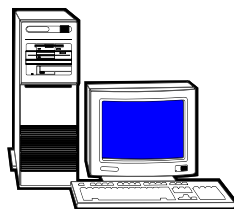


**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
*в экономике*

---

Деордица Ю.С.



**СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ**  
в планировании и управлении

Луганск 2009

**Деордица Ю.С.**

Сетевые модели. – Луганск, 2009. – 83 с.:ил.

В учебном пособии рассматриваются основные типы сетевых моделей, используемых в планировании и управлении. Излагаемые методы применимы практически во всех областях хозяйственной деятельности, связанных проектированием и выполнением различных проектов и комплексов.

Многочисленные примеры и упражнения позволяют освоить описанные методы и получить практические навыки решения задач планирования и управления как вручную, так и с использованием ЭВМ.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>Сетевая модель .....</b>	<b>4</b>
<b>Метод критического пути .....</b>	<b>6</b>
ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ РАБОТ .....	6
ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ СЕТЕВОГО ГРАФИКА .....	9
КРИТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ .....	14
РЕЗЕРВЫ ВРЕМЕНИ РАБОТ .....	15
ЛИНЕЙНЫЙ ГРАФИК РАБОТ .....	19
ЗАДАЧИ .....	28
<b>Метод оценки и пересмотра планов .....</b>	<b>36</b>
ЗАДАЧИ .....	44
<b>Распределение ресурсов .....</b>	<b>50</b>
НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕСУРСЫ .....	50
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ПОТРЕБНОСТИ В РЕСУРСАХ .....	51
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ .....	59
МЕТОДЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ .....	59
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД .....	60
ПОЛНОСТЬЮ КРИТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ .....	66
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД .....	68
ЗАДАЧИ .....	70
<b>Оптимизация сетевого графика</b>	
<b>по стоимости .....</b>	<b>72</b>
ЗАДАЧИ .....	78
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>81</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Любой проект – это комплекс взаимосвязанных работ, для выполнения которых выделяются соответствующие ресурсы и устанавливаются определенные сроки. В последние годы особое внимание уделяется проблеме эффективного руководства проектом, решение которой на данном этапе требует участия специалистов в самых различных областях науки и техники.

Для реализации многих проектов, даже средних по своим размерам, требуется не только четкое и последовательное мышление, но и умение систематизировать получаемые выводы. Сетевые модели и соответствующая техника вычислений повышают эффективность аналитической работы и позволяют определить вероятную продолжительность выполнения работ, их стоимость, возможные размеры экономии времени или денежных средств, а также то, выполнение каких операций нельзя отсрочить, не задержав при этом срок выполнения проекта в целом. Немаловажной является и проблема обеспечения ресурсами. Сетевые модели могут быть использованы при составлении календарного плана выполнения операций, удовлетворяющего существующим ограничениям на обеспечение ресурсами.

Анализ любого проекта осуществляется в три этапа:

1. Расчленение проекта на ряд отдельных работ, из которых затем составляется логическая схема. Под работой понимается деятельность или процесс, выполнение которых требует затрат временных и/или иных ресурсов.

2. Оценка продолжительности выполнения каждой операции; составление календарного плана выполнения проекта и выделение работ, которые определяют завершение выполнения проекта в целом.

3. Оценка потребностей каждой работы в ресурсах; пересмотр плана выполнения операций с учетом обеспечения

ресурсами либо перераспределение ресурсов, которое улучшит план.

Наибольшее признание в сетевом планировании получили метод критического пути (МКП) и метод оценки и пересмотра проектов (ПЕРТ). Система ПЕРТ разработана в 1958 г. для целей координации исследовательских и проектных работ. Впервые этот метод ПЕРТ был успешно применен при разработке программы создания баллистических ракет «Поларис». В том же самом году концерном «Дюпон» был разработан еще один метод сетевого планирования, получивший название МКП.

## СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ

*Сетевая модель* – это план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется *сетевым графиком*.

Отличительной особенностью сетевой модели является четкое определение всех временных взаимосвязей предстоящих работ. Главными элементами сетевой модели являются *работы* и *события*.

*Действительная работа* – процесс, требующий затрат времени и ресурсов.

*Ожидание* – процесс, требующий только временных затрат.

*Фиктивная работа* – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени.

Фиктивная работа указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Ее продолжительность принимается равной нулю.

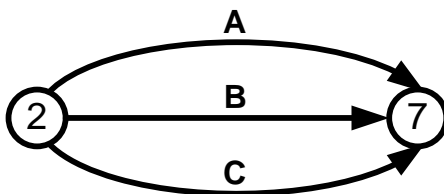
*Событие* – это момент времени начала или окончания одной или нескольких работ.

Событие для всех непосредственно предшествующих ему работ является *конечным*, а для всех непосредственно следующих за ним – *начальным*. Следовательно, каждая работа имеет начальное и конечное события.

Среди событий сетевой модели выделяют также *исходное* и *завершающее* события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий. Сетевой график должен иметь только одно исходное и только одно завершающее события.

События на сетевом графике изображаются кружками, а работы – стрелками.

Любая пара событий сетевого графика может быть соединена только одной работой. Если две (три, четыре и т.д.) выполняемые работы имеют общие начальное и конечное события то необходимо ввести дополнительные события и соединить их с последующими фиктивными работами (рис.1).



заменяется на

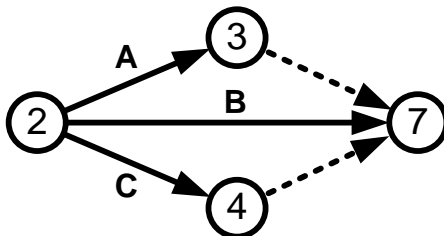


Рис.1. Использование фиктивных работ (показаны пунктиром)

## МЕТОД КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ (МКП)

Сетевой график МКП представляет собой графическое изображение проекта, в котором отдельные работы по выполнению проекта, изображаются стрелками, а события – кружками. Время, которое предполагается затратить на выполнение работы, называется ее плановой длительностью. Если единица времени (рабочий день или неделя) одна и та же для всех работ сетевого графика, то для указания длительности достаточно привести только число этих единиц. Изображение работ делается без учета масштаба.

Для каждой работы в сетевом графике МКП могут существовать работы, заканчиваемые до ее начала, выполняемые параллельно с ней или начинающиеся только после ее завершения.

Иногда между работами существуют особые связи. Их представляют фиктивными работами и обозначают штриховыми стрелками. Такая работа имеет нулевую длительность и не требует затрат времени или ресурсов.

Сетевой график следует вычерчивать, добиваясь минимума пересечений и постепенно улучшая ясность.

### ***Определение и обозначение работ***

Каждая работа определяется двумя событиями – начальным и конечным. В общем случае начальный узел обозначается буквой  $i$ , а конечный –  $j$ .

Любое событие сетевого графика происходит в тот момент, когда все работы, входящие в этот узел, заканчиваются, и поэтому могут быть начаты все работы, выходящие из этого узла. При нумерации событий необходимо, чтобы для каждой работы номер ее начального события был меньше номера ее конечного события.

Такая нумерация дает возможность однозначно определить последовательность событий при определении их ранних и поздних сроков свершения.

Алгоритм нумерации событий:

1. Исходному событию присвоить первый номер.
2. Отметить все работы выходящие из пронумерованных событий.
3. Пронумеровать в порядке возрастания номеров события, в которые входят только отмеченные работы.
4. Пункты 2 и 3 поочередно выполнять до тех пор, пока не будут пронумерованы все события сетевого графика.

**Пример 1.** Построить сетевой график выпуска новой продукции на основании представленного исследовательским отделом окончательного варианта конструкции устройства. Приводимый в табл.1.перечень работ показывает, что большинство работ обеспечивается поставками деталей с собственных складов, по субподрядам и за счет их производства на самом предприятии.

Табл.1.

	<b>Выполняемая работа</b>	<b>Продолжительность <math>t_{ij}</math></b>	<b>Предшествующие работы</b>
<b>A</b>	Окончательный вариант	<b>4</b>	—
<b>B</b>	Технологический анализ	<b>2</b>	<b>A</b>
<b>C</b>	Подготовка схем	<b>3</b>	<b>A</b>
<b>D</b>	Выдача заявок на материалы	<b>2</b>	<b>B</b>
<b>E</b>	Изготовление деталей	<b>1</b>	<b>C, D</b>
<b>F</b>	Выдача заявок на детали	<b>1</b>	<b>B</b>
<b>G</b>	Получение деталей	<b>3</b>	<b>F</b>
<b>H</b>	Размещение субподрядов	<b>3</b>	<b>B</b>
<b>I</b>	Получение заказанных деталей	<b>4</b>	<b>H</b>
<b>J</b>	Сборка и испытания	<b>2</b>	<b>E, G, I</b>



**Решение.** На основании перечня работ и условий предшествования строим сетевой график, показанный на рис.2. События сетевого графика пронумерованы в соответствии с алгоритмом, приведенным выше.

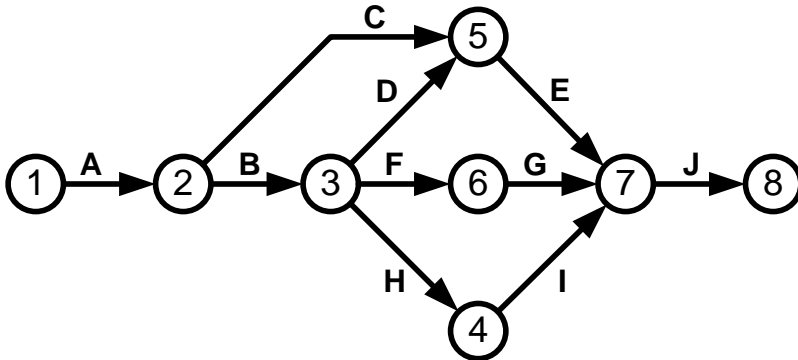


Рис.2. Сетевой график к примеру 1.

Чтобы облегчить использование метода критического пути, необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1. Составляя сетевой график, тщательно анализируйте и совершенствуйте его логику. Постоянно задавайтесь такими вопросами:
  - Какие работы должны быть закончены прежде, чем данная работа может начаться?
  - Какие работы могут выполняться одновременно с данной?
  - Какие работы зависят от завершения данной работы?
2. Длину стрелки следует выбирать только из соображений ясности рисунка.
3. Фиктивные работы можно использовать свободно, но избыточные следует удалять перед тем, как двигаться дальше.

4. Желательно предусматривать на каждой стрелке горизонтальный участок. Описание и длительность работы можно указать на этом участке, что облегчает чтение.
5. Описание помещайте всегда над горизонтальной линией, а длительность – под ней во избежание путаницы.
6. В целях ясности избегайте пересечений, насколько это возможно, даже если для этого требуется изменить структуру части графика.
7. Нумеруйте узлы только после того, как построение, сетевого графика закончено. Это позволит избежать изменения нумерации в процессе составления или модификации плана. Для обозначения работ на ранних стадиях планирования достаточно использовать их краткие описания (названия).
8. Рисуйте стрелки слева направо. Это чрезвычайно облегчает составление сетевых графиков.
9. Чтобы избежать путаницы, будьте последовательными в использовании выбранного вами способа обозначений.
10. Постоянно пользуйтесь остро отточенным карандашом и резинкой – это ускорит работу над сетевым графиком.

### ***Временные параметры сетевого графика***

Для управления ходом выполнения комплекса работ, представленного сетевой моделью, необходимо располагать временными параметрами элементов сети. К таким параметрам относятся: продолжительности выполнения всего комплекса работ, сроки выполнения отдельных работ

и их резервы времени. Важнейшим параметром сетевого графика является также критический путь.

**Путь** – это любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Различают следующие виды путей: полный, предшествующий событию, следующий за событием.

**Полный путь** – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сетевого графика, а конец – с завершающим.

**Предшествующий событию путь** – это путь от исходного события до данного.

**Следующий за событием путь** – путь от данного события до завершающего.

**Критическим** – это полный путь, имеющий наибольшую продолжительность во времени. Работы и события, принадлежащие критическому пути, называются соответственно *критическими работами* и *критическими событиями*.

На сетевом графике критический путь, как правило, выделяется жирной линией.

**Ранний срок свершения события** – это продолжительность максимального пути, предшествующего этому событию.

**Поздний срок свершения события** – это разность между продолжительностями критического пути и максимального из последующих за данным событием путей.

**Резерв времени события** – это разность между ранним и поздним сроками свершения события.

**Пример 2.** Для сетевого графика, показанного на рис.2 определить ранние( $t_p[i]$ ) и поздние( $t_n[i]$ ) сроки свершения событий найти критический путь.

**Решение.** Вычислительный процесс, используемый для определения ранних сроков свершения событий сетевого

графика, называется *прямым проходом*. При прямом проходе вычисления начинаются с исходного события и продолжаются последовательно слева направо в порядке возрастания номеров событий до тех пор, пока не будут определены ранние сроки свершения событий для каждого события сетевого графика.

Для исходного события ранний срок свершения полагается равным нулю. Ранний срок свершения для последующего события определяется простым прибавлением длительности последующей работы к раннему моменту предшествующего события.

Если в событие входит несколько работ, то его ранним сроком свершения события считается наибольшее из всех ранних времен окончания этих работ.

В данном примере:

$$t_p[1] = 0;$$

$$t_p[2] = t_p[1] + t_{12} = 0 + 4 = 4;$$

$$t_p[3] = t_p[2] + t_{23} = 4 + 2 = 6;$$

$$t_p[4] = t_p[3] + t_{34} = 6 + 3 = 9;$$

$$t_p[5] = \max(t_p[2] + t_{25}, t_p[3] + t_{35}) = \max(4 + 3, 6 + 2) = 8;$$

$$t_p[6] = t_p[3] + t_{36} = 6 + 1 = 7;$$

$$\begin{aligned} t_p[7] &= \max(t_p[4] + t_{47}, t_p[5] + t_{57}, t_p[6] + t_{67}) = \\ &= \max(9 + 4, 8 + 1, 7 + 3) = 13; \end{aligned}$$

$$t_p[8] = t_p[7] + t_{78} = 13 + 2 = 15;$$

Найденные значения ранних сроков свершения событий показаны на рис.3.

Вычислительный процесс для определения *поздних сроков* свершения событий называется обратным проходом.

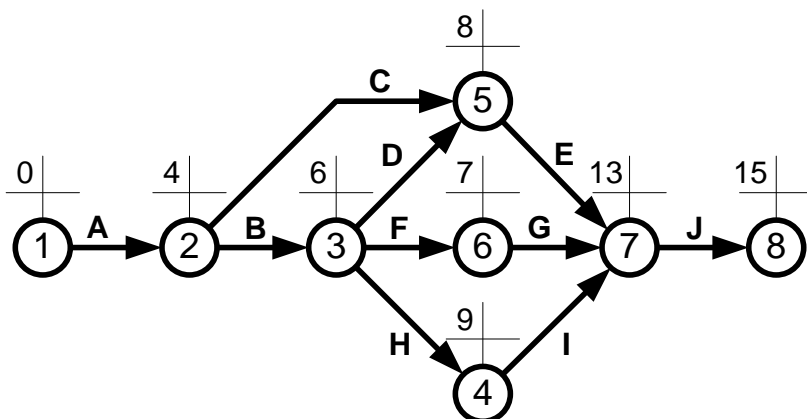


Рис.3. Ранние сроки свершения событий

При обратном проходе вычисления начинаются с завершающего события и продолжаются последовательно для каждого события сетевого графика вплоть до исходного. Поздний срок свершения завершающего события полагается равным раннему сроку свершения этого события, найденному при прямом проходе. Поздний срок свершения предыдущего события находится простым вычитанием длительности предшествующей работы из позднего срока свершения последующего события.

Если из узла выходят несколько работ, то перед определением позднего срока свершения соответствующего события следует рассмотреть поздние сроки начала для каждой работы, исходящей из этого события. Ясно, что в качестве позднего срока свершения события надо взять поздний срок начала той работы, которая должна начаться первой по времени.

В данном примере:

$$t_n[8] = 15;$$

$$t_n[7] = t_n[8] - t_{78} = 15 - 2 = 13;$$

$$t_n[6] = t_n[7] - t_{67} = 13 - 3 = 10;$$

$$t_n[5] = t_n[7] - t_{57} = 13 - 1 = 12;$$

$$t_n[4] = t_n[7] - t_{47} = 13 - 4 = 9;$$

$$t_n[3] = \min(t_n[4] - t_{34}, t_n[5] - t_{35}, t_n[6] - t_{36}) = \\ = \min(9 - 3, 12 - 2, 10 - 1) = 13;$$

$$t_n[2] = \min(t_n[3] - t_{23}, t_n[5] - t_{25}) = \min(6 - 2, 12 - 3) = 4;$$

$$t_n[1] = t_n[2] - t_{12} = 4 - 4 = 0;$$

Полученные значения показаны на сетевом графике (рис.4).

Используя результаты вычислений при прямом и обратном проходах, можно определить критический путь. Работа принадлежит критическому пути, если ранние и поздние сроки свершения начального и конечного событий работы совпадают, а между ранними (или поздними) сроками свершения ее конечного и начального событий равна продолжительности этой работы. Для нашего примера критический путь показан красным цветом.

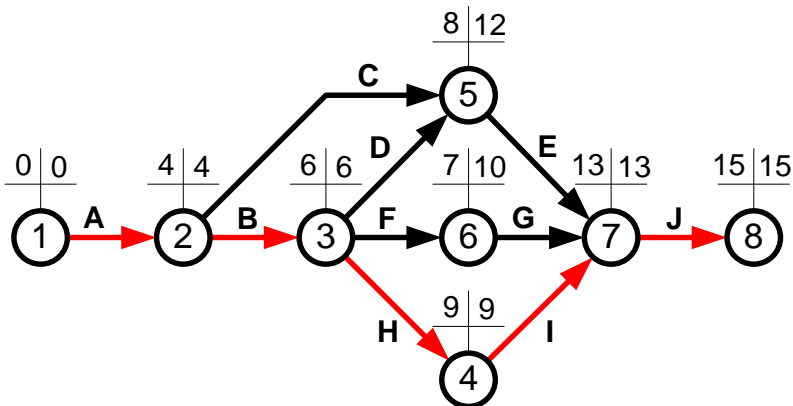


Рис.4. Поздние сроки свершения событий.

## ***Критические работы***

Каждая работа на критическом пути называется критической работой. Для анализа сетевого графика очень важно определить все критические работы. Критическая работа должна удовлетворять следующим трем критериям:

1. Ранний и поздний сроки свершения ее начального события должны быть равными.

2. Ранний и поздний сроки свершения ее конечного события также должны быть равными:

3. Длительность работы должна равняться разности между ранним сроком свершения ее конечного события и ранним сроком свершения ее начального события.

Третье условие означает, что критическая работа не должна иметь резерва какого бы то ни было типа. Поэтому полный резерв оказывается полезным инструментом для выявления критической работы; равенство его нулю свидетельствует о критичности работы. Важно отметить, что критическая работа должна удовлетворять всем трем упомянутым выше условиям.

Метод критического пути устанавливает приоритеты на множестве работ. Критические работы должны быть завершены вовремя, иначе сроки выполнения проекта будут сорваны. Некритическими следует считать лишь те работы, у которых достаточен размер резерва. Работы с небольшим резервом являются субкритическими; вообще, чем больше резерв работы, тем менее она критична в сравнении с другими.

Критические работы должны контролироваться руководством проекта в первую очередь, ибо задержка любой из них увеличивает длительность проекта. Важным достоинством СРМ является возможность концентрировать внимание руководства на наиболее ответственных работах, что совершенно необходимо в больших, сложных проектах.

## ***Резервы времени работ***

Отдельная работа может начаться (и окончиться) в ранние, поздние или другие промежуточные сроки.

***Ранний срок начала работы*** – это ранний момент ее начального события.

***Поздний срок окончания работы*** – это поздний момент ее конечного события.

***Поздний срок начала работы*** – это поздний момент ее конечного события за вычетом длительности работы.

***Ранний срок окончания работы*** – это ранний момент ее начального события плюс длительность работы.

Если имеется сетевой график с рассчитанными ранними и поздними моментами событий, то для расчета и табулирования моментов начала и окончания работ можно использовать следующую процедуру из шести шагов:

***Шаг 1.*** Упорядочить все работы в столбце 1 (сначала расположить работы по возрастанию номера  $i$ , а затем для каждого  $i$  упорядочить их по возрастанию номера  $j$ ).

***Шаг 2.*** Занести название каждой работы в столбец 2, а их длительности – в столбец 3.

***Шаг 3.*** Записать моменты раннего начала для каждой работы в столбце 4. Ими являются ранние моменты начальных для этих работ событий.

***Шаг 4.*** Определить моменты раннего окончания для каждой работы добавлением ее длительности к моменту раннего начала и поместить данные в столбце 5,

***Шаг 5.*** Занести моменты позднего окончания для каждой работы в столбец 7. Ими являются поздние моменты событий, соответствующих конечным событиям работ.

***Шаг 6.*** Определить момент позднего начала для каждой работы вычитанием ее длительности из момента позднего окончания и поместить данные в столбце 8.



**Пример 3.** Для сетевого графика с рассчитанными ранними и поздними сроками свершения событий рассчитать ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

**Решение.** Для расчета указанных временных параметров работ воспользуемся описанной выше процедурой. Результаты расчета представлены в таблице 2.

Табл.2.

1	2	3	4	5	6	7
работа	$i-j$	$t_{ij}$	Раннее		Позднее	
			начало	окон- чание	начало	окон- чание
<b>A</b>	<b>1-2</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>
<b>B</b>	<b>2-3</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
<b>C</b>	<b>2-5</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>12</b>
<b>H</b>	<b>3-4</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>9</b>
<b>D</b>	<b>3-5</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>
<b>F</b>	<b>3-6</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>I</b>	<b>4-7</b>	<b>4</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>9</b>	<b>13</b>
<b>E</b>	<b>5-7</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>13</b>
<b>G</b>	<b>6-7</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>13</b>
<b>J</b>	<b>7-8</b>	<b>2</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>13</b>	<b>15</b>

Каждая работа проекта должна быть завершена в пределах от момента раннего начала до момента позднего окончания. Если все работы заканчиваются в этих пределах, то проект будет окончен вовремя. Когда промежуток времени между этими двумя пределами превышает длительность работы, тогда имеется свободное время либо до начала, либо после окончания работы. Это свободное время называют резервом.

***Полный резерв времени работы** – это количество времени, на которое может быть увеличена продолжительность работы без угрозы срыва планового срока завершения проекта.*

Полный резерв используется в основном для установления приоритетов работ.

***Свободный резерв времени работы*** – это часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события.

Свободный резерв используется в основном для выявления работ, выполнение которых может задерживаться без ущерба для полного резерва последующих работ.

***Независимый резерв времени работы*** – это часть полного резерва времени, получаемая для случая когда все предшествующие работы в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки.

Независимый резерв позволяет выявить работы, затягивание которых не влияет на полный резерв ни предыдущих, ни последующих работ.

Полный, свободный и независимый резервы подсчитываются и табулируются с использованием моментов начала и окончания работ. Если полный резерв работы равен нулю, то нулевыми являются также свободный и независимый резервы. Поэтому когда подсчеты приводят к нулевому полному резерву и одновременно ненулевому иному резерву, то это свидетельствует об ошибке в вычислениях.

**Пример 4.** Для сетевого графика примера 3 с рассчитанными ранними и поздними сроками свершения событий рассчитать полный, свободный и независимый резервы времени работ.

**Решение.** Полный резерв может быть определен как поздний срок свершения конечного события минус ранний срок начального события и минус длительность работы, определяемой этими событиями:

$$R_{\text{полный}} = t_{n \ j} - t_{p \ i} - t_{ij}$$

Полный резерв времени - это количество времени, на которое можно перенести начало работ или увеличить продолжительность без изменения общего срока проекта.

Свободный резерв определяется как ранний срок свершения конечного события минус ранний срок свершения начального события минус длительность работы, определяемой этими событиями:

$$R_{\text{свободный}} = t_{p \ j} - t_{p \ i} - t_{ij}$$

Свободный резерв используется в основном для выявления работ, выполнение которых может задерживаться без ущерба для полного резерва последующих работ.

Независимый резерв определяется как ранний срок свершения конечного события минус поздний срок свершения начального события минус длительность работы, определяемой этими событиями:

$$R_{\text{независимый}} = t_{p \ j} - t_{n \ i} - t_{ij}$$

Если при вычислении независимого резерва получается отрицательная величина, то резерв полагается равным нулю.

Независимый резерв времени означает запас времени, который имеет исполнитель, когда предшествующие работы заканчиваются в неудобные для него сроки, а он заканчивает свою работу в ранний срок, не расходуя резервов следующих за ним работ.

Результаты расчета полного, свободного и независимого резервов времени представлены в таблице 3. Эта таблица содержит всю необходимую информацию для построения линейного графика работ, рассматриваемого в следующем разделе.

Обычно ограничиваются расчётом полного и свободного резервов.

Табл.3.

работа	$i-j$	$t_{ij}$	Ранее		Позднее		Резерв		
			начало	окончание	начало	окончание	полный	свобод- ный	независи- мый
<b>A</b>	<b>1-2</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>B</b>	<b>2-3</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>C</b>	<b>2-5</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>H</b>	<b>3-4</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>D</b>	<b>3-5</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>F</b>	<b>3-6</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>I</b>	<b>4-7</b>	<b>4</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>E</b>	<b>5-7</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>0</b>
<b>G</b>	<b>6-7</b>	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
<b>J</b>	<b>7-8</b>	<b>2</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

### ***Линейный график работ***

Его назначение - разработка и осуществление наиболее рациональной модели организации и технологии работ во времени и пространстве на объекте, выполняемых различными исполнителями при непрерывном и эффективном использовании выделенных трудовых, материальных и технических ресурсов с целью выполнения проекта нормативные сроки.

Необходимым условием для построения линейного графика является сетевой график, на котором указаны связи между работами, и временные параметры работ (см. табл.3). В линейных графиках для обозначения работ используются отрезки прямых линий. Эти отрезки вычерчиваются горизонтально в соответствии с временной шкалой, нанесенной по всей длине графика. Поэтому длина каждого отрезка соответствует оценке времени, в течение кото-

рого должна быть выполнена работа. Каждый отрезок обозначается парой номеров, как и в сетевом графике. Эти номера соответствуют номерам событий на сетевом графике, определяющих данную работу.

Построенный линейный график определяет работу во времени и в связи с другими работами. Следующий параметр, который должен отражать линейный график, – это резерв.

Резерв может предшествовать работе, следовать за ней или распределяться на части до и после работы. Для определенности условимся, что все работы начинаются в ранние сроки свершения их начальных событий.

Линейный график работ сетевого графика составляется с помощью следующей пошаговой процедуры:

1. Строится окончательный вариант сетевого графика.
2. Вычерчивается шкала времени.
3. Все работы записываются в левый крайний столбец.
4. Работы упорядочиваются по возрастанию чисел  $j-i$ .
5. Длительность каждой работы представляется соответствующей длиной прямолинейного отрезка.
6. Каждая работа считается начатой в ее ранний срок начала.
7. Полный резерв времени работы показывается пунктирной линией.

Все работы и их обозначения могут быть показаны на линейном графике вместе с резервом, что невозможно сделать на сетевом графике.

Работы критического пути не имеют резерва. Поэтому в момент, когда начинается одна критическая работа, предшествующая ей критическая работа обязательно должна быть закончена.

**Пример 4.** Построить линейный график работ для сетевого графика, показанного на рис.4, воспользовавшись данными, полученными в табл.3.

**Решение.** Линейный график работ, построенный в соответствии с описанной ранее процедурой, показан на рис.5. Критические работы показаны на этом рисунке красным цветом, полные резервы времени некритических работ — светло-зеленым цветом.

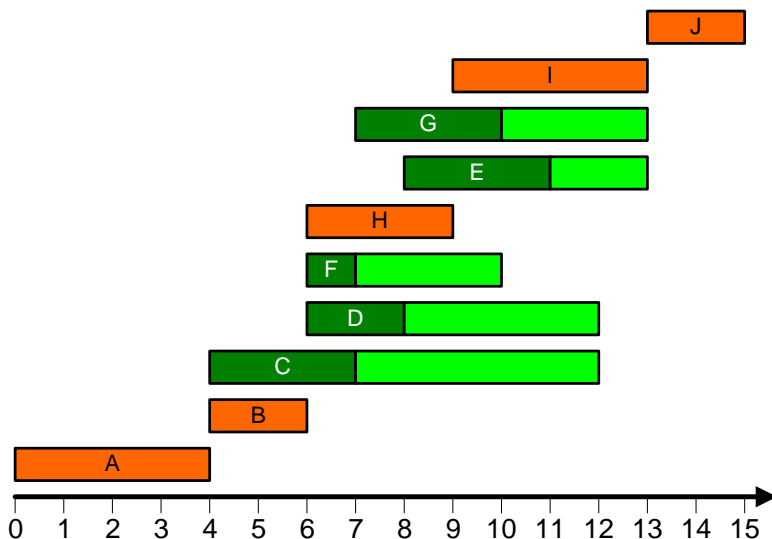


Рис.5. Линейный график работ

Линейный график работ идентифицирует работы, отражает логику, указывает резерв. Недостатком линейного графика, отсутствующим у сетевого графика, является его негибкость. Моменты раннего начала и позднего окончания работы должны быть определены до того, как соответствующий отрезок будет нанесен на график. Если проект отстает или опережает расписание, то линейный график работ должен быть перестроен заново из-за жесткой связи между работами.



## Как решить задачу на ПК



**Задача 1.** Рассчитать на ЭВМ с помощью **Excel** временные параметры работ для сетевого графика (рис.4).

**Решение.** Запустите **Excel**, откройте рабочий лист и введите исходные данные, как показано на рис.6.

Далее выполните следующие действия:

- Выберите **Сервис**⇒**Макрос**⇒**Макросы...**, в результате откроется диалоговое окно **Макрос**.

***Примечание.** Диалоговое окно Макрос можно вызвать нажатием комбинации клавиш **Alt+F8**.*

- В строку ввода **Имя макроса** введите имя макроса, «работы» и нажмите кнопку **Создать**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Работа</b>	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>T</b>	<b>РН</b>	<b>РО</b>	<b>ПН</b>	<b>ПО</b>	<b>РР</b>	<b>СР</b>	<b>НР</b>
2	<b>A</b>	1	2	4							
3	<b>B</b>	2	3	2							
4	<b>C</b>	2	5	3							
5	<b>H</b>	3	4	3							
6	<b>D</b>	3	5	2							
7	<b>F</b>	3	6	1							
8	<b>I</b>	4	7	4							
9	<b>E</b>	5	7	1							
10	<b>G</b>	6	7	3							
11	<b>J</b>	7	8	2							

Рис.6. Таблица **Excel** с исходными данными.

В редакторе **Visual Basic** между командами:

```
Sub работы()  
End Sub
```

поместите следующую программу:

Sub работы()

Dim IU(1 To 50) As Integer

Dim JU(1 To 50) As Integer

Dim Ur(1 To 50) As Integer

Dim Up(1 To 50) As Integer

Dim T(1 To 50) As Integer

maxU = 0: i = 2

While Cells(i, 1) <> ""

If Cells(i, 2) > maxU Then maxU = Cells(i, 2)

If Cells(i, 3) > maxU Then maxU = Cells(i, 3)

IU(i) = Cells(i, 2)

JU(i) = Cells(i, 3)

T(i) = Cells(i, 4)

i = i + 1

Wend

countR = i - 1

For n = 2 To maxU

For i = 2 To countR

If (JU(i) = n) And (Ur(n) < Ur(IU(i)) + T(i)) \_

Then Ur(n) = Ur(IU(i)) + T(i)

Next i

Next n

For n = 1 To maxU

Up(n) = Ur(maxU)

Next n

For n = maxU - 1 To 1 Step -1

For i = 2 To countR

If (IU(i) = n) And (Up(n) > Up(JU(i)) - T(i)) Then

Up(n) = Up(JU(i)) - T(i)

End If

Next i

Next n

For i = 2 To countR



```

Cells(i, 5) = Ur(IU(i))
Cells(i, 6) = Ur(IU(i)) + T(i)
Cells(i, 7) = Up(JU(i)) - T(i)
Cells(i, 8) = Up(JU(i))
Cells(i, 9) = Up(JU(i)) - Ur(IU(i)) - T(i)
Cells(i, 10) = Ur(JU(i)) - Ur(IU(i)) - T(i)
НЕЗАВИСИМЫЙ = Ur(JU(i)) - Up(IU(i)) - T(i)
If НЕЗАВИСИМЫЙ > 0 Then
    Cells(i, 11) = НЕЗАВИСИМЫЙ
Else
    Cells(i, 11) = 0
End If
Next i
End Sub

```

Вернитесь в электронную таблицу, выберите **Сервис** ⇒ **Макрос** ⇒ **Макросы...**, в открывшемся диалоговом окне **Макрос** в списке макросов выберите макрос «работы» и щелкните мышью на кнопке **Выполнить**. В результате получим требуемое решение (рис.7).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н	І	Ј	К
1	<b>Работа</b>	<b>І</b>	<b>Ј</b>	<b>Т</b>	<b>РН</b>	<b>РО</b>	<b>ПН</b>	<b>ПО</b>	<b>РР</b>	<b>СР</b>	<b>НР</b>
2	<b>А</b>	1	2	4	0	4	0	4	0	0	0
3	<b>В</b>	2	3	2	4	6	4	6	0	0	0
4	<b>С</b>	2	5	3	4	7	9	12	5	1	1
5	<b>Н</b>	3	4	3	6	9	6	9	0	0	0
6	<b>Д</b>	3	5	2	6	8	10	12	4	0	0
7	<b>Ф</b>	3	6	1	6	7	9	10	3	0	0
8	<b>І</b>	4	7	4	9	13	9	13	0	0	0
9	<b>Е</b>	5	7	1	8	9	12	13	4	4	0
10	<b>Г</b>	6	7	3	7	10	10	13	3	3	0
11	<b>Ј</b>	7	8	2	13	15	13	15	0	0	0

Рис.7. Результаты решения задачи 1.



## Как решить задачу на ПК



**Задача 2.** Для условий задачи 1 построить линейный график работ.

**Решение.** Для решения поставленной задачи воспользуемся результатами решения предыдущей задачи. для этого откроем рабочий лист и введем наименования работ, их продолжительности, а также ранние сроки начала и поздние сроки окончания работ (см. рис.8).

	A	B	C	D	E	F
1		i-j	t	рн	по	
2	A	1-2	4	0	4	
3	B	2-3	2	4	6	
4	C	2-5	3	4	12	
5	H	3-4	3	6	9	
6	D	3-5	2	6	12	
7	F	3-6	1	6	10	
8	I	4-7	4	9	13	
9	E	5-7	1	8	13	
10	G	6-7	3	7	13	
11	J	7-8	2	13	15	

Рис.8. Исходные данные для задачи 2.

Далее выполните следующие действия:

Выберите **Сервис**⇒**Макрос**⇒**Макросы...**, в результате откроется диалоговое окно **Макрос**.

В строку ввода **Имя макроса** введите имя макроса, например «линейный», и нажмите кнопку **Создать**.

В результате будет вызван редактор **Visual Basic**, в котором будет помещена заготовка:

```
Sub линейный()  
End Sub
```

Между операторами **Sub** и **End** введите программу:

```
Sub линейный()  
    m = 1  
    While Cells(m, 1) <> ""  
        m = m + 1  
    Wend  
    For i = 0 To m  
        Cells(1, i + 7) = i  
    Next i  
    Range(Cells(1, 7), Cells(1, i + 6)).Select  
    With Selection.Borders(xlEdgeBottom)  
        .LineStyle = xlContinuous  
        .Weight = xlThin  
        .ColorIndex = xlAutomatic  
    End With  
    i = 2  
    While Cells(i, 1) <> ""  
        n = 8 + Cells(i, 4)  
        k = n + Cells(i, 3)  
        Range(Cells(i, n), Cells(i, k - 1)).Select  
        With Selection.Borders(xlEdgeBottom)  
            .LineStyle = xlContinuous  
            .Weight = xlThick  
            .ColorIndex = xlAutomatic  
        End With  
        If Cells(i, 5) > Cells(i, 3) + Cells(i, 4) Then  
            n = k  
            k = n + (Cells(i, 5) - Cells(i, 3) - Cells(i, 4))  
            Range(Cells(i, n), Cells(i, k - 1)).Select  
            With Selection.Borders(xlEdgeBottom)  
                .LineStyle = xlDash  
                .Weight = xlMedium  
                .ColorIndex = xlAutomatic
```

```

End With
End If
i = i + 1
Wend
End Sub

```

Вернитесь в электронную таблицу, выберите **Сервис** ⇒ **Макрос** ⇒ **Макросы...**, в открывшемся диалоговом окне **Макрос** в списке макросов выберите макрос «линейный» и щелкните мышью на кнопке **Выполнить**. В результате получим требуемое решение (рис.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1		i-j	t	рн	по		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	A	1-2	4	0	4																	
3	B	2-3	2	4	6																	
4	C	2-5	3	4	12																	
5	H	3-4	3	6	9																	
6	D	3-5	2	6	12																	
7	F	3-6	1	6	10																	
8	I	4-7	4	9	13																	
9	E	5-7	1	8	13																	
10	G	6-7	3	7	13																	
11	J	7-8	2	13	15																	
12																						

Рис.9. Результаты решения задачи 2.

## **Задачи**

**Задача 1.** При подключении абонента к телефонной сети выполняются следующие работы:

1. получение от абонента заявки на подключение;
2. выяснение возможности подключения на АТС;
3. проверка технических возможностей на месте;
4. резервирование рабочего канала связи в магистральной сети АТС;
5. резервирование рабочего канала связи в местном распределительном устройстве;
6. получение нужного оборудования;
7. монтаж проводки на месте;
8. проверка новой цепи;
9. принятие абонента к обслуживанию;
10. установка оборудования;
11. регулировка работы оборудования.

Работы 2 и 3 следуют за работой 1; работы 4, 5 и 6 – за 2 и 3; работа 7 следует за 5 и предшествует 8; 8 предшествует работам 9; 6 предшествует работам 10; работа 11 следует за 10; 9 и 11 являются последними; работа 4 предшествует работе 8. Постройте сетевой график для этих работ и пронумеруйте узлы.

**Задача 2.** В проекте благоустройства трех улиц примерно одинаковой длины (0,8 км) содержатся следующие операции:

- а) расчистка и планировка;
- б) рытье траншей;
- в) прокладка канализационных труб;
- г) установка люков;
- д) прокладка водопроводных магистралей;
- е) установка водоразборных колонок;
- ж) заключительные земляные работы;
- з) устройство кюветов вдоль тротуаров;

- и) разравнивание проезжей части;
- к) окончательное выравнивание;
- л) мощение.

Постройте сетевой график указанных работ при условии, что все работы выполняются одной бригадой, причем работы на следующей улице начинаются после завершения работ на предыдущей. Оцените длительность работ и составьте их расписание. Определите критический путь.

**Задача 3.** Рассмотрим проект по организации сбыта нового изделия. В таблице приводятся продолжительности работ, необходимых для выполнения проекта. Найдите минимальное время выполнения проекта.

№	Работа	t, нед	Предш. работы
0	Планирование работ	3	—
1	Составление учебного плана	6	0
2	Отбор слушателей	4	0
3	Подготовка брошюры	3.	0
4	Проведение учебных занятий	1	1, 2, 3
4	Поставка образцов продукции	4	0
6	Печатание брошюры	5	3
7	Подготовка рекламных материалов	5	0
8	Выпуск рекламных материалов	1	7
9	Распространение брошюры	2	6

**Задача 4.** Постройте сетевую модель, включающую работы *A*, *B*, *C*, ..., *P* и удовлетворяющую указанным ниже отношениям упорядочения,

1. *A*, *B* и *C* – начальные работы программы, которые можно начинать одновременно.
2. Работы *D*, *E* и *F* начинаются по окончании *A*.
3. Работы *I* и *G* начинаются после завершения *B* и *D*.
4. Работы *H* начинается после окончания *C* и *G*.

5. Работы **K** и **L** следуют за работой **I**.
6. Работа **J** следует как за **E**, так и **H**.
7. Работы **M** и **N** следуют за **F**, но не могут начаться, пока не завершены **E** и **H**.
8. Работа **O** следует за **M** и **I**.
9. Работа **P** следует за **J**, **L** и **O**.
10. Работы **K**, **N** и **P** являются завершающими работами.

**Задача 5.** Для подготовки финансового плана на следующий год фирме необходимо получить данные от отделов сбыта, производства, финансов и бухгалтерии. В таблице указаны соответствующие работы и их продолжительность.

Необходимо построить сетевую модель, найти ранние и поздние сроки событий, определить критический путь и показать его на сетевом графике.

Работа	Описание работы	Предшествуют	Дней
<b>A</b>	Разработка прогноза сбыта		10
<b>B</b>	Изучение конъюнктуры рынка	–	7
<b>C</b>	Подготовка рабочих чертежей изделия и технологии его производства	<b>A</b>	5
<b>D</b>	Разработка календарных планов производства	<b>C</b>	3
<b>E</b>	Оценка себестоимости производства	<b>D</b>	2
<b>F</b>	Определение цены изделия	<b>B, E</b>	1
<b>G</b>	Разработка финансового плана	<b>E, F</b>	14

**Задача 6.** Фундамент здания можно построить в виде четырех последовательных секций. Работы по каждой секции включают рытье котлована, монтаж металлоконструкций и укладку бетона. Отрывку котлована одной секции нельзя начинать, пока не закончено рытье котлована предыдущей секции. То же относится к заливке бетона. Постройте сетевую модель.

Работа	Описание работы	Предшествуют	Дней
<b>A</b>	Расчистка стройплощадки	–	1
<b>B</b>	Доставка материалов и оборудования	–	2
<b>C</b>	Выемка котлована под фундамент	<b>A</b>	1
<b>D</b>	Заливка фундамента бетоном	<b>C</b>	2
<b>E</b>	Наружные сантехнические работы	<b>B, C</b>	6
<b>F</b>	Сооружение каркаса здания	<b>D</b>	10
<b>G</b>	Прокладка электропроводной сети	<b>F</b>	3
<b>H</b>	Настилка полов	<b>G</b>	1
<b>I</b>	Кровельные работы	<b>F</b>	1
<b>J</b>	Внутренние сантехнические работы	<b>E, H</b>	S
<b>K</b>	Обшивка досками	<b>I</b>	2
<b>L</b>	Внешняя теплоизоляция	<b>F, J</b>	1
<b>M</b>	Установка дверных и оконных рам	<b>P</b>	2
<b>N</b>	Кладка кирпича	<b>L, M</b>	4
<b>O</b>	Теплоизоляция стен и потолков	<b>G, J</b>	2
<b>P</b>	Штукатурка стен и потолков	<b>O</b>	2
<b>Q</b>	Теплоизоляция крыши	<b>I, P</b>	1
<b>R</b>	Внутренняя отделка	<b>P</b>	7
<b>S</b>	Наружная отделка	<b>I, N</b>	7
<b>T</b>	Благоустройство территории	<b>S</b>	3

**Задача 7.** Заменить колесо машины (работу выполняют два человека). Достать из багажника домкрат и инструменты (40 с); снять диск колеса (30); освободить колесо (50); поставить домкрат под машину (26); поднять машину (20); из багажника взять запасное колесо (25); снять гайки и колесо (20); установить запасное колесо на ось (10); завинтить (не сильно) гайки на оси (15); опустить машину и собрать домкрат (25); поставить домкрат обратно в багажник (10); завинтить гайки на оси до конца (12); положить плохое колесо и инструменты в багажник (40); поставить на место диск колеса (10 с).



**Задача 8.** В таблице перечислены работы, необходимые для организации выступления студенческого хора при свечах в новогоднюю ночь. Необходимо построить сетевую модель, найти ранние и поздние сроки событий, определить критический путь и показать его на сетевом графике. Для некритических работ определить резервы времени.

Работа	Описание работы	Предшес- твуют	Дней
A	Выбор музыкального произведения		21
B	Разучивание музыки	A	14
C	Размножение нот	A	14
D	Пробные спевки	B, C	3
E	Репетиции хора	D	70
F	Репетиции солистов	D	70
G	Получение канделябров (в прокат)	D	14
H	Закупка свечей	G	1
I	Установка канделябров	H	1
J	Закупка декораций	D	1
K	Установка декораций	J	1
L	Заказ костюмов для хора	D	7
M	Отглаживание костюмов	L	7
N	Проверка системы усиления звука	D	7
O	Выбор грамзаписей	N	14
P	Настройка системы усиления звука	O	1
Q	Генеральная репетиция хора	E, F, P	1
R	Банкет	Q, I, K	1
S	Проведение концерта	M, R	1

**Задача 9.** В таблице приведен перечень работ, связанных с покупкой нового автомобиля. Необходимо построить сетевую модель, найти ранние и поздние сроки событий, определить критический путь и показать его на сете-

вом графике. Для некритических работ определить резервы времени.

Работа	Описание работы	Предшественники	Дней
<i>A</i>	Проведение технико-экономического обоснования		3
<i>B</i>	Поиск покупателя имеющегося автомобиля	<i>A</i>	14
<i>C</i>	Составление списка выпускаемых моделей	<i>A</i>	1
<i>D</i>	Оценка выпускаемых моделей	<i>C</i>	3
<i>E</i>	Опрос мнений автомехаников	<i>C</i>	1
<i>F</i>	Сборка информации от агентов по продаже	<i>C</i>	2
<i>G</i>	Систематизация собранной информации	<i>D, E, F</i>	1
<i>H</i>	Выбор трех наиболее предпочтительных моделей	<i>G</i>	1
<i>I</i>	Ходовая проверка трех выбранных моделей	<i>H</i>	3
<i>J</i>	Сбор гарантийных и финансовых данных	<i>H</i>	2
<i>K</i>	Выбор одной модели	<i>I, J</i>	2
<i>L</i>	Сравнение агентов по продаже и выбор агента	<i>K</i>	2
<i>M</i>	Поиск желательного цвета и оценка возможных вариантов	<i>L</i>	4
<i>N</i>	Повторная ходовая проверка выбранной модели	<i>L</i>	1
<i>O</i>	Оформление покупки нового автомобиля	<i>B, M, N</i>	3

**Задача 10.** Располагая приведенной ниже информацией, постройте сетевой график и рассчитайте ранние и поздние моменты событий:

а) работы *U* и *R* могут выполняться параллельно, являясь при этом начальными в проекте;

б) *K* должна следовать за *E*;

в) *X* не зависит ни от *Q*, ни от *K*;

г) ни *F*, ни *G* не могут начаться раньше, чем закончится работа *R*, причем *F* и *G* могут выполняться параллельно;

д) *U* должна предшествовать *E* и *Q*;

е) *Q* должна предшествовать *J*;

ж) *C* не зависит ни от *F*, ни от *G* и следует за *K*;

- з) *E* и *Q* могут выполняться параллельно;  
 и) *H* может начаться только после завершения работ *C*,  
*X* и *J*;  
 к) *H* является последней работой;  
 л) *X* зависит от *F* и *G*.

Работа	t	Работа	t	Работа	t
U	1	E	2	J	2
R	3	Q	6	C	6
F	5	K	5	H	3
G	4	X	7		

**Задача 11.** В таблице приведен перечень работ по переносу участка воздушной высоковольтной линии напряжением 13,8 кВ и длиной около 0,5 км. Перенос линии необходим в связи с расширением дороги, вдоль которой она проходит. Постройте сетевую модель, определите критический путь и найдите резервы времени для некритических работ.

Работа	Описание работы	Пред- шест-	Дней
A	Оценка состава и содержания работ		1
B	Осведомление потребителей электроэнергии о временном отключении системы	A	0,5
C	Составление заявки на материалы и оборудование	A	1
D	Обследование района проведения работ	A	0,5
E	Доставка опор и материалов	C, D	3
F	Распределение опор по точкам монтажа	E	3,5
G	Увязка точек монтажа	D	0,5
H	Разметка точек монтажа	G	0,5
I	Рытье ям под опоры	H	3
J	Монтаж опор	F, I	4

**Задача 12.** Располагая приведенной ниже информацией, постройте сетевой график и рассчитайте ранние и поздние моменты событий:

а) работы **U** и **R** могут выполняться параллельно, являясь при этом начальными в проекте;

б) **K** должна следовать за **E**;

в) **X** не зависит ни от **Q**, ни от **K**;

г) ни **F**, ни **G** не могут начаться раньше, чем закончится работа **R**, причем **F** и **G** могут выполняться параллельно;

д) **U** должна предшествовать **E** и **Q**;

е) **Q** должна предшествовать **J**;

ж) **C** не зависит ни от **F**, ни от **G** и следует за **K**;

з) **E** и **Q** могут выполняться параллельно;

и) **H** может начаться только после завершения работ **C**, **X** и **J**;

к) **H** является последней работой;

л) **X** зависит от **F** и **G**.

Работа	t
<b>U</b>	1
<b>R</b>	3
<b>F</b>	5
<b>G</b>	4
<b>E</b>	2
<b>Q</b>	6
<b>K</b>	5
<b>X</b>	7
<b>J</b>	2
<b>C</b>	6
<b>H</b>	3

## Метод оценки и пересмотра планов

В предыдущих разделах предполагалось, что продолжительность работы точно известна. При использовании метода оценки и пересмотра планов (ПЕРТ) вводится неопределенность в продолжительность работы.

В случае ПЕРТ для каждой работы сетевой модели проекта принимаются три оценки продолжительности выполнения:

- наиболее вероятное время выполнения  $m$ ;
- оптимистическая оценка времени  $a$  и
- пессимистическая оценка времени  $b$ .

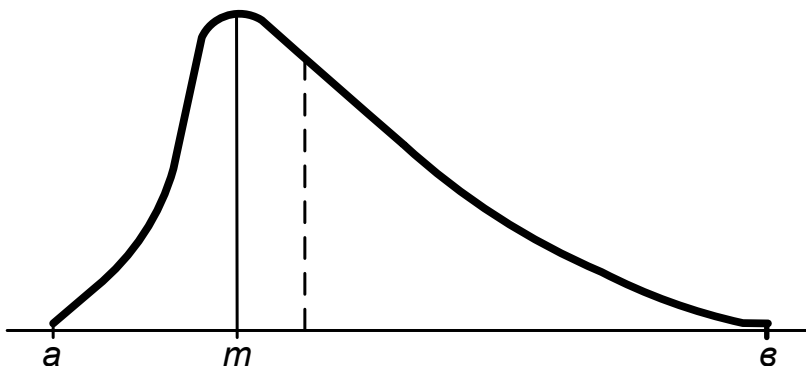


Рис.10. Бета-распределение продолжительности работ

Наиболее вероятное время определяется как время выполнения работы при нормальных условиях. Оптимистическая и пессимистическая оценки задают размах колебаний продолжительности работы под влиянием неопределенности. Оптимистическая оценка показывает минимально необходимое время, когда все идет по плану, а пессимистическая оценка отражает максимальное время выполнения работы, необходимое при неблагоприятных условиях, например механических поломках, нехватке рабочей

силы или материалов, перебоях в снабжении. Следует заметить, что пессимистическая оценка не учитывает необычные продолжительные задержки либо катастрофы. Поскольку обе эти оценки являются лишь приемлемыми предположениями, фактическая продолжительность работы может лежать и за пределами этого интервала (что маловероятно).

В большинстве случаев в системе ПЕРТ принимается бета-распределение продолжительности работ, показанное на рис. 10, где  $\mu$  обозначает среднюю продолжительность. Значение  $\mu$  зависит от того, насколько близко находятся значения  $a$  и  $b$  к  $m$ .

Ожидаемая продолжительность работы приближенно определяется как

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Поскольку фактическая продолжительность может отличаться от среднего значения, необходимо знать дисперсию продолжительности работы. У большинства унимодальных распределений (т. е. распределений с одним максимумом) крайние значения отстоят на три среднеквадратических отклонения от среднего значения. Таким образом, размах распределения равен шести среднеквадратическим отклонениям ( $\sigma$ ).

Рис.10. Бета-распределение продолжительности работ.

Итак,  $6\sigma = b - a$ , или

$$\sigma = \frac{b - a}{6}$$

Дисперсия продолжительности работы равна

$$\sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

В системе ПЕРТ с помощью трех оценок продолжительности всех работ по этим формулам для  $\square$  и  $\square^2$  вычис-

ляется средняя продолжительность и ее дисперсия для каждой работы. Рассматривая среднее значение как фактическую продолжительность работы, можно найти критический путь. Продолжительность проекта  $T$  определяется как сумма продолжительностей всех работ, находящихся на критическом пути. Поскольку продолжительности работ являются случайными величинами, продолжительность проекта  $T$  также является случайной величиной, и можно говорить о средней продолжительности проекта и ее дисперсии.

Однако длительность выполнения проекта уже не описывается  $\beta$ -функцией, как это имеет место для отдельных работ проекта. Предполагая, что проект состоит из большого числа работ, получим результирующее распределение его длительности, близкое к нормальному; поэтому можно принять, что ожидаемая длительность выполнения проекта имеет нормальное распределение. На рис. 12 показано нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .

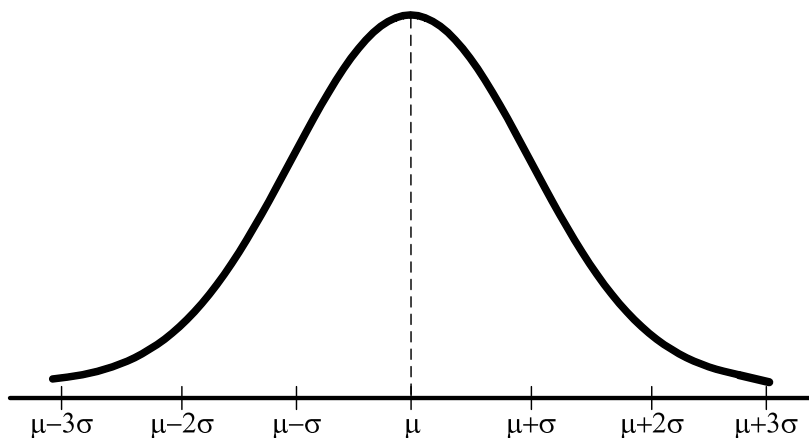


Рис. 11. Нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ .

Может оказаться, что ожидаемая длительность выполнения проекта  $T_E$  неприемлема для руководства; вместо нее выбирается другое время, а именно  $T_S$  меньшее, чем  $T_E$ . Для определения вероятности реализации  $t_s$  нужно рассмотреть стандартное (среднеквадратическое) отклонение кривой нормального распределения. Промежуток времени, в котором вероятности для  $t_e$  и  $t_s$  приблизительно равны, тем больше, чем больше величина стандартного отклонения. Это стандартное отклонение вычисляется по формуле

$$\sigma(T) = \sqrt{\sum \left( \frac{b-a}{6} \right)^2}$$

Таким образом, величина стандартного отклонения отражает степень неопределенности проекта.

Для того чтобы найти вероятность завершения проекта к определенному моменту времени или в определенном временном промежутке, необходимо использовать стандартное нормальное распределение. Искомая вероятность может быть найдена по таблице стандартного нормального распределения на основании следующего соотношения:

$$Z = \frac{[T_S - T_E]}{\sigma(T_E)}$$

Согласно теории вероятностей, случайная величина  $Z$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 1, что позволяет использовать ее для определения вероятности по таблице стандартного нормального распределения.

С помощью величины  $Z$  можно определить вероятность достижения и любого другого события проекта на основании планируемого и ожидаемого сроков свершения события. Стандартное отклонение в этом случае рассчитывается для критических работ, приводящих к данному событию



Вероятность окончания проекта к определенной дате указывает на степень сопряженного с этим риска. Для облегчения использования вероятностной информации задержка реализации проекта должна быть оценена в стоимостных терминах, а также и в других типах штрафов за несоблюдение взятых обязательств. Она составляет, таким образом, часть информации, необходимой для определения подходящей длительности выполнения проекта.

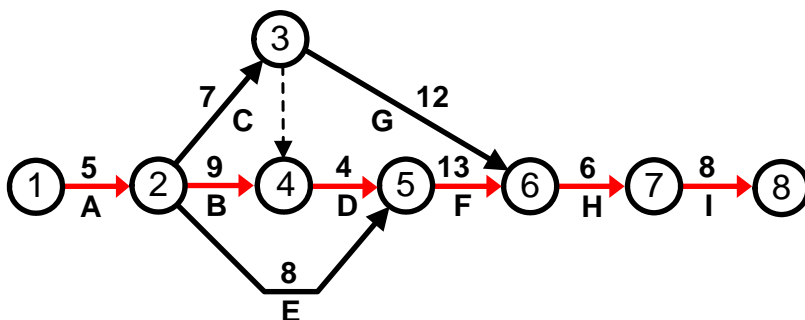
**Пример 5.** Рассмотрим проект, состоящий из девяти работ, с отношениями предшествования и оценками продолжительности, показанными в таблице 4. Необходимо построить сетевой график, вычислить ожидаемую длительность выполнения каждой работы, а также ее дисперсии. Используя полученные величины определить:

1. ожидаемую продолжительность проекта,
2. дисперсию продолжительности проекта,
3. вероятность выполнения проекта за 50 дней,
4. вероятность завершения проекта на 4 дня раньше ожидаемого срока,
5. вероятность свершения события 6 на 28-й день выполнения проекта.

Табл.4

Работа	Непосредственно предшествуют	Продолжительность		
		<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>
<b>A</b>		2	5	8
<b>B</b>	<i>A</i>	6	9	12
<b>C</b>	<i>A</i>	6	1	8
<b>D</b>	<i>B, C</i>	1	4	7
<b>E</b>	<i>A</i>	8	8	8
<b>F</b>	<i>D, E</i>	5	14	17
<b>G</b>	<i>C</i>	3	12	21
<b>H</b>	<i>F, G</i>	3	6	9
<b>I</b>	<i>H</i>	5	8	11

Далее построим сетевую модель проекта, где числа над линиями показывают среднюю продолжительность работ (рис.12). По этим значениям вычисляются ранний и поздний сроки свершения каждого события.



Критический путь на сетевом графике показан на рисунке двойными линиями. Соответственно критическими работами являются **A, B, D, F, H, I**.

Работа	$\mu$	$\sigma$	$\sigma^2$
<b>A</b>	5	1	1
<b>B</b>	9	1	1
<b>C</b>	7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
<b>D</b>	4	1	1
<b>E</b>	8	0	0
<b>F</b>	13	2	4
<b>G</b>	12	3	9
<b>H</b>	6	1	1
<b>I</b>	8	1	1

Обозначим через  $T_E$  продолжительность проекта. Тогда ожидаемая продолжительность проекта равна сумме ожидаемых продолжительностей критических работ **A, B, D, F, H и I**

$$T_E = 5 + 9 + 4 + 13 + 6 + 8 = 45 \text{ сут.}$$

Дисперсия продолжительности проекта равна сумме дисперсий продолжительности работ критических работ:

$$\sigma^2(T_E) = 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 9.$$

Среднеквадратическое отклонение продолжительности проекта равно

$$\sigma(T_E) = \sqrt{\sigma^2(T_E)} = 3.$$

В нашем примере продолжительность  $T_E$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 45, и среднеквадратическим отклонением, равным 3. В случае нормального распределения вероятность того, что значение случайной величины отличается от математического ожидания не более чем на одно стандартное отклонение, равна 0,68. Следовательно, с вероятностью 0,68 продолжительность проекта составит от 42 до 48 сут.

Аналогично с вероятностью 0,997 продолжительность проекта  $T$  будет отличаться от среднего значения не более чем на три среднеквадратических отклонения (от 36 до 54 суток).

Чтобы вычислить вероятность завершения за 50 дней, находим значение  $Z$ :

$$Z = \frac{50 - 45}{3} = 1,67.$$

В таблице для нормированного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 1 в столбце для на-

ходим значение 1,67 и соответствующую ему вероятность 0,9525. Таким образом, вероятность выполнения рассматриваемого проекта за 50 дней составляет 0,9525.

Чтобы определить вероятность завершения проекта на 4 дня раньше, чем ожидается находим

$$Z = \frac{41 - 45}{3} = -1,33.$$

В таблице для нормированного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением, равным 1 в столбце для находим значение -1,33 и соответствующую ему вероятность 0,0918. Следовательно, вероятность того, что проект будет закончен через 41 суток, составляет всего 0,0918.

Чтобы определить вероятность свершения шестого события на 28-й день, находим

$$T_E(6) = 5 + 9 + 4 + 13 = 31$$

$$T_S(6) = 28$$

$$\sigma(6) = \sqrt{1 + 1 + 1 + 4} = 2,65$$

$$Z = \frac{28 - 31}{2,65} = -1,13$$

Снова обращаясь к таблице стандартного нормального распределения находим для  $Z = -1,13$  вероятность 0,1292. Таким образом, вероятность наступления события 6 до 28-го дня равна 0,1292.

## Задачи

**Задача 1.** В таблице даны оптимистическая ( $a$ ), наиболее вероятная ( $m$ ) и пессимистическая ( $b$ ) оценки продолжительности работ. Запланированная продолжительность проекта составляет 17,5 сут. Найдите вероятность выполнения проекта в установленный срок.

Работа	$a$	$m$	$b$
(1,2)	6	8	10
(1,3)	4	6	7
(1,4)	4	8	12
(2,5)	5	6	8
(3, 5)	7	8	9
(4,6)	7	10	14
(5,6)	3	4	5

**Задача 2.** В таблице приведен перечень работ и соответствующие оценки наиболее вероятной, самой пессимистической и самой оптимистической продолжительности.

Работа	Предшествует	$a$	$m$	$b$
<b>A</b>	–	15	19	29
<b>B</b>	<b>A</b>	8	10	112
<b>C</b>	–	8	16	18
<b>D</b>	–	7	8	9
<b>E</b>	<b>D</b>	7	4	9
<b>F</b>	<b>A</b>	16	32	36
<b>G</b>	<b>B,C,E</b>	10	12	14
<b>H</b>	<b>D</b>	14	21	22
<b>I</b>	<b>F,G</b>	20	43	48

1. С помощью ожидаемых значений составьте сетевой график этих работ.
2. Найдите ожидаемую продолжительность проекта и среднеквадратическое отклонение этой продолжительности.

3. Оцените вероятность того, что проект продлится:
  - а) более 95 дней;
  - б) менее 87 дней;
  - в) от 92 до 96 дней.
4. Определите максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95

**Задача 3.** Рассмотрим проект по организации сбыта нового изделия. Вероятностные оценки продолжительностей работ приведены в таблице.

Нмер	РАБОТА	Пред- шест- вуют	Продолжи- тельность		
			a	m	b
0	Планирование работ	нет	2	3	5
1	Составление учебного плана	0	2	6	10
2	Отбор слушателей	1	3	4	5
3	Подготовка брошюры	0	1	3	4
4	Практическая проверка материалов	9,10,5,8	1	1	1
5	Поставка образцов продукции	13	3	4	4
6	Печатание брошюры	3	4	5	6
7	Подготовка рекламных материалов	3	2	5	7
8	Выпуск рекламных материалов	7	1	1	1
9	Распространение брошюры	6	2	2	3
10	Подготовка торговых работников	6,2	3	5	6
11	Обзор состояния рынка	4	2	4	5
12	Разработка опытного образца	0	5	7	8
13	Изготовление образца продукции	12	2	3	4

1. Вычислите среднюю продолжительность и ее дисперсию для каждой работы.
2. Какова вероятность того, что весь проект будет завершен менее чем за
  - 30 суток?
  - 40 суток?
  - 50 суток?

3. Определите продолжительность проекта, вероятность превышения которой составляет всего 10%.
4. Определите максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95

**Задача 4.** В местной больнице озабочены тем, что пациенты, поступающие в отделение травматологии, обслуживаются недостаточно быстро. Руководство больницы наняло консультантов для анализа текущей практики. В ходе первичного ознакомления был выявлен следующий перечень действий:

	Работа	Предшествует	t, мин.		
			a	m	b
<b>A</b>	Поступление пациента	–	3	10	20
<b>B</b>	Ожидание свободного врача	<b>A</b>	15	30	75
<b>C</b>	Дежурный находит медицинскую книжку	<b>A</b>	5	15	25
<b>D</b>	Первичный осмотр пациента	<b>B</b>	15	20	30
<b>E</b>	Анализ крови	<b>C,D</b>	10	25	35
<b>F</b>	Рентген	<b>C,D</b>	20	45	60
<b>G</b>	Результаты анализа крови	<b>E</b>	10	15	25
<b>H</b>	Результаты рентгена	<b>F</b>	15	25	45
<b>I</b>	Заключительный осмотр пациента	<b>G,H</b>	10	15	30
<b>J</b>	Постановка диагноза	<b>I</b>	15	20	30

1. Составьте сетевой график этих действий на основании наиболее вероятной их продолжительности и оцените общую продолжительность.
2. Методом ПЕРТ определите ожидаемую продолжительного каждого действия. На основании этих значений составьте новый сетевой график.
3. Определите среднеквадратическое отклонение продолжительности действий на критическом пути, и таким образом определите среднеквадратическое отклонение общей продолжительности.

4. При условии нормального распределения найдите вероятность того, что время между поступлением в отделение и постановкой диагноза.
  - а) более 3-х часов;
  - б) менее 2-х часов.
5. Найдите 95%-ные доверительные пределы продолжительности этого процесса.

**Задача 5.** Предположим, что общая продолжительность проекта определяется тремя работами А, Б и В. Далее в таблице даны оценки продолжительности этих критических работ:

Работа	<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>
А	10	5	21
Б	6	4	8
В	14	6	16

1. Вычислите ожидаемую продолжительность каждой работы и таким образом оцените ожидаемую продолжительность проекта.
2. Возьмите оптимистические и пессимистические оценки продолжительности работ и определите среднеквадратическое отклонение каждого критической работы. С помощью этих значений получите оценку среднеквадратического отклонения продолжительности всего проекта.
3. При условии нормального распределения оцените вероятность того, что продолжительность проекта:
  - а) больше 34 дней;
  - б) менее 28 дней;
  - в) от 27 до 33 дней.
4. Определите максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95



5. Каковы доверительные пределы продолжительности этого проекта?

**Задача 6.** Некоторый проект состоит из работ, указанных в таблице. Для каждой работы приводятся данные ответственными исполнителями и экспертами оценки продолжительности каждой работы (в сутках): оптимистическая (*a*), наиболее вероятная (*m*) и пессимистическая (*b*) .

Работа	<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>
(1,2)	5	8	10
(1,3)	18	20	22
(1,4)	26	33	40
(2,5)	16	18	20
(2,6)	15	20	25
(3,6)	6	9	12
(4,7)	7	10	12
(5,7)	5	7	8
(6,7)	3	4	5

Необходимо:

1. построить сетевой график;
2. определить средние (ожидаемые) значения продолжительности работ;
3. определить критический путь и его длину. Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти:
  - вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 25 суток;
  - максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0,95;
  - вероятность того, что проект будет выполнен на три дня раньше срока;

- вероятность того, что выполнение проекта задержится на два дня относительно ожидаемого срока окончания.

**Задача 7.** Проект состоит из шести работ. Для каждой работы вычислить ожидаемую длительность выполнения работы и ее дисперсию.

Работа	Предшествует	$a$	$m$	$b$
<b>A</b>	–	19	20	25
<b>B</b>	<b>A,D</b>	5	7	8
<b>C</b>	<b>B</b>	3	4	5
<b>D</b>	<b>E</b>	5	6	10
<b>E</b>	–	10	12	16
<b>F</b>	<b>E</b>	11	15	20

1. Составьте сетевой график по ожидаемой продолжительности каждого действия и найдите критический путь.
2. При условии, что действия на критическом пути должны быть завершены в минимальные сроки, то как это скажется на общей продолжительности проекта?
3. Определите ожидаемую продолжительность и средне-квадратическое отклонение всего проекта.
4. При условии нормального распределения определите 95%-ные доверительные пределы продолжительности проекта.

## **Распределение ресурсов**

Сетевые методы анализа упорядочивают работы проекта таким образом, что если заданная последовательность соблюдается, то проект, в конечном счете, будет завершен. Другим необходимым условием, гарантирующим реализуемость плана проекта, является наличие ресурсов, требуемых для выполнения работ. Следовательно, должна быть проведена проверка физической реализуемости плана.

В большинстве реальных проектов ресурсы, как правило, ограничены, вследствие чего на расписание работ налагаются дополнительные ограничения.

Распределение ресурсов является существенной частью планирования. Оно отвечает на вопрос, является ли план физически реализуемым. Составить план «вообще» несложно; полезным же является лишь тот план, по которому можно работать. План годится для дела только тогда, когда в наличии имеются все требуемые ресурсы.

### ***Неограниченные ресурсы***

Работа сетевого графика, имеющая резерв, может быть начата в различные моменты времени. Время работы определяется как сумма ее длительности и полного резерва. Выбор различных допустимых моментов начала работы приводит к различным распределениям ресурсов во времени.

Сетевой график, критический путь, а также вычисленные моменты начала и конца работы составляют часть планирования проекта. Такой план разрабатывается в предположении, что все требуемые для его реализации ресурсы имеются в наличии. Отправной точкой при анализе физической реализуемости является определение общей потребности в ресурсах для каждого единичного интервала

времени. Для этого необходимо иметь сетевой график, задающий последовательность работ, и знать потребность каждой работы в ресурсах.

### ***Построение графика потребности в ресурсах***

Процедура построения графика потребности в ресурсах для ранних сроков свершения событий  $t_p$  состоит в том, что момент начала каждой работы полагается равным раннему сроку свершения начального события и выделяются ресурсы, требуемые для выполнения работы.

Для иллюстрации построения графика потребности в ресурсах (ресурсного профиля) с помощью описанной процедуры рассмотрим следующий пример.

**Пример 6.** Для построения ресурсного профиля воспользуемся исходными данными задачи 2 (см. рис.8), добавив к ним требуемые для каждой работы ресурсы (табл.6)

Табл.6.

Работа	i-j	t	рн	по	ресурс
<b>A</b>	1-2	4	0	4	4
<b>B</b>	2-3	2	4	6	2
<b>C</b>	2-5	3	4	12	3
<b>H</b>	3-4	3	6	9	1
<b>D</b>	3-5	2	6	12	3
<b>F</b>	3-6	1	6	10	5
<b>I</b>	4-7	4	9	13	2
<b>E</b>	5-7	1	8	13	4
<b>G</b>	6-7	3	7	13	3
<b>J</b>	7-8	2	13	15	2

Работа **A** (табл. 6), например, начинается в момент 0 и требует четырех человек в течение четырех рабочих дней. Таким образом, использование ресурса начинается в мо-

мент 0 и продолжается четыре дня. Аналогично поступают и с остальными работами, считая, что использование ресурса, требуемого для каждой из них, начинается с раннего срока начала работы и происходит в течение всей ее продолжительности.

После окончания распределения ресурсов устанавливается их ежедневная суммарная потребность. В заключение вычерчивается график ежедневной потребности в ресурсах, называемый ресурсным профилем проекта (рис.13).

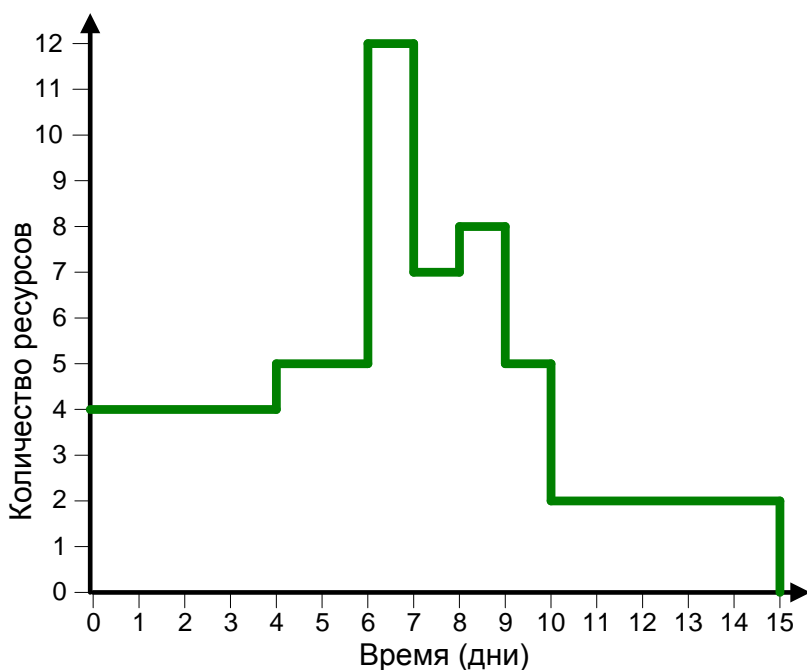


Рис.13. Ресурсный профиль (все работы начинаются в ранние сроки)

Если работы будут начинаться в их ранние моменты начала, то выполнение проекта займет не более 15 рабочих дней. Однако расписание, сориентированное на ранние

моменты начала работ, приводит к неоправданно большому количеству рабочей силы на 7-й день выполнения проекта, что неблагоприятно сказывается на экономической стороне дела.

Используя тот же сетевой график и рассмотренную ранее процедуру, можно распределить ресурсы и для поздних сроков начала работ. В этом случае выделение ресурсов затягивается до наиболее позднего возможного срока, так что все работы становятся критическими. Затем определяются ежедневные потребности в ресурсах, и определяется срок окончания проекта – 15 рабочих дней.

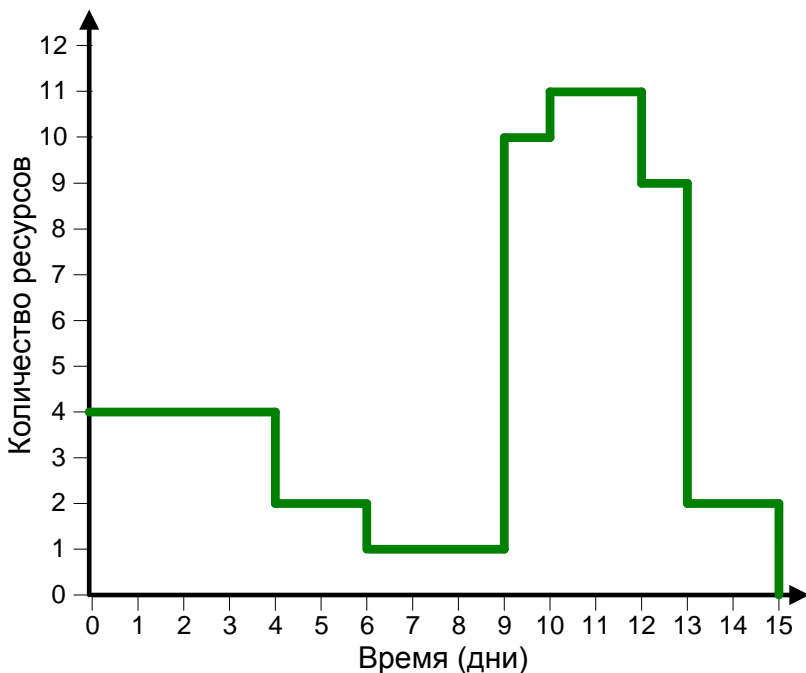


Рис.14. Ресурсный профиль (все работы начинаются в поздние сроки)

В том случае, когда все работы начинаются в поздние сроки пик ресурсного профиля приходится на 11 и 12 рабочие дни, когда требуется 11 единиц ресурса (рис.14)

Таким образом, ресурсный профиль зависит от использования ранних или поздних сроков начала работ в качестве момента начала их выполнения. Ресурсный профиль может быть изменен путем частичного использования резервов времени до начала работ. Вследствие этого пик может быть распределен по времени. В нашем примере для сглаживания ресурсного профиля можно поступить следующим образом.

Работы **С** и **Д** начать в их ранние сроки начала, а все остальные в поздние сроки. В этом случае ресурсный профиль будет иметь вид, показанный на рис. 15, а максимальная потребность в ресурсах составит всего 8 единиц, тогда как в предыдущих вариантах она составляла 12 и 11 единиц соответственно.

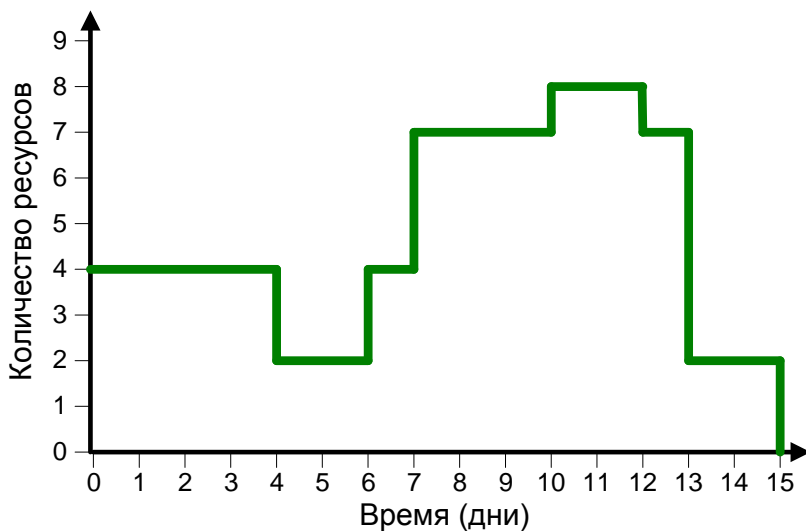


Рис.15. Сглаженный ресурсный профиль



## *Как решить задачу на ПК*



---

**Задача 3.** Для условий примера 6 построить график потребности в ресурсах.

**Решение.** Для решения задачи откроем рабочий лист электронной таблицы **Excel** и введем наименования работ, их продолжительности, а также ранние сроки начала и поздние сроки окончания работ (см. рис.16).

Далее выполним следующие действия:

Выберем **Сервис**⇒**Макрос**⇒**Макросы...**, в результате откроется диалоговое окно **Макрос**.

В строку ввода **Имя макроса** введем имя макроса, для нашей задачи выберем имя «профиль», введем это имя и нажмем кнопку **Создать**.

В результате будет вызван редактор **Visual Basic**, в котором будет помещена заготовка:

```
Sub профиль()  
End Sub
```

Между операторами **Sub** и **End** введем следующую программу:

```
Sub профиль()  
    For i = 0 To 15  
        Cells(1, i + 7) = i  
    Next i  
    Range(Cells(1, 7), Cells(1, i + 6)).Select  
    With Selection.Borders(xlEdgeBottom)  
        .LineStyle = xlContinuous  
        .Weight = xlThin  
        .ColorIndex = xlAutomatic  
    End With  
    i = 2
```



```

While Cells(i, 1) <> ""
n = 8 + Cells(i, 4)
k = n + Cells(i, 3)
For j = n To k - 1
Cells(i, j) = Cells(i, 6)
Next j
Range(Cells(i, n), Cells(i, k - 1)).Select
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
.LineStyle = xlContinuous
.Weight = xlThick
.ColorIndex = xlAutomatic
End With
If Cells(i, 5) > Cells(i, 3) + Cells(i, 4) Then
n = k
k = n + (Cells(i, 5) - Cells(i, 3) - Cells(i, 4))
Range(Cells(i, n), Cells(i, k - 1)).Select
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
.LineStyle = xlDash
.Weight = xlMedium
.ColorIndex = xlAutomatic
End With
End If
i = i + 1
Wend
For j = 7 To 22
Sum = 0
For l = 2 To 11
Sum = Sum + Cells(l, j)
Next l
Cells(12, j) = Sum
Next j
R = Cells(12, 8)
i = 8
Range(Cells(25 - R + 1, i - 1), Cells(25, i - 1)).Select

```

```

With Selection.Borders(xlEdgeRight)
    .LineStyle = xlContinuous
    .Weight = xlThick
    .ColorIndex = xlAutomatic
End With
While i < 23
While Cells(12, i) = R
Cells(25 - R, i).Select
With Selection.Borders(xlEdgeBottom)
    .LineStyle = xlContinuous
    .Weight = xlThick
    .ColorIndex = xlAutomatic
End With
i = i + 1
Wend
T = Cells(12, i)
If T > R Then
    v = T - 1
    w = R
Else
    w = R - 1
    v = T
End If
Range(Cells(25 - w, i - 1), Cells(25 - v, i - 1)).Select
With Selection.Borders(xlEdgeRight)
    .LineStyle = xlContinuous
    .Weight = xlThick
    .ColorIndex = xlAutomatic
End With
R = T
Wend
End Sub

```

Результаты решения задачи на ЭВМ показаны на рис.16.

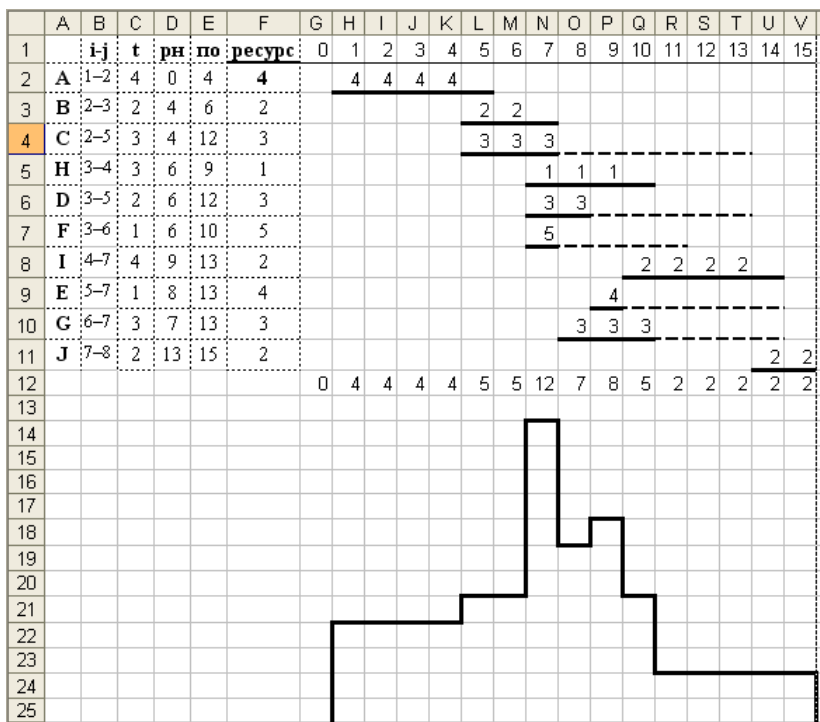


Рис.16 Результаты решения задачи 3 на ЭВМ

## ***Распределение ограниченных ресурсов***

Распределение ресурсов по рабочим дням в предположении о неограниченности ресурсов является только отправной точкой. На практике ресурсы часто в значительной степени ограничены и должны быть распределены с учетом тех или иных условий. Начало работы должно быть спланировано с таким расчетом, чтобы требуемые ресурсы были в наличии. При этом могут возникнуть три ситуации:

1. Ресурсы ограничены, и проект следует завершить, используя наличные ресурсы.
2. Длительность проекта задана, и желательно определить минимальный уровень необходимых ресурсов.
3. Желательно сглаженное распределение с тем, чтобы поддерживать интенсивность найма и увольнения работников на минимальном уровне.

## ***Методы распределения ресурсов***

Идея процедуры распределения ресурсов заключается в планировании работы в соответствии с наличием ресурсов в данный момент времени. Для реализации этой идеи могут быть использованы два метода решения: последовательный и параллельный.

При последовательном методе имеющиеся ресурсы распределяются по работам последовательно (отдельно для каждой работы, от ее начала до конца).

При параллельном методе ресурсы распределяются ежедневно по всем тем работам, которые в этот день выполняются. При этом допускается, чтобы ресурсы, выделенные на выполнение некоторой работы в предыдущий день, на следующий день перебрасывались на выполнение другой работы. Распределение ресурсов при их фиксированном объеме, а также при фиксированной длительности проекта рассмотрим для каждого метода отдельно.

## **Последовательный метод**

**Фиксированный объем ресурсов.** При последовательном методе распределения ресурсов при принятии решений, связанных с выполнением проекта, могут быть использованы следующие правила предпочтения:

1. направить ресурсы на выполнение работы, имеющей наименьший полный резерв времени; при равных условиях
2. направить ресурсы на выполнение работы, требующей наибольшего числа ресурсо-дней; при равных условиях
3. направить ресурсы на выполнение работы, использующей наибольшее количество ресурсов (людей или машин); при равных условиях
4. направить ресурсы на выполнение работы с меньшим номером  $i-j$ , т.е. работы, стоящей ближе к началу. Например, если работы 1-2 и 1-3 находятся в равных условиях, то предпочитается работа 1-2.

Правила предпочтения используются в качестве критериев выбора работ, начало которых обусловлено лишь наличием достаточных ресурсов. Фиктивные операции всегда получают наивысший приоритет.



### **Как решить задачу на ПК**



**Задача 4.** Работы сетевого графика заданы их начальными (**И**) и конечными событиями (**Ж**) и упорядочены лексикографическим образом. Длительность (**Т**), потребность в ресурсах (**Ресурс**), а также требуемые ресурсо-дни (**РД**) для каждой работы показаны в соответствующих столбцах табл. 7. Определить необходимое количество ресурсов и распределить их.

**Решение.** Ранние сроки начала работ (**РН**) и полные резервы времени (**Рез**) рассчитываются на ЭВМ, с помощью макроса, используемого в задаче 2.

Табл. 7

	I	J	T	Ресурс	РД	РН	Рез
<b>A</b>	1	2	3	4	12	0	2
<b>B</b>	1	3	2	4	8	0	6
<b>C</b>	1	5	5	4	20	0	0
<b>H</b>	2	5	0	0	0	3	2
<b>D</b>	2	6	3	2	6	3	5
<b>F</b>	3	4	4	3	12	2	6
<b>I</b>	3	7	4	1	4	2	8
<b>E</b>	4	7	2	2	4	6	6
<b>G</b>	5	6	6	2	12	5	0
<b>J</b>	6	7	3	2	6	11	0

Чтобы ориентировочно определить уровень наличных трудовых ресурсов, просуммируем данные в столбце **РД**, в результате чего получим число человеко-дней, необходимых для выполнения проекта. Чтобы получить среднее число работников, требуемых ежедневно, число человеко-дней следует разделить на длительность проекта. Это среднее соответствует почти полному использованию наличных ресурсов. Следует иметь в виду еще два обстоятельства. Во-первых, среднее число не должно быть меньше количества ресурсов, требуемых для любой работы. Во-вторых, оно должно быть всегда целым. Если в результате деления получается дробное число, оно округляется в сторону увеличения.

В нашем примере число людей, необходимых для начала процедуры их распределения, т. е. для определения уровня ресурса в первом приближении, равно  $84/14 = 6$ .

Предположим, что требуется новое распределение ресурсов для работ, которые могут быть начаты в определен-

ный рабочий день. Прежде всего следует убедиться, что все предшествующие им работы закончены; новые работы могут быть начаты лишь в том случае, если требуемое распределение ресурсов становится возможным (т.е. необходимые ресурсы высвобождаются от предшествующих работ). Ресурсы распределяются сразу на всю длительность рассматриваемой работы.

При выполнении работ сетевого графика необходимо следить за временем, в течение которого расходование ресурсов соответствует их плановому распределению, поскольку этот фактор становится определяющим при планировании моментов начала последующих работ. Одновременно необходимо вести учет количества свободных ресурсов, поскольку решение о начале работы в определенное время зависит от наличия необходимых ресурсов.

В нашей задаче начальное количество свободных ресурсов равно шести. В любой момент времени для выполняемых операций могут быть выделены только эти ресурсы.

Далее приводится последовательное поэтапное решение задачи распределения ограниченных ресурсов.

***Время 0.***

***Событие: начало выполнения проекта.***

***Количество свободных ресурсов 6.***

В соответствии с табл. 7 в момент времени 0 могут быть начаты работы (1-2), (1-3) и (1-5). Поскольку эти работы являются начальными, незаконченных предшествующих работ не существует. Переходим к распределению ресурсов. Поскольку наличного количества ресурсов недостаточно для одновременного начала всех работ, используем правила предпочтения. В данном случае предпочтение отдается работе 1-5, поскольку она имеет наименьший резерв времени.

Работа (1-5) требует четырех человек на пять рабочих дней, поэтому ресурсы на ее выполнение передаются от начального момента до конца пятого дня.

Поскольку лимит ресурсов равен шести, только две единицы остаются свободными, и поэтому ни одна из двух оставшихся операций не может быть начата.

**Время 5.**

**Событие: выполнена работа (1-5).**

**Количество свободных ресурсов 6.**

Выполненная работа (1-5) завершена и исключается из дальнейшего рассмотрения. Для оставшихся работ новые значения ранних сроков и полные резервы времени показаны в табл. 8.

Табл.8

	I	J	T	Ресурс	РД	РН	Рез
<b>A</b>	1	2	3	4	12	5	0
<b>B</b>	1	3	2	4	8	5	4
<b>H</b>	2	5	0	0	0	8	0
<b>D</b>	2	6	3	2	6	8	3
<b>F</b>	3	4	4	3	12	7	4
<b>I</b>	3	7	4	1	4	7	6
<b>E</b>	4	7	2	2	4	11	4
<b>G</b>	5	6	6	2	12	8	0
<b>J</b>	6	7	3	2	6	14	0

Определим приоритеты для работ, нуждающихся в ресурсах, Ими будут работы 1-2 и 1-3, обе с ранним моментом начала, равным 5. На основании сравнения полных резервов времени работа (1-2) получает первый приоритет, а (1-3) – второй. Работа (1-2) требует четырех человек на 3 рабочих дня, которые и направляются на ее выполнение. Работа со вторым приоритетом не может получить требуемые ресурсы, поскольку количество свободных ресурсов – две единицы – недостаточно.



**Время 8.****Событие: выполнена работа (1-2).****Количество свободных ресурсов 6.**

Работы (1-5) и (1-2) выполнены и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Для оставшихся работ новые значения ранних сроков и полные резервы времени в табл. 9.

Могут быть начаты работы (1-3), (2-6) и (5-6), т.к. ранние сроки их начала соответствуют текущему времени. В соответствии с приоритетами этих работ начинаем выполнение работы (1-5), для которой выделяем 4 единицы ресурсов и работы (1-3) – две единицы ресурсов.

Табл.9.

	I	J	T	Ресурс	РД	РН	Рез
<b>B</b>	1	3	2	4	8	8	1
<b>D</b>	2	6	3	2	6	8	3
<b>F</b>	3	4	4	3	12	10	1
<b>I</b>	3	7	4	1	4	10	3
<b>E</b>	4	7	2	2	4	14	1
<b>G</b>	5	6	6	2	12	8	0
<b>J</b>	6	7	3	2	6	14	0

**Время 10.****Событие: выполнена работа (1-3).****Количество свободных ресурсов 4.**

Работа (1-2) выполнена и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Выполняется работа (5-6). Для оставшихся работ новые значения ранних сроков их начала и полные резервы времени показаны в табл. 10.

Табл.10.

	I	J	T	Ресурс	РД	РН	Рез
<b>D</b>	2	6	3	2	6	10	1
<b>F</b>	3	4	4	3	12	10	1
<b>I</b>	3	7	4	1	4	10	3
<b>E</b>	4	7	2	2	4	14	1
<b>J</b>	6	7	3	2	6	14	0

Могут быть начаты работы (2-6), (3-4) и (3-7), т.к. ранние сроки их начала соответствуют текущему времени. Поскольку полные резервы времени работ (2-6) и (3-4) равны, в соответствии со вторым правилом предпочтения в первую очередь выделяем 3 единицы ресурсов на выполнение работы (3-4). Оставшуюся единицу ресурсов направляем на выполнение работы (3-7).

**Время 14.**

**Событие: выполнены работы (3-4), (3-7), (5-6).**

**Количество свободных ресурсов 6.**

Выполненные работы (3-4), (3-7) и (5-6) исключаются из дальнейшего рассмотрения. Для оставшихся работ новые значения ранних сроков их начала и полные резервы времени показаны в табл. 11.

Табл.11

	I	J	T	Ресурс	РД	РН	Рез
D	2	6	3	2	6	14	0
E	4	7	2	2	4	14	1
J	6	7	3	2	6	17	0

Начинаем выполнение работ (2-6) и (4-7) т.к. ранние сроки их начала соответствуют текущему времени свободное количество ресурсов позволяет выделить для каждой работы требуемое ей количество единиц ресурса.

**Время 16.**

**Событие: выполнена работа (4-7).**

**Количество свободных ресурсов 4.**

На этот момент времени не начато выполнение только одной работы – (6-7), однако эта работа не может быть начата до окончания работы (2-6), выполнение которой в данный момент еще не закончено.

**Время 17.**

**Событие: выполнена работа (2-6).**

**Количество свободных ресурсов 6.**

Начинаем выполнение последней работы (6-7).

**Время 20.**

**Событие: выполнена работа (6-7).**

**Количество свободных ресурсов 6.**

Выполнение проекта закончено.

Полученное распределение ресурсов показано в табл. 12.

табл. 12

	Д Н И																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A						4	4	4												
B									4	4										
C	4	4	4	4	4															
H																				
D															2	2	2			
F											3	3	3	3						
I											1	1	1	1						
E															2	2				
G									2	2	2	2	2	2						
J																		2	2	2

**Фиксированная длительность проекта.** Если длительность выполнения проекта требует сокращения, необходимо увеличить уровень ресурсов на единицу, распределить их и определить новую длительность проекта. Ресурсы необходимо последовательно увеличивать до тех пор, пока не будет получена приемлемая длительность.

### **Полностью критический вариант**

В этом варианте будем условно считать, что все работы проекта являются критическими, и распределять ресурсы в зависимости от того, какая из работ наиболее важна в данный момент.

Всем работам условно приписываем нулевой резерв времени, что делает их все критическими. Приоритеты

присваиваются по сформулированным ранее правилам предпочтения, за исключением правила резерва времени. Ресурсы распределяются так же, как и раньше. Ни одна работа не может начаться до завершения предшествующих ей работ.

Если полученная длительность выполнения проекта при заданных ресурсах неприемлема, то может оказаться полезным этот модифицированный метод. Соответствующее решение называется полностью критическим вариантом.

Для получения решения с фиксированной длительностью необходимо осуществить следующие шаги:

1. Выбрать начальный уровень ресурсов.
2. Распределить ресурсы с помощью последовательного метода. Проверить, приемлема ли полученная длительность проекта. Если приемлема, то нужное решение получено.
3. Если решение неприемлемо, то надо составить и рассчитать его полностью критический вариант, а после этого проверить приемлемость длительности проекта. Если ответ утвердительный, то нужное решение получено.
4. Если решение неприемлемо, то нужно увеличить уровень ресурсов на единицу и повторить шаги 1, 2, 3.

Следует иметь в виду, что результатом процедуры распределения ресурсов является расписание, дающее сроки начала каждой работы. В указанные сроки требуемые ресурсы по расписанию становятся доступными для выполнения работ. Если все работы спланированы таким образом, то критического пути и резервов времени уже не существует. Полученное расписание должно неукоснительно выполняться, если проект требуется завершить в запланированные сроки и при заданном количестве ресурсов.

## **Параллельный метод**

**Фиксированный объем ресурсов.** При использовании параллельного метода ресурсы распределяются ежедневно, т.е. каждый день определяется наиболее важная работа, и соответственно распределяются ресурсы. В расчет принимаются только те работы, которые могут выполняться в текущий день, а также имеющиеся на этот день ресурсы; ресурсы распределяются только на один день.

Чтобы решить вопрос о важности работ, руководитель ежедневно распределяет приоритеты между ними, исходя из необходимости завершения проекта в плановый срок. Кроме того, он отдает предпочтение уже начатым работам, а также принимает во внимание количество ресурсов, требующихся для работы. Такая ситуация анализируется параллельным методом, Правила предпочтения для работы (при условии завершения всех предшествующих им работам) состоят в следующем:

1. направить ресурсы на выполнение работы, имеющей наименьший резерв времени: при равных условиях
2. направить ресурсы на выполнение уже начатой работы; при равных условиях
3. направить ресурсы на выполнение работы, требующей наибольшего числа ресурсо-дней; при равных условиях
4. направить ресурсы на выполнение работы, требующей наибольшего количества единиц ресурсов на день; при равных условиях
5. рассмотреть последовательность работ.

В начале и в конце каждого рабочего дня все ресурсы считаются свободными. В первый рабочий день проекта приоритет определяется резервом времени (чем меньше резерв, тем выше приоритет). Распределение ресурсов

производится ежедневно. В начале каждого дня, когда происходит распределение ресурсов, некоторые работы уже закончены, другие закончены частично, остальные еще не начаты. Рассмотренные правила предпочтения используются для распределения ресурсов между работами, находящимися в стадии выполнения, а также теми, которые в принципе могут быть начаты. Распределение ресурсов параллельным методом для условий задачи 4 показано в табл.13.

табл.13

	Д Н И																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A				4	4		4											
B									4	4								
C	4	4	4			4		4										
H																		
D												2	2		2			
F											3		3	3		3		
I											1	1	1	1				
E																	2	2
G									2	2	2	2		2	2			
J																2	2	2

**Фиксированная длительность проекта.** Если необходимо сократить длительность выполнения проекта, как и при последовательном методе, нужно увеличивать уровень ресурсов на единицу до тех пор, пока не будет получена приемлемая длительность.

## Задачи

**Задача 1.** Администрация компании собирается реализовать исследовательский проект по изучению характеристик нового продукта. Итогом выполнения проекта должен быть отчет, содержащий рекомендации по выпуску нового продукта. Ниже приведены работы, которые необходимо осуществить в процессе выполнения проекта:

Работа	Описание работы	Предшествуют	Дней	Требуемые ресурсы
<b>A</b>	Первичные разработки	–	5	3
<b>B</b>	Изучение рынка	–	3	2
<b>C</b>	Получение технических стандартов	<b>A</b>	2	2
<b>D</b>	Создание образца	<b>A</b>	5	5
<b>E</b>	Подготовка рыночной базы	<b>A</b>	3	3
<b>F</b>	Расчет стоимости	<b>C</b>	2	2
<b>G</b>	Испытание продукта	<b>D</b>	4	5
<b>H</b>	Выборочный контроль	<b>B,E</b>	6	4
<b>I</b>	Оценки цены	<b>H</b>	2	1
<b>J</b>	Итоговый отчет	<b>F,G,I</b>	6	2

Требуется:

1. Построить сетевой граф, отражающий приведенные выше работы и их взаимосвязи. Определить критический путь и наименьшую продолжительность выполнения проекта.
2. В предположении, что началом выполнения проекта служит нулевой момент времени, а каждая работа начинается с наиболее раннего срока, построить график, изображающий потребности в персонале на любой момент времени

3. Администрация компании приняла решение, что на выполнение изложенного проекта в любой момент времени будет выделено не более 9 человек персонала. Опишите, как следует выполнять проект в данных условиях за наименьшее время, найденное в п 1. В течение какого количества недель в выполнении проекта будут участвовать все 9 человек персонала?

Задача 2. По данным таблицы:

Работа	Предшествуют работы	Дней	Требуемые ресурсы
A	–	4	2
B	A	5	3
C	B	3	1
D	A	6	2
E	–	5	3
F	E	7	5
G	D,F	2	0
H	C,G,J	1	4
I	E	6	4
J	I,L	4	3
K	–	7	5
L	K	5	3
M	I,L	4	2
N	M	2	1
O	H,N	8	3

Построить сетевой график и распределить восемь единиц ресурса, начиная каждую работу в возможно ранний срок. Прерывание выполнения работ не допускается.



## Оптимизация сетевого графика по стоимости

Нередко выполнение некоторых или даже всех работ проекта можно ускорить за счет увеличения прямых затрат на выполнение работы. Каждая работа может выполняться за разное время – от верхнего «нормального» срока ( $t_n$ ) при некоторых соответствующих «нормальных» затратах ( $c_n$ ) до меньшего «сокращенного» срока ( $t_c$ ) при соответствующих более высоких затратах ( $c_c$ ). Стоимость выполнения работы линейно зависит от ее продолжительности.

В этих случаях существует много различных комбинаций продолжительностей работ, при которых может быть получена некоторая требуемая плановая продолжительность. Однако каждая комбинация может давать различные значения общей стоимости проекта. Процедуры выбора компромиссного соотношения между сроками и затратами имеют целью получение минимальных затрат при данной продолжительности проекта.

Будем считать, что увеличение продолжительности работы на единицу времени приводит к повышению стоимости на величину

$$k_{д.з.} = \frac{c_c - c_n}{t_n - t_c},$$

называемую *коэффициентом дополнительных затрат*.

При этих предположениях процесс сокращения продолжительности выполнения проекта производим следующим образом.

**Начальный шаг.** Строим сетевой график для варианта, который характеризуется нормальным режимом выполнения работ.

**Общий шаг.** 1. Определяем для данного варианта критический путь, его длину, полные резервы времени всех работ и затраты на реализацию проекта.

2. На критическом пути (или на критических путях, если их несколько) ищем работу, которая характеризуется наименьшим коэффициентом дополнительных затрат.

3. Сокращаем продолжительность этой работы, пока один из новых путей не станет критическим (одна из работ сети исчерпает свой резерв) или ускоряемая работа не достигнет своей минимальной продолжительности.

4. Переходим к пункту 1.

Оптимизация производится в несколько этапов, каждый из которых требует выполнения пунктов 1–3. Процесс завершается, когда все работы, лежащие на критическом пути, будут выполняться в срочном варианте. Тогда дальнейшее сокращение их продолжительности невозможно, а сокращение продолжительности некритических работ будет лишь увеличивать стоимость проекта, не влияя на срок его завершения.

**Пример 7.** Дан проект, представленный таблицей 14.

Табл. 14

Работа	Нормальные сроки		Сжатые сроки		$\Delta c_{грн}$
	$t_n$	$c_n$	$t_c$	$c_c$	
(0,1)	4	210	3	280	70
(0,2)	8	400	6	560	80
(1,2)	6	500	4	600	50
(1,4)	9	540	7	600	30
(2,3)	4	500	1	110	200
(2,4)	5	150	4	240	90
(3,5)	3	150	3	150	–
(4,5)	7	600	6	750	150
		3050		4280	

Определить минимальные затраты при любом возможном значении продолжительности выполнения проекта и построить график зависимости стоимости выполнения проекта от продолжительности его выполнения. Опреде-

лить оптимальное время выполнения проекта для случая, когда кроме прямых затрат на выполнения работ существуют косвенные затраты, равные 150 грн/сут. Построить график минимальных общих затрат.

**Решение.** Построим сетевой график (рис.17) в соответствии с таблицей 14, считая, что заданы нормальные продолжительности всех работ. Результаты вычислений приведены в таблице 15.

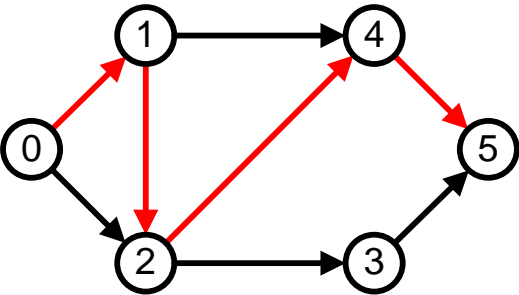


Рис.17. Сетевая модель работ для примера сокращения сроков за счет увеличения затрат

Табл.15.

работа	$t_{ij}$	Раннее		Позднее		резерв времени	$k_{д.з.}$
		нач.	ок.	нач.	ок.		
<b>0-1</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>0</b>	<b>70</b>
0-2	8	0	8	2	10	2	
<b>1-2</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>0</b>	<b>50</b>
1-4	9	4	13	6	15	2	
2-3	4	10	14	15	19	5	
<b>2-4</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>0</b>	<b>90</b>
3-5	3	14	17	19	22	5	
<b>4-5</b>	<b>7</b>	<b>15</b>	<b>22</b>	<b>15</b>	<b>22</b>	<b>0</b>	<b>150</b>

При нормальных сроках выполнения всех работ продолжительность проекта составляет 22 сут., что определяется с помощью критического пути, состоящего из работ,

выделенных в расчетной таблице 15 полужирным шрифтом. Стоимость выполнения проекта составляет 3050 грн. В последней колонке таблицы 15 указаны коэффициенты дополнительных затрат для критических работ. Выбираем для сокращения работу (1-2) с наименьшим  $k_{д.з.}=50$ .

Устанавливаем для работы (1-2) срочный режим выполнения равный 4. Срок выполнения проекта сокращается на два дня и становится равным 20. Стоимость выполнения возрастает до 3150 грн. Появляются две новые критические работы (0-2) и (1-4) и в сетевом графике наряду с критическим путем (0-1),(1-2),(2-4),(4-5) возникает два новых критических пути: (0-1),(1-4),(4-5) и (0-2),(2-4),(4-5) как показано на рис.18.

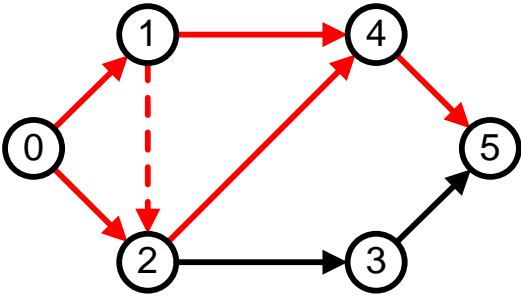


Рис.18. Сетевая модель работ после сокращения времени выполнения работы (1-2).

При наличии двух и более критических путей время выполнения проекта может быть сокращено лишь при их одновременном сокращении.

В нашем случае возможны следующие варианты:

Работы	Доп. затраты на ед. времени	Примечание
4-5	150	4-5 принадлежит всем кр. путям
0-1 и 0-2	70+80	0-1 принадлежит двум путям
1-4 и 2-4	30+90	2-4 принадлежит двум путям

Минимальные дополнительные затраты (120 грн) будут при одновременном сокращении работ (1-4) и (2-4). Сокращаем эти работы на один день (т.к. работу 2-4 можно сократить только на один день). Срок выполнения проекта становится равным 19, стоимость выполнения 3270 грн.

Дальнейшее сокращение возможно при вариантах :

Работы	Доп. затраты на ед. времени	Примечание
4-5	150	4-5 принадлежит всем кр. путям
0-1 и 0-2	70+80	0-1 принадлежит двум путям

Сокращаем срок выполнения работы (4-5) на один день. Срок выполнения проекта становится равным 18, стоимость 3420 грн. Дальнейшее сокращение может быть достигнуто только при сокращении работ (0-1) и (0-2)

Сокращаем срок выполнения этих работ на один день. Срок выполнения проекта становится равным 17, стоимость выполнения 3570 грн.

Теперь все работы, лежащие на критическом пути все работы, выполняются в срочном варианте (см. рис.19). Дальнейшее сокращение их продолжительности невозможно, а сокращение продолжительности некритических работ будет лишь увеличивать стоимость проекта, не влияя на срок его завершения

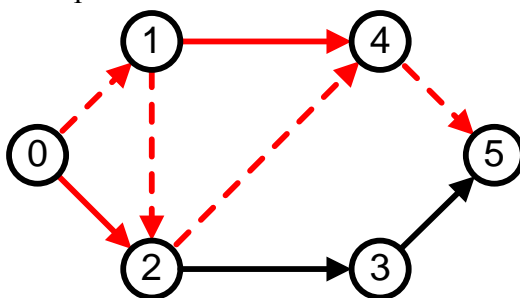


Рис.19. Окончательный вариант решения. Работы (0–1), (1–2), (2–4) и (4–5) выполняются в сжатые сроки.

В таблице 16 сведены результаты вычислений стоимости проекта в зависимости от его продолжительности.

Табл.16.

Сокращаются работы	Продолжительность проекта	Затраты, грн		
		прямые	косвенные	общие
	22	3050	3080	6130
1-2	20	3150	2800	5950
2-4 и 1-4	19	3270	2660	5930
4-5	18	3420	2520	5940
0-1 и 0-2	17	3570	2380	5950

На основании полученных данных (табл. 16) строим график зависимости «продолжительность – стоимость» (рис.20).

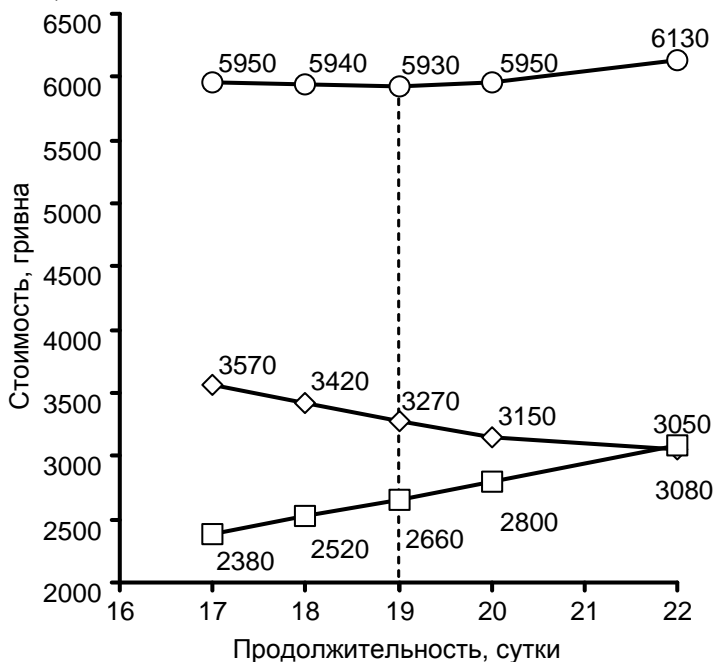


Рис.20. График «продолжительность – стоимость»

## Задачи

**Задача 1.** По данным, приведенным в таблице, необходимо:

- а) построить сетевой график;
- б) определить критический путь и стоимость проекта при минимально возможных значениях продолжительности всех работ;
- в) найти минимальную стоимость проекта при том же сроке его завершения;
- г) рассчитать и построить оптимальную зависимость стоимости проекта от продолжительности его выполнения, используя в качестве первоначального варианта сетевого графика:
  - план с максимальными значениями продолжительности всех работ и соответственно минимальной стоимостью проекта;
  - план, полученный в результате выполнения п. в).

Работа	Нормальные сроки		Сжатые сроки	
	$t_n$	$c_n$	$t_c$	$c_c$
(1,2)	7	95	4	100
(1,3)	6	90	3	97
(1,4)	5	86	4	104
(2,3)	7	92	7	98
(2,4)	6	87	5	93
(3,4)	7	112	5	120
(3,5)	8	101	5	113
(4,5)	9	97	6	109

**Задача 2.** Бензозаправочная станция должна быть построена на уже подготовленном месте. Она состоит из двух объектов: заправочной площадки и здания конторы. На заправочной площадке располагаются касса и насосы, а помещение для административного персонала, воздушный

компрессор и туалеты общего пользования находятся в здании конторы. К насосам примыкает бетонированная яма, содержащая резервуары с бензином.

Компания, которой принадлежит станция, желает установить счетчик-расходомер и соединить его с магистралью. Бензонасосы необходимо получить у изготовителя, а после монтажа подсоединить к резервуарам с бензином и электросети.

Страховая компания настаивает на том, чтобы для охраны здания конторы была предусмотрена эффективная система сигнализации. После установки этой системы страховая компания проводит свою инспекцию. Сигнализация работает от основной электрической сети. Все оборудование для конторы и туалетов должно быть получено по специальному заказу и после доставки должно храниться в укрытии во избежание его порчи. Некоторые предметы требуют окраски уже после установки на место.

Сжатый воздух для накачивания шин обеспечивается электрическим компрессором, который перед началом работы должен быть проверен компетентным специалистом. Воздухозаборная линия компрессора монтируется совместно с основными подземными коммуникациями, а устройства для забора воздуха устанавливаются на стене ограждения.

На прилегающем к бензозаправочной станции участке дороги устанавливаются соответствующие дорожные знаки и указатели, информирующие водителей о местоположении станции. Предполагается, что дорожные знаки и указатели будут установлены тогда, когда станция будет готова к эксплуатации.

Подготовка к началу работ включает, кроме обычных приготовлений, доставку на место специального прицепа для хранения инструментов, оборудования и т.п.: в прицепе располагаются также диспетчерская и подсобная служ-



бы. После завершения работ прицеп должен быть удален, равно как и все строительные леса и вспомогательное оборудование. Эта операция называется «вывоз использованного оборудования и уборка территории».

В таблице приведены нормальные и форсированные стоимости. Выполнение проекта позже запланированного времени ведет к штрафу 500 долл./день, а за каждый сэкономленный день назначена премия 200 долл. Накладные расходы подрядчика равны 40 долл./день. Определите длительность проекта, при которой прибыль подрядчика будет максимальной.

РАБОТА	Длительность, недели		Стоимость, долл.	
	$t_n$	$t_c$	$c_n$	$c_c$
Рытье котлована для заправочной площадки	1	1	150	150
Строительство площадки	1	0,8	200	225
Строительство кассы	2	1,6	1000	1200
Получение насосов	16	10	1500	1500
Установка насосов	1	1	300	300
Подсоединение насосов	2	0,4	100	120
Инспекция установки насосов	2	2	0	0
Получение оборудования	8	1	100	200
Окраска и оборудование конторы и туалетов	2	1	200	250
Проведение освещения	1	0,4	0	0
Рытье котлована для конторы	1	1	300	300
Строительство конторы	1	1	150	150
Установка оборудования	2	1,4	9000	9950
Установка сигнализации	1	0,6	200	250
Подключение сигнализации	2	1	100	120

## ЛИТЕРАТУРА

1. Деордица Ю.С., Нефедов Ю.М. Исследование операций в планировании и управлении: Учеб. пособие. – К.: Выща шк, 1991. – 270 с.
2. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений /Пер. с англ. под ред. член-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.
3. Ричард Томас Количественные методы анализа хозяйственной деятельности/ Пер. с англ. – М.: Издательство «Дело и сервис». 1999.–132 с.
4. Х. Таха. Введение в исследование операций: В 2-х книгах, Кн. 2. Пер. с англ. М.: Мир. 1985. – 496 с., ил.
5. Х. Ахьюджа Сетевые методы управления в проектировании и производстве/Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 638 с.
6. Р. Акоф., М. Сасиени. Основы исследования операций./Пер. с англ. М.: Мир, 1971.– 533 с.
7. Филлипс Д., Гарсиа–Диас А. Методы анализа сетей/Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
8. Венцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. – 552 с.
9. Дж. Риггс Производственные системы: планирование, анализ, контроль./Пер. с англ. М.: Прогресс, 1972.– 338 с.
10. Дж. Бигель Управление производством: количественный подход./Пер. с англ. М.: Мир, 1973.– 303 с.
11. Применение исследования операций в экономике. Пер. с венг. М.: Экономика, 1977. – 323 с.