 become:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \epsilon_1(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_z = \epsilon_2(\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_z \\ \text{(ii)} \quad & (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_z = (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_z \\ \text{(iii)} \quad & (\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_{x,y} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_{x,y} \\ \text{(iv)} \quad & \frac{1}{\mu_1}(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2}(\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_{x,y} \end{aligned} \right\} \quad (9.101)$$

where  $\tilde{\mathbf{B}}_0 = (1/v)\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0$  in each case. (The last two represent *pairs* of equations, one for the  $x$ -component and one for the  $y$ -component.)

Suppose that the polarization of the incident wave is *parallel* to the plane of incidence (the  $xz$  plane in Fig. 9.15); it follows (see Prob. 9.14) that the reflected and transmitted waves are also polarized in this plane. (I shall leave it for you to analyze the case of polarization *perpendicular* to the plane of incidence; see Prob. 9.16.) Then (i) reads

$$\epsilon_1(-\tilde{E}_{0I} \sin \theta_I + \tilde{E}_{0R} \sin \theta_R) = \epsilon_2(-\tilde{E}_{0T} \sin \theta_T); \quad (9.102)$$

(ii) adds nothing ( $0 = 0$ ), since the magnetic fields have no  $z$  components; (iii) becomes

$$\tilde{E}_{0I} \cos \theta_I + \tilde{E}_{0R} \cos \theta_R = \tilde{E}_{0T} \cos \theta_T; \quad (9.103)$$

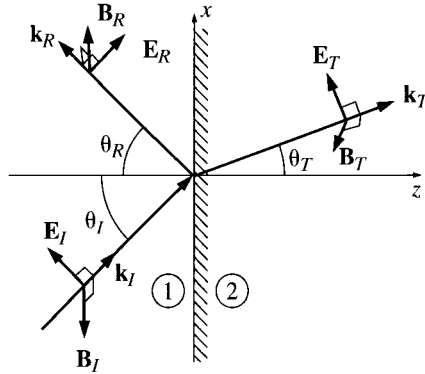


Figure 9.15

and (iv) says

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}(\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T}. \quad (9.104)$$

Given the laws of reflection and refraction, Eqs. 9.102 and 9.104 both reduce to

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}, \quad (9.105)$$

where (as before)

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}, \quad (9.106)$$

and Eq. 9.103 says

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \alpha \tilde{E}_{0T}, \quad (9.107)$$

where

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}. \quad (9.108)$$

Solving Eqs. 9.105 and 9.107 for the reflected and transmitted amplitudes, we obtain

$$\boxed{\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}.} \quad (9.109)$$

These are known as **Fresnel's equations**, for the case of polarization in the plane of incidence. (There are two other Fresnel equations, giving the reflected and transmitted amplitudes when the polarization is *perpendicular* to the plane of incidence—see Prob. 9.16.) Notice that the transmitted wave is always *in phase* with the incident one; the reflected wave is either in phase (“right side up”), if  $\alpha > \beta$ , or  $180^\circ$  out of phase (“upside down”), if  $\alpha < \beta$ .<sup>9</sup>

The amplitudes of the transmitted and reflected waves depend on the angle of incidence, because  $\alpha$  is a function of  $\theta_I$ :

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I}. \quad (9.110)$$

In the case of normal incidence ( $\theta_I = 0$ ),  $\alpha = 1$ , and we recover Eq. 9.82. At grazing incidence ( $\theta_I = 90^\circ$ ),  $\alpha$  diverges, and the wave is totally reflected (a fact that is painfully familiar to anyone who has driven at night on a wet road). Interestingly, there is an intermediate angle,  $\theta_B$  (called **Brewster's angle**), at which the reflected wave is completely extinguished.<sup>10</sup> According to Eq. 9.109, this occurs when  $\alpha = \beta$ , or

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}. \quad (9.111)$$

<sup>9</sup>There is an unavoidable ambiguity in the phase of the reflected wave, since (as I mentioned in footnote 2) changing the sign of the polarization vector is equivalent to a  $180^\circ$  phase shift. The convention I adopted in Fig. 9.15, with  $\mathbf{E}_R$  positive “upward,” is consistent with some, but not all, of the standard optics texts.

<sup>10</sup>Because waves polarized *perpendicular* to the plane of incidence exhibit no corresponding quenching of the reflected component, an arbitrary beam incident at Brewster's angle yields a reflected beam that is *totally* polarized parallel to the interface. That's why Polaroid glasses, with the transmission axis vertical, help to reduce glare off a horizontal surface.

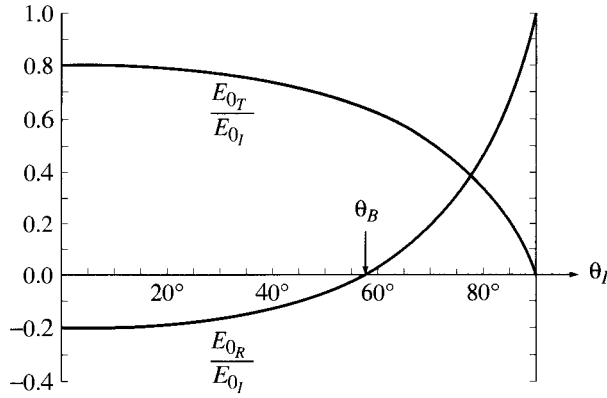


Figure 9.16

For the typical case  $\mu_1 \cong \mu_2$ , so  $\beta \cong n_2/n_1$ ,  $\sin^2 \theta_B \cong \beta^2/(1 + \beta^2)$ , and hence

$$\tan \theta_B \cong \frac{n_2}{n_1}. \quad (9.112)$$

Figure 9.16 shows a plot of the transmitted and reflected amplitudes as functions of  $\theta_I$ , for light incident on glass ( $n_2 = 1.5$ ) from air ( $n_1 = 1$ ). (On the graph, a *negative* number indicates that the wave is  $180^\circ$  out of phase with the incident beam—the amplitude itself is the absolute value.)

The power per unit area striking the interface is  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ . Thus the incident intensity is

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I, \quad (9.113)$$

while the reflected and transmitted intensities are

$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R, \quad \text{and} \quad I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T. \quad (9.114)$$

(The cosines are there because I am talking about the average power per unit area of *interface*, and the interface is at an angle to the wave front.) The reflection and transmission coefficients for waves polarized parallel to the plane of incidence are

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad (9.115)$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2. \quad (9.116)$$

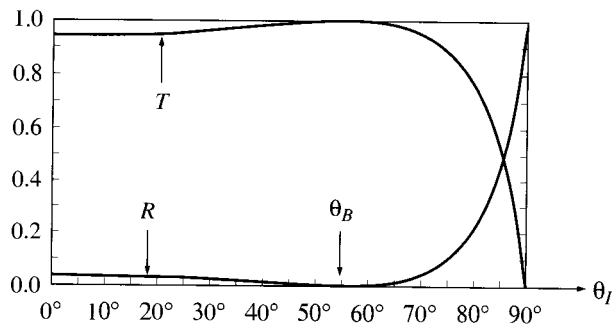


Figure 9.17

They are plotted as functions of the angle of incidence in Fig. 9.17 (for the air/glass interface).  $R$  is the fraction of the incident energy that is reflected—naturally, it goes to zero at Brewster's angle;  $T$  is the fraction transmitted—it goes to 1 at  $\theta_B$ . Note that  $R + T = 1$ , as required by conservation of energy: the energy per unit time *reaching* a particular patch of area on the surface is equal to the energy per unit time *leaving* the patch.

**Problem 9.15** Suppose  $Ae^{iax} + Be^{ibx} = Ce^{icx}$ , for some nonzero constants  $A, B, C, a, b, c$ , and for all  $x$ . Prove that  $a = b = c$  and  $A + B = C$ .

! **Problem 9.16** Analyze the case of polarization *perpendicular* to the plane of incidence (i.e. electric fields in the  $y$  direction, in Fig. 9.15). Impose the boundary conditions 9.101, and obtain the Fresnel equations for  $\tilde{E}_{0R}$  and  $\tilde{E}_{0T}$ . Sketch  $(\tilde{E}_{0R}/\tilde{E}_{0I})$  and  $(\tilde{E}_{0T}/\tilde{E}_{0I})$  as functions of  $\theta_I$ , for the case  $\beta = n_2/n_1 = 1.5$ . (Note that for this  $\beta$  the reflected wave is *always*  $180^\circ$  out of phase.) Show that there is no Brewster's angle for *any*  $n_1$  and  $n_2$ :  $\tilde{E}_{0R}$  is *never* zero (unless, of course,  $n_1 = n_2$  and  $\mu_1 = \mu_2$ , in which case the two media are optically indistinguishable). Confirm that your Fresnel equations reduce to the proper forms at normal incidence. Compute the reflection and transmission coefficients, and check that they add up to 1.

**Problem 9.17** The index of refraction of diamond is 2.42. Construct the graph analogous to Fig. 9.16 for the air/diamond interface. (Assume  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ .) In particular, calculate (a) the amplitudes at normal incidence, (b) Brewster's angle, and (c) the “crossover” angle, at which the reflected and transmitted amplitudes are equal.

## 9.4 Absorption and Dispersion

### 9.4.1 Electromagnetic Waves in Conductors

In Sect. 9.3 I stipulated that the free charge density  $\rho_f$  and the free current density  $\mathbf{J}_f$  are zero, and everything that followed was predicated on that assumption. Such a restriction

is perfectly reasonable when you're talking about wave propagation through a vacuum or through insulating materials such as glass or (pure) water. But in the case of conductors we do not independently control the flow of charge, and in general  $\mathbf{J}_f$  is certainly *not* zero. In fact, according to Ohm's law, the (free) current density in a conductor is proportional to the electric field:

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}. \quad (9.117)$$

With this, Maxwell's equations for linear media assume the form

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right\} \quad (9.118)$$

Now the continuity equation for free charge,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad (9.119)$$

together with Ohm's law and Gauss's law (i), gives

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f$$

for a homogeneous linear medium, from which it follows that

$$\rho_f(t) = e^{-(\sigma/\epsilon)t} \rho_f(0). \quad (9.120)$$

Thus any initial free charge density  $\rho_f(0)$  dissipates in a characteristic time  $\tau \equiv \epsilon/\sigma$ . This reflects the familiar fact that if you put some free charge on a conductor, it will flow out to the edges. The time constant  $\tau$  affords a measure of how "good" a conductor is: For a "perfect" conductor  $\sigma = \infty$  and  $\tau = 0$ ; for a "good" conductor,  $\tau$  is much less than the other relevant times in the problem (in oscillatory systems, that means  $\tau \ll 1/\omega$ ); for a "poor" conductor,  $\tau$  is *greater* than the characteristic times in the problem ( $\tau \gg 1/\omega$ ).<sup>11</sup> At present we're not interested in this transient behavior—we'll wait for any accumulated free charge to disappear. From then on  $\rho_f = 0$ , and we have

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \sigma \mathbf{E}. \end{array} \right\} \quad (9.121)$$

<sup>11</sup>N. Ashby, *Am. J. Phys.* **43**, 553 (1975), points out that for good conductors  $\tau$  is absurdly short ( $10^{-19}$  s, for copper, whereas the time between collisions is  $\tau_c = 10^{-14}$  s). The problem is that Ohm's law itself breaks down on time scales shorter than  $\tau_c$ ; actually, the time it takes free charge to dissipate in a good conductor is of order  $\tau_c$ , not  $\tau$ . Moreover, H. C. Ohanian, *Am. J. Phys.* **51**, 1020 (1983), shows that it takes even longer for the fields and currents to equilibrate. But none of this is relevant to our present purpose; the free charge density in a conductor does *eventually* dissipate, and exactly how long the process takes is beside the point.

These differ from the corresponding equations for *nonconducting* media (9.67) only in the addition of the last term in (iv).

Applying the curl to (iii) and (iv), as before, we obtain modified wave equations for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (9.122)$$

These equations still admit plane-wave solutions,

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad (9.123)$$

but this time the “wave number”  $\tilde{k}$  is complex:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega, \quad (9.124)$$

as you can easily check by plugging Eq. 9.123 into Eq. 9.122. Taking the square root,

$$\tilde{k} = k + i\kappa, \quad (9.125)$$

where

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}}. \quad (9.126)$$

The imaginary part of  $\tilde{k}$  results in an attenuation of the wave (decreasing amplitude with increasing  $z$ ):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (9.127)$$

The distance it takes to reduce the amplitude by a factor of  $1/e$  (about a third) is called the **skin depth**:

$$d \equiv \frac{1}{\kappa}; \quad (9.128)$$

it is a measure of how far the wave penetrates into the conductor. Meanwhile, the real part of  $\tilde{k}$  determines the wavelength, the propagation speed, and the index of refraction, in the usual way:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega}. \quad (9.129)$$

The attenuated plane waves (Eq. 9.127) satisfy the modified wave equation (9.122) for *any*  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_0$ . But Maxwell’s equations (9.121) impose further constraints, which serve to determine the relative amplitudes, phases, and polarizations of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . As before, (i) and (ii) rule out any  $z$  components: the fields are *transverse*. We may as well orient our axes so that  $\mathbf{E}$  is polarized along the  $x$  direction:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}. \quad (9.130)$$

Then (iii) gives

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (9.131)$$

(Equation (iv) says the same thing.) Once again, the electric and magnetic fields are mutually perpendicular.

Like any complex number,  $\tilde{k}$  can be expressed in terms of its modulus and phase:

$$\tilde{k} = K e^{i\phi}, \quad (9.132)$$

where

$$K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}} \quad (9.133)$$

and

$$\phi \equiv \tan^{-1}(\kappa/k). \quad (9.134)$$

According to Eq. 9.130 and 9.131, the complex amplitudes  $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$  and  $\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$  are related by

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E}. \quad (9.135)$$

Evidently the electric and magnetic fields are no longer in phase; in fact,

$$\delta_B - \delta_E = \phi; \quad (9.136)$$

the magnetic field *lags behind* the electric field. Meanwhile, the (real) amplitudes of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  are related by

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon \mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}. \quad (9.137)$$

The (real) electric and magnetic fields are, finally,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{B}(z, t) &= B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.138)$$

These fields are shown in Fig. 9.18.

#### Problem 9.18

- Suppose you imbedded some free charge in a piece of glass. About how long would it take for the charge to flow to the surface?
- Silver is an excellent conductor, but it's expensive. Suppose you were designing a microwave experiment to operate at a frequency of  $10^{10}$  Hz. How thick would you make the silver coatings?
- Find the wavelength and propagation speed in copper for radio waves at 1 MHz. Compare the corresponding values in air (or vacuum).

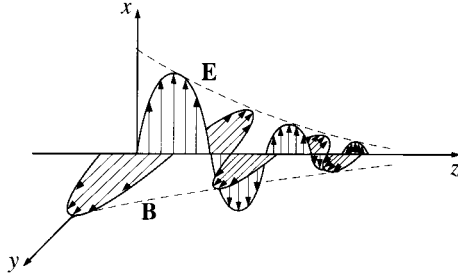


Figure 9.18

**Problem 9.19**

- (a) Show that the skin depth in a poor conductor ( $\sigma \ll \omega\epsilon$ ) is  $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$  (independent of frequency). Find the skin depth (in meters) for (pure) water.
- (b) Show that the skin depth in a good conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) is  $\lambda/2\pi$  (where  $\lambda$  is the wavelength in the conductor). Find the skin depth (in nanometers) for a typical metal ( $\sigma \approx 10^7 (\Omega \text{ m})^{-1}$ ) in the visible range ( $\omega \approx 10^{15}/\text{s}$ ), assuming  $\epsilon \approx \epsilon_0$  and  $\mu \approx \mu_0$ . Why are metals opaque?
- (c) Show that in a good conductor the magnetic field lags the electric field by  $45^\circ$ , and find the ratio of their amplitudes. For a numerical example, use the “typical metal” in part (b).

**Problem 9.20**

- (a) Calculate the (time averaged) energy density of an electromagnetic plane wave in a conducting medium (Eq. 9.138). Show that the magnetic contribution always dominates. [Answer:  $(k^2/2\mu\omega^2)E_0^2 e^{-2\kappa z}$ ]
- (b) Show that the intensity is  $(k/2\mu\omega)E_0^2 e^{-2\kappa z}$ .

### 9.4.2 Reflection at a Conducting Surface

The boundary conditions we used to analyze reflection and refraction at an interface between two dielectrics do not hold in the presence of free charges and currents. Instead, we have the more general relations (7.63):

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f, & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= 0, \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp - B_2^\perp &= 0, & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.139)$$

where  $\sigma_f$  (not to be confused with conductivity) is the free surface charge,  $\mathbf{K}_f$  the free surface current, and  $\hat{\mathbf{n}}$  (not to be confused with the polarization of the wave) is a unit

vector perpendicular to the surface, pointing from medium (2) into medium (1). For ohmic conductors ( $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ ) there can be no free surface current, since this would require an infinite electric field at the boundary.

Suppose now that the  $xy$  plane forms the boundary between a nonconducting linear medium (1) and a conductor (2). A monochromatic plane wave, traveling in the  $z$  direction and polarized in the  $x$  direction, approaches from the left, as in Fig. 9.13:

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (9.140)$$

This incident wave gives rise to a reflected wave,

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (9.141)$$

propagating back to the left in medium (1), and a transmitted wave

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (9.142)$$

which is attenuated as it penetrates into the conductor.

At  $z = 0$ , the combined wave in medium (1) must join the wave in medium (2), pursuant to the boundary conditions 9.139. Since  $E^\perp = 0$  on both sides, boundary condition (i) yields  $\sigma_f = 0$ . Since  $B^\perp = 0$ , (ii) is automatically satisfied. Meanwhile, (iii) gives

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}, \quad (9.143)$$

and (iv) (with  $\mathbf{K}_f = 0$ ) says

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} \tilde{E}_{0T} = 0, \quad (9.144)$$

or

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0T}, \quad (9.145)$$

where

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2. \quad (9.146)$$

It follows that

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}. \quad (9.147)$$

These results are formally identical to the ones that apply at the boundary between *nonconductors* (Eq. 9.82), but the resemblance is deceptive since  $\tilde{\beta}$  is now a complex number.

For a *perfect* conductor ( $\sigma = \infty$ ),  $k_2 = \infty$  (Eq. 9.126), so  $\tilde{\beta}$  is infinite, and

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0. \quad (9.148)$$

In this case the wave is totally reflected, with a  $180^\circ$  phase shift. (That's why excellent conductors make good mirrors. In practice, you paint a thin coating of silver onto the back of a pane of glass—the glass has nothing to do with the *reflection*; it's just there to support the silver and to keep it from tarnishing. Since the skin depth in silver at optical frequencies is on the order of  $100 \text{ \AA}$ , you don't need a very thick layer.)

**Problem 9.21** Calculate the reflection coefficient for light at an air-to-silver interface ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ), at optical frequencies ( $\omega = 4 \times 10^{15} / \text{s}$ ).

### 9.4.3 The Frequency Dependence of Permittivity

In the preceding sections, we have seen that the propagation of electromagnetic waves through matter is governed by three properties of the material, which we took to be constants: the permittivity  $\epsilon$ , the permeability  $\mu$ , and the conductivity  $\sigma$ . Actually, each of these parameters depends to some extent on the frequency of the waves you are considering. Indeed, if the permittivity were *truly* constant, then the index of refraction in a transparent medium,  $n \cong \sqrt{\epsilon_r}$ , would also be constant. But it is well known from optics that  $n$  is a function of wavelength (Fig. 9.19 shows the graph for a typical glass). A prism or a raindrop bends blue light more sharply than red, and spreads white light out into a rainbow of colors. This phenomenon is called **dispersion**. By extension, whenever the speed of a wave depends on its frequency, the supporting medium is called **dispersive**.<sup>12</sup>

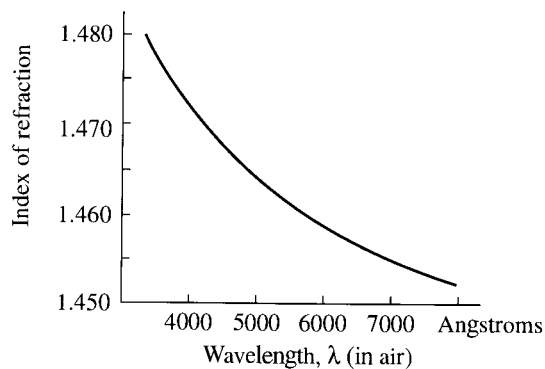


Figure 9.19

<sup>12</sup>Conductors, incidentally, are dispersive: see Eqs. 9.126 and 9.129.

Because waves of different frequency travel at different speeds in a dispersive medium, a wave form that incorporates a range of frequencies will change shape as it propagates. A sharply peaked wave typically flattens out, and whereas each sinusoidal component travels at the ordinary **wave** (or **phase**) **velocity**,

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (9.149)$$

the packet as a whole (the “envelope”) travels at the so-called **group velocity**<sup>13</sup>

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (9.150)$$

[You can demonstrate this by dropping a rock into the nearest pond and watching the waves that form: While the disturbance as a whole spreads out in a circle, moving at speed  $v_g$ , the ripples that go to make it up will be seen to travel *twice* as fast ( $v = 2v_g$  in this case). They appear at the back end of the packet, growing as they move forward to the center, then shrinking again and fading away at the front (Fig. 9.20).] We shall not concern ourselves with these matters—I’ll stick to monochromatic waves, for which the problem does not arise. But I should just mention that the *energy* carried by a wave packet in a dispersive medium ordinarily travels at the *group* velocity, not the phase velocity. Don’t be too alarmed, therefore, if in some circumstances  $v$  comes out greater than  $c$ .<sup>14</sup>

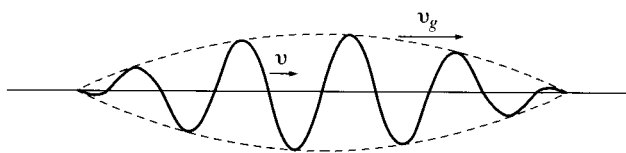


Figure 9.20

My purpose in this section is to account for the frequency dependence of  $\epsilon$  in nonconductors, using a simplified model for the behavior of electrons in dielectrics. Like all classical models of atomic-scale phenomena, it is at best an approximation to the truth; nevertheless, it does yield qualitatively satisfactory results, and it provides a plausible mechanism for dispersion in transparent media.

The electrons in a nonconductor are bound to specific molecules. The actual binding forces can be quite complicated, but we shall picture each electron as attached to the end of an imaginary spring, with force constant  $k_{\text{spring}}$  (Fig. 9.21):

$$F_{\text{binding}} = -k_{\text{spring}}x = -m\omega_0^2x, \quad (9.151)$$

<sup>13</sup>See A. P. French, *Vibrations and Waves*, p. 230 (New York: W. W. Norton & Co., 1971), or F. S. Crawford, Jr., *Waves*, Sect. 6.2 (New York: McGraw-Hill, 1968).

<sup>14</sup>Even the group velocity can exceed  $c$  in special cases—see P. C. Peters, *Am. J. Phys.* **56**, 129 (1988). Incidentally, if *two* different “speeds of light” are not enough to satisfy you, check out S. C. Bloch, *Am. J. Phys.* **45**, 538 (1977), in which no fewer than *eight* distinct velocities are identified!

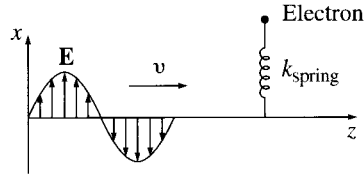


Figure 9.21

where  $x$  is displacement from equilibrium,  $m$  is the electron's mass, and  $\omega_0$  is the natural oscillation frequency,  $\sqrt{k_{\text{spring}}/m}$ . [If this strikes you as an implausible model, look back at Ex. 4.1, where we were led to a force of precisely this form. As a matter of fact, practically *any* binding force can be approximated this way for sufficiently small displacements from equilibrium, as you can see by expanding the potential energy in a Taylor series about the equilibrium point:

$$U(x) = U(0) + xU'(0) + \frac{1}{2}x^2U''(0) + \dots$$

The first term is a constant, with no dynamical significance (you can always adjust the zero of potential energy so that  $U(0) = 0$ ). The second term automatically vanishes, since  $dU/dx = -F$ , and by the nature of an equilibrium the force at that point is zero. The third term is precisely the potential energy of a spring with force constant  $k_{\text{spring}} = d^2U/dx^2|_0$  (the second derivative is positive, for a point of stable equilibrium). As long as the displacements are small, the higher terms in the series can be neglected. Geometrically, all I am saying is that virtually *any* function can be fit near a minimum by a suitable parabola.]

Meanwhile, there will presumably be some damping force on the electron:

$$F_{\text{damping}} = -m\gamma \frac{dx}{dt}. \quad (9.152)$$

[Again I have chosen the simplest possible form; the damping must be opposite in direction to the velocity, and making it *proportional* to the velocity is the easiest way to accomplish this. The *cause* of the damping does not concern us here—among other things, an oscillating charge radiates, and the radiation siphons off energy. We will calculate this “radiation damping” in Chapter 11.]

In the presence of an electromagnetic wave of frequency  $\omega$ , polarized in the  $x$  direction (Fig. 9.21), the electron is subject to a driving force

$$F_{\text{driving}} = qE = qE_0 \cos(\omega t), \quad (9.153)$$

where  $q$  is the charge of the electron and  $E_0$  is the amplitude of the wave at the point  $z$  where the electron is situated. (Since we're only interested in one point, I have reset the clock so that the maximum  $E$  occurs there at  $t = 0$ .) Putting all this into Newton's second law gives

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{tot}} = F_{\text{binding}} + F_{\text{damping}} + F_{\text{driving}},$$

or

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t). \quad (9.154)$$

Our model, then, describes the electron as a damped harmonic oscillator, driven at frequency  $\omega$ . (I assume that the much more massive nuclei remain at rest.)

Equation 9.154 is easier to handle if we regard it as the real part of a *complex* equation:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (9.155)$$

In the steady state, the system oscillates at the driving frequency:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}. \quad (9.156)$$

Inserting this into Eq. 9.155, we obtain

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0. \quad (9.157)$$

The dipole moment is the real part of

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (9.158)$$

The imaginary term in the denominator means that  $p$  is *out of phase* with  $E$ —lagging behind by an angle  $\tan^{-1}[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$  that is very small when  $\omega \ll \omega_0$  and rises to  $\pi$  when  $\omega \gg \omega_0$ .

In general, differently situated electrons within a given molecule experience different natural frequencies and damping coefficients. Let's say there are  $f_j$  electrons with frequency  $\omega_j$  and damping  $\gamma_j$  in each molecule. If there are  $N$  molecules per unit volume, the polarization  $\mathbf{P}$  is given by<sup>15</sup> the real part of

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}}. \quad (9.159)$$

Now, I defined the electric susceptibility as the proportionality constant between  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{E}$  (specifically,  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ). In the present case  $\mathbf{P}$  is *not* proportional to  $\mathbf{E}$  (this is not, strictly speaking, a linear medium) because of the difference in phase. However, the *complex* polarization  $\tilde{\mathbf{P}}$  is proportional to the *complex* field  $\tilde{\mathbf{E}}$ , and this suggests that we introduce a **complex susceptibility**,  $\tilde{\chi}_e$ :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{\mathbf{E}}. \quad (9.160)$$

<sup>15</sup>This applies directly to the case of a dilute gas; for denser materials the theory is modified slightly, in accordance with the Clausius-Mossotti equation (Prob. 4.38). By the way, don't confuse the "polarization" of a medium,  $\mathbf{P}$ , with the "polarization" of a *wave*—same *word*, but two completely unrelated meanings.

All of the manipulations we went through before carry over, on the understanding that the physical polarization is the real part of  $\tilde{\mathbf{P}}$ , just as the physical field is the real part of  $\tilde{\mathbf{E}}$ . In particular, the proportionality between  $\tilde{\mathbf{D}}$  and  $\tilde{\mathbf{E}}$  is the **complex permittivity**  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0(1 + \tilde{\chi}_e)$ , and the **complex dielectric constant** (in this model) is

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}. \quad (9.161)$$

Ordinarily, the imaginary term is negligible; however, when  $\omega$  is very close to one of the resonant frequencies ( $\omega_j$ ) it plays an important role, as we shall see.

In a dispersive medium the wave equation for a given frequency reads

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\epsilon} \mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}; \quad (9.162)$$

it admits plane wave solutions, as before,

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad (9.163)$$

with the complex wave number

$$\tilde{k} \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon} \mu_0} \omega. \quad (9.164)$$

Writing  $\tilde{k}$  in terms of its real and imaginary parts,

$$\tilde{k} = k + i\kappa, \quad (9.165)$$

Eq. 9.163 becomes

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (9.166)$$

Evidently the wave is *attenuated* (this is hardly surprising, since the damping absorbs energy). Because the intensity is proportional to  $E^2$  (and hence to  $e^{-2\kappa z}$ ), the quantity

$$\alpha \equiv 2\kappa \quad (9.167)$$

is called the **absorption coefficient**. Meanwhile, the wave velocity is  $\omega/k$ , and the index of refraction is

$$n = \frac{ck}{\omega}. \quad (9.168)$$

I have deliberately used notation reminiscent of Sect. 9.4.1. However, in the present case  $k$  and  $\kappa$  have nothing to do with conductivity; rather, they are determined by the parameters of our damped harmonic oscillator. For gases, the second term in Eq. 9.161 is small, and we can approximate the square root (Eq. 9.164) by the first term in the binomial expansion.  $\sqrt{1 + \epsilon} \cong 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ . Then

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} \cong \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right], \quad (9.169)$$

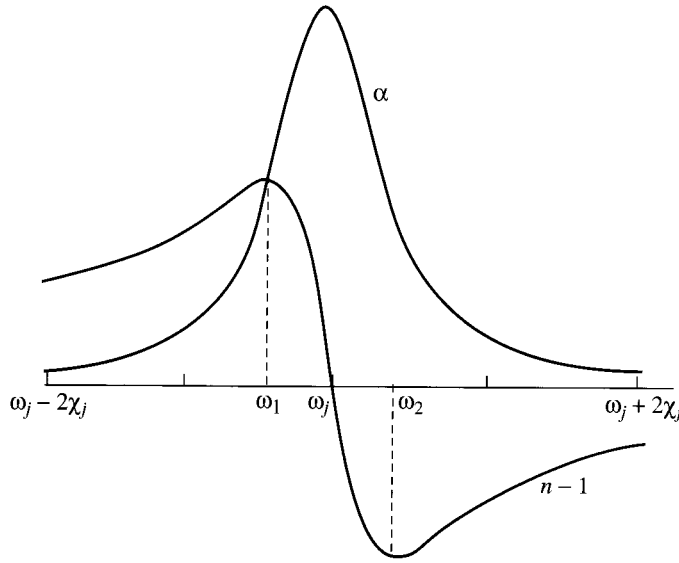


Figure 9.22

so

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}, \quad (9.170)$$

and

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}. \quad (9.171)$$

In Fig. 9.22 I have plotted the index of refraction and the absorption coefficient in the vicinity of one of the resonances. *Most* of the time the index of refraction *rises* gradually with increasing frequency, consistent with our experience from optics (Fig. 9.19). However, in the immediate neighborhood of a resonance the index of refraction *drops* sharply. Because this behavior is atypical, it is called **anomalous dispersion**. Notice that the region of anomalous dispersion ( $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , in the figure) coincides with the region of maximum absorption; in fact, the material may be practically opaque in this frequency range. The reason is that we are now driving the electrons at their “favorite” frequency; the amplitude of their oscillation is relatively large, and a correspondingly large amount of energy is dissipated by the damping mechanism.

In Fig. 9.22,  $n$  runs below 1 above the resonance, suggesting that the wave speed exceeds  $c$ . As I mentioned earlier, this is no cause for alarm, since energy does not travel at the wave velocity but rather at the *group* velocity (see Prob. 9.25). Moreover, the graph does not include the contributions of other terms in the sum, which add a relatively constant “background” that, in some cases, keeps  $n > 1$  on both sides of the resonance.

If you agree to stay away from the resonances, the damping can be ignored, and the formula for the index of refraction simplifies:

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (9.172)$$

For most substances the natural frequencies  $\omega_j$  are scattered all over the spectrum in a rather chaotic fashion. But for transparent materials, the nearest significant resonances typically lie in the ultraviolet, so that  $\omega < \omega_j$ . In that case

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right),$$

and Eq. 9.172 takes the form

$$n = 1 + \left( \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left( \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right). \quad (9.173)$$

Or, in terms of the wavelength in vacuum ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ):

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right). \quad (9.174)$$

This is known as **Cauchy's formula**; the constant  $A$  is called the **coefficient of refraction** and  $B$  is called the **coefficient of dispersion**. Cauchy's equation applies reasonably well to most gases, in the optical region.

What I have described in this section is certainly not the complete story of dispersion in nonconducting media. Nevertheless, it does indicate how the damped harmonic motion of electrons can account for the frequency dependence of the index of refraction, and it explains why  $n$  is ordinarily a slowly increasing function of  $\omega$ , with occasional “anomalous” regions where it precipitously drops.

### Problem 9.22

(a) Shallow water is nondispersive; the waves travel at a speed that is proportional to the square root of the depth. In deep water, however, the waves can't “feel” all the way down to the bottom—they behave as though the depth were proportional to  $\lambda$ . (Actually, the distinction between “shallow” and “deep” itself depends on the wavelength: If the depth is less than  $\lambda$  the water is “shallow”; if it is substantially greater than  $\lambda$  the water is “deep.”) Show that the wave velocity of deep water waves is *twice* the group velocity.

(b) In quantum mechanics, a free particle of mass  $m$  traveling in the  $x$  direction is described by the wave function

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(px - Et)/\hbar},$$

where  $p$  is the momentum, and  $E = p^2/2m$  is the kinetic energy. Calculate the group velocity and the wave velocity. Which one corresponds to the classical speed of the particle? Note that the wave velocity is *half* the group velocity.

**Problem 9.23** If you take the model in Ex. 4.1 at face value, what natural frequency do you get? Put in the actual numbers. Where, in the electromagnetic spectrum, does this lie, assuming the radius of the atom is  $0.5 \text{ \AA}$ ? Find the coefficients of refraction and dispersion and compare them with those for hydrogen at  $0^\circ\text{C}$  and atmospheric pressure:  $A = 1.36 \times 10^{-4}$ ,  $B = 7.7 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ .

**Problem 9.24** Find the width of the anomalous dispersion region for the case of a single resonance at frequency  $\omega_0$ . Assume  $\gamma \ll \omega_0$ . Show that the index of refraction assumes its maximum and minimum values at points where the absorption coefficient is at half-maximum.

**Problem 9.25** Assuming negligible damping ( $\gamma_j = 0$ ), calculate the group velocity ( $v_g = d\omega/dk$ ) of the waves described by Eqs. 9.166 and 9.169. Show that  $v_g < c$ , even when  $v > c$ .

## 9.5 Guided Waves

### 9.5.1 Wave Guides

So far, we have dealt with plane waves of infinite extent; now we consider electromagnetic waves confined to the interior of a hollow pipe, or **wave guide** (Fig. 9.23). We'll assume the wave guide is a perfect conductor, so that  $\mathbf{E} = 0$  and  $\mathbf{B} = 0$  inside the material itself, and hence the boundary conditions at the inner wall are<sup>16</sup>

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } \mathbf{E}^{\parallel} = 0, \\ \text{(ii) } \mathbf{B}^{\perp} = 0. \end{array} \right\} \quad (9.175)$$

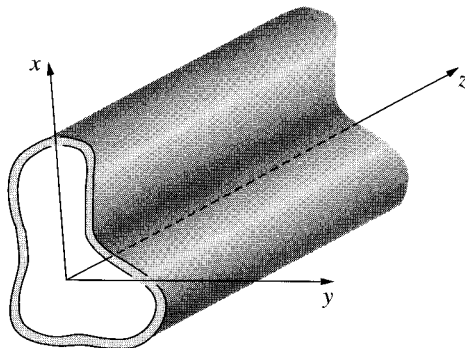


Figure 9.23

<sup>16</sup>See Eq. 9.139 and Prob. 7.42. In a perfect conductor  $\mathbf{E} = 0$ , and hence (by Faraday's law)  $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$ ; assuming the magnetic field *started out* zero, then, it will *remain* so.

Free charges and currents will be induced on the surface in such a way as to enforce these constraints. We are interested in monochromatic waves that propagate down the tube, so  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  have the generic form

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \\ \text{(ii)} \quad \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.176)$$

(For the cases of interest  $k$  is real, so I shall dispense with the tilde.) The electric and magnetic fields must, of course, satisfy Maxwell's equations, in the interior of the wave guide:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.177)$$

The problem, then, is to find functions  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  and  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  such that the fields (9.176) obey the differential equations (9.177), subject to boundary conditions (9.175).

As we shall soon see, *confined* waves are *not* (in general) transverse; in order to fit the boundary conditions we shall have to include longitudinal components ( $E_z$  and  $B_z$ ):<sup>17</sup>

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (9.178)$$

where each of the components is a function of  $x$  and  $y$ . Putting this into Maxwell's equations (iii) and (iv), we obtain (Prob. 9.26a)

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega B_z, & \text{(iv)} \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= -\frac{i\omega}{c^2} E_z, \\ \text{(ii)} \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y &= i\omega B_x, & \text{(v)} \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y &= -\frac{i\omega}{c^2} E_x, \\ \text{(iii)} \quad ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega B_y, & \text{(vi)} \quad ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\frac{i\omega}{c^2} E_y. \end{aligned} \right\} \quad (9.179)$$

<sup>17</sup>To avoid cumbersome notation I shall leave the subscript 0 and the tilde off the individual components.

Equations (ii), (iii), (v), and (vi) can be solved for  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $B_x$ , and  $B_y$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right), \\ \text{(ii)} \quad E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \\ \text{(iii)} \quad B_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ \text{(iv)} \quad B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.180)$$

It suffices, then, to determine the longitudinal components  $E_z$  and  $B_z$ ; if we knew those, we could quickly calculate all the others, just by differentiating. Inserting Eq. 9.180 into the remaining Maxwell equations (Prob. 9.26b) yields uncoupled equations for  $E_z$  and  $B_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] E_z &= 0, \\ \text{(ii)} \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] B_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.181)$$

If  $E_z = 0$  we call these **TE** (“transverse electric”) **waves**; if  $B_z = 0$  they are called **TM** (“transverse magnetic”) **waves**; if both  $E_z = 0$  and  $B_z = 0$ , we call them **TEM waves**.<sup>18</sup> It turns out that TEM waves cannot occur in a hollow wave guide.

**Proof:** If  $E_z = 0$ , Gauss’s law (Eq. 9.177i) says

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0,$$

and if  $B_z = 0$ , Faraday’s law (Eq. 9.177iii) says

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Indeed, the vector  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  in Eq. 9.178 has zero divergence and zero curl. It can therefore be written as the gradient of a scalar potential that satisfies Laplace’s equation. But the boundary condition on  $\mathbf{E}$  (Eq. 9.175) requires that the surface be an equipotential, and since Laplace’s equation admits no local maxima or minima (Sect. 3.1.4), this means that the potential is constant throughout, and hence the electric field is *zero*—no wave at all. qed

<sup>18</sup>In the case of TEM waves (including the unconfined plane waves of Sect. 9.2),  $k = \omega/c$ , Eqs. 9.180 are indeterminate, and you have to go back to Eqs. 9.179.

Notice that this argument applies only to a completely *empty* pipe—if you run a separate conductor down the middle, the potential at *its* surface need not be the same as on the outer wall, and hence a nontrivial potential is possible. We'll see an example of this in Sect. 9.5.3.

! **Problem 9.26**

- (a) Derive Eqs. 9.179, and from these obtain Eqs. 9.180.  
 (b) Put Eq. 9.180 into Maxwell's equations (i) and (ii) to obtain Eq. 9.181. Check that you get the same results using (i) and (iv) of Eq. 9.179.

## 9.5.2 TE Waves in a Rectangular Wave Guide

Suppose we have a wave guide of rectangular shape (Fig. 9.24), with height  $a$  and width  $b$ , and we are interested in the propagation of TE waves. The problem is to solve Eq. 9.181ii, subject to the boundary condition 9.175ii. We'll do it by separation of variables. Let

$$B_z(x, y) = X(x)Y(y),$$

so that

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + [(\omega/c)^2 - k^2]XY = 0.$$

Divide by  $XY$  and note that the  $x$ - and  $y$ -dependent terms must be constant:

$$(i) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad (ii) \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (9.182)$$

with

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0. \quad (9.183)$$

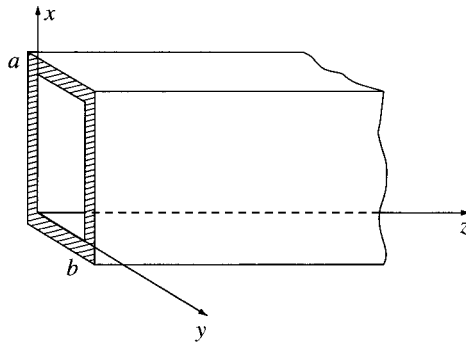


Figure 9.24

The general solution to Eq. 9.182i is

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x).$$

But the boundary conditions require that  $B_x$ —and hence also (Eq. 9.180iii)  $dX/dx$ —vanishes at  $x = 0$  and  $x = a$ . So  $A = 0$ , and

$$k_x = m\pi/a, \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.184)$$

The same goes for  $Y$ , with

$$k_y = n\pi/b, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9.185)$$

and we conclude that

$$B_z = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b). \quad (9.186)$$

This solution is called the  $TE_{mn}$  mode. (The first index is conventionally associated with the *larger* dimension, so we assume  $a \geq b$ . By the way, at least *one* of the indices must be nonzero—see Prob. 9.27.) The wave number ( $k$ ) is obtained by putting Eqs. 9.184 and 9.185 into Eq. 9.183:

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]}. \quad (9.187)$$

If

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn}, \quad (9.188)$$

the wave number is imaginary, and instead of a traveling wave we have exponentially attenuated fields (Eq. 9.176). For this reason  $\omega_{mn}$  is called the **cutoff frequency** for the mode in question. The *lowest* cutoff frequency for a given wave guide occurs for the mode  $TE_{10}$ :

$$\omega_{10} = c\pi/a. \quad (9.189)$$

Frequencies less than this will not propagate at all.

The wave number can be written more simply in terms of the cutoff frequency:

$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}. \quad (9.190)$$

The wave velocity is

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}, \quad (9.191)$$

which is greater than  $c$ . However (see Prob. 9.29), the energy carried by the wave travels at the *group* velocity (Eq. 9.150):

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} < c. \quad (9.192)$$

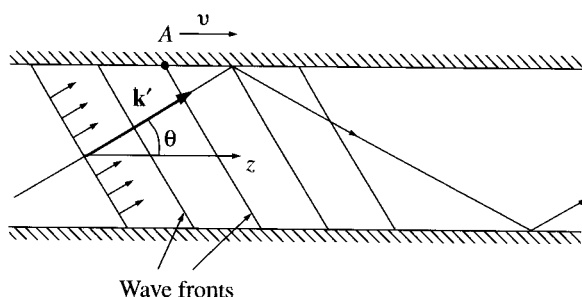


Figure 9.25

There's another way to visualize the propagation of an electromagnetic wave in a rectangular pipe, and it serves to illuminate many of these results. Consider an ordinary *plane* wave, traveling at an angle  $\theta$  to the  $z$  axis, and reflecting perfectly off each conducting surface (Fig. 9.25). In the  $x$  and  $y$  directions the (multiply reflected) waves interfere to form standing wave patterns, of wavelength  $\lambda_x = 2a/m$  and  $\lambda_y = 2b/n$  (hence wave number  $k_x = 2\pi/\lambda_x = \pi m/a$  and  $k_y = \pi n/b$ ), respectively. Meanwhile, in the  $z$  direction there remains a traveling wave, with wave number  $k_z = k$ . The propagation vector for the “original” plane wave is therefore

$$\mathbf{k}' = \frac{\pi m}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\pi n}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}},$$

and the frequency is

$$\omega = c|\mathbf{k}'| = c\sqrt{k^2 + \pi^2[(m/a)^2 + (n/b)^2]} = \sqrt{(ck)^2 + (\omega_{mn})^2}.$$

Only certain angles will lead to one of the allowed standing wave patterns:

$$\cos \theta = \frac{k}{|\mathbf{k}'|} = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}.$$

The plane wave travels at speed  $c$ , but because it is going at an angle  $\theta$  to the  $z$  axis, its net velocity down the wave guide is

$$v_g = c \cos \theta = c\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}.$$

The *wave* velocity, on the other hand, is the speed of the wave fronts (A, say, in Fig. 9.25) down the pipe. Like the intersection of a line of breakers with the beach, they can move much faster than the waves themselves—in fact

$$v = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}.$$

**Problem 9.27** Show that the mode  $TE_{00}$  cannot occur in a rectangular wave guide. [Hint: In this case  $\omega/c = k$ , so Eqs. 9.180 are indeterminate, and you must go back to 9.179. Show that  $B_z$  is a constant, and hence—applying Faraday’s law in integral form to a cross section—that  $B_z = 0$ , so this would be a TEM mode.]

**Problem 9.28** Consider a rectangular wave guide with dimensions  $2.28 \text{ cm} \times 1.01 \text{ cm}$ . What TE modes will propagate in this wave guide, if the driving frequency is  $1.70 \times 10^{10} \text{ Hz}$ ? Suppose you wanted to excite only *one* TE mode; what range of frequencies could you use? What are the corresponding wavelengths (in open space)?

**Problem 9.29** Confirm that the energy in the  $TE_{mn}$  mode travels at the group velocity. [Hint: Find the time averaged Poynting vector  $\langle \mathbf{S} \rangle$  and the energy density  $\langle u \rangle$  (use Prob. 9.11 if you wish). Integrate over the cross section of the wave guide to get the energy per unit time and per unit length carried by the wave, and take their ratio.]

**Problem 9.30** Work out the theory of TM modes for a rectangular wave guide. In particular, find the longitudinal electric field, the cutoff frequencies, and the wave and group velocities. Find the ratio of the lowest TM cutoff frequency to the lowest TE cutoff frequency, for a given wave guide. [Caution: What is the lowest TM mode?]

### 9.5.3 The Coaxial Transmission Line

In Sect. 9.5.1, I showed that a *hollow* wave guide cannot support TEM waves. But a coaxial transmission line, consisting of a long straight wire of radius  $a$ , surrounded by a cylindrical conducting sheath of radius  $b$  (Fig. 9.26), *does* admit modes with  $E_z = 0$  and  $B_z = 0$ . In this case Maxwell’s equations (in the form 9.179) yield

$$k = \omega/c \quad (9.193)$$

(so the waves travel at speed  $c$ , and are nondispersive),

$$cB_y = E_x \quad \text{and} \quad cB_x = -E_y \quad (9.194)$$

(so  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  are mutually perpendicular), and (together with  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.195)$$

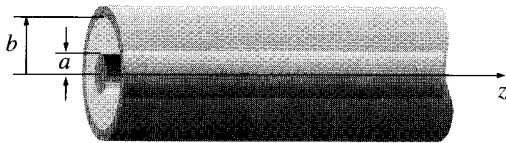


Figure 9.26

These are precisely the equations of *electrostatics* and *magnetostatics*, for empty space, in two dimensions; the solution with cylindrical symmetry can be borrowed directly from the case of an infinite line charge and an infinite straight current, respectively:

$$\mathbf{E}_0(s, \phi) = \frac{A}{s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{B}_0(s, \phi) = \frac{A}{cs} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (9.196)$$

for some constant  $A$ . Substituting these into Eq. 9.176, and taking the real part:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(s, \phi, z, t) &= \frac{A \cos(kz - \omega t)}{s} \hat{\mathbf{s}}, \\ \mathbf{B}(s, \phi, z, t) &= \frac{A \cos(kz - \omega t)}{cs} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.197)$$

### Problem 9.31

(a) Show directly that Eqs. 9.197 satisfy Maxwell's equations (9.177) and the boundary conditions 9.175.

(b) Find the charge density,  $\lambda(z, t)$ , and the current,  $I(z, t)$ , on the inner conductor.

### More Problems on Chapter 9

! **Problem 9.32** The “inversion theorem” for Fourier transforms states that

$$\tilde{\phi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k) e^{ikz} dk \iff \tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(z) e^{-ikz} dz. \quad (9.198)$$

Use this to determine  $\tilde{A}(k)$ , in Eq. 9.20, in terms of  $f(z, 0)$  and  $\dot{f}(z, 0)$ .

[Answer:  $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} [f(z, 0) + (i/\omega) \dot{f}(z, 0)] e^{-ikz} dz$ ]

**Problem 9.33** Suppose

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} [\cos(kr - \omega t) - (1/kr) \sin(kr - \omega t)] \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \text{with } \frac{\omega}{k} = c.$$

(This is, incidentally, the simplest possible **spherical wave**. For notational convenience, let  $(kr - \omega t) \equiv u$  in your calculations.)

(a) Show that  $\mathbf{E}$  obeys all four of Maxwell's equations, in vacuum, and find the associated magnetic field.

(b) Calculate the Poynting vector. Average  $\mathbf{S}$  over a full cycle to get the intensity vector  $\mathbf{I}$ . (Does it point in the expected direction? Does it fall off like  $r^{-2}$ , as it should?)

(c) Integrate  $\mathbf{I} \cdot d\mathbf{a}$  over a spherical surface to determine the total power radiated. [Answer:  $4\pi A^2/3\mu_0 c$ ]

- ! **Problem 9.34** Light of (angular) frequency  $\omega$  passes from medium 1, through a slab (thickness  $d$ ) of medium 2, and into medium 3 (for instance, from water through glass into air, as in Fig. 9.27). Show that the transmission coefficient for normal incidence is given by

$$T^{-1} = \frac{1}{4n_1n_3} \left[ (n_1 + n_3)^2 + \frac{(n_1^2 - n_2^2)(n_3^2 - n_2^2)}{n_2^2} \sin^2 \left( \frac{n_2\omega d}{c} \right) \right]. \quad (9.199)$$

[Hint: To the *left*, there is an incident wave and a reflected wave; to the *right*, there is a transmitted wave; inside the slab there is a wave going to the right and a wave going to the left. Express each of these in terms of its complex amplitude, and relate the amplitudes by imposing suitable boundary conditions at the two interfaces. All three media are linear and homogeneous; assume  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ .]

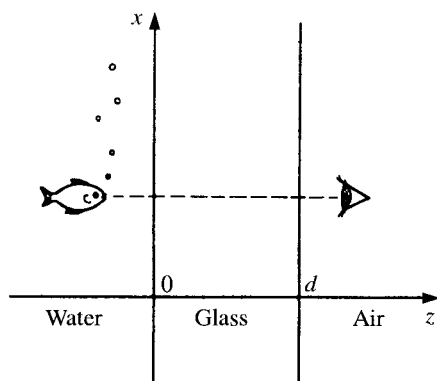


Figure 9.27

**Problem 9.35** A microwave antenna radiating at 10 GHz is to be protected from the environment by a plastic shield of dielectric constant 2.5. What is the minimum thickness of this shielding that will allow perfect transmission (assuming normal incidence)? [Hint: use Eq. 9.199]

**Problem 9.36** Light from an aquarium (Fig. 9.27) goes from water ( $n = \frac{4}{3}$ ) through a plane of glass ( $n = \frac{3}{2}$ ) into air ( $n = 1$ ). Assuming it's a monochromatic plane wave and that it strikes the glass at normal incidence, find the minimum and maximum transmission coefficients (Eq. 9.199). You can see the fish clearly; how well can it see you?

- ! **Problem 9.37** According to Snell's law, when light passes from an optically dense medium into a less dense one ( $n_1 > n_2$ ) the propagation vector  $\mathbf{k}$  bends *away* from the normal (Fig. 9.28). In particular, if the light is incident at the **critical angle**

$$\theta_c \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1), \quad (9.200)$$

then  $\theta_T = 90^\circ$ , and the transmitted ray just grazes the surface. If  $\theta_I$  exceeds  $\theta_c$ , there is no refracted ray at all, only a reflected one (this is the phenomenon of **total internal reflection**,

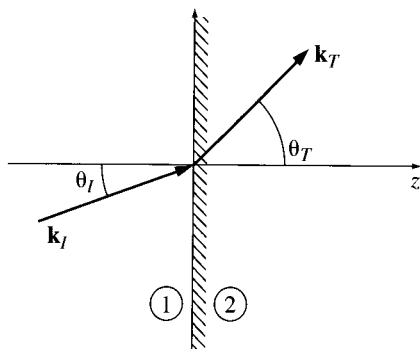


Figure 9.28

on which light pipes and fiber optics are based). But the *fields* are not zero in medium 2; what we get is a so-called **evanescent wave**, which is rapidly attenuated and transports no energy into medium 2.<sup>19</sup>

A quick way to construct the evanescent wave is simply to quote the results of Sect. 9.3.3, with  $k_T = \omega n_2/c$  and

$$\mathbf{k}_T = k_T (\sin \theta_T \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_T \hat{\mathbf{z}});$$

the only change is that

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I$$

is now greater than 1, and

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T} = i \sqrt{\sin^2 \theta_T - 1}$$

is imaginary. (Obviously,  $\theta_T$  can no longer be interpreted as an *angle*!)

(a) Show that

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{-\kappa z} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (9.201)$$

where

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_I)^2 - n_2^2} \quad \text{and} \quad k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_I. \quad (9.202)$$

This is a wave propagating in the  $x$  direction (*parallel* to the interface!), and attenuated in the  $z$  direction.

(b) Noting that  $\alpha$  (Eq. 9.108) is now imaginary, use Eq. 9.109 to calculate the reflection coefficient for polarization parallel to the plane of incidence. [Notice that you get 100% reflection, which is better than at a conducting surface (see, for example, Prob. 9.21).]

(c) Do the same for polarization perpendicular to the plane of incidence (use the results of Prob. 9.16).

<sup>19</sup>The evanescent fields can be detected by placing a second interface a short distance to the right of the first; in a close analog to quantum mechanical **tunneling**, the wave crosses the gap and reassembles to the right. See F. Albiol, S. Navas, and M. V. Andres, *Am. J. Phys.* **61**, 165 (1993).

(d) In the case of polarization perpendicular to the plane of incidence, show that the (real) evanescent fields are

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\omega} e^{-\kappa z} [\kappa \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + k \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}]. \end{aligned} \right\} \quad (9.203)$$

(e) Check that the fields in (d) satisfy all of Maxwell's equations (9.67).

(f) For the fields in (d), construct the Poynting vector, and show that, on average, no energy is transmitted in the  $z$  direction.

! **Problem 9.38** Consider the **resonant cavity** produced by closing off the two ends of a rectangular wave guide, at  $z = 0$  and at  $z = d$ , making a perfectly conducting empty box. Show that the resonant frequencies for both TE and TM modes are given by

$$\omega_{lmn} = c\pi \sqrt{(l/d)^2 + (m/a)^2 + (n/b)^2}, \quad (9.204)$$

for integers  $l$ ,  $m$ , and  $n$ . Find the associated electric and magnetic fields.

---

# Chapter 10

## Potentials and Fields

### 10.1 The Potential Formulation

#### 10.1.1 Scalar and Vector Potentials

In this chapter we ask how the sources ( $\rho$  and  $\mathbf{J}$ ) generate electric and magnetic fields; in other words, we seek the *general* solution to Maxwell's equations,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \text{(ii)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \text{(iii)} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(iv)} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right\} \quad (10.1)$$

Given  $\rho(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , what are the fields  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ? In the static case Coulomb's law and the Biot-Savart law provide the answer. What we're looking for, then, is the generalization of those laws to time-dependent configurations.

This is not an easy problem, and it pays to begin by representing the fields in terms of potentials. In electrostatics  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  allowed us to write  $\mathbf{E}$  as the gradient of a scalar potential:  $\mathbf{E} = -\nabla V$ . In *electrodynamics* this is no longer possible, because the curl of  $\mathbf{E}$  is nonzero. But  $\mathbf{B}$  remains divergenceless, so we can still write

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}}, \quad (10.2)$$

as in magnetostatics. Putting this into Faraday's law (iii) yields

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}),$$

or

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Here is a quantity, unlike  $\mathbf{E}$  alone, whose curl *does* vanish; it can therefore be written as the gradient of a scalar:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V.$$

In terms of  $V$  and  $\mathbf{A}$ , then,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}. \quad (10.3)$$

This reduces to the old form, of course, when  $\mathbf{A}$  is constant.

The potential representation (Eqs. 10.2 and 10.3) automatically fulfills the two homogeneous Maxwell equations, (ii) and (iii). How about Gauss's law (i) and the Ampère/Maxwell law (iv)? Putting Eq. 10.3 into (i), we find that

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad (10.4)$$

this replaces Poisson's equation (to which it reduces in the static case). Putting Eqs. 10.2 and 10.3 into (iv) yields

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

or, using the vector identity  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ , and rearranging the terms a bit:

$$\left( \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (10.5)$$

Equations 10.4 and 10.5 contain all the information in Maxwell's equations.

### Example 10.1

Find the charge and current distributions that would give rise to the potentials

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{z}}, & \text{for } |x| < ct, \\ 0, & \text{for } |x| > ct, \end{cases}$$

where  $k$  is a constant, and  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

**Solution:** First we'll determine the electric and magnetic fields, using Eqs. 10.2 and 10.3:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2} (ct - |x|) \hat{\mathbf{z}}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x} (ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{y}} = \pm \frac{\mu_0 k}{2c} (ct - |x|) \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

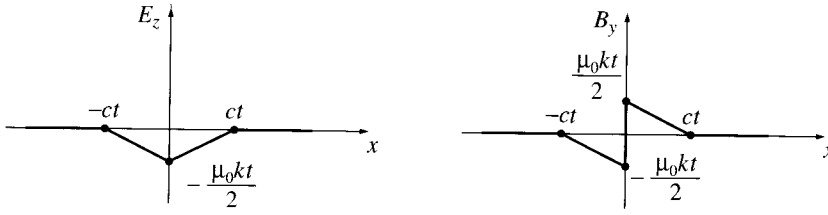


Figure 10.1

(plus for  $x > 0$ , minus for  $x < 0$ ). These are for  $|x| < ct$ ; when  $|x| > ct$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  (Fig. 10.1). Calculating every derivative in sight, I find

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mp \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k}{2c} \hat{\mathbf{z}};$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k c}{2} \hat{\mathbf{z}}; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}}.$$

As you can easily check, Maxwell's equations are all satisfied, with  $\rho$  and  $\mathbf{J}$  both *zero*. Notice, however, that  $\mathbf{B}$  has a discontinuity at  $x = 0$ , and this signals the presence of a surface current  $\mathbf{K}$  in the  $yz$  plane; boundary condition (iv) in Eq. 7.63 gives

$$kt \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}},$$

and hence

$$\mathbf{K} = kt \hat{\mathbf{z}}.$$

Evidently we have here a uniform surface current flowing in the  $z$  direction over the plane  $x = 0$ , which starts up at  $t = 0$ , and increases in proportion to  $t$ . Notice that the news travels out (in both directions) at the speed of light: for points  $|x| > ct$  the message (that current is now flowing) has not yet arrived, so the fields are zero.

**Problem 10.1** Show that the differential equations for  $V$  and  $\mathbf{A}$  (Eqs. 10.4 and 10.5) can be written in the more symmetrical form

$$\left. \begin{aligned} \square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \square^2 \mathbf{A} - \nabla L &= -\mu_0 \mathbf{J}. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

where

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{and} \quad L \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

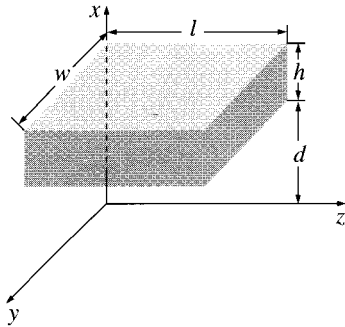


Figure 10.2

**Problem 10.2** For the configuration in Ex. 10.1, consider a rectangular box of length  $l$ , width  $w$ , and height  $h$ , situated a distance  $d$  above the  $yz$  plane (Fig. 10.2).

- Find the energy in the box at time  $t_1 = d/c$ , and at  $t_2 = (d + h)/c$ .
- Find the Poynting vector, and determine the energy per unit time flowing into the box during the interval  $t_1 < t < t_2$ .
- Integrate the result in (b) from  $t_1$  to  $t_2$  and confirm that the increase in energy (part (a)) equals the net influx.

### 10.1.2 Gauge Transformations

Equations 10.4 and 10.5 are *ugly*, and you might be inclined at this stage to abandon the potential formulation altogether. However, we *have* succeeded in reducing six problems—finding  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$  (three components each)—down to four:  $V$  (one component) and  $\mathbf{A}$  (three more). Moreover, Eqs. 10.2 and 10.3 do not uniquely define the potentials; we are free to impose extra conditions on  $V$  and  $\mathbf{A}$ , as long as nothing happens to  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . Let's work out precisely what this **gauge freedom** entails. Suppose we have two sets of potentials,  $(V, \mathbf{A})$  and  $(V', \mathbf{A}')$ , which correspond to the *same* electric and magnetic fields. By how much can they differ? Write

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \quad \text{and} \quad V' = V + \beta.$$

Since the two  $\mathbf{A}$ 's give the same  $\mathbf{B}$ , their curls must be equal, and hence

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0.$$

We can therefore write  $\boldsymbol{\alpha}$  as the gradient of some scalar:

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda.$$

The two potentials also give the same  $\mathbf{E}$ , so

$$\nabla\beta + \frac{\partial\boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = 0,$$

or

$$\nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0.$$

The term in parentheses is therefore independent of position (it could, however, depend on time); call it  $k(t)$ :

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t).$$

Actually, we might as well absorb  $k(t)$  into  $\lambda$ , defining a new  $\lambda$  by adding  $\int_0^t k(t')dt'$  to the old one. This will not affect the gradient of  $\lambda$ ; it just adds  $k(t)$  to  $\partial\lambda/\partial t$ . It follows that

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\lambda, \\ V' &= V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

**Conclusion:** For any old scalar function  $\lambda$ , we can with impunity add  $\nabla\lambda$  to  $\mathbf{A}$ , provided we simultaneously subtract  $\partial\lambda/\partial t$  from  $V$ . None of this will affect the physical quantities  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ . Such changes in  $V$  and  $\mathbf{A}$  are called **gauge transformations**. They can be exploited to adjust the divergence of  $\mathbf{A}$ , with a view to simplifying the “ugly” equations 10.4 and 10.5. In magnetostatics, it was best to choose  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (Eq. 5.61); in electrodynamics the situation is not so clear cut, and the most convenient gauge depends to some extent on the problem at hand. There are many famous gauges in the literature; I’ll show you the two most popular ones.

**Problem 10.3** Find the fields, and the charge and current distributions, corresponding to

$$V(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

**Problem 10.4** Suppose  $V = 0$  and  $\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$ , where  $A_0$ ,  $\omega$ , and  $k$  are constants. Find  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ , and check that they satisfy Maxwell’s equations in vacuum. What condition must you impose on  $\omega$  and  $k$ ?

**Problem 10.5** Use the gauge function  $\lambda = -(1/4\pi\epsilon_0)(qt/r)$  to transform the potentials in Prob. 10.3, and comment on the result.

### 10.1.3 Coulomb Gauge and Lorentz\* Gauge

**The Coulomb Gauge.** As in magnetostatics, we pick

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (10.8)$$

With this, Eq. 10.4 becomes

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (10.9)$$

This is Poisson's equation, and we already know how to solve it: setting  $V = 0$  at infinity,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r} d\tau'. \quad (10.10)$$

Don't be fooled, though—unlike electrostatics,  $V$  by itself doesn't tell you  $\mathbf{E}$ ; you have to know  $\mathbf{A}$  as well (Eq. 10.3).

There is a peculiar thing about the scalar potential in the Coulomb gauge: it is determined by the distribution of charge *right now*. If I move an electron in my laboratory, the potential  $V$  on the moon immediately records this change. That sounds particularly odd in the light of special relativity, which allows no message to travel faster than the speed of light. The point is that  $V$  *by itself* is not a physically measurable quantity—all the man in the moon can measure is  $\mathbf{E}$ , and that involves  $\mathbf{A}$  as well. Somehow it is built into the vector potential, in the Coulomb gauge, that whereas  $V$  instantaneously reflects all changes in  $\rho$ , the combination  $-\nabla V - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$  does *not*;  $\mathbf{E}$  will change only after sufficient time has elapsed for the “news” to arrive.<sup>1</sup>

The *advantage* of the Coulomb gauge is that the *scalar* potential is particularly simple to calculate; the *disadvantage* (apart from the acausal appearance of  $V$ ) is that  $\mathbf{A}$  is particularly *difficult* to calculate. The differential equation for  $\mathbf{A}$  (10.5) in the Coulomb gauge reads

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right). \quad (10.11)$$

**The Lorentz gauge.** In the Lorentz gauge we pick

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}. \quad (10.12)$$

This is designed to eliminate the middle term in Eq. 10.5 (in the language of Prob. 10.1, it sets  $L = 0$ ). With this

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (10.13)$$

Meanwhile, the differential equation for  $V$ , (10.4), becomes

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (10.14)$$

\*There is some question whether this should be attributed to H. A. Lorentz or to L. V. Lorenz (see J. Van Bladel, *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 33(2), 69 (1991)). But all the standard textbooks include the  $t$ , and to avoid possible confusion I shall adhere to that practice.

<sup>1</sup>See O. L. Brill and B. Goodman, *Am. J. Phys.* 35, 832 (1967).

The virtue of the Lorentz gauge is that it treats  $V$  and  $\mathbf{A}$  on an equal footing: the same differential operator

$$\boxed{\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2,} \quad (10.15)$$

(called the **d'Alembertian**) occurs in both equations:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \text{(ii)} & \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \end{array}} \quad (10.16)$$

This democratic treatment of  $V$  and  $\mathbf{A}$  is particularly nice in the context of special relativity, where the d'Alembertian is the natural generalization of the Laplacian, and Eqs. 10.16 can be regarded as four-dimensional versions of Poisson's equation. (In this same spirit the wave equation, for propagation speed  $c$ ,  $\square^2 f = 0$ , might be regarded as the four-dimensional version of Laplace's equation.) In the Lorentz gauge  $V$  and  $\mathbf{A}$  satisfy the **inhomogeneous wave equation**, with a "source" term (in place of zero) on the right. From now on I shall use the Lorentz gauge exclusively, and the whole of electrodynamics reduces to the problem of *solving the inhomogeneous wave equation for specified sources*. That's my project for the next section.

**Problem 10.6** Which of the potentials in Ex. 10.1, Prob. 10.3, and Prob. 10.4 are in the Coulomb gauge? Which are in the Lorentz gauge? (Notice that these gauges are not mutually exclusive.)

**Problem 10.7** In Chapter 5, I showed that it is always possible to pick a vector potential whose divergence is zero (Coulomb gauge). Show that it is always possible to choose  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 (\partial V / \partial t)$ , as required for the Lorentz gauge, assuming you know how to solve equations of the form 10.16. Is it always possible to pick  $V = 0$ ? How about  $\mathbf{A} = 0$ ?

## 10.2 Continuous Distributions

### 10.2.1 Retarded Potentials

In the static case, Eqs. 10.16 reduce to (four copies of) Poisson's equation,

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J},$$

with the familiar solutions

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau', \quad (10.17)$$

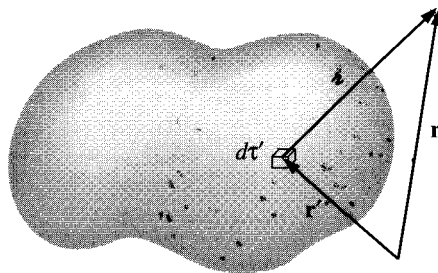


Figure 10.3

where  $\lambda$ , as always, is the distance from the source point  $\mathbf{r}'$  to the field point  $\mathbf{r}$  (Fig. 10.3). Now, electromagnetic “news” travels at the speed of light. In the *nonstatic* case, therefore, it’s not the status of the source *right now* that matters, but rather its condition at some earlier time  $t_r$  (called the **retarded time**) when the “message” left. Since this message must travel a distance  $\lambda$ , the delay is  $\lambda/c$ :

$$t_r \equiv t - \frac{\lambda}{c}. \quad (10.18)$$

The natural generalization of Eq. 10.17 for nonstatic sources is therefore

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\lambda} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\lambda} d\tau'. \quad (10.19)$$

Here  $\rho(\mathbf{r}', t_r)$  is the charge density that prevailed at point  $\mathbf{r}'$  at the retarded time  $t_r$ . Because the integrands are evaluated at the retarded time, these are called **retarded potentials**. (I speak of “the” retarded time, but of course the most distant parts of the charge distribution have earlier retarded times than nearby ones. It’s just like the night sky: The light we see now left each star at the retarded time corresponding to that star’s distance from the earth.) Note that the retarded potentials reduce properly to Eq. 10.17 in the static case, for which  $\rho$  and  $\mathbf{J}$  are independent of time.

Well, that all sounds *reasonable*—and surprisingly simple. But are we sure it’s *right*? I didn’t actually *derive* these formulas for  $V$  and  $\mathbf{A}$ ; all I did was invoke a heuristic argument (“electromagnetic news travels at the speed of light”) to make them seem *plausible*. To *prove* them, I must show that they satisfy the inhomogeneous wave equation (10.16) and meet the Lorentz condition (10.12). In case you think I’m being fussy, let me warn you that if you apply the same argument to the *fields* you’ll get entirely the *wrong* answer:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\lambda^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau', \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) \times \hat{\mathbf{r}}}{\lambda^2} d\tau',$$

as you would expect if the same “logic” worked for Coulomb’s law and the Biot-Savart law. Let’s stop and check, then, that the retarded scalar potential satisfies Eq. 10.16; essentially the same argument would serve for the vector potential.<sup>2</sup> I shall leave it for you (Prob. 10.8) to check that the retarded potentials obey the Lorentz condition.

In calculating the Laplacian of  $V(\mathbf{r}, t)$ , the crucial point to notice is that the integrand (in Eq. 10.19) depends on  $\mathbf{r}$  in *two* places: *explicitly*, in the denominator ( $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ), and *implicitly*, through  $t_r = t - z/c$ , in the numerator. Thus

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ (\nabla\rho) \frac{1}{z} + \rho \nabla \left( \frac{1}{z} \right) \right] d\tau', \quad (10.20)$$

and

$$\nabla\rho = \dot{\rho} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \nabla z \quad (10.21)$$

(the dot denotes differentiation with respect to time).<sup>3</sup> Now  $\nabla z = \hat{\mathbf{z}}$  and  $\nabla(1/z) = -\hat{\mathbf{z}}/z^2$  (Prob. 1.13), so

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ -\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z} - \rho \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z^2} \right] d\tau'. \quad (10.22)$$

Taking the divergence,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left\{ -\frac{1}{c} \left[ \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z} \cdot (\nabla\dot{\rho}) + \dot{\rho} \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z} \right) \right] - \left[ \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z^2} \cdot (\nabla\rho) + \rho \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z^2} \right) \right] \right\} d\tau'.$$

But

$$\nabla\dot{\rho} = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \nabla z = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{\mathbf{z}},$$

as in Eq. 10.21, and

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z} \right) = \frac{1}{z^2}$$

(Prob. 1.62), whereas

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{\mathbf{z}}}{z^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{z})$$

(Eq. 1.100). So

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}}{z} - 4\pi\rho\delta^3(\mathbf{z}) \right] d\tau' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t),$$

confirming that the retarded potential (10.19) satisfies the inhomogeneous wave equation (10.16). qed

<sup>2</sup>I’ll give you the straightforward but cumbersome proof; for a clever indirect argument see M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.1 (Orlando, FL: Saunders (1995)).

<sup>3</sup>Note that  $\partial/\partial t_r = \partial/\partial t$ , since  $t_r = t - z/c$  and  $z$  is independent of  $t$ .

Incidentally, this proof applies equally well to the **advanced potentials**,

$$V_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_a)}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_a)}{r} d\tau', \quad (10.23)$$

in which the charge and the current densities are evaluated at the **advanced time**

$$t_a \equiv t + \frac{r}{c}. \quad (10.24)$$

A few signs are changed, but the final result is unaffected. Although the advanced potentials are entirely consistent with Maxwell's equations, they violate the most sacred tenet in all of physics: the principle of **causality**. They suggest that the potentials *now* depend on what the charge and the current distribution *will* be at some time in the future—the effect, in other words, precedes the cause. Although the advanced potentials are of some theoretical interest, they have no direct physical significance.<sup>4</sup>

### Example 10.2

An infinite straight wire carries the current

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t \leq 0, \\ I_0, & \text{for } t > 0. \end{cases}$$

That is, a constant current  $I_0$  is turned on abruptly at  $t = 0$ . Find the resulting electric and magnetic fields.

**Solution:** The wire is presumably electrically neutral, so the scalar potential is zero. Let the wire lie along the  $z$  axis (Fig. 10.4); the retarded vector potential at point  $P$  is

$$\mathbf{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{r} dz.$$

For  $t < s/c$ , the “news” has not yet reached  $P$ , and the potential is zero. For  $t > s/c$ , only the segment

$$|z| \leq \sqrt{(ct)^2 - s^2} \quad (10.25)$$

contributes (outside this range  $t_r$  is negative, so  $I(t_r) = 0$ ); thus

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s, t) &= \left( \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \right) 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \ln(\sqrt{s^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left( \frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Because the d'Alembertian involves  $t^2$  (as opposed to  $t$ ), the theory itself is **time-reversal invariant**, and does not distinguish “past” from “future.” Time asymmetry is introduced when we select the retarded potentials in preference to the advanced ones, reflecting the (not unreasonable!) belief that electromagnetic influences propagate forward, not backward, in time.

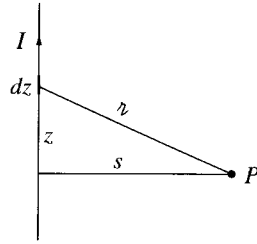


Figure 10.4

The electric field is

$$\mathbf{E}(s, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\mathbf{z}},$$

and the magnetic field is

$$\mathbf{B}(s, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Notice that as  $t \rightarrow \infty$  we recover the static case:  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{B} = (\mu_0 I_0 / 2\pi s) \hat{\boldsymbol{\phi}}$ .

! **Problem 10.8** Confirm that the retarded potentials satisfy the Lorentz gauge condition. [Hint: First show that

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{z} \right) = \frac{1}{z} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \frac{1}{z} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) - \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}}{z} \right),$$

where  $\nabla$  denotes derivatives with respect to  $\mathbf{r}$ , and  $\nabla'$  denotes derivatives with respect to  $\mathbf{r}'$ . Next, noting that  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - z/c)$  depends on  $\mathbf{r}'$  both explicitly and through  $z$ , whereas it depends on  $\mathbf{r}$  only through  $z$ , confirm that

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \cdot (\nabla z), \quad \nabla' \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{J}} \cdot (\nabla' z).$$

Use this to calculate the divergence of  $\mathbf{A}$  (Eq. 10.19).]

! **Problem 10.9**

(a) Suppose the wire in Ex. 10.2 carries a linearly increasing current

$$I(t) = kt,$$

for  $t > 0$ . Find the electric and magnetic fields generated.

(b) Do the same for the case of a sudden burst of current:

$$I(t) = q_0 \delta(t).$$

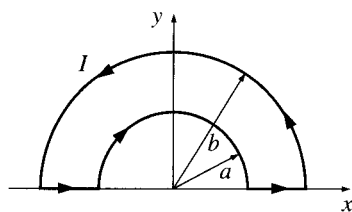


Figure 10.5

**Problem 10.10** A piece of wire bent into a loop, as shown in Fig. 10.5, carries a current that increases linearly with time:

$$I(t) = kt.$$

Calculate the retarded vector potential  $\mathbf{A}$  at the center. Find the electric field at the center. Why does this (neutral) wire produce an *electric* field? (Why can't you determine the *magnetic* field from this expression for  $\mathbf{A}$ ?)

### 10.2.2 Jefimenko's Equations

Given the retarded potentials

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{z} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{z} d\tau', \quad (10.26)$$

it is, in principle, a straightforward matter to determine the fields:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (10.27)$$

But the details are not entirely trivial because, as I mentioned earlier, the integrands depend on  $\mathbf{r}$  both explicitly, through  $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  in the denominator, and implicitly, through the retarded time  $t_r = t - z/c$  in the argument of the numerator.

I already calculated the gradient of  $V$  (Eq. 10.22); the time derivative of  $\mathbf{A}$  is easy:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\mathbf{J}}}{z} d\tau'. \quad (10.28)$$

Putting them together (and using  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ ):

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{z^2} \hat{\mathbf{z}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{cz} \hat{\mathbf{z}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 z} \right] d\tau'.} \quad (10.29)$$

This is the time-dependent generalization of Coulomb's law, to which it reduces in the static case (where the second and third terms drop out and the first term loses its dependence on  $t_r$ ).

As for  $\mathbf{B}$ , the curl of  $\mathbf{A}$  contains two terms:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{1}{z} (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \nabla \left( \frac{1}{z} \right) \right] d\tau'.$$

Now

$$(\nabla \times \mathbf{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z},$$

and

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = j_z \frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c} j_z \frac{\partial z}{\partial y},$$

so

$$(\nabla \times \mathbf{J})_x = -\frac{1}{c} \left( j_z \frac{\partial z}{\partial y} - j_y \frac{\partial z}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} [\mathbf{J} \times (\nabla z)]_x.$$

But  $\nabla z = \hat{\mathbf{z}}$  (Prob. 1.13), so

$$\nabla \times \mathbf{J} = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (10.30)$$

Meanwhile  $\nabla(1/z) = -\hat{\mathbf{z}}/z^2$  (again, Prob. 1.13), and hence

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{z^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{cz} \right] \times \hat{\mathbf{z}} d\tau'.} \quad (10.31)$$

This is the time-dependent generalization of the Biot-Savart law, to which it reduces in the static case.

Equations 10.29 and 10.31 are the (causal) solutions to Maxwell's equations. For some reason they do not seem to have been published until quite recently—the earliest explicit statement of which I am aware was by Oleg Jefimenko, in 1966.<sup>5</sup> In practice **Jefimenko's equations** are of limited utility, since it is typically easier to calculate the retarded potentials and differentiate them, rather than going directly to the fields. Nevertheless, they provide a satisfying sense of closure to the theory. They also help to clarify an observation I made in the previous section: To get to the retarded *potentials*, all you do is replace  $t$  by  $t_r$  in the electrostatic and magnetostatic formulas, but in the case of the *fields* not only is time replaced by retarded time, but completely new terms (involving derivatives of  $\rho$  and  $\mathbf{J}$ ) appear. And they provide surprisingly strong support for the quasistatic approximation (see Prob. 10.12).

<sup>5</sup>O. D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, Sect. 15.7 (New York: Appleton-Century-Crofts, 1996). Closely related expressions appear in W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Sect. 14.3 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962). See K. T. McDonald, *Am. J. Phys.* **65**, 1074 (1997) for illuminating commentary and references.

**Problem 10.11** Suppose  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  is constant in time, so (Prob. 7.55)  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)t$ . Show that

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r^2} \hat{\mathbf{z}} d\tau';$$

that is, Coulomb's law holds, with the charge density evaluated at the *non-retarded* time.

**Problem 10.12** Suppose the current density changes slowly enough that we can (to good approximation) ignore all higher derivatives in the Taylor expansion

$$\mathbf{J}(t_r) = \mathbf{J}(t) + (t_r - t)\dot{\mathbf{J}}(t) + \dots$$

(for clarity, I suppress the  $\mathbf{r}$ -dependence, which is not at issue). Show that a fortuitous cancellation in Eq. 10.31 yields

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} d\tau'.$$

That is: the Biot-Savart law holds, with  $\mathbf{J}$  evaluated at the *non-retarded* time. This means that the quasistatic approximation is actually much *better* than we had any right to expect: the *two* errors involved (neglecting retardation and dropping the second term in Eq. 10.31) *cancel* one another, to first order.

## 10.3 Point Charges

### 10.3.1 Liénard-Wiechert Potentials

My next project is to calculate the (retarded) potentials,  $V(\mathbf{r}, t)$  and  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , of a point charge  $q$  that is moving on a specified trajectory

$$\mathbf{w}(t) \equiv \text{position of } q \text{ at time } t. \quad (10.32)$$

The retarded time is determined implicitly by the equation

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r), \quad (10.33)$$

for the left side is the distance the “news” must travel, and  $(t - t_r)$  is the time it takes to make the trip (Fig. 10.6). I shall call  $\mathbf{w}(t_r)$  the **retarded position** of the charge;  $\mathbf{z}$  is the vector from the retarded position to the field point  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r). \quad (10.34)$$

It is important to note that at most *one* point on the trajectory is “in communication” with  $\mathbf{r}$  at any particular time  $t$ . For suppose there were *two* such points, with retarded times  $t_1$  and  $t_2$ :

$$z_1 = c(t - t_1) \quad \text{and} \quad z_2 = c(t - t_2).$$

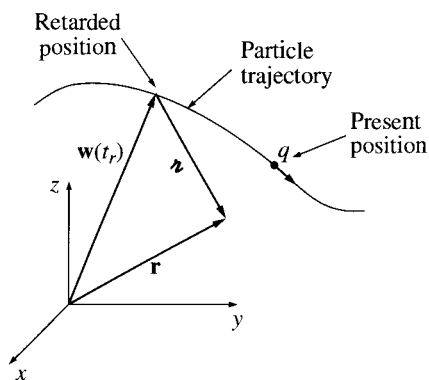


Figure 10.6

Then  $z_1 - z_2 = c(t_2 - t_1)$ , so the average velocity of the particle in the direction of  $\mathbf{r}$  would have to be  $c$ —and that’s not counting whatever velocity the charge might have in *other* directions. Since no charged particle can travel at the speed of light, it follows that only *one retarded point contributes to the potentials, at any given moment*.<sup>6</sup>

Now, a naïve reading of the formula

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{z} d\tau' \quad (10.35)$$

might suggest to you that the retarded potential of a point charge is simply

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z}$$

(the same as in the static case, only with the understanding that  $z$  is the distance to the *retarded* position of the charge). But this is wrong, for a very subtle reason: It is true that for a point source the denominator  $z$  comes outside the integral,<sup>7</sup> but what remains,

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau', \quad (10.36)$$

is *not* equal to the charge of the particle. To calculate the total charge of a configuration you must integrate  $\rho$  over the entire distribution at *one instant of time*, but here the retardation,  $t_r = t - z/c$ , obliges us to evaluate  $\rho$  at *different times* for different parts of the configuration. If the source is moving, this will give a distorted picture of the total charge. You might

<sup>6</sup>For the same reason, an observer at  $\mathbf{r}$  *sees* the particle in only one place at a time. By contrast, it is possible to *hear* an object in two places at once. Consider a bear who growls at you and then runs toward you at the speed of sound and growls again; you hear both growls at the same time, coming from two different locations, but there’s only one bear.

<sup>7</sup>There is, however, an implicit change in its functional dependence: *Before* the integration,  $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  is a function of  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r}'$ ; *after* the integration (which fixes  $\mathbf{r}' = \mathbf{w}(t_r)$ )  $z = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$  is (like  $t_r$ ) a function of  $\mathbf{r}$  and  $t$ .

think that this problem would disappear for *point* charges, but it doesn't. In Maxwell's electrodynamics, formulated as it is in terms of charge and current *densities*, a point charge must be regarded as the limit of an extended charge, when the size goes to zero. And for an extended particle, no matter how small, the retardation in Eq. 10.36 throws in a factor  $(1 - \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ , where  $\mathbf{v}$  is the velocity of the charge at the retarded time:

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau' = \frac{q}{1 - \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v}/c}. \quad (10.37)$$

**Proof:** This is a purely *geometrical* effect, and it may help to tell the story in a less abstract context. You will not have noticed it, for obvious reasons, but the fact is that a train coming towards you looks a little longer than it really is, because the light you receive from the caboose left earlier than the light you receive simultaneously from the engine, and at that earlier time the train was farther away (Fig. 10.7). In the interval it takes light from the caboose to travel the extra distance  $L'$ , the train itself moves a distance  $L' - L$ :

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v}, \quad \text{or} \quad L' = \frac{L}{1 - v/c}.$$

So approaching trains appear *longer*, by a factor  $(1 - v/c)^{-1}$ . By contrast, a train going *away* from you looks *shorter*,<sup>8</sup> by a factor  $(1 + v/c)^{-1}$ . In general, if the train's velocity makes an angle  $\theta$  with your line of sight,<sup>9</sup> the extra distance light from the caboose must cover is  $L' \cos \theta$  (Fig. 10.8). In the time  $L' \cos \theta/c$ , then, the train moves a distance  $(L' - L)$ :

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v}, \quad \text{or} \quad L' = \frac{L}{1 - v \cos \theta/c}.$$

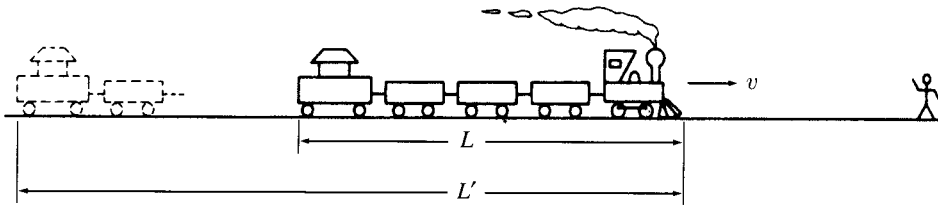


Figure 10.7

<sup>8</sup>Please note that this has nothing whatever to do with special relativity or Lorentz contraction— $L$  is the length of the *moving* train, and its *rest* length is not at issue. The argument is somewhat reminiscent of the Doppler effect.

<sup>9</sup>I assume the train is far enough away or (more to the point) *short* enough so that rays from the caboose and engine can be considered parallel.

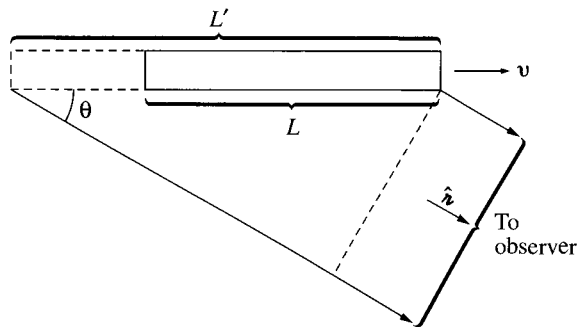


Figure 10.8

Notice that this effect does *not* distort the dimensions perpendicular to the motion (the height and width of the train). Never mind that the light from the far side is delayed in reaching you (relative to light from the near side)—since there's no *motion* in that direction, they'll still look the same distance apart. The apparent *volume*  $\tau'$  of the train, then, is related to the *actual* volume  $\tau$  by

$$\tau' = \frac{\tau}{1 - \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v}/c}, \quad (10.38)$$

where  $\hat{\mathbf{z}}$  is a unit vector from the train to the observer.

In case the connection between moving trains and retarded potentials escapes you, the point is this: Whenever you do an integral of the type 10.37, in which the integrand is evaluated at the retarded time, the effective volume is modified by the factor in Eq. 10.38, just as the apparent volume of the train was—and for the same reason. Because this correction factor makes no reference to the size of the particle, it is every bit as significant for a point charge as for an extended charge. qed

It follows, then, that

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}, \quad (10.39)$$

where  $\mathbf{v}$  is the velocity of the charge at the retarded time, and  $\mathbf{r}$  is the vector from the retarded position to the field point  $\mathbf{r}$ . Meanwhile, since the current density of a rigid object is  $\rho\mathbf{v}$  (Eq. 5.26), we also have

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r) \mathbf{v}(t_r)}{r} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{r} \int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau',$$

or

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t). \quad (10.40)$$

Equations 10.39 and 10.40 are the famous **Liénard-Wiechert potentials** for a moving point charge.<sup>10</sup>

### Example 10.3

Find the potentials of a point charge moving with constant velocity.

**Solution:** For convenience, let's say the particle passes through the origin at time  $t = 0$ , so that

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t.$$

We first compute the retarded time, using Eq. 10.33:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r| = c(t - t_r),$$

or, squaring:

$$r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2).$$

Solving for  $t_r$  by the quadratic formula, I find that

$$t_r = \frac{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c^2 - v^2}. \quad (10.41)$$

To fix the sign, consider the limit  $v = 0$ :

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}.$$

In this case the charge is at rest at the origin, and the retarded time should be  $(t - r/c)$ ; evidently we want the *minus* sign.

Now, from Eqs. 10.33 and 10.34,

$$r = c(t - t_r), \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r}{c(t - t_r)},$$

so

$$\begin{aligned} r(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}/c) &= c(t - t_r) \left[ 1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r)}{c(t - t_r)} \right] = c(t - t_r) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} + \frac{v^2}{c} t_r \\ &= \frac{1}{c} [(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - (c^2 - v^2)t_r] \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)} \end{aligned}$$

<sup>10</sup>There are many ways to obtain the Liénard-Wiechert potentials. I have tried to emphasize the *geometrical* origin of the factor  $(1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ ; for illuminating commentary see W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2d ed., pp. 342-3 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962). A more rigorous derivation is provided by J. R. Reitz, F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3d ed., Sect. 21.1 (Reading, MA: Addison-Wesley, 1979), or M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.3 (Orlando, FL: Saunders, 1995).

(I used Eq. 10.41, with the minus sign, in the last step). Therefore,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}, \quad (10.42)$$

and (Eq. 10.40)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}. \quad (10.43)$$

**Problem 10.13** A particle of charge  $q$  moves in a circle of radius  $a$  at constant angular velocity  $\omega$ . (Assume that the circle lies in the  $xy$  plane, centered at the origin, and at time  $t = 0$  the charge is at  $(a, 0)$ , on the positive  $x$  axis.) Find the Liénard-Wiechert potentials for points on the  $z$  axis.

- **Problem 10.14** Show that the scalar potential of a point charge moving with constant velocity (Eq. 10.42) can be written equivalently as

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2}}, \quad (10.44)$$

where  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}t$  is the vector from the *present (!)* position of the particle to the field point  $\mathbf{r}$ , and  $\theta$  is the angle between  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{v}$  (Fig. 10.9). Evidently for nonrelativistic velocities ( $v^2 \ll c^2$ ),

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

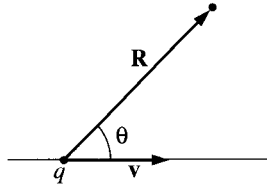


Figure 10.9

**Problem 10.15** I showed that *at most one* point on the particle trajectory communicates with  $\mathbf{r}$  at any given time. In some cases there may be *no* such point (an observer at  $\mathbf{r}$  would not see the particle—in the colorful language of General Relativity it is “beyond the **horizon**”). As an example, consider a particle in **hyperbolic motion** along the  $x$  axis:

$$\mathbf{w}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \hat{\mathbf{x}} \quad (-\infty < t < \infty). \quad (10.45)$$

(In Special Relativity this is the trajectory of a particle subject to a constant force  $F = mc^2/b$ .) Sketch the graph of  $w$  versus  $t$ . At four or five representative points on the curve, draw the trajectory of a light signal emitted by the particle at that point—both in the plus  $x$  direction and in the minus  $x$  direction. What region on your graph corresponds to points and times  $(x, t)$  from which the particle cannot be seen? At what time does someone at point  $x$  first see the particle? (Prior to this the potential at  $x$  is evidently zero.) Is it possible for a particle, once seen, to *disappear* from view?

- ! **Problem 10.16** Determine the Liénard-Wiechert potentials for a charge in hyperbolic motion (Eq. 10.45). Assume the point  $\mathbf{r}$  is on the  $x$  axis and to the right of the charge.

### 10.3.2 The Fields of a Moving Point Charge

We are now in a position to calculate the electric and magnetic fields of a point charge in arbitrary motion, using the Liénard-Wiechert potentials:<sup>11</sup>

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t), \quad (10.46)$$

and the equations for  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

The differentiation is tricky, however, because

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r) \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}}(t_r) \quad (10.47)$$

are both evaluated at the retarded time, and  $t_r$ —defined implicitly by the equation

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r) \quad (10.48)$$

—is *itself* a function of  $\mathbf{r}$  and  $t$ .<sup>12</sup> So hang on: the next two pages are rough going ... but the answer is worth the effort.

Let's begin with the gradient of  $V$ :

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2} \nabla (rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}). \quad (10.49)$$

<sup>11</sup>You can get the fields directly from Jefimenko's equations, but it's not easy. See, for example, M. A. Heald and J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation*, 3d ed., Sect. 8.4 (Orlando, FL: Saunders, 1995).

<sup>12</sup>The following calculation is done by the most direct, "brute force" method. For a more clever and efficient approach see J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3d ed., Sect. 14.1 (New York: John Wiley, 1999).

Since  $z = c(t - t_r)$ ,

$$\nabla z = -c \nabla t_r. \quad (10.50)$$

As for the second term, product rule 4 gives

$$\nabla(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{z} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{z} + \mathbf{z} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{z}). \quad (10.51)$$

Evaluating these terms one at a time:

$$\begin{aligned} (\mathbf{z} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \left( z_x \frac{\partial}{\partial x} + z_y \frac{\partial}{\partial y} + z_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}(t_r) \\ &= z_x \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + z_y \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + z_z \frac{d\mathbf{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{z} \cdot \nabla t_r), \end{aligned} \quad (10.52)$$

where  $\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}$  is the *acceleration* of the particle at the retarded time. Now

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{z} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \quad (10.53)$$

and

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r} &= \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (10.54)$$

while

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r)$$

(same reasoning as Eq. 10.52). Moving on to the third term in Eq. 10.51,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \left( \frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\mathbf{a} \times \nabla t_r. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Finally,

$$\nabla \times \mathbf{z} = \nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{w}, \quad (10.56)$$

but  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ , while, by the same argument as Eq. 10.55,

$$\nabla \times \mathbf{w} = -\mathbf{v} \times \nabla t_r. \quad (10.57)$$

Putting all this back into Eq. 10.51, and using the “BAC-CAB” rule to reduce the triple cross products,

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r) - \mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r) \\ &= \mathbf{v} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - v^2) \nabla t_r.\end{aligned}\quad (10.58)$$

Collecting Eqs. 10.50 and 10.58 together, we have

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2} \left[ \mathbf{v} + (c^2 - v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \nabla t_r \right]. \quad (10.59)$$

To complete the calculation, we need to know  $\nabla t_r$ . This can be found by taking the gradient of the defining equation (10.48)—which we have already done in Eq. 10.50—and expanding out  $\nabla r$ :

$$\begin{aligned}-c \nabla t_r &= \nabla r = \nabla \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{r} [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{r})].\end{aligned}\quad (10.60)$$

But

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \nabla t_r)$$

(same idea as Eq. 10.53), while (from Eq. 10.56 and 10.57)

$$\nabla \times \mathbf{r} = (\mathbf{v} \times \nabla t_r).$$

Thus

$$-c \nabla t_r = \frac{1}{r} [\mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \nabla t_r) + \mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)] = \frac{1}{r} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \nabla t_r],$$

and hence

$$\nabla t_r = \frac{-\mathbf{r}}{rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}. \quad (10.61)$$

Incorporating this result into Eq. 10.59, I conclude that

$$\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^3} \left[ (rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{r} \right]. \quad (10.62)$$

A similar calculation, which I shall leave for you (Prob. 10.17), yields

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^3} \left[ (rc - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})(-\mathbf{v} + r\mathbf{a}/c) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{c}(c^2 - v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} \right].\end{aligned}\quad (10.63)$$

Combining these results, and introducing the vector

$$\mathbf{u} \equiv c \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{v}, \quad (10.64)$$

I find

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]. \quad (10.65)$$

Meanwhile,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (V\mathbf{v}) = \frac{1}{c^2} [V(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla V)].$$

We have already calculated  $\nabla \times \mathbf{v}$  (Eq. 10.55) and  $\nabla V$  (Eq. 10.62). Putting these together.

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})^3} \mathbf{z} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{v} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}].$$

The quantity in brackets is strikingly similar to the one in Eq. 10.65, which can be written, using the BAC-CAB rule, as  $[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}]$ ; the main difference is that we have  $\mathbf{v}$ 's instead of  $\mathbf{u}$ 's in the first two terms. In fact, since it's all crossed into  $\mathbf{z}$  anyway, we can with impunity *change* these  $\mathbf{v}$ 's into  $-\mathbf{u}$ 's; the extra term proportional to  $\hat{\mathbf{z}}$  disappears in the cross product. It follows that

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (10.66)$$

Evidently *the magnetic field of a point charge is always perpendicular to the electric field, and to the vector from the retarded point.*

The first term in  $\mathbf{E}$  (the one involving  $(c^2 - v^2)\mathbf{u}$ ) falls off as the inverse *square* of the distance from the particle. If the velocity and acceleration are both zero, this term alone survives and reduces to the old electrostatic result

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

For this reason, the first term in  $\mathbf{E}$  is sometimes called the **generalized Coulomb field**. (Because it does not depend on the acceleration, it is also known as the **velocity field**.) The second term (the one involving  $\mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})$ ) falls off as the inverse *first* power of  $z$  and is therefore dominant at large distances. As we shall see in Chapter 11, it is this term that is responsible for electromagnetic radiation; accordingly, it is called the **radiation field**—or, since it is proportional to  $a$ , the **acceleration field**. The same terminology applies to the magnetic field.

Back in Chapter 2, I commented that if we could only write down the formula for the force one charge exerts on another, we would be done with electrodynamics, in principle. That, together with the superposition principle, would tell us the force exerted on a test

charge  $Q$  by any configuration whatsoever. Well . . . here we are: Eqs. 10.65 and 10.66 give us the fields, and the Lorentz force law determines the resulting force:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})^3} \left\{ [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{V}}{c} \times [\hat{\mathbf{z}} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]] \right\}, \end{aligned} \quad (10.67)$$

where  $\mathbf{V}$  is the velocity of  $Q$ , and  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , and  $\mathbf{a}$  are all evaluated at the retarded time. The entire theory of classical electrodynamics is contained in that equation . . . but you see why I preferred to start out with Coulomb's law.

#### Example 10.4

Calculate the electric and magnetic fields of a point charge moving with constant velocity.

**Solution:** Putting  $\mathbf{a} = 0$  in Eq. 10.65,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)\mathbf{z}}{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})^3} \mathbf{u}.$$

In this case, using  $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$ ,

$$\mathbf{z}\mathbf{u} = c\mathbf{z} - \mathbf{z}\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r) - c(t - t_r)\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t).$$

In Ex. 10.3 we found that

$$\mathbf{z}c - \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = \sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}.$$

In Prob. 10.14, you showed that this radical could be written as

$$Rc\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2},$$

where

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{v}t$$

is the vector from the *present* location of the particle to  $\mathbf{r}$ , and  $\theta$  is the angle between  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{v}$  (Fig. 10.9). Thus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (10.68)$$

Notice that  $\mathbf{E}$  points along the line from the *present* position of the particle. This is an *extraordinary* coincidence, since the “message” came from the *retarded* position. Because of the  $\sin^2 \theta$  in the denominator, the field of a fast-moving charge is flattened out like a pancake in the direction perpendicular to the motion (Fig. 10.10). In the forward and backward directions  $\mathbf{E}$  is *reduced* by a factor  $(1 - v^2/c^2)$  relative to the field of a charge at rest; in the perpendicular direction it is *enhanced* by a factor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

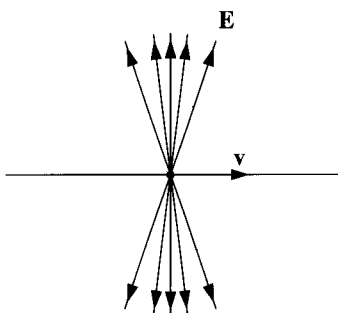


Figure 10.10

As for  $\mathbf{B}$ , we have

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r}{r} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + (t - t_r)\mathbf{v}}{r} = \frac{\mathbf{R}}{r} + \frac{\mathbf{v}}{c},$$

and therefore

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}). \quad (10.69)$$

Lines of  $\mathbf{B}$  circle around the charge, as shown in Fig. 10.11.

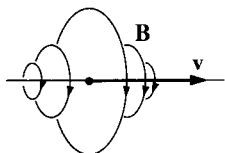


Figure 10.11

The fields of a point charge moving at constant velocity (Eqs. 10.68 and 10.69) were first obtained by Oliver Heaviside in 1888.<sup>13</sup> When  $v^2 \ll c^2$  they reduce to

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^2} (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}). \quad (10.70)$$

The first is essentially Coulomb's law, and the latter is the "Biot-Savart law for a point charge" I warned you about in Chapter 5 (Eq. 5.40).

---

<sup>13</sup>For history and references, see O. J. Jefimenko, *Am. J. Phys.* **62**, 79 (1994).

**Problem 10.17** Derive Eq. 10.63. First show that

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{rc}{r \cdot \mathbf{u}}. \quad (10.71)$$

**Problem 10.18** Suppose a point charge  $q$  is constrained to move along the  $x$  axis. Show that the fields at points on the axis to the *right* of the charge are given by

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{c+v}{c-v} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = 0.$$

What are the fields on the axis to the *left* of the charge?

**Problem 10.19**

(a) Use Eq. 10.68 to calculate the electric field a distance  $d$  from an infinite straight wire carrying a uniform line charge  $\lambda$ , moving at a constant speed  $v$  down the wire.

(b) Use Eq. 10.69 to find the *magnetic* field of this wire.

**Problem 10.20** For the configuration in Prob. 10.13, find the electric and magnetic fields at the center. From your formula for  $\mathbf{B}$ , determine the magnetic field at the center of a circular loop carrying a steady current  $I$ , and compare your answer with the result of Ex. 5.6

### More Problems on Chapter 10

**Problem 10.21** Suppose you take a plastic ring of radius  $a$  and glue charge on it, so that the line charge density is  $\lambda_0 |\sin(\theta/2)|$ . Then you spin the loop about its axis at an angular velocity  $\omega$ . Find the (exact) scalar and vector potentials at the center of the ring. [Answer:  $\mathbf{A} = (\mu_0 \lambda_0 \omega a / 3\pi) \{ \sin[\omega(t - a/c)] \hat{\mathbf{x}} - \cos[\omega(t - a/c)] \hat{\mathbf{y}} \}$ ]

**Problem 10.22** Figure 2.35 summarizes the laws of *electrostatics* in a “triangle diagram” relating the *source* ( $\rho$ ), the *field* ( $\mathbf{E}$ ), and the *potential* ( $V$ ). Figure 5.48 does the same for *magnetostatics*, where the source is  $\mathbf{J}$ , the field is  $\mathbf{B}$ , and the potential is  $\mathbf{A}$ . Construct the analogous diagram for *electrodynamics*, with sources  $\rho$  and  $\mathbf{J}$  (constrained by the continuity equation), fields  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ , and potentials  $V$  and  $\mathbf{A}$  (constrained by the Lorentz gauge condition). Do not include formulas for  $V$  and  $\mathbf{A}$  in terms of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{B}$ .

**Problem 10.23** Check that the potentials of a point charge moving at constant velocity (Eqs. 10.42 and 10.43) satisfy the Lorentz gauge condition (Eq. 10.12).

**Problem 10.24** One particle, of charge  $q_1$ , is held at rest at the origin. Another particle, of charge  $q_2$ , approaches along the  $x$  axis, in hyperbolic motion:

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2};$$

it reaches the closest point,  $b$ , at time  $t = 0$ , and then returns out to infinity.

- (a) What is the force  $F_2$  on  $q_2$  (due to  $q_1$ ) at time  $t$ ?
- (b) What total impulse ( $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_2 dt$ ) is delivered by  $q_2$  to  $q_1$ ?
- (c) What is the force  $F_1$  on  $q_1$  (due to  $q_2$ ) at time  $t$ ?
- (d) What total impulse ( $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1 dt$ ) is delivered to  $q_1$  by  $q_2$ ? [Hint: It might help to review Prob. 10.15 before doing this integral. Answer:  $I_2 = -I_1 = q_1 q_2 / 4\epsilon_0 bc$ ]

**Problem 10.25** A particle of charge  $q$  is traveling at constant speed  $v$  along the  $x$  axis. Calculate the total power passing through the plane  $x = a$ , at the moment the particle itself is at the origin. [Answer:  $q^2 v / 32\pi\epsilon_0 a^2$ ]

**Problem 10.26**<sup>14</sup> A particle of charge  $q_1$  is at rest at the origin. A second particle, of charge  $q_2$ , moves along the  $z$  axis at constant velocity  $v$ .

- (a) Find the force  $\mathbf{F}_{12}(t)$  of  $q_1$  on  $q_2$ , at time  $t$  (when  $q_2$  is at  $z = vt$ ).
- (b) Find the force  $\mathbf{F}_{21}(t)$  of  $q_2$  on  $q_1$ , at time  $t$ . Does Newton's third law hold, in this case?
- ! (c) Calculate the linear momentum  $\mathbf{p}(t)$  in the electromagnetic fields, at time  $t$ . (Don't bother with any terms that are constant in time, since you won't need them in part (d)). [Answer:  $(\mu_0 q_1 q_2 / 4\pi t) \hat{\mathbf{z}}$ ]
- (d) Show that the sum of the forces is equal to minus the rate of change of the momentum in the fields, and interpret this result physically.
- 

<sup>14</sup>See J. J. G. Scanio, *Am. J. Phys.* **43**, 258 (1975).

## Appendix A

# Vector Calculus in Curvilinear Coordinates

### A.1 Introduction

In this Appendix I sketch proofs of the three fundamental theorems of vector calculus. My aim is to convey the *essence* of the argument, not to track down every epsilon and delta. A much more elegant, modern, and unified—but necessarily also much longer—treatment will be found in M. Spivak’s book, *Calculus on Manifolds* (New York: Benjamin, 1965).

For the sake of generality, I shall use arbitrary (orthogonal) curvilinear coordinates  $(u, v, w)$ , developing formulas for the gradient, divergence, curl, and Laplacian in any such system. You can then specialize them to Cartesian, spherical, or cylindrical coordinates, or any other system you might wish to use. If the generality bothers you on a first reading, and you’d rather stick to Cartesian coordinates, just read  $(x, y, z)$  wherever you see  $(u, v, w)$ , and make the associated simplifications as you go along.

### A.2 Notation

We identify a point in space by its three *coordinates*,  $u$ ,  $v$ , and  $w$ , (in the Cartesian system,  $(x, y, z)$ ; in the spherical system,  $(r, \theta, \phi)$ ; in the cylindrical system,  $(s, \phi, z)$ ). I shall assume the system is *orthogonal*, in the sense that the three *unit vectors*,  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{v}}$ , and  $\hat{\mathbf{w}}$ , pointing in the direction of the increase of the corresponding coordinates, are mutually perpendicular. Note that the unit vectors are *functions of position*, since their *directions* (except in the Cartesian case) vary from point to point. Any vector can be expressed in terms of  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\hat{\mathbf{v}}$ , and  $\hat{\mathbf{w}}$ —in particular, the infinitesimal displacement vector from  $(u, v, w)$  to  $(u + du, v + dv, w + dw)$  can be written

$$d\mathbf{l} = f du \hat{\mathbf{u}} + g dv \hat{\mathbf{v}} + h dw \hat{\mathbf{w}}, \quad (\text{A.1})$$

where  $f$ ,  $g$ , and  $h$  are functions of position characteristic of the particular coordinate system (in Cartesian coordinates  $f = g = h = 1$ ; in spherical coordinates  $f = 1$ ,  $g = r$ ,  $h = r \sin \theta$ ; and in cylindrical coordinates  $f = h = 1$ ,  $g = s$ ). As you'll soon see, these three functions tell you everything you need to know about a coordinate system.

### A.3 Gradient

If you move from point  $(u, v, w)$  to point  $(u + du, v + dv, w + dw)$ , a scalar function  $t(u, v, w)$  changes by an amount

$$dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv + \frac{\partial t}{\partial w} dw; \quad (\text{A.2})$$

this is a standard theorem on partial differentiation.<sup>1</sup> We can write it as a dot product,

$$dt = \nabla t \cdot d\mathbf{l} = (\nabla t)_u f du + (\nabla t)_v g dv + (\nabla t)_w h dw, \quad (\text{A.3})$$

provided we define

$$(\nabla t)_u \equiv \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad (\nabla t)_v \equiv \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v}, \quad (\nabla t)_w \equiv \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w}.$$

The **gradient** of  $t$ , then, is

$$\nabla t \equiv \frac{1}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}. \quad (\text{A.4})$$

If you now pick the appropriate expressions for  $f$ ,  $g$ , and  $h$  from Table A.1, you can easily generate the formulas for  $\nabla t$  in Cartesian, spherical, and cylindrical coordinates, as they appear in the front cover of the book.

System	$u$	$v$	$w$	$f$	$g$	$h$
Cartesian	$x$	$y$	$z$	1	1	1
Spherical	$r$	$\theta$	$\phi$	1	$r$	$r \sin \theta$
Cylindrical	$s$	$\phi$	$z$	1	$s$	1

Table A.1

From Eq. A.3 it follows that the *total* change in  $t$ , as you go from point **a** to point **b** (Fig. A.1), is

$$t(\mathbf{b}) - t(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} dt = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla t) \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{A.5})$$

which is the **fundamental theorem for gradients** (not much to prove, really, in this case). Notice that the integral is independent of the path taken from **a** to **b**.

<sup>1</sup>M. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed., Chapter 4, Sect. 3 (New York: John Wiley, 1983).

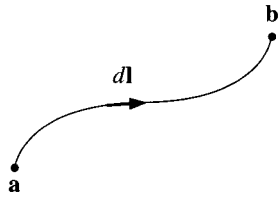


Figure A.1

## A.4 Divergence

Suppose that we have a *vector* function,

$$\mathbf{A}(u, v, w) = A_u \hat{\mathbf{u}} + A_v \hat{\mathbf{v}} + A_w \hat{\mathbf{w}},$$

and we wish to evaluate the integral  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$  over the surface of the infinitesimal volume generated by starting at the point  $(u, v, w)$  and increasing each of the coordinates in succession by an infinitesimal amount (Fig. A.2). Because the coordinates are orthogonal, this is (at least, in the infinitesimal limit) a rectangular solid, whose sides have lengths  $dl_u = f du$ ,  $dl_v = g dv$ , and  $dl_w = h dw$ , and whose volume is therefore

$$d\tau = dl_u dl_v dl_w = (fgh) du dv dw. \quad (\text{A.6})$$

(The sides are *not* just  $du, dv, dw$ —after all,  $v$  might be an *angle*, in which case  $dv$  doesn't even have the *dimensions* of length. The correct expressions follow from Eq. A.1.)

For the *front* surface,

$$d\mathbf{a} = -(gh) dv dw \hat{\mathbf{u}},$$

so that

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = -(ghA_u) dv dw.$$

The *back* surface is identical (except for the sign), *only this time the quantity  $ghA_u$  is to be evaluated at  $(u + du)$ , instead of  $u$* . Since for any (differentiable) function  $F(u)$ ,

$$F(u + du) - F(u) = \frac{dF}{du} du,$$

(in the limit), the front and back together amount to a contribution

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) \right] du dv dw = \frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) d\tau.$$

By the same token, the right and left sides yield

$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) d\tau,$$

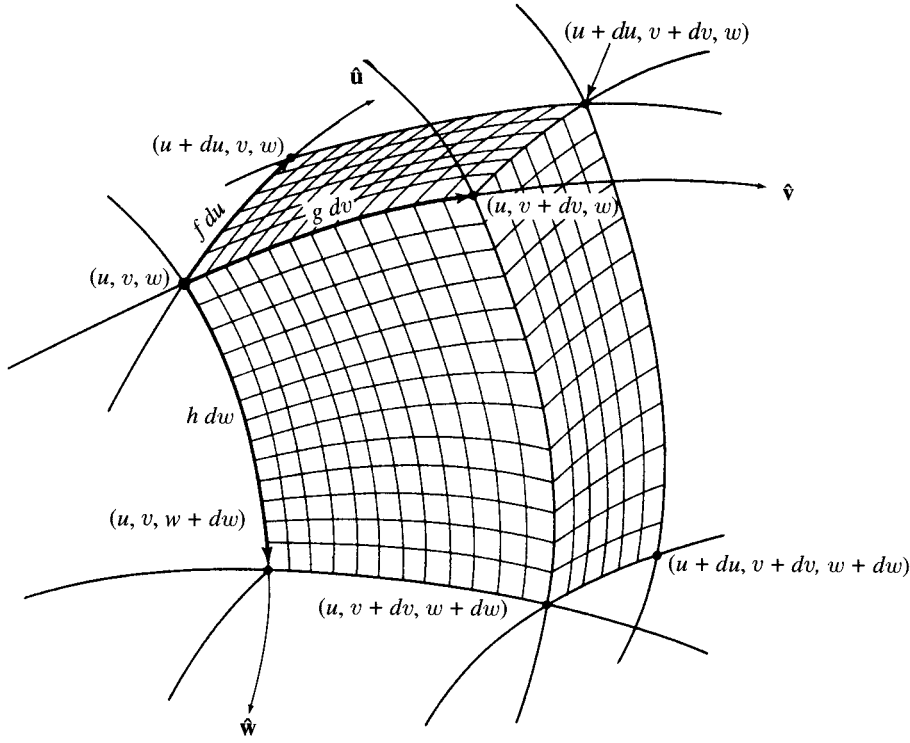


Figure A.2

and the top and bottom give

$$\frac{1}{fgh} \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) d\tau.$$

All told, then,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{fgh} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right] d\tau. \quad (\text{A.7})$$

The coefficient of  $d\tau$  serves to define the **divergence** of  $\mathbf{A}$  in curvilinear coordinates:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{1}{fgh} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (ghA_u) + \frac{\partial}{\partial v} (fhA_v) + \frac{\partial}{\partial w} (fgA_w) \right]}, \quad (\text{A.8})$$

and Eq. A.7 becomes

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau. \quad (\text{A.9})$$

Using Table A.1, you can now derive the formulas for the divergence in Cartesian, spherical, and cylindrical coordinates, which appear in the front cover of the book.

As it stands, Eq. A.9 does not prove the divergence theorem, for it pertains only to *infinitesimal* volumes, and rather special infinitesimal volumes at that. Of course, a finite volume can be broken up into infinitesimal pieces, and Eq. A.9 can be applied to each one. The trouble is, when you then add up all the bits, the left-hand side is not just an integral over the *outer* surface, but over all those tiny *internal* surfaces as well. Luckily, however, these contributions cancel in pairs, for each internal surface occurs as the boundary of *two* adjacent infinitesimal volumes, and since  $d\mathbf{a}$  always points *outward*,  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$  has the opposite sign for the two members of each pair (Fig. A.3). Only those surfaces that bound a *single* chunk—which is to say, only those at the outer boundary—survive when everything is added up. For *finite* regions, then,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau, \quad (\text{A.10})$$

and you need only integrate over the *external* surface.<sup>2</sup> This establishes the **divergence theorem**.

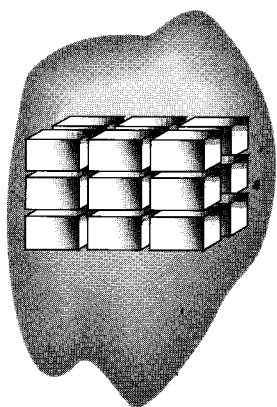


Figure A.3

<sup>2</sup>What about regions that cannot be fit perfectly by rectangular solids no matter *how* tiny they are—such as planes cut at an angle to the coordinate lines? It's not hard to dispose of this case; try thinking it out for yourself, or look at H. M. Schey's *Div, Grad, Curl and All That* (New York: W. W. Norton, 1973), starting with Prob. II-15.

## A.5 Curl

To obtain the curl in curvilinear coordinates, we calculate the line integral,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

around the infinitesimal loop generated by starting at  $(u, v, w)$  and successively increasing  $u$  and  $v$  by infinitesimal amounts, holding  $w$  constant (Fig. A.4). The surface is a rectangle (at least, in the infinitesimal limit), of length  $dl_u = f du$ , width  $dl_v = g dv$ , and area

$$d\mathbf{a} = (fg) du dv \hat{\mathbf{w}}. \quad (\text{A.11})$$

Assuming the coordinate system is right-handed,  $\hat{\mathbf{w}}$  points out of the page in Fig. A.4. Having chosen this as the positive direction for  $d\mathbf{a}$ , we are obliged by the right-hand rule to run the line integral counterclockwise, as shown.

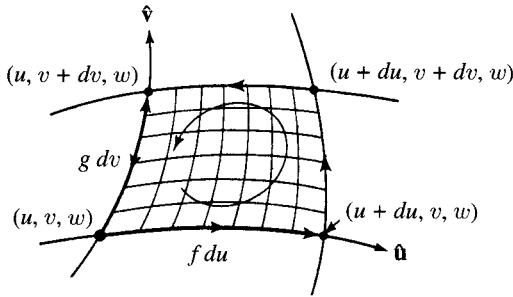


Figure A.4

Along the bottom segment,

$$d\mathbf{l} = f du \hat{\mathbf{u}},$$

so

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (f A_u) du.$$

Along the top leg, the sign is reversed, and  $f A_u$  is evaluated at  $(v + dv)$  rather than  $v$ . Taken together, these two edges give

$$\left[ -(f A_u)|_{v+dv} + (f A_u)|_v \right] du = - \left[ \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] du dv.$$

Similarly, the right and left sides yield

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} (g A_v) \right] du dv,$$

so the total is

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \left[ \frac{\partial}{\partial u} (g A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] du dv \\ &= \frac{1}{fg} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (g A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] \hat{\mathbf{w}} \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

The coefficient of  $d\mathbf{a}$  on the right serves to define the  $w$ -component of the **curl**. Constructing the  $u$  and  $v$  components in the same way, we have

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} \equiv & \frac{1}{gh} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (h A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (g A_v) \right] \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{fh} \left[ \frac{\partial}{\partial w} (f A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h A_w) \right] \hat{\mathbf{v}} \\ & + \frac{1}{fg} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (g A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (f A_u) \right] \hat{\mathbf{w}}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

and Eq. A.11 generalizes to

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (\text{A.14})$$

Using Table A.1, you can now derive the formulas for the curl in Cartesian, spherical, and cylindrical coordinates.

Equation A.14 does not by itself prove Stokes' theorem, however, because at this point it pertains only to very special infinitesimal surfaces. Again, we can chop any *finite* surface into infinitesimal pieces and apply Eq. A.14 to each one (Fig. A.5). When we add them up, though, we obtain (on the left) not only a line integral around the outer boundary, but a lot of tiny line integrals around the internal loops as well. Fortunately, as before, the internal

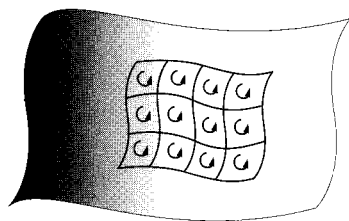


Figure A.5

contributions cancel in pairs, because every internal line is the edge of *two* adjacent loops running in opposite directions. Consequently, Eq. A.14 can be extended to finite surfaces,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (\text{A.15})$$

and the line integral is to be taken over the external boundary only.<sup>3</sup> This establishes **Stokes' theorem**.

## .6 Laplacian

Since the **Laplacian** of a scalar is by definition the divergence of the gradient, we can read off from Eqs. A.4 and A.8 the general formula

$$\nabla^2 t \equiv \frac{1}{fgh} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{gh}{f} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{fh}{g} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{fg}{h} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right]. \quad (\text{A.16})$$

Once again, you are invited to use Table A.1 to derive the Laplacian in Cartesian, spherical, and cylindrical coordinates, and thus to confirm the formulas inside the front cover.

---

<sup>3</sup>What about surfaces that cannot be fit perfectly by tiny rectangles, no matter how small they are (such as triangles) or surfaces that do not correspond to holding one coordinate fixed? If such cases trouble you, and you cannot resolve them for yourself, look at H. M. Schey's *Div, Grad, Curl, and All That*, Prob. III-2 (New York: W. W. Norton, 1973).

## Appendix B

# The Helmholtz Theorem

Suppose we are told that the divergence of a vector function  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  is a specified scalar function  $D(\mathbf{r})$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D, \quad (\text{B.1})$$

and the curl of  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  is a specified vector function  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}. \quad (\text{B.2})$$

For consistency,  $\mathbf{C}$  must be divergenceless,

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = 0, \quad (\text{B.3})$$

because the divergence of a curl is always zero. *Question:* can we, on the basis of this information, determine the function  $\mathbf{F}$ ? If  $D(\mathbf{r})$  and  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  go to zero sufficiently rapidly at infinity, the answer is *yes*, as I will show by explicit construction.

I claim that

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{W}, \quad (\text{B.4})$$

where

$$U(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{z} d\tau', \quad (\text{B.5})$$

and

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{z} d\tau'; \quad (\text{B.6})$$

the integrals are over all of space, and, as always,  $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . For if  $\mathbf{F}$  is given by Eq. B.4, then its divergence (using Eq. 1.102) is

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla^2 U = -\frac{1}{4\pi} \int D \nabla^2 \left( \frac{1}{z} \right) d\tau' = \int D(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = D(\mathbf{r}).$$

(Remember that the divergence of a curl is zero, so the  $\mathbf{W}$  term drops out, and note that the differentiation is with respect to  $\mathbf{r}$ , which is contained in  $z$ .)

So the divergence is right; how about the curl?

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) = -\nabla^2 \mathbf{W} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}). \quad (\text{B.7})$$

(Since the curl of a gradient is zero, the  $U$  term drops out.) Now

$$-\nabla^2 \mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi} \int \mathbf{C} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' = \int \mathbf{C}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{C}(\mathbf{r}),$$

which is perfect—I'll be done if I can just persuade you that the *second* term on the right side of Eq. B.7 vanishes. Using integration by parts (Eq. 1.59), and noting that derivatives of  $r$  with respect to *primed* coordinates differ by a sign from those with respect to *unprimed* coordinates, we have

$$\begin{aligned} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{W} &= \int \mathbf{C} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' = - \int \mathbf{C} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \int \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{C} d\tau' - \oint \frac{1}{r} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

But the divergence of  $\mathbf{C}$  is zero, by assumption (Eq. B.3), and the surface integral (way out at infinity) will vanish, as long as  $\mathbf{C}$  goes to zero sufficiently rapidly.

Of course, that proof tacitly assumes that the integrals in Eqs. B.5 and B.6 *converge*—otherwise  $U$  and  $\mathbf{W}$  don't exist at all. At the large  $r'$  limit, where  $r \approx r'$ , the integrals have the form

$$\int_{r'}^{\infty} \frac{X(r')}{r'} r'^2 dr' = \int_{r'}^{\infty} r' X(r') dr'. \quad (\text{B.9})$$

(Here  $X$  stands for  $D$  or  $\mathbf{C}$ , as the case may be). Obviously,  $X(r')$  must go to zero at large  $r'$ —but that's not enough: if  $X \sim 1/r'$ , the integrand is constant, so the integral blows up, and even if  $X \sim 1/r'^2$ , the integral is a logarithm, which is still no good at  $r' \rightarrow \infty$ . Evidently the divergence and curl of  $\mathbf{F}$  must go to zero *more rapidly than*  $1/r^2$  for the proof to hold. (Incidentally, this is *more* than enough to ensure that the surface integral in Eq. B.8 vanishes.)

Now, assuming these conditions on  $D(\mathbf{r})$  and  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  are met, is the solution in Eq. B.4 *unique*? The answer is clearly *no*, for we can add to  $\mathbf{F}$  any vector function whose divergence and curl both vanish, and the result still has divergence  $D$  and curl  $\mathbf{C}$ . However, it so happens that there is *no* function that has zero divergence and zero curl everywhere *and* goes to zero at infinity (see Sect. 3.1.5). So if we include a requirement that  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  goes to zero as  $r \rightarrow \infty$ , then solution B.4 is unique.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Typically we *do* expect the electric and magnetic fields to go to zero at large distances from the charges and currents that produce them, so this is not an unreasonable stipulation. Occasionally one encounters artificial problems in which the charge or current distribution itself extends to infinity—infinite wires, for instance, or infinite planes. In such cases other means must be found to establish the existence and uniqueness of solutions to Maxwell's equations.

Now that all the cards are on the table, I can state the **Helmholtz theorem** more rigorously:

If the divergence  $D(\mathbf{r})$  and the curl  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  of a vector function  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  are specified, and if they both go to zero faster than  $1/r^2$  as  $r \rightarrow \infty$ , and if  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  goes to zero as  $r \rightarrow \infty$ , then  $\mathbf{F}$  is given uniquely by Eq. B.4.

The Helmholtz theorem has an interesting **corollary**:

Any (differentiable) vector function  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  that goes to zero faster than  $1/r$  as  $r \rightarrow \infty$  can be expressed as the gradient of a scalar plus the curl of a vector:<sup>2</sup>

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \left( \frac{-1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) + \nabla \times \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right). \quad (\text{B.10})$$

For example, in electrostatics  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  and  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , so

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) = -\nabla V, \quad (\text{B.11})$$

where  $V$  is the scalar potential, while in magnetostatics  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  and  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , so

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \right) = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{B.12})$$

where  $\mathbf{A}$  is the vector potential.

---

<sup>2</sup>As a matter of fact, any differentiable vector function *whatever* (regardless of its behavior at infinity) can be written as a gradient plus a curl, but this more general result does not follow directly from the Helmholtz theorem, nor does Eq. B.10 supply the explicit construction, since the integrals, in general, diverge.

# Appendix C

## Units

In our units (the **Système International**) Coulomb's law reads

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{SI}). \quad (\text{C.1})$$

Mechanical quantities are measured in meters, kilograms, seconds, and charge is in **coulombs** (Table C.1). In the **Gaussian system**, the constant in front is, in effect, absorbed into the unit of charge, so that

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{Gaussian}). \quad (\text{C.2})$$

Mechanical quantities are measured in centimeters, grams, seconds, and charge is in **electrostatic units** (or **esu**). For what it's worth, an esu is evidently a  $(\text{dyne})^{1/2}$ -centimeter. Converting electrostatic equations from SI to Gaussian units is not difficult: just set

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}.$$

For example, the energy stored in an electric field (Eq. 2.45),

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (\text{SI}),$$

becomes

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\tau \quad (\text{Gaussian}).$$

(Formulas pertaining to fields inside dielectrics are not so easy to translate, because of differing definitions of displacement, susceptibility, and so on; see Table C.2.)

Quantity	SI	Factor	Gaussian
Length	meter (m)	$10^2$	centimeter
Mass	kilogram (kg)	$10^3$	gram
Time	second (s)	1	second
Force	newton (N)	$10^5$	dyne
Energy	joule (J)	$10^7$	erg
Power	watt (W)	$10^7$	erg/second
Charge	coulomb (C)	$3 \times 10^9$	esu (statcoulomb)
Current	ampere (A)	$3 \times 10^9$	esu/second (statampere)
Electric field	volt/meter	$(1/3) \times 10^{-4}$	statvolt/centimeter
Potential	volt (V)	1/300	statvolt
Displacement	coulomb/meter <sup>2</sup>	$12\pi \times 10^5$	statcoulomb/centimeter <sup>2</sup>
Resistance	ohm ( $\Omega$ )	$(1/9) \times 10^{-11}$	second/centimeter
Capacitance	farad (F)	$9 \times 10^{11}$	centimeter
Magnetic field	tesla (T)	$10^4$	gauss
Magnetic flux	weber (Wb)	$10^8$	maxwell
<b>H</b>	ampere/meter	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted
Inductance	henry (H)	$(1/9) \times 10^{-11}$	second <sup>2</sup> /centimeter

Table C.1 **Conversion Factors.** [Note: Except in exponents, every “3” is short for  $\alpha \equiv 2.99792458$  (the numerical value of the speed of light), “9” means  $\alpha^2$ , and “12” is  $4\alpha$ .]

The Biot-Savart law, which for us reads

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (\text{SI}), \quad (\text{C.3})$$

becomes, in the Gaussian system,

$$\mathbf{B} = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad (\text{Gaussian}), \quad (\text{C.4})$$

where  $c$  is the speed of light, and current is measured in esu/s. The Gaussian unit of magnetic field (the **gauss**) is the one quantity from this system in everyday use: people speak of volts, amperes, henries, and so on (all SI units), but for some reason they tend to measure magnetic fields in gauss (the Gaussian unit); the correct SI unit is the **tesla** ( $10^4$  gauss).

One major virtue of the Gaussian system is that electric and magnetic fields have the same dimensions (in principle, one could measure the electric fields in gauss too, though no one uses the term in this context). Thus the Lorentz force law, which we have written

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{SI}), \quad (\text{C.5})$$

	SI	Gaussian
<b>Maxwell's equations</b>		
In general:	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \partial \mathbf{E} / \partial t \end{cases}$
In matter:	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \partial \mathbf{D} / \partial t \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \partial \mathbf{D} / \partial t \end{cases}$
<b>D and H</b>		
Definitions:	$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \end{cases}$
Linear media:	$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$
<b>Lorentz force law</b>	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)$
<b>Energy and power</b>		
Energy:	$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) d\tau$	$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau$
Poynting vector:	$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
Larmor formula:	$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$

Table C.2 Fundamental Equations in SI and Gaussian Units.

(indicating that  $E/B$  has the dimensions of *velocity*), takes the form

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{Gaussian}). \quad (\text{C.6})$$

In effect, the magnetic field is “scaled up” by a factor of  $c$ . This reveals more starkly the parallel structure of electricity and magnetism. For instance, the total energy stored in electromagnetic fields is

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau \quad (\text{Gaussian}), \quad (\text{C.7})$$

eliminating the  $\epsilon_0$  and  $\mu_0$  that spoil the symmetry in the SI formula,

$$U = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (\text{SI}). \quad (\text{C.8})$$

Table C.2 lists some of the basic formulas of electrodynamics in both systems. For equations not found here, and for Heaviside-Lorentz units, I refer you to the appendix of J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (New York: John Wiley, 1999), where a more complete listing is to be found.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>For an interesting “primer” on electrical SI units see N. M. Zimmerman, *Am. J. Phys.* **66**, 324 (1998).

## FUNDAMENTAL CONSTANTS

---

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 \quad (\text{permittivity of free space})$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (\text{permeability of free space})$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{speed of light})$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{charge of the electron})$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\text{mass of the electron})$$

## SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

---

### Spherical

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

### Cylindrical

$$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos \phi \hat{\mathbf{s}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin \phi \hat{\mathbf{s}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

# BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

---

## Maxwell's Equations

*In general :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

*In matter :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

## Auxiliary Fields

*Definitions :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{array} \right.$$

*Linear media :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{array} \right.$$

## Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

## Lorentz force law

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

## Energy, Momentum, and Power

$$\text{Energy :} \quad U = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

$$\text{Momentum :} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$\text{Poynting vector :} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\text{Larmor formula :} \quad P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

## VECTOR IDENTITIES

---

### Triple Products

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

### Product Rules

$$(3) \quad \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$(4) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(7) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$(8) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

### Second Derivatives

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(11) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

## FUNDAMENTAL THEOREMS

---

$$\text{Gradient Theorem : } \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

$$\text{Divergence Theorem : } \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\text{Curl Theorem : } \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

---

## VECTOR DERIVATIVES

**Cartesian.**  $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx dy dz$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

**Spherical.**  $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

**Cylindrical.**  $d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[ \frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$