**ХРЕСТОМАТІЯ**

**З КУРСУ “МАТЕМАТИКА”**

**ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «ПОЧАТКОВА ОСВІТА»**

Викладач: канд.. фіз.-мат.наук, доцент Ткачук О.М.

**Електронні навчально**-**методичні видання**

**у вигляді збірників («хрестоматій») статей та уривків з наукових**

**видань, які є об’єктом вивчення в рамках навчальних дисциплін відповідно до затвердженої начальної програми**

**підготовки бакалаврів і магістрів**

(згідно з розпорядження Науково-дослідної частини № 03-21 від 05.05.2017 р.)

Дисципліна \_\_**Математика**\_\_\_\_\_

Кафедра **педагогіки початкової освіти, педагогічний факультет**

Викладач\_\_\_\_\_ **Ткачук О.М.**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Список (не більше 10 позицій) наукових текстів, рекомендованих для включення у збірник текстів («хрестоматію»), що наявні у фондах наукової бібліотеки університету (згідно з електронним каталогом <http://lib.pu.if.ua/lib/>):

1. Концепція базової математичної освіти в Україні.-К.: ІСДО, 1993.

2. В.Н.Боровик і ін. Курс математики.-К.: «Вища школа», 1995.

3. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики.- К.: «Вища школа», 1980.

4. Кухар В.М., Тадіян С.І., Тадіян В.П. Математика: множини. Логіка. Цілі числа. Практикум.- К.: «Вища школа», 1989.

5. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М. і ін. Математика. Посібник для педінс­ти­тутів.- К.: «Вища школа», 1980.

6. Довгий і ін. Курс математики. - І-Ф, «Плай», 2005.

7. Семенович О.Ф. Геометрія. Аксіо­матичний метод.- К.: Рад.школа., 1976.

8. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. - К.: Рад.школа., 1977.

9. Вивальнюк Л.М. і ін. Числові системи . - К.: Вища школа, 1988.

10. Завало С.Т. і ін. Математика. Елементи теорії множин і комбінаторики. Елементи математичної логіки і деякі математичні поняття. (Методичні вказівки). - К.: «Вища школа», 1973.

Подавати даний список у відділ комп’ютеризації наукової бібліотеки або надсилати на адресу бібліотеки [pnu-lib@ukr.net](mailto:pnu-lib@ukr.net)

Контактна особа **–** Гуцуляк Олег Борисович, учений секретар наукової бібліотеки

**Телефон для довідок 59-61-10**

Перевірити наявність хрестоматії у бібліотеці можна за посиланням:

<http://lib.pu.if.ua/elibrary-res.php?a=хрестоматія&nom>=2

**Змістовий модуль 1. Теорія множин.**

**Змістовий модуль 2. Елементи математичної логіки.**

**Змістовий модуль 3. Рівняння, нерівності.**

**Змістовий модуль 4. Функції.**

**Змістовий модуль 5. Кількісна теорія N0. Системи числення.**

**Змістовий модуль 6.** **Подільність чисел.**

**Змістовий модуль 7. Розширення поняття про число. Раціональні   
 числа.**

**Змістовий модуль 8. Дійсні числа. Елементи геометрії. Величини.**

**Змістовий модуль 3. Рівняння, нерівності.**

Ткачук О.М. РІВНЯННЯ. НЕРІВНОСТІ. (Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів спеціальності «Початкова освіта»)/ Івано-Франківськ: Вид-во DPI, 2014. -63 c.

**Короткі теоретичні відомості.**

**Числові вирази.**

**Означення.** *1) Кожне дійсне число є числовим виразом. Такі вирази називають елементарними і позначають великими буквами: А, В, С, і т.д. 2) Якщо А і В – числові вирази, то А+В, А-В, А·В, А:В також числові вирази. В числових виразах можуть бути дужки для зміни порядку дій. Інших числових виразів, крім зазначених вище в п. 1) і 2), немає.*

Якщо в числовому виразі *А* виконати всі зазначені дії (якщо це можливо), то дістанемо дійсне число, яке називають *значенням числового виразу* і позначають *σ(А).* Слід зауважити, що не кожний числовий вираз має числове значення. Якщо у виразі є операції, які неможливо виконати (наприклад, ділення на 0 або добування квадратного кореня із від’ємного числа), то для такого виразу не існує числового значення.

Для спрощення запису виразів приймається:

1) елементарні вирази не брати дужки: 120+36, 75:5;

2) не застосовувати дужки, якщо треба додати і (або) відняти кілька елементарних виразів, причому вказані дії слід виконувати по порядку зліва направо: 23+13-4+5-6;

3) не застосовувати дужки, якщо треба помножити і (або) поділити кілька елементарних виразів, причому дії слід виконувати у вказаному порядку зліва направо: 12:4:3·5;

4) при відсутності дужок спочатку треба виконати дії множення і ділення, а потім додавання і віднімання у вказаному порядку зліва направо.

Порядок виконання операцій при обчисленні значень числового виразу такий:

а) якщо числовий вираз не містить дужок, то треба поділити його на частини, відокремлені одна від одної знаками + та – і обчислити значення кожної такої частини, виконуючи дії множення і ділення в такому порядку, як вони записані у виразі зліва направо. Після цього, замінивши кожну частину її обчисленим числовим значенням, знайти значення виразу, виконавши операції додавання і віднімання зліва направо ділення в такому порядку, як вони записані у виразі;

б) якщо числовий вираз містить дужки, то треба відокремити частини виразу між лівою і правою дужками, що не містять інших дужок, обчислити їх значення за правилом, описаним в п.а) і замінити кожну таку частину її числовим значенням, відкинувши дужки, які її охоплюють.

**Числові рівності.**

**Означення.** *Два числові вирази, з’єднані знаком «дорівнює», називаються числовою рівністю.*

З точки зору математичної логіки числова рівність є висловленням, тому вона може бути істинною або хибною. Наприклад, числова рівність 16+4 = 40:2 є істинною, а рівність 15-4 = 15:3 – хибна.

Розглянемо основні властивості істинних числових рівностей. Нехай задано числові вирази,. Якщо їх значення співпадають, то вони мають такі властивості:

1) рефлективність: (;

2) симетричність: ;

3) транзитивність: .

З цього випливає, що відношення рівності на множині числових виразів є відношенням еквівалентності. Воно розбиває множину всіх числових виразів на класи еквівалентності так, що будь-які два вирази одного класу рівні між собою і представляють одне число, а будь-які два числові вирази різних класів не рівні між собою і представляють різні числа. Наприклад, вирази 3·5-3, 2·6, 24:4+6 належать до одного класу еквівалентності, бо вони всі представляють одне число 12, а вирази 8+3, 12:6+7, 2·9:3 належать різним класам, вони попарно не рівні і представляють різні числа.

**Теореми про властивості істинних числових рівностей.**

Позначимо буквами *a, b, c, d, m* дійсні числа.

**Теорема 1.** *Якщо до обох частин рівності додати одне й те ж дійсне число, то отримаємо істинну числову рівність:*

*(.*

**Теорема 2.** *Якщо від обох частин рівності відняти одне й те ж дійсне число, то отримаємо істинну числову рівність:*

*(.*

**Теорема 3.** *Дві числові рівності можна почленно додати. Отримаємо істинну числову рівність:*

**Теорема 4.** *Якщо обидві частини рівності помножити на одне і те ж число, відмінне від нуля, то отримаємо істинну числову рівність:*

(.

**Теорема 5.** *Якщо обидві частини рівності поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, то отримаємо істинну числову рівність:.*

(.

**Теорема 6.** *Якщо дві числові рівності почленно помножити, то отримаємо істинну числову рівність:*(.

**Числові нерівності.**

**Означення.** *Два числові вирази , з’єднані знаком < (менше) або знаком > (більше), називаються числовою нерівністю.* Наприклад, 2<7, 5>9, 3+6<9, 16:8+3<21:7+5 – числові нерівності. Оскільки вони, як і числові рівності, є висловленнями, вони можуть бути істинними або хибними. Із на ведених прикладів істинними є нерівності 2<7, 16:8+3<21:7+5, а нерівності 5>9, 3+6 <9 є хибними. Нерівності a>b i c>d (або a<b i c<d) називають *нерівностями одного знаку (змісту)*, а нерівності a>b i c<d ( або a<b i c>d) називають *нерівностями протилежного знаку (змісту).*

**Основні властивості істинних числових нерівностей:**

1) антирефлексивність: (; (;

2) антисиметричність: ; ;

3) транзитивність:

.

Отже, числові нерівності володіють властивостями строгого порядку, тому що вони антирефлексивні, антисиметричні і транзитивні. Слід відмітити ще й такі властивості істинних числових нерівностей:

4) для будь-яких двох числових виразів має місце тільки одне із співвідношень: ,,, тобто . Якщо ;

5) для будь-яких числових виразів вираз більший за вираз тоді і тільки тоді, коли різниця є додатна: .

Наступні **властивості істинних числових нерівностей** представлені у вигляді теорем.

**Теорема 1.** *Для будь-яких числових виразів a i b виконується правило: якщо ab , то b: . При зміні знаків отримаєм: якщо a<b, то b>: .*

**Теорема 2.** *Якщо до обох частин нерівностей додати одне і те ж дійсне число, то одержимо істинну нерівність того ж знаку, що й задана: ; або*

**Наслідок**. Будь-який член нерівності можна переносити з однієї частини нерівності в другу, змінивши знак на протилежний:

**Теорема 3.** *Дві нерівності одного знаку можна почленно додавати:*

**Теорема 4.** *Нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати, зберігаючи знак нерівності, від якої віднімамали:*

*.*

**Теорема 5.** *Якщо дві частини нерівності помножити на одне і те ж додатне число, то одержимо числову нерівність того ж знаку, що й задана. Якщо обидві частини нерівності помножити на одне й те ж від’ємне число, то одержимо істинну числову нерівність протилежного знаку:*

*.*

Так як числові нерівності є висловленнями,то над ними можна виконувати операції математичної логіки – кон’юнкцію, диз’юнкцію, імплікацію і т.д. ***Кон’юнкцією*** *двох числових нерівностей називають висловлення, яке утворене із даних нерівностей за допомогою сполучника «і».* Висловлення і є кон’юнкцією нерівностей і записується у вигляді подвійної нерівності *.*

Якщо відомо, що або , то це буде диз’юнкція двох висловлень і записується так: . Нерівності виду () називають нестрогими, на відміну від нерівностей (), які називають строгими нерівностями або просто нерівностями. Слід зауважити, що запис рівносильний диз’юнкції нерівностей або .

**Вирази із змінною.**

Під змінною розуміють букву або будь-яке інше символічне позначення, відмінне від цифри, яка набуває конкретних значень з певної множини *М*, причому елементи цієї множини називають значеннями змінної. Множина значень змінної, при яких вираз є визначеним і має зміст, називається областю визначення виразу і позначається через *Х*. Якщо всі значення, які набуває змінна у виразі, є тільки числами, то така змінна називається числовою. Якщо областю значень змінної є множина R, то змінну називають дійсною. Вирази із змінною позначаються буквами латинського або грецького алфавіту (великими і малими), біля яких в дужках записують змінну. Наприклад, *f(х), φ(х), F(x), A(x).*

**Означення.** *Два вирази f(х) і φ(х) з однією змінною х, визначені на множині Х, називають тотожно рівними, якщо їх області визначення збігаються, і для будь-якого числа а значення виразів при х=а рівні між собою, тобто f(х) = φ(х).*

**Означення.** *Два вирази із змінною f(х) і φ(х), сполучені знаком рівності «=», називають рівністю і записують f(х)=φ(х). Якщо вирази f(х) і φ(х) тотожно рівні, то це записують f(х) φ(х) і називають тотожністю.*

На основі властивостей арифметичних дій над дійсними числами та формул, які їх пов’язують, можна встановити тотожність заданих виразів на основі тотожних перетворень. Під останніми розуміють перехід від заданого виразу до більш простого в результаті допустимих спрощень, в результаті чого отримується вираз, тотожно рівний заданому.

**Рівняння з однією змінною**.

В даному курсі рівняння розглядаються на основі поняття предикату.

**Означення.** *Нехай задано два вирази f(х) і φ(х) із однією змінною х на спільній області визначення Х. Одномісний предикат f(х)=φ(х), х , заданий на множині Х, називають рівнянням з однією змінною х (або з одним невідомим х).*

Множина *Х* називається областю допустимих значень невідомого *х* або *ОДЗ* рівняння. Отже, *ОДЗ* рівняння – це така множина *Х*, з якої дозволяється підставляти у рівняння будь-який об’єкт замість змінних, і при цьому рівняння буде визначеним і буде мати зміст. Вирази із змінною називають частинами рівняння. Вираз *f(х)* називається лівою частиною рівняння, а вираз *φ(х)* – правою частиною.

**Означення.** *Кожний елемент а для якого предикат f(х)=φ(х) перетворюється в істинне висловлення f(а)=φ(а), називається коренем (розв’язком) рівняння*. Отже, сукупність усіх розв’язків рівняння утворює його множину істинності *Т*. Якщо множина *Т* порожня *(Т=)*, то говорять, що рівняння не має розв’язків в *Х*. Якщо *Т=Х*, то говорять, що рівняння є тотожністю на множині *Х*. Про кожний розв’язок рівняння говорять, що він задовольняє рівняння.

**Розв’язати рівняння** – означає знайти значення змінної *х*, при підстановці яких у рівняння одержується істинна числова рівність. Якщо рівняння розглядати як предикат, то розв’язати рівняння – означає знайти множину істинності *Т* цього предикату. Звідси випливає, що множина істинності *Т* предикату *f(х)=φ(х)* – це множина розв’язків (коренів) даного рівняння *f(х)=φ(х)*.

В процесі розв’язування рівняння відбувається його постійне спрощення за певними правилами. Правила переходу від даного рівняння до нового більш простого рівняння базуються на понятті рівносильності рівнянь.

Нехай задано два рівняння (*x* з однією змінною х, визначені на числовій можині Х з множинами розв’язків і відповідно. Рівняння (*x* буде логічним наслідком з рівняння тоді і тільки тоді, коли . Якщо (*x* логічно випливає з , то це позначається так: (*x*. Це означає, що кожний корінь рівняння задовільняє рівняння (*x*. Бувають випадки, коли одночасно перше рівняння логічно слідує з другого рівняння, а друге рівняння логічно слідує з першого:

(*x* і (*x*. Це можливо тоді і тільки тоді, коли ^, тобто, коли .

**Означення.** *Два рівняння (x називаються рівносильними або еквівалентними на числовій множині Х, якщо їх множини істинності співпадають, тобто якщо .* Можна сказати, що два рівняння називають рівносильними (еквівалентними), якщо кожний розв’язок першого рівняння є також розв’язком другого рівняння і навпаки, кожний розв’язок другого рівняння є також розв’язком першого рівняння.

Щоб виконувати спрощення рівняння, треба знати, які перетворення можна виконувати, щоб отримане рівняння було рівносильним даному. Для цього слід використовувати теореми про рівносильність рівнянь.

**Теорема 1**. *Якщо до обох частин рівняння , додати один і той самий алгебраїчний вираз F, який має значення при всіх х Х, то дістанемо рівняння +F, , рівносильне даному рівнянню у множині Х.*

**Теорема 2.** *Якщо обидві частини рівняння , помножити на алгебраїчний вираз F, який визначений і не дорівнює нулю ні при одному значенню х Х, то дістанемо рівняння F, , рівносильне даному рівнянню у множині Х.*

**Теорема 3.** *Нехай маємо рівняння f(х)=0, . Якщо вираз f(х) можна подати у вигляді добутків виразів область визначення кожного з яких збігається з множиною Х, то множина розв’язків рівняння f(х)=0 є об’єднанням множин розв’язків рівнянь .*

**Наслідки.**

1. Якщо до обох частин рівняння додати або відняти одне й те ж число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо в рівнянні перенести доданок (член рівняння) з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

3. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж число,відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Розв’язувати рівняння з однією змінною можна ґрунтуючись на різних теоретичних підходах. Ми розглянемо такі способи розв’язування найпростіших рівнянь: 1) за теоремами про рівносильність рівнянь, 2) на основі взаємозв’язку між компонентами та результатом арифметичних дій.

Поняття рівносильності рівнянь відіграє важливу роль при знаходженні коренів рівняння, тобто при розв’язуванні рівнянь. Звичайно, щоб розв’язати рівняння його заміняють рівносильним йому простішим рівнянням, потім знову цей процес повторюється і так триває до тих пір, поки не прийдемо до рівняння виду х=а або до диз’юнкції рівнянь такого виду, які фактично і є шуканими коренями рівняння.

У рівняннях

*(а)*

, *(б)*

*(в)*

ліва і права частина є раціональні вирази. Такі рівняння називають раціональними рівняннями. Раціональні рівняння, у яких у яких ліва і права частина є цілі вирази, називаються цілими, а якщо ліва або (і) права частина є дробові вирази, то рівняння називається дробовим. Отже, рівняння *(а)* є цілим, а *(б)* і *(в)* – дробові рівняння.

Розв’язуючи дробові рівняння за теоремами про рівносильність рівнянь, можна дотримуватись таких рекомендацій:

1) знайти ОДЗ рівняння;

2) знайти спільний знаменник дробів, які входять у рівняння;

3) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник;

4) виконати усі можливі скорочення в обох частинах рівняння і звести подібні члени;

5) розв’язати утворене ціле рівняння, використовуючи теореми про рівносильність рівнянь;

6) виключити із отриманих коренів рівняння ті, які не входять в ОДЗ рівняння.

Приклад. Розв’язати рівняння .

Перш за все знаходимо ОДЗ рівняння. ОДЗ складається із всіх дійсних чисел, крім тих, які перетворюють знаменники даного рівняння в 0, тобто крім чисел 2 та -2. Отже, *Х=R* крім *х=.*

Тепер звільнимося від знаменника, грунтуючись на теоремі 2. Помножимо обидві частини цього рівняння на вираз , тому що всюди на ОДЗ цей вираз має смисл і не перетворюється на 0 при всіх Одержимо рівняння яке є рівносильним даному на множині *Х.* Наступний крок – зводимо подібні члени і переносимо всі члени рівняння, які не містять х, в праву частину рівняння. Одержимо рівносильне рівняння такого виду: , яке має єдиний корінь *х=8*. Цей розв’язок буде правильним, оскільки він входить в ОДЗ вихідного рівняння.

Деякі рівняння доцільно розв’язувати на основі взаємозв’язку між компонентами і результатом дії. Саме так розв’язують рівняння учні в початковій школі. Щоб використовувати такий метод розв’язку, треба пам’ятати правила знаходження невідомих компонентів дій додавання (доданок), віднімання (зменшуване, від’ємник), множення (множник) і ділення (ділене, дільник). Використовуючи ці правила, можна розв’язати деякі види рівнянь.

**Приклад.** Розв’язати рівняння . Структура цього рівняння така: .

У цьому рівнянні невідома величина міститься в другому множнику, який позначено у виді віконця, а перший множник (4) і добуток (16) – відомі величини. Використавши правило знаходження невідомого множника і виконавши дію 16:4=4, знаходимо: =4. Тепер структура рівняння має вид: . Отже, невідома величина знаходиться в доданку, тому наступна дія 4-1=3 визначає, що . Оскільки риска дробу заміняє дію ділення, то невідома величина тепер міститься в діленому, а, отже, структура рівняння тепер така: 5 . Знаходимо невідоме ділене, для чого множимо дільник (5) на частку (3): 5. Ми отримали рівняння 2*х*+3=15. Переносимо 3 в праву частину рівняння з протилежним знаком: 2*х*=15-3, або 2*х*=12, звідки отримаємо розв’язок  *х=*6.

Фактично, розв’язок рівняння цим способом можна здійснювати і записувати по діях:

1) 16 : 4 = 4;

2) 4 – 1 = 3;

3) 5

4) 15 – 3 =12;

5) 12 : 2 = 6.

Такий метод розв’язування можна використовувати, коли невідома величина міститься тільки в одній частині рівняння і тільки один раз.

**Розв’язування квадратних рівнянь.**

**Означення.** Квадратним рівнянням називають рівняння виду де *x* – змінна,  *a, b, c* – числові коефіцієнти, причому *a.* Коефіцієнт *c* називають вільним членом квадратного рівняння.

Зрозуміло, що квадратне рівняння є рівнянням другого степеня, тому що найвища степінь змінної *x* в цьому рівняння рівна 2 – це показник степеня змінної *х* біля коефіцієнта *a*. Якщо в квадратному рівнянні задано всі три коефіцієнти *a, b, c,* то квадратне рівняння називається повним. Якщо хоча б один коефіцієнт рівний нулю, то квадратне рівняння називається неповним.

Неповне квадратне рівняння виду **завжди** має два дійсні корені. Для їх заходження треба перетворити ліву частину і використати теорему 3 про рівносильність рівнянь. Отримаємо:

;

;

або

*.*

Для розв’язування неповного квадратного рівняння виду треба перенести вільний член в праву частину рівняння, поділити рівняння на коефіцієнт *а* і добути квадратний корінь з отриманого числа, якщо число додатне:

**Приклад.** Розв’язати неповне квадратне рівняння Перенесемо вільний член в праву частину і поділимо обидві частини рівняння на -2:

Добувши квадратний корінь із числа 4, отримаємо два дійсні корені квадратного рівняння: та

**Приклад**. Розв’язати неповне квадратне рівняння В лівій частині рівняння виносимо за дужки і прирівнюємо до 0 кожний множник.

Ми отримали два дійсних корені та

Повне квадратне рівняння має вид Воно може мати два різних дійсних корені, може мати два рівні дійсні корені або не мати жодного дійсного кореня. Це залежить від дискримінанту квадратного рівняння.

**Означення.** *Дискримінантом квадратного рівняння називається вираз і позначається буквою D.*

Розглянемо випадки розв’язків квадратного рівняння залежно від значення дискримінанту D.

1. Дискримінант **D>0.**

В цьому випадку із дискримінанту можна отримати два значення квадратного кореня, і відповідно, отримати **два різних дійсних корені** та :

Останні дві формули називають **формулами коренів квадратного рівняння**

2. Дискримінант **D=0.**

В цьому випадку , і ми отримаємо два рівних дійсних корені .

3. Дискримінант **D<0.**

В цьому випадку для знаходження коренів квадратного рівняння треба добути квадратний корінь із від’ємного числа, що в множині R зробити неможливо. Відповідно до цього, рівняння не буде мати дійсних коренів.

**Алгоритм розв’язку квадратного рівняння :**

1) визначити вид квадратного рівняння – повне чи неповне;

2) якщо рівняння неповне – розв’язати його згідно розглянутих вище способів;

3) якщо квадратне рівняння повне - обчислити його дискримінант за формулою ;

4) якщо , то за допомогою формули коренів квадратного рівняння знайти їх значення;

5) якщо , то записати, що квадратне рівняння не має коренів.

**Приклад.** Розв’язати рівняння.

Запишемо дане рівняння у формі, яку має квадратне рівняння, тобто по степенях спадання змінної. Для цього перенесемо члени з правої частини в ліву і прирівняємо до 0. Отримаємо таке квадратне рівняння: Обчислюємо його дискримінант: Оскільки D>0**,** то буде два різних дійсних корені, які можна обчислити за формулами коренів квадратного рівняння:

Отже,

Так як = то або

**Поняття про систему рівнянь з двома змінними.**

**Означення.** *Нехай задано два рівняння з двома змінними х і у, визначеними на множині Х:*

*та .*

*Кон’юнкцію цих рівнянь називають системою рівнянь з двома змінними і позначають за допомогою фігурної дужки:*

Розв’язати систему рівнянь – означає знайти всі пари чисел *(а,b)*, при підстановці яких замість відповідних змінних *(х=а; у=b)* в кожне рівняння воно буде перетворюватися в істинну числову рівність. Отже, розв’язком системи рівнянь є пара чисел *(а, b)*, при підстановці яких відповідно замість *х* та *у* обидва рівняння системи стануть істинними числовими рівностями:

Іншими словами, розв’язати систему рівнянь означає знайти множину розв’язків системи. Оскільки система рівнянь є кон’юнкцією двох предикатів, то нам треба знайти множину істинності кон’юнкції двох предикатів, тобто переріз множин істинності кожного предикату зокрема.

**Способи розв’язування системи рівнянь.** Систему рівнянь з двома невідомими можна розв’язувати різними способами. Ми розглянемо тільки 3 способи:

1) спосіб підстановки;

2) спосіб алгебраїчного додавання;

3) графічний спосіб.

Спосіб підстановки. Це найбільш універсальний спосіб розв’язування системи рівнянь, який можна застосовувати відразу до заданої системи без перетворення рівнянь, які входять до неї. Суть методу полягає в тому, Щоб виключити з одного із рівнянь одну змінну, і отримати, фактично, рівняння з однією змінною. Для цього в одному рівнянні системи ми виражаємо одну змінну через другу, тобто, наприклад, замість рівняння ми дістаємо рівняння *x= φ(y)*. Підставивши в друге рівняння всюди замість *х* отриманий вираз *φ(y)*, ми отримаємо рівняння з одним невідомим *у*, яке можна розв’язати. Отримане значення у треба підставити в рівняння *x= φ(y)* або в будь-яке рівняння системи для обчислення значення другого невідомої *х*. В результаті отримуємо розв’язок системи, який можна записати у вигляді кортежу *(a, b)* або у вигляді системи

**Приклад.** Розв’язати способом підстановки систему рівнянь

**Розв’язування.** Оскільки в другому рівнянні системи *х* не має коефіцієнту і є в першій степені, то доцільно саме з другого рівняння виразити *х* через *у*. Для цього треба друге рівняння розв’язати відносно *х*, тому всі члени другого рівняння, крім *х*, переносимо в праву частину з протилежними знаками. Отримаємо: *х = 8 – у*. Тепер підставляємо в перше рівняння системи замість *х* отриманий вираз *8 – у* і отримаємо рівняння відносно одного невідомого *у*:

*3(8 – у) – 2у = 9.*

Розкриємо дужки, перенесемо вільні члени в праву частину і отримаємо:

*24 – 3у – 2у = 9*

*-5у = -24 + 9*

*-5у = -15*

*5у = 15*

*у = 15 : 5*

*у=3.*

Отриманий розв’язок для змінної у підставляємо у рівняння *х = 8 – у* і отримаємо значення для *х:*

*х = 8 – 3*

*х = 5.*

Робимо перевірку правильності розв’язку. Для цього у задану систему підставляємо отримані значення невідомих: *х = 5* та *у = 3*:

Виконавши вказані обчислення, отримаємо істинну числову рівність:

Отже, система рівнянь розв’язана правильно, а розв’язок її

Суть другого способу – алгебраїчного додавання - полягає в тому, що при додаванні рівнянь системи, які містять біля однієї з невідомих рівні коефіцієнти з протилежними знаками ми отримаємо коефіцієнт, рівний 0, тобто цієї невідомої величини в рівняння не буде. Ми отримуємо рівняння з однією невідомою величиною, яке можна розв’язати і знайти її значення. Для знаходження другої невідомої величини можна використати будь-яке рівняння системи.

Щоб застосувати спосіб алгебраїчного додавання і отримати біля однієї з невідомих у різних рівняннях системи коефіцієнти, рівні за величиною і протилежні за знаком, можна домножити рівняння на потрібні коефіцієнти, які визначаються в кожному конкретному випадку.

**Приклад.** Розв’язати систему рівнянь

способом алгебраїчного додавання.

**Розв’язування.** Оскільки біля кожної з невідомих коефіцієнти різні по величині, то вже це свідчить на необхідність під коректувати дану систему, щоб можна було застосувати цей спосіб розв’язування. Так як біля  *у* коефіцієнти мають протилежні знаки ( -2 в першому рівнянні та +1 у другому), то для отримання рівних по величині коефіцієнтів біля *у* достатньо друге рівняння системи помножити на 2. Отримаємо таку систему:

Перенесемо вільний член в другому рівнянні в праву частину і додамо друге рівняння до першого по частинах:

А після додавання отримаємо рівняння *3х -2у + 2х + 2у = 9 + 16*. Після зведення подібних членів невідомої *у* в рівнянні не буде, бо біля неї коефіцієнт рівний *0 (2у – 2у = 0).* Отже, ми отримали рівняння *3х + 2х = 25,* яке містить одну невідому величину *х*. Розв’язок цього рівняння дає її значення *х = 5*.Для отримання значення *у* треба замість *х* підставити його значення в будь-яке рівняння системи, яке містить *у*. Використаємо перше рівняння *3х - 2у = 9*. Тоді

*3·5 - 2у = 9;*

*15 – 2у = 9;*

*-2у = 9 – 15;*

*-2у = -6;*

*2у = 6;*

*у = 3*.

Отже, розв’язок заданої системи рівнянь можна записати у вигляді кортежу (5; 3) або у вигляді системи

На цьому прикладі показаний очевидний факт, що розв’язок не залежить від способу розв’язування.

**Розв’язування задач за допомогою складання рівнянь**

**і системи рівнянь.**

Навчити учнів розв’язувати задачі за допомогою складання рівнянь – одне із важливих завдань вчителя математики, оскільки такі вміння і навики потрібні на різних уроках, найчастіше на уроках фізики, хімії, географії, біології. Тому складати рівняння для знаходження розв’язку задач учні починають вже в початковій школі. Очевидно, що вчителі-класоводи самі повинні досконало володіти такими вміннями.

З текстових задач в школі найчастіше зустрічаються такі види:

1) задачі про абстрактні числа або про величини одного роду; 2) задачі з величинами різними роду. Розглянемо коротко способи складання рівнянь або стистем рівнянь для кожного виду задач.

**1. Задачі про абстрактні числа або про величини одного роду.**

Найпростішими задачами такого виду є задачі на знаходження чисел за їх сумою (або різницею) і кратним відношенням. Всі задачі цього виду зводяться до розв’язування простого рівняння або системи рівнянь виду

**Задача 1.** *Фермер вивіз на елеватор пшениці втричі більше, ніж жита, всього 360 т. Скільки окремо жита і пшениці вивіз фермер на елеватор?*

**Розв’язування.** Позначимо масу жита, яку вивіз фермер, через *х*. Оскільки за умовою задачі пшениці він вивіз втричі більше, то маса пшениці становить *3х*. Разом пшениці і жита вин вивіз 360 тон. Отже, можна скласти таке просте рівняння: *х+3х = 360*. Його розв’язок такий:

*4х = 360*

*х=360:4*

*х=90.*

Через *х* позначене жито, яке вивіз фермер на елеватор. Пшениці вивезено втричі більше, тобто 90·3=270.

**Відповідь**. Фермер вивіз на елеватор 270 тон пшениці і 90 тон жита.

Перевірка: 270 + 90 = 360 (т).

**Задача 2**. *Різниця двох чисел рівна 30. Знайти ці числа, якщо половина першого числа у 5 разів більша від четвертини другого числа.*

**Розв’язування.** Можна скласти рівняння або систему рівнянь.

**а) Розв’язування за допомогою складання рівняння.** Позначимо перше число через *х*, тоді друге число буде рівне *х – 30*. Співвідношення цих чисел за умовою задачі дає нам таке рівняння:

Для знаходження розв’язку помножимо обидві частини рівняння на 4. Отримаємо:

Ми знайшли перше число. Друге число рівне *х* – 30, тобто 50 – 30 = 20.

**Відповідь.** Перше число 50, друге число 20.

Перевірку правильності розв’язку зробіть самостійно.

**б) Складемо систему рівнянь** для розв’язування цієї самої задачі. Позначимо через *х* перше число, через *у* – друге число. За умовою задачі їх різниця рівна *30*, тому перше рівняння системи таке: *х – у = 30*. Аналізуємо задачу далі. Половина першого числа рівна , а четверта частина другого числа рівна Отримаємо друге рівняння системи: Отже, ми отримали систему рівнянь:

Розв’яжемо її методом підстановки. Для цього визначимо з першого рівняння х і підставимо в друге рівняння:

Щоб позбутися знаменника, помножимо обидві частини рівняння на 4:

Для знаходження значення х використаємо формулу і отримаємо: .

**Відповідь.**

Наступним видом задач з величинами одного роду є задачі на знаходження чисел за їх сумами і різницями. Для їх розв’язування складають систему рівнянь виду Для прикладу розв’яжемо таку задачу.

**Задача.** *У двох мішках 90 кг цукру. В першому мішку на 10 кг цукру більше, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру в кожному мішку?*

**Розв’язування.** Нехай в першому мішку було *х* кг цукру, тоді в другому мішку цукру було *у*  кг. У двох мішках разом було 90 кг, тому перше рівняння буде таким: *х + у = 90*. Відомо, що в першому мішку на 10 кг цукру більше, тому друге рівняння має вид: *х – у = 10*. Отримаємо систему рівнянь:

Розв’яжемо її методом алгебраїчного додавання. Додавши друге рівняння до першого, отримаємо:

,

Першого рівняння знаходимо значення у: у = 90 – х, або у = 90 – 50; у = 40.

**Відповідь.**

Цю задачу можна розв’язати складанням не системи рівнянь, а звичайного рівняння. Позначимо через *х* кількість цукру в першому мішку, тоді в другому мішку цукру буде *х – 10* кг. Разом в двох мішках є 90 кг цукру. Складаємо рівняння:

*х + (х – 10) = 90.*

Розкриваємо дужки, зводимо подібні члени, переносимо відомі члени в праву частину рівняння:

*х + х – 10 = 90;*

*2х = 90 + 10;*

*2х = 100;*

*х = 50.*

Це маса цукру в першому мішку. В другому мішку на 10 кг цукру менше, тобто *50 – 10 = 40* кг.

**Відповідь.** В першому мішку 50 кілограмів цукру, а в другому – 40 кілограмів.

**2. Задачі з величинами різного роду.**

В задачах цього виду переважно мова йде про трійки величин, пов’язаних між собою різними залежностями, наприклад, час – відстань – швидкість; ціна – вартість – кількість і т.д. Розглянемо таку задачу.

**Задача*.*** *Фермер мав засіяти поле площею 280 га до певного строку, але засівав щодня на 7 га більше, ніж запланував, і тому закінчив сівбу на 2 дні раніше строку. За скільки днів фермер фактично засіяв поле?*

**Розв’язування.** В залежності від того, яку величину ми позначимо через *х*, у нас будуть виходити різні рівняння. Розглянемо одне із них. Позначимо через *х* кількість днів, які фактично тривала сівба. Тоді за планом на сівбу фермер планував витратити *х + 2* дні. Щодня фактично фермер засівав по га, а планував засівати по га. В умові сказано, що різниця між цими величинами становить 7 га. Ми отримали рівняння: 7. Для його розв’язання перенесемо 7 в ліву частину і зведемо до спільного знаменника:

;

.

Розв’язком цього квадратного рівняння є два числа: = -10. Від’ємне значення *х* не задовольняє умову задачі, тому єдиний розв’язок *х =8.*

**Відповідь.** Фермер засіяв поле за 8 днів.

Слід відмінити, що складене рівняння є не єдиним можливим рівнянням для розв’язку такої задачі. В залежності від того, яку величину ми виберемо за невідому і позначимо її через х, ми отримаємо різні рівняння або систему рівнянь. Очевидно, що незалежно від вибраного рівняння відповідь має бути однакова. Для прикладу розв’яжемо останню задачу за допомогою системи рівнянь.

Позначимо через *х* кількість днів, які фактично затрачено на сівбу, і при цьому фермер фактично засівав по *у* гектарів щодня. Згідно плану він мав потратити на сівбу *х+2* дні і засівати щодня по *у-7* гектарів. Площа посіву незмінна – *280* га. Тому можна скласти таку систему рівнянь:

Розв’яжемо цю систему способом підстановки. З першого рівняння можна визначити у і підставити в друге рівняння:, і отримаємо

, розв’язком якого є два числа:. Очевидно, що розв’язком задачі є тільки перший корінь.

**Нерівності.**

**Означення.** *Нехай f(х) та φ(х) – врази із змінною, визначені на множині Х. Тоді одномісний предикат виду f(х) > φ(х) або f(х) <φ(х), хХ, називається* ***нерівністю*** *з однією змінною х.*

Нерівності, як і рівняння, означаються як одномісний предикат, тому всі поняття і властивості, визначені для рівнянь, стосуються і нерівностей. Для однозначності будемо розглядати нерівності виду *f(х) > φ(х)*, але всі поняття і властивості поширюються також і на нерівності виду *f(х) <φ(х).*

З кожною нерівністю *f(х)* *> φ(х)*  пов’язані дві множини: це множина *Х* – множина допустимих значень змінної х, та множина *Т* – множина розв’язків нерівності, причому *Т Х*.

**Означення.** *Областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності f(х) > φ(х) називається множина всіх тих значень змінної х, при яких вирази f(х) та φ(х) визначені і мають смисл, тобто приймають дійсні значення.* Значить, ОДЗ нерівності є переріз ОДЗ виразів *f(х)* та *φ(х)*.

Множиною розв’язків нерівності, як правило, є не окремі числа, а числовий проміжок. **Розв’язати нерівність** – *означає знайти такі значення змінної х, при підстановці яких в нерівність замість змінної нерівність перетворюється в істинну числову нерівність.* Множина всіх таких значень змінної утворює множину *ТХ*. Це значить, що жодне значення змінної *х*, яке не належить ОДЗ, не може бути розв’язком нерівності. Наприклад, ОДЗ нерівності *5х>х+12* є множина всіх дійсних чисел, тобто *Х=(-)*. Інша форма запису Х=. Множина розв’язків заданої нерівності *х >3*, або Т=. Множину розв’язків нерівності зображають на числовій прямій.

0 3

Нерівності виду *f(х) > φ(х)* або *f(х) <φ(х)* називають **строгими нерівностя­ми**. Крім них розглядають ще й нерівності виду *f(х) φ(х)*, задані на множині *Х*, які є диз’юнкцією нерівності *f(х) > φ(х)* і рівності *f(х) = φ(х),* яка є рівнянням. Такі нерівності називають **нестрогими**, а їх розв’язками є об’єднання множини розв’язків нерівності та рівняння.

**Рівносильні нерівності.**

Поняття логічного слідування і рівносильності зберігається і для нерівностей.

**Означення**. *Нехай задано дві нерівності i , визначені на множині Х з множинами розв’язків відповідно. Ці дві нерівності будуть рівносильні на множині Х, якщо множини їх розв’язків співпадають, тобто коли .*

Поняття рівносильних нерівностей має важливе значення при розв’язуванні нерівностей при заміні даних нерівностей іншими. Така заміна грунтується на теоремах про рівносильності нерівності.

**Теореми про рівносильності нерівності.**

Нехай задано нерівність , *хХ*, де *х* – ОДЗ нерівності.

**Теорема 1.** *Якщо до обох частин нерівності , хХ, додати алгебраїчний враз F(х), який визначений на всій множині Х, то одержимо нерівність , рівносильну заданій.*

**Наслідок 1.** Якщо до обох частин нерівності , *хХ*, додати те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

**Наслідок 2.**Члени нерівності можна переносити з однієї частини нерівності в другу, змінивши знак на протилежний.

**Теорема 2*.*** *Якщо алгебраїчний вираз F(х) додатній, не рівний 0 і визначений при всіх значеннях хХ, то нерівності та рівносильні.*

**Теорема 3.** *Якщо обидві частини нерівності , хХ, помножити на алгебраїчний вираз F(х), не рівний 0, від’ємний і визначений при всіх значеннях хХ, то нерівності та рівносильні.*

**Наслідок 1.** Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

**Наслідок 2.** Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на те саме від’ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

**Наслідок 3.** Якщо змінити знаки в обох частинах нерівності і знак самої нерівності на протилежні, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

**Розв’язування нерівностей 1-го степеня з однією змінною.**

Основним загальним методом розв’язування нерівностей є метод рівносильних перетворень, тобто таких перетворень, за допомогою яких із нерівності отримують більш просту, рівносильну нерівність. Розглянемо розв’язування нерівностей 1-ого степеня з однією змінною, яку в загальному випадку можна записати так: . Коефіцієнти це сталі дійсні числа, деякі з них можуть бути рівні 0. Щоб розв’язати останню нерівність, треба в лівій частині нерівності зібрати всі доданки, які містять *х*, а в правій – всі коефіцієнти без *х*: , або . Позначимо ; , і отримаємо нерівність першого степеня виду **.** В залежності від знаків коефіцієнтів цієї нерівності можуть бути такі розв’язки нерівності :

1)

За те на додатне число отримаємо розв’язок нерівності: . Отже, у цьому випадку множина істинності предикату .

*.*

В цьому випадку коефіцієнт треба поділити на від’ємне число , тому нерівність змінить знак на протилежний, і розв’язок нерівності буде , тобто .

3).

В цьому випадку для знаходження розв’язку нерівності треба поділити від’ємне число на додатне число , тому нерівність не змінить знак. Отже, розв’язок нерівності має вид: , або .

4) .

При таких значеннях коефіцієнтів треба знайти частку від ділення двох від’ємних чисел, яка буде додатною, але знак нерівності зміниться на протилежний: , тобто .

5) .

В цьому випадку нерівність не має розв’язку, тобто .

6) .

Якщо коефіцієнт , то розв’язок нерівності визначається знаком коефіцієнту : при додатному розв’язком буде будь-яке додатне дійсне число, тобто , а при від’ємному розв’язком нерівності є всі від’ємні дійсні числа, тому .

**Розв’язування квадратних нерівностей.**

Графіком квадратної функції як відомо із шкільного курсу математики, є парабола. Розміщення параболи на декартовій площині дає можливість розв’язати нерівність. Розглянемо різні випадки розміщення параболи, які визначаються коефіцієнтами *a, b, c.*

1) Коефіцієнт ***a>0*.**

Вітки параболи напрямлені вгору. Якщо дискримінант додатній, то парабола перетинає вісь абсцис в двох різних точках (які є коренями квадратного рівняння ), і розв’язок можна записати у вигляді одного суцільного проміжку або двох нескінченних проміжків в залежності від знаку нерівності. Якщо дискримінант дорівнює нулю, то існує розв’язок тільки нестрогої нерівності, який визначається коренем рівняння. Якщо дискримінант від’ємний, то розв’язком нерівності множина всіх дійсних чисел R, а нерівність немає розв’язку.

2) Коефіцієнт ***a<0*.**

Вітки параболи напрямлені вниз. Якщо дискримінант додатній, то парабола перетинає вісь абсцис в двох різних точках (які є коренями рівняння ), і розв’язок можна записати у вигляді одного суцільного проміжку або двох нескінченних проміжків в залежності від знаку нерівності. Якщо дискримінант дорівнює нулю, то існує розв’язок тільки нестрогої нерівності, який визначається розв’язком рівняння . Якщо дискримінант від’ємний, то розв’язком нерівності є множина всіх дійсних чисел R, а нерівність немає розв’язку.

Отже, для розв’язування квадратної нерівності можна використати такий алгоритм:

1) перенести всі члени нерівності в ліву частину і звести подібні члени;

2) визначити знак коефіцієнту *а* і, відповідно, напрям віток параболи;

3) прирівняти квадратний тричлен до 0 і знайти корені отриманого квадратного рівняння, які є точками перетину параболи з віссю абсцис;

4) в залежності від знаку нерівності і напряму віток параболи знайти значення *х*, які є розв’язками нерівності.

**Приклад.** Розв’язати нерівність .

**Розв’язування.** Переносимо в ліву частину всі члени нерівності і зведемо подібні члени. Отримаємо:

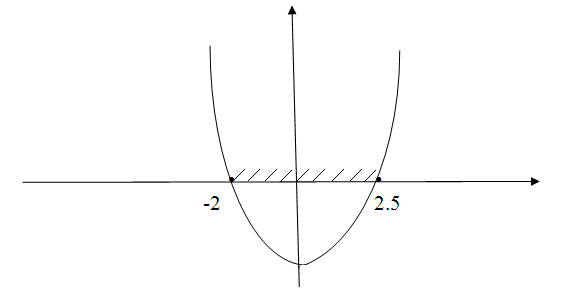
;

.

Коефіцієнт *а* додатній (*а*=2), тому вітки параболи напрямлені вгору. Прирівняємо квадратний тричлен до нуля і знайдемо корені квадратного рівняння . Дискримінант дорівнює -4·2·(-10)=81. Отже, . Тому корені рівняння такі:

.

Знаючи корені рівняння (точки перетину з віссю *х*) та напрям віток параболи, можна схематично накреслити графік параболи:



Даний тричлен буде від’ємний (< 0) при всіх значеннях *х*, які знаходяться на проміжку (-2; 2.5). Отже, розв’язок нерівності: .

**Системи нерівностей з однією змінною.**

Оскільки нерівності *х* однією змінною є одномісними предикатами, то над ними можна виконувати логічні операції.

**Означення.** *Кон’юнкція нерівностей з однією змінною i , визначених на множині Х, називається системою нерівностей з однією змінною х і записується за допомогою фігурної дужки:*

**Розв’язати систему нерівностей** – означає знайти значення змінної, які задовольняють кожну нерівність системи. Тому множина розв’язків системи – це переріз множин розв’язків нерівностей, які входять до неї. Особливість розв’язування системи нерівностей полягає в тому, що кожна нерівність розв’язується незалежно від інших, а суть системи полягає тільки у виборі спільного розв’язку для всіх заданих нерівностей, яких може бути 2, 3, 4, і т.д.

**Приклад**. Розв’язати систему нерівностей

Розв’язуємо кожну нерівність окремо і отримуємо результат:

Якщо позначити через множину розв’язків першої нерівності, через - множину розв’язків другої нерівності, то множина розв’язків системи нерівностей . Для даної системи , a .

Розв’язком системи нерівностей є переріз множин розв’язків кожної нерівності, тому , або . Слід зауважити, що розв’язком системи нерівностей можуть будь-які числові проміжки, окремі числа або порожня множина.

**Приклад.** Розв’язати систему нерівностей

Виконавши всі спрощення на основі теорем про рівносильні нерівності, отримаємо таку систему нерівностей: або

Тому розв’язком системи нерівностей є єдине число .

**Сукупності нерівностей і їх розв’язування.**

Ми розглянули кон’юнкцію нерівностей, яка називається системою нерівностей. Тепер розглянемо диз’юнкцію нерівностей, яка фактично є диз’юнкцією предикатів (оскільки нерівність означається як одномісний предикат). Відповідно до теорії предикатів множина істинності диз’юнкції предикатів є об’єднанням множин істинності кожного предикату, який входить в сукупність.

**Означення.** *Диз’юнкція нерівностей з однією змінною i , визначених на множині Х, називається сукупністю нерівностей з однією змінною х і записується за допомогою квадратної дужки:*

**Розв’язати сукупність нерівностей** – означає знайти значення змінної, які задовольняють хоча б одну нерівність сукупності. Тому множина розв’язків сукупності нерівностей є об’єднанням множин розв’язків кожної нерівності зокрема. Якщо позначити через множину розв’язків першої нерівності, через - множину розв’язків другої нерівності, то множина розв’язків системи нерівностей . В сукупність нерівностей, як і в їх систему, може входити не тільки дві, а будь-яка кількість нерівностей, кожна із яких розв’язується незалежно від інших і відповідно, шукається об’єднання (для сукупності) або переріз (для системи) відповідного числа множин істинності (розв’язків) кожної нерівності.

Окремо слід розглянути розв’язування нерівностей виду та .

Розв’язування нерівності зводиться до відшукання розв’язку сукупності таких систем нерівностей:

Розв’язування нерівності зводиться до відшукання розв’язку сукупності таких систем нерівностей:

Та виконання операцій перерізу множин істинності (для системи) і об’єднання множин істинності (для сукупності) нерівностей.

**Змістовий модуль 4. Функції.**

**Поняття функції**

В природі, у виробничих процесах одні величини змінюються, тобто змінюються їх чисельні значення, а деякі величини залишаються постійними. Наприклад, при рівномірному русі час і віддаль змінюються, в той час як швидкість руху залишається постійною; із шкільного курсу фізики відомо, що при нагріванні газу тиск і темпе­ратура газу змінюються, а маса і об’єм газу залишаються без змін. Такі прості приклади допомагають зрозуміти відмінність між постійними і змінними величинами, поняття яких є одними із основних понять в математиці.

Змінною величиною називається величина, яка може приймати різні чисельні значення в даному процесі.

Постійною величиною називається величина, яка не змінює свого чисельного значення в даному процесі.

***Примітка:*** *Величини, які зберігають своє чисельне значення при будь-яких умовах, називаються абсолютними константами. Наприклад: число π=3.141596… .*

Характер зміни величин дуже різноманітний. Одні величини можуть приймати тільки цілі додатні значення, інші необмежені від’ємні значення і т.д. Розрізняють дискретні змінні, які можуть приймати скінченну або нескінченну множину ізольованих числових значень, і неперервні змінні, які можуть приймати на відрізку *[a,b]* будь-які проміжні значення *a<x<b* (неважливо в якому порядку). Для математики особливий інтерес представляють саме змінні величини, які є об’єктом вивчення багатьох математичних дисциплін.

При вивченні і дослідженні різних явищ природи, розв’язанні технічних задач доводиться розглядати не стільки змінні величини, взяті окремо, скільки зв’язок між ними, тобто залежність однієї величини від іншої. В природі не існує змінних величин, які б змінювалися ізольовано, без всякого зв’язку з іншими величинами. Наприклад, шлях, пройдений тілом, можна розглядати як величину, яка змінюється в залежності від зміни часу, тобто пройдений шлях є функцією часу. Віддаль, яку пролетить кинутий м’яч, залежить від маси м’яча, його початкової швидкості. Щоб абстрагуватися від конкретних іменованих величин, математики ввели поняття функціональної залежнос­ті, або функції.

Розглянемо дві множини *X* i *Y*, елементи яких будемо позначати маленькими буквами *x* i *y* відповідно. Задати відповідність між множинами *Х* і *Y* – це значить вказати правило, по якому для кожного числа *х* із множини *Х* вибирається одне, декілька або навіть нескінченна кількість чисел у із множини *Y*. При цьому може виявитися, що деяким числам *х* із *Х*  не буде відповідати ні одне число *у* із *Y*. Наприклад, якщо множини *Х* і *Y* –множини дійсних чисел, то задавши закон відповідності між *Х* і *Y* як *у=х2* ми для двох значень *х*, які відрізняються знаком, отримаємо одне й те ж значення *у*. Для закону відповідності  для *х <1* на множині дійсних чисел не відповідає ніяке значення *у*. Відповідність між множинами *Х* і *Y* звичайно позначають малими (рідше – великими) буквами латинського або грецького алфавіту і пишуть: і т.д.

Припустимо, що кожному елементу *х* із множини *Х* по деякому закону *f* поставлено у відповідність один елемент *у* із множини *Y*, який позначимо так: *у= f(х).* Закон відповідності *f* називається функцією із *Х* в *Y*, або відображенням множини *Х* в *Y*. Сам термін “*функція*” ввів Лейбніц в 1692 році, а позначення *f(х)* належить Ейлеру. Таким чином, якщо задано відображення *f* множини *Х* в множину *Y*, то кажуть, що на множині *Х* визначена функція *f*, яка приймає значення *у= f(х)* із множини *Y*. Змінну величину *х* називають незалежною змінною, або аргументом, а змінну величину *у*-залежно змінною величиною, або функцією. Множина *Х* називається областю визна­чення функції, а множина *Y* – множиною значень функції, або областю зміни функції. Якщо змінні *х* і *у* розглядати як декартові координати точок на площині, то *множина точок координатної площини хОу з координатами (х; f(х)) називається графіком функції y= f(х)*. В означенні поняття функції суттєвим є те, що, задаючи правило, по якому для даного значення *х* отримується значення *у*, необхідно також вказати область визначення функції, тобто визначити множину *Х*. Множину *Y*можна не вказувати явно, оскільки сам закон відповідності вже визначає множину значень функції. Якщо область визначення функції не вказана явно, то під нею розу­міється така множина *Х*, для якої для кожного елемента *х* із *Х* однозначно визначено правило вибору єдиного значення *у*. Наприклад, для функції, заданої рівністю *у=1/х* область визначення буде будь-яким дійсним числом, крім **нуля**, оскільки на нуль ділен­ня не можливе в множині дійсних чисел.

**Способи задання функції**

*Задати функцію - означає встановити правило (закон), згідно якого по даних значеннях незалежної змінної (аргументу) знаходимо відповідне їй значення функції*.

Розглянемо основні способи задання функцій.

**Табличний спосіб**. При використанні цього способу задається таблиця значень, в якій у певному порядку записується значення незалежної змінної *х1, х2, х3, …, хn* і відповідні їх значення функції *у1, у2, у3, …, уn.* Прикладом можуть бути таблиці логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій і ін. Табличний спосіб задання поширений в техніці, при записі числових даних експериментів. Перевагою табличного способу задання функції є можливість визначення конкретних значень функції без додаткових обчислень, а недоліком є те, що він визначає функцію не повністю, а тільки для дискретного набору аргументу, що не дає наочного зображення характеру зміни функції.

**Графічний спосіб.** Залежність між значеннями *х* та *у* задається у вигляді лінії, найчастіше в декартовій системі координат. Цей спосіб задання функції не дає можли­вос­ті точно визначити числові значення аргументу. Перевагою методу є його наочність. Графічний спосіб в деяких випадках може бути єдиним способом задання функції, наприклад, при використанні самописців для запису результатів досліду (баpограф, термограф, масспектрометр і ін.).

**Аналітичний спосіб.** В цьому способі функція задається аналітично, тобто за допомо­гою формули, яка дає можливість для кожного значення аргументу *х* знайти відповідне значення функції *у.* При аналітичному способі функція може бути задана і декількома різними формулами. Наприклад:



Якщо залежність між *х* та *у* задана формулою, розв’язаною відносно *у*, тобто формулою виду *у=f(х)*, то кажуть, що функція *у* задана в явному вигляді. Наприклад, функції задані явно.

Якщо значення *х* та *у* пов’язані рівнянням виду *F(х,у)=0*, тобто формула не є розв’язаною відносно *у*, то кажуть, що функція *у=f(х)* задана неявно. Наприклад, рівняння  неявно визначає функцію . Відмітимо, що будь-яку неявно задану функцію можна представити в явному виді і навпаки.

Ще одна різновидність аналітичного задання функції – це **параметричний спосіб**. Він використовується тоді, коли аргумент *х* та функція *у* є функціями третьої величини – наприклад, *t*, яка називається параметром і приймає значення на множині *Т*:

 .

В цьому випадку кожному чисельному значенню *t0* параметра *t* із області зміни *Т* ставиться у відповідність чисельні значення  величин *х* та у. Така відповідність через параметр *t* визначає *у* як функцію *х*.

**Аналітичний спосіб** задання функції є найбільш поширеним способом задання. Це основний спосіб задання функції в математичному аналізі. Компактність, зручність, наочність, можливість обчислення значення функції при довільному значенні аргументу із області визначення, можливість застосування апарату математичного аналізу до таких функцій – основна перевага аналітичного способу задання функцій. Недоліками цього способу є недостатня наочність, а подекуди і складність обчислень.

**Словесний спосіб.** Цей спосіб полягає в тому, що функціональна залежність між *х* та *у* виражається словами. Наприклад: функція *у=Е(х)*-ціла частина числа *х*. В математиці така функція читається так: *у* дорівнює *є* від *х*. Це найбільше із цілих чисел, яке не перевищує *х*. Наприклад: при *х=3.67 у=3*; при *х =-2.89 у=-3*.

**Напівграфічний спосіб.** При такому способі значення функції задаються у вигляді відрізків на координатній площині, а значення аргументу – у вигляді чисел, простав­ле­них на кінцях відповідних відрізків функції. Такий спосіб задання функції не знайшов широкого застосування і зустрічається дедалі рідше.

**Пряма і обернена функції**

*Функція у=f(х) називається оборотною, якщо вона приймає кожне своє зна­чення один раз.*

Нехай *f* - відображення множини *Х* на множину Y. Якщо для кожного елемента *у* із множини *Y* існує єдиний елемент множини *Х*, для якого *f(х)=у*, то відображення *f* називають *“***оборотним**”. Відображення, обернене до *у*, позначають *f-1* і називають **оберненою** функцією. Функція *у= f(х)* при цьому називається **прямою** функцією.

множина значень *f-1*є областю визначення функції *f.* Функції *f-1*та *f* називаються **взаємно оберненими**. Наприклад: функції *у=2х-1* та *у=(х+1)/2.*

Для існування оберненої функції необхідно і достатньо, щоб для даної функції різним значенням аргументу з області визначення відповідали різні значення функції. Отже, щоб довести, що для даної функції не існує оберненої, достатньо вказати якісь два значення аргументу , для яких . По графіку прямої функції  легко визначити, чи має дана функція обернену. Якщо будь-яка пряма, паралельна до осі *ОХ*, перетинає графік прямої функції не більше ніж в одній точці, то обернена функція *х= f-1 (у)* існує.

Наприклад, функція  (рис.1.) не має оберненої функції, тому що двом різним точкам з області визначення: вона ставить у відповідність одну точку , тобто . А функція  має обернену функцію , тому що двом різним точкам вона ставить у відповідність дві різні точки .

Якщо пряма функція *у=f (х)* строго монотонна на множині *Х*, то обернена функція *х= f-1 (у)* існує і також строго монотонна на множині *Y*.

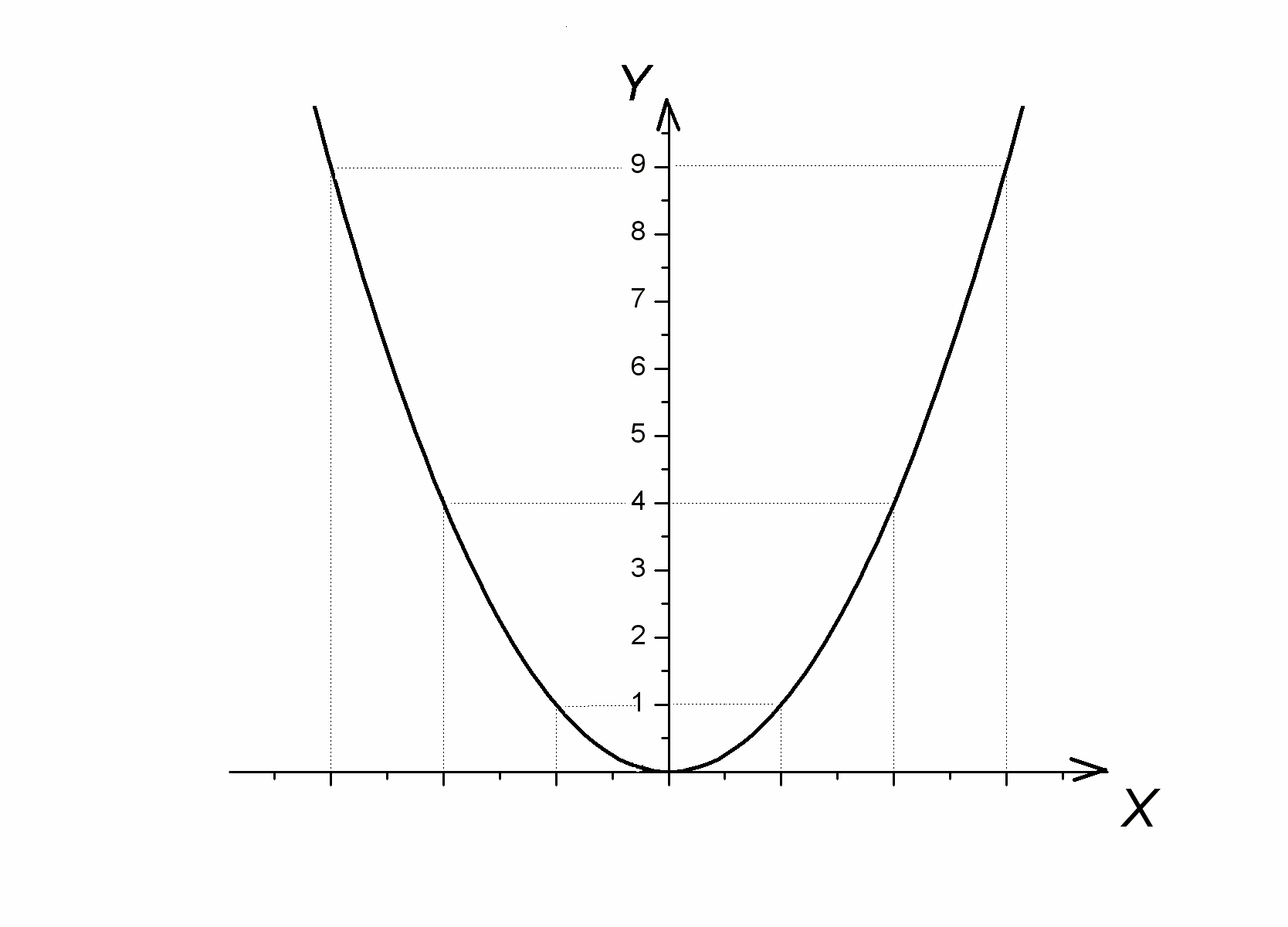


Рис.1.

**Складні функції.**

Нехай дано дві функції: визначену на множині *Z*, і функцію , визначену на множині Х. Якщо множина , то на множині *Х* можна визначити функцію, яка кожному поставить у відповідність . Тоді на множині *Х* визначена функція .Ця функція називається **складною** фунцією від *х* або суперпозицією (накладанням) функцій і . Областю визначення складної функції  є або вся область визначення функції , або та її частина, в якій визначені значення , які не виходять за область визначення .

**Приклад 1:** Нехай . Функція  визначена на всій числовій осі, так само як і функція . Суперпозиція цих функцій є складною функ­цією від , яка визначена на множині .

**Приклад 2:** . Функція  визначена при , тобто при , хоча функція  визначена при значеннях *х,* область визначення функції є така: [-2; 2].

При розгляді складних функцій треба мати на увазі область визначення тих функцій, які входять в їх склад . Наприклад, із функцій не можна утворити складну функцію, тому що значення функції при будь-яких не належать відрізку .

Можна розглядати суперпозиції не тільки двох, а довільного скінченного числа функцій.

**Однозначні і багатозначні функції**

Якщо кожному елементу  із множини  поставити у відповідність по деякому закону не один, а декілька, або навіть нескінченне число елементів із множини , то функцію називають багатозначною. Так, -двозначна функція, -багатозначна функція.

***Примітка:*** *в сучасному математичному аналізі багатозначні функції не розгля­даються.*

**Обмежені та необмежені функції**

*Функція , визначена на множині , називається* ***обмеженою*** *на множині , якщо є обмеженою множина її значень на множині , тобто .* Це означає, що для обмеженої функції повинні існувати константи  такі, що для всіх значеньвиконується нерівність:

. (1)

Якщо остання умова не виконується, то функція називається **необмеженою.**

Число називається точною нижньою гранню функції на множині , а число - точною верхньою гранню функції на множині . Різниця називається коливанням функції на множині .

**Приклад:** обмежена на всій числовій осі, так як для будь якого  із області визначення виконується умова (1), причому , а коливання функції  буде дорівнювати 2.

Функція називається обмеженою в точці , якщо вона обмежена в деякому околі точки. Для обмеженості функції на відрізку *[a,b]* необхідно і достатньо, щоб функція була обмеженою в будь-якій точці проміжку.

**Монотонні функції**

*Функція називається* ***зростаючою*** *на множині , якщо для довільних точок  з множини Х із нерівності випливає нерівність , тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.*

*Функція називається* ***спадною*** *на множині Х, якщо для довільних значень аргументу із множини Х , для  виконується нерівність, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції*. Зростаюча та спадна функції називаються **строго монотонними**.

Якщо для будь-яких із множини *Х*, для яких , справедлива нерів­ність, то функцію називають неспадною ( або не­зрос­таючою) на множині *Х*. Незростаючі та неспадні функції називаються **моно­тон­ними.**

Для монотонних функцій виконуються такі **правила**:

1) сума двох (або більше) зростаючих (спадних) функцій є функцією зростаючою (спадною);

2) добуток двох додатних зростаючих (спадних) функцій є функцією зростаючою (спадною);

3) якщо функція  зростаюча, то функція спадна, і навпаки.

4) якщо функція  строго монотонна, то обернена функція однозначна і строго монотонна.

Всі основні елементарні функції є монотонними або на всій області визначення, або на окремих відрізках.

**Парні і непарні функції**

*Числова множина Х називається симетричною, якщо для довільного*

*число також*. Наприклад, множина цілих чисел, відрізок ,  і інші множини симетричні відносно початку координат.

*Функція , визначена на симетричній множині Х, називається* ***парною****, якщо для виконується рівність:*

*.* (2)

Наприклад: .

*Функція , визначена на симетричній множині Х, називається* ***непарною****, якщо для  виконується рівність:*

*.*  (3)

Наприклад:  та інші.

**Основні властивості парних і непарних функцій:**

1. Алгебраїчна сума двох парних (непарних) функцій є функцією парною (непарною).
2. Добуток двох парних (непарних) функцій є функція парна; добуток парної та непарної функцій є функція непарна.
3. Якщо -непарні функції, то складна функція  є непарною.
4. Якщо -парна, а -непарна (парна) функція, то складна функція буде парною.
5. Якщо -парна функція, то для  функція -парна.
6. Для парних і непарних функцій виконується рівність:.

Функції, які є ні парними, ні непарними, називаються функціями загального виду.

Дослідження функції на парність та непарність проводиться наступним чином:

1) встановлюється, чи область визначення функції є симетричною відносно початку координат (точки 0);

1. у випадку симетричної області визначення перевіряють виконання умов (2) або (3).

Якщо область визначення не є симетричною відносно початку координат, то функція є ні парною, ні непарною.

Графік парної функції є симетричним відносно осі ординат, а графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

**Періодичні функції**

Нехай функція визначена на множині *Х*. Якщо існує таке, що для  числа також належать множині *Х* і , то функція  називається періодичною, а число  називається періодом функції. Наприклад:  є періодичними, як і всі інші тригонометричні функції.

Якщо періодична функція має період , то вона має нескінченне число періодів:  і т.д. Найменший із додатних періодів називається**основним періодом** періодичної функції.

***Зауваження:*** найменшого додатного періоду може і не існувати. Наприклад, функція  є періодичною, але не має найменшого періоду.

Сума і добуток функцій з одним і тим же періодом є періодичною функцією з тим самим періодом , причому, якщо це був найменший додатній період, то після сумування або множення функцій він може не бути найменшим.

Якщо -періодична функція з періодом , то функції ,  також будуть періодичними з періодом , -будь-яке дійсне число, а точки *х* та *ах* належать області визначення *f(x)*.

Якщо при всіх *х* і деякому  виконується рівність

,

то функція *f(x)* періодична. Якщо функція  - періодична, то і складна функція періодична, причому періоди цих функцій одинакові, якщо якщо функція  строго монотонна. Якщо ж функція  не строго монотонна, то період функції може бути меншим від періоду функції .

Доведення періодичності (чи неперіодичності) функції полягає в знаходженні її періоду (або відсутності повторювання деякої властивості).

**Приклад:** Фукція  мають період .

**Елементарні функції**

Основними елементарними функціями називаються наступні функції:

-**степенева функція ;**

**-показникова функція ;**

**-логарифмічна функція ;**

**-тригонометричні функції ;**

**-обернені тригонометричні функції  .**

Елементарними функціями є основні елементарні функції а також ті, які можна утворити із них за допомогою скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення , ділення і суперпозиції функцій. Наприклад:

; ; .

Всі елементарні функцій можна розділити на два класи: алебраїчні і транс­цендентні**.** **Алгебраїчна функція** – це довільна функція, яка задовільняє рівняння:

,

де -ціле додатнє число, -цілі раціональні функції від ,.

Клас алгебраїчних функцій утворюють раціональні та ірраціональні функції. Раціональні функції, в свою чергу, поділяються на цілі раціональні та дробово-раціональні функції.

**Ціла раціональна** функція - це функція (або многочлен) виду

,

де - ціле невід’ємне число (степінь многочлена), -постійні числа (коефі­ці­єнти).

**Дробово-раціональна** функція – це функція, яка є відношенням двох цілих раціональних функцій і має вид

.

Наприклад: .

Елементарні функції, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендент­ними**. Такими є, наприклад, функції: .

**Лінійні функції, їх властивості.**

Лінійна залежність між двома величинами виражається рівністю *y* *kx* *b* , де *b*,*k* - певні числа. При заданих *b*,*k* значення *y* залежить від значення *x* , значить, можна вважати *x* аргументом, *y* -функцією. Функція такого виду називається лінійною. Багаточлен першого степеня відносноаргументу називається **лінійною функцією** цього аргументу.

**Теорема.** Графіком лінійної функції являється пряма.

Розглянемо деякі частинні випадки функції *y* *kx* *b* .

1. Нехай *b* 0. Тоді *y* *kx*. Графіком цієї функції являється пряма, яка проходить через початок координат *O*(0,0) .

2. Нехай *k* 0, *b* 0 . Тоді *y* *b* . З цієї рівності видно, що при будь-якому значенні *x* ордината функції буде дорівнювати *b*. Це значить, що всі точки графіка знаходяться на однаковій відстані від вісі абсцис. При *b* 0 графік лежить вище, при *b* 0 нижче вісі абсцис. Іншими словами, графіком функції є пряма, паралельна вісі абсцис.

3. Нехай *k* 0, *b* 0 , тоді при будь-якому значенні *x* ордината *y* 0 . Очевидно, що цій умові задовольняють всі точки вісі абсцис, значить, графіком функції *y* 0 є вісь абсцис.

**Обернено пропорційна залежність, її властивості.**

Поряд з прямою залежністю між величинами в арифметиці розглядають і величини обернено пропорційні. Наприклад, довжини основи і висоти прямокутника при постійній площі, час і швидкість рівномірного руху при певній відстані.Залежність між двома величинами *x*, *y* , яка виражена рівністю *xy* *k* , де *k* - деяке число, відмінне від нуля, називається **обернено пропорційною залежністю.** Число *k* називають **коефіцієнтом пропорційності**. Графіком оберненої пропорційності являється крива лінія,яка називається **гіперболою**.

**Квадратичні функції, їх властивості.**

Квадратичною функцією називається функція виду *y* *ax2* *bx* *c*. Її частинний випадок є 2 *y* *x* . Записана функція є парною і графік її симетричний відносно вісі абсцис. Графіком квадратичної є незамкнена крива, яка **параболою.** Парабола функції *y* *x2* має вершину в точці О(0,0). Графік функції *y* *x2* *n*  можна отримати, переносячи графік функції 2 *y* *x* в напрямку осі ординат на *n* одиниць (парабола, яка розташована симетрично відносно осі ординат і вершина її знаходиться в точці (0.*n*) ). Графік функції *y* (*x* *m*)2 можна отримати, переносом графіка функції *y* *x2* в напрямку осі абсцис на *m* одиниць (парабола, розташована симетрично відносно прямої, паралельної осі ординат і віддаленої від неї на відстань *m*, її вершина знаходиться в точці (*m*, 0)

.Графік функції 2 *y* *ax2* можна отримати з основної параболи: помножити ординати точок параболи *y* *x2* на *a* (розтяг або стиск). Якщо *a* 0, то гілки параболи напрямлені нагору, якщо *a* 0 - вниз.

Для побудови графіка функції *y* *ax2* *bx* *c*  необхідно, по-перше, обчислити вершину параболи за формулами , *y* *y(xb)* ; по-друге, знайти точки перетину параболи з осями координат і зобразити параболу, гілки якої симетричні відносно прямої , паралельної осі ординат. Побудувати графік функції *y* *ax2* *bx* *c* можна за допомогою перетворень квадратного трьохчлена, виділивши в ньому повний квадрат.

**Дослідження функцій**

Для дослідження функцій і побудові їх графіків використовують три наступні теореми.Лагранжа:

***Теорема 1(теорема Лагранжа):*** *Якщо функція  неперервна на відрізку  і має похідну на інтервалі , то в інтервалі  можна знайти таку точку с, що*

*.*

Цю формулу називають формулою Лагранжа. Вона має простий і зрозумілий геометричний зміст, а саме: на дузі *АВ* знайдеться точка *С* , дотична до якої паралельна до хорди *АВ (рис.3).*

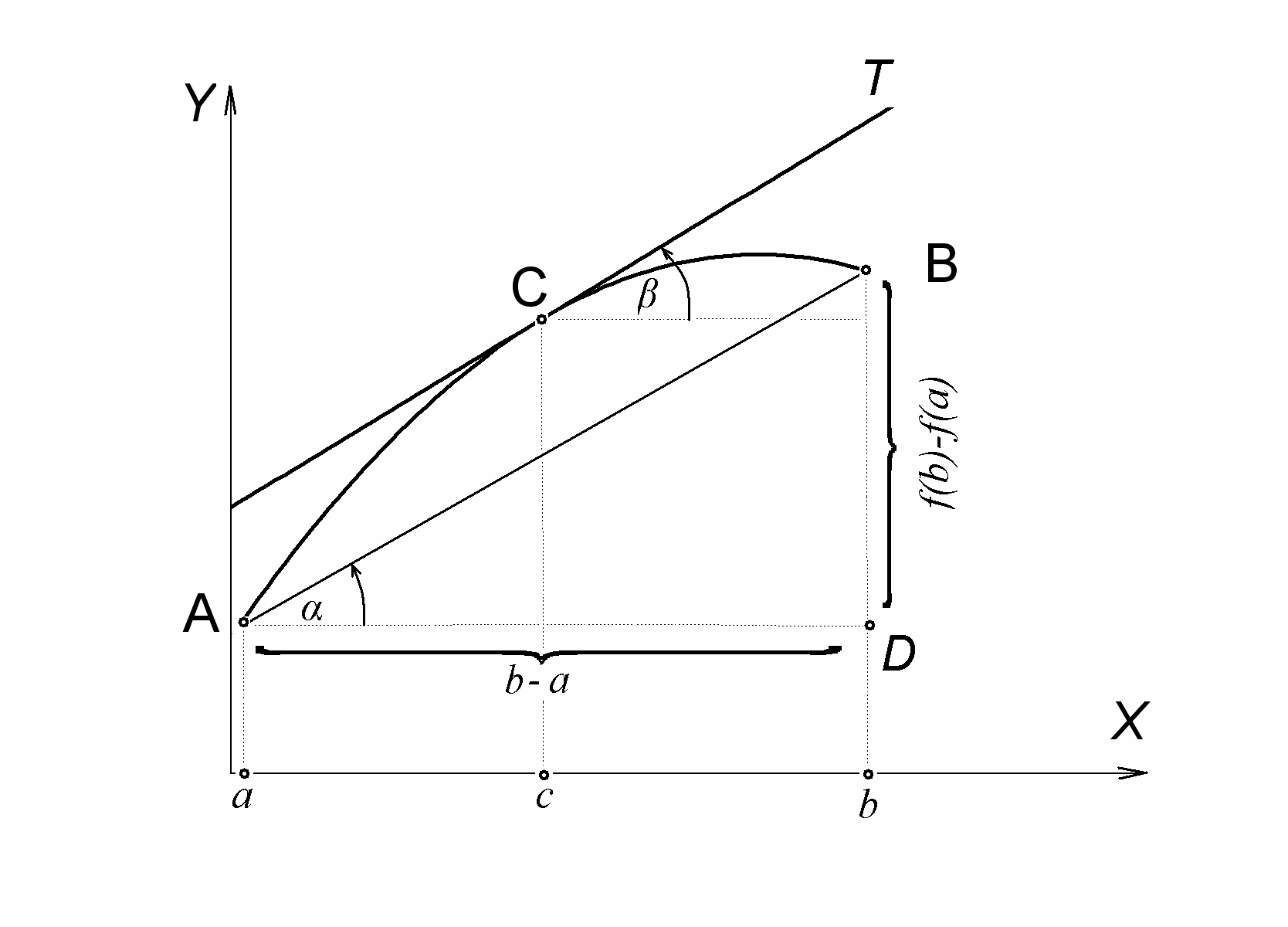


Рис.3.

***Примітка*:** *Точок із вказаною у формулі Лагранжа властивістю на вибраній кривій може бути декілька.*

***Теорема 2 (ознака сталості функції):*** *Нехай неперервна на проміжку  функція  має похідну на . Тоді для того, щоб ця функція була постійною на , необхідно і достатньо, щоб .*

***Теорема 3 (достатня ознака монотонності):*** *Якщо функція диференційовна на проміжку  і її похідна на цьому проміжку  ( ), то сама функція на цьому проміжку зростає(спадає).*

**Екстремуми функцій**

Нехай функція  визначена на деякому проміжку.

*Точка  називається* ***точкою максимуму*** *функції , а значення  -* ***максимумом*** *цієї функції, яккщо існує деякий окіл точки  такий, що для всіх точок цього околу виконується нерівність . Якщо виконується умова  для будь-якого  із проміжка , то точка  називається* ***точкою мінімуму*** *функції , а  -* ***мінімумом*** *цієї функції.*

Точки максимуму і мінімуму об′єднуються під спіьною назвою **точок** **екстремуму**, а максимум  і мінімум функції – під спільною назвою **екстремумів функції**. Одна і та ж функція може мати декілька екстремумів, причому деякі мінімуми можуть бути навіть більшими від деяких локальних максимумів. Тому їх не можна ототожнювати із найбільшим і найменшим значеннями функції в області її визначення.

Для знаходження екстремумів функції важливими є необхідні і достатні умови естремуму функції, які формулюються в наступних теоремах.

***Теорема 1 (необхідна ознака екстремуму функції):*** *Якщо -точка екстремуму функції , то  або  не існує.* Такі точки називаються **критичними** точками. Це точки «підозрілі» на екстремум, тому що не у всякій критичній точці функція має естремум.

***Теорема 2 (достатня умова екстремуму функції):*** *Нехай функція  неперервна в деякому інтервалі , який містить кНритичну точку , і має там похідну(за виключенням, можливо, самої точки . Тоді:*

1. *якщо  на  та  на , то в точці  дана функція має мінімум;*
2. *якщо  на  та  на , то в точці  дана функція має максимум.*

Отже, якщо при переході через критичну точку похідна функції змінює знак з мінуса на плюс, то в точці  функція має мінімум, якщо ж в цій точці похідна змінює знак з плюса на мінус, то в точці  знаходиться максимум функції .

**Дослідження функцій та побудова графіків**

**1. Знаходження області визначення функції.**

При табличному способі задання функції до її області визначення відносяться всі значення аргументу, вказані в таблиці. Для проміжних значень аргументу, яких немає в таблиці, функція переважно не визначена. При графічному способі задання область визначення функції очевидна із графіку, а при словесному – із словесного визначення функції.

При аналітичному способі задання функції область її визначення знаходиться як множина всіх значень аргументу, при яких формула, яка визначає функцію, має зміст. При знаходженні області визначення функції не рекомендується робити перетворення в формулі, яка визначає функцію. Наприклад: для знаходження області визначення функції треба знайти таку множину значень , при яких підкореневий вираз буде додатній і знаменник дробу відмінний від 0, тобто . Очевидно, що областю визначення такої функції буде проміжок .

*Для самостійної роботи: знайти область визначення функції .*

**2. Знаходження області значень функції**

Область значень функції - це множина значень функції (залежно змінної величини), які вона приймає при всіх значеннях аргументу із області її визначення. Область значень функції може складатися із окремих точок, із однієї точки, одного або кількох скінченних чи нескінченних інтервалів і т.д.

При табличному і графічному способах задання функції область її значень очевидна. Для знаходження області значень функції , заданої аналітично, треба знайти всі значення , при яких рівняння  має дійсні розв’язки.

Якщо розв’язок рівняння  можна записати у виді , то для знаходження області значень функції  треба знайти всі значення , для яких виразмає зміст. Якщо функція задана на декількох інтервалах різними виразами, то треба дослідити значення функції на кожному інтервалі. Якщо область значень функції безпосередньо знайти важко, то будують графік функції, із якого область значень функції стає очевидною.

***Приклад:*** *знайти область значень функції .*

Розв’язавши це рівняння відносно , отримаємо . Звідси видно, що дійсним значенням  відповідають ті значення , для яких . Розв’язавши цю нерівність, знайдемо, що . Область значень функції є проміжки: . В даному випадку функція не обмежена знизу (бо інтервал містить ), і не обмежена зверху ( бо інтервал містить ).

**3. Графік обмеженої функції**

Якщо функція обмежена , то її графік знаходиться в смузі між прямими, паралельними осі абсцис, проведеними на віддалі від неї. Графік функції, обмеженої тільки знизу, розміщений вище прямої, паралельної осі абсцис, проведеної на віддалі . Графік функції, обмеженої тільки зверху , розміщений нижче прямої, паралельної осі абсцис, проведеної на віддалі . Наприклад, графік функції є обмеженим знизу і зверху і знаходиться між прямими  ; функція  обмежена знизу; її графік знаходиться вище прямої .

**4. Особливості графіку парної та непарної функцій**

Оскільки графік парної функції –крива, для якої вісь ординат є віссю симетрії, а непарної – крива, для якої початок координат є центром симетрії, то для побудови графіку достатньо накреслити графік функції для додатних значень аргументу, а потім продовжити його симетрично відносно осі (для парної функції) або точки (0;0) (для непарної функції).

**5. Графік оберненої функції**

Якщо незалежну змінну в оберненій функції відкладати по осі , а значення функції – по осі , то графік оберненої функції буде співпадати із графіком прямої функції . Позначимо незалежну змінну в оберененій функції звичною для нас буквою , а обернену функцію – звичною буквою, тоді замість виразу для оберненої функції  будемо розглядати функцію (ми поміняли місцями та).

Щоб побудувати графік оберненої функції , треба графік прямої функції відобразити симетрично відносно бісектриси першого і третього коорди­нат­ного кутів.

***Приклад:*** *Побудувати графік функції, оберненої до функції .*

Щоб отримати графік оберненої функції (не шукаючи вигляд оберненої функції в явному виді), треба графік прямої функції відобразити симетрично до прямої*,* яка є бісектрисою 1 і 3 координатних кутів. Отриманий графік і буде графіком шуканої функції.

1. **Графік періодичної функції**

Наявність періоду функції  суттєво полегшує її вивчення та побудову графіку: достатньо дослідити та побудувати графік одного періоду функції на інтервалі . Для продовження графіку на всю область визначення треба його періодично продовжити.

***Приклад:*** *Побудувати графік функції .*

Перевіримо, чи функція періодична, тобто чи існує таке , для якого . Розв’язавши це рівняння, отримаємо, що . Графік цієї періо­дичної функції з періодом зображено на рис.2.

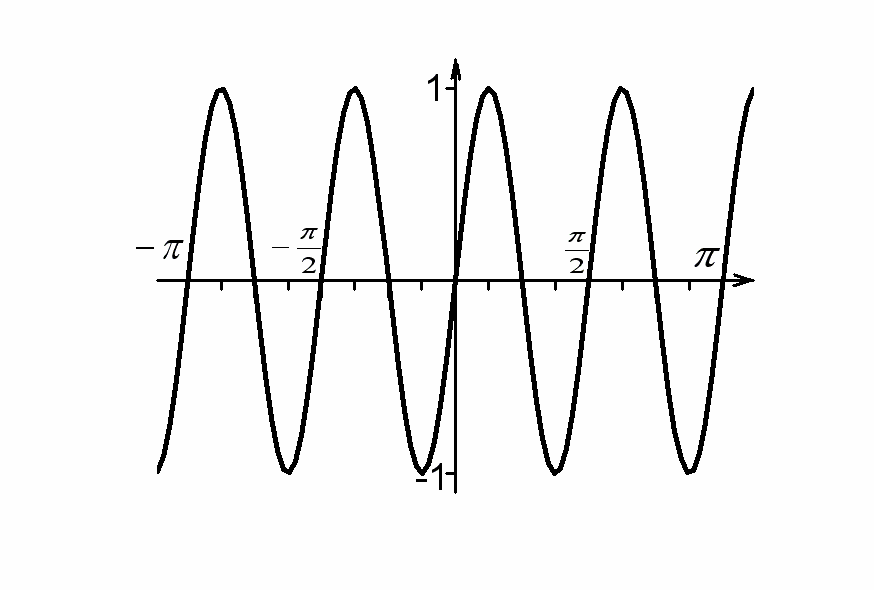


Рис.2.

***Нулем функції*** *називається те дійсне значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.* Геометричний зміст нуля функції полягає в тому, що це є абсциси точок, в яких графік функції перетинає вісь або дотикається до неї. При переході через ці точки (нулі функції) функція може змінити знак. Якщо графік тільки дотикається до осі абсцис, то функція знаку не змінює. Слід пам’ятати, що функція може змінити знак і при переході через точку розриву.

Для знаходження нулів функції треба розв’язати рівняння . Дійсні корені цього рівняння і є нулями функції . Нулі функції (нехай це будуть точки ) розбивають область визначення на частини, на кожній із яких функція є визначеною і не перетворюється в нуль. Інтервал, де функція не має нулів і точок розриву, називається **інтервалом знакосталості**. Для визначення знаку функції на кожному інтервалі знакосталості, достатньо визначити знак на одному із них, наприклад, безпосереднім обчисленням значення функції. Знаки функції на інтервалах знакосталості чергуються.

Рекомендуємо наступий порядок дослідження функції і побудови її графіку:

1. знаходження області визначення функції;
2. знаходження області значень функції;
3. парність і непарнічть;
4. періодичність;
5. характерні точки графіку, монотонність і випуклість графіку функції;
6. асимптоти графіку;
7. побудова графіку функції.

При побудові графіків багатьох функцій немає необхідності проводити повне дослідження функцій по цій схемі, деякі пункти можна опустити. Це стосується в першу чергу графіків основних елементарних функцій. Побудову графіку функції зручно виконувати параллельно з дослідженням функції.

**Змістовий модуль 5. Кількісна теорія N0. Системи числення.**

**Змістовий модуль 6.** **Подільність чисел.**

**Змістовий модуль 7. Розширення поняття про число. Раціональні   
 числа.**

**Змістовий модуль 8. Дійсні числа. Елементи геометрії. Величини.**