**Lec\_4**

**Характеристики дискретних джерел інформації**

* **Продуктивність дискретного джерела та швидкість передачі інформації**
* **Інформаційні втрати при передачі інформації по дискретному каналу**
* **Пропускна здатність дискретного каналу**
* **Теорема Шеннона про кодування дискретного джерела**

Будь-яку інформацію потрібно доставити одержувачеві повідомлень, інакше вона не матиме для нього ніякої цінності. Проте при передачі інформації від дискретних джерел по каналах зв 'язку можуть виникати її втрати, якщо в каналах діють завади та є спотворення сигналів, якими передаються повідомлення.

Від інтенсивності завад у каналах залежать швидкість передачі інформації та пропускна здатність каналів.

ПРОДУКТИВНІСТЬ ДИСКРЕТНОГО ДЖЕРЕЛА ТА ШВИДКІСТЬ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ

Якщо джерело А вибирає повідомлення ai, то можна говорити, що воно виробляє певну кількість інформації Ii=-logPi. Розглянемо трохи складнішу модель джерела, а саме: ансамбль А повідомлень, урахувавши розподіл імовірностей Pj та розподіл проміжків часу τi, протягом яких джерело вибирає різні повідомлення

Продуктивність джерела щодо певного повідомлення аi можна визначити як

 (3.1)

Її одиниця залежить від вибору одиниці кількості інформації I. Наприклад, це може бути біт за секунду.

Як правило, джерело вибирає досить велику кількість повідомлень протягом певного часу. Тому природно як загальну характеристику джерела прийняти середню за ансамблем його продуктивність, користуючись відомим з попереднього розділу методом статистичного усереднення:

 (3.2)

Загалом, коли  при і<>j вираз (3.1) після усереднення за часом можна перетворити до такого вигляду:

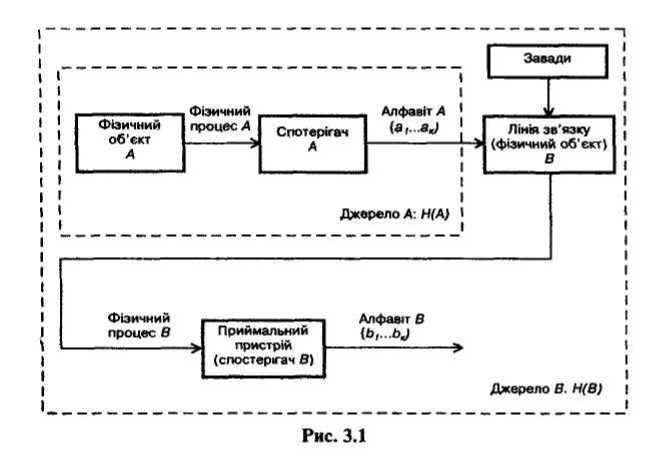
 (3.3)

де τсер— середній час вибору джерелом одного повідомлення.

Вираз (3.3) дійсний також для більш поширеного випадку, коли джерело вибирає всі свої повідомлення за один і той самий проміжок часу τ=τсер.

З урахуванням (3.3) вираз (3.2) набуває вигляду:



Бачимо, що така загальна характеристика, як продуктивність дискретного джерела, визначається його середніми показниками: ентропією (середньою кількістю інформації в одному повідомленні) та часом утворення останнього.

Розглянемо узагальнену модель каналу передачі інформації (рис. 3.1). Зазначимо, що передача можлива як у просторі, так і в часі. Це залежить від мети передачі та вибраних носіїв інформації в лінії зв’язку. Виходячи з наведеного в п. 2.1 визначення маємо джерело А з ентропією Н (А), утворене спостерігачем А та спостережуваним фізичним процесом А.

Повідомлення  певної форми передаються лінією зв’язку, де на них впливають завади, що можуть спотворювати їх. Внаслідок цього утворюється новий фізичний процес В, який спостерігається на виході лінії. Сама лінія при цьому розглядається як фізичний об’єкт В. Роль спостерігача В тут відіграє приймальний пристрій, що вибирає повідомлення bj з алфавіту В відповідно до фізичного процесу В. Таким чином, утворюється джерело В зі своєю безумовною ентропією Н(В).

Вибір повідомлень  характеризує при цьому процес передавання інформації по каналу зв’язку від джерела А на вихід джерела В. Позначимо через І (А, В) середню кількість інформації про стан джерела А, яка міститься в одному повідомленні джерела В. Якщо на вибір кожного повідомлення витрачається час τ, то питома кількість переданої інформації є швидкістю її передачі по каналу, тобто

V=I’(A,B)=I(A, B)/τ (3.5)

**ІНФОРМАЦІЙНІ ВТРАТИ ПРИ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ПО ДИСКРЕТНОМУ КАНАЛУ**

Задача дискретного каналу полягає в тому, щоб повідомлення bj однозначно відповідало повідомленню ai Це було б можливе тоді, коли р(ai/bj) = р(bj/ai)=1 для всіх і = 1... К. А це означає, що мають виконуватися рівності р(ai,bj) = р(ai) = р(bj) та р (ai/bj) = р (bj/ai) = 0 або р(ai,bj) = 0 для всіх j ≠ і. Цей випадок стосується каналу з малими завадами, які не можуть спотворити повідомлення аi джерела А так, щоб спостерігач В помилився під час розпізнавання стану джерела В та вибору повідомлення bj.

Наведені вище умови означають повний збіг ансамблів А та В (нагадаємо, що до ансамблю входять множина повідомлень і множина імовірностей їх). А якщо це так, то середня кількість переданої інформації на одне повідомлення Н(А) при повній відсутності інформаційних втрат дорівнює такій самій кількості прийнятої інформації H(В), тобто

І(А,В) = Н(А) = Н(В) = Н(А,В). (3.6)

Остання рівність випливає з того, що за наведених умов

Н(А/В) = Н (В/А) = 0. (3.7)

Таким чином, кількість переданої інформації за відсутності завад дорівнює ентропії об’єднання джерел А та В або безумовній ентропії одного з них. .

У разі повної статистичної незалежності джерел А та В, що характеризує високий рівень завад, коли повідомлення bj ( ніяк статистично незумовлене повідомленням ai маємо (див. п. 2.5)

H(А/В) = Н(А), Н(В/А) = H(В). (3.8)

При цьому ентропія об’єднання двох джерел становитиме

H (А, В) = Н (В, А) = H (А) + H (В). (3.9)

У разі статистичної незалежності джерел А та В ніяка інформація від А до В через її повне спотворення не передається. Інформаційною мірою цього спотворення є умовна ентропія одного джерела відносно іншого, яка збільшується від нуля до максимуму у міру зростання статистичної зумовленості джерел А та В.

У проміжному випадку неабсолютної статистичної залежності джерел А та В завади деякою мірою спотворюють повідомлення, що статистичне відбивається у вигляді матриць імовірностей перехресних переходів. При цьому умовна ентропія мас певні рівні:

0 <= H (А/В) < =H (А); 0 <= H (В/А) < H (В). (3.10)

Ураховуючи викладене, кількість інформації, що передається в каналі, можна визначити так. Якщо джерело А вибрало певне повідомлення, то воно виробляє кількість інформації, що дорівнює Н(А). Джерело В, вибравши повідомлення  за умови порушення повної статистичної залежності джерел А та В виробляє певну кількість інформації про джерело А, що міститься в джерелі В й дорівнює H (А/В).

Спостерігач В (приймальний пристрій), вибравши повідомлення , приймає також рішення про повідомлення , яке передавалося, що є одним із його завдань. Прийнявши таке рішення, він виробляє кількість інформації про джерело А, яка дорівнює H(А). Проте перед цим він уже одержав H(А/В) бітів інформації про це джерело, тому кількість переданої в каналі інформації про джерело А як кількість нового відсутнього знання визначається різницею

І(А,В) = Н(А)-Н(А/В). (3.11)

Вираз (3.11) збігається повністю з (3.6) за умови (3.7) при малих завадах і з урахуванням того, що за умови статистичної незалежності (3.8) джерел (великі завади в каналі)

І(А,В) = 0. (3.12)

Згадаємо, що Н (А, В) = Н (В, А) тому

Н (А) + Н (В/А) = Н (В) + Н (А/В). (3.13)

Знак рівності тут не зміниться, якщо від обох частин (3.13) відняти суму Н (В/А) + Н (A/В), тобто

Н (А) – Н (А/В) = Н (В) – Н (В/А), (3.14)

звідки

І (А, В) = I (В, А). (3.15)

Таким чином, *інформаційні втрати при передачі інформації в каналі визначаються умовною ентропією одного джерела відносно іншого, а кількість переданої інформації — безумовною ентропією джерела та інформаційними втратами* за виразом (3.11) або (3.15), .

З урахуванням (3.11), (3.13) і (3.15) можна записати

I (А, В) = Н (А) – Н (А/В) = Н (А) - [Н (А, В) - Н (В)] = Н (А) + Н(В) - Н (А, В); (3.16)

I(В, А)= Н (В) – Н (В/А) = Н(В) - [Н (В, А)–Н (А)] = Н(В) + Н(А)–Н(В,А).

Спостерігається повна симетрія цих виразів.

**ПРОПУСКНА ЗДАТНІСТЬ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛУ**

Максимально можлива швидкість передачі інформації по каналу зв’язку називається його пропускною здатністю С. Виходячи з виразу (3.5) маємо

 (3.17)

Очевидно, вираз (3.17) досягає максимуму при абсолютному статистичному зв’язку джерел А та В, коли виконуються рівності (3.6) і (3.7). Це випадок малого рівня або відсутності спотворюючих завад. Тоді

(3.18)

Відомо, що безумовна ентропія джерела досягає максимуму при рівноймовірних і статистично незалежних повідомленнях ai, і= 1…k. При цьому р(аi) = 1/k для всіх і та . Отже

 (3.19)

Цей вираз і визначає пропускну здатність каналу без завад.

Якщо в каналі є відчутні завади, а умовна ентропія на його вході та виході лежить у діапазоні (3.10), то пропускна здатність каналу із завадами визначається виразом

 (3.20)

При зменшенні завад цей вираз прямує до (3.19), а при їх збільшенні - до нуля.

**ТЕОРЕМА ШЕННОНА** **ПРО КОДУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ДЖЕРЕЛА**

Головна теорема інформації, сформульована та доведена К. Шенноном, називається теоремою кодування дискретного джерела. Пізніше з’явилося багато її модифікацій для різних обумовленостей та ситуацій.

Нехай джерело повідомлень мас ансамбль А = {аi}, i = 1, … , *l* та Р = {pi}, і = 1, … ,*l*. Його безумовна ентропія дорівнює H (А), а продуктивність — V H(А), де V =T-1 — кількість повідомлень джерела за одиницю часу.

Нехай канал без завад має алфавіт В = {bj}, j = 1, … , k та ентропію H(В). Тоді швидкість передачі інформації по каналу RK = VКН (В). Використаємо безнадмірні вхідні повідомлення каналу, які мають максимальну ентропію, що забезпечує максимально можливу швидкість передачі інформації в каналі Ск = Vк log k (згадаємо, що Н(В) = log k). Величина Ск називається пропускною здатністю каналу з параметрами k та Vк = Т-1K, де ТK — тривалість передачі одного символу каналу.

Якщо взагалі надмірність повідомлень джерела не дорівнює нулю, то Rк < Ск. ***Як довів К. Шеннон, відповідним добором способу кодування при будь-якій надмірності джерела А можна забезпечити швидкість передачі інформації по каналу без завад як завгодно близьку до його пропускної здатності Ск.***

теорема Шеннона про кодування дискретного джерела, або, як її інакше називають, теорема кодування дискретного каналу без завад. Формулюється вона так: ***якщо пропускна здатність дискретного каналу без завад перевищує продуктивність джерела повідомлень, тобто***

*** (3.21)***

***то існує спосіб кодування та декодування повідомлень джерела з ентропією H (А), що гарантує як завгодно високу надійність зіставлення прийнятих комбінацій повідомлень з переданими; якщо, то такого способу немає.***

Питання, пов’язані з точністю передачі повідомлень, оцінкою вірогідності безпомилкової передачі їх, імовірністю помилок при відтворенні повідомлень тут не розглядалися.