

ВИБРАНІ ЗАДАЧІ XX ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ
ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

З 29 жовтня до 2 листопада 2017 року у Вінниці проходив XX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. Абсолютним переможцем турніру стала команда «Харків-27». Серед призерів – й обидві команди з Івано-Франківської області: «Альфа» Івано-Франківського природничо-математичного ліцею та «Радикал» Надвірнянського ліцею.

Пропонуємо вашій увазі вибрані матеріали з підготовки команди «Радикал» до заключного етапу турніру. В статті також використані окремі результати, отримані фіналістом турніру – командою «Геліос» (м. Чернівці).

З розв'язанням частини інших задач, а також з матеріалами XIII Івано-Франківського обласного турніру юних математиків, читачі можуть ознайомитися на офіційному сайті Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка <http://www.tym.in.ua>.

«Цілочисловий трикутник»

Укажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M , що довжини відрізків MA , MB та MC є цілими. Чи існує безліч таких трикутників, жодні два з яких не є подібними?

Розв'язання. Нескладно переконатися, що таким є, наприклад, трикутник, вершини якого мають координати: $A(80;0)$, $B(0;84)$, $C(0;0)$. Тоді $AC=80$, $BC=84$ і за теоремою Піфагора $AB=116$. Якщо тепер $M(40;9)$, то за тією ж теоремою Піфагора знаходимо $MA=MC=41$, $MB=85$.

Доведемо, що неподібних між собою прямокутних трикутників існує безліч. Нехай $A(4mn;0)$, $B(0;4m^2-n^2)$, $C(0;0)$, де m, n – натуральні числа, $m > n > 1$. Тоді $AC=4mn$, $BC=4m^2-n^2$ і за теоремою Піфагора $AB=4m^2+n^2$.

Вибравши тепер точку $M(2mn; m^2-n^2)$, отримаємо $MA=MC=m^2+n^2$ та $MB^2=(3m^2)^2+(2mn)^2=m^2((3m)^2+(2n)^2)=m^2(n^2+1)^2$, якщо $3m=n^2-1$.

Покладаючи, наприклад, $n=3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, звідси знаходимо $m=k(3k+2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Серед отриманих при цьому для різних $k \in \mathbb{N}$ прямокутних трикутників є нескінченна кількість таких, жодні два з яких не є подібними, бо відношення катетів

$$\begin{aligned}\frac{AC}{BC} &= \frac{2mn}{4m^2-n^2} = \frac{4k(3k+2)(3k+1)}{4k^2(3k+2)^2-(3k+1)^2} = \\ &= \frac{4k(3k+1)(3k+2)}{(k+1)(2k+1)(3k-1)(6k+1)}\end{aligned}$$

прямує до нуля при $k \rightarrow \infty$, отже, або саме утворює спадну послідовність, або містить спадну підпослідовність.

Зокрема, при $k = 1, m = 5, n = 4$ отримуємо наведений першим приклад потрібного прямокутного трикутника.

Відзначимо, що можна було б також вибирати $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$. При цьому отримали би $m = (k + 1)(3k + 1), k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що точка M не обов'язково повинна знаходитися на середній лінії трикутника. Наприклад, для прямокутного трикутника з вершинами $A(69;0), B(0;92), C(0;0)$ і точки $M(21;20)$ отримуємо $AC = 69, BC = 92, AB = 115, MA = 52, MB = 75, MC = 29$.

«Числа Фібоначчі та площі»

Послідовність Фібоначчі задається рівностями $F_1 = F_2 = 1, F_{k+2} = F_k + F_{k+1}, k \in \mathbb{N}$.

1. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2}), A_2(F_{m+3}; F_{m+4}), A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює 0,5.

2. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2}), A_2(F_{m+3}; F_{m+4}), A_3(F_{m+5}; F_{m+6}), A_4(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапецією, площа якої дорівнює 2,5.

3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2 \dots A_n, n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2}), A_2(F_{m+3}; F_{m+4}), \dots, A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$, та знайдіть цю площу.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, тобто доводимо рівність

$$\frac{F_{m+7} - F_{m+1}}{F_{m+8} - F_{m+2}} = \frac{F_{m+5} - F_{m+3}}{F_{m+6} - F_{m+4}}.$$

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо

$$\frac{F_{m+5} - F_{m+3}}{F_{m+6} - F_{m+4}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Крім того, маємо

$$\begin{aligned} F_{m+7} - F_{m+1} &= (F_{m+6} + F_{m+5}) - (F_{m+3} - F_{m+2}) = \\ &= ((F_{m+4} + F_{m+5}) + F_{m+5}) - (F_{m+3} - (F_{m+4} - F_{m+3})) = 2F_{m+5} + 2F_{m+4} - 2F_{m+3} = 4F_{m+4}. \end{aligned}$$

Аналогічно доводимо, що $F_{m+8} - F_{m+2} = 4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7} - F_{m+1}}{F_{m+8} - F_{m+2}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Нескладно також показати, що дві інші сторони не є паралельними.

З доведеного випливає, що всі чотирикутники $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2}), A_2(F_{m+3}; F_{m+4}), A_3(F_{m+5}; F_{m+6}), A_4(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапеціями з основами A_1A_4 та A_2A_3 .

Отже, рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї. Звідси випливає, що площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1(F_1; F_2), A_2(F_3; F_4), A_3(F_5; F_6)$, тобто з вершинами $A_1(1;1), A_2(2;3), A_3(5;8)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій:

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{F_1A_1A_2F_3} + S_{F_3A_2A_3F_5} - S_{F_1A_1A_3F_5} = \frac{1}{2}(1+3) \cdot 1 + \frac{1}{2}(3+8) \cdot 3 - \frac{1}{2}(1+8) \cdot 4 = \frac{1}{2},$$

що й треба було довести в п. 1.

Розглянемо тепер довільний многокутник $A_1A_2\dots A_n, n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2}), A_2(F_{m+3}; F_{m+4}), \dots, A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$. З доведеної вище паралельності випливатиме, що його площа не залежить від вибору $m \geq 0$. Тому, покладаючи $m = 0$, обчислимо площу многокутника з вершинами $A_1(F_1; F_2), A_2(F_3; F_4), \dots, A_n(F_{2n-1}; F_{2n})$.

Така задача була запропонована в журналі The Fibonacci Quarterly в розділі Elementary problems and solutions (Vol. 53.2, May 2015. – B-1167. Proposed by Atara Sriki and Opher Liba). Наводимо її розв'язання професором Гаррісом Квонгом в перекладі з англійської.

Такий многокутник є опуклим і його можна розбити на $n-2$ трикутників з вершинами $(F_1; F_2), (F_{2k-1}; F_{2k})$ та $(F_{2k+1}; F_{2k+2})$, де $2 \leq k \leq n-1$. При цьому площа кожного трикутника з такими трьома вершинами може бути виражена через площі трьох прямокутних трапецій, які знаходяться під трьома його сторонами і обмежені знизу віссю абсцис.

Оскільки $(F_1; F_2) = (1; 1)$, то ми отримуємо:

$$\begin{aligned} 2\Delta_k &= (F_{2k-1} - 1)(F_{2k} + 1) + (F_{2k+1} - F_{2k-1})(F_{2k} + F_{2k+2}) - (F_{2k+1} - 1)(F_{2k+2} + 1) = \\ &= F_{2k}F_{2k+1} - F_{2k-1}F_{2k+2} + F_{2k-1} + (F_{2k+2} - F_{2k+1} - F_{2k}) = \\ &= \frac{L_{4k+1} - 1}{5} - \frac{L_{4k+1} + 4}{5} + F_{2k-1} = F_{2k-1} - 1. \end{aligned}$$

Отже, $2 \sum_{k=2}^{n-1} \Delta_k = \sum_{k=2}^{n-1} F_{2k-1} - (n-2) = (F_{2n-2} - 1) - (n-2)$ і площа многокутника дорівнює

$$S_n = \frac{F_{2n-2} - n + 1}{2}.$$

Тут через L_{4k+1} позначені числа Люка з індексом $4k+1$, означення яких сформульоване в наступній задачі.

Покладаючи $n = 4$, отримаємо, що площі всіх трапецій $A_1A_2A_3A_4$ дорівнюють $\frac{F_6 - 3}{2} = \frac{5}{2}$, що дає відповідь на п. 2.

Справедливе й загальніше від доведеного вище твердження: площа многокутника $A_1A_2\dots A_n, n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+k}; F_{m+2k}), A_2(F_{m+3k}; F_{m+4k}), \dots, A_n(F_{m+(2n-1)k}; F_{m+2nk}), k \in \mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m \geq 0$ і дорівнює

$$\frac{F_k(F_{2k(n-1)} - (n-1)F_{2k})}{2}.$$

Ще загальніший результат доведений автором цієї статті при розв'язуванні задачі B-1195 з журналу The Fibonacci Quarterly (Vol. 55.3, August 2017. Elementary problems and solutions).

Нехай задана послідовність, визначена рівностями:

$$G_0 = a, G_1 = b, G_{k+1} = G_k + G_{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Тоді площа многокутника з вершинами

$$A_1(G_{m+k}; G_{m+2k}), A_2(G_{m+3k}; G_{m+4k}), \dots, A_n(G_{m+(2n-1)k}; G_{m+2nk}), k \in \mathbb{N},$$

не залежить від вибору чисел $m \geq 0$ і дорівнює

$$\frac{|\mu| F_k (F_{2k(n-1)} - (n-1) F_{2k})}{2}$$

де $\mu = a^2 + ab - b^2$.

«Числа Фібоначчі та Люка»

Числа Люка задаються рівностями $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{k+2} = L_k + L_{k+1}, k \in \mathbb{N}$. Числа Фібоначчі позначені F_k .

1. Для кожного $n \geq 1$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1} F_{2n+1}} = \frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}} + \frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}} - \frac{5}{L_{2n-1} L_{2n+1}}.$$

2. Запропонуйте і доведіть аналогічну рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами.

Розв'язання. а). Використовуючи формули Кассіні $F_{2n}^2 + 1 = F_{2n-1} F_{2n+1}$ та $L_{2n}^2 - 5 = L_{2n-1} L_{2n+1}$, отримаємо

$$\begin{aligned} F_{2n-1}^2 + F_{2n+1}^2 + 1 &= (F_{2n+1} - F_{2n-1})^2 + 1 + 2F_{2n-1} F_{2n+1} = \\ &= (F_{2n}^2 + 1) + 2F_{2n-1} F_{2n+1} = 3F_{2n-1} F_{2n+1} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} L_{2n-1}^2 + L_{2n+1}^2 - 5 &= (L_{2n+1} - L_{2n-1})^2 - 5 + 2L_{2n-1} L_{2n+1} = \\ &= (L_{2n}^2 - 5) + 2L_{2n-1} L_{2n+1} = 3L_{2n-1} L_{2n+1}. \end{aligned}$$

Тому для всіх натуральних n обидві частини заданої рівності дорівнюють 3.

б). Аналогічна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} + \frac{F_{2n+2}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n} F_{2n+2}} = \frac{L_{2n}}{L_{2n+2}} + \frac{L_{2n+2}}{L_{2n}} - \frac{5}{L_{2n} L_{2n+2}}.$$

Для всіх натуральних n обидві її частини також дорівнюють 3. Для доведення використовуємо аналогічні перетворення і формули Кассіні у вигляді $F_{2n+1}^2 - 1 = F_{2n} F_{2n+2}$ та $L_{2n+1}^2 + 5 = L_{2n} L_{2n+2}$.

«Система з числами Фібоначчі»

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1 + x_2 &= F_1 x_1^2 + F_3, \\ x_2^5 + x_2 + x_3 &= F_2 x_2^4 + F_4, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{2016}^{4033} + x_{2016} + x_{2017} &= F_{2016} x_{2016}^{4032} + F_{2018}, \\ x_{2017}^{4035} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}} x_{2017} + x_1 &= F_{2017} x_{2017}^{4034} + F_{2019}. \end{aligned}$$

задану систему рівнянь у вигляді:

$$(x_{2016} - F_{2016})(x_{2016}^{4032} + 1) = F_{2017} - x_{2017},$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок: $x_k = F_k$, $k = 1, 2, \dots, 2017$.

суперечність

$$x_1 > F_1 \Rightarrow x_2 < F_2 \Rightarrow x_3 > F_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_{2017} > F_{2017} \Rightarrow x_1 < F_1.$$

Аналогічно приходимо до суперечності, припускаючи $x_1 < F_1$.

«Рівняння з біноміальними коефіцієнтами»

Знайдіть всі натуральні числа n, k такі, що $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$.

Розв'язання.

Розглянемо спочатку випадок, коли $n-1 \geq k+1$, тобто різниця $p = n-k \geq 2$.

можливо лише за умови, що $k=1$. При цьому $n=3$.

задане рівняння у вигляді

$$\frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-k-2)!} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!}.$$

позначення $p = n - k$, отримаємо рівняння

$$(p+2)(p+1)p(p-1) = (n+1)n(k+1)k.$$

використовуючи рівність $n = k + p$, будемо мати

$$(p^2 + p - 2)(p^2 + p) = (k^2 + kp + k)(k^2 + kp + k + p).$$

Позначивши $p^2 + p - 2 = s$ та $k^2 + kp + k = q$, запишемо останню рівність у вигляді

$$s(s+2) = q(q+p).$$

Для $p \geq 3$ вона можлива лише за умови $q < s$. Тому покладемо $q = \frac{a}{b}s = \frac{a}{b}(p^2 + p - 2)$, де

$\frac{a}{b}$ – нескоротний дріб, причому $a < b$. Тоді

$$q + p = \frac{b}{a}(s + 2) \Leftrightarrow \frac{a}{b}(p^2 + p - 2) + p = \frac{b}{a}(p^2 + p).$$

Внаслідок нескоротності дробу $\frac{a}{b}$ звідси випливає, що $p^2 + p - 2 \nmid b$, тому також $p^2 + p \nmid a$.

Запишемо останню рівність у вигляді

$$a^2(p^2 + p - 2) + abp = b^2(p^2 + p). \quad (*)$$

З рівності (*) випливає, що $2a^2 \nmid p$. Оскільки $p \geq 3$, то $a \neq 1$. Також із взаємної простоти чисел p та $p+1$ і подільності $p^2 + p \nmid a$ випливає, що $p \nmid a$. Якщо при цьому p не ділиться на a^2 , то з рівності (*) отримуємо суперечність: її ліва частина ділиться на a^2 , а права – ні. Тому $p \nmid a^2$, що разом із подільністю $2a^2 \nmid p$ при $p \geq 3$ та $a \geq 2$ можливо лише у двох випадках: $p = a^2$ та $p = 2a^2$.

Нехай $p = a^2$. Тоді після скорочення на a^2 рівність (*) можна записати у вигляді:

$$a^4 + a^2 - 2 + ab = b^2(a^2 + 1).$$

Оскільки $b \geq a+1$, то нерівностей $b^2 > ab$ та $b^2 a^2 \geq (a+1)^2 a^2 = a^4 + 2a^3 + a^2 > a^4 + a^2 - 2$ отримуємо, що попередня рівність не справджується.

Аналогічно для $p = 2a^2$ рівність (*) після скорочення на a^2 набуде вигляду:

$$4a^4 + 2a^2 - 2 + 2ab = b^2(4a^2 + 2).$$

Враховуючи тепер нерівності $2b^2 > 2ab$ та

$$4b^2 a^2 \geq 4(a+1)^2 a^2 = 4a^4 + 8a^3 + 4a^2 > 4a^4 + 2a^2 - 2,$$

отримаємо, що й в цьому випадку рівність (*) не справджується.

Таким чином, при $p \geq 3$ задане в умові рівняння з біноміальними коефіцієнтами розв'язків не має.

Можна було міркувати ще й так.

З умови задачі отримуємо рівність

$$n(n+1)k(k+1) = (n-k-1)(n-k)(n-k+1)(n-k+2). \quad (**)$$

Введемо позначення: $p = n - k$.

Якщо $p = 2$, то (**) зведеться до рівняння

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 4!,$$

яке має один корінь $k = 1$ (тоді $n = 3$).

Якщо $p > 2$, то виконаємо такі перетворення рівності (**):

$$\begin{aligned} 4n^2 k^2 + 4nk(n+k) + 4nk &= 4(p-1)p(p+1)(p+2), \\ (2nk + n + k)^2 - (n+k)^2 + 4nk &= 4(p^2 + p - 2)(p^2 + p), \\ (2nk + n + k)^2 - (n-k)^2 &= (2p^2 + 2p - 2)^2 - 4, \\ (2nk + n + k)^2 &= (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4. \end{aligned}$$

А оскільки при $p > 2$

$$(2p^2 + 2p - 2)^2 < (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4 < (2p^2 + 2p - 1)^2,$$

то число $(2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4$ не може бути повним квадратом. Отже, в такому разі інших розв'язків початкового рівняння не отримаємо.

Для повноти розв'язання розглянемо також випадки, коли $p = n - k \leq 1$. При цьому

врахуємо, що для $l > m$ прийнято вважати $C_m^l = 0$. Це цілком логічно, бо вибрати із множини більше елементів, ніж вона містить не можна.

Відповідно, для $p = 1$, $p = 0$, $p = -1$, та $p = -2$ для всіх натуральних чисел n, k у лівій частині рівності $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$ отримаємо нуль, а її права частина буде додатною. Тому у цих випадках рівняння не матиме розв'язків.

Якщо ж $p = n - k \leq -3$, то в обох частинах заданого рівняння отримаємо нулі. Звідси знаходимо нескінченну множину його розв'язків з довільними натуральними n, k , які задовольняють нерівність $k \geq n + 3$.

«Сума кубів»

Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

Розв'язання.

Такою є, наприклад, четвірка чисел $a = 3, b = 4, c = 5, d = 6$. Справді,

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3.$$

Доведемо, що множина таких четвірок натуральних чисел, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число, є нескінченною. Представляючи ці числа у вигляді квадратичних функцій від n , доведемо, що записану рівність при кожному натуральному n задовольняють натуральні числа:

$$a = 3n^2 + 11n + 3, b = 4n^2 + 4n + 6, c = 5n^2 + 5n - 3, d = 6n^2 + 8n + 6.$$

Справді, якщо $f(x) = (3x^2 + 11x + 3)^3 + (4x^2 + 4x + 6)^3 + (5x^2 + 5x - 3)^3 - (6x^2 + 8x + 6)^3$, то, як нескладно переконатися,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(6x + 11)(3x^2 + 11x + 3)^2 + 3(8x + 4)(4x^2 + 4x + 6)^2 + \\ &\quad + 3(10x + 5)(5x^2 + 5x - 3)^2 - 3(12x + 8)(6x^2 + 8x + 6)^2 = \\ &= 3(6x + 11)(9x^4 + 66x^3 + 139x^2 + 66x + 9) + 3(8x + 4)(16x^4 + 32x^3 + 64x^2 + 48x + 36) + \\ &\quad + 3(10x + 5)(25x^4 + 50x^3 - 5x^2 - 30x + 9) - 3(12x + 8)(36x^4 + 96x^3 + 136x^2 + 96x + 36) \equiv 0. \end{aligned}$$

Тому $f(x) = \text{const}$. А оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Наведемо також інші представлення з використанням многочленів вищих степенів:

$$a = 1, b = -1 + 72n^3, c = 144n^4 - 6n, d = 144n^4;$$

$$a = 9n^3 - 1, b = 9n^4 - 3n, c = 1, d = 9n^4;$$

$$a = 3n^3 - 9, b = n^4 - 9n, c = 9, d = n^4, n \geq 3.$$

Перше з них отримуємо із знайденого у 1740 році розв'язку Ейлера задачі про чотири куби:

$$\begin{aligned} a &= 1 + (m - 3n)(m^2 + 3n^2), \\ b &= -1 + (m + 3n)(m^2 + 3n^2), \\ c &= -m - 3n + (m^2 + 3n^2)^2, \\ d &= -m + 3n + (m^2 + 3n^2)^2, \end{aligned}$$

в якому достатньо покласти $m = 3n$:

Друге маємо із розв'язку Морделла, отриманого ним 1956 року:

$$a = 9n^3m - m^4, b = 9n^4 - 3nm^3, c = m^4, d = 9n^4,$$

покладаючи в ньому $m = 1$.

«Рахуємо перестановки»

Для множини $\{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

$$1. \text{ Доведіть, що } \sum_{k=1}^n kU_k = n! \quad \text{Для } n \geq 3 \text{ доведіть нерівність } \frac{n!}{2} \leq \sum_{k=2}^n kU_k \leq \frac{2 \cdot n!}{3}.$$

$$2. \text{ Доведіть, що } \sum_{k=1}^n k^2 U_k = 2 \cdot n!$$

Розв'язання. Позначимо через V_m кількість перестановок із m елементів, в яких жоден елемент не залишається на своєму місці. Очевидно, що $V_1 = 0$. Для зручності також покладемо, що $V_0 = 1$.

Виведемо формулу для обчислення V_m , $m \geq 2$. Позначимо через A_i множину перестановок, в яких i -тий елемент залишається на своєму місці. Вона складається з $(m-1)!$ елементів.

Перетин p із m множин A_i містить $(m-p)!$ елементів, а всього таких перетинів є C_m^p . Тому за формулою включень-виключень отримаємо число W_m , $m \geq 2$, перестановок, в яких хоч один елемент залишається на своєму місці:

$$\begin{aligned} W_m &= C_m^1(m-1)! - C_m^2(m-2)! + C_m^3(m-3)! - \dots + (-1)^{m-1} \cdot 1 = \\ &= m! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m!} \right). \end{aligned}$$

Оскільки всіх перестановок із m елементів є $m!$, то

$$V_m = m! - m! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m!} \right) = m! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^m \frac{1}{m!} \right).$$

Оскільки ті k елементів, які залишаються на своїх місцях, можна вибрати $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

способами, то за правилом множення отримаємо

$$U_k = C_n^k \cdot V_{n-k} = \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right), \quad n-k \geq 2.$$

Крім того $U_{n-1} = C_n^{n-1} \cdot V_1 = 0$ та $U_n = C_n^n \cdot V_0 = 1$.

Надалі для зручності позначимо U_k , про які йде мова в умові задачі, через $U_k^{(n)}$, а для кількості перестановок множини із $n+1$ елементів, в яких k елементів залишаються на своїх місцях, використаємо позначення $U_k^{(n+1)}$.

З врахуванням записаних вище рівностей отримаємо

$$U_k^{(n+1)} = (n+1)U_k^{(n)} + (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k, \quad k \leq n, \quad \text{та} \quad U_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Перейдемо тепер до доведення тверджень задачі:

1. Спочатку доведемо рівність

$$\sum_{k=1}^n k U_k^{(n)} = n! \quad (*)$$

Для $n = 1$ маємо рівність $\sum_{k=1}^1 k U_k^{(1)} = 1 \cdot 1 = 1!$

Припустимо справедливості рівності (*) для деякого $n \geq 1$. Тоді для $n + 1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} k U_k^{(n+1)} = (n+1) \sum_{k=1}^n k U_k^{(n)} + (n+1) U_{n+1}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n k (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k = (n+1) n! + \sum_{k=1}^{n+1} k (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k.$$

Оскільки $C_{n+1}^k = \frac{n+1}{k} C_n^{k-1}$, то з врахуванням формули бінома Ньютона

$$\sum_{k=1}^{n+1} k (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} = (n+1) \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} C_n^p = (n+1) (1-1)^n = 0.$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1} k U_k^{(n+1)} = (n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає

справедливості рівності (*) для всіх натуральних n .

З доведеного вище для $n \geq 3$ випливає рівність

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k U_k &= n! - U_1 = n! - \frac{n!}{1!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right) = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} \right). \end{aligned}$$

Оскільки внаслідок монотонного спадання послідовності $\frac{1}{k!}$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!} \leq 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} \leq 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

для всіх $n \geq 3$, то задана в 14.1 нерівність справджується.

2. Записана в умові рівність для $n = 1$ не справджується ($1 \neq 2$). Тому будемо доводити її методом математичної індукції лише для $n \geq 2$, використовуючи введені вище позначення для U_k .

Для $n = 2$ справджується рівність $\sum_{k=1}^2 k^2 U_k^{(2)} = 1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 = 2 \cdot 2!$ Припустимо справедливості

такої рівності для деякого $n \geq 2$. Тоді для $n + 1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 U_k^{(n+1)} = (n+1) \sum_{k=1}^n k^2 U_k^{(n)} + (n+1)^2 U_{n+1}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n k^2 (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k = 2 \cdot (n+1) \cdot n! + \sum_{k=1}^{n+1} k^2 (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k.$$

Оскільки $C_{n+1}^k = \frac{n+1}{k} C_n^{k-1}$, то з врахуванням отриманого вище маємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} k (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) \left(\sum_{k=1}^{n+1} (k-1) (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} \right) = \\
&= (n+1) \left(\sum_{p=0}^n p (-1)^{n-p} C_n^p + \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} C_n^p \right) = \\
&= (n+1) \left(n \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-1-s} C_{n-1}^s + \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} C_n^p \right) = (n+1) (n(1-1)^{n-1} + (1-1)^n) = 0.
\end{aligned}$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 U_k^{(n+1)} = 2 \cdot (n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає

справедливість рівності $\sum_{k=1}^n k^2 U_k = 2 \cdot n!$ для всіх натуральних $n \geq 2$.

Враховуючи наявність множника $(1-1)^{n-1}$, стає зрозумілим, чому задана рівність не справджувалася для $n = 1$.

У загальному випадку справедливе таке твердження: при кожному фіксованому натуральному m для всіх $n \geq m$

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^n k^m U_k^{(n)} = \text{const}.$$

При цьому константи у правій частині цієї рівності є так звані числа Белла, які визначаються рівностями: $B_0 = 1$ та $B_m = \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i B_i$ для $m \geq 1$. Числа Белла утворюють послідовність: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 887, ...

«Розбиття на доданки»

Доведіть, що існує таке число n , що кожне натуральне число, яке перевищує n , можна розбити на п'ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

Розв'язання. Будемо розв'язувати загальнішу задачу, вимагаючи, щоб кожні два доданки такої суми були взаємно простими.

Доведемо таке узагальнене твердження: для довільного $m \geq 2$ існує таке число n , що кожне натуральне число, яке перевищує n , можна розбити на m попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

Для його доведення скористаємося посиленням постулатом Бертрана: між числами N та $1,5N$, де $N \geq 2$ завжди існує просте число.

Нехай $n = 2 \cdot 16^{m-1}$, $k > 2 \cdot 16^{m-1}$. Між числами $\frac{10}{16}k$ та $\frac{15}{16}k$ виберемо просте число p_m . Тоді

$$\frac{1}{16}k \leq k - p_m \leq \frac{6}{16}k, \text{ тобто } 2 \cdot 16^{m-2} < k - p_m < p_m.$$

Аналогічно між числами $\frac{10}{16}(k - p_m)$ та $\frac{15}{16}(k - p_m)$ виберемо просте число p_{m-1} , причому

$$p_{m-1} < p_m.$$

Продовжуючи цю процедуру, отримаємо прості числа $p_2 < \dots < p_{m-1} < p_m$, причому $2 \leq k - p_2 - \dots - p_{m-1} - p_m < p_2$, тобто доданки $k - p_2 - \dots - p_{m-1} - p_m, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$ взаємно

прості, й більші за 1.

Наприклад для $m = 5$ та числа $k = 200000 > 2 \cdot 16^4$ шукаємо просте число p_5 між числами 125000 та 187500. Візьмемо $p_5 = 150001$. Тоді $k - p_5 = 200000 - 150001 = 49999$.

Шукаємо просте число p_4 між числами 31249 та 46874. Візьмемо $p_4 = 40009$. Тоді $k - p_5 - p_4 = 49999 - 40009 = 9990$.

Шукаємо просте число p_3 між числами 6243 та 9365. Візьмемо $p_3 = 9349$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 = 9990 - 9349 = 641$.

Шукаємо просте число p_2 між числами 400 та 600. Візьмемо $p_4 = 401$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 - p_2 = 641 - 401 = 240$.

Отже, отримуємо таке розбиття: $200000 = 240 + 401 + 9349 + 40009 + 150001$.

Зрозуміло, що отримане при цьому способі розв'язування задачі знайдене число n не є найменшим з можливих. Для п'яти доданків вкажемо спосіб пошуку найменшого з таких n .

Нехай три перші доданки – це 2, 3 та 5. З'ясуємо, які натуральні числа можна подати у вигляді суми двох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 2, 3, 5. Зрозуміло, що ці числа як суми двох непарних доданків повинні бути парними.

Щоб такі доданки не були кратними ні 2, ні 3, ні 5, їх остача при діленні на 30 також не має бути кратною 2, 3, 5. Серед можливих остач такими є 1, 7, 11, 13 та їх доповнення до 30 – остачі 29, 23, 19, 17 відповідно.

Для довільного натурального m розглянемо представлення вигляду:

$$60m \pm p = (30m + \alpha) + (30m + \beta),$$

де p пробігає множину всіх парних чисел від -30 до $+28$, а числа α та β вибрані з множини $\{\pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29\}$ таким чином, щоб в кожному з випадків їх різниця не мала дільників, відмінних від 2, 3, 5. Повний набір таких представлень наведений у матеріалах XIII Івано-Франківського турніру юних математиків.

Всі виписані в правих частинах доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але внаслідок зробленого вибору такі різниці відмінних від 2, 3, 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне парне число, починаючи з 30 можна подати вказаним способом у вигляді потрібної суми двох доданків. А враховуючи ще й доданки 2, 3, 5, отримаємо потрібні представлення п'ятьма доданками для всіх парних чисел $k \geq 40$.

Щоб отримати непарні числа, покладемо перші два доданки рівними 3 та 5 і з'ясуємо, які непарні натуральні числа можна подати у вигляді суми трьох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 3 та 5.

Для довільного натурального m розглянемо представлення вигляду:

$$90m \pm p = (30m + \alpha) + (30m + \beta) + (30m + \gamma),$$

де p пробігає множину всіх непарних чисел від -43 до $+45$, а числа α, β та γ вибрані з множини $\{\pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 29\}$ таким чином, щоб в кожному з випадків їх різниця не мала дільників, відмінних від 2, 3, 5. Повний набір таких представлень також наведений у матеріалах XIII Івано-Франківського турніру юних математиків.

Всі виписані в правих частинах доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але внаслідок зробленого вибору такі різниці відмінних від 2, 3 та 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне непарне число, починаючи з 47 можна подати вказаним способом у вигляді суми трьох доданків. А враховуючи ще й доданки 3 та 5, отримаємо потрібні представлення п'ятьма доданками для всіх непарних чисел $k \geq 55$.

Об'єднуючи ці два випадки, приходимо до висновку, що потрібні представлення у вигляді суми п'яти попарно взаємно простих більших за 1 натуральних доданків існують для всіх $k > n = 53$.

Зауважимо, що $n = 53$ ще не є найменшим з можливих. Потрібні представлення існують також для чисел: $53 = 3 + 7 + 11 + 13 + 19$, $51 = 3 + 7 + 11 + 13 + 17$, $49 = 3 + 5 + 11 + 13 + 17$, $47 = 3 + 5 + 7 + 13 + 19$, $45 = 3 + 5 + 7 + 11 + 19$, $43 = 3 + 5 + 7 + 11 + 17$. При цьому з останньої рівності зрозуміло, що для числа 41 такого представлення не існує.

Тому, враховуючи сказане вище, найменшим буде $n = 41$, щоб всі числа більші за нього можна було розбити на п'ять попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

«Цікава послідовність»

Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2 , a_3 , ... відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

Розв'язання. Оскільки послідовність a_{2k} є монотонно зростаючою, послідовність a_{2k+1} – монотонно спадною, то для існування границі необхідно, щоб всі елементи з непарними номерами були більшими кожного елемента з парним індексом.

$$\text{З нерівності } 2 \leq \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1 - 0}{1 - a_2} \leq 3 \text{ отримуємо, що } \frac{3}{6} \leq a_2 \leq \frac{4}{6}.$$

$$\text{Враховуючи сказане вище, з нерівностей } 2 \leq \frac{a_{2k} - a_{2k-1}}{a_{2k} - a_{2k+1}} \leq 3 \text{ та } 2 \leq \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \leq 3$$

$$\text{отримаємо оцінки } \frac{a_{2k-1} + 2a_{2k}}{3} \leq a_{2k+1} \leq \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2} \text{ та } \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \leq a_{2k+2} \leq \frac{a_{2k} + 2a_{2k+1}}{3} \text{ відповідно.}$$

$$\text{Зокрема, при } k = 1 \text{ знайдемо, що } \frac{4}{6} \leq a_3 \leq \frac{5}{6}.$$

$$\text{Далі, припускаючи, що } \frac{3x_k}{6^k} \leq a_{2k} \leq \frac{4y_k}{6^k} \text{ та } \frac{2z_k}{6^k} \leq a_{2k+1} \leq \frac{t_k}{6^k}, \text{ з отриманих вище оцінок}$$

$$\text{будемо мати } \frac{3(3x_k + 2z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+2} \leq \frac{4(t_k + 2y_k)}{6^{k+1}} \text{ та } \frac{2(3x_k + 4z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+3} \leq \frac{5t_k + 4y_k}{6^{k+1}} \text{ відповідно.}$$

Таким чином, для знаходження чисел x_k , y_k , z_k , t_k отримуємо такі дві системи

рекурентних співвідношень: $\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k + 4z_k, \end{cases}$ та $\begin{cases} y_{k+1} = 2y_k + t_k, \\ t_{k+1} = 4y_k + 5t_k, \end{cases}$ причому, враховуючи оцінки для a_2 та a_3 , маємо $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 2, t_1 = 5$. А з записаних систем одержуємо також $x_2 = 7, y_2 = 7, z_2 = 11, t_2 = 29$.

З другого рівняння першої системи знаходимо $x_k = \frac{z_{k+1} - 4z_k}{3}$. Тоді $x_{k+1} = \frac{z_{k+2} - 4z_{k+1}}{3}$. Підставляючи їх у перше рівняння цієї системи, отримаємо різницеве рівняння $z_{k+2} - 7z_{k+1} + 6z_k = 0$, для якого коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ є числа $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 6$. Тому $z_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $z_1 = 2$ та $z_2 = 11$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 2, \\ C_1 + 36C_2 = 11, \end{cases}$ знайдемо $C_1 = \frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{3}{10}$. Отже, остаточно отримуємо $z_k = \frac{2 + 3 \cdot 6^k}{10}$ та далі знаходимо $x_k = \frac{-2 + 2 \cdot 6^k}{10}$.

Так само, виражаючи з першого рівняння другої системи $t_k = y_{k+1} - 2y_k$, прийдемо до аналогічного різницевого рівняння $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тому $y_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $y_1 = 1$ та $y_2 = 7$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 1, \\ C_1 + 36C_2 = 7, \end{cases}$ знайдемо $C_1 = -\frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{2}{10}$. Тоді $y_k = \frac{-2 + 2 \cdot 6^k}{10}$ і також знаходимо $t_k = \frac{2 + 8 \cdot 6^k}{10}$.

Повертаючись до нерівностей $\frac{3x_k}{6^k} \leq a_{2k} \leq \frac{4y_k}{6^k}$ та $\frac{2z_k}{6^k} \leq a_{2k+1} \leq \frac{t_k}{6^k}$, отримуємо наступні оцінки для елементів заданої послідовності:

$$\frac{3 \cdot \frac{-2 + 2 \cdot 6^k}{10}}{6^k} \leq a_{2k} \leq \frac{4 \cdot \frac{-2 + 2 \cdot 6^k}{10}}{6^k} \quad \text{та} \quad \frac{2 \cdot \frac{2 + 3 \cdot 6^k}{10}}{6^k} \leq a_{2k+1} \leq \frac{\frac{2 + 8 \cdot 6^k}{10}}{6^k}.$$

Перейшовши в цих подвійних нерівностях до границі при $k \rightarrow \infty$, отримуємо $\frac{3}{5} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \leq \frac{4}{5}$ та $\frac{3}{5} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} \leq \frac{4}{5}$. В цих же ж межах буде знаходитися і границя заданої послідовності.

Для кожного $a \in \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right]$ нескладно навести приклад такої послідовності, яка збігається до

a і задовольняє умови задачі: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{2n} = a - \frac{a}{6^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{6^n}$.

Зауважимо, що для аналогічної послідовності, елементи якої при всіх $n \geq 1$ задовольняють нерівність $m \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq M, 1 < m \leq M$, її границя $a \in \left[\frac{Mm - M}{Mm - 1}, \frac{Mm - m}{Mm - 1} \right]$.

Якщо a – довільне число з цього проміжку, то прикладом послідовності, яка збігається до

a і задовольняє вказану нерівність, є: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{2n} = a - \frac{a}{(Mm)^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{(Mm)^n}$.

«Фарбуємо клітинки»

Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

Розв'язання. Умова задачі зводиться до такого питання: чи можна на дошці 8×8 виділити деяку кількість клітинок так, щоб поруч з кожною клітинкою дошки знаходилася рівно одна виділена клітинка? Вибираючи після цього в довільному порядку по одному разові виділені клітинки, ми зможемо перефарбувати всі клітинки шахової дошки у протилежний колір.

Розглянемо зразу загальнішу задачу про виділення таких клітинок на дошці розмірами $2n \times 2n$. Наступний ланцюжок табличок показує, як, рухаючись по спіралі, переходити від дошки $2n \times 2n$ до дошки $2(n+1) \times 2(n+1)$:

25	26			27	28			29	30		
											31
		9	10			11	12				32
24									13		
23				1	2				14		
		8					3				33
		7					4				34
22				6	5				15		
21									16		
		20	19			18	17				35
											36
42	41			40	39			38	37		

Тут клітинки 1, 2 виділені у зеленому квадраті 2×2 . Далі, пропускаючи дві клітинки дошки і повертаючи під прямими кутами за стрілкою годинника перейдемо до квадрата 4×4 з використанням клітинок 1 – 6. Додавляючи за цим же принципом клітинки 7 – 12, отримаємо потрібний результат для квадрата 6×6 . Ще одна половина вітки спіралі з виділеними клітинками 13 – 20 приводить нас до квадрата 8×8 , про який йшла мова в основній задачі. На рисунку зображене також продовження спіралі для перефарбування квадратів 10×10 та 12×12 . Зрозуміло, що такий процес може бути продовжений до нескінченності, і в цей спосіб можна перефарбувати у протилежний колір навіть всі клітинки «шахової площини».

Зауважимо тільки, що для перефарбування дошки $2n \times 2n$ нам потрібно буде вибрати $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)$ клітинок.

Додатково розглянемо питання про перефарбування клітинок квадрата розмірами $(2n+1) \times (2n+1)$ і доведемо, що здійснити його не вдасться. Для цього розфарбуємо його клітинки, як на рисунку справа на прикладі $n = 2$.

Перефарбувати всі клітинки такого квадрата у протилежний колір не можна, бо помічених темним кольором клітинок непарна кількість, а за кожен хід або не буде перефарбовано жодної, або будуть перефарбовані дві з них.

