

О. І. Пономаренко
М. О. Перестюк
В. М. Бурим

**СУЧАСНИЙ
ЕКОНОМІЧНИЙ
АНАЛІЗ**

УДБФХ/К/С/1/12/21

ЧАСТИНА

**1 Мікро-
ЕКОНОМІКА**

*Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України*

Навчальний посібник для
студентів економічних та
математичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
«Вища школа»
2004

УДК 330.101.542 (075.8)
ББК 65.053я73
П56

Гриф надано Міністерством
освіти і науки України
(лист від 2 квітня 2001 р.
№ 14/18.2 - 404)

Рецензенти: акад. НАН України В. М. Гесць (Інститут економічного прогнозування НАН України); чл.-кор. НАН України М. Й. Ядренко (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Редактори: В. Ф. Хміль, О. Г. Молдованова

Пономаренко О. І. та ін.
П56 Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 1. Мікроекономіка: Навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К.: Вища шк., 2004. — 262 с.: іл.
ISBN 966-642-048-1 (ч. 1)
ISBN 966-642-049-X

Розглянуто основні економіко-математичні моделі сучасного мікроекономічного аналізу, пов'язані з теоріями поведінки споживачів, виробників (теорія фірми), моделями ринку, а також теоріями загальної економічної рівноваги. Велику увагу приділено сучасній мікроекономіці невизначеності та моделюванню поведінки мікроекономічних агентів на фінансових і страхових ринках. Виклад основного тексту ілюструється значною кількістю прикладів.

Для студентів економічних та математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 330.101.542 (075.8)
ББК 65.053я73

ISBN 966-642-048-1 (ч. 1)
ISBN 966-642-049-X

© О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк,
В. М. Бурим, 2004

ПЕРЕДМОВА

Справжній економіст, знавець своєї справи, має бути наділений різноманітними обдаруваннями — певною мірою він має бути математиком, істориком, державним діячем, філософом... Повинен уміти розмірковувати про окремішності у поняттях загального та екстремізму літ своєї думки однаковою мірою до абстрактного і конкретного. Він має вивчати сучасність у світлі минулого заради майбутнього. Жодна риса людської натури або створених людиною інституцій не повинна залишатися поза його увагою.

Джон Мейнард Кейнс

Розвиток економічної теорії у XX ст. зумовив превалювання в ній кількісних аналітичних методів та моделей дослідження господарських явищ і процесів із використанням апарату математичного аналізу, алгебри, геометрії, теорії ймовірностей та статистики.

В останні десятиліття значною мірою знівелювалася відмінність між описово-інструментальним і математичним напрямками економічних досліджень.

Ці дослідження нині мають переважно комплексний характер: спочатку економічне явище (чи процес), яке вивчається з використанням емпіричних даних та спостережень, докладно описується, потім будується наближена вербальна або графічна його модель, на основі якої розробляється кількісна аналітична (тобто математична) модель, що аналізується із застосуванням формальних математичних методів. Отримані аналітичні результати інтерпретуються змістовно, що дає змогу порівняти їх із наявними емпіричними даними та спостереженнями і зробити висновки щодо адекватності побудованої моделі реальній дійсності. У разі адекватності модель включається до відповідної теорії, а якщо ні, то переробляється та вдосконалюється або ж замінюється іншою моделлю.

Економічний аналіз — це напрям сучасної економічної теорії, який передбачає побудову кількісних аналітичних моделей різних економіко-фінансових явищ та процесів, що потім вивчаються математичними методами. Залежно від масштабів досліджуваних явищ розрізняють мікроекономічний та макроекономічний аналіз.

Зазначені процеси математизації економічної теорії позначилися також на методах її викладання. За два останні десятиліття у розвинених країнах з'явилися підручники з мікро- та макроекономіки, в яких основну увагу приділено саме аналітичним методам та моделям економічних явищ і процесів, а графічні й вербальні моделі відіграють другорядну роль як пояснення відповідних аналітичних висновків. До них насамперед можна віднести підручники Х. Варіана, Х. Гревела та Р. Рісса, А. Мак-Коллела, М. Уїнстона і Дж. Гріна, А. Такаями, О. Бланшара та С. Фішера, Т. Сарджента, Д. Роме-ра, які вже витримали кілька видань і за якими викладаються курси мікро- та макроекономічної теорії в західних країнах. Фахівці, викладачі та студенти нових незалежних країн, що з'явилися після розпаду СРСР, ще мало ознайомлені з такими підручниками та навчальними посібниками. Це зумовило значний розрив між рівнями економічної освіти у цих країнах і країнах Європейського Союзу та США.

Мета цієї книги — дати якомога повніше уявлення про основні принципи побудови і дослідження аналітичних моделей економічних явищ та процесів, розглянути низку найпоширеніших економіко-математичних моделей, пов'язаних з теоріями споживання, виробництва, заощаджень та інвестування, зниження економічних і фінансових ризиків, ринкової взаємодії економічних агентів, загальної економічної рівноваги, економіки не визначеності, з фінансовими та страховими ринками, балансовими, статистичними та динамічними багатогалузевими моделями економіки, а також моделями економічного зростання і розподілу інвестувань. На жаль, через обмежений обсяг посібника багато напрямів сучасного економічного аналітичного моделювання не висвітлено на його сторінках.

Припускається, що читачі обізнані з основними поняттями та методами стандартних курсів аналітичної геометрії, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії ймовірностей і математичної статистики. Бажаним (але не обов'язковим) є також їхнє ознайомлення зі вступним або проміжним курсом описово-інструментальної економічної теорії. Основні математичні факти, що використовуються у посібнику або подаються безпосередньо в належному місці викладу, або висвітлюються в математичному додатку.

При написанні посібника використано досвід авторів із викладання курсів мікро- та макроекономіки, фінансів та страхування, а також суміжних дисциплін для студентів, які навчаються за спеціальністю «Математична економіка й економетрика», «Фінансова та актуарна математика» на механіко-математичному факультеті (статистичне відділення) Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також за спеціальністю «Економічна кібернетика» на економічному факультеті. Розробка згаданих вище курсів здійснювалася за підтримки міжнародних проектів, зокрема таких, як «Математична економіка», яким опікувалася Агенція з міжнародного розвитку США (US AID), та «Статистичні аспекти економіки» (JER – 10353 – 97), у межах програми TEMPUS – TACIS Європейського Союзу.

Математична економіка ачить строгості мислення і свободі міркувань там, де ще панує мішанина стилів та доказів, що ґрунтуються тільки на авторитеті. Вона дає пояснення основним поняттям, а також їх взаємозв'язкам і водночас є підґрунтям для їх застосувань. Можливо, вона є зразком того, якими будуть суспільні науки в майбутньому. Краще за будь-яку дисципліну вона об'єднує два стимули науки, які висував свого часу Френсіс Бекон: на славу Господу і для поліпшення людського існування.

Івар Екланд

Мікроекономіка є основною складовою економічної теорії. Вона вивчає господарські рішення та поведінку окремих одиниць економічної системи — економічних агентів, у ролі яких виступають споживачі (домашні господарства або сім'ї) і виробники товарів та послуг (підприємства або фірми), досліджує економічні передумови формування спільного вибору дій окремими господарюючими суб'єктами за умов обмеженості ресурсів, наслідки відповідної господарської діяльності та взаємодії економічних суб'єктів, які виявляються у функціонуванні ринку, явищах економічної кооперації та інших типах координації господарської активності, аналізує позаринкову діяльність, визначає сутність зовнішніх ефектів, що впливають на рішення і результати підприємницьких зусиль, досліджує роль власності в економічній системі.

Внутрішніми мотивами, що спонукають людей до господарської діяльності, виступають такі потреби, як відчуття нужди, нестатку, дефіциту, які задовольняються за допомогою благ. Прагнення отримати блага є мотиваційним механізмом економічної діяльності, руйнівною силою економіки як господарської системи.

Усі блага поділяють на **вільні** (які існують у надлишку і не є предметом економічної діяльності) та **економічні** (обмежені за кількістю, що потребують витратів на їх виробництво і забезпечення ними). Економічні потреби виступають як конкретизовані потреби в економічних благах і класифікуються за ступенем нагальності на **потреби першої необхідності** (або потреби у засобах існування) та **потреби вибору**. За видами задоволення економічні потреби розподіляють на **індивідуальні** та **колективні**.

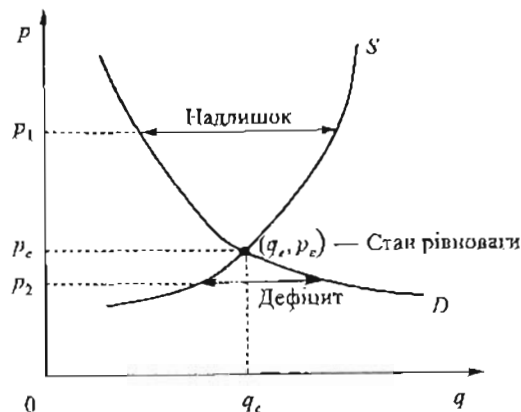


Рис. В.1

для обміну або продажу, а отже, мають ціну. Товари розподіляють на **речові** (або **матеріальні**) та **послуги**. Останні, на відміну від речових товарів, неможливо складувати, а їх виробництво, як правило, збігається з їх споживанням. Товари, які безпосередньо задовольняють життєві потреби людей і виступають у формі закупівель домашніх господарств, називають **споживчими**. Товари, що використовуються для виробництва інших товарів і виступають у формі закупівель підприємств для забезпечення процесів виробництва, називають **інвестиційними**.

Пропозиція — це кількість певного товару, яка пропонується на ринку. Пропозиція певного товару характеризується функцією пропозиції, тобто обсягом пропозиції як функцією ціни товару, ціни інших товарів, витрат виробництва, виробничої технології, організації ринку та інших чинників.

Поняття **ринку** включає співвідношення між попитом і пропозицією на товари. Конкуренційні сили при цьому діють у напрямі синхронізації цін попиту та пропозиції. Найпростішу математичну модель ринку певного товару — графічну модель взаємодії попиту і пропозиції, представлену кривими сукупного (тобто сумарного) попиту (D — від англ. *demand* — попит) та сукупної пропозиції (S — від англ. *supply* — пропозиція), — зображено на рис. В.1. Ця модель називається «хрестом», або «позиціями» Альфреда Маршалла¹.

Крива D зображує обернену функцію попиту $p = f(q)$, яка характеризує залежність між кількістю попиту q на товар і його ціною p , а крива S — обернену функцію пропозиції $p = g(q)$, що відображує залежність між кількістю пропозиції q на товар та його ціною p . Рівноважна ціна p_e — це ціна, за якої обсяг попиту дорівнює обсягу пропозиції (q_e). Якщо

Попит на економічне благо — це потреба, що впливає на його виробництво через систему існуючого господарського порядку. При моделюванні попиту він характеризується **функцією попиту** споживача або виробничого підприємства, що відображує обсяг попиту на благо як функцію ціни блага, цін на інші блага, які використовуються водночас з ним, доходу економічного агента, умов споживання, очікувань тощо.

Товари є економічними благами, що задовольняють економічні потреби і призначені

$p_1 < p_e$, то виникає надлишок попиту та конкуренція серед покупців через дефіцитності товару; якщо $p_2 < p_e$, то є надлишок пропозиції, що зумовлює появу конкуренції серед продавців. За наявності конкуренції її сили сприяють зміні перівноважних цін у бік наближення до рівноважного стану (q_e, p_e).

Основними **суб'єктами мікроекономіки** є дрібні самостійні економічні одиниці у вигляді окремих домашніх господарств та підприємств (фірм), а також держава.

Необхідність вибору способів економічної діяльності (тобто господарювання) зумовлюється насамперед існуванням протиріччя між обмеженістю ресурсів для виробництва благ (рідкісність благ) і необмеженістю потенційних потреб як окремих економічних агентів, так і суспільства в цілому. Рішення економічних суб'єктів щодо цього вибору мають бути раціональними (виваженими та розумними) і спрямовуватися на максимізацію господарського успіху (раціонально-оптимізаційний критерій діяльності).

Домашні господарства у мікроекономіці є власниками різноманітних факторів виробництва (або ресурсів), завдяки чому вони отримують доходи і приймають рішення про споживання вироблених благ, заощадження коштів та страхування від будь-яких ризиків, пов'язаних із функціонуванням. Підприємства (або фірми) є виробничими інституціями — власниками виробничого капіталу (насамперед засобів виробництва), які виробляють товари та послуги, а також здійснюють інвестиції (капіталовкладення) у відновлення виробництва (амортизацію), його модернізацію та розширення (чисті інвестиції). Підприємства приймають рішення про страхування від ризиків, пов'язаних із їхньою діяльністю.

Третім типом господарських одиниць у мікроекономіці є держава і громадські організації — власники централізованих та суспільних фондів, що використовуються для реалізації рішень про задоволення колективних потреб з урахуванням суспільної корисності та перерозподіл доходів у суспільстві. До найважливіших функцій держави належать також розробка правил господарського порядку в суспільстві (правил «економічної гри») і контроль за їх дотриманням.

Рішення, які приймають економічні суб'єкти, спрямовані на розв'язання **п'яти основних економічних проблем**, що стоять перед будь-якою економікою як господарською системою: 1) **що виробляти?** 2) **хто вироблятиме?** 3) **як виробляти?** 4) **для кого виробляти?** 5) **скільки виробляти тепер і скільки ресурсів направляти на майбутнє виробництво (скільки заощаджувати та витрачати на запобігання господарським ризикам)?**

Є чотири фундаментальних підходи до вирішення базових економічних проблем (координації господарської діяльності) у різних суспільствах. Це — **інстинкт, традиції та звичай, ієрархія та ринкова взаємодія** (рис. В.2). Виявлення цих принципів є одним із головних завдань економічної історії та сучасної політичної економії.

Існують дві різнополярні концепції функціонування соціополітичної, а також економічної структури суспільства, побудовані на домінуванні **принципу індивідуальності** (з наданням певних економічних і політичних

¹Маршалл Альфред (1842–1924) — відомий англійський економіст, засновник кембриджської школи економіки, засновник описово-інструментального напрямку економічної науки (economics) та мікроекономіки.

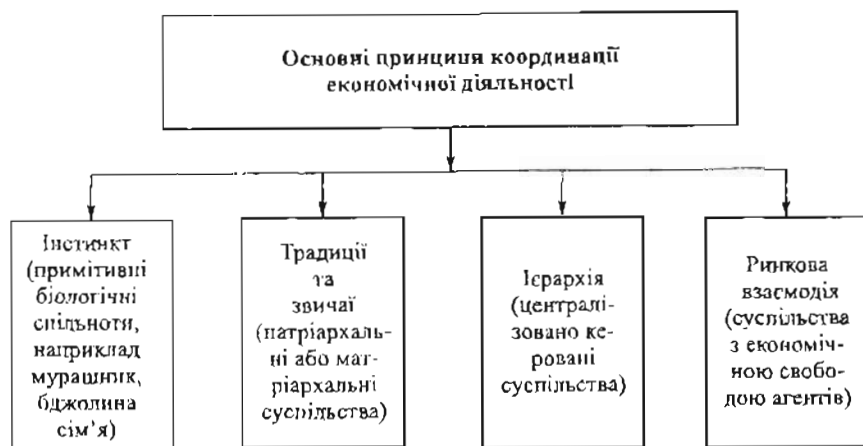


Рис. В.2

свобод особистості) або **принципу колективізму** (переважання суспільного над індивідуальним). За першим принципом функціонує багатопланова економічна система, що регулюється конкуренцією (суто ринкова економіка), за другим – однопланова з централізованим регулюванням економіки (децентралізовано-командна економіка). У дійсності ж економічні системи є зазвичай системами **змішаної економіки**, де в певних пропорціях, зумовлених особливостями національних економік, поєднуються принципи економічної свободи особистості та державного регулювання.

У посібнику розглядаються ринкові та змішані економічні системи. У таких системах основна взаємодія економічних агентів здійснюється на ринках двох типів: кінцевої продукції (тобто споживчих товарів і послуг) і факторів виробництва (тобто виробничих ресурсів). Особливо важливими економічними послугами є фінансово-кредитні, а також страхові, що надаються різними економічними агентами фінансовими та страховими організаціями (інституціями) на фінансових і страхових ринках. Ці інституції накопичують (акумулюють) тимчасово вільні кошти й здійснюють інвестування різних економічних і комерційних проєктів.

Найпростішу графічну модель взаємодії основних мікроекономічних суб'єктів зображено на рис. В.3.

Головним інструментом впливу держави на мікроекономічні процеси є фінансова та монетарна політика, що зумовлює такі параметри економічного середовища (в якому діють окремі макроекономічні агенти), як зовнішня та внутрішня вартість національної валюти, рівні і темпи інфляції, розміри відсоткових ставок, система оподаткування та її кількісні характеристики тощо. Значення цих параметрів і тенденції їх зміни впливають на вибір способів діяльності економічних агентів і тому мають бути враховані у відповідних моделях прийняття господарських рішень.

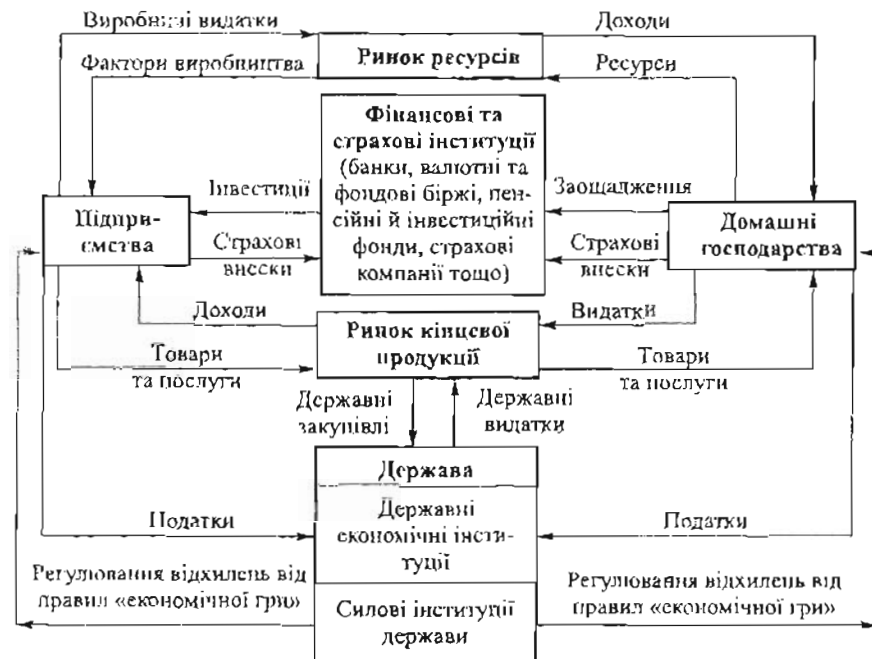


Рис. В.3

При вивченні та моделюванні економічних явищ і процесів слід зважати на те, що довготривалі процеси поділу праці поступово призвели до значного ускладнення сучасної економічної системи та її структури. Так, національний ринок як сукупність національно-економічних відносин, за допомогою яких здійснюються реалізація товарів, обіг капіталу, купівля-продаж робочої сили тощо, складається з різних ринків зі складними взаємозв'язками між ними.

Спрощену структурну схему національного ринку наведено на рис. В.4. Кожен із показаних на ній ринків має специфічну структуру та учасників, поведінка яких потребує розгляду моделей їхньої діяльності. Наприклад, суб'єктами, які діють на ринку цінних паперів (фондовому ринку), є: 1) **емітенти**, тобто організації, що випускають цінні папери; 2) **інвестори** – власники, які вкладають капітал у цінні папери; 3) **посередники**, які беруть участь у русі цінних паперів від емітентів до інвесторів та їх перепродажі. Посередницькими операціями займаються переважно брокерські та дилерські контори, що виконують доручення клієнтів на фондових біржах, а також інвестиційні фонди, банки, страхові компанії, пенсійні фонди тощо.

Моделювання та вивчення дій економічних агентів зумовило появу значної кількості нових фінансово-економічних дисциплін і теорій (від фінансової інженерії, технічного та фундаментального аналізу фінансо-

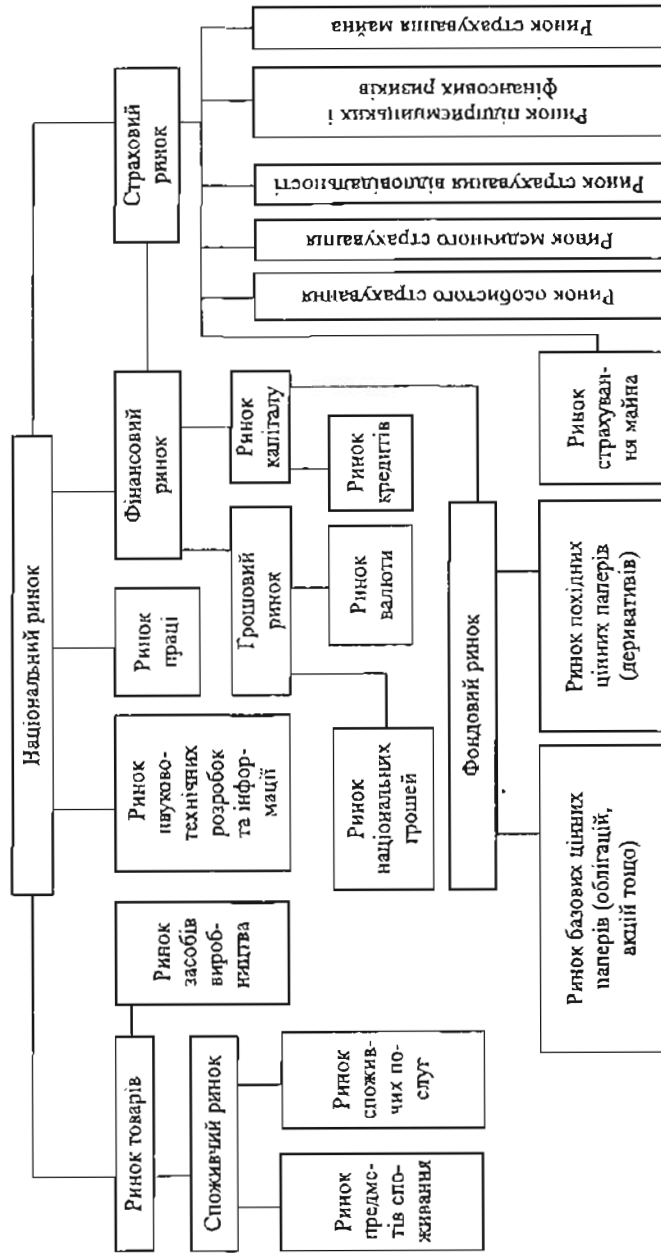


Рис. В.4

них ринків до дуже складних моделей сучасної стохастичної фінансової математики і теорії ринку), а також нових професій (фінансові та актуарні аналітики, ризик-експерти та ін.).

Сукупність засобів та способів пізнання сутності економічних явищ і процесів на рівні окремих господарюючих суб'єктів становить методологію мікроекономічного аналізу, що охоплює як загальнонаукові методи сучасного прикладного системного аналізу (наукова абстракція, аналогія, порівняльний аналіз, моделювання, індукція та дедукція, синтез, висунення та перевірка гіпотез), так і специфічні методи дослідження та моделювання мікроекономічних явищ і процесів. Докладне висвітлення методологічних питань системного підходу та моделювання в економічних і суміжних дослідженнях міститься в книзі [43].

Економічні теорії представлені загальними рамковими конструкціями, що дають змогу зрозуміти взаємозв'язки між причинами і наслідками тих чи тих процесів та явищ. Економічні моделі є спрощеним відображенням конкретних економічних феноменів і відтворюють певні властивості та характеристики оригіналу, які становлять інтерес для дослідника. Цей метод має істотні переваги перед іншими методами дослідження. Модель, як правило, групується на певних економічних змінних, що є показниками та параметрами певного феномену, а також певних припущеннях щодо співвідношень між цими змінними.

Оскільки для різних цілей потрібні різні моделі, то можлива побудова кількох моделей одного об'єкта. Цей принцип багатомодельності відображення об'єкта (явища) є одним із головних у сучасній науковій методології.

Пізнавальні моделі є формою організації та зображення знань, а також засобом поєднання нових знань із наявними.

Прагматичні моделі — це засіб організації практичних дій та процесів керування.

Особливе місце серед абстрактних моделей посідають *мовні моделі*. Неоднозначність, нечіткість природних мов може перешкоджати в деяких ситуаціях дослідженню і практичному застосуванню отриманих результатів. Для запобігання цьому створюють більш точні професійні мови, формалізовану мову сучасної математики та спеціальні машинні мови для ЕОМ.

Для описово-інструментального напрямку економічної науки характерне напування *вербальних моделей* (від лат. *verbalis* — словесний), які групуються на використанні засобів звичайної мови і логіки. Звичайно, це не виключає введення в такі моделі певних елементів кількісних аналітичних та графічних математичних моделей, але як допоміжного засобу. Недоліками вербальних моделей є нечіткість, недостатня наочність і складність для опрацювання та аналізу. Висновки, зроблені на їх основі, є суб'єктивними. Використовуючи вербальні моделі, неможливо оперувати значною кількістю незалежних змінних параметрів, тому тут, як правило, застосовується відомий принцип «*ceteris paribus*» («за інших однакових умов»). Використання вербальних моделей зумовлено складністю і нечіткістю об'єктів моде-

лювання, пов'язаними з непередбачуваною та неоднозначною поведінкою окремих людей, спільнот і суспільства в цілому.

Потреба в точних кількісних моделях при господарюванні та веденні ділових операцій була усвідомлена дуже давно. Пригадаємо відомий принцип Леонардо да Вінчі: «немає ніякої вірогідності в науках, де не можна прикласти жодної з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою». Саме Леонардо спонукав італійського математика, французького монаха Луку Пачолі до розробки питань фінансової математики та створення кількісних моделей бухгалтерського обліку. Праці Л. Пачолі були покладені в основу вчення меркантилізму, яке передувало класичній політичній економії. Її засновник — англійський учений Уільям Петті — назвав розробленим економічну науку та основи економічної статистики політичною арифметикою. Він зазначав, що його спосіб досліджень «незвичайний, оскільки замість того щоб вживати слова тільки в порівняльному та найвищому ступенях і користуватися умоглядними аргументами, я став на шлях викладання своїх думок мовою чисел, ваг та мір, ... давно намагався піти цим шляхом, щоб показати приклад політичної арифметики».

Однією, мабуть, першою працею з економіки, в якій систематично використовуються математичні методи, була книга французького математика А. Курно «Дослідження про математичні принципи теорії багатства», що вийшла друком 1838 р. у Парижі.

Математична школа в економіці виникла в рамках неокласичного напрямку, головну роль в якому відігравала теорія граничної корисності (маржиналізм). Її відомими представниками були Х. Госсен у Німеччині, В. Джевонс та Ф. Еджворт у Великій Британії, Л. Вальрас у Швейцарії, Г. Кассель у Швеції, В. Парето в Італії, В. Дмитрієв та Є. Слуцький у Росії. Найбільший вплив на економічну теорію мали праці Л. Вальраса, чия теорія конкурентної рівноваги впродовж багатьох десятиліть була рушійною силою економіко-математичних досліджень.

Переломними в економічній теорії стали 30-ті роки XX ст. Поява моделі «витрати — випуск» В. Леонтьєва, моделі багатосекторної зростаючої економіки та динамічної рівноваги, перші докази існування економічної рівноваги А. Вальда, а також теорія ігор Дж. фон Неймана, економетрика Р. Фріша, лінійне програмування Л. Канторовича тощо докорінно змінили економічну теорію. Збулося передбачення Л. Вальраса, висловлене ним у 1874 р.: «Чиста теорія економіки є наукою, що падає в усьому фізико-математичній науці». Математична економіка стала потужним джерелом виникнення і розвитку нових математичних теорій та дисциплін, таких як математичне програмування, опуклий аналіз, багатокритеріальна оптимізація, теорія кооперативних рішень, теорія часових рядів та ін.

Дослідження характеру робіт з економічної теорії, які реферувалися в «American Economic Review» у 70-ті роки та на початку 80-х років XX ст., показало, що роботи з математичної економіки та економетрики посіли північні позиції в наукових дослідженнях порівняно з минулим періодом, тоді як робіт емпіричного характеру або статей, де досліджуються конкретні проблеми зі звичайним інструментально-описовим підходом, поменшало.

Більшість Нобелівських премій з економіки, що вперше почали присуджуватися з 1969 р., надаю саме за роботи економіко-математичного спрямування.

Слід наголосити, що реальні економічні процеси в сучасному світі настільки складні і багатогранні, що вивчення їх потребує застосування великого комплексу наук — від психології, соціології, політології до інформатики і системного аналізу. При математичному моделюванні економічних процесів і явищ використовується надзвичайно широкий діапазон математичних методів, теорій і способів, оскільки можливості експерименту в економіці досить обмежені. Так, у моделях поведінки економічних агентів в умовах визначеності застосовуються методи математичного аналізу, алгебри і геометрії. Особливо важливу роль тут відіграють два типи аналітичних моделей: оптимізаційні та рівноважні.

Оптимізаційні моделі раціонального прийняття рішень економічними агентами будують, виходячи або з принципу використання мінімуму засобів при досягненні заданого результату, або з принципу отримання максимального результату при використанні заданих засобів та коштів. При цьому широко застосовують апарат математичного програмування і теорії оптимального керування.

Рівноважні моделі використовують під час дослідження взаємозв'язків між економічними суб'єктами й при описі пристосування економічних агентів до умов навколишнього економічного середовища. Як правило, вони пов'язані з розв'язанням певних систем рівнянь та вивченням їхніх властивостей. При цьому застосовується такий математичний апарат, як теорія неявних функцій, теореми про існування нерухомих точок у тих чи інших відображеннях тощо.

При вивченні питань поведінки економічних агентів в умовах невизначеності широко використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики. Дослідження конкуренції і кооперації економічних агентів потребує застосування методів теорії ігор, багатокритеріальної оптимізації, теорії корисності та інших розділів сучасної прикладної математики.

Споживачі є одними з основних елементів будь-якої економічної системи. У цьому розділі розглянуто математичні моделі поведінки окремого споживача, в ролі якого можуть виступати індивід, сім'я або домашнє господарство, члени яких мають спільний споживчий бюджет і разом формують систему переваг відносно наявних споживчих благ.

Сучасний математичний аналіз споживання в математичній економіці виник на основі описово-інструментальної економіки, відомої як теорія граничної (маржинальної) корисності, що з'явилася в 70-х роках XIX ст. Її головним недоліком була наявність неадекватних дійсності ідей про можливість точної кількісної (кардинальної) вимірності корисності та надмірне акцентування на маржинальних (граничних) поняттях. Позбавлена у математичній економіці подібних обмежень класична ідея корисності перетворилася на сучасну теорію споживчих переваг.

1.1. ПРОСТІР ТОВАРІВ І ВІДНОШЕННЯ ПЕРЕВАГИ

Під **товаром** падає розумітимемо споживче благо або послугу, що надійшли у продаж у певний час, у певному місці, а під **споживачем** — групу індивідумів, які спільно розподіляють свій дохід на закупівлю товарів (не виключається, що ця група може складатися з одного члена). Головна проблема раціонального ведення господарства споживачем полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він повинен придбати за певний проміжок часу при заданих цінах і споживчому доході. Математичні моделі подібної поведінки та результати аналізу їх утворюють **теорію особистого споживання**.

Вважається, що існує скінченне число n наявних товарів, які мають властивість кількісної вимірності. Це припущення не є обмежувальним, оскільки в економіці завжди можна перейти до цінового індексу кількості будь-якого товару чи будь-якої групи товарів. Подібна операція робить кількісно порівнянними (сумірними) всі якісно різні товари (до них застосовуються ті самі одиниці виміру) і дає можливість доцільно агрегувати сукупності товарів, коли це потрібно, розглядаючи їх як один **комплексний (складний) товар**. При цьому ціновий індекс певного товару є його ціною в певний базисний період часу p^0 , а ціновий індекс кількості комплексного това-

ру, що складається з кількостей q_j j -х товарів, $j = 1, 2, \dots, m$, становить $I_q = \sum_{j=1}^m p_j^0 q_j$, де p_j^0 — ціна одиниці j -го товару в базисному періоді часу.

Вибір споживача характеризується **набором товарів** $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_i)_{i=1, n}$, де x_i — кількість i -го товару, придбаного споживачем. Тоді всі можливі товари є точками, або векторами, **простору товарів** X , що є підмножиною n -вимірного простору R^n . При цьому додатне значення компоненти x_i товарної партії $x = (x_i)_{i=1, n}$ означає, що споживач одержав x_i одиниць i -го товару у своє користування, а від'ємне — що він віддав відповідну кількість товару.

Щодо кількісної характеристики товарів розрізняють **дискретні товари**, кількості яких набувають окремих числових значень, та **необмежено подільні товари**, кількості яких можуть бути виражені довільними дійсними числами. В кількісній теорії споживчого вибору, як правило, розглядаються простори товарів, що складаються з необмежено подільних товарів. Задача споживчого вибору в просторах дискретних товарів малоцікава з математичного погляду і практично зводиться до перебору зі скінченної множини альтернатив.

Формально загальна порядкова теорія споживчого вибору, яка розглядається далі, охоплює також випадок дискретних товарів, якщо наділяти простір товарів X дискретною топологією. Це саме стосується випадку, коли частина товарів необмежено подільна, а частина — дискретна. Однак читач, не знайомий із такими математичними тонкощами, в подальшому може припускати, що всі товари є необмежено подільними і простір товарів X є деякою областю в R^n (як це подається у звичайних курсах мікроекономіки, де теорія споживання пояснюється на геометричних або елементарних аналітичних моделях). При цьому слід зауважити, що, як правило, через дрібність грошових одиниць припускається, що ціни на товари можуть змінюватися практично безперервно, як і значення цінових індексів кількості товарів.

Вибір споживачем певного набору товарів залежить не тільки від його потреб, а й частково від його смаків. Він характеризується **суб'єктивним відношенням переваги**, яке позначається \succeq і є парним порівнянням можливих партій товарів. Запис $x \succeq y$, $x, y \in X$ означає, що споживач надає перевагу набору товарів x перед набором y ($x \succ y$) або вважає їх рівноцінними ($x \sim y$). У першому випадку говорять, що x **строго переважає** y (тоді $x \succeq y$, але відношення $y \succeq x$ не виконується), а в другому — відношення \sim називається **відношенням байдужості** і $x \sim y$ означає, що одночасно $x \succeq y$ та $y \succeq x$.

Нагадаємо кілька математичних понять, які тут використовуватимуться. Множина всіх можливих пар (x, y) наборів товарів x та y із простору X утворює декартовий добуток простору X самого на себе, що позначається як $X \times X$ і є підмножиною $2n$ -вимірного евклідового простору R^{2n} . Множина W у просторі R^n є **відкритою**, якщо вона містить кожну свою точку (вектор) разом із деяким околom цієї точки. Множина F в R^n є **замкне-**

ною, якщо її доповнення (тобто множина точок з R'' , які їй не належать) є відкритою. Замкнена множина містить усі свої граничні точки, тобто точки, кожний окіл яких містить нескінченну кількість точок цієї множини. Тому кожна збіжна послідовність точок замкненої множини F має границю, що належить цій множині.

У математичній теорії споживання вважається, що відношення переваги задовольняє низку вимог (аксіом), які втілюють природні властивості вибору споживача і забезпечують можливість дедуктивного розвитку повноцінної теорії. Основну групу аксіом переваги становлять такі:

AI. Відношення переваги є повним квазіпорядком у просторі товарів.

AII. Відношення переваги \succeq є неперервним, тобто множина $\{(x, y) \in X \times X : x \succ y\}$ є відкритою у декартовому добутку $X \times X$.

Аксіома AI означає, що \succeq є бінарним відношенням (тобто відношенням між парами точок) у просторі X , яке має такі властивості:

- (α) відношення \succeq **рефлексивне**, тобто $x \succeq x$ для кожного $x \in X$;
- (β) відношення \succeq **транзитивне**, тобто з відношень $x \succeq y$ та $y \succeq z$ для $x, y, z \in X$ випливає, що $x \succeq z$;
- (γ) для будь-якої пари наборів x та y з X або $x \succeq y$, або $y \succeq x$.

Зауважимо, що формально властивість (α) є наслідком властивості (γ). Властивості (α), (β), (γ) вибору переваг споживачем є природними і не потребують особливого коментаря. Неперервність переваг AII означає, що коли споживач віддає перевагу набору x^0 перед набором y^0 , то він віддаватиме перевагу набору x перед набором y , якщо x та y досить близькі відповідно до x^0 та y^0 .

Властивості (α) і (β) визначають відношення квазіпорядку, властивість (γ) — повноту відношення переваги.

Пара (X, \succeq) , тобто простір товарів з відношенням переваги \succeq певного споживача, називають **полем переваг** цього споживача.

Теорема 1.1. (I) *Відношення строгої переваги має такі властивості:*

- (i) *для жодного $x \in X$ не може бути $x \succ x$;*
- (ii) *якщо $x \succeq y$, $y \succeq z$ для $x, y, z \in X$, причому або $x \succ y$, або $y \succ z$. то $x \succ z$; зокрема, якщо одночасно $x \succ y$ та $y \succ z$, то $x \succ z$;*
- (iii) *для довільних $x, y \in X$ або $x \succ y$, або $y \succeq x$.*

(II) *Відношення байдужості \sim є відношенням еквівалентності на просторі товарів X , тобто:*

- (i) $x \sim x$ для кожного $x \in X$ (рефлексивність);
- (ii) для довільних $x, y \in X$ з $x \sim y$ маємо $y \sim x$ (симетричність);
- (iii) для довільних $x, y, z \in X$ з $x \sim y$ та $y \sim z$ маємо $x \sim z$ (транзитивність).

∇^1 (1). (i): з $x \succ x$ випливало б, що відношення $x \succeq x$ не виконується, що суперечить (α).

¹Знак ∇ означає початок доведення твердження, теореми або леми, а знак Δ — його закінчення.

(ii): якщо б не виконувалося $x \succ z$, то $z \succeq x$; через (β) з $y \succeq z$, $z \succeq x$ випливає $y \succeq x$, а з $z \succeq x$, $x \succeq y - z \succeq y$, отже, неможливо, щоб $x \succ y$ або $y \succ z$, що суперечить строгой перевазі між x та y або y і z .

(iii): не випливає з означення.

(II). Ця властивість безпосередньо випливає з означення відношення байдужості \sim . Δ

Згідно з властивостями відношення еквівалентності — простір товарів споживача розбивається на класи еквівалентності I_x , що попарно не перетинаються і кожен з яких складається з усіх наборів товарів y , байдужих заданому наборові x із цього класу $I_x = \{y \in X : y \sim x, x \in I_x\}$.

Класи еквівалентності I_x називаються **класами байдужості** споживача, а їх сукупність утворює **фактор-простір** (X/\sim) простору X відносно відношення байдужості \sim . З погляду геометрії у практично важливих випадках при зв'язному просторі товарів X класи байдужості при $n = 2$ утворюють в X криві байдужості, при $n = 3$ — поверхні байдужості, а при $n > 3$ — гіперповерхні байдужості.

Нижченаведена теорема характеризує властивості неперервності відношення переваги.

Теорема 1.2. *Неперервність відношення переваги \succeq еквівалентна властивості (A_2): (а) множина $\{y : a \succ y\}$ відкрита в X при кожному $a \in X$; (б) множина $\{x : x \succ b\}$ відкрита в X при кожному $b \in X$. ∇ є самою чергу, (A_2), а отже, неперервність \succeq , еквівалентна властивості (A'_2): (а) множина $\{x : x \succeq a\}$ замкнена при кожному $a \in X$; (б) множина $\{y : b \succeq y\}$ замкнена при кожному $b \in X$.*

∇ З аксіоми AII випливає властивість A_2 . Доведемо обернену імплікацію $A_2 \Rightarrow AII$. Нехай $\in A_2$. Покажемо, що тоді для кожної точки $(a, b) \in G = \{(x, y) : x \succ y\}$ існують відкриті підмножини $W(a)$ і $W(b)$ в X , що містять відповідно a та b і $x \succ y$ для всіх $x \in W(a)$ та $y \in W(b)$, тобто G є відкритою множиною в $X \times X$ і виконується аксіома AII. Для цього розглянемо випадки (i) та (ii).

(i). Нехай існує елемент c в X , так що $a \succ c \succ b$. Тоді множини $W(a) = \{x : x \succ c\}$, $W(b) = \{y : c \succ y\}$ є шуканими відкритими підмножинами внаслідок неперервності відношення \succeq у розумінні A_2 .

(ii). Нехай в X не існує такого елемента c , що $a \succ c \succ b$. Покладемо $W(a) = \{x : x \succeq a\}$ і $W(b) = \{y : b \succeq y\}$. Тоді $X = W(a) \cup W(b)$, $W(a) \cap W(b) = \emptyset$, $a \in W(a)$, $b \in W(b)$. При цьому множина $W(a)$ замкнена в X через неперервність \succeq у розумінні A_2 , так що $W(b)$ як доповнення $W(a)$ в X є відкритою множиною в X . Аналогічно $W(a)$ відкрита множина в X . Таким чином, встановлено еквівалентність AII та A_2 .

Еквівалентність AII і A'_2 випливає з того, що властивості A_2 та A'_2 є еквівалентними, оскільки множини $\{x : x \succ b\}$ та $\{y : b \succeq y\}$, а також множини $\{y : a \succ y\}$ та $\{x : x \succeq a\}$ є взаємодоповнювальними в X . Δ

Множина $P_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ при $x \in X$ називається **переважною відносно набору x** , а множина $NP_x = \{y \in X : x \succeq y\}$ — **непереважною відносно цього набору**. Відповідно до аксіоми AII і теореми 2 це замкнені множини простору товарів X , що містять усі свої граничні точки для

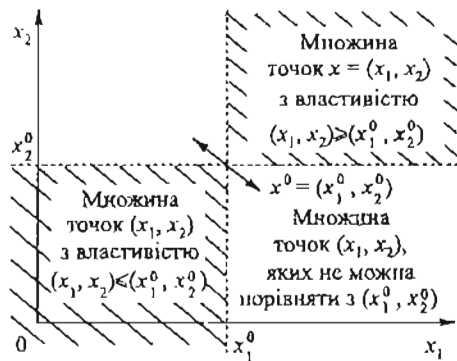


Рис. 1.1

живач одержує нові товари і не віддає заборгованих.

Введемо в просторі R^n відношення часткового порядку \geq між векторами, вважаючи, що $x \geq y$ (вектор x більший за вектор y або дорівнює йому), якщо всі компоненти x_i вектора $x = (x_i)_{i=1, \bar{n}}$ не менші за відповідні компоненти вектора $y = (y_i)_{i=1, \bar{n}}$, тобто $x_i \geq y_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Таке відношення, очевидно, є рефлексивним, транзитивним, але неповним — не всі пари векторів перебувають в такому відношенні. Крім того, воно є асиметричним: з того, що одночасно $x \geq y$ та $y \geq x$, випливає рівність $x = y$. Очевидно, R_+^n складається з таких $x \in R^n$, для яких $x \geq 0$, де 0 — нуль-вектор (тобто вектор з усіма нульовими компонентами), $R_+^n = \{x \in R^n : x \geq 0\}$. На рис. 1.1 зображено геометричну інтерпретацію відношення \geq для векторів (точок) на площині R^2 .

У розглядуваних прикладах йдеться про **монотонні відношення** переваги споживача \succeq , для яких із відношення $x \geq y$ випливає, що $x \succeq y$ (тобто збільшення кількості товарів у споживчому наборі робить його більш переважним).

З викладеного вище зрозуміло, що геометрично поле переваг споживача (R_+^n, \succeq) можна задати сукупністю класів байдужості, які при $n = 2$ утворюють **карту кривих байдужості** в першому квадранті площини R_+^2 , а при $n = 3$ — **карту поверхонь байдужості** в першому октанті R_+^3 простору R^3 .

Приклад 1.1. Нехай карта кривих байдужості R_+^2 / \sim в полі переваг (R_+^2, \succeq) має вигляд сім'ї гіпербол $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$ (рис. 1.2). Тут через кожну точку простору товарів (x_1^0, x_2^0) проходить тільки одна крива байдужості, різні криві (що відповідають різним α) не перетинаються, а криві байдужості, які відповідають кращим наборам товарів, лежать вище і праворуч від кривої, що задається набором (x_1^0, x_2^0) .

довільного $x \in X$, причому спільні для обох множин граничні точки утворюють клас байдужості $I_x = P_x \cap NP_x$.

Розглянемо низку прикладів полів переваг споживача. У цих прикладах роль простору товарів X відіграватиме невід'ємний ортант R_+^n простору R^n , що складається з векторів (точок) $x = (x_1, \dots, x_n)$, які мають невід'ємні координати $x_i, x_i \geq 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Роблячи вибір у такому просторі, споживач

Нахил кривої байдужості $x_2 = x_2(x_1)$, $x_1 \geq 0$ в точці $x_1^0, x_2^0 = x_2(x_1^0)$

$$\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \operatorname{tg} \beta,$$

де β — кут нахилу дотичної в точці (x_1^0, x_2^0) до кривої байдужості характеризує граничну норму заміщення (marginal rate of substitution, або $MRS_{1,2}$) товару 1 товаром 2, оскільки зменшення кількості товару 1 на Δx_1 має бути компенсоване збіль-

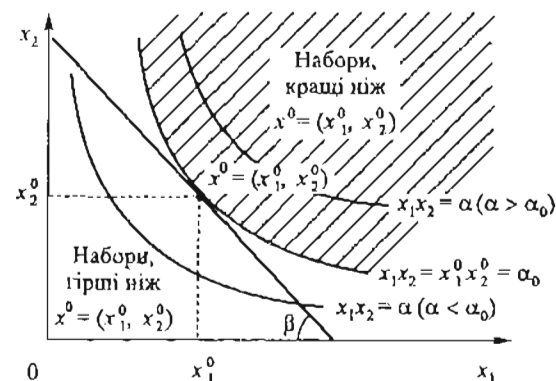


Рис. 1.2

шенням споживання товару 2 на відповідні значення $\Delta x_2 = x_2(x_1^0 - \Delta x_1) - x_2(x_1^0)$.

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}.$$

Оскільки вздовж кривої $f(x_1, x_2) = \alpha$ повний диференціал функції f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

то

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = -\frac{dx_2(x_1^0)}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}}.$$

Отже, у випадку кривої $x_1 x_2 = x_1^0 x_2^0 = \alpha_0$ матимемо

$$MRS_{1,2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\alpha_0}{(x_1^0)^2} = \frac{x_2^0}{x_1^0}.$$

Приклад 1.2. Нехай поле переваг споживача (R_+^3, \succeq) з монотонною неперервною перевагою \succeq характеризується картою поверхонь байдужості R_+^3 / \sim , що складається з сім'ї площин $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha$, $\alpha \geq 0$, де $a_1, a_2, a_3 > 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3$ (рис. 1.3). Тоді товари 1, 2 і 3 є взаємозамінними для споживача в пропорціях, що задаються коефіцієнтами a_1, a_2, a_3 . Подібні товари також називають **субститутами**. При $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ товари є повними замінниками один одного (оскільки замінюють один одного в одиничній пропорції).

Приклад 1.3. Нехай поле переваг (R_+^2, \succeq) з монотонною неперервною перевагою \succeq характеризується картою ліній байдужості R_+^2 / \sim , що має вигляд сім'ї ліній $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$, де $a_1, a_2 > 0$, $(x_1, x_2) \in R_+^2$ (рис. 1.4). Тоді товари 1 і 2 є **взаємодоповнювальними** для споживача (або **комплементарними товарами**) в пропорції $x_2 / x_1 = a_1 / a_2$, оскільки зайва кількість будь-якого товару щодо їх

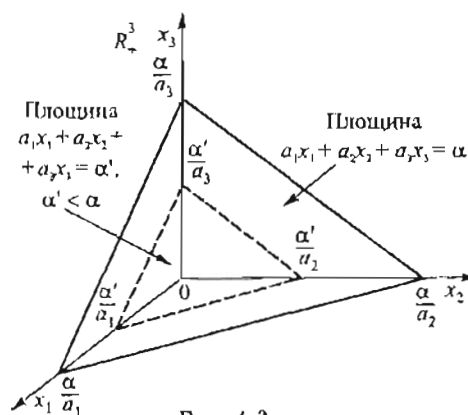


Рис. 1.3

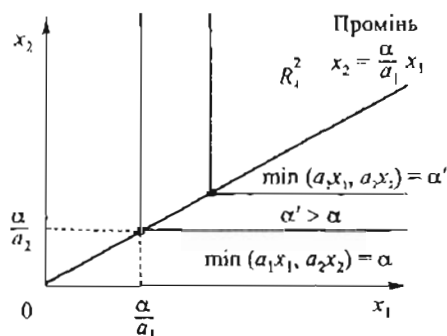


Рис. 1.4

кількості, що знаходиться в цій пропорції, не змінює цінність набору для споживача $(a_1(x_1 + b), a_2x_2) \sim (a_1x_1, a_2(x_2 + c)) \sim (a_1x_1, a_2x_2)$ при $b > 0, c > 0$ і $(a_1x_1 = a_2x_2)$. При $a_1 = a_2 = 1$ товари досконалий доповнюють один одного. Це пояснює той факт, що лінії байдужості є прямокутними ламаними, вершини яких лежать на промені $a_1x_1 = a_2x_2$.

1.2. ЗАГАЛЬНА ПОРЯДКОВА ТЕОРІЯ СПОЖИВЧОГО ВИБОРУ

Нижче описується загальний підхід до задачі споживчого вибору і побудови функцій попиту споживача в термінах відношень переваги споживача. Він пов'язаний із досить високим ступенем абстрактності побудов. Тому доведення відповідних результатів може бути опущено читачами, які не мають достатнього рівня математичної підготовки. Більш звичний підхід до побудови раціональних рішень споживача, що ґрунтується на функції корисності споживача, розглядається в п. 1.3 і 1.4.

Згідно з теорією економічної поведінки споживача вважається, що споживачі вибирають найкращий щодо порівняльних переваг набір товарів, який вони можуть собі дозволити. З цього погляду у зазначеній теорії важливим є таке означення.

Означення 1.1. Нехай (X, \succeq) — поле переваг і C — підмножина X . Елемент x множини C називається **найбільш (найменш) переважним** в C , якщо $x \succeq y$ ($y \succeq x$) для всіх $y \in C$.

Нагадаємо поняття **компактної множини (компакту)** C в R^n : це обмежена й замкнена множина. Вона має таку властивість, що з довільної сім'ї відкритих множин, які в сукупності містять C (утворюють покриття множини C), можна вибрати скінченну кількість множин, що теж покривають C .

Теорема 1.3. Якщо відношення \succeq в умовах з означення 1.1 неперервне і множина C компактна, то C містить хоча б один найбільш (най-

менш) переважний елемент, а множина $M(C)$ ($m(C)$) всіх найбільш (найменш) переважних елементів у C є компактною.

А Зауважимо, що будь-яка скінченна множина $\{x^i : i = 1, \dots, s\}$ елементів в X завжди містить найбільш (найменш) переважний елемент $M(x^1, \dots, x^s)$ ($m(x^1, \dots, x^s)$). Це можна легко довести, використовуючи індукцію за числом елементів s .

Розглянемо для кожного $y \in C$ множини $F_y = \{x : x \succeq y, x \in C\}$. Через те що $\{x : x \succeq y\}$ є замкненою множиною в X при кожному фіксованому y , то $F_y = \{x : x \succeq y\} \cap C$ теж є замкненою множиною в C при кожному y . Сім'я множин $\{F_y : y \in C\}$ має властивість скінченного перерізу: для будь-якого скінченного числа елементів $y^i : i = 1, \dots, s$ переріз $\bigcap_{i=1}^s F_{y^i}$ не є порожнім, оскільки він містить $M(y^1, \dots, y^s)$. Звідси через компактність множини C маємо, що $\bigcap_{y \in C} F_y \neq \emptyset$. Переріз ліворуч, що, очевидно, є сукупністю всіх найбільш переважних елементів, буде компактом як переріз замкнених підмножин F_y компакту C . Аналогічним міркування можна застосовувати до найменш переважних елементів Δ .

Оскільки доступний споживачеві довільний простір товарів X може і не мати найбільш переважного для нього елемента, доцільно дати таке означення.

Означення 1.2. Для поля переваг (X, \succeq) найбільш переважний елемент x в X називається **точкою насичення**. Якщо простір X не має точки насичення, то маємо явище **ненасиченості**.

Множина векторів у R^n вигляду $z = \alpha x + (1 - \alpha)y + u$, де x та y — задані вектори з R^n , а число α змінюється на проміжку $[0, 1]$, називається **відрезком** у R^n , який сполучає вектори x та y і позначається як $[x, y]$. При цьому x та y є кінцями цього відрезка. Таке означення узагальнює відомі з аналітичної геометрії описи подібних відрізків на площині ($n = 2$) та у просторі ($n = 3$).

Множина A в R^n називається **опуклою**, якщо вона містить поряд із будь-якими своїми векторами x та y також відрізок $[x, y]$.

Означення 1.3. Нехай множина X поля переваг (X, \succeq) є опуклою. Поле (X, \succeq) називається: (I) **опуклим**, якщо з $x \succeq y$ для $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succeq y$ для $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$; (II) **підсилено опуклим**, якщо з $x \succ y$ для $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succ y$ для $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$; (III) **строго опуклим**, якщо з $x \succeq y$ для двох різних $x, y \in X$ випливає, що $\alpha x + \beta y \succ y$ при $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

Припущення опуклості в економіці є традиційними. Вони відображають певні економічні закономірності, а також відіграють важливу технічну роль в економіко-математичних моделях та їх аналізі.

Розглянемо економічний зміст опуклості поля переваг споживача. Нехай у співвідношенні (I) означення 1.3 $\alpha = \beta = 1/2$, $y = x$. Тоді споживач надає перевагу середньому набору $(x + y)/2$. Наприклад, якщо $x_i = 0$, $y_i \neq 0$ або $x_i \neq 0$, $y_i = 0$, то $(x_i + y_i)/2 > 0$, $j = i, i + 1$, а отже, розподіл $(x + y)/2$ дає споживачеві деяку кількість товарів i та j , тоді як розподіл

x та y дає йому тільки один із цих товарів. Отже, опуклість квазіпорядку переваги виражає прагнення споживача бути представленим на всіх ринках, робити свій розподіл між усіма товарами. Зокрема, це відображає ефекти насиченості, згідно з якими, починаючи з певного рівня, бажаність споживання лише одного товару спадає, а також розширення кількості потреб, коли первинні потреби починають задовольнятися.

Теорема 1.4. *Різні поняття опуклості поля переваг пов'язані такими співвідношеннями: (i) з (III) випливає (I); (ii) з (III) випливає (II); (iii) якщо відношення \succeq неперервне, то з (II) випливає (I).*

∇ (i) Припустимо, що $x \succeq y$ для $x, y \in X$. Якщо $x = y$, то $\alpha x + \beta y = x \succeq y$. Якщо $x \neq y$, то згідно з (III) $\alpha x + \beta y > y$ і $\alpha x + \beta y \succeq y$ при $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. При $\alpha = 1, \beta = 0$ або $\alpha = 0, \beta = 1$ співвідношення $\alpha x + \beta y \succeq y$ виконується тривіально, тобто з (III) завжди випливає (I).

(ii) Припустимо, що $x > y$ для $x, y \in X$. Це виключає випадок $y \succeq x$, тому $x \neq y$. З $x > y$ випливає, що $x \succeq y$, отже, згідно з (III) $\alpha x + \beta y > y$ при $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, чим доведено (ii).

(iii) Нехай $x \succeq y$ для $x, y \in X$ та $\{x, y\} = \{z = \alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \in [0, 1]\}$ — відрізок із кінцями x та y . (iii) буде доведено, якщо встановити, що $\{x, y\} \cap \{w : y > w\} = \emptyset$. Множина $\{w : y > w\}$ є відкритою в X унаслідок неперервності відношення \succeq . Тому якщо вказаний вище переріз непорожній, то він містить відрізок і хоча б дві різні точки a та b . Через $x, y \notin \{w : y > w\}$, то ці дві точки a і b відрізняються від x та y . Можна вважати, що точки вибрано таким чином, що

$$a = \lambda y + \mu b, \quad \lambda, \mu > 0, \quad \lambda + \mu = 1; \quad (1.1)$$

$$b = \alpha x + \tau a, \quad \sigma, \tau > 0, \quad \sigma + \tau = 1. \quad (1.2)$$

Тоді з умов $y > b$ та (1) згідно з (II) випливає $a > b$. З $x \succeq y > a$ через твердження (I) (ii) теореми 1 випливає $x > a$, що разом із (1.2) означає $b > a$. Отже, маємо суперечність $a > b$ і $b > a$, яка показує, що $\{x, y\} \subset \{w : w \succeq y\}$. Δ

Теорема 1.5. (i) Якщо (X, \succeq) — опукле поле переваг і C — опукла підмножина X , то $M(C)$ є опуклою підмножиною в C .

(ii) При цьому, якщо (X, \succeq) — строго опукле поле, то в M існує не більше одного найбільш переважного елемента. Зокрема, в X є не більше однієї точки насичення.

∇ (i) Якщо $a, b \in M(C)$, то $a, b \succeq x$ для кожного $x \in M$, а отже, через опуклість (X, \succeq) маємо $\alpha a + \beta b \succeq x$ для будь-яких $x \in C$, $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Тому $(\alpha a + \beta b) \in C$ — також найбільш переважний елемент у C .

(ii) Якщо (X, \succeq) — строго опукле поле, то для різних $a, b \in M(C)$ через $a, b \succeq a$ мали б $\alpha a + \beta b > a$ при $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, що означало б існування в C більш переважного елемента, ніж a . Отримана суперечність завершує доведення теореми. Δ

Зауважимо, що для опуклого поля переваг (X, \succeq) маємо таке твердження: якщо $x \sim y, x, y \in X$, то $\alpha x + \beta y \succeq x \sim y$ при $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

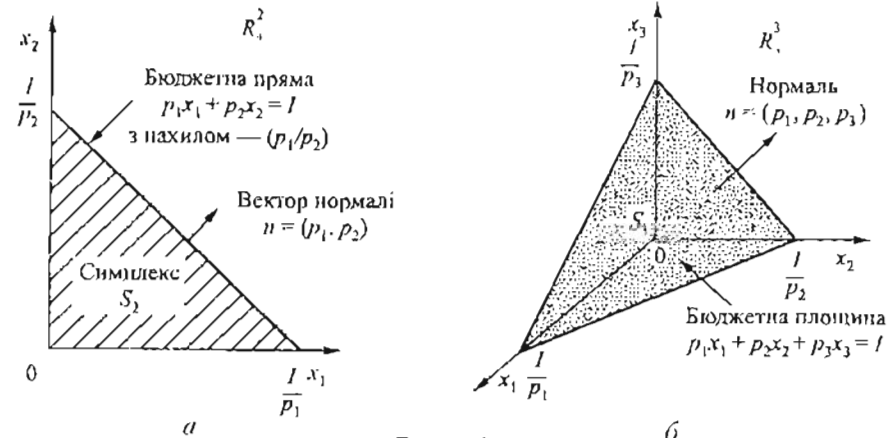


Рис. 1.5

При застосуванні полів переваг споживачів (X, \succeq) найчастіше спостерігається ситуація, коли простором товарів X є невід'ємний ортант R_+^n простору R^n , $R_+^n = \{x = (x_i)_{i=1, n} \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, а вибір споживача обмежений бюджетом. До бюджетних факторів належать ціни p_i на товари виду $i, i = 1, \dots, n$ та рівень споживчого доходу I . Якщо ввести в розгляд вектор цін $p = (p_1, \dots, p_n)^T = (p_i)_{i=1, n}$, що записується як вектор-стовпець, то споживач при виборі набору товарів x повинен врахувати бюджетне обмеження

$$xp = p_1x_1 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i \leq I. \quad (1.3)$$

Таким чином, допустимі набори товарів (партії товарів, або споживчі меню) у просторі товарів R_+^n задовольняють обмеження (1.3) й утворюють споживчий симплекс

$$S_n = \{x \in R_+^n : x \cdot p \leq I\}, \quad (1.4)$$

що є замкнутою обмеженою опуклою множиною в R^n (опуклим компактом у R^n).

Іноді симплекс S_n називають бюджетною множиною споживача, а гіперплощину $xp = I$ — його бюджетною гіперплощиною.

У випадку $n = 2$ симплекс S_2 є трикутником, що відокремлюється в R_+^2 бюджетною прямою $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (рис. 1.5, а), а при $n = 3$ симплекс S_3 є тетраедром, який лежить в R_+^3 нижче бюджетної площини $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I$ (рис. 1.5, б).

¹Знак # використовується для позначення операції транспонування вектора або матриці.

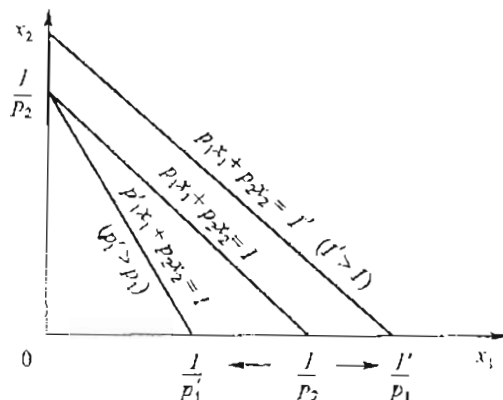


Рис. 1.6

існує набір товарів у X , який задовольняє бюджетне обмеження (1.3). Навіть коли обмеження (3) сумісне з X , тобто $C_I^p = \{x \in X : x \cdot p \leq I\} \neq \emptyset$. Априорі невідомо, що існує найбільш переважний набір споживчих благ.

Розглянемо всі можливі пари (p, I) , коли вектор цін зміщується в просторі цін P , $P \subseteq R_+^n$, а рівень доходу I — на певному відрізку $[I_1, I_2] = I$. Кожну пару $(p, I) \in P \times I$ зіставимо з множиною $M(C_I^p)$ найбільш переважних елементів з C_I^p , тобто множиною наборів товарів з X , що задовольняють бюджетне обмеження. Відповідність

$$P \times I \ni (p, I) \rightarrow M(C_I^p) \in C_I^p \subset X$$

здає багатозначну функцію (відображення) $\phi: P \times I \rightarrow 2^X$, яка називається **функцією попиту**, або, точніше, функцією попиту, що поряджується оптимізацією переваг споживача.

Нижче розглянуто менш загальний підхід до задач вибору споживача, який, проте, має певні аналітичні переваги і в якому використовуються числові індикатори відношень переваги — функції корисності споживача.

Розглянемо кілька простих прикладів задач споживчого вибору, що виходять за рамки звичайної теорії споживчих рішень, в якій застосовується підхід із використанням гладких (диференційованих) функцій корисності споживача, й ілюструють важливість загальної порядкової теорії споживчого вибору.

Приклад 1.4 (споживчий вибір між повними субститутами). Нехай поле переваг споживача (R_+^2, \preceq) з монотонною неперервною перевагою \preceq має карту кривих байдужості R_+^2 / \sim із сім'ї прямих ліній $x_1 + x_2 = \alpha$, $\alpha \geq 0$. Тоді криві байдужості матимуть нахил -1 , а отже, гранична норма замінювання $MRS_{1,2} = 1$ (це відповідає тому

¹Для множини X запис 2^X означає множину всіх підмножин (булеан) множини X .

факту, що кожна кількість товару 1 повністю замінюється для споживача такою самою кількістю товару 2).

Оскільки через монотонність \preceq більшому значенню параметра α відповідає крива байдужості з більш переважними наборами товарів, задача споживчого вибору полягає в максимізації функції $x_1 + x_2$ за умов $p_1x_1 + p_2x_2 = I$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Якщо $p_1 < p_2$, то з геометричного трактування задачі (рис. 1.7) випливає, що оптимальний вибір споживача полягає у витраті всіх грошей I на придбання товару 1, тобто його оптимальний набір $(x_1^*, x_2^*) = (I/p_1, 0)$. Аналогічно при $p_2 < p_1$ маємо $(x_1^*, x_2^*) = (0, I/p_2)$. Якщо $p_1 = p_2$, то існує множина оптимальних наборів товарів, що складається з будь-яких кількостей x_1^* та x_2^* товарів 1 і 2, які задовольняють бюджетне обмеження $p_1x_1^* + p_2x_2^* = I$ при $p_1 = p_2$, $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$.

Таким чином, функції попиту споживача на товари 1 і 2 мають вигляд

$$x_1^*(p_1, p_2, I) = \begin{cases} I/p_1, & \text{якщо } p_1 < p_2; \\ \text{будь-яке } x_1^* \in [0, I/p_1], & \text{якщо } p_1 = p_2; \\ 0, & \text{якщо } p_1 > p_2; \end{cases}$$

$$x_2^*(p_1, p_2, I) = \begin{cases} I/p_2, & \text{якщо } p_2 < p_1; \\ \frac{I - p_1x_1^*}{p_2}, & \text{якщо } p_1 = p_2; \\ 0, & \text{якщо } p_2 > p_1 \end{cases}$$

У розглянутому прикладі споживчий оптимум досягається на межі ∂R_+^2 простору товарів R_+^2 і є **межовим оптимумом**.

Приклад 1.5 (споживчий вибір у просторі комплементарних товарів). Із інформації, наведеної у прикладі п. 1.4 і попередньому прикладі, випливає, що цей вибір зводиться до розв'язання оптимізаційної задачі

$$\min \{a_1x_1, a_2x_2\} \rightarrow \max;$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Тут споживач повинен купувати оптимальні кількості x_1^* та x_2^* товарів 1 і 2 у пропорції $a_1x_1^* = a_2x_2^*$, або $\frac{x_1^*}{x_2^*} = \frac{a_2}{a_1}$. Це разом із бюджетним обмеженням $p_1x_1^* + p_2x_2^* = I$ дає такі функції попиту споживача на товари 1 і 2:

$$x_1^*(p_1, p_2, I) = \frac{I}{p_1 + p_2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)}; \quad x_2^*(p_1, p_2, I) = \frac{I}{p_2 + p_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)}$$

Із геометричної інтерпретації цієї задачі (рис. 1.8) випливає, що тут оптимум досягається у **точці зламу** відповідної лінії байдужості, де ця лінія не є диференційова-

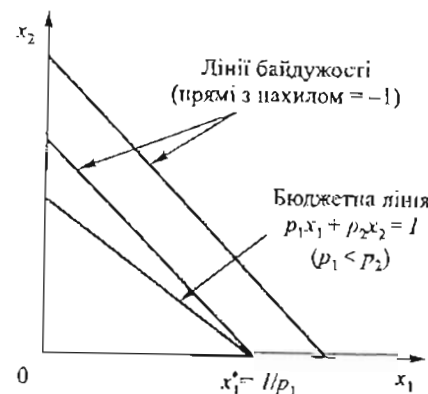


Рис. 1.7

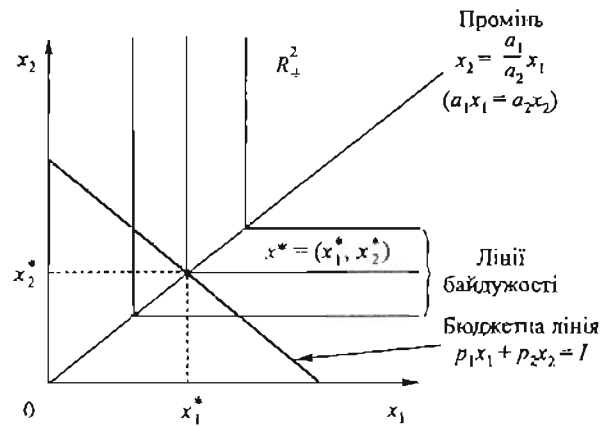


Рис. 1.8

ною. Також слід зауважити, що оптимум (x_1^*, x_2^*) досягається у внутрішній точці відповідного простору товарів R_+^2 , $(x_1^*, x_2^*) \in \text{int } R_+^2$ і є таким чином, внутрішнім оптимумом.

1.3. ПОРЯДКОВІ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ.

ТЕОРЕМА ДЕБРЕ

Нехай (X, \succeq) — деяке поле переваг, $X \subset R^n$ з відношенням переваги, що задовольняє аксіому $A1$.

Означення 1.4. Числова функція $U: X \rightarrow R$, визначена на X , називається **індикатором переваги** \succeq , або **функцією корисності**, що зображує відношення переваги \succeq , якщо для всіх $x, y \in X$ виконується умова

$$U(x) \geq U(y) \text{ тоді і тільки тоді, коли } x \succeq y, \quad (1.5)$$

або, використовуючи логічну зв'язку \Leftrightarrow еквівалентності (рівнозначності висловлювань), $(U(x) \geq U(y)) \Leftrightarrow (x \succeq y)$.

Таким чином, функція корисності — це числове втілення порядкової структури поля переваг.

Пропозиція 1.1. Якщо функція корисності U зображує квазіпорядок переваги \succeq , то множини рівня функції U є класами байдужості для \succeq , тобто

$$(U(x) = U(y)) \Leftrightarrow (x \sim y), \quad x, y \in X. \quad (1.6)$$

∇ Ліва частина твердження (1.6) означає, що одночасно $U(x) \geq U(y)$ та $U(x) \leq U(y)$. Отже, згідно з визначенням функції корисності (1.5) це еквівалентно двом співвідношенням $x \succeq y$ й $y \succeq x$, тобто $x \sim y$.

Теорема 1.6. (I) Якщо $U(x), x \in X$ — функція корисності для поля переваг (X, \succeq) і $f: U(X) \rightarrow R$ — строго зростаюча функція, то супер-

позиція $f \circ U(x) = f(U(x))$ також є функцією корисності, що зображує поле переваг (X, \succeq) .

(II) Якщо $U(x)$ та $V(x), x \in X$ — дві функції корисності, то існує така строго зростаюча дійсна функція $f(t)$, визначена на $U(X)$, що $V(x) = f \circ U(x) = f(U(x)), x \in X$.

∇ Твердження (I) очевидне. Доведемо (II). Шукаю функцію $f(t)$ можна побудувати в такий спосіб. Покладемо для $t \in U(X)$ $f(t) = V(x)$ для будь-якого x із множини $U^{-1}(t) = \{x: U(x) = t\}$. Значення $f(t)$ таким чином буде визначене однозначно, оскільки $U^{-1}(t)$ — не клас байдужості за відношенням еквівалентності \sim , а отже, $V(x) = V(y)$ для будь-яких $x, y \in U^{-1}(t)$. Функція f — строго зростаюча, бо якщо $s, t \in U(X), s > t$, то $x > y$ для будь-яких $x \in U^{-1}(s), y \in U^{-1}(t)$, тож $f(s) = V(x) > V(y) = f(t)$. Співвідношення $V(x) = f(U(x)), x \in X$ виконується автоматично за побудовою функції f . Δ

Із теореми 1 випливає, що коли для будь-якого поля переваг існує хоча б одна функція корисності, то є безліч функцій корисності, які можна отримати одну з одної за допомогою строго монотонно зростаючих перетворень; із точністю до будь-яких подібних перетворень функція корисності для заданого поля переваг є єдиною.

Зауважимо також, що афінні перетворення $f(t) = \alpha t + \beta$ з додатними коефіцієнтами α утворюють, очевидно, підмножину всіх строго зростаючих скалярних перетворень. Якщо вважати дві функції корисності еквівалентними, коли вони пов'язані між собою афінними перетвореннями зазначеного типу, то всі функції корисності для заданого поля переваг розподіляться на класи еквівалентності. Це означає, що про вимірність у числах корисності вибору споживача можна говорити лише тоді, коли існує така властивість поля переваг, яка зберігається при всіх афінних строго зростаючих перетвореннях функцій корисності і за допомогою якої водночас з усіх класів еквівалентності функцій корисності виокремлюється єдиний клас. У подібному випадку вимірної корисності для чисельного вимірювання потрібно вибрати одиницю масштабу і початок відліку.

Приклад 1.6 (лінійна функція корисності). Ця функція має вигляд

$$U(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad x = (x_i)_{i=1, n} \in R_+^n, \text{ де параметри } a_i \geq 0 \text{ означають граничні корис-}$$

ності споживача за товаром i

$$MU_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Оскільки $MU_i(x) = \frac{\Delta U(x)}{\Delta x_i}$ при малих Δx_i , гранична корисність характеризує в точці x простору товарів відносний приріст корисності споживача, що відповідає до-

¹Позначення MU походить від англійської назви граничної корисності — *marginal utility*.

датковий малій одиниці приросту товару i . Ця функція водночас є нестрого опуклою та увиснутою в R_+^n .

Перетворення функції $U(x)$ за допомогою квадратної функції $f(z) = z^2$, $z \geq 0$, яка є строго зростаючою, дає квадратичну функцію корисності

$$V(x) = f(U(x)) = (U(x))^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \cdot x_i x_j.$$

Остання характеризує те саме відношення переваги на R_+^n , що й функція $U(x)$, і є іншим варіантом репрезентації поля переваг споживача.

Приклад 1.7 (мультиплікативна функція корисності). Ця функція має вигляд

$$U(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i};$$

$$x = (x_i)_{i=1, \dots, n} \in R_+^n, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n$$

При цьому граничні корисності

$$MU_i(x) = \alpha_i \frac{U(x)}{x_i} > 0, x \in \text{int } R_+^n.$$

Перетворення $U(x)$ за допомогою функції $f(z) = z^\gamma$, $z \geq 0$, де $\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$ дає функцію корисностей Коббі - Дуглеса

$$V(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}, \quad x \in R_+^n,$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} > 0, \beta_i < 1, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1,$$

що зображує те саме поле переваг споживача.

Зауважимо, що для функції корисності $V(x)$ граничні корисності $MV_i(x)$ є спадними функціями аргументу x_i , оскільки

$$\frac{\partial MV_i(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} = \beta_i (\beta_i - 1) \frac{V(x)}{x_i^2} < 0,$$

$x \in \text{int } R_+^n$

Приклад 1.8 (функція корисності зі сталою еластичністю заміни). Ця функція має вигляд

$U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, $(x_1, x_2) \in R_+^2$, де параметр ρ задовольняє умову $0 < \rho \leq 1$. Оскільки функція $f(z) = z^\rho$, $z \geq 0$ є зростаючою, то функція корисності

$$U(x) = x_1^\rho + x_2^\rho, \quad (x_1, x_2) \in R_+^2$$

є порядковою еквівалентною кривою $U(x)$ (зображає те саме поле переваг споживача).

При $\rho = 1$ функції $U(x)$ і $V(x)$ стають лінійною функцією корисності $x_1 + x_2$. Для функції V маємо

$$MV_i(x) = \rho x_i^{\rho-1} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} = \rho(\rho-1) x_i^{\rho-2} \leq 0$$

при $x \in R_+^2$. Звідси

$$MRS_{1,2}(x) = \frac{MV_1(x)}{MV_2(x)} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\rho-1}.$$

а параметр ρ визначає еластичність заміни товару 1 товаром 2:

$$\epsilon(x) = \frac{d \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)}{d \ln (MRS_{1,2}(x))} = \frac{1}{\rho-1}.$$

Економічне значення поняття еластичності подано в л. 1.10.

Підсумовуючи все викладене вище, можна констатувати, що функція корисності споживача виражає порівняльну, або ординалістську (але не абсолютну чи кардиналістську), кількісну міру цінності різних споживчих наборів товару з простору товарів для конкретного споживача.

Одним із основних результатів теорії споживання та сучасної теорії корисності в задачах прийняття рішень, є така теорема, сформульована Ж. Дебре¹.

Теорема 1.7. Якщо множина X поля переваг (X, \succeq) є зв'язною, а відношення переваги \succeq — неперервним (тобто задовольняє аксіому А11 або еквівалентні їй вимоги), то існує функція корисності $U(x)$, $x \in X$, що зображує (X, \succeq) .

Доведення теореми Дебре загалом дуже громіздке². Тому обмежимося тут доведенням цієї теореми у випадку, коли $X = R_+^n$ і виконується таке спрощувальне припущення (Б), яке до того ж переважно виконується в практично важливих випадках.

(Б) Існує така неперервна крива $g: (0, \infty) \rightarrow R_+^n$, що перетинає кожний клас байдужості відношення переваги в одній точці.

Доведення ґрунтуватиметься на лемі, яка показує, що в умовах припущення (Б) точки кривої $g(t)$ можна впорядкувати за перевагою (за зростанням або спаданням).

Лема. За умови (Б) справедливим є хоча б одне з таких тверджень:

$$\text{з } t < t' \text{ випливає } g(t) \succ g(t') \text{ для всіх } t, t'; \quad (1.7)$$

$$\text{з } t < t' \text{ випливає } g(t') \succ g(t) \text{ для всіх } t, t'. \quad (1.8)$$

∇ Розглянемо вектори $g(1)$ і $g(2)$. Стівідношення $g(1) - g(2)$ хибне, оскільки в цьому разі крива g проходила б через дві точки того самого класу байдужості. Тому або $g(2) \succ g(1)$, або $g(1) \succ g(2)$.

Припустимо, є перший випадок. Розглянемо півпрямку $C_+ = \{t: t > 1\}$, що не містить точок $t > 1$, для яких $g(t) \sim g(1)$. Частина півпрямкої $D_+ = \{t: t > 1, g(t) \succ g(1)\}$ збігається з $D'_+ = \{t: t > 1, g(t) \succeq g(1)\}$. Її до-

¹Дебре Жерар (нар. 1921 р.) — відомий американський спеціаліст із математичної економіки, лауреат Нобелівської премії з економіки за 1983 р., присудженої за розробки, що стосуються теорії загальної економічної рівноваги.

²Див. [11].

повнеження на $C_+ \in E_+ = \{t : t > 1, g(t) \geq g(1)\}$. Оскільки квазіпорядок \succeq неперервний, множини $\{x : x \in R_+^n, x \succeq g(1)\}$ та $\{y : y \in R_+^n, g(1) \succeq y\}$ замкнені в R_+^n . Через те, що відображення $g : [1, \infty) \rightarrow R_+^n$ є неперервним, їхні g -прообрази теж будуть замкненими. Отже, D_+ та E_+ замкнені в C_+ . Таким чином, D_+ — одночасно відкрита та замкнена в C_+ частина півпрямної, звідки або $D_+ = \emptyset$, або $D_+ = C_+$. Однак D_+ містить точку $t = 2$ і тому не є порожньою частиною. Отже, $D_+ = C_+$, тобто з $t > 1$ випливає, що $g(t) \succeq g(1)$.

Розглянемо тепер множини $C_- = \{t : t > 1\}$ та $D_- = \{t : t > 1, g(t) < g(1)\}$. Подібно до попереднього можна показати, що або $D_- = \emptyset$, або $D_- = C_-$. Припустимо, що $D_- = \emptyset$, тобто $g(t) \succeq g(1)$ для всіх $t > 1$. Розглядаючи множину $\{t' : t' > t, g(t) \succeq g(t')\}$, встановлюємо, що вона збігається з півпрямною $\{t' : t' > t\}$. Приймаючи $t' = 2$, знайдемо, що $g(t) \succeq g(2)$ для всіх $t < 1$. Нехай t прямує до 1. Оскільки квазіпорядок \succeq та функція U — неперервні, маємо $g(1) \succeq g(2)$, що суперечить припущенню $g(2) \succ g(1)$. Таким чином, $D_- = C_-$, а з $t < 1$ випливає $g(t) \succ g(1)$.

Якщо a є деякою точкою з $(0, \infty)$, то всі точки t , для яких $g(t) \succ g(a)$, будуть розміщені по один бік від a , а всі точки, для яких $g(a) \succ g(t)$, — по інший. Розміщення точок по один бік від a зумовлюється положенням їх щодо 1: якщо $1 < a$, то $g(a) \succ g(1)$ і точки t , для яких $g(a) \succ g(t)$, лежатимуть ліворуч; якщо $a < 1$, то $g(1) \succ g(a)$ і точки t , для яких $g(t) \succ g(a)$, лежатимуть праворуч. Отже, $t > a$ еквівалентне співвідношенню $g(t) \succ g(a)$. Оскільки t та a вибирались довільно, доведено, що виконується твердження (1.8). Якщо $g(1) \succ g(a)$, то, розмірковуючи аналогічно, можна показати, що справджується випадок (1.7). Δ

Спираючись на отримані результати, можна довести теорему Дебре у припущенні (Б) та для $X = R_+^n$.

Вважатимемо, що є ситуація (1.8) леми. Тоді визначимо функцію корисності U таким чином. Нехай $x \in R_+^n$. За припущенням, існує єдина точка $g(t)$ кривої g , для якої $g(t) \sim x$. Прийmemo $U(x) = t$ (у випадку (1.7) $U(x) = -t$). Перевіримо властивість (1.5). Якщо x та y — два вектори з R_+^n , то існують такі t і s , що єдиним чином $x \sim g(t)$ та $y \sim g(s)$. Отже, $(x \succeq y) \Leftrightarrow (g(s) \succeq g(t)) \Leftrightarrow (s \geq t)$, звідки отримуємо формулу (1.5), приймаючи $s = U(x)$ і $t = U(y)$. Лишається тільки перевірити неперервність функції U . Для цього досить перекопатися, що для U прообраз будь-якого сегмента $[a, b]$ з R замкнений в R_+^n :

$$\begin{aligned} U^{-1}([a, b]) &= \{x : a \leq U(x) \leq b\} = \{x : a \leq U(x)\} \cap \{x : U(x) \leq b\} = \\ &= \{x : x \preceq g(a)\} \cap \{x : x \succeq g(b)\}. \end{aligned}$$

Кожна множина праворуч замкнена через неперервність квазіпорядку, отже, їх переріз теж замкнений. Теорему Дебре доведено.

З погляду геометрії лінійного простору R^n — невід'ємний ортакт. R_+^n є замкненим опуклим конусом в R^n , тобто це замкнена множина, така що для будь-яких векторів x, y із цієї множини їх лінійна комбінація $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \geq 0$ теж належить R_+^n . Цей конус породжує в R^n та в її підмножині X частковий порядок \succeq , причому $x \succeq y$, якщо $(x - y) \in R_+^n$.

Як правило, вважається, що відношення переваги \succeq задовольняє умову монотонності (AIII): якщо $x \succeq y$ ($x > y$), то $x \succeq y(x > y)$.

Властивість (AIII) означає, що споживач надаватиме перевагу більшій кількості товарів: якщо $z > 0$, то $x + z \succ x$ для всіх x при $x + z, x \in X$.

Очевидно, що перевага \succeq є монотонною тоді і тільки тоді, коли функція корисності, що зображує поле переваг (X, \succeq) , є монотонною: якщо $x \succeq y$ ($x > y$), то $U(x) \geq U(y)$ ($U(x) > U(y)$) (A_3). При цьому якщо функція корисності є диференційованою, так що існує похідна

$$U'(x) = MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \right)_{i=1, n} = (MU_i(x))_{i=1, n},$$

яка називається граничною корисністю (при цьому $MU_i(x) = \partial U(x) / \partial x_i$ називається i -ю частинною граничною корисністю), то з властивості (A_3), еквівалентній монотонності (AIII), випливає, що вектор граничної корисності є додатним: $MU(x) > 0$ ($MU_i(x) > 0, i = 1, \dots, n$), $x \in X$.

У випадку, коли $X = R_+^n$, властивість монотонності (AIII) або (A_3) називається ненасичуваністю споживача.

Пропозиція 1.2. Відношення переваги \succeq в (X, \succeq) є опуклим тоді і тільки тоді, коли функція корисності, що зображує (X, \succeq) , є квазіугнutoю, тобто для довільного $a \in R$ множина

$$S_a = \{x \in R^n : U(x) \geq a\} \quad (1.9)$$

є опуклою. Відношення \succeq є строго опуклим тоді і тільки тоді, коли відповідна функція корисності U є строго квазіугнutoю, тобто для довільного $\lambda \in (0, 1)$ і довільного $x \in X$

$$\{U(y) \geq U(x), y \neq x\} \Rightarrow \{U(\lambda x + (1 - \lambda)y) > U(y)\}. \quad (1.10)$$

∇ Нехай квазіпорядок \succeq є опуклим. Приймаючи $a = U(y)$, знайдемо з означення опуклості \succeq , що коли y та x належать S_a , випливає, що це справджується також для точок відрізка з кінцями y і x , тобто множина S_a — опукла. Обернене твердження є очевидним. Співвідношення (1.10) є буквальною перекладом на мову функцій корисності пункту (III) означення 1.3. Δ

На жаль, квазіугнуті функції незручні для роботи: вони утворюють клас, занадто великий для того, щоб успішно застосовувати низку добре розроблених методів. Значно зручніше працювати з угнутими та строго

угнутими функціями, що відповідно визначаються умовами: для довільних $x, y \in R_+^n$ виконуються умови

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \lambda \in [0, 1]$$

і

$$U(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda U(x) + (1 - \lambda)U(y), \lambda \in (0, 1).$$

Неважко переконатись, що кожна угнута (строго угнута) функція є квазіугнутаю (строго квазіугнутаю).

Надалі, крім окремо обумовлених випадків, вважатимемо, що функція корисності споживача $U(x)$ є строго угнутаю (умова (A_4)) і що виконується більш сильна умова (A'_4) : функція $U(x)$ є двічі неперервно диференційованою, її матриця Гессе — від'ємно визначена, тобто $\ddot{U}(x) < 0, x \in R_+^n$:

$$\ddot{U}(x) = \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Зауважимо, що з (A'_4) випливає умова (A_4) , а також той факт, що, зокрема,

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0, i = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Умова (1.11) виражає **перший закон Госсена**¹, згідно з яким гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням його споживання.

Наведемо найпоширеніші приклади в застосуваннях функції корисності, що задовольняють указані вище умови.

Приклад 1.9 (загальна квадратична функція корисності). Ця функція має вигляд

$$U(x) = ax^n + \frac{1}{2}x^T B x^n,$$

де матриця $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ — від'ємно визначена, $B < 0$, а вектор $a + xB$ — додатний, $a + xB > 0$. Зміст останніх обмежень очевидний, оскільки $MU(x) = dU(x)dx = a + xB$, $\ddot{U}(x) = d^2 U(x)/dx^2 = B$.

Приклад 1.10 (логарифмічна функція корисності, або функція корисності Беркулі)²

$$U(x) = \sum_{j=1}^n a_j \log_b(x_j - \bar{x}_j), b > 1,$$

де параметри a_j та \bar{x}_j задовольняють умови $a_j > 0, x_j > \bar{x}_j \geq 0, j = 1, \dots, n$.

Приклад 1.11 (функція корисності зі сталою еластичністю). Ця функція має вигляд

$$U(x) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - b_j} (x_j - \bar{x}_j)^{1-b_j},$$

де параметри a_j, b_j, \bar{x}_j задовольняють обмеження

$$a_j > 0, 0 < b_j < 1, x_j > \bar{x}_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

¹Госсен Херман Хейнрих (1810 -- 1858) — німецький економіст, чийі праці присвячені теорії корисності.

Приклад 1.12 (функція корисності Левітського)

$$U(x) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n\},$$

де параметри $a_j > 0, j = 1, \dots, n$.

Приклад 1.13 (загальна мультиплікативна функція корисності). Ця функція має вигляд

$$U(x) = c \prod_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^{\alpha_j},$$

де параметри α_j, c та \bar{x}_j задовольняють умови $c > 0, 0 < \alpha_j \leq 1, x_j \geq \bar{x}_j \geq 0$.

У наведених вище прикладах функцій корисності параметри $\bar{x}_j, j = 1, \dots, n$ мають економічне тлумачення як рівні **автономного** (тобто мінімально необхідного) **споживання** товару j упродовж певного періоду часу для споживача.

Зауважимо, що для того щоб задовольнялась аксіома неперенасиченості, споживчі набори товарів у прикладі 1.9 мають бути обмеженими, а функція корисності зі сталою еластичністю прямує до логарифмічної функції корисності, коли всі b_j прямують до одиниць; у цьому випадку $MU_j(x) = a_j (x_j - \bar{x}_j)^{-1}, j = 1, \dots, n$.

Задачі підбору функціонального типу функції корисності та визначення її параметрів у конкретних випадках є задачами сучасної економічної метри.

1.4. НЕОКЛАСИЧНА ЗАДАЧА СПОЖИВАННЯ

Ця задача пов'язана з раціональним вибором набору благ і послуг споживачем при заданих функції корисності та бюджетному обмеженні.

Якщо функція корисності споживача $U(x), x \in R_+^n$ є двічі диференційованою і строго угнутаю, а бюджетне обмеження має вигляд $xp \leq I$, де p — вектор-стовпець цін, а I — дохід (капітал) споживача, що може бути використаний на придбання товарів, то раціональна поведінка споживача визначається такою задачею опуклого програмування:

$$U(x) \rightarrow \max, xp \leq I, x \in R_+^n (x \geq 0). \quad (1.12)$$

Оскільки допустима множина векторів для цієї задачі є компактною та опуклою, вона має єдиний розв'язок x^* .

У розгорнутій формі задачу споживання (1.12) можна записати у вигляді

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max;$$

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq I; \quad (1.13)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку x^* задачі (1.12) дає теорема Куна — Такера. Визначимо функцію Лагранжа L задачі

$$L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(I - xp), \quad (1.14)$$

де λ — множник Лагранжа, і запишемо необхідні умови оптимальності розв'язку x_* і множника λ_* :

$$\begin{aligned} \frac{dL(x_*, \lambda_*)}{dx} &= \dot{U}(x_*) - \lambda_* p \leq 0, \quad \frac{dL(x_*, \lambda_*)}{d\lambda} = I - x_* p \geq 0, \\ \frac{dL(x_*, \lambda_*)}{dx} \cdot x_*^\# &= (\dot{U}(x_*) - \lambda_* p) \cdot x_*^\# = 0, \\ \lambda_* \frac{dL(x_*, \lambda_*)}{d\lambda} &= \lambda_* (I - x_* p) = 0; \quad x_* \geq 0, \quad \lambda_* \geq 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Із наведених умов випливає, що справджуються такі співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} MU_i(x_*) &\leq \lambda_* p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \text{причому } MU_i(x_*) &= \lambda_* p_i, \quad \text{при } x_{*i} > 0; \\ MU_i(x_*) &< \lambda_* p_i, \quad \text{при } x_{*i} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Таким чином, для всіх закуплених товарів, коли $x_{*i} > 0$ відношення частинних граничних корисностей до відповідних цін є сталим:

$$\frac{MU_i(x_*)}{p_i} = \lambda_*, \quad \forall i, \quad x_{*i} > 0. \quad (1.17)$$

Звідси, вважаючи деякі товари купленими, маємо, що оптимальне значення λ_* множника Лагранжа є додатним, $\lambda_* > 0$, а отже, згідно із четвертою умовою (1.15), при оптимальному споживанні весь дохід I має бути витрачений ($I = x_* p$), тобто розв'язок задачі лежить на граничній гіперплощині симплексу допустимих значень споживчих наборів.

Без утрати загальності можна вважати, що споживач закуповує всі види товарів (в іншому випадку можна зменшити розмірність простору товарів, виключивши з розгляду товари, які не купуються). Тоді умови оптимальності (1.15) набувають вигляду системи рівнянь, що у векторній формі записується так:

$$MU(x_*) - \lambda_* p^\# = 0, \quad I - x_* p = 0, \quad (1.18)$$

а в розгорнутій координатній — так:

$$\begin{aligned} MU_i(x_{*1}, \dots, x_{*n}) - \lambda_* p_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ I - \sum_{i=1}^n p_i x_{*i} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Оптимальний множник Лагранжа λ_* , що за (1.17) дорівнює загальному відношенню частинних граничних корисностей для оптимального споживання до відповідних цін, можна інтерпретувати на основі загальної теорії гладких задач математичного програмування як **граничну корисність доходу** споживача

$$\lambda_* = \frac{\partial U(x_*(p, I))}{\partial I} \quad (1.20)$$

(тут позначення $x_* = x_*(p, I)$ вказує, що оптимальний розв'язок задачі (1.12) залежить від параметрів p та I). Величину (1.20) також часто називають **граничною корисністю грошей** споживача.

Система рівнянь (1.18) або (1.19) складається з $n + 1$ рівняння і виражає не тільки необхідні, а й достатні умови оптимальності задачі (1.12) або (1.13). З неї однозначно можна визначити $n + 1$ невідоме $x_{*1}, \dots, x_{*n}, \lambda_*$.

Дійсно, достатні умови оптимальності другого порядку для задачі (1.12) формулюються в термінах обраної ціними матриці Гессе

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & \dot{U}(x_*) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

За лемми останні $(n - 1)$ головних мінорів цієї матриці мають змінювати знак, тоді як периний мінор має бути додатним, що виконується, оскільки матриця $\dot{U}(x_*)$ є від'ємно визначеною.

Задачі оптимального вибору споживача (1.12) або (1.13) можна легко дати геометричне тлумачення. Розглянемо випадок двох товарів ($n = 2$). Тоді оптимальне споживання (x_{*1}, x_{*2}) задовольняє систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x_{*1}, x_{*2})}{\partial x_1} - \lambda_* p_1 &= 0; \quad \frac{\partial U(x_{*1}, x_{*2})}{\partial x_2} - \lambda_* p_2 = 0; \\ I - p_1 x_{*1} - p_2 x_{*2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Розв'язок лежить на бюджетній прямій, що описується третім рівнянням в (1.22) і є точкою дотику її до кривої байдужості

$$U(x_1, x_2) = U(x_{*1}, x_{*2}) = \text{const} \quad (1.23)$$

(рис. 1.9). При цьому нахил (кутовий коефіцієнт) бюджетної прямої дорівнює $-(p_1/p_2)$, а нахил відповідної кривої байдужості dx_2/dx_1 можна знайти з рівняння

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0, \quad (1.24)$$

що є наслідком рівняння кривої байдужості (1.23). Із (1.24) маємо $dx_2/dx_1 = -\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}$.

Оскільки в точці дотику, що є оптимальним розв'язком задачі споживача, нахили ліній однакові, то

$$-\frac{\partial U(x_{*1}, x_{*2})/\partial x_1}{\partial U(x_{*1}, x_{*2})/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

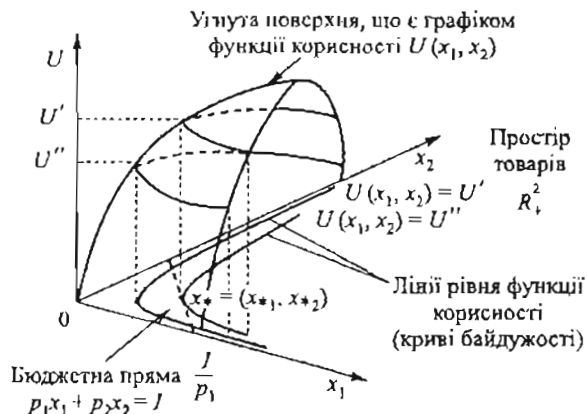


Рис. 1.9

а отже,

$$\frac{1}{p_1} \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2} \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Останню умову можна знайти з рівнянь (1.22), виключивши множник Лагранжа.

Подібну геометричну інтерпретацію оптимального розв'язку задачі споживача можна дати також у випадку довільного n .

1.5. ФУНКЦІЇ ПОПИТУ ГРАНИЧНОЇ КОРИСНОСТІ ГРОШЕЙ

У п. 1.4 було розглянуто раціональну поведінку споживача під час вибору споживчого набору товарів протягом певного часового проміжку при незмінних цінах і доході. Якщо ціни p та дохід I змінюються відповідно в деякій області P ортант R_+^n та на проміжку $[I_1, I_2] \subset R_+$, то споживач має справу із сім'єю задач

$$U(x) \rightarrow \max, \quad x p \leq I, \quad x \geq 0, \quad (p, I) \in P \times [I_1, I_2]. \quad (1.25)$$

За тих самих припущень відносно функції корисності U , що й у п. 1.4, кожна із задач (1.25) має єдиний розв'язок відносно вектора споживання $x_*(p, I)$ з відповідним оптимальним множником Лагранжа $\lambda_*(p, I)$.

Функції $\xi(p, I) = x_*(p, I)$ та $\Lambda(p, I) = \lambda_*(p, I)$ при $(p, I) \in P \times [I_1, I_2] = D$ називаються відповідно **функціями попиту** та **граничної корисності грошей** споживача.

Формально ці функції можна розглядати як розв'язки сім'ї систем рівнянь типу (1.19), а саме:

$$\varphi(\lambda_*, x_*, p, I) = I - x_* p = 0,$$

$$\psi(\lambda_*, x_*, p, I) = \frac{dU(x_*)}{dx} - \lambda_* p^* = 0, \quad (p, I) \in D \quad (1.26)$$

(певні функції аргументів p, I). Тоді функції $\xi = x_*(p, I)$ та $\Lambda = \lambda_*(p, I)$ існують, оскільки відповідна матриця Якобі J дорівнює матриці Гессе (1.21), тобто

$$J = \begin{pmatrix} d\varphi/d\lambda & d\varphi/dx \\ d\psi/d\lambda & d\psi/dx \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} 0 & -p^* \\ -p & U''(x_*) \end{pmatrix},$$

а отже, визначник $|J|$ не дорівнює нулю, оскільки $U''(x_*) < 0$. Таким чином, усі $n+1$ рівняння системи (1.26) мають єдиний розв'язок $\xi(p, I)$, $\Lambda(p, I)$, який має неперервний перший частинний похідні в деякому малому околі розв'язків системи (1.26) за теоремою про неявні функції.

Однією з найважливіших властивостей функції попиту $\xi(p, I)$ є її однорідність нульового степеня відносно всіх цін і доходу. Це означає, що значення попиту ξ інваріантні відносно пропорційних змін цін та доходу:

$$\xi(\alpha p, \alpha I) = \xi(p, I) \quad \text{при всіх } \alpha > 0. \quad (1.27)$$

Подібна властивість впливає з постановки задачі (1.25) про оптимальне споживання, оскільки пропорційна зміна всіх цін і доходу не змінює допустиму множину задачі (1.25) та її цільову функцію.

Через однорідність попиту на будь-який вид товару залежить тільки від відношення цін, які називаються **відносними цінами**, а також від відношення грошового доходу до певної ціни, що називається **реальним доходом** споживача. Обравши будь-який товар за одиницю рахунку, наприклад товар 1, і прийнявши коефіцієнт пропорційності $\alpha = 1/p_1$, функцію попиту можна подати у вигляді

$$\xi_i = \xi_i(1, p_2/p_1, \dots, p_n/p_1, I/p_1). \quad (1.28)$$

Цей вираз показує залежність попиту від відносних цін $p_2/p_1, p_3/p_1, \dots, p_n/p_1$ та реального доходу I/p_1 , коли перший товар прийнятий за одиницю рахунку ($\alpha = 1/p_1$). Формально у такій ролі може виступати будь-який товар j ($\alpha = 1/p_j$). Трапляються випадки, коли за α доцільно брати величину $1/n$ або $1/\sum_{i=1}^n p_i$.

Зауважимо, що функція попиту споживача $\xi(p, I)$ також досить часто називається **маршалліанською функцією попиту**, щоб відрізнити її від іншої функції — **хіксіанської функції попиту споживача**, пов'язаної з дуальною задачею споживання, яка розглядатиметься в п. 1.6.

Функція

$$V(p, I) = U(\xi(p, I)), \quad (p, I) \in D \quad (1.29)$$

називається **непрямою функцією корисності** споживача. Вона характеризує рівень корисності (а отже, її ступінь переважності) його вибору залежно від рівня цін p і доходу I .

Пропозиція 1.3. Маршалліанська функція попиту $\xi(p, I)$ та функція корисності грошей споживача $\Lambda(p, I)$ пов'язані з непрямою функцією корисності споживача $V(p, I)$ співвідношеннями

$$\xi(p, I) = \frac{-\frac{\partial V(p, I)}{\partial p}}{\Lambda(p, I)}; \quad (1.30)$$

$$\Lambda(p, I) = \frac{\partial V(p, I)}{\partial I}. \quad (1.31)$$

∇ Диференціюючи рівність (1.29) за змінною p_j та використовуючи умову (1.26), знаходимо

$$\frac{\partial V(p, I)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U(x_*)}{\partial x_i} \frac{\partial x_{*i}}{\partial p_j} = \lambda_* \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_{*i}}{\partial p_j}. \quad (1.32)$$

А диференціюючи бюджетну рівність $p x_*(p, I) = I$ за змінною p_j маємо

$$x_{*j}(p, I) + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_{*i}}{\partial p_j} = 0. \quad (1.33)$$

Із рівностей (1.32) та (1.33) випливає, що

$$\frac{\partial V(p, I)}{\partial p_j} = -\lambda_* x_{*j}(p, I) = -\Lambda(p, I) \xi_j(p, I)$$

для всіх $j = 1, 2, \dots, n$. Це і доводить рівність (1.30).

Диференціюючи рівність (1.29) та бюджетне обмеження за змінною I , отримуємо

$$\frac{\partial V(p, I)}{\partial I} = \lambda_* \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_{*i}}{\partial I}, \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_{*i}}{\partial I} = 1.$$

Рівність (1.31) є безпосереднім наслідком останніх співвідношень. Δ

Оскільки $\xi(p, I)$ є однорідною функцією нульового степеня відносно своїх аргументів, то таку саму властивість має непряма функція корисності споживача $V(p, I)$.

Коли не обумовлюється строга опуклість функції корисності U споживача, розв'язок задачі (1.25) є взагалі неоднозначним, тобто існує ціла множина наборів товару, однаково переважних для споживача і найбажаниших для нього при заданих цінах та бюджетному обмеженні.

Позначимо через $\chi(p)$ множину всіх можливих наборів товарів, доступних споживачеві при цінах p та споживчому бюджеті $I(p)$:

$$\chi(p) = \{x \in X : xp \leq I(p)\},$$

де (X, \succeq) — поле переваг споживача.

Називатимемо **функцією попиту** $\Xi(p)$ споживача багатозначне відображення простору всіх можливих цін P , $P \subset R_+^n$ у простір товарів X , що задається так:

$$\Xi(p) = \begin{cases} x, & x \in \chi(p), \quad U(x) = \max_{y \in \chi(p)} U(y), \\ \text{якщо максимум досягається,} \\ \emptyset & \text{у протилежному випадку,} \end{cases} \quad (1.34)$$

де U — функція корисності, яка зображує поле переваг (X, \succeq) .

При використанні більш загальної функції попиту $\Xi(p)$ можуть виникати труднощі, пов'язані з тим, що множина $\chi(p)$ може бути необмеженою і максимум $\Xi(p)$ може не існувати, навіть якщо припускається неперервність функції U . Справді, якщо ціна на певний товар дорівнює 0, то з (1.34) випливає, що відповідна координата вектора $x \in \chi(p)$ може бути як завгодно великою із збереженням бюджетного обмеження. Припускаючи, що для споживача виконується аксіома ненасичуваності A_3 , отримуємо, що функція $U(x)$ необмежена, а максимум її на множині $\chi(p)$ не обов'язково є досяжним.

Існують різні методи подолання цієї складності. Опишемо найпростіший з них. Вважатимемо, що множина X побудована таким чином, що коли у послідовності наборів x^k , $x^k \in X$ деяка координата x_i^k прямує до нескінченності при $k \rightarrow \infty$, то до нескінченності прямують також усі інші координати векторів x^k , $k = 1, 2, \dots$. Це означає: коли споживачеві потрібна велика кількість одного товару, він також бажає більшої кількості решти товарів, які його цікавлять. Цю гіпотезу можна розглядати як певне підсилення аксіоми ненасичуваності.

Припускаючи подібне про структуру множин товарів X , знайдемо, що при будь-якому ненульовому векторі цін p і сталому доході $I(p)$ множина $\chi(p)$ є обмеженою. Тоді функція попиту $\Xi(p)$ стає визначеною на всій множині можливих цін $p \in R_+^n$, $p > 0$.

Як правило, припускається, що функція доходу споживача є однорідною першого степеня, тобто $I(\alpha p) = \alpha I(p)$ для всіх $\alpha > 0$. Тоді відображення $\chi(p)$ та $\Xi(p)$ також мають властивість однорідності нульового степеня $\chi(\alpha p) = \chi(p)$, $\Xi(\alpha p) = \Xi(p)$, $\alpha > 0$. Це виражає той факт, що вибір споживача залежить не від масштабу цін, а тільки від їх співвідношення на різні товари.

У загальній теорії вважається, що поведінка споживача описується функцією $\Xi(p)$, а остаточний вибір споживача зводиться до вибору вектора x із множини $\Xi(p)$.

1.6. МОДЕЛЬ СПОЖИВАННЯ СТОУНА. ТОВАРИ ПЕРШОЇ НЕОБХІДНОСТІ, ВИБОРУ ТА РОЗКОШІ

Розглянемо низку важливих прикладів, що розкривають особливості оптимального вибору споживача в різних ситуаціях.

Почнемо з простого прикладу споживчого вибору в просторі двох товарів R_+^2 (які можуть бути і комплексними) при корисності, що задається функцією Бернулі

$$U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, \quad (x_1, x_2) \in \text{int } R_+^2, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Тоді маршалліанська функція попиту $x_* = \xi(p, I)$ та функція граничної корисності доходу споживача $\lambda_* = \Lambda(p, I)$, які характеризують споживчий вибір, що веде до максимізації корисності при стандартному бюджетному обмеженні

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I,$$

згідно з умовами оптимальності (1.13) задовольняють рівняння

$$\frac{\partial U(x_*)}{\partial x_i} - \lambda_* p_i = \frac{a_i}{x_{*i}} - \lambda_* p_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1.35)$$

$$p_1 x_{*1} + p_2 x_{*2} = I.$$

Переписавши перші два рівняння у вигляді

$$a_1 x_{*1}^{-1} = \lambda_* p_1, \quad a_2 x_{*2}^{-1} = \lambda_* p_2. \quad (1.36)$$

можемо виключити невідоме λ_* діленням першої рівності (1.36) на другу й отримати співвідношення

$$MRS_{1,2}(x_*) = \frac{\partial U(x_*)/\partial x_1}{\partial U(x_*)/\partial x_2} = \frac{a_1 x_{*2}}{a_2 x_{*1}} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (1.37)$$

Із третього рівняння (1.35) знаходимо, що

$$x_{*2} = \frac{I}{p_1} + \frac{x_{*1} p_2}{p_1}. \quad (1.38)$$

Підставивши (1.38) в (1.37), отримаємо функцію попиту на товар 1.

$$x_{*1} = \xi_1(p, I) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_1}. \quad (1.39)$$

Підставивши (1.39) в (1.38), отримаємо функцію попиту на товар 2:

$$x_{*2} = \xi_2(p, I) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_2}. \quad (1.40)$$

Звідси відповідна непряма функція корисності споживача має вигляд

$$V(p, I) = U(\xi_1(p, I), \xi_2(p, I)) = a_1 \ln \frac{a_1 I}{p_1(a_1 + a_2)} + a_2 \ln \frac{a_2 I}{p_2(a_1 + a_2)}. \quad (1.41)$$

Із першого рівняння системи (1.35) знаходимо функцію граничної корисності доходу споживача

$$\lambda_* = \Lambda(p, I) = \frac{a_1 x_{*1}^{-1}}{p_1} = \frac{a_1 + a_2}{I}. \quad (1.42)$$

Такий самий результат дає пряме диференціювання функції (1.41) за змінною I внаслідок тотожності $dV/dI = \Lambda$.

Розглянемо більш загальний підхід до задачі вибору індивідуального споживача. При цьому функція корисності споживача має включати для кожного товару також мінімальну кількість \bar{x}_i цього товару на певний проміжок часу, яка не є об'єктом вибору споживача й купується ним обов'язково (при відповідних бюджетних можливостях). Якщо $\bar{x}_i > 0$, то відповідний товар є **товаром першої потреби** для споживача.

Набір усіх товарів першої потреби \bar{x} утворює **мінімальний споживчий кошик споживача**. Усереднений за певною методикою мінімальний споживчий кошик типового споживача є одним із головних показників системи національних економічних рахунків, що визначає **рівень бідності** для цієї економіки як вартість цього кошика для одного індивідуума на вибраний період часу. Товари i , для яких $\bar{x}_i = 0$, називаються **товарами вибору** для споживача. Інші ці товари трактуються як товари відносної розкоші для споживача. Товари вибору характеризуються швидкими темпами зростання попиту на них при збільшенні доходу, ніж товари першої потреби, попит на які є обмеженим. Серед товарів вибору інді виділяють групу **товарів розкоші**, попит на які необмежено зростає при необмеженому збільшенні доходу I , причому в більших пропорціях, ніж зростання I .

У моделі споживання Стоуна¹ розглядається споживач із загальною мультиплікативною функцією корисності

$$U(x_1, \dots, x_n) = c \prod_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^{\alpha_i}$$

із додатними параметрами $c, \alpha_i, i = 1, \dots, n$, дохід якого I перевищує вартість мінімального споживчого кошика $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i=1, \dots, n} \geq 0$ у заданому просторі товарів R_+^n .

Споживач робить свій вибір, максимізуючи корисність $U(x_1, \dots, x_n)$ за умов

$$\sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i < I; \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n.$$

Тоді функція Лагранжа (лагранжіан) задачі оптимального споживання має вигляд $L(x, \lambda) = U(x) + \lambda(I - xp)$.

Умови оптимальності першого порядку виражаються рівняннями

$$\frac{\partial L(x_*, \lambda_*)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x_*)}{\partial x_i} - \lambda_* p_i = \frac{\alpha_i U(x_*)}{x_{*i} - \bar{x}_i} - \lambda_* p_i = 0, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_{*i} = I.$$

¹Стоун Джон Річардс (нар. 1913 р.) - англійський економіст і статистик, лауреат Нобелівської премії з економіки 1984 р., присвяченої за розроблення систем національного рахунку.

Розв'язавши перші рівняння відносно x_{*i} , маємо

$$x_{*i} = \bar{x}_i + \frac{\alpha_i}{p_i} \left(\frac{U(x_*)}{\lambda_*} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.43)$$

Знайдемо значення $U(x_*)/\lambda_*$. Якщо помножити кожне рівняння (1.43) на $\lambda_* p_i$ і додати всі добутки, то дістанемо рівність

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i U(x_*) + \lambda_* \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i - \lambda_* \sum_{i=1}^n p_i x_{*i} = 0,$$

яку можна подати у вигляді

$$U(x_*) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) + \lambda_* \left(\sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \right) - \lambda_* I = 0.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\frac{U(x_*)}{\lambda_*} = \frac{I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}. \quad (1.44)$$

Підставивши (1.44) в (1.43), знайдемо функції попиту

$$x_i^* = \xi_i(p, I) = \bar{x}_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \right)}{p_i \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)}. \quad (1.45)$$

Отриманий результат можна інтерпретувати так: спершу споживач витрачає суму грошей $\sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i$ на придбання мінімального кошика $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i=1, \bar{n}}$. Після цього в нього залишається сума грошей $I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i$, яку він розподіляє пропорційно параметрам α_i (тобто з ваговими коефіцієнтами $\alpha_i \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1}$) для закупівлі додаткової кількості товарів, товарів першої потреби або товарів вибору, для яких $\bar{x}_i = 0$. Відношення останньої суми грошей, виділених на придбання товару i , до ціни p_i виражає додаткову кількість товару i .

В окремому випадку розглянутої моделі Стоуна, коли всі товари є товарами вибору (тобто серед них немає товарів першої потреби, всі $\bar{x}_i = 0$) й усі параметри α_i рівні між собою ($\alpha_i = \alpha$, $i = 1, \dots, n$), функції попиту мають вигляд

$$x_{*i} = \xi_i(p, I) = \frac{I}{np_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

тобто дохід розподіляється на n однакових частин, попит на кожний товар обернений до ціни на нього і необмежено зростає при $I \rightarrow +\infty$. Крім того, у цьому випадку усі товари є **нейтральними** один до одного в тому

розумінні, що попит на кожний товар не залежить від зміни цін на інші товари:

$$\frac{d\xi_i(p, I)}{dp_j} = 0, \quad j \neq i.$$

У моделі споживання Стоуна функція непрямой корисності має вигляд

$$V(p, I) = c \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha_i \left(I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \right)}{p_i \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)} \right]^{\alpha_i},$$

а функція граничної корисності доходу споживача —

$$\Lambda(p, I) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i} \right) V(p, I).$$

Розглянемо приклад вибору товарів першої потреби і товарів розкоші, об'єднуючи їх за необхідності в комплексні товари 1 і 2 відповідно до кількісних індексів x_1 та x_2 . Такий вибір може зображатися функціями корисності вигляду

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_2 + b - a)^{-b}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

де параметри a і b задовольняють умови $a > 0$, $b > a$.

Пропонуємо читачеві самостійно переконатися в тому, що при стандартному бюджетному обмеженні

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$$

відповідні маршалліанські функції попиту для задачі споживчого вибору мають вигляд

$$x_{*1} = \xi_1(p_1, I) = \frac{aI}{I + bp_1}; \quad x_{*2} = \xi_2(p_1, p_2, I) = \frac{I(I + p_1(b-a))}{p_2(I + bp_1)}.$$

При $I \rightarrow +\infty$ попит на товари першої потреби залишається обмеженим і прямує до асимптотичної величини a , тоді як попит на товари розкоші необмежено зростає.

1.7. ДУАЛЬНА ЗАДАЧА СПОЖИВАННЯ. ХІКСІАНСЬКИЙ ПОПИТ І ФУНКЦІЯ ВИДАТКІВ

Дуальною (або двоїстою) задачею споживання до неокласичної задачі споживання, описаної в п. 1.4, є задача мінімізації витратків споживача на придбання набору товарів x із рівнем корисності, не меншим від заданого значення u , яка записується у вигляді

$$xp \rightarrow \min, U(x) \geq u, x \in R_+^n. \quad (1.46)$$

де p — вектор цін на товари, а U — функція корисності споживача.

Ця задача тісно пов'язана з неокласичною задачею споживання, і разом вони дають повний аналітичний опис раціональної поведінки споживача.

Передусім установимо основні співвідношення між задачею (1.46) і неокласичною задачею споживання

$$U(x) \rightarrow \max, \quad x p \leq I, \quad x \in R^n \quad (1.47)$$

при виконанні мінімального комплексу умов.

Теорема 1.8. Нехай виконуються такі припущення: а) функція $U(x)$ неперервна на R^n_+ і задовольняє умову локальної ненасичуваності: для довільної внутрішньої точки $x \in R^n_+$ ($x > 0$) і як завгодно малих $\varepsilon > 0$ існує такий набір товарів y , $\|x - y\| < \varepsilon$, що $U(y) > U(x)$; б) розв'язки задач (1.46) й (1.47) існують. Тоді є правильними такі твердження.

I. Якщо x_* є розв'язком задачі (1.47) і $u = U(x_*)$, то x_* є також розв'язком задачі (1.46).

II. Якщо x^* є розв'язком задачі (1.46) і $I = x^* p > 0$, то x^* також є розв'язком задачі (1.47).

∇ Доведемо спочатку твердження I. Припустимо, що при виконанні його умов x_* не є розв'язком задачі (1.46) й існує інший її розв'язок x' . Тоді $x' p < x_* p$ і $U(x') \geq U(x_*)$. Згідно з властивістю локальної ненасичуваності існує набір товарів x'' , досить близький до x' і такий, що $x'' p < x_* p = I$ та $U(x'') > U(x_*)$. Однак тоді x_* не може бути розв'язком задачі (1.47). Отримана суперечність доводить I.

Доведемо від оберненого твердження II. Нехай x^* не є розв'язком задачі (1.47), незважаючи на виконання умов твердження II, а x' є розв'язком задачі (1.47), так що $U(x') > U(x^*)$ і $x' p = x^* p = I$. Оскільки $x^* p > 0$ і U — неперервна функція, то існує t , $0 < t < 1$, таке, що $tx' p < x^* p = I$ і $U(tx') > U(x^*)$. Тому x^* не може бути розв'язком задачі (1.47). Δ

Знайдемо аналітичні умови оптимальності в задачі (1.46). Спочатку подамо цю задачу в стандартній формі для застосування теореми Куна — Такера:

$$-x p \rightarrow \max, \quad -U(x) \leq -u, \quad x \in R^n_+. \quad (1.48)$$

Лагранжіан задачі (1.48) має вигляд

$$L(x, \lambda) = -x p + \lambda(U(x) - u).$$

Отже, умови оптимальності набору товарів x^* , що має рівень корисності, не менший від заданого u і мінімізує видатки, задаються співвідношеннями

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} = -p + \lambda^* M U(x^*) \leq 0; \quad \sum_{i=1}^n (-p_i + \lambda^* M U_i(x^*)) x_i^* = 0, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = U(x^*) - u \geq 0, \quad \lambda^*(U(x^*) - u) = 0$$

(у припущенні про диференційованість функції U).

Уважаючи, що всі товари споживаються, $x_i^* > 0$, $i = 1, \dots, n$ і беручи до уваги, що $\lambda^* > 0$, отримуємо такі умови пайкраного вибору споживача x^* :

$$\lambda^* M U_i(x^*) = p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.50)$$

$$U(x^*) = u.$$

Якщо ціни $p = (p_i)_{i=1, \dots, n}$ змінні так само, як і рівень корисності u , тобто коли маємо сім'ю задач (1.46) зі змінними параметрами p, u , рівняння (1.50) задають оптимальний набір x^* і відповідні значення множника Лагранжа λ^* як неявні функції параметрів p, u .

При цьому функція

$$h(p, u) = x^*(p, u) = \{x_i^*(p, u)\}_{i=1, \dots, n} \quad (1.51)$$

називається **функцією хіксіанського попиту споживача** на товари i , $i = 1, \dots, n$. Відповідне значення оптимальних видатків $x^* p$ визначає **функцію видатків споживача**

$$e(p, u) = x^*(p, u) p = h(p, u) p = \sum_{i=1}^n h_i(p, u) p_i. \quad (1.52)$$

Із означень (1.51) та (1.52) випливає, що функції $h(p, u)$ та $e(p, u)$ пов'язані між собою тотожністю

$$h_i(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}, \quad (1.53)$$

яка в координатній формі має вигляд

$$h_i(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.54)$$

(тобто хіксіанський попит є граничними видатками споживача за цінами).

Із перших рівнянь умов оптимальності (1.50) випливає, що

$$\lambda^*(p, u) = \frac{p_i}{M U_i(h(p, u))} \quad (1.55)$$

для будь-якого i , $i = 1, \dots, n$. Якщо x_* — розв'язок неокласичної задачі споживання (1.47) і $u = U(x_*)$, то з теореми 1.8 та умов оптимальності x_* (1.49) випливає вірність співвідношення

$$\lambda^*(p, V(p, I)) = \left(\frac{\partial V(p, I)}{\partial I} \right)^{-1}, \quad (1.56)$$

де $V(p, I)$ — непряма функція корисності споживача, або

$$\lambda^*(p, V(p, I)) = [\Lambda(p, I)]^{-1}.$$

Основні тотожності, що пов'язують між собою функції маршалліанського $\xi(p, I)$ та хіксіанського $h(p, u)$ попиту, а також непряму функцію корисності $V(p, I)$ та функцію видатків споживача $e(p, u)$, наведено в такій теоремі.

Теорема 1.9. Дійсними є такі співвідношення між функціями $e(p, u)$, $V(p, I)$, $\xi(p, I)$ та $h(p, u)$:

(I) $e(p, V(p, I)) \equiv 1$, тобто мінімальні споживчі витрати, необхідні для того, щоб досягти рівня корисності $V(p, I)$, дорівнюють 1;

(II) $V(p, e(p, u)) \equiv u$, тобто максимальна корисність доходу $e(p, u)$ дорівнює u ;

(III) $\xi(p, I) \equiv h(p, V(p, I))$, тобто маршалліанський попит при доході I є таким самим, що й хіксіанський попит при рівні корисності $V(p, I)$;

(IV) $h(p, u) \equiv \xi(p, e(p, u))$, тобто хіксіанський попит при рівні корисності u є таким самим, що й маршалліанський попит при доході $e(p, u)$.

Твердження теореми 1.9 є безпосередніми наслідками означень функцій, які в них фігурують.

На запершення наведемо кілька прикладів обчислення і використання функцій споживача, пов'язаних із дуальною задачею споживання.

Приклад 1.14. Використовуючи функції $e(p, u)$ та $h(p, u)$, довести тотожність Рея

$$\xi_i(p, I) = -\frac{\partial V(p, I)}{\partial p_i} \left(\frac{\partial V(p, I)}{\partial I} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Справді, якщо u_* — максимальне значення корисності споживача при параметрах p та I неокласичної задачі споживання, то за теоремами 1.8 й 1.9 маємо такі співвідношення

$$u_* V(p, e(p, u_*)); \quad \xi(p, I) = h(p, u_*).$$

Звідси диференціюванням за параметром p_i отримаємо рівність

$$0 = \frac{\partial V(p, I)}{\partial p_i} + \frac{\partial V(p, I)}{\partial I} \frac{\partial e(p, u_*)}{\partial p_i} = \frac{\partial V(p, I)}{\partial p_i} + \frac{\partial V(p, I)}{\partial I} h_i(p, u_*),$$

з якої випливає, що

$$h_i(p, u_*) = \xi_i(p, I) = -\frac{\partial V(p, I)}{\partial p_i} \left(\frac{\partial V(p, I)}{\partial I} \right)^{-1}$$

при будь-якому i , $i = 1, \dots, n$.

Приклад 1.15. Знайти функції хіксіанського попиту і функцію витратів для споживача з функцією корисності Бернуллі $U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$, $a_1, a_2 > 0$ у двовимірному просторі товарів $(x_1, x_2) \in \text{int } R_+^2$

Ураховуючи, що оптимальний попит $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ при заданому рівні корисності в дуальній задачі споживання є розв'язком системи рівнянь (1.50), які тут мають вигляд

$$\lambda^* \frac{a_1}{x_1^*} = p_1, \quad \lambda^* \frac{a_2}{x_2^*} = p_2, \quad (1.57)$$

$$a_1 \ln x_1^* + a_2 \ln x_2^* = u,$$

звідки, що

$$\frac{a_1 x_1^*}{a_2 x_2^*} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{або} \quad x_2^* = \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{a_1}{a_2} \right) \quad (1.58)$$

З останнього рівняння системи (1.57) випливає, що

$$(x_1^*)^{a_1} (x_2^*)^{a_2} = e^{u^*}$$

або, враховуючи (1.58),

$$h_1(p, u) = x_1^* = e^{u/a_1 + a_2} \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2/a_1}, \quad h_2(p, u) = x_2^* = \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \right) x_1^* = e^{u/a_1 + a_2} \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \right)^{a_1/a_2}$$

Таким чином,

$$e(p, u) = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = e^{u/a_1 + a_2} \left[p_1 \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2/a_1} + p_2 \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \right)^{a_1/a_2} \right].$$

1.8. ПОРІВНЯЛЬНА СТАТИКА СПОЖИВАННЯ.

ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ СПОЖИВАННЯ

Метою порівняльної статистики споживання є вивчення чутливості розв'язку задачі раціональної поведінки споживача до змін параметрів p та I , тобто поведінки функцій попиту і граничної вартості грошей при зміні цін та доходу.

За означенням функцій попиту $\xi(p, I)$, а також граничної вартості грошей $\Lambda(p, I)$ вони є розв'язком системи рівнянь

$$I - \xi(p, I)p = 0; \quad \frac{dU}{d\lambda}(\xi(p, I)) - \Lambda(p, I)p^{\#} = 0. \quad (1.59)$$

Основні показники порівняльної статистики споживання можна отримати диференціюванням тотожностей (1.59) за параметрами p та I .

Для розгляду впливу змін доходу I продиференціюємо (1.59) по I . Отримаємо систему рівнянь

$$1 - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \xi_i}{\partial I} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial I} - p_i \frac{\partial \Lambda}{\partial I} = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (1.60)$$

відносно частинних похідних $\partial \xi_i / \partial I$, $i = 1, \dots, n$ та $\partial \Lambda / \partial I$, що відображають ступінь чутливості функцій ξ і Λ до змін доходу I . Використовуючи векторно-матричні позначення, де $\partial \xi / \partial I = (\partial \xi_i / \partial I)_{i=1, n}$, можемо записати (1.60) у вигляді

$$-\frac{\partial \xi}{\partial I} p = -1; \quad -p \frac{\partial \Lambda}{\partial I} + U' \left(\frac{\partial \xi}{\partial I} \right)^{\#} = 0. \quad (1.61)$$

Рівняння (1.61), у свою чергу, можна подати у вигляді одного векторного рівняння

$$H \begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial I \\ (\partial \xi / \partial I)^{\#} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p^{\#} \\ -p & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial I \\ (\partial \xi / \partial I)^{\#} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Для розгляду питань, пов'язаних із впливом зміни однієї ціни p_i при незмінних інших цінах та доході, продиференціюємо (1.59) по p_i . Отри-

маємо таку систему рівнянь відносно $\partial \xi_k / \partial p_i$, $k = 1, \dots, n$ і $\partial \Lambda / \partial p_i$:

$$\xi_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} - \Lambda \delta_{ji} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.63)$$

де δ_{ji} — дельта Кронекера, що дорівнює 1, коли $j = i$, та 0, коли $j \neq i$.

Якщо ввести матричну $\partial \xi / \partial p = (\partial \xi_j / \partial p_i)_{i=1, n}^{j=1, n}$ і векторну похідну $\partial \Lambda / \partial p = (\partial \Lambda / \partial p_i)_{i=1, n}$, то рівняння (1.63) для значень $i = 1, \dots, n$ можна записати у вигляді векторних рівнянь

$$-p^\# \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\xi; \quad -p \frac{\partial \Lambda}{\partial p} + U \frac{\partial \xi}{\partial p} = \Lambda E_n, \quad (1.64)$$

де $E_n = (\delta_{ij})_{i=1, n}^{j=1, n}$ — одинична матриця розміром $n \times n$.

У свою чергу, систему рівнянь (1.64) можна переписати у вигляді одного матрично-векторного рівняння

$$H \begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial p \\ \partial \xi / \partial p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial p \\ \partial \xi / \partial p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \Lambda E_n \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Дослідимо вплив **компенсованої** зміни ціни, за якою дохід компенсується таким чином, щоб корисність залишалася незмінною.

Оскільки повні диференціали функцій U та I мають вигляд

$$dU = \frac{dU(x)}{dx} dx = MU(x)dx = \lambda p^\# dx,$$

$$dI = d(xp) = (dx)p + x(dp), \quad (1.66)$$

для того щоб корисність U залишалася незмінною (тобто щоб виконувалась рівність $dU = 0$), необхідно, щоб $p^\# dx = 0$, а це можливо за умови, якщо $dI = x(dp)$. Зокрема, якщо ціна p_i зростає до значення $p_i + dp_i$, то додатковий дохід $dI = x_i(dp_i)$ забезпечує незмінну корисність. Диференціюючи (1.59) по p_i при $dI = x_i(dp_i)$, знаходимо

$$-\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} - \Lambda \delta_{ji} = 0,$$

$$j = 1, \dots, n. \quad (1.67)$$

Рівняння (1.67) для індексів $i = 1, 2, \dots, n$ у векторній формі можна записати у вигляді системи

$$-p^\# \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} = 0; \quad -p \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right)_{\text{comp}} + U \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} = \Lambda E_n, \quad (1.68)$$

де $(\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}}$ та $(\partial \Lambda / \partial p)_{\text{comp}}$ визначаються співвідношеннями

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} = \left[\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} \right]_{i=1, n}^{j=1, n}; \quad \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right)_{\text{comp}} = \left[\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} \right]_{i=1, n}$$

за умови компенсованих змін цін, коли дохід компенсується таким чином, що корисність залишається незмінною. Систему рівнянь (1.68) можна записати у вигляді одного векторно-параметричного рівняння вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial \Lambda / \partial p)_{\text{comp}} \\ (\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda E_n \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Таким чином, маємо три векторно-матричних рівняння (1.62), (1.65) та (1.69) для похідних $\partial \Lambda / \partial I$, $\partial \Lambda / \partial p$, $(\partial \Lambda / \partial p)_{\text{comp}}$, $\partial \xi / \partial I$, $\partial \xi / \partial p$, $(\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}}$, які, у свою чергу, можна подати у вигляді одного векторно-матричного рівняння вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial I & \partial \Lambda / \partial p & (\partial \Lambda / \partial p)_{\text{comp}} \\ \partial \xi / \partial I & \partial \xi / \partial p & (\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \xi & 0 \\ 0 & \Lambda E_n & \Lambda E_n \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Це рівняння називається **основним векторно-матричним рівнянням теорії споживання**.

Оскільки обрамлена ціними матриці Гессе H є невідродженою, рівняння (1.70) можна розв'язати відносно показників (похідних) порівняльної статистики. Відповідний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} \partial \Lambda / \partial I & \partial \Lambda / \partial p & (\partial \Lambda / \partial p)_{\text{comp}} \\ \partial \xi / \partial I & \partial \xi / \partial p & (\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & U \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \xi & 0 \\ 0 & \Lambda E_n & \Lambda E_n \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Матрицю H^{-1} , обернену до обрамленої ціними матриці Гессе H , можна обчислити за правилом обертання блокових матриць, оскільки матриця Гессе U від'ємно визначена, а отже, є невідродженою. При цьому

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -p^\# \\ -p & U \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mu & \mu p^\# U^{-1} - 1 \\ \mu U^{-1} p & \mu U^{-1} p p^\# U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.72)$$

де $\mu = -(p^\# U^{-1} p)^{-1} > 0$.

Ураховуючи рівняння (1.71) і вираз (1.72), знаходимо

$$\mu = -\frac{\partial \Lambda}{\partial I} = -\frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial U(\xi)}{\partial I} \right) = -\frac{\partial^2 U(\xi)}{\partial I^2}, \quad (1.73)$$

тобто скаляр μ можна трактувати як **коефіцієнт зменшення граничної вартості грошей**.

Користуючись явним виразом матриці H^{-1} (1.72) і підставляючи його в рівність (1.71), дістанемо явний вигляд показників порівняльної статистики споживання

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial I} &= -\mu \dot{U}^{-1} p; & \frac{\partial \xi}{\partial p} &= \mu \dot{U}^{-1} p \xi + \mu \dot{U}^{-1} p p^{\#} \dot{U}^{-1} \Lambda + \dot{U}^{-1} \Lambda; \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} &= \mu \dot{U}^{-1} p p^{\#} \dot{U}^{-1} \Lambda + \dot{U}^{-1} \Lambda; & (1.74) \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial I} &= -\mu; & \frac{\partial \Lambda}{\partial p} &= \mu \xi + \mu \Lambda p^{\#} \dot{U}^{-1}; & \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p} \right)_{\text{comp}} &= \mu \Lambda p^{\#} \dot{U}^{-1}.\end{aligned}$$

1.9. РІВНЯННЯ СЛУЦЬКОГО І КЛАСИФІКАЦІЯ ТОВАРІВ

Головним рівнянням у неокласичній теорії споживання є **рівняння Слуцького**¹, виведене в [48]. Це рівняння, яке в матричній формі має вигляд

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial I} \right)^{\#} \xi, \quad (1.75)$$

описує загальний ефект від впливу цін на функції попиту через вплив компенсованої зміни цін на попит і вплив зміни доходу на попит. Рівняння (1.75) є безпосереднім наслідком виразів перших трьох показників порівняльної статистики споживання.

Записавши рівняння Слуцького (1.74) послідовно для кожного товару та кожної ціни, матимемо таку систему скалярних рівнянь, еквівалентну матричному рівнянню:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I} \right) \xi_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.76)$$

Матриця

$$C = \left\{ \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} \right\}_{i,j=1,n}^{j=1,n} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} \quad (1.77)$$

називається **матрицею Слуцького**. Вона характеризує ефекти заміни одних товарів іншими при зміні цін. Член $(\partial \xi_i / \partial I) \xi_j$ рівняння (1.76) відображає вплив зміни доходу на попит на i -й товар відносно змін цін на j -й товар. Перший член рівняння (1.76) $\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}}$ характеризує вплив заміни в допиті на i -й товар, що відбувається при зміні ціни на j -й товар, так що рівняння Слуцького (1.76) розділяє загальний ефект зміни ціни на товар j на два ефекти, описані вище.

¹Слуцький Євген Євсенович (1880–1948) – відомий математик, статистик та економіст, навчався у Київському університеті, в 1913–1926 рр. викладав у Київському комерційному інституті. Один із засновників сучасної теорії та статистики випадкових процесів

Наведений метод розв'язання рівняння Слуцького ґрунтується на досить важкому для сприйняття матеріалі порівняльної статистики споживання. Тому для розкриття цієї теми спинимося на найпростішій версії цього рівняння, що виражатиме розкладання впливу зміни ціни товару j на попит на товар i на ефекти заміни та доходу у кінцево-різницевої формі.

Для виведення подібної дискретної версії рівняння Слуцького почнемо з простої алгебричної тотожності для функцій попиту

$$\begin{aligned}\xi_i(p + \Delta p, I) - \xi_i(p, I) &= \\ &= \xi_i(p + \Delta p, I + \Delta I) - \xi_i(p, I) - [\xi_i(p + \Delta p, I + \Delta I) - \xi_i(p + \Delta p, I)].\end{aligned}$$

де $p = (p_i)_{i=1,n}$ – вектор цін; I – дохід споживача; Δp та ΔI – малі прирости цих параметрів.

Припустімо, що зміна цін має вигляд

$$\Delta p = (0, \dots, 0, \Delta p_j, 0, \dots, 0).$$

Тоді компенсуюча зміна у доході споживача (у розумінні Слуцького) має вигляд $\Delta I = \xi_j(p, I) \Delta p_j$. Якщо поділяти кожну частину наведеної вище тотожності на Δp_j й урахувати той факт, що $\Delta p_j = \Delta I / \xi_j(p, I)$, то отримаємо рівність

$$\begin{aligned}\frac{\xi_i(p + \Delta p, I) - \xi_i(p, I)}{\Delta p_j} &= \\ &= \frac{\xi_i(p + \Delta p, I + \Delta I) - \xi_i(p, I)}{\Delta p_j} - \xi_j(p, I) \frac{[\xi_i(p + \Delta p, I + \Delta I) - \xi_i(p + \Delta p, I)]}{\Delta I}.\end{aligned}$$

Інтерпретуючи перший член праворуч в останній рівності як відношення зміни попиту до зміни ціни на товар i в умовах компенсації, а другий член – як добуток ξ_j на відношення зміни попиту на товар i , спричиненої компенсуючою зміною доходу ΔI до цієї зміни ΔI , запишемо **рівняння Слуцького в кінцевих різницях**

$$\frac{\Delta \xi_i}{\Delta p_j} = \left(\frac{\Delta \xi_i}{\Delta p_j} \right)_{\text{comp}} - \xi_j \left(\frac{\Delta \xi_i}{\Delta I} \right). \quad (1.78)$$

Ліва частина цього рівняння показує, як зміна ціни Δp_j вплинула на попит на товар i . Права – вказує на те, що цей вплив розкладається на ефект заміни, який характеризує зміну попиту на товар i при зміні ціни Δp_j і водночас доходу на ΔI , що компенсує цю зміну, та на ефект доходу, який характеризує зміну попиту на товар i при сталій ціні $p + \Delta p_j$ через зміну доходу.

Рівняння (1.76) можна розглядати як граничну форму рівняння (1.78) при $\Delta p_j \rightarrow 0$.

Дамо геометричну інтерпретацію ефектів заміни та доходу при зміні ціни, які відокремлюються рівнянням Слуцького щодо двох товарів.

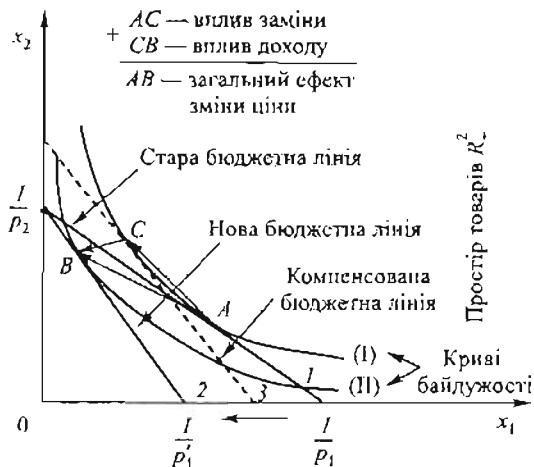


Рис. 1.10

деякій точці C . При цьому вектор \overline{AC} показуватиме ефект заміни при збільшенні ціни та підтримці старого рівня добробуту споживача компенсуючим збільшенням доходу. Вектор \overline{CB} показує ефект доходу, тобто зміну попиту споживача, коли всі ціни ті самі, а дохід змінюється.

Загальний ефект зростання ціни (при відсутності компенсації) відображає вектор \overline{AB} , причому $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Ще раз наголосимо, що вектор \overline{AC} характеризує зміну споживання через зміну ціни в умовах збереження корисності на сталому рівні (через компенсуючу зміну доходу).

Наведемо числові приклади аналізу компенсаційних ефектів та відповідного рівняння Слуцького.

Приклад 1.16. Нехай споживач має логарифмічну функцію корисності $U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$ і дохід $I = 60$, а ціни на товари $p_1 = 10$, $p_2 = 2$. Тоді за формулами (1.39) й (1.40) визначимо функції попиту на ці товари:

$$x_{*1} = \xi_1(p, I) = \frac{1}{2} \frac{I}{p_1} = \frac{60}{2 \cdot 10} = 3; \quad x_{*2} = \xi_2(p, I) = \frac{1}{2} \frac{I}{p_2} = \frac{60}{2 \cdot 2} = 15.$$

Для спрощення розрахунків за допомогою перетворення $f(z) = e^z$, $z \geq 0$ функції корисності U перейдемо до рівнозначної функції корисності $V(x_1, x_2) = f(U(x_1, x_2)) = e^{x_1 x_2}$, що задає те саме поле переваг споживача. Тоді оптимальний рівень корисності $V_* = x_{*1} x_{*2} = 45$.

Нехай тепер ціна на товар $2 p_2$ зростає з 2 до 7 грошових одиниць. Щоб придбати той самий набір x_* , споживачеві додатково потрібно мати $(7 - 2) \cdot 15 = 75$ грошових одиниць. Проте стара структура споживання не є оптимальною при нових цінах, тому мінімально необхідна компенсація буде менше ніж 75. Нехай компенсуюче зростання доходу дорівнює ΔI . Тоді $x_1 = \frac{60 + \Delta I}{2 \cdot 10}$, $x_2 = \frac{60 + \Delta I}{2 \cdot 7}$, а $V(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \frac{(60 + \Delta I)^2}{4 \cdot 7 \cdot 10} = V_* = 45$.

Звідси $\Delta I = 52,25$.

Приклад 1.17. Розглянемо попередній приклад у загальному висляді. Нехай функція корисності споживача $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$, дохід I , ціни на товари p_1 і p_2 . Тоді

$$\xi_i = x_{*i} = \frac{I}{2p_i}; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2}; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial I} = \frac{1}{2p_i};$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = 0 \quad (j \neq i), \quad i, j = 1, 2.$$

Нехай ціна p_1 зросла в k ($k > 1$) разів, і споживач отримує необхідну компенсацію доходу ΔI . Тоді $I + \Delta I = \bar{I}$, а новий попит

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\bar{I}}{2kp_1}, \quad \bar{\xi}_2 = \frac{\bar{I}}{2p_2}$$

З умови компенсації

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{I^2}{4p_1 p_2} = \frac{\bar{I}^2}{2kp_1 p_2} = \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2$$

знаходимо, що $\bar{I} = \sqrt{k} I$, $\bar{\xi}_1 = k^{-1/2} \xi_1$, $\bar{\xi}_2 = k^{1/2} \xi_2$, тобто попит на товар 1 зменшиться, а на товар 2 збільшиться в $k^{1/2}$ разів.

$$\text{Підрахуємо } \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} \right)_{\text{comp}} \quad \text{і} \quad \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_2} \right)_{\text{comp}}.$$

$$\text{Отримаємо } \Delta \xi_1 = k^{-1/2} \xi_1 - \xi_1 = \xi_1 \left(k^{-1/2} - 1 \right);$$

$$\Delta \xi_2 = k^{1/2} \xi_2 - \xi_2 = \xi_2 \left(k^{1/2} - 1 \right), \quad \Delta p_1 = p_1 (k - 1).$$

тобто

$$\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial p_1} \right)_{\text{comp}} = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\Delta \xi_1}{\Delta p_1} = \frac{\xi_1}{p_1} \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{k}}{\sqrt{k}(k - 1)} = \frac{\xi_1}{p_1} \lim_{k \rightarrow 1} \left(\frac{-1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + 1)} \right) = -\frac{I}{4p_1^2} < 0;$$

$$\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial p_1} \right)_{\text{comp}} = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\Delta \xi_2}{\Delta p_1} = \frac{\xi_2}{p_1} \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k}(k - 1)} = \frac{\xi_2}{p_1} \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k} + 1)} = \frac{I}{4p_1 p_2} > 0$$

У разі зростання ціни в k разів на товар 2 ситуація буде аналогічною.

Приклад 1.18. Залишимо й перевіримо рівняння Слуцького для попереднього прикладу. Оскільки

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial I} = \frac{1}{2p_i}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} = -\frac{I}{4p_i^2}, \quad \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} = \frac{I}{4p_1 p_2} \quad (i \neq j),$$

при $i = j$ та $i \neq j$ відповідно матимемо

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2} - \frac{I}{4p_i^2} - \left(\frac{I}{2p_i} \right) \left(\frac{1}{2p_i} \right) = -\frac{I}{2p_i^2}; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = 0 = \frac{I}{4p_1 p_2} - \left(\frac{1}{2p_j} \right) \left(\frac{I}{2p_i} \right) = 0.$$

Повернімося до вивчення загального рівняння Слуцького (1.76) та його елементів, а також розглянемо застосування отриманих результатів.

Із третьої рівності (1.74) випливає, що матриця Слуцького C (матриця впливу заміни) є симетричною та від'ємно напіввизначеною:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} = \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}}, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (\alpha p^\#) \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} (\alpha p) = 0;$$

$$z \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} z^\# \leq 0 \text{ для будь-якого вектора } z = (z_i)_{i=1, \dots, n}.$$

Ураховавши симетричність матриці C , з рівняння Слуцького (1.76) отримаємо таку умову симетричності:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial I} \xi_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial I} \xi_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.79)$$

З від'ємної напіввизначеності матриці C випливає, що всі часткові значення впливу заміни є від'ємними:

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.80)$$

Це означає, що *компенсоване зростання ціни товару завжди призводить до зменшення попиту на цей товар*. Рівняння ж Слуцького вимагає, щоб виконувалася рівність

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial I} \right) \xi_i. \quad (1.81)$$

Оскільки перший вираз у правій частині (1.81) — власний вплив заміни — є від'ємним, вираз у лівій частині (1.81), що характеризує загальний ефект, теж є від'ємним тоді, коли другий вираз у правій частині досить малий та від'ємний:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \leq 0, \text{ коли } \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right) \xi_i < \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right)_{\text{comp}} < 0. \quad (1.82)$$

За якісною поведінкою похідних $\partial \xi_i / \partial p_j$, $\partial \xi_i / \partial I$ та $(\partial \xi_i / \partial p_j)_{\text{comp}}$ визначається класифікація товарів за попитом, що відіграє важливу роль в економіці.

Визначимо різні типи товарів таким чином. Товар i називається **нормальним (товаром Гіффена¹)**, якщо $\partial \xi_i / \partial p_i < 0$ ($\partial \xi_i / \partial p_i < 0$), тобто при зростанні ціни попит на нормальний товар зменшується, а на товар Гіффена збільшується. Товар i називається **цінним (малоцінним)**, якщо $\partial \xi_i / \partial I > 0$ ($\partial \xi_i / \partial I < 0$), тобто при збільшенні доходу попит на цінний товар зростає, а на малоцінний падає.

Із співвідношень (1.82) випливає, що товари Гіффена мають бути малоцінними. При збільшенні доходу попит на малоцінні товари зменшу-

ється, що потребує заміни їх ціннішими товарами. Тому при некомпенсованій зміні ціни може спостерігатися **парадокс Гіффена**, коли з підвищенням ціни на товар попит на нього зростає. Для економічно неблагополучних країн або для категорій споживачів із низькими доходами характерним є явище, коли зростання цін на малоцінні товари (картопля, хліб, маргарин тощо) може спричинити збільшення попиту на ці товари через відмову від закупівлі більш цінних товарів (масла, м'яса тощо).

Поєднавши дві наведені класифікації товарів за реакцією попиту на них, можна отримати загальну класифікацію їх, наведену в табл. 1.1.

За характером взаємозалежності попиту на пари товарів вони поділяються на пари взаємодоповнювальних і взаємозамінних товарів (супутних товарів та субститутів).

Товари i та j є **взаємозамінними (взаємодоповнювальними)**, якщо

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} > 0 \left(\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} < 0 \right). \quad (1.83)$$

тобто два товари є взаємозамінними (взаємодоповнювальними), якщо компенсоване зростання ціни на один товар зумовлює збільшення (зменшення) попиту на інший.

З урахуванням (1.74) маємо

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{comp}} = \mu \bar{U}^{-1} p p^\# \bar{U}^{-1} \Lambda + \bar{U}^{-1} \Lambda. \quad (1.84)$$

Оскільки $\mu = -(p^\# \bar{U}^{-1} p)^{-1}$, то помноживши рівність (1.84) для матриці $(\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}}$ справа на вектор цін p , отримаємо умову $(\partial \xi / \partial p)_{\text{comp}} p = 0$, або в розгорнутому вигляді

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \right)_{\text{comp}} p_i = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.85)$$

Оскільки всі ціни додатні, то для того щоб ця умова виконувалася, необхідно, щоб хоча б один елемент рядка матриці Слуцького, який характеризує вплив заміни, мав відмінний від інших знак. Однак елемент на головній

Таблиця 1.1. Класифікація товарів за реакцією попиту на них

Вплив зміни часткової ціни	Вплив зміни доходу	
	Цінні товари ($\partial \xi_i / \partial I > 0$)	Малоцінні товари ($\partial \xi_i / \partial I < 0$)
Нормальні товари ($\partial \xi_i / \partial p_i < 0$)	Нормальні цінні товари (масло, м'ясо)	Нормальні малоцінні товари (хліб, маргарин у сприяє лійній ситуації)
Товари Гіффена ($\partial \xi_i / \partial p_i > 0$)	—	Товари Гіффена малоцінні (картопля, хліб в Ірландії в середині XIX ст.)

¹Гіффен Роберт (1837 – 1910) – англійський статистик та економіст.

діагоналі матриці Слущкого є від'ємним згідно з (1.80). Тому щонайменше один елемент кожного рядка матриці Слущкого є додатним. Таким чином, можна сформулювати таку пропозицію.

Пропозиція 1.4. При виконанні основних аксіом споживання та гладкій функції корисності споживача для будь-якого товару існує товар j , $j \neq i$, такий, що $(\partial \xi_i / \partial p_j)_{\text{const}} > 0$, $i = 1, \dots, n$, тобто кожному товару відповідає хоча б один такий товар, який складає з ним взаємозамінну пару. Зокрема, щодо двох товарів вони обов'язково мають бути взаємозамінними.

1.10. ЕЛАСТИЧНІСТЬ ПОПИТУ Й УМОВИ АГРЕГАЦІЇ

На практиці використання частинних похідних функції з метою аналізу і прогнозування реакції споживача на зміну ціни та доходів є незручним з двох причин. По-перше, ці показники важко зіставляти, оскільки вони вимірюються в різних фізичних одиницях: приріст попиту на тканину — у метрах, на молоко — у літрах, на м'ясо — у кілограмах тощо. По-друге, значення цих показників змінюється разом із зміною одиниць виміру. Якщо, наприклад, при визначенні попиту в тонах його приріст в одній ситуації становить одну одиницю, то при переході до кілограмів у тій самій ситуації приріст становитиме 1000 одиниць.

Щоб позбавитися цих недоліків для характеристики чутливості зміни залежної змінної $y = f(x)$ від зміни незалежної змінної x замість похідної $dy/dx = df(x)/dx$ в економіці широко використовують коефіцієнти еластичності.

Середнім коефіцієнтом еластичності $\epsilon_{\Delta x}(x)$ функції $f(x)$ у точці x при зміні її аргументу x на значення $x + \Delta x$ називається частка від ділення відносного приросту функції $\Delta f/f(x) = (f(x + \Delta x) - f(x))/f(x)$ на відносний приріст її аргументу $\Delta x/x$:

$$\epsilon_{\Delta x}(x) = \frac{\Delta f}{f(x)} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (1.86)$$

Якщо перейти у виразі (1.86) до границі, коли $\Delta x \rightarrow 0$, то отримаємо коефіцієнт еластичності $\epsilon(x)$ функції f у точці x :

$$\epsilon(x) = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x). \quad (1.87)$$

Коли функція f є функцією багатьох змінних, тобто $f = f(x_1, \dots, x_n)$, користуються частковими коефіцієнтами еластичності

$$\epsilon_i(x) = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.88)$$

які є безрозмірними величинами і які легко зіставляти один з одним.

Оскільки при малих приростах Δx маємо $\epsilon(x) \approx \epsilon_{\Delta x}(x)$, можна дати таке економічне значення еластичності: еластичність функції $f(x)$ у

точці x є відсотковою зміною f при одинищовій зміні x . Із математичного боку, еластичність $\epsilon(x)$ є логарифмічною похідною (тобто похідною, що визначається при переході до логарифмічної шкали вимірювання значень x та $f(x)$):

$$\epsilon(x) = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{d \ln f(x)}{d \ln x}. \quad (1.89)$$

Неважко помітити, що в рівності (1.89) замість натуральних логарифмів можна використовувати логарифми з довільною основою $a > 0$, $a \neq 1$, оскільки

$$\frac{d \log_a f}{d \log_a x} = \frac{d(\ln f / \ln a)}{d(\ln x / \ln a)} = \frac{d \ln f}{d \ln x}.$$

Числення еластичностей нагадує звичайне диференціальне числення (числення похідних), але має свої особливості.

Основні правила числення еластичностей:

I. Еластичність інваріантна відносно лінійних перетворень змінних $x \rightarrow ax$, $f \rightarrow bf$, $a, b \in R$: $\epsilon(bf; ax) = \frac{ax}{bf} \frac{d(bf)}{d(ax)} = \frac{x}{f} \frac{df}{dx} = \epsilon(f; x)$.

Ця властивість характеризує незалежність еластичності від вибору масштабів вимірювання змінних.

II. Еластичності взаємно обернених функцій $y = y(x)$ та $x = x(y)$ ($x(y(x)) = x$, $y(x(y)) = y$) алгебрично оберненими одна до одної нелинійними:

$$\epsilon(y, x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{y}{x} \frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\epsilon(x; y)}.$$

Наприклад, еластичність попиту q на деякий товар за ціною p є оберненою величиною до еластичності ціни p за обсягом попиту q , тобто $\epsilon(q; p) = [\epsilon(p; q)]^{-1}$.

III. Еластичність добутку двох функцій $u(x)$ і $v(x)$ того самого аргументу x є сумою еластичностей цих функцій:

$$\epsilon(uv; x) = \epsilon(u; x) + \epsilon(v; x).$$

Дійсно,

$$\epsilon(uv; x) = \frac{x}{uv} \left(v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) = \frac{x}{u} \frac{du}{dx} + \frac{x}{v} \frac{dv}{dx} = \epsilon(u; x) + \epsilon(v; x).$$

IV. Еластичність відношення двох функцій $u(x)$ і $v(x)$ дорівнює різниці еластичностей цих функцій:

$$\epsilon(u/v; x) = \epsilon(u; x) - \epsilon(v; x)$$

Дійсно,

$$\epsilon(u/v; x) = \frac{xv}{u} \left(\frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \right) = \frac{x}{u} \frac{du}{dx} - \frac{x}{v} \frac{dv}{dx} = \epsilon(u; x) - \epsilon(v; x).$$

V. Еластичність суми двох функцій $u(x)$ і $v(x)$ має вигляд

$$\varepsilon(u+v; x) = \frac{u\varepsilon(u; x) + v\varepsilon(v; x)}{u+v}.$$

VI. Еластичність при зміні нулів шкал вимірювання змінних y та x , $y \rightarrow y+c$, $x \rightarrow x+g$, $c, g \in R$, $y = y(x)$ обчислюється за формулою

$$\varepsilon(y+c; x+g) = \frac{x+g}{y+c} \frac{dy}{dx}.$$

Правила V і VI читачеві пропонується перевірити самостійно, як і таблицю еластичностей основних елементарних функцій, що подається нижче.

1. $\varepsilon(c; x) = 0$, $c = \text{const}$,
2. $\varepsilon(x^a; x) = a$.
3. $\varepsilon(a^x; x) = x \ln a$, ($a > 0$, $a \neq 1$), зокрема $\varepsilon(e^x; x) = x$.
4. $\varepsilon(\log_a x; x) = (\ln x)^{-1}$, ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. $\varepsilon(ax+b; x) = \frac{ax}{ax+b}$, $a, b \in R$.

Подібно до похідної еластичність має просту геометричну інтерпретацію. Розглянемо це щодо деяких пайтиновіших в економічних застосуваннях кривих.

I. Нехай $y = y(x)$ є спадною опуклою функцією (рис. 1.11). Знайдемо еластичність y у довільній точці $C = (x, y)$ її графіка.

Якщо AB — дотична до $y = y(x)$ у точці C , то з трикутника ACX знаходимо $Ax = \frac{CY}{\tan \alpha}$, де α — кут OAB . Похідна

$$y'(x) = \tan(\pi - \alpha) \text{ і тому } \tan \alpha = -y'(x)$$

$$\text{Отже, } Ax = \frac{y(x)}{-y'(x)} = -\frac{y(x)}{y'(x)}.$$

З подібності трикутників CBY та CAX випливає, що

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CY}{AX} = \frac{OY}{AX} = -\frac{xy'(x)}{y(x)} = -\varepsilon(y; x).$$

Таким чином, $\varepsilon(y; x) = -\frac{CB}{CA}$, тобто еластичність спадної опуклої функції $y = y(x)$ у точці x дорівнює відношенню відстаней на дотичній до графіка функції y від точки $C = (x, y(x))$ до її перетинів з осями OY та OX , узятим з знаком «мінус».

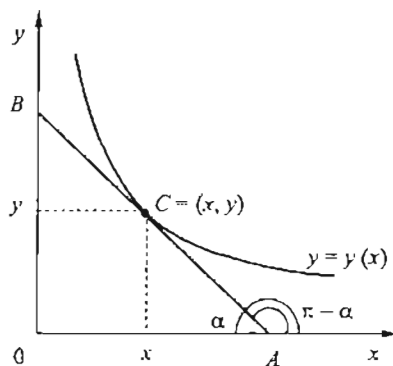


Рис. 1.11

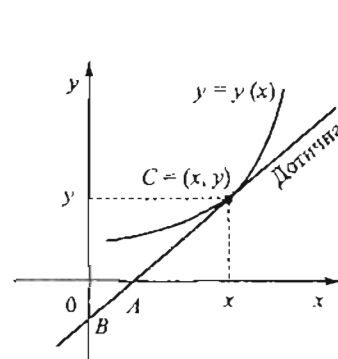


Рис. 1.12

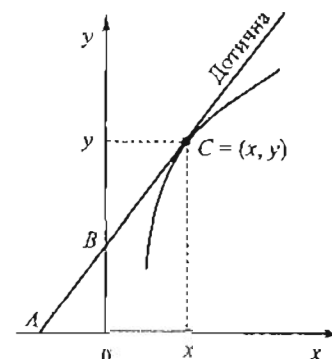


Рис. 1.13

II. Нехай $y = y(x)$ є зростаючою опуклою функцією (рис. 1.12) або зростаючою угнутою функцією (рис. 1.13). Тоді абсолютне значення еластичності $|\varepsilon(y; x)| = \frac{CB}{CA}$ і знак еластичності залежать від напрямку відрізків CB і CA .

Якщо точки A та B лежать по один бік від точки C на дотичній, то $\varepsilon(y; x) = \frac{CB}{CA}$ (тобто береться знак «плюс»).

Якщо ж точки A і B лежать по різні боки від точки C на дотичній (як на рис. 1.11), то $\varepsilon(y; x) = -\frac{CB}{CA}$ (тобто береться знак «мінус»). Зауважимо, що еластичність функції y на рис. 1.12 більша від 1 (тому що $CB > CA$), а на рис. 1.13 — менша від 1 ($CB < CA$).

Знайдемо загальний вигляд функції $y = y(x)$ із сталою еластичністю $\varepsilon_0 = \text{const}$ в усіх точках x . Така функція є розв'язком диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \varepsilon_0, \text{ або } \frac{dy}{y} = \varepsilon_0 \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$\ln y = \varepsilon_0 \ln x + \ln c, \quad (1.90)$$

де c — довільна додатна стала інтегрування.

З рівності (1.90) потенціюванням визначаємо

$$y(x) = \exp(\varepsilon_0 \ln x + \ln c) = Cx^{\varepsilon_0}. \quad (1.91)$$

В індивідуальній теорії споживання, де описується поведінка споживача, який максимізує свою корисність $U(x_1, \dots, x_n)$ при бюджетному

обмеженні $\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq I$, головними характеристиками є маршалліанські функції попиту $\xi_j = \xi_j(p_1, \dots, p_n, I)$, $j = 1, \dots, n$.

Чутливість реакції споживача на зміну ціни p_i й доходу I виражають еластичності попиту до ціни та доходу:

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi_j; p_i) &= \frac{p_i}{\xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \epsilon(\xi_j; I) &= \frac{I}{\xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial I}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Наприклад, коли переваги споживача характеризуються функцією корисності Бернуллі $U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$, $a_1, a_2 > 0$, то згідно з формулами (1.39) і (1.40) функції попиту

$$\xi_1(p, I) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_1}; \quad \xi_2(p, I) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{I}{p_2}.$$

Отже, еластичності попиту такого споживача за цінами мають вигляд

$$\epsilon(\xi_1; p_1) = -1; \quad \epsilon(\xi_1; p_2) = 0; \quad \epsilon(\xi_2; p_1) = 0; \quad \epsilon(\xi_2; p_2) = -1,$$

а еластичності попиту за доходом —

$$\epsilon(\xi_1; I) = 1; \quad \epsilon(\xi_2; I) = 1.$$

Важливу роль у мікроекономіці відіграють еластичності за цінами **ринкового попиту** на різні товари. Припустимо, що на ринку присутні r споживачів, поведінка кожного з яких описується відповідними функціями попиту $\xi_j^i(p_1, \dots, p_n, I_i)$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, n$, де i — номер споживача; j — індекс товару; I_i — дохід i -го споживача. Тоді **ринковий** (або **агрегований**) попит $\Xi_j = \sum_{i=1}^r \xi_j^i$ на товар j є сумою індивідуальних попитів споживачів на цей товар:

$$\Xi_j(p_1, \dots, p_n, I_1, \dots, I_r) = \sum_{i=1}^r \xi_j^i(p_1, \dots, p_n, I_i), \quad j = 1, \dots, n.$$

Розглянемо ринок деякого фіксованого товару, що має ринкову ціну p і відповідну афінну функцію ринкового попиту $q = a - bp$, де q — кількість товару в попиті; a та b — параметри цієї функції попиту (які залежать від інших змінних агрегованого попиту). Тоді еластичність попиту за ціною

$$\epsilon(q; p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} = \frac{-bp}{a - bp},$$

обернена функція попиту $p = p(q) = \frac{a - q}{b}$ теж афінна і

$$\epsilon(p; q) = [\epsilon(q; p)]^{-1} = \frac{bp - a}{bp}.$$

Зміну значень еластичності афінної функції попиту $q = a - bp$ ілюструє рис. 1.14. Еластичність є нескінченною на вертикальній координатній осі ($q = 0$; за традицією, введеною А. Маршаллом, вертикальна вісь є віссю змінної p , а горизонтальна — віссю змінної q), оскільки відповідає значенню $p = a/b$ і потім поступово спадає за абсолютним значенням уздовж лінії попиту до нуля на горизонтальній осі ($p = 0$, $q = a$). У точці $p = \frac{a}{2b}$, $q = \frac{a}{2}$ маємо $\epsilon(q; p) = -1$.

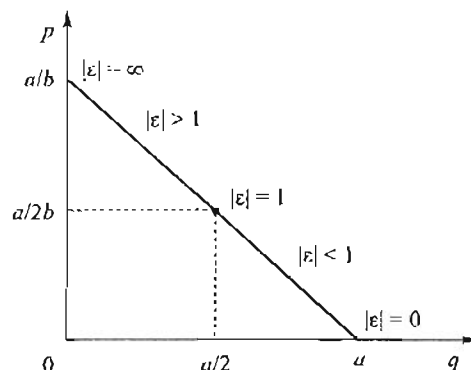


Рис. 1.14

Загалом у мікроекономіці прийнято класифікувати попит q на товар щодо зміни ціни p на нього. Класифікацію, що ґрунтується на значеннях відповідної еластичності $\epsilon(q; p)$, наведено в табл. 1.2.

Як приклад розглянемо дохід $R(p)$ усіх продавців на ринку за ринковою ціною p , де $R(p) = pq(p)$, а $q(p)$ — функція ринкового попиту. Припускаючи, що дохід збільшується при зростанні ціни p , знаходимо $\frac{dR}{dp} = p \frac{dq}{dp} + q > 0$, звідки $\epsilon(q; p) = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} > -1$. Враховуючи, що $\frac{da}{dp} < 0$, маємо $|\epsilon(q; p)| < 1$. Таким чином, щоб дохід збільшувався при зростанні ціни, потрібно знаходитися на нееластичній частині кривої попиту.

З економічного тлумачення еластичності $\epsilon(y; x)$ як відсоткової зміни залежної економічної змінної y при одинищевій зміні x випливає, що:

1) додатна еластичність попиту за доходом $\epsilon(\xi, I)$ характеризує цінні (або якісні) товари, а від'ємна еластичність $\epsilon(\xi; I)$ — малопічні (неякісні) товари;

2) додатні перехресні еластичності попиту на одні товари за ціною на інші товари (крос-еластичності) $\epsilon(\xi_i; p_j)$ ($i \neq j$) будуть тоді, коли товари i та j деякою мірою заміняють один одного, а нерівність $\epsilon(\xi_i; p_j) < 0$ ($i \neq j$) свідчить про те, що товари i та j є деякою мірою комплементарними.

Еластичність попиту визначають такі чинники:

1) замінюваність блага у споживанні;

Таблиця 1.2. Класифікація попиту на товар

Тип попиту	Цілков еластичний	Еластичний	З одиничною еластичністю	Нееластичний	Цілков нееластичний
Значення еластичності $\epsilon(q; p)$	$ \epsilon(q; p) = \infty$	$1 < \epsilon(q; p) < \infty$	$ \epsilon(q; p) = 1$	$0 < \epsilon(q; p) < 1$	$ \epsilon(q; p) = 0$

- 2) частку витратів на певне благо в доході споживача;
- 3) суб'єктивну необхідність певного блага;
- 4) фактор часу.

[Цієї вищезаданих факторів така:

1) що вища замінюваність (субституційальність) блага, то більша еластичність попиту на нього за ціною;

2) що більша частка блага в доході, то більша еластичність попиту на нього за ціною;

3) що нижча суб'єктивна необхідність блага, то більша еластичність попиту на нього за ціною;

4) еластичність попиту за ціною, як правило, тим вища, чим більший проміжок часу.

У разі дискретних товарів або в разі приблизного визначення еластичності на основі дискретних спостережень y_i та x_i змішаних y і x використовують такі дискретні еластичності:

1) кіншеву (або відсоткову)

$$\bar{\epsilon}(y; x) = [(y_2 - y_1) / y_1] / [(x_2 - x_1) / x_1];$$

2) середню (дугову)

$$\bar{\epsilon}(y; x) = \left[(y_2 - y_1) / \frac{y_1 + y_2}{2} \right] / \left[(x_2 - x_1) / \frac{x_1 + x_2}{2} \right];$$

3) логарифмічну

$$\bar{\epsilon}(x; y) = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \ln(y_2 / y_1) / \ln(x_2 / x_1).$$

Установимо основні співвідношення між еластичностями (1.92) та співвідношення між пов'язаними з ними частинними похідними (умови агрегації). Передусім встановимо рівності

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} + \left(\frac{1}{\xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial p} \right) I = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.93)$$

Для цього на підставі рівняння Слуцького (1.75) та співвідношення (1.84), помноживши (1.75) на вектор p , можна записати векторну рівність

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right) p + \left(\frac{\partial \xi}{\partial I} \right)^{\#} I = 0, \quad (1.94)$$

яка в розгорнутій формі має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} p_i + \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial I} \right) I = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.95)$$

Зауважимо також, що ці залежності можна вивести з однорідності нульового степеня функції попиту, використовуючи теорему Ейлера про

однорідні функції. Співвідношення (1.93) можна встановити діленням кожної із залежностей (1.95) на ξ_j .

Таким чином, установлено, що для кожного товару *сума всіх еластичностей має бути нульовою, тобто сума всіх еластичностей за цінами дорівнює від'ємній еластичності за доходом*

Встановимо умови агрегації. З цією метою розглянемо перший та третій вирази похідних $\partial \xi / \partial I$ і $(\partial \xi / \partial p)_{\text{скуп}}$ в (1.74) і помножимо їх зліва на вектор $p^{\#}$, враховуючи, що $\mu = -\left(p^{\#} U^{-1} p\right)^{-1}$. Тоді матимемо співвідношення

$$p^{\#} \left(\frac{\partial \xi}{\partial I} \right) = 1; \quad p^{\#} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_{\text{скуп}} = 0. \quad (1.96)$$

Перше з них називається умовою **агрегації Енгеля**¹. Співвідношення (1.96) можна записати в розгорнутому вигляді так:

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \xi_i}{\partial I} = 1; \quad \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} \right)_{\text{скуп}} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.97)$$

Пропозиція 1.5. *Усі товари з кошика споживача одночасно не можуть бути малоцінними.*

✓ Ця пропозиція випливає з першої умови агрегації у (1.96), за якою зважена з додатними коефіцієнтами p_i сума похідних $\partial \xi_i / \partial I$ є додатною. Отже, одночасно ці похідні не можуть бути від'ємними, існує деяке i з $i = 1, \dots, n$, таке що $\partial \xi_i / \partial I > 0$. Δ

Об'єднуючи співвідношення (1.96) з рівнянням Слуцького (1.75) множенням останнього на вектор $p^{\#}$ зліва, встановлюємо умову **агрегації Курно**²

$$p^{\#} \frac{\partial \xi}{\partial p} + \xi = 0, \quad (1.98)$$

яку в координатній формі можна подати у вигляді

$$\xi_i = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.99)$$

Таким чином, доведено таку пропозицію.

Пропозиція 1.6. *Значення попиту на товар і дорівнює від'ємно заваженій сумі змін значень попиту щодо ціни товару і, в якій як ваги фігурують ціни товарів.*

¹Енгель Ернст (1821 – 1896) – німецький статистик та економіст, відомий дослідженням сімейного бюджету. З'ясував роль продуктів їжі як предметів першої потреби в економічному сенсі, тобто як товарів з додатною, але меншою від 1 еластичністю за доходом.

²Курно Антуан Огюстен (1801 – 1877) – французький математик і філософ, член Паризької АН, один із перших дослідників економічних явищ математичними методами.

1.11. ПІДХІД ВИЯВЛЕНОЇ ПЕРЕВАГИ В ТЕОРІЇ СПОЖИВАННЯ

Неокласичний виклад теорії споживання досі залишається найпоширенішим і докладно розробленим. Однак існують й інші підходи до математичного моделювання споживання. Одним із них є підхід виявленої переваги. Він ґрунтується на спостереженнях ринкового вибору, зокрема на спостереженнях сум цін, і висвітлений у [45, 53].

Основним поняттям підходу виявленої переваги є відношення **явної переваги** між парами споживчих наборів. Якщо споживач купує набір товарів $x^1 = (x_i^1)_{i=1,n}$ за цінами $p^1 = (p_i^1)_{i=1,n}$ тоді, коли він може купити за таких цін інший набір товарів $x^2 = (x_i^2)_{i=1,n}$, то вважається, що x^1 явно переважає x^2 , і цей факт записується як бінарне відношення $x^1 \otimes x^2$ на просторі товарів R_+^n . Таким чином, $x^1 \otimes x^2 \Leftrightarrow x^1 p^1 \geq x^2 p^1$, де остання умова вказує на те, що витрати на перший набір, який був справді куплений за певних цін, не менші, ніж витрати, потрібні на купівлю іншого набору за тими самими цінами.

Геометрично це відношення означає, що коли набір x^2 належить внутрішності бюджетного симплекса споживача $S_n = \{x \in R_+^n : xp^1 \leq I\}$, обмеженого граничною бюджетною гіперплощиною $x p^1 = I = x^1 p^1$, на якій споживач вибирає набір x^1 , $x^1 \otimes x^2$, то $x^1 \succ x^2$.

Слабка аксіома виявленої переваги стверджує, що коли набір x^1 переважає набір x^2 , останній не може бути явно переважним перед x^1 , тобто відношення явної переваги є асиметричним: $x^1 \otimes x^2$ не означає, що $x^2 \otimes x^1$ (тобто відношення $x^2 \otimes x^1$ — хибне).

Якщо використати означення відношення явної переваги, то слабку аксіому виявленої переваги можна сформулювати так: з $x^1 p^1 \geq x^2 p^1$ випливає $x^2 p^2 < x^1 p^2$. Отже, слабка аксіома виявленої переваги означає, що коли за цін p^1 споживач мав можливість купити набір x^2 , але вибрав набір x^1 , то у випадку, коли за цін p^2 вибрано набір x^2 , набір x^1 не може бути куплений споживачем.

Виявляється, що майже всі результати теорії попиту, встановлені досі, можна отримати із слабкої аксіоми виявленої переваги. Для прикладу розглянемо від'ємність власного ефекту заміщення (1.39). Якщо два набори товарів x^1 та x^2 належать до однієї множини байдужості, то жодний із них явно не переважає іншого: $x^1 p^1 < x^2 p^1$, $x^2 p^1 < x^1 p^2$. Покладемо $p^2 = p^1 + \Delta p$, $x^2 = x^1 + \Delta x$. Тоді з нерівностей (1.39) випливає, що $\Delta x p^1 > 0$, $\Delta x (p^1 + \Delta p) < 0$ і тому $\Delta x \Delta p < 0$. Остання нерівність означає від'ємність усіх власних ефектів заміщення.

Однак слід зауважити, що із слабкої аксіоми виявленої переваги не випливає важлива умова інтегрованості, яка означає, що матриця Слущ-

кого (матриця ефектів заміщення) є симетричною. Подібну умову, необхідну для побудови функції корисності, дає **сильна аксіома виявленої переваги**.

За цією аксіомою, якщо набір товарів x^1 явно переважає набір x^2 , останній переважає набір x^3 , ..., набір x^{n-1} явно переважає набір x^n , то останній не може бути явно переважним, ніж x^1 , тобто для всіх $n \geq 2$ з $x^1 \otimes x^2$, $x^2 \otimes x^3$, ..., $x^{n-1} \otimes x^n$ не випливає $x^n \otimes x^1$.

Сильна аксіома виявленої переваги включає слабку аксіому (як окремий випадок для $n = 2$). За певних додаткових умов регулярності ці дві аксіоми є еквівалентними. Сильна аксіома за деяких умов неперервності характеризує таку послідовну множину переваг, що задовольняються умови інтегрованості, необхідні для побудови функції корисності.

Задачі та вправи

1.1. Нехай бінарне відношення \leq на множині X — транзитивне і повне, а відношення $<$ та \sim визначено так: $(x < y) \Leftrightarrow$ коли співвідношення $y \leq x$ не виконується, $x \sim y \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (y \leq x)$. Довести, що відношення $<$ є слабким упорядкуванням на X (тобто $<$ є асиметричним, $\forall x, y \in X (x < y) \wedge (y < x) \Rightarrow (x = y)$), і від'ємно транзитивним ($\forall x, y, z \in X : \neg (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$). Довести, що відношення \sim є еквівалентністю.

1.2. Якщо $<$ — бінарне відношення на множині X , то його транзитивним замиканням називається відношення $<^t$, для якого $x <^t y \Leftrightarrow x < y$, або ж знайдуться такі $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$, що $x < x_1, x_1 < x_2, \dots, x_{m-1} < x_m, x_m < y$. Показати, що коли відношення $<$ є асиметричним, то воно є строгим частковим упорядкуванням (тобто транзитивним і нерелаксивним).

1.3. Розбиттям множини X називається сім'я таких непорожніх підмножин X , коли довільний елемент $x \in X$ належить одному елементу розбиття. Довести, що будь-яке розбиття множини X є множиною X/\sim класів еквівалентності, породженою деяким відношенням еквівалентності — на X .

1.4. Нехай відношення $<$ є слабким упорядкуванням на X , тобто $<$ — асиметричне та від'ємно транзитивне відношення. Переконатися в тому, що: а) $\forall x, y \in X$ виконується одне з трьох відношень: $x < y$, $y < x$, $x \sim y$, де $(x \sim y) \Leftrightarrow \neg (x < y) \wedge \neg (y < x)$; б) відношення $<$ — транзитивне, в) відношення \sim є еквівалентністю (тобто воно рефлексивне, симетричне та транзитивне), г) $(x < y) \wedge (y \sim x) \Rightarrow (x < y)$, $(y \sim x) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$; д) відношення $(x \geq y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x \sim y)$ є транзитивним і повним; е) якщо відношення $<$ на X/\sim (множина класів еквівалентності на X відносно \sim) визначається як $(a <^t b) \Leftrightarrow (\exists x \in a, y \in b) : (x < y)$, то $<^t$ на X/\sim є строгим упорядкуванням.

1.5. Нехай відношення $<$ на X є слабким упорядкуванням, а множини X/\sim — зліченна або скінченна. Показати, що існує числова функція корисності $u : X \rightarrow R$, для якої $(x < y) \Leftrightarrow (u(x) < u(y)) \forall x, y \in X$.

Вказівка. Занумерувати елементи X/\sim у вигляді послідовності a_1, a_2, \dots і покласти: 1) $u(a_1) = 0$; 2) $u(a_m) = m$, коли $a_i <^t a_m$ для всіх $i < m$; 3) $u(a_m) = -m$, коли $a_m <^t a_i$ для всіх $i < m$; 4) якщо $a_i <^t a_m <^t a_j$ для деяких $i, j < m$ і ні для жодного $h < m$, $h \neq i$, не виконується $a_i <^t a_h <^t a_j$, то $u(a_m) = r_k$, де r_k — перше число з перелічення r_1, r_2, \dots множини раціональних чисел Q , для якого $u(a_i) < r_k < u(a_j)$. Далі визначити $u : X \rightarrow R$, поклавши $u(x) = u(a)$, коли $x \in a$.

1.6. Функція U називається адитивною, якщо $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U_1(x_1) + U_2(x_2) + \dots + U_n(x_n)$.

1. Показати, що стосовно двох товарів з граничною нормою заміщення $R(x_1, x_2) = -(\partial U / \partial x_1)(\partial U / \partial x_2)^{-1}$ функція корисності адитивна тоді і тільки тоді, коли $R(\partial^2 R / \partial x_1 \partial x_2) = (\partial R / \partial x_1)(\partial R / \partial x_2)$.

2. Показати, що коли функція корисності адитивна, то попит на кожний товар залежить тільки від ціни на нього, ціни на будь-який інший товар та загальних витрат на ці два товари.

3. Показати, що коли U — адитивна функція, то в економіці не буде малоцінних і взаємодоповняльних товарів.

4. Показати, що адитивна функція корисності допускає тільки монотонне, строго зростаюче лінійне перетворення корисності.

1.7. Функції попиту Торнквіста визначаються рівностями $x_1 = \alpha I / (1 - \beta)$, $x_2 = \alpha(1 - \gamma) / (1 + \beta)$, $x_3 = \alpha I (1 - \gamma) / (1 + \beta)$ для товарів першої необхідності, товарів відносної розкоші, товарів розкоші відповідно, де параметри α , β , γ залежать від ціни.

1. Знайти еластичності цих функцій за доходом.

2. Нехай для двох товарів попит на перший є функцією для товарів першої необхідності при $\alpha = a$, $\beta = bp_1$ та $p_2 = 1$ (другий товар є одиницею вимірювання). Перевірити, що відповідна функція корисності має вигляд $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^b$.

1.8. Показати, що коли в межах певної групи товарів ціни змінюються пропорційно, то таку групу товарів можна розглядати як один товар, який називається складним (досить розглянути три товари, причому ціни на два з них завжди змінюються в одній пропорції).

1.9. Довести, що еластичності за відносними цінами та доходом дорівнюють відповідним еластичностям за грошовими цінами і доходом.

1.10. Перевірити, що товар є товаром Гіффена, якщо він малоцінний, а частка доходу, витраченого на цей товар, перевищує відношення еластичності від'ємної компенсаційної ціни до еластичності за доходом цього товару.

1.11. Зіставити критерій (1.83) взаємозамінності та взаємодоповняльності товарів за знаком впливу компенсаційної ціни. Зіставивши цей критерій з критерієм корисності, за яким товари i та j є взаємозамінними (взаємодоповняльними), коли $\partial^2 U / \partial x_i \partial x_j < 0$ ($\partial^2 U / \partial x_i \partial x_j > 0$), та критерієм впливу некомпенсованої ціни, за яким товари i та j є взаємозамінними (взаємодоповняльними), коли $\partial \xi_i / \partial p_j > 0$ ($\partial \xi_i / \partial p_j < 0$).

Які погляди виражають ці критерії? Коли вони дають протилежні результати? Чи є вони інваріантними щодо монотонно строго зростаючого перетворення корисності?

1.12. Показати, що коли гранична корисність доходу λ_* виражається як функція параметрів, тобто $\lambda_* = \lambda_*(p, I)$, то вона є однорідною степеня -1 .

1.13. Товар j називається валовим замінником товару i , якщо $\partial \xi_j / \partial p_i > 0$. Говорять, що функція попиту $\xi(p, I)$ має властивість валової замінюваності, коли зі зростанням ціни на будь-який товар попит на всі інші товари не спадає, тобто $\partial \xi_j / \partial p_i \geq 0$, $i \neq j$. У такому разі, коли $\partial \xi_j / \partial p_i = 0$, $j \neq i$, говорять про сильну валову замінюваність.

Показати, що функція попиту $\xi(p, I)$, яка визначається як розв'язок задачі (1.25) із функцією корисності $U(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i^{\gamma_i}$, де $v_i > 0$, $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$ має властивості сильної валової замінюваності.

1.14. Оптимальний рівень корисності непрямо залежить від ціни p та доходу I , оскільки $(U_* = U(x_*) = U_*(p, I))$, де $x_* = x_*(p, I)$ — функція попиту. Функція $U_* = U_*(p, I)$ називається непрямою функцією корисності.

1. Перевірити, чи є U_* спадною функцією всіх цін і зростаючою функцією доходу.

2. Показати, що $x_{*j} = -\frac{\partial U_* / \partial p_j}{\partial U_* / \partial I}$, $j = 1, \dots, n$.

3. Принцип виділення податків типу рівності «жертв» вимагає, щоб $U_*(p, I) = U_*(p, I - T(I))$ = const для всіх I , де $T(I)$ — частина доходу, що береться як податок на дохід I . Показати, що згідно з цим принципом розміри податку зростають із підвищенням доходу. Знайти залежність податків від доходу для функцій корисності, заданих у прикладах 1.6–1.8.

1.15. Можна розглядати проблему вибору між заробітком і вільним часом (дозвіллям) з погляду теорії споживання. Тоді відповідна проблема стає такою задачею: $U(x, I) \rightarrow \max$, $xp = I + wh$, $I + h = q$, де x — набір товарів, I — дозвілля (приклад, у годинах), причому $\partial U / \partial I > 0$, h — робочий час, w — рівень заробітної плати, I — нетрудовий дохід, q — загальний наявний час. Параметри задачі: p , h , w та q , корисність U максимізується за аргументами x та I .

1. Знайти функції попиту для товарів x та дозвілля I . Чи може дозвілля бути малоцінним типом товарів Гіффена?

2. Вивести показники порівняльної статистики для x_* та I_* .

1.16. Щоб урахувати в теорії споживання грошовий капітал, потрібно припустити, що функція корисності залежить не тільки від набору товарів, а й від цінності грошового капіталу та всіх цін, оскільки характер попиту на гроші залежить від них. Виходячи з того, що $U = U(x, p_0 K, p)$, де x — набір товарів, K — грошовий капітал, p_0 — ціна грошей, p — вектор цін на товари, вважати, що функція корисності U є однорідною нульового степеня відносно всіх $n + 1$ цін.

Бюджетне обмеження споживача має вигляд $xp = I + r(W - p_0 K)$, де r — норма відсотка на негрошові активи, а W — багатство.

1. Знайти умови оптимального споживання x та K при заданих функції корисності та обмеженні.

2. Знайти функції попиту для товарів і грошей та визначити показники порівняльної статистики.

1.17. В економіці з H споживачами загальний ринковий попит на товари формується як узагальнення індивідуальних функцій попиту. Якщо попит на товар i споживача h , який має дохід I^h , описується функцією $x_i^h = x_i^h(p, I^h)$,

$h = 1, 2, \dots, H$, то ринковий попит на товар i має вигляд $X_i = \sum_{h=1}^H x_i^h(p, I^h) = X_i(p, I)$, де I — сукупний дохід, $I = \sum_{h=1}^H I^h$.

1. Показати, що загальні витрати дорівнюють сукупному доходу $\sum_{i=1}^n p_i X_i = I$.

2. Показати, що функції ринкового попиту є однорідними нульового степеня $X_j(\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \alpha I) = X_j(p_1, \dots, p_n, I)$, $\alpha > 0$, $j = 1, \dots, n$.

3. Обернені функції попиту виражають ринкові продажні ціни як функції ринкового попиту та доходу $p_* = p_*(X, I)$, тобто $p_{*i} = p_{*i}(X_1, \dots, X_n, I)$, $i = 1, 2, \dots, n$, де $X_j(p_*(X, I), I) = X_j$, $j = 1, \dots, n$, $I = X p_*$. Показати, що обернені функції попиту є однорідними першого степеня відносно доходу, і визначити похідні $\partial p_{*i} / \partial X_j$ та $\partial p_{*i} / \partial I$.

1.18. Використовуючи аксіому виявленої переваги, довести

а) існування функції попиту (тобто що будь-який набір цін і доходу призводить до вибору певного набору товарів);

б) однорідність функцій попиту нульового степеня.

2

ТЕОРІЯ РОЗДІЛ 2 ВИРОБНИЦТВА

Теорія виробництва разом із теорією споживання є фундаментом мікроекономіки. В центрі теорії виробництва знаходиться підприємство або фірма як деяка організація, що здійснює витрати економічних факторів (таких як земля, праця, капітал, природні ресурси тощо) для виготовлення продукції, яку вона продась споживачам або іншим підприємствам (фірмам), а також надання послуг. Завдання раціонального ведення господарства, яке має вирішувати підприємство в умовах ринкової або змішаної економіки, полягає у визначенні кількості продукції та в розрахунках необхідних для її випуску витрат виробничих факторів з урахуванням технологічних зв'язків між ними та цін для максимізації власних прибутків та/або випуску продукції при заданому рівні виробничих витратків, а також мінімізації витратків при заданому рівні випуску продукції.

2.1. ПРОСТІР ВИТРАТ І ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

Для спрощення розгляду вважатимемо, що підприємство (фірма) випускає тільки один вид продукції, використовуючи m виробничих факторів або виробничих витрат. Таке підприємство називається **однопродуктовим**. Багатопродуктове підприємство, яке виробляє кілька видів продукції, розглянемо наприкінці цього розділу з використанням результатів математичного моделювання діяльності однопродуктового підприємства.

Загальні виробничі витрати підприємства за певний період часу можна схарактеризувати за допомогою m -вимірної вектора витрат $x = (x_i)_{i=1,m}$, де x_i відображає кількість витрат i -го виробничого фактора. В припущенні, що всі витрати можуть неперервно змінюватися, простір витрат X , який складається з усіх можливих векторів витрат, можна вважати невід'ємним ортантом R_+^m m -вимірною простору $X = R_+^m = \{x = (x_i)_{i=1,m} \in R^m : x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$.

Переходячи в разі потреби, що пов'язано з цілями моделювання, до цінкових індексів кількості факторів виробництва, їх можна робити сумірними та агрегувати у потрібні для заданої моделі групи. Так, досить часто факторами виробництва (або виробничими ресурсами) вважають такі агреговані фактори:

- 1) виробничий капітал K , що є втіленням нагромадженої праці у формі основних виробничих фондів (засобів праці, обладнання, виробничої інфраструктури тощо);
- 2) сучасну (або живу) працю L ;
- 3) матеріали M , що є предметами праці і належать до оборотних фондів.

Залежно від цілей моделювання праця L та інші фактори можуть виражатися в натуральних одиницях. У гранично агрегованих моделях використовують двовимірний простір виробничих факторів (або витрат), що складається з праці L та виробничого капіталу K , який включає всі виробничі фонди (основні й оборотні).

При формуванні виробничої програми підприємство повинне вибрати точку в просторі витрат, що є певною комбінацією витрат усіх виробничих факторів, які воно використовуватиме. За виробничою технологією підприємства кожній точці x простору витрат X відповідає єдиний максимальний випуск продукції q при використанні цих витрат. Технологічний зв'язок між випуском продукції q , що виражається в деяких одиницях, та виробничими витратами x характеризується виробничою функцією F , яка зіставляє з кожним вектором витрат x кількість випуску продукції $q = F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$. За означенням F відображає X в R_+ , оскільки $q \geq 0$.

При використанні виробничих функцій вважається, що вони мають задовольняти певні умови (аксіоми), які відображають основні економічні закономірності виробництва.

Основні припущення про виробничі функції мікроекономічної одиниці (підприємства або фірми), що використовуються у відповідних моделях виробництва в тих чи тих сполученнях, подаються далі у вигляді аксіом A1 – A3.

Аксіома A1 відсутності «рогу достатку» стверджує, що для нульового вектора витрат $0 \in R_+^m$ відповідний випуск $F(0)$ продукції є нульовим (неможливо виробити щось із нічого), $F(0) = 0$.

Іноді ця аксіома використовується у підсиленому варіанті A'1, коли вважається, що простір витрат не є надмірним і туди входять тільки необхідні в комплексі для випуску певної продукції види витрат. Тоді для векторів витрат x , які належать до межі $\partial R_+^m = \partial X$ простору витрат X , $\partial X = \{x \in R_+^m : \text{існує хоча б одна координата } x_i, \text{ така, що } x_i = 0\}$, виконується рівність $F(x) = 0$, $x \in \partial X$. Ця аксіома означає, що, не витрачаючи необхідних у комплексі для випуску продукції виробничих факторів $i = 1, \dots, m$, неможливо забезпечити додатний її випуск.

Аксіома A2 монотонності стверджує, що існує підмножина E простору витрат X , яка називається економічною областю, де збільшення будь-якого виду витрат не призводить до зменшення випуску продукції, тобто з $x^1, x^2 \in E$, $x^1 \geq x^2$ випливає $F(x^1) \geq F(x^2)$.

Аксіома A3 угнутості стверджує, що існує особлива область D , яка є опуклою підмножиною економічної області E , $D \subset E$, $\text{conv } D = D$, де

звуження виробничої функції $F(x)$, $x \in D$ є угнutoю (опуклою вгору) функцією. Ця аксіома відображає економічний **закон спадної віддачі (спадної дохідності)**: коли витрати виробничого фактора одного виду поступово додаються до встановлених обсягів інших витрат факторів, то в кінцевому результаті досягається особлива область, де приріст продуктивності спадає¹. Крім того, угнутість функції F відіграє в математичному дослідженні виробництва велику технічну роль, даючи змогу застосовувати до теорії виробництва добре розвинений апарат сучасного опуклого аналізу.

Для пояснення змісту закону спадної віддачі наведемо класичні приклади, пов'язані з виробництвом зерна на фіксованій ділянці землі. Після досягнення певної точки ε тут додатковий випуск продукції завдяки збільшенню витрат праці новими працівниками спадатиме через вичерпання можливостей спеціалізації та труднощі координації зусиль. Або ж додаткове внесення в ґрунт нових порцій добрив при незмінних інших факторах виробництва спочатку сприяє деяким приростам врожаю, але ці прирости поступово зменшуватимуться і при досягненні певної точки насичення припиняться. Подальше внесення добрив призводить до шкідливого впливу на врожайність, тобто виводить її за межі економічної області.

При моделюванні виробництва в межах неокласичного підходу вважається, що виробнича функція F є двічі диференційовною за сукупністю аргументів. Це дає змогу використати маржиналістський аналіз із застосуванням апарату класичного математичного аналізу. Тоді

$$\frac{dF(x)}{dx} = \left\{ \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right\}_{i=1, m} = MP(x) \quad (2.1)$$

інтерпретується як **граничний продукт** $MP(x)$ ², а частинні похідні

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = MP_i(x), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

називаються **граничними продуктами факторів (частинними граничними продуктами)**. На мові граничних продуктів (2.1), (2.2) аксіома монотонності $A2$ означає, що в економічній області $\varepsilon \subset X$

$$MP(x) = \{MP_i(x)\}_{i=1, m} \geq 0, \quad (2.3)$$

а отже, $\varepsilon = \{x \in X : MP(x) \geq 0\}$.

Далі аксіома угнутості $A3$ підсилюється до вимоги $A'3$ від'ємної визначеності матриці Гессе виробничої функції

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \tilde{F}(x) = \left\{ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1, m} < 0 \quad (2.4)$$

¹Закон спадної віддачі був сформульований німецьким економістом і землевласником Йоганом Хайнрихом Тюненом (1783 – 1850), який займався теорією продуктивності

²Позначення граничного продукту $MP(x)$ пов'язане з його англійською назвою *marginal product*.

для всіх x з особливої області D . Це забезпечує строгу угнутість виробничої функції F у D та опуклість в D **виробничих множин**

$$D_q = \{x \in D : F(x) \geq q\}, \quad q > 0. \quad (2.5)$$

Таким чином, при аксіомі $A'3$ $D = \{x \in \varepsilon : \tilde{F}(x) < 0\}$.

Із (2.4) випливає закон спадної віддачі:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} (MP_i(x)) < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

При аналітичному моделюванні ринку, підрозділів економічної системи й усього виробничого сектора економіки часто вдаються до використання **неокласичних виробничих функцій** агрегованих невід'ємних факторів виробництва K, L або K, L, M . Від подібних виробничих функцій факторів K, L потребують виконання таких вимог:

- 1) неперервної диференційованості за сукупністю аргументів;
- 2) за відсутності одного з ресурсів K або L виробництво стає неможливим, тобто $F(0, L) = F(K, 0) = 0$;
- 3) граничні продукти мають бути додатними, тобто $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$;

- 4) мають виконуватися умови $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, тобто зі збільшенням

використання кожного фактора швидкість зростання випуску продукції сповільнюється;

- 5) мають задовольнятися умови $F(+\infty, L) = \lim_{K \rightarrow +\infty} F(K, L) = F(K, +\infty) = \lim_{L \rightarrow +\infty} F(K, L) = +\infty$, тобто при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск продукції необмежено зростає.

Іноді від неокласичної виробничої функції ще вимагається одпорідність першого степеня за аргументами: $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L)$ при всіх $\alpha > 0, K, L \geq 0$.

Прикладом неокласичної виробничої функції є функція Коббі – Дугласа $q = F(K, L) = AK^\beta L^{1-\beta}$, $0 < \beta < 1$ з параметром $A > 0$. Для неї $\frac{\partial F}{\partial K} = \beta \frac{F}{K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} = (1-\beta) \frac{F}{L} > 0$ при $K, L > 0$.

Оскільки $\frac{F}{K}$ та $\frac{F}{L}$ є відповідно середніми фондовіддачею і продуктивністю праці, останні нерівності показують, що при технології Коббі – Дугласа граничні віддачі факторів виробництва менші за середні. Параметр β характеризує еластичність випуску за капиталом $\left(\beta = \frac{d \ln F}{d \ln K}\right)$, а параметр $1-\beta$ – еластичність випуску за працею $\left(1-\beta = \frac{d \ln F}{d \ln L}\right)$.

Якщо q_0 , K_0 і L_0 — значення випуску та витрат факторів у базисний період часу ($q_0 = AK_0^\beta L_0^{1-\beta}$), то у відносних показниках виробнича функція Коббі — Дугласа має вигляд

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{K}{K_0} \right)^\beta \left(\frac{L}{L_0} \right)^{1-\beta},$$

звідки

$$q = \frac{q_0}{K_0^\beta L_0^{1-\beta}} K^\beta L^{1-\beta} = F(K, L) = AK^\beta L^{1-\beta}.$$

Таким чином, коефіцієнт $A = \frac{q_0}{K_0^\beta L_0^{1-\beta}}$ зіставляє витрачені ресурси з випуском продукції. Цей масштабний коефіцієнт випуску продукції іноді ще називають коефіцієнтом нейтрального технічного прогресу у виробничій технології, оскільки він сталий і такий самий, як і в базисному періоді.

Перевірку інших властивостей неокласичної виробничої функції для функції Коббі — Дугласа залишимо як вправу для читача.

За допомогою виробничої функції можна побудувати **криві продукції**, які наочно відображають стадії виробництва та закон спадної дохідності. Якщо $\bar{x}(x_i)$ — вектор витрат, в якому зафіксовано всі компоненти, крім i -ї, $x_j = \bar{x}_j$, $j \neq i$, то крива P_i продукції для витрат i -го типу, крива AP_i середнього i -го продукту та крива MP_i i -го граничного продукту визначаються відповідно виразами

$$P_i(x_i) = F(\bar{x}(x_i)); \quad AP_i(x_i) = \frac{F(\bar{x}(x_i))}{x_i} = \frac{P_i(x_i)}{x_i};$$

$$MP_i(x_i) = \frac{dP_i(x_i)}{dx_i} = \frac{\partial F(\bar{x}(x_i))}{\partial x_i}, \quad x_i \geq 0.$$

Перший вираз показує залежність випуску від витрат i -го типу при незмінних інших витратах. Другий — характеризує випуск продукції, виробленої на одиницю витрат i -го виду, третій вираз — додатковий дохід, одержаний при використанні додаткової кількості витрат i -го типу.

Типову поведінку кривих продукції показано на рис. 2.1.

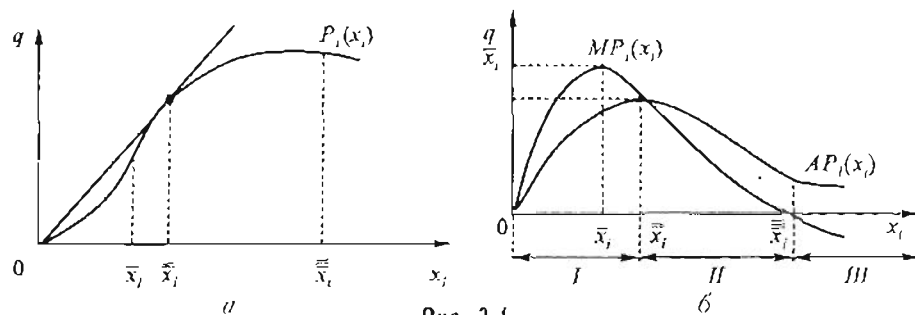


Рис. 2.1

За поведінкою кривих продукції розрізняють **три стадії виробництва та критичні його точки**. **Перша критична точка** \bar{x}_i — це точка, де $P_i(x_i)$ має точку перегину, коли $MP_i(x_i)$ досягає максимуму; **друга критична точка** $\bar{\bar{x}}_i$ — це точка, де промінь, проведений з початку системи координат (x_i, q) , дотикається до кривої $P_i(x_i)$ і де $AP_i(x_i)$ досягає максимуму та дорівнює $MP_i(\bar{\bar{x}}_i)$; **третьа критична точка** $\bar{\bar{\bar{x}}}_i$ — це точка, де $P_i(x_i)$ досягає максимуму та $MP_i(\bar{\bar{\bar{x}}}_i) = 0$. Закон спадної дохідності геометрично виражається в тому, що $MP_i(x_i)$ спадає після першої критичної точки \bar{x}_i .

Перша стадія виробництва починається в точці $x_i = 0$ і простягається до точки \bar{x}_i . На цій стадії граничний продукт перевищує середній

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i) > 0, \quad 0 < x_i < \bar{x}_i.$$

Друга стадія виробництва заходить між другою та третьою критичними точками, де середній продукт перевищує граничний, а останній — додатний:

$$AP_i(x_i) > MP_i(x_i) > 0, \quad \bar{x}_i < x_i < \bar{\bar{x}}_i.$$

Третя стадія виробництва розміщується після третьої критичної точки, де граничний продукт від'ємний:

$$MP_i(x_i) < 0, \quad x_i > \bar{\bar{\bar{x}}}_i.$$

2.2. ЕЛАСТИЧНОСТІ ВИПУСКУ ТА МОЖЛИВОСТІ ЗАМІЩЕННЯ ВИТРАТ

Якщо відбувається пропорційна зміна всіх витрат, то говорять про **зміну масштабів виробництва**. З цим пов'язана певна класифікація технологічних процесів виробництва.

Припустимо, що у певній точці простору витрат X усі витрати збільшуються в масштабі α ($\alpha > 1$), набуваючи значень $\alpha x = (\alpha x_i)_{i=1, m}$. Виробництво характеризується **сталим доходом від розширення масштабу**, якщо випуск продукції зростає у тій самій пропорції, що й витрати:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \alpha > 1. \quad (2.7)$$

Аналогічно виробництво характеризується **зростаючим (спадним) доходом від розширення масштабу**, якщо його виробнича функція зростає у більшій (меншій) мірі, ніж збільшуються всі витрати:

$$F(\alpha x) > \alpha F(x) \quad (F(\alpha x) < \alpha F(x)), \quad \alpha > 1. \quad (2.8)$$

У різних точках простору витрат X виробнича функція може поводити себе по-різному, в одних точках мати зростаючий дохід, в інших — спадний, у третіх — сталий. Локальним показником доходу від розширення масшта-

бу виробництва, визначеним у деякій точці x простору витрат, є **еластичність виробництва** (або **сумарна еластичність виробництва**)

$$\epsilon(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\partial \ln F(\alpha x)}{\partial \ln \alpha}, \quad (2.9)$$

тобто еластичність випуску щодо параметра масштабу α . З означення (2.9) і співвідношень (2.7), (2.8) випливає, що в разі сталого (зростаючого, спадного) доходу від розширення масштабу виробництва еластичність $\epsilon(x)$ відповідно дорівнює (більше, менше) одиниці. Враховуючи, що

$$\frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial (\alpha x_i)} x_i,$$

маємо

$$\epsilon(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{F(\alpha x)} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha x)}{\partial (\alpha x_i)} x_i = \frac{1}{F(x)} (MP(x))(x)^{\#}, \quad (2.10)$$

тобто

$$\epsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^m MP_i(x) x_i. \quad (2.11)$$

Визначимо еластичність випуску щодо зміни витрат i -го виду (еластичність випуску за фактором i) $\epsilon_i(x)$ як

$$\epsilon_i(x) = \frac{x_i}{F(x)} \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{F(x)} MP_i(x). \quad (2.12)$$

Тоді рівність (2.11) набуде вигляду

$$\epsilon(x) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i(x), \quad (2.13)$$

тобто еластичність випуску в довільній точці є сумою еластичностей випуску за всіма факторами в цій точці.

Приклад 2.1. Нехай виробнича функція F є однорідною функцією степеня k , тобто для всіх x маємо $F(\alpha x) = \alpha^k F(x)$. Тоді за теоремою Ейлера про однорідні функції виконується рівність

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} x_i = k F(x),$$

звідки

$$\epsilon(x) = \frac{1}{F(x)} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} x_i = k.$$

Таким чином, сумарна еластичність однорідних виробничих функцій не залежить від комбінації витрат і при $k > 1$ маємо зростаючу, при $k < 1$ — спадну, а при $k = 1$ — сталу ефективність від розширення масштабу виробництва.

Зокрема, оскільки виробнича функція Коббі — Дугласа є однорідною функцією степеня 1, бо для довільного $\alpha > 0$

$$A(\alpha K)^{\beta} (\alpha L)^{1-\beta} = \alpha A K^{\beta} L^{1-\beta},$$

то вона описує технологію зі сталою ефективністю від розширення масштабу виробництва.

Можливості заміщення витрат характеризують технологічний процес виробництва, а отже, й функцію F із боку різних комбінацій витрат (факторів, що породжують однакові умови випуску продукції. Локальною характеристикою заміщення між витратами x_i та x_j , коли всі інші витрати залишаються сталими в точці x з D , є **еластичність заміщення** $\sigma_{ij}(x)$ між витратами i та j , що визначається виразом

$$\sigma_{ij}(x) = - \frac{d \ln(x_i/x_j)}{d \ln(MP_i(x)/MP_j(x))}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Еластичність заміщення $\sigma_{ij}(x)$ дає відсоткову зміну співвідношення витрат, поділену на відсоткову зміну співвідношення їх граничних продуктів. При цьому знак мінус у рівності (2.14) забезпечує виконання нерівності $\sigma_{ij}(x) \geq 0$ в особливій області D .

Геометрично еластичності заміщення характеризують кривину **ізоквант**, що є множинами витрат, необхідних для забезпечення того самого рівня виробництва

$$IQ(q^0) = \{x \in X : F(x) = q^0\}, \quad (2.15)$$

де q^0 — заданий рівень виробництва. Таким чином, ізокванти є гіперповерхнями рівня функції F у просторі X .

Диференціювання вздовж ізокванти дає співвідношення

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^m MP_i(x) dx_i = MP(x)(dx)^{\#} = 0. \quad (2.16)$$

Якщо всі витрати фіксовані, крім витрат факторів i та j , то з (2.16) маємо $MP_i(x) dx_i + MP_j(x) dx_j = 0$, звідки кривини dx_i/dx_j на ізокванті мають вигляд

$$\left. \frac{dx_i}{dx_j} \right|_{\text{ізокванта}} = - \frac{MP_j(x)}{MP_i(x)}. \quad (2.17)$$

Таким чином, із виразу (2.14) випливає, що

$$\frac{1}{\sigma_{ij}(x)} = \frac{d \ln(- (dx_i/dx_j)_{\text{ізокванта}})}{d \ln(x_i/x_j)}. \quad (2.18)$$

Зауважимо, що ізокванти іноді називаються ще **виробничими гіперповерхнями байдужості**.

Аналогічно теорії споживання абсолютні значення кривин dx_i/dx_j на ізокванті можна інтерпретувати як **граничні норми технологічного замі-**

щення фактора j фактором i :

$$MRTS_{ji}(x) = \frac{MP_j(x)}{MP_i(x)} = \frac{\partial F(x)/\partial x_j}{\partial F(x)/\partial x_i}.$$

Приклад 2.2. Для технології Коббі – Дугласа $F(K, L)$ граничні норми заміщення $S_{L,K}$ праці капіталом (виробничими фондами) і капіталу (фондів) $S_{K,L}$ працею

$$S_{L,K} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{1-\beta}{\beta} \frac{K}{L}; \quad S_{K,L} = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \frac{K}{L}\right)^{-1},$$

де $\frac{K}{L} = k$ – коефіцієнт фондозабросності праці, що характеризує кількість фондів (виробничого капіталу), яка припадає на одиницю праці.

Розглянемо питання про економічну ефективність виробничої технології, що описується виробничою функцією $q = F(K, L, M)$. Оскільки показники ефективності – це відношення результату до витрат, маємо

три окремих безрозмірних показники ефективності: $\frac{q/q_0}{K/K_0}$ – фондовіддача, $\frac{q/q_0}{L/L_0}$ – продуктивність праці, $\frac{q/q_0}{M/M_0}$ – матеріаловіддача (тут q_0, K_0, L_0, M_0 – значення відповідних характеристик у базисному періоді).

Загальну ефективність виробничої технології E можна ввести як середній індекс окремих показників ефективності. Зокрема, для технології Коббі – Дугласа

$$F(K, L, M) = AK^\alpha L^\beta M^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

доцільно E визначити як середнє геометричне окремих частинних показників в ефективності факторів виробництва:

$$E = \left(\frac{q/q_0}{K/K_0}\right)^\alpha \left(\frac{q/q_0}{L/L_0}\right)^\beta \left(\frac{q/q_0}{M/M_0}\right)^\gamma.$$

Ізокліпальними виробничої функції $q = F(x_1, x_2)$ називаються лінії найбільшого зростання F у просторі витрат R_+^2 , що проходять ортогонально до ліній ізокуант (як ліній нульового зростання функції F). Оскільки напрямком найбільшого зростання F задається вектором граничного продукту $MP(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$, що є градієнтом функції F , диференціальне рівняння ізокліпалей має вигляд

$$\frac{dx_1}{(\partial F/\partial x_1)} = \frac{dx_2}{(\partial F/\partial x_2)}.$$

Аналогічно визначаються ізокліпалі для випадків трьох та більшої кількості виробничих факторів.

Приклад 2.3. Для мультиплікативної виробничої функції $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, $\alpha, \beta > 0$, $A > 0$ при $(K, L) \in R_+^2$ ізокуанти є степеневими гіперболами вигляду $AK^\alpha L^\beta = q_0 = \text{const}$,

або $K^\alpha = \frac{q_0}{A} L^{-\beta}$.

Крім того,

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha \frac{F}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \beta \frac{F}{L},$$

тому ізокліпалі є розв'язками диференціального рівняння

$$\frac{K}{\alpha} dK = \frac{L}{\beta} dL,$$

тобто мають вигляд

$$K = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} L^2 + C,$$

де C – стала інтегрування цього рівняння. Сім'я ізокліпалей мультиплікативної виробничої функції зображено на рис. 2.2.

Зауважимо, що для ізокліпалі, яка проходить через задану точку простору витрат (K_0, L_0) , стала $C = K_0^2 - \frac{\alpha}{\beta} L_0^2$. Найпростіша ізокліпаль при $C = 0$ має вигляд променя $K = L \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $L \geq 0$, що виходить з точки $(0, 0)$ (див. рис. 2.2)

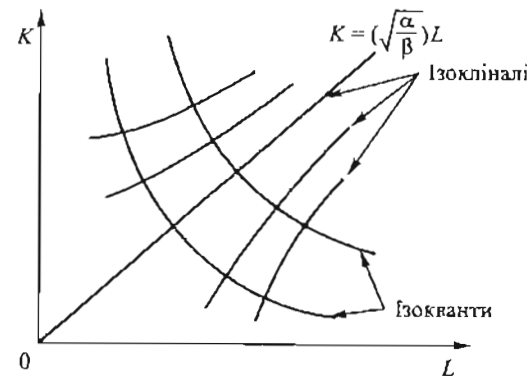


Рис. 2.2

2.3. ОСНОВНІ ТИПИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Наведемо приклади найпоширеніших типів виробничих функцій. Зауважимо, що подібні функції також широко використовуються в макроекономічному моделюванні, але в просторах агрегованих (збільшених) витрат.

Приклад 2.4 (лінійна виробнича функція). Ця функція має вигляд $q = F(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$, $x = (x_i)_{i=1, \dots, m} \in R_+^m$, де коефіцієнти (параметри) a_i мають сенс граничного фізичного продукту i -х витрат, причому $a_i = MP_i(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$, $i = 1, \dots, m$.

Вона одночасно є опуклою та угнутою в нестрогому розумінні функцією. Ізокуантами функції F є гіперплощини вигляду $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = q_0$, $q_0 > 0$, а ізокліпалі є променями в R_+^m , паралельними променю $\{a_1 z, a_2 z, \dots, a_m z\}$, $z \geq 0$, оскільки вектор $(a_i)_{i=1, \dots, m}$ є нормаллю до гіперплощини – ізокуант функції F .

Еластичність виробництва при лінійній технології одинична:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(x) = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{F(x)} MP_i(x) = \frac{F(x)}{F(x)} = 1,$$

а еластичності заміщення – нескінченні:

$$\sigma_{ij}(x) = \infty, \quad i \neq j.$$

Приклад 2.5 (виробнича функція моделі «витрати – випуск» Леонтьєва (виробнича функція Леонтьєва))¹. Ця функція має вигляд

$$q = F(x_1, x_2) = \min \left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}, \dots, \frac{x_m}{c_m} \right), \quad x = (x_i)_{i=1, m} \in R_+^m,$$

де параметр c_i – кількість витрат виду i , необхідних для виробництва однієї одиниці продукції ($c_i > 0$).

Таким чином, для функції Леонтьєва одночасно

$$x_i \geq c_i q = c_i F(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

Ізоквантами функції Леонтьєва є гіперповерхини паралельні зсуви межі $\partial R_+^m = \left\{ x \in R_+^m : \prod_{i=1}^m x_i = 0 \right\}$ вздовж променя Леонтьєва $\left\{ x = (x_i)_{i=1, m} \in R_+^m : \frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \dots = \frac{x_m}{c_m} \right\}$.

При технології Леонтьєва еластичності заміщення σ_{ij} , $i \neq j$ є нульовими, а еластичність виробництва $\varepsilon(x) = 1$.

Приклад 2.6 (виробнича функція аналізу способів виробничої діяльності (виробнича функція Канторовича))². Ця функція має вигляд

$$q = F(x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k y_k,$$

де змінні y_k задовольняють умови

$$\sum_{k=1}^p \alpha_{ik} y_k \leq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Вона пов'язана із задачею максимізації випуску продукції підприємством шляхом вибору невід'ємних витрат (ресурсів) при аналізі виробничої діяльності в межах лінійного програмування Л. В. Канторовича.

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k y_k \rightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^p \alpha_{ik} y_k \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Параметр p характеризує число способів виробничої діяльності; змінна y_k показує рівень інтенсивності використання способу k , де $k = 1, \dots, p$; параметр α_k характеризує випуск продукції при одиничній інтенсивності способу k ($i = 1, \dots, m$), α_{ik} – кількість факторів виду i , необхідних при одиничній інтенсивності способу k .

Карту ізоквант виробничої функції Канторовича при $p = 2$ та $m = 2$ показано на рис. 2.3. Для виробничої функції Канторовича еластичність виробництва $\varepsilon(x) = 1$, а $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Приклад 2.7 (мультиплікативна виробнича функція). Ця функція має вигляд

$$q = F(x) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}, \quad x = (x_i)_{i=1, m} \in R_+^m,$$

¹Леонтьєв Василь Васильович (нар. 1906 р.) – американський економіст російського походження, лауреат Нобелівської премії з економіки 1973 р., присудженої за метод «витрати – випуск».

²Канторович Леонід Віталійович (1912–1986) – російський математик та економіст, розробив теорію лінійного програмування і його економічних застосувань. Лауреат Нобелівської премії з економіки 1975 р., присудженої за теорію оптимального використання ресурсів.

де параметр $\beta_0 > 0$ є коефіцієнтом шкали вимірювання продукції, а параметри $\beta_i > 0$ – еластичностями випуску продукції за факторами i , $i = 1, \dots, m$:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x_i} = \beta_i.$$

Для цієї функції еластичність виробництва

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i$$

одночасно є степенем однорідності функції F , і тому при $\varepsilon(x) > 1$ маємо зростаючу ефективність від зміни масштабу виробництва.

Еластичності заміщення витрат

$$\sigma_{ij}(x) = - \frac{d \ln(x_i, x_j)}{d \ln(\beta_i F / \beta_j F \cdot x_j)} = - \frac{d \ln(x_i, x_j)}{d (\ln \beta_i + \beta_j + \ln x_j - x_i)} = 1, \quad i \neq j.$$

Приклад 2.8 (загальна виробнича функція Коббі – Дугласа). Це функція

$$q = F(x) = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}, \quad x = (x_i)_{i=1, m} \in R_+^m,$$

що є окремим випадком мультиплікативної виробничої функції, який відповідає одиничній еластичності виробництва

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m b_i = 1.$$

Розглянемо задачу знаходження аналітичного вигляду виробничої функції із сталою еластичністю заміщення для випадку двох факторів виробництва, які вважатимемо працею L та капіталом K . Подібна функція відіграє важливу роль у різноманітних застосуваннях і в англійській літературі називається функцією CES (від англійського терміна constant elasticity of substitution).

Пасамперед зауважимо, що відносно однорідних виробничих функцій F можна отримати простіший вираз еластичності заміни факторів. Справді, якщо F – однорідна функція степеня $\gamma \geq 1$, то

$$F(K, L) = L^\gamma F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^\gamma f(k); \quad f(k) = F(k, 1), \quad k = \frac{K}{L},$$

де нова змінна k є фондоозброєністю праці.

Отже, маємо такі вирази граничних продуктів

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \gamma L^{\gamma-1} f(k) - L^\gamma f'(k) \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1} [\gamma f(k) - k f'(k)];$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = L^\gamma f'(k) \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k),$$

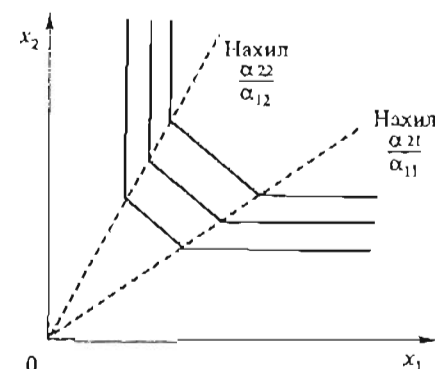


Рис. 2.3

звідки, зокрема,

$$S_K = MRTS_{K,L} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k. \quad (2.19)$$

Таким чином,

$$\sigma_{K,L} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(MRTS_{K,L})} = \frac{dk/k}{dS_K/S_K}. \quad (2.20)$$

Аналогічно, визначаючи $\sigma_{L,K}$, легко перевірити, що

$$\sigma_{K,L} = \sigma_{L,K}.$$

Клас однорідних CES-функцій задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dk/k}{dS_K/S_K} = \sigma = \text{const},$$

звідки

$$S_K = Ck^{1/\sigma}, \quad C > 0,$$

де C — стала інтегрування.

Підставляючи останній вираз у (2.19), знаходимо

$$Ck^{1/\sigma} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k,$$

або

$$\frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{Ck^{1/\sigma} + k}.$$

Інтегруючи останній вираз, маємо

$$\ln f = \gamma \int \frac{dk}{k + Ck^{1/\sigma}} = \frac{\gamma\sigma}{\sigma-1} \ln C_1 \left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right),$$

де C_1 — довільна додатна стала (стала інтегрування).

Отже,

$$f(k) = C_1 \left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}},$$

або, повертаючись до змінних K та L , отримуємо

$$q = F(K, L) = C_1 \left[K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Позначивши

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}, \quad \frac{1}{C+1} = \alpha < 1, \quad C_1(C+1)^\rho = A,$$

маємо такий загальний вигляд виробничої функції CES:

$$q = F(K, L) = A \left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho} \right]^{-1/\rho}, \quad (2.21)$$

де параметр масштабу вимірювання A — додатна величина (оскільки q — випуск продукції і $q \geq 0$); γ — степінь однорідності функції ($\gamma > 0$), а параметр $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma} \geq -1$ є параметром заміщення. Параметри α та $1-\alpha$ є параметрами розподілу.

Зауважимо, що при $0 < \gamma \leq 1$, $\rho > -1$ функція CES задовольняє вимоги 3 і 4 неокласичної виробничої функції.

З урахуванням попереднього для функції CES (2.21) показники еластичності ϵ та σ визначаються як

$$\epsilon(K, L) = \gamma; \quad \sigma = \sigma_{K,L} = \sigma_{L,K} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Крім того, еластичності випуску за факторами мають вигляд

$$\epsilon_K = \frac{K}{F} \frac{\partial F}{\partial K} = \gamma (\alpha K^{-\rho}) [\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}]^{-1};$$

$$\epsilon_L = \frac{L}{F} \frac{\partial F}{\partial L} = \gamma ((1-\alpha)L^{-\rho}) [\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}]^{-1},$$

що знову дає наведений вище результат

$$\epsilon(K, L) = \epsilon_K + \epsilon_L = \gamma.$$

Виникнення теорії виробничих функцій пов'язують з появою статті американських учених — економіста П. Дугласа та математика Д. Кобба¹. У цій статті емпіричним шляхом досліджувалась залежність між затратами праці та обсягом продукції в оборонній промисловості США. Були використані статистичні дані за 1899–1922 рр. та поставлені такі задачі:

1. Визначити параметричний клас функцій, який найбільш точно наближає кількісні співвідношення між вибраними характеристиками виробничої діяльності.

2. За допомогою методів математичної статистики знайти числові параметри, що задають конкретну функцію цього класу.

3. Порівняти теоретичні результати значення функції з фактичними даними.

Д. Кобб запропонував функцію вигляду $Q = AK^\alpha L^\beta$, де Q — обсяг виробленої продукції; K — основний капітал; L — витрати праці; A , α , β — числові параметри, які відповідають умовам $A > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Було складено систему регресійних рівнянь $\ln Q_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t + \epsilon_t$, $1899 \leq t \leq 1922$, де Q_t , K_t , L_t — фактичні значення відповідних величин у рік t , а ϵ_t — випадкові похибки спостережень. Оцінювання параметрів A , α , β проводилося методом найменших квадратів, тобто мінімізацією виразу

$$\sum_{t=1899}^{1922} (\ln Q_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

¹Cobb G. W., Douglas P. H. A theory of production // Amer. Econ. Rev. - 1928. March - P. 139–165.

Оцінки мали вигляд $\hat{A} = 1,01$, $\hat{\alpha} = 0,25$, $\hat{\beta} = 0,75$, і, таким чином, функція Q набувала вигляду $Q = F(K, L) = 1,01K^{0,25}L^{0,75}$. Порівняння величин $F(K_t, L_t)$ із фактичними значеннями Q_t та $F(K_t, L_t)$ були пов'язані з періодами депресії та поживлення ділової активності.

Ці результати привернули увагу економістів і математиків та стали поштовхом для розвитку математичного моделювання економічних явищ й економітрики.

З найпростішого порівняльного аналізу типів виробничих функцій, наведених у прикладах 2.4 – 2.8, випливають такі висновки. Лінійна виробнича функція припускає лінійну залежність випуску від витрат, а мультиплікативна виробнича функція виражає логарифм випуску як лінійну функцію логарифма витрат. Виробнича функція Леонтьєва є однією із заданих пропорцій, якими визначається кількість витрат кожного виду для виробництва однієї одиниці продукції. Виробнича функція аналізу виробничої діяльності узагальнює функцію Леонтьєва на випадок, коли існують ρ елементарних процесів (активностей), кожний з яких може відбуватися при будь-якій невизначеній інтенсивності. Випуск при одиначній інтенсивності та витрати, необхідні на одиницю інтенсивності, фіксовані, а загальний випуск і загальні витрати знаходять простим підсумовуванням випуску та витрат відповідно для кожної активності при вибраних інтенсивностях.

Виробничу функцію CES можна розглядати як певне узагальнення виробничих функцій Леонтьєва, лінійних та мультиплікативних у випадку двох факторів виробництва.

Так, якщо параметр ρ прямує до -1 , то функція CES наближається до лінійної виробничої функції ($\sigma = \infty$); якщо $\rho \rightarrow 0$, то функція CES прямує до мультиплікативної виробничої функції ($\sigma = 1$); якщо $\rho \rightarrow \infty$, то функція CES наближається до функції Леонтьєва ($\sigma = 0$).

2.4. МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ ФІРМИ

Математичне моделювання виробництва має враховувати як внутрішні умови виробничих процесів, так і зовнішні умови — середовище прямої дії та середовище непрямої дії. Це зумовлює появу складного комплексу моделей діяльності підприємства (фірми) у тих чи тих умовах, при тих чи тих припущеннях. Важливе значення тут має увага до раціоналізації поведінки підприємства — об'єктивний бік оптимізації процесів виробництва, оптимальний розподіл коштів та використання різних факторів виробництва.

Найпоширенішими є моделі рівноваги фірми, що будуються на таких припущеннях.

1. Технологічні умови виробництва описуються виробничою функцією $q = F(x)$, яка має певний комплекс властивостей.

2. Враховується можливість фірми впливати на ціну своєї продукції та на ціни факторів виробництва. При цьому виникають різні моделі, пов'язані

з тим, як з умовами досконалої конкуренції, так і з різними типами недосконалої конкуренції.

3. Враховується наявність ресурсних обмежень. При цьому зазвичай розрізняють **короткострокові моделі** поведінки фірми, коли діють ресурсні обмеження, та **довгострокові моделі**, коли такі обмеження практично не беруться до уваги.

4. Метою діяльності фірми є забезпечення максимальних прибутків або мінімізація збитків, якщо фірма орієнтується на досягнення суто фінансового успіху від своєї діяльності. Якщо фірма зацікавлена в завоюванні значного сегмента ринку заданої продукції, то її метою може бути максимізація випуску продукції при обмеженнях на відповідний рівень виробничих видатків. Для фірми, орієнтованої на забезпечення певного рівня попиту, метою може бути мінімізація виробничих видатків при заданому рівні випуску продукції.

При побудові конкретних моделей поведінки фірми можуть вводитися також різні доповнювальні припущення. Наприклад, аналіз може вестися з урахуванням фактора часу, не тільки граничних, а й середніх величин, може детальніше описуватися технологія виробництва тощо.

Розглянемо як приклад одну з найпростіших за формою моделей діяльності фірми. При заданій виробничій функції $q = F(x_1, \dots, x_m)$, заданій ціні на продукцію (умова досконалої конкуренції) та заданих цінах на фактори виробництва, що визначають **функцію виробничих видатків** $C(q)$ ¹ від обсягу випуску продукції q , потрібно спрямувати роботу виробом q , а отже, й вектора витрат виробничих факторів $x = (x_i)_{i=1, m}$, щоб отримати максимальний прибуток π , який є різницею між доходом R^2 та видатками C . Вважатимемо, що розглядається довгострокова задача виробництва без обмежень на доступний обсяг виробничих факторів.

Таким чином, задача полягає в максимізації функції прибутку

$$\pi(q) = pq - C(q) \rightarrow \max \quad (2.22)$$

вибором оптимальної кількості випуску продукції q за умови

$$q = F(x). \quad (2.23)$$

Вводячи в розгляд граничні видатки $MC(q)^3$, $MC(q) = dC(q)/dq$, маємо умову оптимальності випуску q_* першого порядку $d\pi(q_*)/dq = 0$, так що для оптимального випуску продукції q_* ціна має дорівнювати граничним видаткам:

$$p = MC(q_*) = \frac{dC(q_*)}{dq}. \quad (2.24)$$

¹Від англ. *cost* — видатки.

²Від англ. *revenue* — дохід.

³Від англ. *marginal cost* — граничні видатки.

При цьому за умов достатності другого порядку для оптимуму q_* граничні видатки в точці q_* мають зростати:

$$\frac{dMC(q_*)}{dq} = \frac{d^2C(q_*)}{dq^2} > 0. \quad (2.25)$$

Таким чином, оптимальні витрати факторів x_* в задачі (2.22), (2.23) можна отримати як розв'язок рівняння $q_* = F(x_*)$, де q_* визначається умовами (2.24), (2.25).

Розглянемо випадок, коли $C(q) = Aq^{1/k}$, що є характерним для однорідних виробничих функцій. Тоді $\pi(q) = pq - Aq^{1/k}$. Якщо забезпечується стала ефективність від збільшення масштабів виробництва ($k = 1$), то залежно від значень ціни p та параметра A можливі такі випадки:

1) $p < A$. Тоді прибуток від'ємний і фірма має тим більші збитки, чим більший випуск продукції. При цьому оптимальним рішенням є не виробляти продукцію (до здійснення змін у структурі, технології та діяльності фірми, що поліпшують її стан), що дає нульові збитки і прибутки;

2) $p = A$. Прибуток дорівнює нулеві незалежно від обсягу випуску продукції. Необхідна умова екстремуму виконується в кожній точці;

3) $p > A$. Прибуток тим більший, чим більший обсяг випуску продукції. Необхідна умова екстремуму, як і у випадку $p < A$, не виконується в жодній точці, тобто за обмеженості факторів виробництва задача не має розв'язку. Додаючи обмеження на можливий обсяг випуску через обмеженість факторів виробництва, слід вибирати максимально можливе значення q та x .

Якщо забезпечується ефективність від збільшення масштабів виробництва ($k > 1$), то точка, що задовольняє необхідні умови оптимальності, існує, але це точка мінімуму прибутків, а не максимуму. Прибуток у точці від'ємний. Чим більший випуск продукції праворуч від цієї точки, тим більший прибуток. Задача не має розв'язку, якщо обсяг випуску продукції не обмежений зверху.

Якщо має місце спадна ефективність від збільшення масштабів виробництва ($k < 1$), то тільки в цьому разі при всіх значеннях p та A необхідні умови оптимальності визначають єдину точку максимуму прибутку. В цьому випадку функція пропозиції, що зіставляє ціни продукції p обсяг випуску q (при фіксованих цінах факторів), виявляється добре визначеною.

Заслужовує на увагу той очевидний факт, що функція пропозиції збігається формально із функцією, оберненою до функції витрат. Для однорідної виробничої функції при $k < 1$ функція пропозиції задається формулою $q = (p/A)^k$.

Слід зауважити, що вибір оптимального обсягу випуску продукції — це лише частина рішення про планування виробництва. Друга частина рішення полягає у визначенні обсягів витрат факторів виробництва з задачі мінімізації загальних витрат. На практиці загальне рішення є єдиним рішенням про виробництво продукції та споживання факторів виробництва на основі вихідної інформації про технологію виробництва і ринкові ціни на продукцію та фактори.

Розглянемо зв'язки між задачами поведінки фірми і результатами сучасного опуклого аналізу, включаючи теорію двоїстості для виробничих функцій. Цікаво, що деяким формальним поняттям опуклого аналізу можна дати екопомічне тлумачення.

Візьмемо довільну опуклу виробничу функцію $F: R_+^m \rightarrow R_+$ (не обов'язково гладку). Ціну вихідної продукції приймемо за одиницю, ціна на j -й фактор дорівнює w_j , $j = 1, \dots, m$. Розглянемо задачу

$$[(x|w) - F(x)] \rightarrow \inf, \quad x \in R_+^m, \quad (2.26)$$

де вектор $w = (w_j)_{j=1, \dots, m}$ є вектором цін факторів виробництва, а $(\cdot|\cdot)$ позначає скалярний добуток векторів. Отже, $(x|w) = \sum_{j=1}^m x_j w_j = C$ є функцією загальних виробничих витрат. Задачу (2.26) можна інтерпретувати як задачу мінімізації збитків виробництва, що дорівнюють $C - R = -\pi$, оскільки за умовою $R = F(x)$ (це є еквівалентним задачі максимізації прибутку π). Значення задачі (2.26), тобто значення інфімуму в (2.26), позначимо через $F^*(w)$ і називатимемо функцією, спряженою відносно функції $F(x)$, або функцією збитків¹.

Зауважимо, що задачу (2.26) не має сенсу розглядати для всіх типів виробничих функцій, наприклад для невід'ємних лінійно-однорідних виробничих функцій F , коли $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ при довільних $\alpha > 0$. Справді, для таких функцій значення $\inf y$ (2.26) при довільному $w \in R^m$ не перевищує 0, оскільки $F(x) \geq F(0) = 0$. Якщо існує $\bar{x} \in R_+^m$, для якого $(\bar{x}|w) - F(\bar{x}) < 0$, то, очевидно, на промені $\alpha \bar{x}$, $\alpha > 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ величина $(\alpha \bar{x}|w) - F(\alpha \bar{x}) = \alpha((\bar{x}|w) - F(\bar{x}))$ прямує до $-\infty$. Таким чином, для лінійно-однорідних виробничих функцій F функція збитків $F^*(w)$ у будь-якій точці $w \in R^m$ набуває значення 0 або $-\infty$.

Накладаючи деякі обмеження на клас функцій F і розглядаючи тільки додатні ціни на фактори, можна уникнути ситуації, описаної вище. Проте з математичного погляду можна діяти і навпаки — допустити до розгляду функцій, що приймають значення $-\infty$, й одержати таким чином більш загальну теорію, яка, до того ж, має значні технічні переваги.

Позначимо через \hat{R} розширену дійсну пряму (множину дійсних чисел), доповнену невластивим числом $-\infty$, $\hat{R} = R \cup \{-\infty\}$, таким чином, що для кожного $t \in \hat{R}$ виконуються співвідношення $t > -\infty$, $t + (-\infty) = -\infty$, $0(-\infty) = -\infty$, $t(-\infty) = -\infty$ при $t > 0$. Під функцією F на множині R^m розумітимемо відображення $F: R^m \rightarrow \hat{R}$.

Для подібних функцій F визначають ефективну множину $Dom F$ і субграф (підграфік) $Sub F$:

$$Dom F = \{x \in R^m : F(x) > -\infty\}; \quad Sub F = \{(x, t) \in R^m \times \hat{R} : t \leq F(x)\}.$$

¹З визначення випливає, що спряжена функція $F^*(w)$ (яка також називається перетворенням Юнга—Фенхеля функції F) є нижньою межею сім'ї афінних функцій, а отже, сама є опуклою функцією.

Функція F називається **угнutoю (замкненою)**, якщо її підграфік $SubF$ є опуклою (замкненою) множиною в $R^m \times R$.

Неважко переконатися, що неперервна функція F є замкненою. Надалі основним об'єктом вивчення будуть угнуті замкнені функції F , які є **власними** в тому розумінні, що $Dom F \neq \emptyset$ (тобто не дорівнюють тождественно $-\infty$).

Із теорії опуклого аналізу випливають такі основні властивості функції збитків F^* для власної угнутої замкненої виробничої функції F .

1°. **Нерівність Юнга—Фенхеля.** $F(x) + F^*(w) \leq (x | w)$.

2°. F^* — власна замкнена угнута функція.

3°. $F^{**} = (F^*)^* = F$ (**теорема Фенхеля—Моро**).

Із властивості 3° безпосередньо випливає, що коли функції збитків збігаються ($F_1^* = F_2^*$), відповідні виробничі функції теж збігаються ($F_1 = F_2$).

Зазначений наслідок теореми Фенхеля—Моро свідчить про те, що виробнича функція $F(x)$ повністю характеризується своєю **функцією збитків** $F^*(w)$, яка є власною замкненою опуклою функцією, що підтверджує важливість застосувань в економічній теорії виробництва як показників випуску, так і їхніх вартісних оцінок, а також особливе місце, яке посідають опуклі математичні структури в економічній теорії.

Оскільки поняття невід'ємної лінійно-однорідної виробничої функції широко використовується в математичному моделюванні як мікро-, так і макроекономічних явищ, непридатність конструкції (2.26) для таких функцій потребує інших форм вивчення співвідношень витрати—випуск. Зокрема, Г. Б. Клейнером [18] було запропоновано такий підхід.

Розглянемо клас \mathcal{F} невід'ємних неперервних угнутих функцій F на ортанті R_+^m . Припускається, що множини $X(F) = \{x \in R_+^m : F(x) > 0\} \neq \emptyset$, $F \in \mathcal{F}$, а ціни на фактори w — невід'ємні.

Розглянемо задачу планування виробництва з виробничою функцією $F \in \mathcal{F}$, що має на меті досягти мінімуму витрат на виробництво кількості продукції вартістю в одну грошову одиницю (ціну продукту, який випускається, прийнято за одиницю). Тоді математично таку задачу можна записати у вигляді

$$\frac{(x | w)}{F(x)} \rightarrow \inf, \quad x \in X(F). \quad (2.27)$$

Значення екстремальної задачі (2.27) позначимо $F^*(w)$ і називатимемо **спряженою функцією Клейнера** відносно виробничої функції F з \mathcal{F} , або **функцією витрат на одну одиницю продукції**.

Теорема 2.1. *Спряжена функція Клейнера $F^*(w)$ відносно функції F з \mathcal{F} має такі властивості:*

(i) F^* є невід'ємною функцією, визначеною на R_+^m ;

(ii) F^* — лінійно-однорідна та угнута функція;

(iii) $F^*(w)F(x) \leq (x | w)$ для всіх $x, w \in R_+^m$ та $F^*(w) \neq 0$.

В (i) Нерівність $F^*(x) \geq 0$ є безпосереднім наслідком означення F^* та цільової функції задачі (2.27). Оскільки $F(x) \neq 0$, прийнявши $x \in R_+^m$, для якого $F(x) > 0$, маємо $F^*(w) \leq (x | w) / F(x) < \infty$.

(ii) Для довільного $\alpha > 0$

$$F^*(\alpha w) = \inf_x \frac{(x | \alpha w)}{F(x)} = \alpha \inf_x \frac{(x | w)}{F(x)} = \alpha F^*(w).$$

Нехай $w^1, w^2 \in R_+^m$, $\alpha, \beta \geq 0$ і $\alpha + \beta = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} F^*(\alpha w^1 + \beta w^2) &= \inf_x \frac{(x | \alpha w^1 + \beta w^2)}{F(x)} = \inf_x \left(\alpha \frac{(x | w^1)}{F(x)} + \beta \frac{(x | w^2)}{F(x)} \right) \geq \\ &\geq \alpha \inf_x \frac{(x | w^1)}{F(x)} + \beta \inf_x \frac{(x | w^2)}{F(x)} = \alpha F^*(w^1) + \beta F^*(w^2). \end{aligned}$$

(iii) Перша нерівність є очевидним наслідком визначення функції F^* . Доведемо друге твердження. Оскільки функція F неперервна, її підграфік $SubF$ — замкнена опукла множина. Тому для довільної граничної точки $(x^0, F(x^0))$ множини $SubF$ існує опорна гіперплощина. Через лінійну однорідність функції F $SubF$ є конусом у просторі $R^m \times R$, і тому опорна гіперплощина має проходити через вектор 0. Отже, існує така пара $(w, \beta) \in R^m \times R$, що $(x^0 | \bar{w}) + \beta F(x^0) = 0$, $(x | w) + \beta t \geq 0$ для всіх $(x, t) \in SubF$. Тоді, очевидно, $w \geq 0$. Звідси $\beta < 0$. Таким чином, для $\bar{w} = |\beta|^{-1} w$ маємо $(x^0 | \bar{w}) = F(x^0)$, $(x | \bar{w}) \geq F(x)$ для всіх $x \in R_+^m$. Отже, коли $F(x) > 0$, то $(x | \bar{w}) / F(x) \geq 1$ і $\inf_{x \in X(F)} ((x | w) / F(x)) \geq 1$, тобто $F^*(\bar{w}) \geq 1$. Δ

Теорема 2.2. *Функція $F^*(w)$, $x \in R_+^m$ є неперервною.*

В Для доведення теореми покажемо, що F^* є одночасно напівнеперервною зверху та знизу функцією в будь-якій точці. Нехай $\{w^k\}_{k=1}^\infty$ — будь-яка послідовність у R_+^m , що прямує до вектора $w \in R_+^m$. За визначенням $F^*(w^k) \leq (x | w^k) / F(x)$ для всіх $x \in X(F)$. Отже, при кожному x

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^*(w^k) \leq (x | w) / F(x).$$

Таким чином,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^*(w^k) \leq \inf_{x \in X(F)} [(x | w) / F(x)],$$

тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} F^*(w^k) \leq F^*(w)$ і F^* — напівнеперервна зверху функція в точці w .

Доведемо, що F^* є напівнеперервною знизу функцією в довільній точці w з R_+^m . Спочатку зауважимо, що неперервність F^* у точці $w = 0$ очевидна, тому достатньо довести її напівнеперервність знизу в точках $w \neq 0$. Позначимо через $\{e_i\}_{i=1}^m$ ортонормований базис у просторі R_+^m . Розглянемо довільні набори векторів вигляду $\sigma = \{w, e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_{m-1}}\}$ і виберемо серед них лінійно незалежні. Побуду-

дуємо для кожного лінійно незалежного набору його кіничну оболонку $\text{Cone}(\sigma) = \{y \in R^m : y = \alpha_0 w + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i e_i, \alpha_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, m-1\}$.

Оскільки всього конусів $\text{Cone}(\sigma)$ скінченне число, хоч один із них містить нескінченну кількість членів послідовності $\{w^k\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k = w$. Для спрощення вважатимемо, що послідовність $\{w^k\}$ повністю лежить у $\text{Cone}(\sigma)$, де $\sigma = \{w, e_1, \dots, e_{m-1}\}$ (цього можна завжди домогтися перенумераванням векторів базису). Розкладемо кожний вектор w^k за базисом σ : $w^k = \alpha_0 w + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i(k) e_i$. Оскільки F^\times — угнута та лінійно-однорідна функція, то

$$F^\times(w^k) \geq \alpha_0(k) F^\times(w) + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i(k) F^\times(e_i) \quad (2.28)$$

для всіх $k = 1, 2, \dots$. З того, що σ — базис у R^m , і з умови $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k = w$ випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_0(k) = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i(k) = 0$. У такому разі, переходячи в (2.28) до границі при $k \rightarrow \infty$, маємо $\lim_{k \rightarrow \infty} F^\times(w^k) \geq F^\times(w)$, тобто F^\times — напівнісперервна знизу функція в точці w , $w \neq 0$. Δ

Наслідок. Клас функцій \mathcal{F}_0 , що складається з усіх невід'ємних лінійно однорідних угнутих неперервних функцій на R^m , які не дорівнюють тождественно нулю, є замкненим відносно операції спряження \times .

Наслідок безпосередньо випливає з теорем 2.1 і 2.2.

Зіставимо тепер задачі (2.27) та двоїсту до неї задачу:

$$F^{\times \times}(x) = \inf_{w \in X(F^\times)} \frac{(w | x)}{F^\times(w)} \quad (2.29)$$

За доведенням $F^{\times \times}(x) \in \mathcal{F}_0$. Економічна інтерпретація задачі близька до тлумачення задачі (2.27): серед усіх виробничих функцій, що характеризуються однакою залежністю витрат на одну грошову одиницю продукції, знайти ту, яка при найтіршому співвідношенні цін на фактори забезпечує найбільший випуск продукції.

Із властивості (iii) теореми 2.1 випливає, що $F^{\times \times}(x) \geq F(x)$.

Теорема 2.3. Якщо виробнича функція F належить до класу \mathcal{F}_0 , то $F^{\times \times} = F$.

✓ Припустимо, що існує \bar{x} , для якого $F^{\times \times}(\bar{x}) > F(\bar{x})$. Тоді підграфік $\text{Sub}F$ як опуклу замкнену множинну в $R^m \times R$ можна строго відокремити від точки $(\bar{x}, F^{\times \times}(\bar{x}))$ за допомогою опірної до $\text{Sub}F$ гіперплощини. Отже, існує пара $(x, w) \in R^m \times R$ така, що $(\bar{x} | w) + \beta F^{\times \times}(\bar{x}) < 0$, $(x | w) + \beta t \geq 0$ для всіх $(x, t) \in \text{Sub}F$. Звідси випливає, що $\beta < 0$, $w \geq 0$. Позначивши $\bar{w} = |\beta|^{-1} w$, запишемо

$$(\bar{x} | \bar{w}) < F^{\times \times}(\bar{x}); \quad (2.30)$$

$$(x | \bar{w}) \geq F(x) \quad (2.31)$$

для всіх $x \in R_+^m$. Із (2.31) випливає, що $F^\times(\bar{w}) = \inf_{x \in X(F)} [(x | \bar{w}) / F(x)] \geq 1$. Тоді, згідно з (2.30), $(\bar{x} | \bar{w}) < F^{\times \times}(\bar{x}) F^\times(\bar{w})$, а це суперечить властивості (iii) теореми 2.1. Δ

Із доведеної теореми двоїстості для виробничих функцій з класу \mathcal{F}_0 випливає таке твердження.

Наслідок. Якщо для двох виробничих функцій F_1 та F_2 з класу \mathcal{F}_0 виконується рівність $F_1^\times = F_2^\times$, то $F_1 = F_2$.

Цей факт означає, що виробничі функції з класу \mathcal{F}_0 повністю характеризуються своїми партисипними показниками — функцією витрат на одну грошову одиницю продукції. Це теоретично обґрунтовує практику застосування подібних характеристик виробництва.

Із теореми 2.3 і теореми Фенхеля—Моро 3° випливає, що угнута виробнича функція F в певному розумінні є найкращою виробничою функцією серед класу всіх функцій, які характеризуються однаковими економічними показниками: значеннями максимального прибутку та мінімуму витрат на одну грошову одиницю продукції за цін w .

Таким чином, гіпотеза про угнутість виробничої функції $F(x) = q$ включає припущення про оптимальне використання наявних ресурсів основного виробничого капіталу і праці, що описується вектором витрат x при випуску обсягу q продукції.

Із математичного погляду, наведена теорія двоїстості виробничих функцій є певним аналогом теорії двоїстості в лінійному програмуванні. Наведемо приклад, який пов'язує лінійну модель планування виробництва з угнутими партисипними характеристиками.

Нехай ε виробнича система, що випускає n видів продукції, використовуючи m видів ресурсів. Коефіцієнти a_{ij} позначають необхідні витрати ресурсу i -го виду для випуску одиниці j -ї продукції. Нехай $b = (b_i)_{i=1, m}$ — вектор-стовпець наявних ресурсів (b_i — кількість i -го ресурсу, який є в наявності), $c = (c_j)_{j=1, n}$ — вектор цін на продукцію, а $x = (x_j)_{j=1, n}$ — вектор випуску продукції. Тоді задача максимізації доходу від виробництва має вигляд задачі лінійного програмування в основній формі:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j = (c | x) &\rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.32)$$

або у векторно-матричних позначеннях

$$(c | x) \rightarrow \max; \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0. \quad (2.33)$$

Позначимо цю задачу, яку докладно дослідив Л. В. Канторович, через $3(b)$, відмічаючи таким чином її залежність від заданого вектора ресурсів b .

Нехай x^0 — розв'язок цієї задачі (оптимальний план випуску продукції). Позначимо значення екстремальної задачі (2.33) при заданому векторі b через $f(b)$, причому $f(b) = (c | x^0)$ є максимально можливим доходом при векторі наявних ресурсів b .

Легко перевірити, що $f(b)$ є угнutoю функцією b . Нехай $b', b'' \in R_+^m$ і $\alpha \in [0, 1]$. Потрібно довести, що

$$f(\alpha b' + (1 - \alpha)b'') \geq \alpha f(b') + (1 - \alpha)f(b''). \quad (2.34)$$

Нехай x' та x'' такі вектори, що $f(b') = (c | x')$, $f(b'') = (c | x'')$. Тоді

$$\alpha f(b') + (1 - \alpha)f(b'') = (\alpha x' + (1 - \alpha)x'' | c).$$

Оскільки x' та x'' є припустимими відповідно для задач $Z(b')$ та $Z(b'')$, $\alpha x' \leq b'$, $(1 - \alpha)x'' \leq b''$, звідки $\alpha(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') \leq \alpha b' + (1 - \alpha)b''$, тобто вектор $\alpha x' + (1 - \alpha)x''$ є припустимим для задачі $Z(\alpha b' + (1 - \alpha)b'')$. Звідси випливає, що значення цільової функції на цьому векторі не перевищує її максимального значення. Це доводить нерівність (2.34).

Зауважимо, що коли за плановий випуск продукції вибрати довільний вектор $x(b)$, який задовольняє обмеження задачі $Z(b)$, то функція $\phi(b) = (c | x(b))$ не обов'язково буде угнutoю.

2.5. НЕОКЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ПОВЕДІНКИ ОДНОПРОДУКТОВОЇ ФІРМИ

Неокласична теорія поведінки однопродуктової фірми за певний (відносно невеликий) період часу (скажімо, півріччя або рік) полягає в максимізації прибутку при заданій виробничій функції (технологічні зміни виробництва відсутні), заданих цінах випуску продукції та цінах факторів виробництва $w = (w_j)_{j=1, m}$ (це трактується як умови досконалої конкуренції, коли фірма, регулюючи свій попит на кількість факторів $x = (x_i)_{i=1, m}$ та свою пропозицію продукції $q = F(x)$, не намагається впливати на ціни у вигідному для себе напрямі).

У цих умовах дохід фірми R і загальні витрати C задаються виразами $R = pq = pF(x)$, $C = \sum_{j=1}^m w_j x_j = xw$, отже, прибуток фірми $\pi(x) = pF(x) - xw$.

Розв'язуючи довгострокову задачу (щодо можливості придбати ресурси), як вважається в неокласичній теорії, фірма може використовувати будь-який вектор із простору витрат. Тому така задача має вигляд

$$\pi(x) = pF(x) - xw \rightarrow \max, \quad x \in R_+^m \quad (2.35)$$

або у більш розгорнутій формі

$$\begin{aligned} \pi(x_1, \dots, x_m) &= pF(x_1, \dots, x_m) - \sum_{j=1}^m w_j x_j \rightarrow \\ &\rightarrow \max, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_m \geq 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Це задача нелінійного програмування, точніше — задача опуклого програмування, де як інструментальні змінні виступають компоненти вектора витрат x , а єдиним обмеженням є умова невід'ємності змінних ($x \geq 0$). Розв'язок задачі залежить від $(m + 1)$ параметра: p та w_1, \dots, w_m .

На відміну від довгострокової задачі, де можна довільно варіювати всіма витратами, при короткостроковій задачі (щодо можливості придбання ресурсів) з'являються обмеження щодо вибору витрат ресурсів (наприклад, через знижені ліміти, певні договірні зобов'язання тощо). В короткостроковій задачі фірма повинна вибрати вектор витрат x із заданої множини простору витрат, і тому до задачі (2.35) тут додаються обмеження типу

$$g(x) \leq h, \quad (2.37)$$

де $g: R_+^m \rightarrow R^n$, або в координатній формі

$$g_i(x_1, \dots, x_m) \leq h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.38)$$

Останні n нерівностей виражають обмеження на витрати ресурсів для певного короткострокового періоду.

Як приклад задачі прийняття фірмою виробничих рішень в короткостроковому періоді за наявності ресурсних обмежень розглянемо задачу (2.32) максимізації доходу багатопродуктової фірми в умовах виробничої технології зі сталими пропорціями витрат факторів виробництва при змінах його масштабів.

Двоїстою до цієї задачі лінійного програмування, що має векторно-матричний запис

$$(c | x) \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (2.39)$$

де x — вектор продукції; c — вектор цін на продукцію; $A = (a_{ij})_{i=1, n}^{j=1, m}$ — технологічна матриця витрат ресурсів; b — вектор ресурсів (див. кінець п. 2.4), буде задача

$$(b | p) \rightarrow \min; \quad pA \geq c, \quad p \geq 0, \quad (2.40)$$

де $p = (p_i)_{i=1, n}$ — вектор-рядок об'єктивного зумовлених оцінок ресурсів (або **тіньових цін** ресурсів).

За основними результатами теорії двоїстості лінійного програмування Л. В. Канторовича, якщо задачі (2.39) і (2.40) є припустимими (тобто їхні системи обмежень є сумісними), то обидві вони мають розв'язки x^* та p^* й однакові значення $(c | x^*) = (b | p^*)$. Якщо хоч одна з цих задач не є припустимою, то інша задача не має розв'язку. Звідси цільова функція двоїстої задачі (2.40) має розмірність грошей, а отже, компоненти вектора p мають розмірність грошей, що припадають на одиницю відповідних ресурсів. Це пояснює назву вектора p як вектора **тіньових цін** на ресурси.

Таким чином, задачу (2.40) можна інтерпретувати як задачу мінімізації тіньових видатків на вектор ресурсів за умови, що для кожного виду

продукції j тіньова ціна її одиниці $\sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij}$ не менша від реальної ціни c_j .

З теореми рівноваги теорії двоїстості лінійного програмування випливає, що в разі виконання нерівності $p_i^* > 0$ маємо $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$, тобто i -й ресурс при оптимальному плані використання ресурсів є дефіцитним (використовується повністю). Якщо $p_i^* = 0$, то i -й ресурс не є дефіцитним. Крім того, при $x_j^* > 0$ маємо рівність $\sum_{i=1}^m p_i^* a_{ij} = c_j$, тобто оптимальна ціна одиниці j продукції збігається з її реальною ціною.

Тіньові ціни p (або об'єктивно зумовлені оцінки ресурсів) характеризують цінність ресурсів і в іншому розумінні. Якщо вектор b є змінним, так що розв'язок задачі (2.39) є функцією b , $x^* = x^*(b)$, то похідна

$$\frac{\partial(c | x^*(b))}{\partial b_i} = p_i^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отже, оптимальні тіньові ціни є орієнтиром для вирішення питання, збільшення використання яких видів ресурсів зумовляє найбільше зростання доходу фірми (оскільки вектор p^* є градієнтом функції доходу фірми як функції запасу ресурсів b).

Для неокласичної теорії характерним є припущення про двічі диференційовану виробничу функцію F , що задовольняє аксіоми A1, A2, A3 з п. 2.1. Зокрема, виконуються вимоги (2.3) та (2.4), так що граничний продукт невід'ємний:

$$MP(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \right)_{i=1, m} \geq 0, \quad x \in E,$$

а матриця Гессе

$$\ddot{F}(x) = \left\{ \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1, m}, \quad x \in D$$

є від'ємно визначеною.

При цих припущеннях в умовах довгостроковості необхідними умовами оптимізації прибутку фірми першого порядку в задачі раціональної діяльності фірми $\pi(x) \rightarrow \max, x \in R_+^m$ є такі умови:

$$\frac{d\pi(x)}{dx} = p \frac{dF(x)}{dx} - w^\# \leq 0, \quad \frac{d\pi(x)}{dx} x^\# = \left(p \frac{dF(x)}{dx} - w^\# \right) x^\# = 0, \quad x \geq 0. \quad (2.41)$$

Таким чином, для всіх факторів виробництва

$$pMP_i(x) = p \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \leq w_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42)$$

$$pMP_i(x) = w_i, \quad \text{коли } x_i > 0, \quad (2.43)$$

$pMP_i(x) < w_i$, коли $x_i = 0, i = 1, \dots, m$, де $pMP_i(x)$ — вартість i -го граничного продукту в точці x , тобто вартість додаткового випуску, отриманого при використанні витрат i -го виду.

Якщо припустити, що всі фактори виробництва були використані, тобто $x > 0$, то оптимальні умови першого порядку матимуть вигляд

$$p \frac{dF(x_*)}{dx} = pMP(x_*) = w^\#. \quad (2.44)$$

тобто вартість граничних продуктів дорівнює платі за витрати факторів виробництва в одиничному розмірі, або

$$\frac{MP_1(x_*)}{w_1} = \frac{MP_2(x_*)}{w_2} = \dots = \frac{MP_m(x_*)}{w_m} = \frac{1}{p}. \quad (2.45)$$

Точка x_* з особливої області D простору витрат, де похідна $\dot{F}(x)$ від'ємно визначена, яка задовольняє рівняння (2.44), є єдиним розв'язком задачі фірми для довгострокового періоду, оскільки вона задовольняє умови оптимальності першого порядку та достатні умови оптимальності другого порядку, що виконуються автоматично (останнє встановлюється міркуваннями, подібними до тих, які наводились у задачі оптимального споживання в п. 1.4).

Розглянемо ситуацію, коли ціна p на продукцію фірми змінюється у деякому проміжку $\mathcal{P} = \{p_1, p_2\}$, а вектор цін на фактори виробництва — у деякій області \mathcal{W} в R_+^m . Тоді фірма матиме справу із сім'єю задач

$$\pi(x) = pF(x) - xw \rightarrow \max, \quad x \in R_+^m, \quad (p, w) \in \mathcal{P} \times \mathcal{W} \quad (2.46)$$

з умовами оптимальності, що мають вигляд системи рівнянь

$$\psi_i(x_*) = p \frac{\partial F(x_*)}{\partial x_i} - w_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.47)$$

Формально систему рівнянь (2.47) можна розв'язати відносно вектора оптимальних витрат факторів x_* , якщо матриця Якобі I функцій ψ_i , тобто матриця

$$I = \left\{ \frac{\partial \psi_i(x_*)}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1, m}$$

невироджена, $\det I = |I| \neq 0$. Якщо $x_* \in D$, то $I(x_*) = p\dot{F}(x_*)$, $x_* \in D, p \in \mathcal{P}$ і через від'ємну визначеність \dot{F} оптимальні рівні витрат факторів x_* справді можуть бути виражені як функції $(m+1)$ аргументів p, w_1, \dots, w_m :

$$x_{*i} = \xi_i(p, w_1, \dots, w_m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.48)$$

¹Рівність (2.45) є математичним виразом закону оптимального виробництва.

Подібні функції $\xi(p, w)$ називаються функціями попиту на витрати (фактори виробництва) для фірми. Вони виражають оптимальні набори витрат як функції цін продукції та факторів виробництва.

Функції попиту на витрати $\xi(p, w)$ є однорідними нульового степеня, оскільки, помножуючи p та w на додатний елемент шкали цін α (тобто змінюючи (p, w) на $(\alpha p, \alpha w)$), в (2.46) $\pi(x)$ замінюється на $\alpha\pi(x)$, $\alpha > 0$, що не змінює розв'язок екстремальної задачі, оскільки максимізація $\alpha\pi$ еквівалентна максимізації π за умови $x \in R_+^m$.

Таким чином,

$$\xi(\alpha p, \alpha w) = \xi(p, w) \text{ для всіх } \alpha > 0. \quad (2.50)$$

Підставляючи функції попиту на витрати $\xi(p, w)$ у виробничу функцію F , отримуємо обсяг випуску продукції як функцію цін продукції та факторів виробництва

$$q_* = F(x_*) = F(\xi(p, w)) = Q(p, w). \quad (2.51)$$

Функція $Q(p, w)$, визначена рівністю (2.51), називається функцією пропозиції випуску. Оскільки функція $\xi(p, w)$ є однорідною нульового степеня, функція пропозиції випуску $Q(p, w)$ теж має таку властивість:

$$Q(\alpha p, \alpha w) = Q(p, w) \text{ для всіх } \alpha > 0. \quad (2.52)$$

Таким чином, пропорційні зміни в цінах продукції та факторів виробництва не впливають на витрати факторів і випуск продукції.

На завершення наведемо геометричне тлумачення неокласичної задачі фірми. Розглянемо випадок двох факторів виробництва ($m = 2$). Геометрично виробничу функцію фірми $F(x_1, x_2)$ характеризують **ізокванти**, що є геометричними місцями витрат (x_1, x_2) зі сталим випуском продукції q . Для строго угнуті диференційованої функції F ізокванти утворюють поле опуклих в області D кривих, які в області E мають від'ємний нахил (кутовий коефіцієнт дотичної), різні ізокванти не перетинаються і через кожну точку (x_1, x_2) проходить тільки одна ізокванта. Геометрично функцію загальних витрат $C(x) = C(x_1, x_2)$ характеризують **ізокошти**¹, що є геометричними місцями точок простору витрат x зі сталими загальними витратами: ізокошта = $\{x = (x_1, x_2) : C = w_1 x_1 + w_2 x_2 = \text{const}\}$. Оскільки w_1 та w_2 вважаються заданими, ізокошти є сім'єю паралельних ліній із нахилом

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{ізокошта}} = -\frac{w_1}{w_2}. \quad (2.53)$$

З урахуванням результатів п. 2.2 і співвідношення (2.53) ізокванти мають нахил

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{ізокванта}} = -\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}. \quad (2.54)$$

¹Від англ. слова *isocosts*.

З умов оптимальності вектора витрат x_* фірми $pMP_1 \times (x_{*1}, x_{*2}) = w_1$, $i = 1, 2$ маємо умови дотику ізоквант та ізокошт у точках оптимальних витрат:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{ізокванта}} &= -\frac{MP_1(x_*)}{MP_2(x_*)} = \\ &= -\frac{w_1}{w_2} = \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{ізокошта}} \end{aligned}$$

(рис. 2.4).

Геометричне місце всіх точок дотику ізоквант та ізокошт є кривою в просторі витрат, яка називається **довгостроковим шляхом розширення**. Вона відображає витрати, що максимізують випуск продукції при певному рівні витратів або витрати, які мінімізують витатки на виробництво при певному рівні випуску, де рівень витратів визначається ізокоштою, а рівень випуску — ізоквантою.

Використовуючи шлях розширення, ізокванти та ізокошти, можна отримати **криву витратків** $C(q)$, що відображає витатки на виробництво як функцію випуску, тобто $C(q) = C(F(x_1, x_2)) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = C_L(x_1, x_2)$, а також криві **середніх** $AC(q)$ і **граничних витратків** $MC(q)$: $AC(q) = C(q)/q$, $MC(q) = dC(q)/dq$. Зауважимо, що ці криві стосуються довгострокової задачі фірми. Подібний підхід можна також застосувати і для короткострокової задачі фірми.

2.6. ПОРІВНЯЛЬНА СТАТИКА ФІРМИ

Основними проблемами статистики фірми є дослідження чутливості функцій оптимальних витрат (попиту на фактори) та випуску продукції фірмою (пропозиції випуску) до зміни цінкових параметрів задачі оптимальної поведінки фірми.

Підставляючи функцію попиту на витрати $\xi(p, w)$ та функцію пропозиції випуску продукції $Q(p, w)$ у рівняння, що відображають умови оптимальності (2.44) та виробничу функцію F , матимемо $(m+1)$ тотожностей

$$\begin{aligned} Q(p, w) &= F(\xi(p, w)), \\ p \frac{dF}{dx}(\xi(p, w)) &= w. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Показники чутливості ξ і Q до параметрів p та w можна отримати диференціюванням тотожностей (2.55) по p і w .

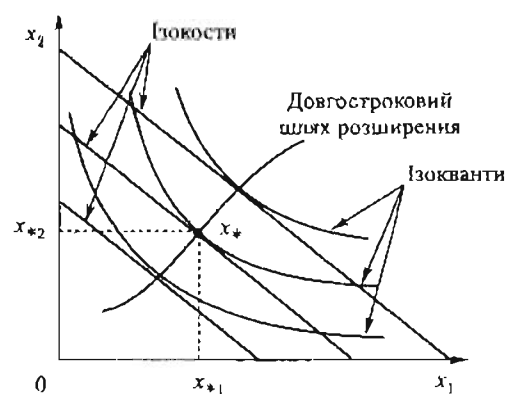


Рис. 2.4

Розглянемо спочатку вплив змін ціни випуску p . Диференціюючи (2.55) по p , дістаємо $(m+1)$ рівняння

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial p};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial p} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.56)$$

відносно похідних $\partial Q / \partial p$ та $\partial \xi_i / \partial p$, $i = 1, \dots, m$, які можна подати у векторно-матричних позначеннях як

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{dF}{dx} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#}; \quad \left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#} + p \ddot{F} \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#} = 0. \quad (2.57)$$

Похідна $\partial Q / \partial p$ характеризує вплив зміни ціни випуску на його оптимальний обсяг, а похідна $\partial \xi / \partial p$ — вплив зміни ціни продукції на оптимальні витрати:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\frac{\partial \xi_i(p, w)}{\partial p} \right)_{i=1, m}.$$

Рівняння (2.57) можна записати у вигляді одного векторного рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p \ddot{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Розглянемо вплив змін у ціні фактора j -го виду Q і ξ . Диференціюючи (2.55) по w_j , дістанемо систему лінійних рівнянь:

$$\frac{\partial Q}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial w_j};$$

$$p \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial w_j} = \delta_{jk}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.59)$$

де δ_{jk} — дельта Кронекера.

У векторній формі рівняння (2.59) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial w}; \quad p \ddot{F} \frac{\partial \xi}{\partial w} = E_m, \quad (2.60)$$

де похідна $\partial Q / \partial w = \left(\partial Q / \partial w_j \right)_{j=1, m}$ характеризує вплив зміни в цінах факторів на продукцію, похідна $\partial \xi / \partial w = \left\{ \partial \xi_i / \partial w_j \right\}_{j=1, m}^{i=1, m}$ — вплив змін цін факторів на витрати факторів, а E_m — одинична матриця розміром $m \times m$, $E_m = \{ \delta_{jk} \}_{j=1, m}^{k=1, m}$.

Зауважимо, що рівняння (2.60) можна записати, користуючись блоковими матрицями у вигляді одного рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p \ddot{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_m \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Можна об'єднати рівняння (2.58) і (2.61), подавши їх у формі

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p \ddot{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#} & E_m \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Рівняння (2.62) називається **основним рівнянням теорії фірми**.

Оскільки в особливій області D матриця \ddot{F} — від'ємно визначена і невинуджена, застосовуючи правило обертання блокових матриць, установлюємо, що в D існує обернена матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p \ddot{F} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{p} \frac{dF}{dx} \ddot{F}^{-1} \\ 0 & \frac{1}{p} \ddot{F}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Тому в області D існує розв'язок рівняння (2.62) щодо показників порівняльної статистики фірми:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{dF}{dx} \\ 0 & p \ddot{F} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#} & E_m \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Використовуючи рівність (2.63), розв'язок (2.64) рівняння (2.62) можна записати в явному вигляді:

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{1}{p} \left(\frac{dF}{dx} \right) \ddot{F}^{-1} \left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#}; \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} \right)^{\#} = -\frac{1}{p} \ddot{F}^{-1} \left(\frac{dF}{dx} \right)^{\#};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \frac{1}{p} \left(\frac{dF}{dx} \right) \ddot{F}^{-1}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial w} = \frac{1}{p} \ddot{F}^{-1}. \quad (2.65)$$

Оскільки \ddot{F} є від'ємно визначеною похідною в області D , матриця \ddot{F}^{-1} також є від'ємно визначеною в цій області, а отже, з першої рівності (2.65) випливає, що $\partial Q / \partial p > 0$. Таким чином, зростають цін на продукцію завжди зумовлює збільшення оптимального рівня її випуску, тобто крива пропозиції випуску продукції є зростаючою.

З того факту, що

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{dF}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial p} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0, \quad (2.66)$$

випливає, що в особливій області, де всі граничні продукти невід'ємні, деякі з похідних $\partial \xi_i / \partial p$, $i = 1, \dots, m$ мають бути додатними, тобто існує таке i , що

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p} > 0. \quad (2.67)$$

Таким чином, збільшення ціни на продукцію має зумовлювати зростання її пропозиції, а отже, і підвищення попиту на деякі види витрат.

За означенням витрати i -го виду (виробничі фактори i -го виду) називаються **малоцінними**, коли $\partial \xi_i / \partial p < 0$, тобто коли їх споживання при підвищенні цін на продукцію спадає.

Із (2.67) випливає, що *не всі фактори виробництва одночасно можуть бути малоцінними*. Друга та третя рівності у співвідношеннях (2.65) показують, що

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = -\frac{\partial \xi}{\partial p} \text{ або } \frac{\partial Q}{\partial w_j} = -\frac{\partial \xi_j}{\partial p}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.68)$$

Тому зростання ціни на продукцію зумовлює підвищення (спадання) попиту на певні види факторів виробництва тоді, і тільки тоді, коли збільшення плати за цей вид факторів спричинює скорочення (збільшення) оптимального випуску продукції. Зокрема, збільшення плати за малоцінні фактори зумовлює зростання випуску.

Із (2.66) та (2.68) випливає, що

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{dF}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial p} = -\frac{dF}{dx} \frac{\partial Q}{\partial w} = -\sum_{i=1}^m \frac{dF}{dx_i} \frac{\partial Q}{\partial w_i} > 0,$$

тому в особливій області $\partial Q / \partial w_i < 0$ для деякого i , $i = 1, \dots, m$, тобто збільшення плати на деякий вид факторів має призвести до зменшення випуску продукції.

З останньої рівності (2.65) випливає, що матриця $\partial \xi / \partial w$ — симетрична та від'ємно визначена. Зокрема, її елементи на головній діагоналі є від'ємними ($\partial \xi_i / \partial w_i < 0$, $i = 1, \dots, m$).

Таким чином, підвищення плати за витрати фактора деякого виду завжди призводить до зменшення попиту на ці витрати. На відміну від теорії споживання для фірми не можуть існувати витрати типу Гіффена, оскільки фірма, на відміну від звичайного споживача, не повинна задовольняти бюджетне обмеження, тому криві попиту на витрати завжди є спадними.

Матриця $\partial \xi / \partial w$ — симетрична: $\partial \xi_i / \partial w_j = \partial \xi_j / \partial w_i$, $i, j = 1, \dots, m$. Тому вплив зміни плати за фактори j -го виду на попит фактора i -го виду однаковий.

За означенням, фактори i -го та j -го видів є **взаємозамінними** (взаємодоновнювальними), якщо $\partial \xi_i / \partial w_j > 0$ ($\partial \xi_i / \partial w_j < 0$). Через це у випадку, коли плата за фактори i -го виду зростає так, що обсяг попиту на ці фактори спадає, попит на фактори j -го виду збільшується (зменшується), якщо фактори є взаємозамінними (взаємодоновнювальними).

2.7. ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ ТА МІНІМІЗАЦІЇ ВИДАТКІВ ФІРМИ

Задача максимізації випуску продукції фірмою в довгостроковому періоді із заданим обсягом виробничих видатків c і технологією, що описується виробничою функцією $F(x)$, $x \in R_+^m$, має вигляд

$$F(x) \rightarrow \max; \quad xw \leq c, \quad x \geq 0, \quad (2.69)$$

де $w = (w_j)^{j=1,m}$ — вектор-стовпець цін факторів виробництва.

Ця задача угнутого програмування, згідно з теорією якого необхідні умови першого порядку оптимальності вектора витрат x^* у термінах функції Лагранжа задачі

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda(c - xw)$$

мають вигляд

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} = MP(x^*) - \lambda^* w \leq 0; \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* = (MP(x^*) - \lambda^* w) x^* = 0; \quad (2.71)$$

$$x^* \geq 0, \quad c = x^* w, \quad \lambda^* > 0,$$

де λ^* — відповідне значення множника Лагранжа λ .

З умов (2.70) і (2.71) випливає, що для тих факторів виробництва j , які використовуються в дійсності,

$$MP_j(x^*) = \lambda^* w_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.72)$$

а оптимальний вектор x^* лежить на гіперплощині, що відповідає повному використанню заданого рівня видатків:

$$\sum_{j=1}^m w_j x_j^* = c, \quad x_j^* > 0 \quad (2.73)$$

Розв'язок системи рівнянь (2.72), (2.73) при змінних w та c є **функцією попиту фірми на фактори виробництва**, що максимізує випуск продукції при рівні видатків c :

$$x_j^* = \xi_j(w, c), \quad j = 1, \dots, m$$

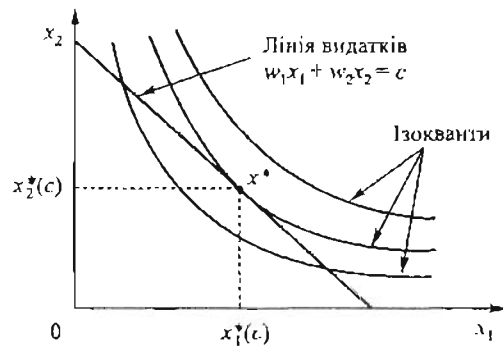


Рис. 2.5

рез точку x^* , оскільки в x^* гранична норма технологічного заміщення:

$$MRTS_{1,2}(x^*) = \frac{MP_1(x^*)}{MP_2(x^*)}$$

задовольняє умову

$$-\frac{MP_1(x^*)}{MP_2(x^*)} = -\frac{w_1}{w_2}$$

(рис. 2.5).

Порівняємо розв'язок x_* неокласичної задачі фірми на максимізацію прибутку та розв'язок задачі фірми на максимізацію випуску продукції x^* . Зауважимо, що при сталій ціні на продукцію p вектор x^* також максимізує дохід фірми $pF(x^*)$.

Пропозиція 2.1. Якщо неокласична задача фірми на максимізацію прибутку має єдиний розв'язок $x_* > 0$ (це виконується, коли виробнича функція F строго угнута), то відповідна задача на максимізацію випуску продукції за умови, що заданий рівень видатків $c = x_* w$, також має єдиний розв'язок x^* , причому $x^* = x_*$.

✓ Справді, з одного боку,

$$\frac{dF(x_*)}{dx} = \frac{1}{p} w; \quad x_* w = c; \quad \pi(x_*) \geq \pi(x^*),$$

а з другого

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = \lambda^* w, \quad x^* w = c; \quad F(x^*) \geq F(x_*).$$

Оскільки

$$\pi(x_*) = pF(x_*) - x_* w \geq pF(x^*) - x^* w = \pi(x^*) \text{ і } x_* w = x^* w = c, \text{ маємо } F(x_*) \geq F(x^*). \text{ Однак } F(x^*) \geq F(x_*) \text{ і тому через єдиність розв'язку } x^* = x_*.$$

Наслідок. Множник Лагранжа $\lambda^*(w, c)$ задачі фірми на максимізацію випуску продукції пов'язаний з її ціною співвідношенням $\lambda^*(w, x_* w) = \frac{1}{p}$.

і визначає функцію пропозиції продукції цією фірмою:

$$Q(w, c) = F(\xi(w, c));$$

$$\xi(w, c) = (\xi_j(w, c))_{j=1, m}.$$

Геометрично у випадку двох факторів виробництва ($m = 2$) умови (2.72) та (2.73) означають, що вектор оптимального використання ресурсів x^* є точкою дотику ізокошти $x^* w = c$ до ізокванти, яка проходить че-

Справді, цей факт випливає з пропозиції 2.1, рівняння (2.72) та рівняння (2.44).

Розглянемо двоїсту до попередньої задачі максимізації випуску продукції задачу оптимальної поведінки фірми, орієнтованої на мінімізацію виробничих видатків при заданому рівні q пропозиції (обсязі виробництва) фірми. Ця задача є задачею угнутого програмування:

$$C(x) = xw \rightarrow \min; \quad F(x) = q, \quad x \geq 0. \quad (2.74)$$

Використовуючи лагранжіан цієї задачі

$$L(x, \lambda) = xw + \lambda(q - F(x)),$$

маємо такі умови оптимальності вектора витрат x^* :

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = w_j - \lambda^* MP_j(x^*) \geq 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x} x^* - \sum_{j=1}^m [w_j - \lambda^* MP_j(x^*)] x_j^* = 0, \quad (2.76)$$

$$F(x^*) = q, \quad x^* \geq 0.$$

Це означає, що у випадку, коли всі фактори виробництва були використані ($x_j^* > 0, j = 1, \dots, m$), виконуються умови

$$w - \lambda^* MP(x^*) = 0, \quad q = F(x^*). \quad (2.77)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.77) при змінних параметрах w та q , знаходимо відповідну функцію попиту фірми на ресурси

$$x^* = \xi(w, q),$$

функцію видатків фірми

$$C(w, q) = C(\xi(w, q))$$

та функцію прибутків фірми

$$\pi(w, q) = pq - C(\xi(w, q))$$

як функції параметрів w і q задачі (2.74).

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі мінімізації видатків для двох факторів виробництва ($m = 2$). У ньому разі відношення перших двох рівнянь системи (2.77) дає умову

$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{MP_1(x^*)}{MP_2(x^*)} = MRTS(x^*), \quad (2.78)$$

яка є умовою дотику ізокванти, що проходить через точку x^* простору витрат R_+^2 , до ізокошти $w_1 x_1 + w_2 x_2 = C(x^*)$.

Порівнюючи здобуті результати для задачі мінімізації витраток фірми з розв'язком x_* неокласичної задачі максимізації прибутків фірми, бачимо, що в разі оптимальної пропозиції $q = q_* = F(x_*)$ для останньої задачі розв'язок задачі мінімізації витраток x^* задовольнятиме співвідношення

$$x^*(w, q_*) = \xi(w, q_*) = x_*(w),$$

так що

$$\lambda^*(w, q_*) = \frac{w_j}{MP_j(x_*)} = p.$$

Спираючись на взаємозв'язку задач максимізації випуску продукції (2.69) та мінімізації витраток (2.74). Припустимо, що ціни w в цих задачах є фіксованими й однаковими. Якщо $x^*(c)$ і $q^* = Q(c) = F(x^*(c))$ — розв'язок задачі максимізації випуску продукції (2.69) та $x^*(q)$, $C(q) = x^*(q)w$ — розв'язок задачі мінімізації витраток (2.74), то при $c = C(q)$ в задачі (2.69) маємо $q^* = Q(c) = q$, якщо $q = Q(c)$ в задачі (2.74), то $C(q) = c$.

Розглянемо кілька прикладів, пов'язаних із вивченими вище задачами оптимальної поведінки фірми в різних умовах.

Приклад 2.9. Знайти аналітичну форму зв'язку множника Лагранжа λ^* задачі максимізації випуску продукції (2.69) та відповідної функції пропозиції $Q(w, c)$.

Обчислимо частинну похідну $\frac{\partial Q(w, c)}{\partial c}$. З означення функції $Q(w, c)$ випливає, що

$$\frac{\partial Q(w, c)}{\partial c} = \frac{\partial F(\xi(w, c))}{\partial c} = \sum_{j=1}^m MP_j(\xi(w, c)) \frac{\partial \xi_j(w, c)}{\partial c}.$$

Оскільки за умовою оптимальності (2.72)

$$MP_j(\xi(w, c)) = \lambda^* w_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

то

$$\frac{\partial Q(w, c)}{\partial c} = \lambda^* \sum_{j=1}^m w_j \frac{\partial \xi_j(w, c)}{\partial c}.$$

Із рівняння (2.73) випливає, що

$$\sum_{j=1}^m w_j \frac{\partial \xi_j(w, c)}{\partial c} = 1.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial Q(w, c)}{\partial c} = \lambda^*.$$

а отже, множник Лагранжа задачі (2.69) може бути інтерпретований як граничний випуск за витратками фірми, що максимізує випуск продукції.

Приклад 2.10. Знайти аналітичну форму зв'язку множника Лагранжа λ^* задачі мінімізації витраток (2.74) та відповідної функції витраток фірми $C(w, q)$.

Обчислимо частинну похідну $\frac{\partial C(w, q)}{\partial q}$. Із визначення функції $C(w, q)$ випливає, що

$$\frac{\partial C(w, q)}{\partial q} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \xi_j(w, q)}{\partial q} w_j.$$

Оскільки за першою умовою оптимальності (2.77)

$$w_j = \lambda^* MP_j(\xi(w, q)),$$

то

$$\frac{\partial C(w, q)}{\partial q} = \lambda^* \sum_{j=1}^m \frac{\partial \xi_j(w, q)}{\partial q} MP_j(\xi(w, q)).$$

Диференціюючи другу умову оптимальності (2.77) за параметром q , знаходимо

$$\sum_{j=1}^m MP_j(\xi(w, q)) \frac{\partial \xi_j(w, q)}{\partial q} = 1.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial C(w, q)}{\partial q} = \lambda^*,$$

а отже, множник Лагранжа задачі (2.74) може бути інтерпретований як граничні витрати випуску фірми (тобто додаткові витрати, які припадають на додаткову малу одиницю випуску продукції).

Зауважимо також, що з означення функції витраток $C(w, q)$ безпосередньо випливає

$$\frac{\partial C(w, q)}{\partial w_j} = \xi_j(w, q), \quad j = 1, \dots, m.$$

Приклад 2.11. Нехай фірма має мультиплікативну виробничу функцію $F(K, L) = AK^a L^b$, $A > 0$, $a > 0$, $b > 0$ в двовимірному просторі агрегованих факторів виробництва (K, L) й орієнтована на максимізацію прибутку за певний довгостроковий період часу. Знайти функції попиту фірми на капітал і працю.

У неокласичній задачі максимізації прибутку фірми умови оптимальності першого порядку мають вигляд

$$p \frac{\partial F}{\partial K} - w_1 = 0; \quad p \frac{\partial F}{\partial L} - w_2 = 0,$$

де w_1 — ціна одиниці виробничого капіталу, а w_2 — ціна одиниці праці. Помноживши перше рівняння на K і друге рівняння на L , отримаємо

$$paAK^a L^b - w_1 K = 0; \quad pbAK^a L^b - w_2 L = 0$$

Звідси

$$K_* = \frac{paF_*}{w_1}; \quad L_* = \frac{pbF_*}{w_2} \quad (2.79)$$

Із тотожності

$$A \left(\frac{paF_*}{w_1} \right)^a \left(\frac{pbF_*}{w_2} \right)^b = F(K_*, L_*) = F_*$$

випливає, що ця функція пропозиції фірми має вигляд

$$Q(p, w_1, w_2) = F_* = A \left(\frac{pa}{w_1} \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{pb}{w_2} \right)^{\frac{b}{1-a-b}} \quad (2.80)$$

(зокрема, вона не є визначеною для випадку виробничої функції Коббі — Дугласа, коли $a + b = 1$, і це пояснює необхідність такого узагальнення функції Коббі — Дугласа як мультиплікативної виробничої функції).

Підставляючи (2.80) у (2.79), знаходимо функції попиту фірми на капітал та працю:

$$K^* = K^*(p, w_1, w_2) = A \left(\frac{pw_1}{w_2} \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{bp}{w_2} \right)^{\frac{b}{1-a-b}},$$

$$L^* = L^*(p, w_1, w_2) = A \left(\frac{pw_1}{w_2} \right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{bp}{w_2} \right)^{\frac{b}{1-a-b}-1}.$$

Приклад 2.12. Розглянемо задачу максимізації випуску продукції при заданому рівні витрат c для фірми з мультиплікативною виробничою функцією, заданою в попередньому прикладі $q = AK^a L^b \rightarrow \max$; $w_1 K + w_2 L = c$, $K, L \geq 0$.

Лагранжіан задачі має вигляд

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = AK^a L^b + \lambda(c - w_1 K - w_2 L).$$

Умовами оптимальності, згідно з (2.72) та (2.73), є такі рівняння:

$$aAK^{a-1}L^b = \lambda w_1; \quad bAK^a L^{b-1} = \lambda w_2; \quad c = w_1 K + w_2 L.$$

Із відношення перших двох рівнянь випливає, що $L = \frac{bw_1}{aw_2} K$. Підставляючи цей вираз у третє рівняння, знаходимо

$$c = K \left(w_1 + \frac{b}{a} w_2 \right) = K w_1 \left(\frac{a+b}{a} \right).$$

Звідси функції попиту фірми на фактори виробництва мають вигляд

$$K^*(w_1, w_2, c) = \frac{c}{w_1} \frac{a}{a+b}; \quad L^*(w_1, w_2, c) = \frac{c}{w_2} \frac{b}{a+b}.$$

Тому функція пропозиції фірми

$$Q(w_1, w_2, c) = F(K^*, L^*) = \frac{c^{a+b}}{w_1^a w_2^b (a+b)^{a+b}}.$$

Приклад 2.13. Розглянемо задачу мінімізації витрат фірми при заданому рівні q випуску продукції, коли технологія виробництва описується CES-функцією

$$F(K, L) = (K^\rho + L^\rho)^{1/\rho}$$

із параметром $\rho \geq -1$. Ця задача має вигляд

$$w_1 K + w_2 L \rightarrow \min, \quad K^\rho + L^\rho = q^\rho, \quad K, L \geq 0.$$

Лагранжіан задачі задається рівністю

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = w_1 K + w_2 L + \lambda(q^\rho - K^\rho - L^\rho),$$

а умови оптимальності згідно з (2.77) є рівняннями

$$w_1 - \lambda \rho K^{\rho-1} = 0; \quad w_2 - \lambda \rho L^{\rho-1} = 0, \quad K^\rho + L^\rho = q^\rho$$

Розв'язавши перші два рівняння відносно K^ρ і L^ρ , дістанемо

$$K^\rho = w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\lambda \rho)^{\frac{\rho}{\rho-1}}; \quad L^\rho = w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\lambda \rho)^{\frac{\rho}{\rho-1}}. \quad (2.81)$$

Підставляючи (2.81) у третє рівняння умов, знайдемо вираз для $(\lambda \rho)^{\frac{\rho}{\rho-1}}$, а підставляючи його в (2.81) — функції попиту фірми на ресурси:

$$K^*(w_1, w_2, q) = w_1^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-1} q^\rho,$$

$$L^*(w_1, w_2, q) = w_2^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-1} q^\rho. \quad (2.82)$$

Підставивши (2.82) у вираз витрат, матимемо таку функцію витратів фірми.

$$C(w_1, w_2, q) = q \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}$$

Якщо позначити $r = \frac{\rho}{\rho-1}$, то функція витратів для технології CES матиме ту саму функціональну форму, що й CES-функція:

$$C(w_1, w_2, q) = q \left[w_1^r + w_2^r \right]^{1/r}.$$

У загальнішому випадку, коли

$$F(K, L) = \left[(aK)^r + (bL)^r \right]^{1/r}, \quad a, b > 0,$$

подібні підрахунки дають

$$C(w_1, w_2, q) = q \left[\left(\frac{w_1}{a} \right)^r + \left(\frac{w_2}{b} \right)^r \right]^{1/r}.$$

2.8. ФІРМА В УМОВАХ МОНОПОЛІЇ ТА МОНОПСОНІЇ

Попередній розгляд побудований на класичному припущенні про **доскопалу конкуренцію**, тобто на тому, що фірма розробляє лінію своєї поведінки, виходячи із заданих цін продукції та цін факторів виробництва, і не намагається своїми діями впливати на ці ціни. Однак на практиці у більшості випадків ці припущення не виконуються, тобто виникає ситуація, яка називається **недоскопалою конкуренцією**. До найпростіших (з погляду можливостей їх аналізу) різновидів недосконалої конкуренції належать **монополія** та **монопсонія**. Фірма володіє деякою **монополюю владою**, якщо вона здатна впливати на ціну продукції, а монопсонія дає владу впливати на ціни факторів виробництва.

Фірма-монополіст може впливати на ціну продукції варіюванням обсягів випуску своєї продукції, для якої криву попиту можна записати як функцію вигляду $p = p(q)$. Ця функція характеризує ціну, яку фірма може призначити за різних умов пропозиції продукції. Фірма-монополіст може також дотримуватися різних політик, одна з них полягає у збільшенні виробництва та пропозиції випуску продукції разом із деяким зниженням ціни на неї, друга — у впливі на підвищення ціни продукції

разом зі зменшенням її випуску та пропозиції, третя — може полягати у певному чергуванні перших двох політик. Дотримання будь-якої із зазначених вище політик означає, що для функції $p(q)$ виконується умова

$$\frac{dp}{dq} < 0. \quad (2.83)$$

Валовий дохід фірми-монополіста R є функцією випуску q вигляду $R(q) = p(q)q$, а граничний дохід MR — характеристикою зміни валового доходу залежно від зміни випуску продукції:

$$MR(q) = \frac{dR(q)}{dq} = p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q. \quad (2.84)$$

Ураховуючи характерну для монополіста умову (2.83), у випадку монополії граничний дохід виявляється меншим за ціну, тобто $MR(q) < p(q)$.

Монополіст може вплинути на ціну факторів виробництва, оскільки він здійснює закупівлю факторів у досить значних розмірах, варіюючи обсяги покупок тих чи тих видів факторів. Таким чином, для монополіста ціни на фактори є функціями його попиту на них: $w_j = w_j(x_j)$, $j = 1, \dots, m$. Ці функції характеризують плату фірми за витрати при різних рівнях попиту на них. Взагалі фірма може закуповувати більшу кількість конкретного фактора виробництва, запропонувавши вищу плату за нього, або впливати на зменшення цін на фактор, скоротивши попит на нього.

Таким чином, для монополіста характерним є співвідношення

$$\frac{dw_j}{dx_j} > 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.85)$$

Оскільки вартість витрат j -го виду (витатки та фактори j -го типу) можна подати у вигляді $C_j(x_j) = w_j(x_j)x_j$, а гранична вартість витрат j -го виду відображає зміни у вартості цих витрат, то

$$MC_j(x_j) = \frac{dC_j(x_j)}{dx_j} = w_j + \frac{dw_j}{dx_j}x_j. \quad (2.86)$$

Згідно з (2.85), у випадку монополії гранична вартість витрат перевищує їх оплату, тобто

$$MC_j(x_j) > w_j.$$

Ураховуючи викладене вище, можна сформулювати задачу фірми, яка випускає досить значну кількість продукції заданого типу, займаючи значний сегмент ринку подібної продукції і використовуючи чималу кількість необхідних для подібного виробництва типів факторів. Для такої фірми, що діє в умовах недосконалої конкуренції, задача оптимальної поведінки полягає в максимізації прибутку варіюванням випуску q та витрат фак-

торів x_1, \dots, x_m за умови їх залежності через виробничу функцію фірми:

$$\pi(q, x) = p(q)q - \sum_{j=1}^m w_j(x_j)x_j \rightarrow \max; \quad q = F(x_1, \dots, x_m). \quad (2.87)$$

Вводячи множник Лагранжа λ та функцію Лагранжа L задачі (2.87)

$$L(q, x_1, \dots, x_m, \lambda) = p(q)q - \sum_{j=1}^m w_j(x_j)x_j + \lambda(F(x_1, \dots, x_m) - q),$$

можна записати необхідні умови оптимальності першого порядку для цієї задачі у вигляді рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q} &= p(q) + \frac{dp(q)}{dq}q - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -w_i(x_i) - \frac{dw_i}{dx_i}x_i + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, \dots, m; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= F(x_1, \dots, x_m) - q = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, необхідні умови оптимальності матимуть вигляд

$$\lambda = p + \frac{dp}{dq}q = MR(q); \quad (2.88)$$

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} = w_i + \frac{dw_i}{dx_i}x_i = MC_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.89)$$

$$q = F(x_1, \dots, x_m) \quad (2.90)$$

(тут використано рівності (2.84) і (2.86)).

Поєднуючи умови (2.88) та (2.89), маємо співвідношення

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x_j} = MR(q)MP_j(x) = w_j + \frac{dw_j}{dx_j}x_j = MC_j(x_j); \quad j = 1, \dots, m.$$

Остання умова (2.90) відображає виробничу функцію.

Таким чином, для визначення n видів затрат і випуску продукції для фірми в умовах описаної вище недосконалої конкуренції маємо $(m+1)$ умову:

$$MR(q_*)MP_j(x_1, \dots, x_m) = MC_j(x_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

$$q_* = F(x_1, \dots, x_m),$$

де граничний дохід MR та граничні витатки MC_j визначаються рівностями (2.84) і (2.86).

Урахувавши, що для всіх j , $j = 1, \dots, m$,

$$\frac{MC_j(x_j)}{MP_j(x_1, \dots, x_m)} = \frac{\partial C_j / \partial x_j}{\partial F / \partial x_j} = \frac{\partial C / \partial x_j}{\partial q / \partial x_j} = \frac{dC}{dq} = MC(q).$$

можемо переписати умови оптимальності для фірми в ситуації недосконалої конкуренції у вигляді $MIR(q_*) = MC(q_*)$, $F(x_*) = q_*$.

2.9. ОЛІГОПОЛІЯ ТА ОЛІГОПСОНІЯ

Важливим випадком недосконалої конкуренції є **конкуренція серед небагатьох**. Остання визначається як ринкова ситуація та механізм, коли діє невелика кількість фірм. Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є той факт, що всі конкуруючі фірми певною мірою можуть впливати на ціни продукції та виробничих факторів. Отже, прибуток кожної фірми залежить від політики решти конкуруючих фірм. Тому, щоб визначити оптимальну політику, спрямовану на максимізацію прибутку, кожна фірма повинна врахувати не тільки свій безпосередній вплив на ринки товарів, послуг (продукції) і ресурсів (факторів), а й побічний — через взаємодію своїх конкурентів.

Така ринкова структура, коли на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють весь ринок і кілька з цих фірм займають значні частини ринку, називається **олігополією**. Подібна ситуація на ринку ресурсів, коли попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, на окремі з яких припадають значні частки попиту, називається **олігопсонією**.

Для побудови математичних моделей подібних видів недосконалої конкуренції застосовують різний математичний апарат, що відображає різні політики агентів та ситуації на ринках з конкуренцією серед небагатьох. Значну роль при цьому відіграють математичні моделі конфлікту, зокрема, моделі теорії стратегічних ігор. Тут обмежимося класичними результатами для **дуополії** (олігополії з двома конкурентами).

Нехай дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, що відображаються їхніми виробничими функціями

$$q_j = F_j(x_1^j, \dots, x_m^j), \quad j = 1, 2, \quad (2.91)$$

де q_j — випуск продукції j -ю фірмою, а $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j)$ — її витрати.

Тоді ціни на продукцію визначаються обома рівнями випуску $p = p(q_1, q_2)$. Наприклад, якщо обидва випуски зростають, то ціна p спадає: $\partial p / \partial q_1 < 0$, $\partial p / \partial q_2 < 0$. Ціна будь-якого виду витрат залежатиме від їх закупівлі обома фірмами, тобто $w_i = w_i(x_1^1, x_1^2)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Напри-

клад, коли фірми збільшують попит на витрати i , то ціна на них зростає:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0; \quad \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Якщо виразити першу фірму оперуючою стороною, а дії другої фірми — неконтрольованими факторами для оперуючої сторони і прийняти за критерій ефективності дій першої фірми її функцію прибутку π_1 , то завдання першої фірми полягає у знаходженні стратегії $(q_1, x_1^1, \dots, x_m^1)$, що по можливості максимізує функцію прибутку

$$\pi_1 = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^m w_i(x_1^1, x_i^2)x_i^1 \quad (2.92)$$

за умови (2.91). Функція Лагранжа L подібної екстремальної задачі має вигляд

$$L = \pi_1 + \lambda(F_1(x^1) - q_1), \quad (2.93)$$

де λ — відповідний множник Лагранжа.

Умови екстремальності першого порядку тоді мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= p(q_1, q_2) + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_i^1} &= -w_i - x_i^1 \frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} - x_i^1 \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0; \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1(x^1) - q_1 = 0.$$

Виключаючи з рівнянь (2.94) множник λ , можна записати $(m+1)$ умову екстремальності

$$\begin{aligned} p + q_1 \left(\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial p}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} &= w_i + x_i^1 \frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}, \\ i &= 1, \dots, m, \quad q_1 = F_1(x^1). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Екстремальна задача, що розглядається, є задачею багатокритеріальної оптимізації, оскільки критерій (2.92) залежить від стратегії $(q_2, x_1^2, \dots, x_m^2)$ другої фірми. Вирази

$$\partial q_2 / \partial q_1; \quad \partial x_i^2 / \partial x_i^1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.96)$$

що входять в умови (2.95), називаються **гаданими варіаціями**, оскільки перша фірма повинна при розгляді свого завдання зробити деякі припущення про поведінку конкурента та його реакцію на обрану нею політику,

а отже, і на поведінку виразів (2.96), перший з яких показує зміни у випуску продукції другою фірмою щодо змін q_1 , а другий — у витратах щодо змін відповідних витрат першої фірми.

Подальший аналіз залежить від різних припущень про поведінку виразів (2.96), кожний з яких зумовлює окремий аналіз конкурентної ситуації. Розглянемо деякі з подібних альтернатив для найпростіших випадків, коли говорять, що виробляється є однорідним, граничні видатки — сталими, функція попиту — лінійна, тобто $p = a - b(q_1 + q_2)$, $a > 0$, $b > 0$, а функції видатків мають вигляд $C_i = cq_i + d$, $c > 0$, $d > 0$, $i = 1, 2$, де c — граничні видатки, d — фіксовані видатки. Тоді перша фірма має прибуток

$$\pi_1 = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1 - d, \quad (2.97)$$

який вона хоче максимізувати вибором випуску своєї продукції q_1

Умова екстремальності першого порядку для (2.97) має вигляд

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = [a - b(q_1 + q_2)] - bq_1 \left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - c = 0. \quad (2.98)$$

Аналіз дуополії Курно ґрунтується на припущенні, що гадані варіації $\partial q_2 / \partial q_1$ та $\partial q_1 / \partial q_2$ — нульові, тобто кожний з дуополістів вважає, що зміни у випуску його продукції не впливають на конкурента. Тоді **рівновага Курно** — це пара рівнів випуску (q_1, q_2) , яка задовольняє умови

$$\left. \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \right|_{\partial q_2 / \partial q_1 = 0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} \right|_{\partial q_1 / \partial q_2 = 0} = 0. \quad (2.99)$$

З урахуванням (2.98) умови (2.99) набувають вигляду $a - b(q_1 + q_2) - bq_i - c = 0$, $i = 1, 2$, звідки рівновага Курно задається рівностями:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b}; \quad p = \frac{a + 2c}{3}; \quad q = \frac{2(a - c)}{3b}. \quad (2.100)$$

Подібні результати можна поширити на випадок довільної кількості фірм f . Рівновага Курно (2.100) для цієї ситуації має вигляд

$$q_j = \frac{a - c}{(f + 1)b}, \quad j = 1, 2, \dots, f; \quad p = \frac{a + fc}{f + 1};$$

$$q = \frac{f}{f + 1} \cdot \frac{(a - c)}{b}. \quad (2.101)$$

Якщо кількість фірм f необмежено зростає, то рівновага Курно прямує до рівноваги в умовах досконалої конкуренції. Коли $f \rightarrow \infty$, то $q_j \rightarrow 0$, а $p \rightarrow c$, що є граничними видатками.

При більш складному аналізі припускаються ненульові гадані варіації. Подібним прикладом є аналіз дуополії **Стекельберга**, коли одна або дві фірми вважають, що конкурент поводитиме себе як дуополіст Курно.

Нехай перша фірма вважає, що друга реагуватиме згідно з функцією реакції Курно, тобто

$$q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}. \quad (2.102)$$

Тоді гадає варіація $\partial q_2 / \partial q_1 = -1/2$. Використовуючи (2.98), маємо $a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c + (bq_1)/2 = 0$, звідки реакція першої фірми на (2.102) буде $q_1 = 2(a - c - bq_2)/3b$. Отже, результати для обох фірм залежать від поведінки другої фірми. Якщо вона вибирає реакцію Курно, як вважає перша фірма, то рішенням є **рівновага Стекельберга** для першої фірми: $q_1 = (a - c)/2b$, $q_2 = (a - c)/4b$. Таким чином, перша фірма має вдвічі більший прибуток, ніж друга. Проте коли друга фірма не використовує реакцію Курно, а діє згідно з реакцією Стекельберга, тобто кожна фірма неправильно вважає, що інша використовує пайвне припущення Курно, маємо **нерівновагу Стекельберга** $q_1 = q_2 = 2(a - c)/5b$, згідно з якою фірми отримують менший прибуток, ніж за рівновагою Курно.

Серед інших можливостей розглянемо ще **кооперативне рішення** обох фірм в дуополії максимізувати загальний прибуток (утилітарне рішення). Воно описується екстремальною задачею

$$\pi(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) + \pi_2(q_1, q_2) =$$

$$= [a - b(q_1 + q_2)](q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \rightarrow \max.$$

Розв'язок має задовольняти умову

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = [a - b(q_1 + q_2)] - b(q_1 + q_2) - c = 0,$$

звідки $q_1 + q_2 = (a - c)/2b$.

Зауважимо, що деякі з наведених тут класичних рішень суперечать висновкам сучасної теорії ігор.

2.10. ТЕОРІЯ ПОВЕДІНКИ БАГАТОПРОДУКТОВОЇ ФІРМИ

Теорію поведінки однопродуктової фірми, розглянуту вище, можна поширити на більш загальний випадок багатопродуктової фірми, яка виробляє довільну кількість n видів продукції ($n \geq 1$), використовуючи при цьому m видів витрат.

Якщо позначити через q_i рівень випуску продукції виду i , то загальний випуск продукції q є n -вимірним вектором $q = (q_i)_{i=1, n}$. Існують різні підходи до опису технологічних зв'язків між векторами випуску продукції q багатопродуктової фірми та її вектором витрат $x = (x_j)_{j=1, m}$, тобто до опису виробничої функції фірми. Згідно з одним із цих підходів, ви-

виробнича функція \mathcal{F} задається як векторна функція у просторі витрат фірми R_+^m , значенням якої є вектор максимально можливого кінцевого випуску при заданому векторі витрат x :

$$\mathcal{F}(x) = (F_i(x^i))_{i=1,n} = (f_i(x_1^i, \dots, x_m^i))_{i=1,n} = q, \quad (2.103)$$

де $q_i = F_i(x^i)$, $i = 1, \dots, n$ — окремі виробничі функції, а

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_j^i, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.104)$$

Якщо позначити через $p = (p_i)_{i=1,n}$ вектор цін продукції, де p_i — ціна однієї i -ї продукції, то функція доходу R матиме вигляд

$$R = \mathcal{F}(x)p = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x^i), \quad (2.105)$$

а функція прибутку фірми — вигляд

$$\pi(x) = \mathcal{F}p - xw = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x^i) - \sum_{j=1}^m w_j x_j, \quad (2.106)$$

де $w = (w_j)_{j=1,m}$ вектор цін на витрати.

Підкреслимо, що в моделі багатопродуктової фірми (2.103)–(2.106) кожний вид продукції фірми вважається кінцевим і не використовується на виробництво інших видів продукції. У випадку, коли це не так (частина продукції кожного виду може витрачатися на виготовлення інших видів продукції), потрібно розглядати більш складну модель, в якій виключається можливість кратного рахунку витрат ресурсів і продукції.

У довгостроковій задачі багатопродуктова фірма з моделлю (2.103)–(2.106) вибирає вектор витрат (x^1, x^2, \dots, x^n) , де $x^i = (x_j^i)_{j=1,m}$; m — вектори окремих витрат на i -ту продукцію, щоб максимізувати прибуток:

$$\pi(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x^i) - \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{i=1}^n x_j^i \right) \rightarrow \max,$$

за умов $x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, \dots, x^n \geq 0$. Необхідними умовами екстремуму є:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_j^i} = p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} - w_j \leq 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial x_j^i} x_j^i = \left(p_i \frac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} - w_j \right) x_j^i = 0; \\ x_j^i \geq 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким чином, для кожної виробничої функції $F_i(x^i)$, пов'язаної із випуском i -го виду продукції, виконуються неокласичні умови оптимальності.

Іншим більш агрегованим підходом до опису поведінки багатопродуктової фірми при використанні m видів витрат є задання функції випуску у вигляді невиліній функції витрат

$$\Phi(q, x) = \Phi(q_1, \dots, q_n, x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (2.107)$$

причому, щоб відобразити загальні закономірності виробництва, як правило, вважається, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \leq 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \geq 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.108)$$

Функція прибутку π визначається тоді як

$$\pi(q, x) = qp - xw = \sum_{i=1}^n p_i q_i - \sum_{j=1}^m w_j x_j. \quad (2.109)$$

Умови рівноваги фірми з моделлю (2.107)–(2.109) знаходять у довгостроковому періоді як розв'язок екстремальної задачі

$$\pi(q, x) \rightarrow \max; \quad \Phi(q, x) = 0; \quad q \geq 0; \quad x \geq 0. \quad (2.110)$$

Використовуючи функцію Лагранжа $L(q, x, \lambda)$ задачі (2.110)

$$L(q, x, \lambda) = qp - xw + \lambda \Phi(q, x), \quad (2.111)$$

де λ — множник Лагранжа, можна записати необхідні умови рівноваги у вигляді

$$\frac{\partial L}{\partial q} = (p)^\# + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -(w)^\# + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0; \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Phi(q, x) = 0, \quad \lambda > 0,$$

якщо вважати, що всі види витрат використовуються, а всі види продукції випускаються.

Ураховуючи, що перші два рівняння в умовах рівноваги (2.112) є векторними і мають вимірності n та m , усього маємо $(n + m + 1)$ рівняння для визначення невідомих $\lambda, x_1, \dots, x_m, q_1, \dots, q_n$. У скалярній формі умови рівноваги (2.112) мають вигляд

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = -p_i; \quad \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = w_j; \quad \Phi(q, x) = 0; \\ i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.113)$$

Задачі та вправи

2.1. Для прикладів 2.4–2.8 обчисленням перевірити наведені в них значення еластичностей виробництва і заміщення ϵ та σ

2.2. За економетричними оцінками на підставі даних економічної статистики 1960--1995 рр. виробнича функція валового внутрішнього продукту (GDP) США мала вигляд

$$F(K, L) = 2,248K^{0.404}L^{0.803}.$$

Розрахувати окремі ефективності ресурсів та загальну ефективність виробництва. Знайти масштаб виробництва як середнє геометричне темпів зростання ресурсів, урахувавши, що GDP США в піках 1987 р. зріс з 1960 по 1995 р. у 2,82 раза, виробничі фонди збільшилися в 2,88 раза, а чисельність зайнятих підвищилася в 1,93 раза.

2.3. Перевірити, що виробнича CES-функція при $\beta \rightarrow -1$ прямує до лінійної виробничої функції, при $\beta \rightarrow 0$ — до виробничої функції Коббі—Дугласа, а при $\beta \rightarrow \infty$ — до виробничої функції Леонтьєва. Знайти зв'язки параметрів граничних функцій та CES-функцій.

2.4. Перевірити, що для виробничої функції $F_1(x_1, x_2) = x_2(2x_1^2 + x_2^2) : (3x_1^2 + x_2^2)$ граничний продукт MP_2 спадає, середній продукт AP_2 не спадає, для функції $F_2(x_1, x_2) = x_2(4x_1^2 + x_2^2) : (3x_1^2 + x_2^2)$ середній продукт AP_2 спадає, а граничний MP_2 не спадає. Таким чином, трактування деякими економістами закону спадної віддачі як зменшення середнього, а не граничного продукту є незалежною концепцією цього закону відносно класичної концепції, наведеної в п. 2.3.

2.5. Нехай $Q = F(K, L)$ — виробнича функція в агрегованому просторі витрат двох виробничих факторів: L — праці та K — виробничого капіталу (основних виробничих фондів). Якщо F є лінійно-однорідною функцією, то вона залежить тільки від фондоозаброшеності $k = K/L$. Вислідом функцію $f(k) = F(K/L, 1) = Q/L$, де u — середня продуктивність праці. Знайти через f такі показники, як: 1) граничну продуктивність праці $v = \partial F / \partial L$; 2) граничну фондовіддачу $r = \partial F / \partial K$; 3) коефіцієнт еластичності за фондами $\alpha = (\partial F / \partial K)(K/Q)$; 4) еластичність за працею $\beta = (\partial F / \partial L)(L/Q)$.

2.6. Довести, що коли хоч один із коефіцієнтів еластичності α, β за ресурсами виробничої функції $F(K, L)$ (див. попередню задачу) не залежить від k , то F є функцією Коббі—Дугласа.

2.7. Лінійно-однорідна виробнича функція, для якої $f'(k) > 0$, $f'(k) < 0$, $f(0) = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ (див. вправу 2.5), називається неокласичною. Показати, що функція Коббі—Дугласа є неокласичною за умов $b_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$, $b_1 + b_2 = 1$.

2.8. Граничною нормою заміни S_K праці L та заміни S_L капіталу K для виробничої функції $Q = F(K, L)$ називаються величини $S_K = -(\partial K / \partial L)$ і $S_L = -(\partial L / \partial K)$ за умови $Q = \text{const}$. Знайти S_K та S_L для однорідної виробничої функції через f (див. вправу 2.5).

2.9. Довести, що коли норма заміни S лінійно-однорідної функції F є сталою (не залежить від фондоозаброшеності k), то $F(K, L) = AK + BL$, де A, B — константи.

2.10. Довести, що для лінійно-однорідної виробничої функції F з функцією продуктивності праці f (див. вправу 2.5) розв'язок диференціального рівняння

$$\sigma = - \frac{f'(f - kf')}{k[(1 - \gamma)(f')^2 + f \cdot f']},$$

$\sigma \neq 1$, дає CES-функцію, а при $\sigma = 1$ — функцію Коббі—Дугласа. При цьому показати, що параметр σ є еластичністю заміни.

2.11. Знайти виробничу лінійно-однорідну функцію F , для якої коефіцієнт елас-

тичності за фондами $\alpha = (kf')/f$ має вигляд.

$$\alpha(k) = \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{1-\delta}{\delta} k^\mu\right)} + \alpha_0$$

2.12. Нехай виробнича функція $Q = F(x_1, x_2)$ має сталий дохід від розширення масштабу виробництва. Перевірити, що: 1) рівнопропорційна зміна витрат не впливає на граничний та середній продукти, які залежать тільки від співвідношення витрат x_1/x_2 ; 2) граничні та середні продукти обох видів витрат є спадними функціями

витрат; 3) еластичність заміщення σ має вигляд $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^{-1}$, причому σ є функцією x_2/x_1 ; 4) при заданих цінах витрат розширення є променем, що проходить через початок координат, а функція витратків — лінійна.

2.13. Виробнича функція $Q = F(x)$ є суперадитивною, якщо $F(x+y) \geq F(x) + F(y)$, $x, y \in R_+^n$. Довести, що: 1) F дає зростаючий інтегральний дохід від розширення масштабів виробництва, тобто $F(\alpha x) \geq \alpha F(x)$, але не має просто зростаючого доходу від розширення масштабів виробництва; 2) коли додатково $F(x+y) = F(x) + F(y)$ при $x = cy$, $c = \text{const}$, то F має сталий дохід від розширення масштабів виробництва.

2.14. Знайти функції попиту на витрати виробництва та функції пропозиції на випуск продукції для фірми з двома видами витрат і виробничою функцією: 1) Коббі—Дугласа; 2) Леонтьєва; 3) CES.

2.15. Дослідити порівняльну статистику для випадку компенсованої зміни в оплаті одного виду витрат, де компенсація, що має форму зміни цін продукції, гарантує незмінність оптимального рівня її випуску. Показати, що загальний ефект в оплаті одного виду витрат можна поділити на вплив заощи, коли випуск продукції залишається незмінним, та на вплив масштабу виробництва, за якого обсяг випуску продукції змінюється.

2.16. Фірма перебуває в умовах конкуренції із вказаним нормуванням, якщо вона поряд із платою за виробничі витрати повинна сплатити державі вказану плату $\bar{\omega}_i$ за одиницю використаного виду витрат i , причому $\sum_{i=1}^m \bar{\omega}_i x_i \leq \bar{I}$, де \bar{I} — загальний

обсяг коштів, що надаються фірмі. Розглянути задачу фірми в умовах конкуренції із вказаним нормуванням, враховуючи інші умови такими самими, як і в неокласичній задачі однопродуктової фірми. Вивести нові умови рівноваги, функції попиту на витрати та функції пропозиції на випуск, а також порівняльну статистику фірми.

2.17. Функція виробничих витратків $C(Q)$ характеризує мінімальні витрати фірми при виробництві різних обсягів продукції Q , де витрати заковуються на конкурентному ринку. Знайти $C(Q)$ для фірми із виробничою функцією Коббі—Дугласа в умовах досконалої конкуренції. Показати, що $C(Q) = A Q^{1+\epsilon}$, де ϵ — еластичність виробництва, і що оптимальний випуск продукції адиснюється при $0 < \epsilon < 1$.

2.18. Одним із поширених підходів до опису виробничої технології в концепції «складові витрати» є складовий випуск» є аналіз способів виробничої діяльності, за яким багатопродуктова фірма вибирає певід'ємні рівні інтенсивності способів виробничої діяльності y_1, \dots, y_n для випуску n видів продукції Q_1, \dots, Q_n , де вектор випуску $Q = (Q_i)^{i=1,n}$ пов'язаний із вектором способів виробничої діяльності

$y = (y_j)^{j=1,n}$ лінійною функцією $Q = Ay$, в якій матриця $A = (a_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}$ характеризує випуск продукції при одиничних інтенсивностях способів (a_{ij} — кількість продукції

виду i , що виробляє фірма, застосовуючи одиничну інтенсивність j -го способу виробництва). При цьому фірма використовує вектор витрат $x^i = (x_{ij})_{j=1, m}$ вигляду $x^i = By$, де $B = (b_{ij})_{j=1, m}^{i=1, n}$ — задана матриця. Дослідити оптимальні рівні способів виробничої діяльності фірми й умови, за яких рівень діяльності є нульовим.

2.19. Нехай фірма-монополіст характеризується афіліною функцією граничного валового доходу $MR(q)$ та квадратичною функцією граничних витрат $MC(q)$, причому $MR(q) = a - bq$, $MC(q) = c - dq + eq^2$, де всі параметри a, b, c, d, e — додатні. Знайти: 1) валовий дохід R , витрати C , потіт і середні витрати AC ; 2) прибуток, що максимізує випуск продукції, та максимальний прибуток; 3) ставку акцизного збору (податку з одиниці товару, що продається), яка максимізує дохід від податків; 4) найбільшу ціну, що максимізує випуск продукції.

2.20. У фірмі Баумоля метою менеджера є максимізація обсягу продажу при обмеженні: не можна знижувати прибуток нижче заданого рівня. Визначити рівноважні витрати та випуск і дати опис результатів порівняльної статистики для фірми Баумоля. Провести порівняльне дослідження впливу акцизного збору, податку на валовий дохід від продажу та податку на прибуток для фірми Баумоля і класичної фірми з аналогічними показниками, що прагне до злищайної максимізації прибутку.

2.21. Знайти оптимальну множину вибору змінних для дискримінуючого монополіста, який продає свою продукцію на двох різних ринках із заданими функціями попиту. В якого монополіста буде більший випуск — у дискримінуючого чи у недискримінуючого?

2.22. Витрати на рекламу можуть збільшити валовий дохід R , але при цьому зменшити загальний прибуток $\pi = R(q, A) - C(q) - A$, де q — випуск продукції, A — витрати на рекламу, причому $(\partial R / \partial A) > 0$. Знайти умови оптимальних витрат на рекламу.

2.23. Є r конкуруючих фірм, причому функція попиту фірми з номером f на витрати i -го виду має такий вигляд: $\xi_i^f = \xi_i^f(p, w_1, \dots, w_m)$, $i = 1, \dots, m$; $f = 1, \dots, r$, де p — ціна продукції, а w_1, \dots, w_m — ціна витрат. Загальний попит $\Xi = (\xi_j)_{j=1, m}$ на m видів витрат є сумою індивідуальних функцій попиту $\Xi_j = \sum_{f=1}^r \xi_j^f$, $j = 1, \dots, m$. Показати, що виконуються співвідношення $\frac{\partial \Xi_i}{\partial w_j} = -\frac{\partial \Xi_j}{\partial w_i}$, $i, j = 1, \dots, m$.

3

МОДЕЛІ РИНКУ І ТЕОРІЯ ЗАГАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ

РОЗДІЛ

На основі математичних моделей споживання та виробництва, розглянутих у попередньому розділі, можна сконструювати математичні моделі ринкової економіки, об'єднавши поведінки споживачів та фірм в єдину систему. Такі ринкові економічні агенти, як споживачі, в ролі яких виступають домашні господарства, а також виробничі підприємства — різноманітні фірми, корпорації тощо, взаємодіють на двох типах ринків — ринку продуктів (товарів та послуг, що виробляються і пропонуються фірмами) та ринку факторів виробництва (праці, виробничих ресурсів, наприклад грошового капіталу, землі, власників яких є домашні господарства).

Домашні господарства (споживачі) отримують доходи від продажу факторів виробництва на ринку факторів і використовують їх для придбання споживчої продукції на ринку товарів та послуг. Фірми застосовують придбані фактори для виробництва продукції. Задаті теорії загальної економічної рівноваги полягають у аналізі взаємодії домашніх господарств та підприємств у термінах цін, обсягів товарів і витрачених ресурсів. При викладі економічної взаємодії між споживачами та виробниками чільне місце посідають опис і дослідження умов, необхідних для існування рівноваги між попитом та пропозицією на обох типах ринків, встановлення обставин, за яких подібна рівновага існує та є єдиною, а також аналіз її стійкості.

3.1. НАЙПРОСТІШІ АГРЕГОВАНІ МОДЕЛІ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ (КЛАСИЧНА ТА KEYНСІАНСЬКА)

При моделюванні ринків та ринкової взаємодії економічних агентів використовують дві основні концепції. Одна з них пов'язана з агрегуванням окремих типів агентів у відповідні сектори економіки, згідно з іншою, економіка розглядається як дезагрегована система, компонентами якої є окремі економічні агенти. З аналітичного боку, агреговані моделі є більш простими і доступними для вивчення та аналізу.

Обидва типи моделювання використовують моделі виробництва та споживання, розглянуті в попередніх розділах.

Для ознайомлення з основними принципами відповідного моделювання розглянемо на концептуальному рівні два найпростіших варіанти гранично агрегованих моделей ринкової економіки — класичної моделі та моделі Кейнса.

Класична модель ринкової економіки ґрунтується на описі економіки з доскопалою конкуренцією й охоплює описи взаємодії ринків робочої сили (праці), грошей і товарів.

Ринок праці, як і інші ринки, описується за допомогою функцій попиту та пропозиції цього агрегованого фактора, а також умов рівноваги між попитом і пропозицією. Функція попиту будується на таких припущеннях: 1) фірми є повністю конкурентними при пропозиції товарів та найму праці; 2) за інших однакових умов граничний продукт праці спадає зі зростанням кількості праці.

Розглядаючи весь виробничий сектор економіки як одне велике підприємство і позначаючи через Π його прибуток, припускаємо, що всі фактори виробництва, крім праці L , є фіксованими:

$$\Pi = pF(K, L) - wL, \quad (3.1)$$

де p — ціновий індекс агрегованої продукції; F — виробнича функція економіки; w — індекс ціни агрегованої праці L ; K — агреговані виробничі фонди економіки.

Тоді необхідна умова першого порядку максимуму прибутку має вигляд

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \frac{\partial F}{\partial L} - w = 0$$

і є достатньою, оскільки за припущенням 2) $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$.

Подавши співвідношення (3.1) у вигляді $\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$ та продиференціювавши його за параметром w/p , який можна вважати індексом реальної зарплати, отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial (w/p)} \right) = 1,$$

звідки $\frac{\partial L}{\partial (w/p)} < 0$ (оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$).

Таким чином, попит на працю $L_D = L_D(w/p)$ є спадною функцією реальної зарплати. Для пропозиції праці $L_S = L_S(w/p)$ припустимо, що вона зростає при збільшенні w/p .

Взаємодію L_D та L_S на ринку праці графічно зображує модель Маршалла (рис. 3.1), відома як «маршаллів хрест», або «позиція Маршалла». Рівноважний рівень реальної зарплати $(w/p)^*$ випадає збігом $L_D((w/p)^*)$ і $L_S((w/p)^*)$, що встановлює рівноважний рівень використання праці L_* (або рівень зайнятості). При $(w/p) > (w/p)^*$ виникає надлишок пропозиції над попитом $L_S(w/p) > L_D(w/p)$, що призводить до падіння w/p під впливом безробіття, ціни також знижуються, але в меншій пропорції, ніж w/p , яка прямує до рівноважного значення $(w/p)^*$. При $(w/p) < (w/p)^*$ ринкові сили змушують підприємств підвищувати w/p через нестачу робочої сили, що зростає w/p до $(w/p)^*$.

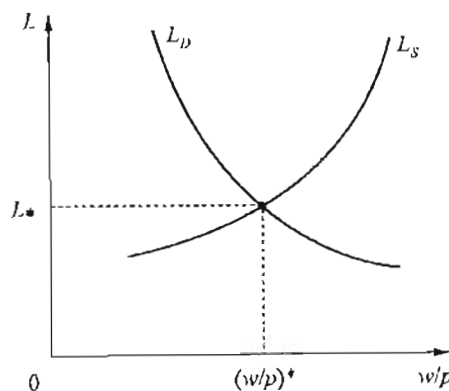


Рис. 3.1

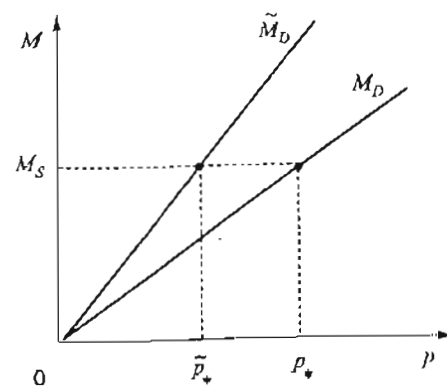


Рис. 3.2

Ринок грошей описується функцією попиту на гроші M_D , яка визначається рівнянням Пігу

$$M_D(p) = kYp, \quad (3.2)$$

де Y — індекс валового внутрішнього продукту (ВВП — GDP); p — середній індекс цін; k — коефіцієнт пропорційності («кембриджський коефіцієнт»), а також екзогенно заданим значенням пропозиції грошей M_S .

Графічно лінії попиту та пропозиції грошей зображено на рис. 3.2, причому для кожного Y маємо свою лінію попиту, p_* позначає рівноважний індекс цін. Якщо при заданому ВВП Y ціна $p < p_*$, то спостерігається надлишок пропозиції грошей $M_S - M_D(p) > 0$, і ціни починають зростати до рівня p_* .

На ринку товарів розглядаються два типи товарів — споживчі й інвестиційні, попит на які $C = C(r)$ та $I = I(r)$ відповідно є функцією норми (або ставки) відсотка r , причому $C(r)$ і $I(r)$ є спадними функціями r , оскільки при зростанні r стають більш вигідними заощадження. Загальний попит на товари (планові видатки) $E(r) = C(r) + I(r)$, а пропозиція товарів Y є функцією рівня зайнятості $Y = Y(L)$. Отже, рівноважний рівень використання праці L_* , ставки r_* та ВВП Y_* визначаються рівністю $Y(L_*) = C(r_*) + I(r_*) = Y_*$.

Об'єднавши рівняння та умови, що описують ринки праці, грошей і товарів, маємо повну класичну модель ринкової економіки в найпростішій, гранично агрегованій версії:

$$\begin{aligned} L_S &= L_S(w/p), \quad L_D = L_D(w/p); \\ L_S((w/p)^*) &= L_D((w/p)^*) = L_*; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} M_S &= M_S, \quad M_D(p) = kYp; \\ M_S &= M_D(p_*) = kYp_*, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$Y = Y(L), \quad E(r) = C(r) + I(r);$$

$$Y(I_*) = C(I_*) + I(I_*) = Y_*, \quad (3.5)$$

де співвідношення (3.3) описують ринок праці, співвідношення (3.4) — ринок грошей, а співвідношення (3.5) — ринок товарів. Тут кожний із ринків задається функціями попиту і пропозиції, а також точкою рівноваги. Всі точки рівноваги разом $\{(w/p)^*, p_*, r_*, L_*, Y_*\}$ характеризують стан загальної рівноваги економіки.

Розглянута вище класична модель давала змогу розв'язувати задачу пошуку рівноваги в економіці в умовах повної зайнятості. Модель Кейнса, розроблена в 1936 р., пропонує відповіді на проблеми, що виникли у зв'язку з кризою перевиробництва та масового безробіття у період Великої депресії 1929–1933 рр. Головне питання полягало в тому, як досягти рівноваги, коли економіка далеко відійшла від рівноважного стану і сталося масове безробіття. Відповідь полягала в особливій регуляторній економічній політиці держави, оскільки автоматично діючі ринкові сили без утручання держави були не в змозі гарантувати досягнення рівноваги (в загальному випадку за наявності безробіття).

Розглянемо найпростіший варіант моделі Кейнса і порівняємо його з класичною моделлю. В моделі Кейнса діють три типи активів: гроші, облігації та фізичний капітал K . Тут відносна ціна грошей, виражену в облігаціях, характеризує ставка відсотка за облігаціями, і припускається, що в умовах рівноваги норма прибутку на K (тобто на запас інвестиційних товарів) дорівнює ставці доходу за облігаціями. Таким чином, модель дає змогу простежити, як грошово-кредитна політика впливає на виробництво. Наприклад, емісія грошей зумовлює збільшення грошової маси, що змінює пропорції обміну між грошима й облігаціями. При збільшенні грошей їх зберігатимуть тільки за умови зниження норми відсотка на облігації, при цьому норма прибутку теж має спадати через зв'язок між облігаціями та капіталом.

Умова максимуму прибутку $\Pi = pF(K, L) - rK$ має вигляд $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \frac{\partial F}{\partial K} - r = 0$ (бо $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} < 0$).

Отже, гранична продуктивність капіталу (фондів) у вартісному вимірюванні дорівнює нормі прибутку (ставці відсотка) r , тобто $p \frac{\partial F}{\partial K} = r$. Зниження r спричиняє спад $\partial F / \partial K$, а оскільки $\partial F / \partial K$ зменшується при зростанні K , спад r припускає збільшення попиту на інвестиційні товари, а отже, й на всі товари в цілому. Це означає, що помірне збільшення грошової маси зумовлює зростання попиту на товари і відповідно збільшення пропозиції товарів, тобто зростання кінцевого продукту.

Якщо з якихось причин загальний попит E на продукцію виявився меншим від пропозиції Y_* при повній зайнятості, то, як вважав Д. М. Кейнс, фактично вироблений кінцевий продукт Y дорівнюватиме попиту E , тобто $Y < Y_*$, що детально вплине на обсяг використаної праці L , який буде мен-

шим за $L_* = L((w/p)^*)$ в класичній моделі. При цьому різниця $L_* - L$ визначить рівень безробіття.

Отже, основні особливості моделі Кейнса порівняно з класичною моделлю такі: 1) рівновага на ринку товарів досягається при рівності попиту та фактичної пропозиції; 2) фактичний попит на працю визначається фактично затребуваним продуктом, і рівновага на ринку праці може бути досягнута тоді, коли ринок товарів перебуватиме в рівновазі.

У класичній моделі рівновага встановлювалася при повній зайнятості та рівні реальної плати за працю $(w/p)^*$, що визначався умовою $L_D((w/p)^*) = L_*$, де L_* — обсяг праці при повній зайнятості. При цьому рівноважний обсяг кінцевого продукту Y_* визначався рівністю $Y_* = F(K, L_*)$.

Якщо позначити через $Lq(r)$ функцію попиту на облігації залежно від відсоткової ставки, то в цілому розглянутий найпростіший варіант моделі Кейнса можна подати як таку систему співвідношень:

$$I_S = I_S(w/p), \quad L_D = L_D(Y^*); \quad (3.6)$$

$$M_D = kpY + Lq(r), \quad \frac{dLq}{dr} < 0; \quad M_S = M_S, \quad M_S = M_D, \quad (3.7)$$

$$E = C(Y) + I(r), \quad \frac{dC}{dY} = C' > 0, \quad \frac{dI}{dr} < 0,$$

$$Y = Y(L), \quad Y = E, \quad (3.8)$$

де співвідношення (3.6) описують ринок праці, співвідношення (3.7) — ринок грошей, а співвідношення (3.8) — ринок товарів.

Розглянемо рівновагу на ринку товарів у найпростішій моделі, коли функції $C(Y)$ та $I(r)$ є афінними, тобто $C(Y) = \bar{C} + c'Y$, де \bar{C} — автономне споживання, c' — гранична схильність до споживання, $c' = dC/dY$, $0 < c' < 1$, причому $I(r) = \bar{I} - fr$, де \bar{I} — автономні інвестиційні видатки, f — чутливість інвестиційних видатків до норми процента r , тобто $f = -\frac{dI}{dr} > 0$.

У фазовій площині станів економіки, що характеризуються парою параметрів (Y, r) , умова рівноваги $Y = E$ на ринку товарів має вигляд

$$Y = \bar{C} + c'Y + \bar{I} - fr,$$

тобто лінія рівноваги на ринку товарів (лінія інвестицій та заощаджень IS) є прямою, яка описується афінною функцією

$$Y = \left(\frac{\bar{C} + \bar{I}}{1 - c'} \right) - \left(\frac{f}{1 - c'} \right) r,$$

спадною за r , а отже, при фіксованому r існує єдине рівноважне значення $Y_*(r)$.

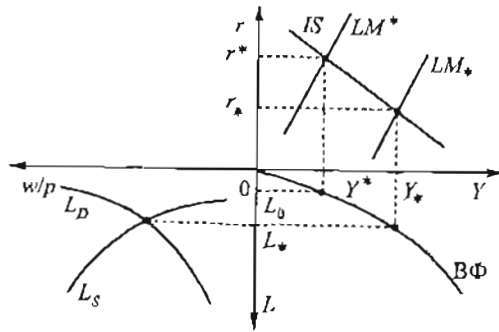


Рис. 3.3

Розглянемо тепер рівновагу на ринку грошей у припущенні, що попит на облігації $Lq(r)$ є афінною функцією r , тобто $Lq(r) = \bar{h} - jr$, де \bar{h} — автономний рівень видатків на облігації, а j — чутливість Lq до r , причому $j = -\frac{dLq(r)}{dr} > 0$. Тоді умова рівноваги $M_S = M_D$ матиме вигляд:

$$Y = \frac{M_S - \bar{h}}{kp} + \frac{j}{kp} r,$$

тобто лінія рівноваги на ринку грошей (лінія грошей LM) є зростаючою афінною функцією r , а отже, при фіксованому r існує єдине рівноважне значення $Y_M^*(r)$.

Загальна рівновага на ринках грошей і товарів досягається при $Y^*(r^*) = Y_M^*(r^*) = Y^*$ (тут r^* — рівноважне значення норми відсотка r), причому точка рівноваги (Y^*, r^*) (тобто точка перетину ліній IS та LM) — єдина. Сукупна рівновага на ринках грошей та товарів однозначно визначає фактичну потребу у праці L_0 , тобто $Y^* = F(K, L_0)$.

Загальну графічну ілюстрацію встановлення рівноваги у моделі Кейнса показано на рис. 3.3. У першому квадранті зображено лінії IS та LM , у четвертому квадранті — виробничу функцію економіки $ВФ$ як функцію змінної L , у третьому квадранті — криві попиту та пропозиції на працю.

Отже, причинні (каузальні) зв'язки спрямовано тут від ринку товарів і грошей до ринку праці через $ВФ$, причому ринок праці не є визначальним.

Якщо класична модель припускає автоматичну тенденцію до повної зайнятості, то в моделі Кейнса вона відсутня, і рівновага може встановлюватися при неповній зайнятості. Для переходу до стану повної зайнятості потрібна спеціальна державна політика.

3.2. МОДЕЛІ ВАЛЬРАСІВСЬКОГО ТИПУ

За допомогою цих моделей вивчають економіку в дезагрегованому вигляді. Їх складовими компонентами є окремі виробники (підприємства, фірми) та окремі споживачі (домашні господарства, приватні особи). Історично модель Вальраса¹ була першою великою економіко-математичною моделлю, що формувалась автором на формалізованій мові, близькій до сучасної. Ідеї, покладені в її основу, справили великий вплив на моделювання економічних процесів. Наприклад, поняття конкурентної рівноваги, що є

¹Вальрас Леон Еспрі (1834–1910) — видатний швейцарський економіст, засновник сучасного математичного напрямку в економіці.

ядром моделі Вальраса, далі трансформувалося у поняття динамічної рівноваги в моделі фон Неймана, а опис виробничих процесів у моделях Леонтьєва «витрати — випуск» також пов'язаний з ідеями, що беруть свій початок у моделі Вальраса.

Синиймося спочатку на класичному варіанті моделі, де розглядається економіка з H споживачами, E підприємствами, n типами продукції та m типами виробничих ресурсів (витрат). Нехай p_i позначає ціну i -го типу продукції, а w_j — ціну j -го типу витрат. Припускаємо, що економіка є конкурентною у тому розумінні, що всі споживачі та фірми діють за заданими цінами. Споживачі, перебуваючи у межах своїх бюджетних обмежень, намагаються отримати максимум задоволення своїх потреб від придбання продукції, а виробники прагнуть до максимізації прибутків від виробництва.

Нехай r_j^e — кількість первинних ресурсів виду j , що закуповуються фірмою e , а q_i^e — обсяг випуску продукції i , який продається цією фірмою. Тоді прибуток π^e фірми e визначається як

$$\pi^e = \sum_{i=1}^n p_i q_i^e - \sum_{j=1}^m w_j r_j^e, \quad e = 1, \dots, E, \quad (3.9)$$

або у векторній формі $\pi^e = q^e p - r^e w$, $e = 1, \dots, E$. Кожна фірма максимізує свій прибуток при обмеженні у формі виробничої функції, яка в неявній формі записується так: $\Phi^e(q^e, r^e) = 0$, $e = 1, \dots, E$.

Тоді, згідно з (2.112), (2.113), необхідні умови оптимального вибору обсягу продукції та витрат ресурсів фірми e мають вигляд

$$\lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial q^e} = -p^e; \quad \lambda^e \frac{\partial \Phi^e}{\partial r^e} = w^e; \quad \Phi(q^e, r^e) = 0, \quad \lambda^e > 0, \quad (3.10)$$

де λ^e — невід'ємний множник Лагранжа задачі фірми.

Таким чином, для визначення $(m+n+1)$ невідомого q_i^e , $i = 1, \dots, n$, r_j^e , $j = 1, \dots, m$, λ^e маємо $(m+n+1)$ рівняння. Оскільки рівняння (3.10) описують вибір кожної фірми, загалом виходить $E(m+n+1)$ рівняння.

В економіці діють також H споживачів, кожен з яких володіє певним набором виробничих факторів (наприклад, робочою силою), які він може продати на ринку факторів виробництва й отримати дохід. Крім того, кожний споживач може мати свою частку у фірмі та отримувати відповідну частину її прибутків. Загальний дохід від продажу факторів виробництва й участі у справах фірм споживач використовує для закупівлі товарів і послуг на ринку продукції. Нехай x_i^h — кількість i -ї продукції, закупленої споживачем, а y_j^h — кількість j -го фактора, проданого споживачем h . Тоді корисність, отриману споживачем h від товарів та послуг, а також від продажу факторів, можна охарактеризувати функцією корисності $U^h(x^h, y^h)$, де $x^h = (x_i^h)_{i=1, n}$, $y^h = (y_j^h)_{j=1, m}$.

Бюджетне обмеження для споживача h має вигляд

$$\sum_{j=1}^m w_j y_j^h + \sum_{e=1}^E s^{h,e} \pi^e = \sum_{i=1}^n p_i x_i^h, \quad (3.11)$$

де перша сума зліва виражає загальний дохід від продажу факторів виробництва, друга — дохід споживача як власника виробництва (тут $s^{h,e}$ частка участі споживача h у фірмі e), права частина показує загальні видатки споживача.

Якщо ввести вектори $x^h = (x_i^h)_{i=1, E}$, $\pi = (\pi^e)_{e=1, E}$, то бюджетне обмеження (3.11) у векторній формі має вигляд $y^h w + \pi s^h = x^h p$. Задачею раціональної поведінки споживача є

$$U^h(x^h, y^h) \rightarrow \max; \quad y^h w + \pi s^h = x^h p. \quad (3.12)$$

Функція Лагранжа цієї задачі задається виразом $L^h = U^h(x^h, y^h) + \mu^h(y^h w + \pi s^h - x^h p)$, де μ^h — множник Лагранжа для споживача h .

Поведінка споживача описується системою рівнянь, що виражають умови максимізації користності в задачі (3.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^h}{\partial x^h} &= \frac{\partial U^h}{\partial x^h} - \mu^h p = 0; \quad \frac{\partial L^h}{\partial y^h} = \frac{\partial U^h}{\partial y^h} + \mu^h w = 0, \\ \frac{\partial L^h}{\partial \mu^h} &= y^h w + \pi s^h - x^h p = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Це дає $(n+m+1)$ скалярне рівняння з $(n+m+1)$ невідомими x^h , y^h , μ^h . Рівняння (3.13) можна переписати у більш зручному вигляді

$$\frac{\partial U^h}{\partial x^h} = \mu^h p; \quad \frac{\partial U^h}{\partial y^h} = -\mu^h w; \quad y^h w + \pi s^h = x^h p. \quad (3.14)$$

Оскільки ці рівняння виконуються для кожного з H споживачів, загалом маємо $(n+m+1)H$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих.

Система рівнянь (3.10) і (3.14) описують рівновагу виробників та споживачів окремо. Наступна група рівнянь пов'язана з їх ринковою взаємодією і виражає їхню взаємну рівновагу як рівність загального попиту на будь-який товар або фактор загальної пропозиції цього товару чи фактора. Така взаємна рівновага на товарному ринку породжує n рівнянь

$$\sum_{h=1}^H x_i^h = \sum_{e=1}^E q_i^e, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

а взаємна рівновага на ринку факторів породжує m рівнянь

$$\sum_{h=1}^H y_j^h = \sum_{e=1}^E r_j^e, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Таким чином, маємо ще $n+m$ рівнянь взаємної рівноваги.

Загалом системи рівнянь (3.10), (3.14) — (3.16) описують рівноважний стан ринкової економіки і складаються з $(n+m+1)(E+H) + (n+m)$ скалярних рівнянь.

Однак, згідно з основною рівністю теорії загальної економічної рівноваги (закон Вальраса), загальний попит має дорівнювати загальній пропозиції за будь-якої системи цін. Із цього випливає, що одне з цих рівнянь не є незалежним від інших.

Для ілюстрації закону Вальраса розглянемо бюджетне обмеження (3.11). Якщо підсумувати рівності (3.11) по всіх h , ураховуючи, що сума часток $s^{h,e}$ дорівнює 1 для кожної фірми, то матимемо

$$\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^m w_j y_j^h + \sum_{e=1}^E \pi^e = \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^n p_i x_i^h. \quad (3.17)$$

Рівняння (3.17) означає, що загальний дохід всіх споживачів разом із загальним прибутком усіх фірм дорівнює загальній вартості товарів (цей висновок використовується при підрахунках національного доходу економіки).

Користуючись визначенням прибутку (3.9), маємо

$$\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^m w_j y_j^h + \sum_{e=1}^E \left(\sum_{i=1}^n p_i q_i^e - \sum_{j=1}^m w_j r_j^e \right) = \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^n p_i x_i^h$$

або, групуючи вирази,

$$\sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{h=1}^H y_j^h - \sum_{e=1}^E r_j^e \right) = \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{h=1}^H x_i^h - \sum_{e=1}^E q_i^e \right). \quad (3.18)$$

Із виразу (3.18) закону Вальраса випливає, що одне з рівнянь загальної рівноваги залежить від інших. Нехай, наприклад, усі фактори, крім останнього, а також усі товари є зрівноваженими:

$$\sum_{h=1}^H y_j^h = \sum_{e=1}^E r_j^e, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad \sum_{h=1}^H x_i^h = \sum_{e=1}^E q_i^e, \quad i = 1, \dots, n.$$

Підставляючи ці вирази у (3.18), дістаємо

$$w_m \left(\sum_{h=1}^H y_m^h - \sum_{e=1}^E r_m^e \right) = 0.$$

Отже, при $w_m \neq 0$ має виконуватися рівність на ринку останнього фактора, а останнє рівняння у (3.16) може бути виведене з інших рівнянь системи.

Таким чином, згідно із законом Вальраса є $(n+m+1)(H+E) + (n+m-1)$ незалежних рівнянь загальної рівноваги. Розглянемо кількість невідомих

мих. Для кожної фірми e існує набір q^e з n обсягів продукції, що продається, набір r^e з m факторів, що купуються, та множник Лагранжа λ^e , тобто всього є $(n + m + 1)E$ невідомих. Кожний споживач h характеризується набором x^h з n куплених товарів, набором y^h із m проданих факторів та множником Лагранжа μ^h , тобто $(n + m + 1)H$ є невідомими. Крім того, існують ще ціни на товари і фактори p та w . Оскільки в умовах моделі, що розглядається, всі функції попиту і пропозиції є однорідними нульового степеня (розв'язки задачі раціональної поведінки фірми при цінах (p, w) є також розв'язками для цін $(\alpha p, \alpha w)$, $\alpha > 0$), то вибираючи, приміром, перший товар як одиницю вимірювання ($\alpha = 1/p_1$) і переходячи до відносних цін $(p/p_1, w/p_1) = (1, p_2/p_1, \dots, p_n/p_1, w_1/p_1, \dots, w_m/p_1)$, маємо $(n + m - 1)$ відносних цін. Тому загальна кількість невідомих (при відносних цінах) дорівнює $(n + m + 1)(H + E) + (n + m - 1)$. Таким чином, система рівнянь загальної рівноваги (3.10), (3.14) – (3.16) є замкненою в тому розумінні, що вона має однакову кількість незалежних рівнянь та змінних. Звичайно, це не є ні необхідною, ні достатньою умовою існування розв'язку цієї системи (існування загальної економічної рівноваги).

Зауважимо, що ціни на продукцію та первинні фактори виробництва називаються **рівноважними цінами**, якщо виробники і споживачі, діючи найкращим чином і враховуючи бюджетні та виробничі обмеження, забезпечують такий стан справ в економіці, коли попит на кожний продукт та фактор не перевищує його пропозиції.

Рівноважними називають також відповідні рішення економічних агентів. Сукупність цін рівноваги та рівноважних рішень називають **станом рівноваги в економіці**.

Основна проблема в загальних моделях економіки — існування рівноважних цін — чекала на свій розв'язок більш як півстоліття. Були отримані рішення для різних варіантів подібних моделей (якщо не враховувати робіт А. Вальда, який досліджував найпростіші моделі раніше). Поряд із питанням існування загальної економічної рівноваги, тобто існування для певної системи переваг і виробничих технологій такої системи цін, що відповідні рішення економічних агентів — виробників та споживачів — є сумісними, в теорії загальної економічної рівноваги розглядаються й інші питання.

Чи досяжний стан рівноваги, тобто чи досягне економіка стану рівноваги, якщо вона в ньому не перебувала спочатку? Це проблема **стійкості рівноваги**. Для її дослідження потрібно мати моделі механізмів реакції на розбіжності попиту та пропозиції.

Який стан рівноваги існує, є єдиним і досяжним, то як він змінюватиметься при змінах технологій виробництва та переваг споживачів? Цим питанням займається порівняльна статистика.

Наскільки ефективним із погляду загального добробуту в суспільстві є стан рівноваги, тобто наскільки виправданою є гіпотеза А. Сміта¹, коли

¹Сміт Адам (1723—1790) — шотландський економіст, один із засновників класичної політичної економії, родоначальник ліберального напрямку в економічній теорії.

діючи з егоїстичних міркувань, економічні агенти досягають максимального підвищення загального добробуту, хоча безпосередньо не виходило в їхні наміри?

Відмітимо, що зазначені питання великою мірою є незалежними. Моделі економіки має бути досить багатого та складного, щоб з її допомогою можна було отримати відповіді на всі вказані вище питання.

Перейдемо до побудови більш сучасної моделі економіки вальрасівського типу. Нині для моделювання виробничих процесів в економіці застосовуються **виробничо-технологічні множини**. Цей підхід є більш загальним, ніж використання виробничих функцій. У сучасній математичній економіці кожний конкретний спосіб функціонування виробництва представляють парою векторів (r, x) , що складається з **вектора витрат** r і **вектора випусків** x виробництва; така пара називається **виробничим процесом**, або скорочено — **процесом**. Чисельно r та x є відповідно кількостями типів факторів та продуктів.

У загальному випадку задана виробнича технологія дає змогу **реалізувати багато** різних процесів (r, x) . Тому ця технологія, з економічного погляду, повністю описується **виробничо-технологічною множиною** T , що є множиною всіх виробничих процесів, можливих за цієї технології.

Для деякого процесу (r, x) можуть знайтися продукти як ті, що витрачаються, так і ті, що випускаються (в інших випадках таких продуктів може і не бути — це залежить від конкретної ситуації). Важливим є випадок, коли кожний продукт може витрачатися та випускатися. Тоді вектори r і x мають однакову вимірність, а їхні компоненти відповідають тим самим продуктам, тобто $x = (x_i)_{i=1,n}$, $r = (r_i)_{i=1,n}$. Різниця $x_i - r_i$ є чистим (кінцевим) випуском i -го типу продукту у виробничому процесі і має характер потоку, тобто кількості за одиницю часу. При такій ситуації під технологічною множиною T слід розуміти не множину всіх пар векторів витрат та випуску (r, x) , а множину всіх векторів чистих випусків $x - r$. Тоді вектор чистого випуску називається **процесом із потоками**; його додатні та від'ємні компоненти зображують реальні чисті випуски і чисті витрати відповідно.

Таким чином, маємо два варіанти виробничих множин: перший — **варіант із запасами** $T = \{(r, x)\}$; другий — **варіант із потоками** $T = \{x - r\}$.

Приклад 3.1. Розглянемо виробничу систему, що складається з підрозділів, кожний з яких виробляє за певною технологією певний вид продукції, який частково витрачається як проміжний продукт при виготовленні всіх або частини видів продукції. Якщо $A = (a_{ij})_{i=1,n}^{j=1,n}$ — матриця виробничих витрат, де a_{ij} — витрати i -ї продукції на виготовлення одиниці j -ї продукції, а $r = (r_i)_{i=1,n}$ — вектор випуску продукції, то виробничі витрати $r^* = Ax^*$. Таким чином, виробничо-технологічна множина T_i для i -го підрозділу має вигляд $T_i = \{(x_i a^i, x_i) : x_i \geq 0\}$, де a^i є i -м рядком матриці A . Цю технологічну множину описано в термінах запасів. Очевидно, T_i є променем у просторі R^{n+1} , що виходить з початку координат у напрямку вектора $(a^i, 1)$. Інакше кажучи, T_i є виродженим випадком багатогранного опуклого конуса.

Описана модель виробництва називається **статичною моделлю «витрати—випуск» Леонтьєва**. Вона може використовуватись як в мікроекономічному (підприємство), так і в макроекономічному варіантах (національна економіка, де підрозділами є її галузі). Останній варіант моделі буде детально досліджений у другій частині цієї книги.

Розглянемо модель Леонтьєва у варіанті з потоками. Якщо A — матриця витрат виробничої системи, E_n — одинична матриця розміром $n \times n$, $x \geq 0$ — вектор валового випуску, то $x^w - r^w = (E_n - A) x^w$ і технологічна множина має вигляд $T = \{(E_n - A) x^w : x^w \geq 0\}$, тобто є багатограним опуклим конусом.

Фундаментальні економічні закони виробництва досить легко сформулювати в термінах певних структурних властивостей виробничо технологічних множин. Оскільки T завжди є підмножиною скінченновимірної евклідового простору, деякі подібні структурні властивості можна охарактеризувати, не вказуючи, який варіант T мається на увазі.

I. Нездійсненість «рогу достатку» (неможливість виробити щось із нічого): (i) у варіанті з запасами: якщо $(r, x) \in T$ та $r = 0$, то $x = 0$; (ii) у варіанті з потоками: якщо $x \in T$ й $x \geq 0$, то $x = 0$.

II. Відсутність зовнішньої неекономічності, виражена опуклістю множини T . (Зауважимо, що зовнішня неекономічність визначається як взаємний вплив двох одночасних виробничих процесів, що призводить до збільшення витрат і зменшення випуску, і навпаки, зовнішня економія зумовлює підвищення ефективності процесів).

Опукла лінійна комбінація двох процесів з вагами $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ описує одночасне та незалежне функціонування цих процесів з інтенсивностями α і β . Якщо для будь-яких процесів таке спільне функціонування технологічно здійсненне, то в межах технологічної множини T можна здійснити не менш як зважену суму вихідних випусків завдяки не більш ніж відповідно зваженій сумі вихідних витрат.

III. Необоротність виробничих процесів (якщо процес виробництва технологічно здійснений, то обернений процес, що виробляє як продукти початкові витрати з початкових випусків, нездійснений): (i) у варіанті з запасами: (x, y) необоротний, якщо $(x, y) \in T$, але $(y, x) \notin T$; (ii) у варіанті з потоками: x необоротний, якщо $x \in T$, але $(-x) \notin T$.

На практиці причиною необоротності виробничих процесів є наявність таких факторів виробництва, без яких воно неможливе. Наприклад, таким фактором є праця (нульовий процес, тобто бездіяльність, є оборотним до самого себе).

IV. Замкненість технологічної множини. У більшості економічних ситуацій доцільно вважати, що коли деякий вектор витрат і випусків можна з будь-якою точністю апроксимувати технологічно можливим вектором, то і сам цей вектор буде технологічно можливим.

V. Закон сталості питомого випуску незалежно від масштабів виробництва. Цей закон означає, що T є конусом, тобто $T \supset \alpha T$ для будь-якого числа $\alpha \geq 0$. Таким чином, пропорційне збільшення $\alpha > 1$ (зменшення $\alpha < 1$) витрат щодо α зумовлює відповідне збільшення (зменшен-

ня) випуску у тому самому відношенні. Якщо закон сталості питомого випуску порушується, то деякі додатні кратні технологічного процесу можуть бути недопустимими, хоч з математичного, а не з технологічного погляду вони потенційно можливі.

Зауважимо, що завжди $T \subset R^s$ для деякого s і нульова точка в R^s відповідає бездіяльності, яка можлива при будь-якій реальній технології. Отже, доцільно вважати, що завжди T містить нульовий вектор. Крім того, у варіанті з потоками відсутність «рогу достатку» можна записати як рівність $T \cap R_+^s = \{0\}$, а необоротність процесів у T — як рівність $T \cap (-T) = \{0\}$.

Поряд із виробничо-технологічними множинами в сучасній математичній економіці застосовується й інший загальний варіант опису виробництва (або виробника) за допомогою багатозначного відображення $\mathcal{F} : R_+^m \rightarrow 2^{R^n}$. Тоді довільна точка графіка $\Gamma(\mathcal{F})$ цього відображення, тобто пара (r, x) , де $r \in R_+^m$, $x \in \mathcal{F}(r)$, є виробничим процесом у попередньому розумінні.

При векторі цін p на продукцію у випадку, коли розглядається такий рівень загальності (агрегації) моделювання, що продукція та фактори виробництва якісно не розрізняються, тобто розглядається один ринок, де вони продаються та купуються, і є n видів товарів, прибуток виробника від процесу (r, r) становить $(x - r)p$. Виробник вибирає кожного разу такий виробничий процес $(r, x) \in \Gamma(\mathcal{F})$, щоб $(x - r)p = \max_{(r', x') \in \Gamma} (x' - r')p$.

Називатимемо подібний процес (r, x) **оптимальним** при цінах p . Тоді **функцією пропозиції** виробника називається багатозначне відображення $\Psi(p) = \{x - r, \text{ де } (r, x) \text{ — оптимальний процес при цінах } p\}$. Технологічна множина T виробництва в розглянутому підході визначається рівністю $T = \{x - r : r \in R_+^m, x \in \mathcal{F}(r)\}$. Елементи множини T іноді називають **виробничими планами**. При розумних обмеженнях здебільшого не має значення, чи розглядати графік $\Gamma(\mathcal{F})$ багатозначного відображення $\mathcal{F}(r)$, чи відповідну технологічну множину T , оскільки нас цікавить тільки чистий (кінцевий) продукт виробництва у статичному варіанті моделі.

Кожного споживача h характеризуватимемо його функцією доходу $K_h(p)$ при цінах p та багатозначною функцією попиту $\Xi_h(p)$ (див. (1.34)). Виробник e характеризується множиною $T_e \subset R^n$ своїх виробничих планів і функцією пропозиції $\Psi_e(p)$, $e = 1, \dots, E$. Множина T_e вважатиметься компактною (її замкненість пояснювалась у властивості IV, а обмеженість означає просто неможливість виробництва у великих масштабах). Дохід $K_h(p)$ споживача h складатиметься з плати за продажним початкового запасу благ b_h (нагадаємо, що розглядається агрегована модель) $b_h p$, та деякого доходу $I_h(p)$, оскільки споживач є власником певної частки виробництва. Таким чином,

$$K_h(p) = b_h p + I_h(p), \quad h = 1, \dots, E.$$

Технологічною множиною економіки називається алгебрична сума технологічних множин T_e усіх виробників:

$$T = \sum_{e=1}^E T_e = \left\{ z = \sum_{e=1}^E z_e : z_e \in T_e \right\},$$

а функцією сукупної пропозиції виробничого сектора економіки $\Psi(p)$ — сума $\Psi(p) = \sum_{e=1}^E \Psi_e(p)$. Нехай $\Psi_*(p) = \{z : z \in T, zp = \max_{z' \in T} z'p\}$ — множина планів, оптимальних для всього виробничого сектора.

Пропозиція 3.1. *Плани, оптимальні для всього виробничого сектора, є оптимальними і для кожного виробника, тобто $\Psi_*(p) = \sum_{e=1}^E \Psi_e(p) = \Psi(p)$.*

∇ Справді, нехай $z_0 \in \Psi_*(p)$, $z_0 = \sum_{e=1}^E z_e$, $z_e \in T_e$ і $z'_e \in \Psi_e(p)$. Тоді

$$z_0 p = \sum_{e=1}^E z_e p \leq \sum_{e=1}^E z'_e p = \left(\sum_{e=1}^E z'_e \right) p \leq z_0 p,$$

и отже,

$$\sum_{e=1}^E z_e p = \sum_{e=1}^E z'_e p.$$

Оскільки $z_e p \leq z'_e p$, маємо $z_e p = z'_e p$, $e = 1, \dots, E$ та $z_e \in \Psi_e(p)$ для всіх e . Звідси $z_0 \in \Psi_*(p)$, тобто $\Psi_*(p) \subset \Psi(p)$, а обернене включення є очевидним.

Таким чином, можна схарактеризувати весь виробничий сектор економіки сукупною технологічною множиною T і функцією сукупної пропозиції $\Psi(p)$, забувши про окремих виробників.

У моделі вважається, що весь дохід виробничого сектора поділяється між споживачами, тобто $\sum_{h=1}^H I_h(p) = zp$, $z \in \Psi(p)$.

Означення 3.1. *Набір $(z_1^*, \dots, z_E^*, \xi_1^*, \dots, \xi_H^*, p^*)$ невід'ємних векторів називається конкурентною рівновагою в економіці, якщо*

$$z_e^* \in \Psi_e(p^*), \quad e = 1, \dots, E, \quad \xi_h^* \in \Xi_h(p^*), \quad h = 1, \dots, H \quad (3.19)$$

і при цьому виконуються умови балансу попиту та пропозиції

$$\sum_{e=1}^E z_e^* + \sum_{h=1}^H b_h \geq \sum_{h=1}^H \xi_h^*; \quad (3.20)$$

$$\left(\sum_{e=1}^E z_e^* + \sum_{h=1}^H b_h \right) p^* = \left(\sum_{h=1}^H \xi_h^* \right) p^*. \quad (3.21)$$

Означення 3.2. *Компонент p^* конкурентної рівноваги в означенні (3.1) називається вектором рівноважних цін. Багатозначне відображення $\Xi(p) = \sum_{h=1}^H \Xi_h(p)$ називається функцією сукупного попиту, а відображення*

$$\varphi(p) = b + \sum_{e=1}^E \Psi_e(p), \quad b = \sum_{h=1}^H b_h \quad \text{— функцією сукупної пропозиції.}$$

Пропозиція 3.2. *Функції $\Xi(p)$ та $\varphi(p)$ пов'язані між собою співвідношенням*

$$\xi p \leq zp, \quad \xi \in \Xi(p), \quad z \in \varphi(p). \quad (3.22)$$

Якщо $\xi \in \Xi(p)$, $\xi = \sum_{h=1}^H \xi_h$, $\xi_h \in \Xi_h(p)$, $h = 1, \dots, H$, то за означенням Ξ_h маємо $\xi_h p \leq b_h p + I_h(p)$, звідки $\xi p < b p + \sum_{h=1}^H I_h(p)$. Якщо $z \in \varphi(p)$, то $z = b + \sum_{e=1}^E z_e$, $z_e \in \Psi_e(p)$. Нехай $z_0 = \sum_{e=1}^E z_e$. Тоді $z_0 \in \Psi(p)$ та $\sum_{h=1}^H I_h(p) = z_0(p)p$. Звідси $zp = b p + \sum_{h=1}^H I_h(p)$, що доводить (3.22).

Співвідношення (3.22) називається законом Вальраса в широкому розумінні. Він означає, що вартість попиту не перевищує вартості пропозиції за будь-яких цін $p \geq 0$, $p \neq 0$. Зміна нерівності на рівність (3.22) дає закон Вальраса у вузькому розумінні.

Цим завершено побудову загальної моделі рівноваги Вальраса. Вкажемо на економічні тлумачення основних елементів моделі. Умова (3.19) означає, що економічні агенти, розглядаючи ціни p^* як задані, діють найкращим для себе чином. Нерівність (3.20) означає, що сукупний попит на товари (блага) не перевищує сукупної пропозиції. З рівності (3.21) випливає, що вартість куплених благ дорівнює вартості проданих благ. Зокрема, якщо в (3.20) для деякого компонента i виконується строга нерівність, тобто пропозиція i -го блага перевищує попит на нього, то відповідний компонент p вектора рівноважних цін дорівнює 0, тобто i -те благо є вільним.

Використовуючи функції Ξ та φ , можна переформулювати визначення конкурентної рівноваги.

Означення 3.3. *Набір (z^*, ξ^*, p^*) є конкурентною рівновагою, якщо*

$$z^* \in \varphi(p^*), \quad \xi^* \in \Xi(p^*), \quad \xi^* \leq z^*, \quad \xi^* p^* = z^* p^*. \quad (3.23)$$

3.3. УМОВА ІСНУВАННЯ РІВНОВАГИ ЗА ВАЛЬРАСОМ ПРИ НЕОКЛАСИЧНОМУ ПІДХОДІ

У неокласичній моделі економіки, що розглядалася вище, споживачі та виробники однозначно встановлюють свої плани споживання $x_h = (x_i^h(p))_{i=1, n}$, $h = 1, \dots, H$ і плани виробництва $q^e = (q_j^e(p))_{j=1, n}$, $e = 1, \dots, E$ за будь-яких цін $p = (p_i)_{i=1, n}$.

$$\mathcal{E}(p) = (\mathcal{E}_i(p))_{i=1, n} = \left(\sum_{h=1}^H x_i^h(p) \cdot \sum_{c=1}^C q_i^c(p) \right)_{i=1, n}$$

називається **функцією надмірного попиту** і щодо неї приймаються такі припущення.

I. Функція $\mathcal{E}(p)$ — однорідна нульового степеня відносно всіх можливих цін, тобто $\mathcal{E}(\alpha p) = \mathcal{E}(p)$ для всіх $\alpha > 0$. Це означає, що при пропорційній зміні всіх цін попит та пропозиція не змінюються (мають значення тільки відносні ціни), що узгоджується з неокласичними моделями поведінки споживачів і виробників. Ця властивість дає змогу обмежитися розглядом множини цін у вигляді стандартного цінового симплекса

$$S_n = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}.$$

II. Функція $\mathcal{E}(p)$ — однозначна та неперервна щодо p . Тут однозначність узгоджується з неокласичними моделями споживання і виробництва, а умова неперервності, що відіграє важливу технічну роль у доведенні існування рівноваги, не узгоджується з аксіомою ненасичуваності моделі поведінки споживачів. Справді, можна вважати, що ціни належать симплексній S_n , який є опуклим компактом в R_+^n . Тому образ $\mathcal{E}(S_n)$ є обмеженою множиною в R^n і при $p_i \rightarrow 0$ для деяких i образ \mathcal{E}_i прямуватиме до скінченної границі, що не відповідає аксіомі ненасичуваності.

III. Функція $\mathcal{E}(p)$ задовольняє закон Вальраса: $\mathcal{E}(p)p = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i(p)p_i = 0$ для $p \in S_n$. Ця властивість узгоджується з неокласичною моделлю економіки, де весь сумарний дохід дорівнює сумарним витратам.

Означення 3.4. Система цін p^* у моделі, що розглядається, називається **рівноважною**, якщо виконуються умови

$$p^* \geq 0, \mathcal{E}(p^*) \leq 0. \quad (3.24)$$

Із (3.24) випливає, що при p^* надмірна пропозиція можлива тільки в разі нульової ціни, коли для деякого i_0 , при якому $\mathcal{E}_{i_0}(p^*) < 0$, маємо $p_{i_0}^* = 0$. Справді, з (3.24) випливає, що всі доданки суми $\sum_{i=1}^n p_i^* \mathcal{E}_i(p^*)$ є недодатними. Якщо $p_{i_0}^* > 0$, то $p_{i_0}^* \mathcal{E}_{i_0}(p^*) < 0$ і вся сума від'ємна, тобто $\mathcal{E}(p^*)p^* < 0$, що суперечить закону Вальраса (III).

Оскільки існування товарів з надмірною пропозицією при нульовій ціні вважається економічно безглуздим, допущення нерівності в означенні рівноваги (3.24) не суперечить економічному змісту.

Теорема 3.1. Якщо в неокласичній моделі ринкової економіки функція надмірного попиту $\mathcal{E}(p)$ задовольняє умови I–III, то система рівноважних цін p^* існує.

Доведення спирається на теорему Брауера¹ про нерухому точку, згідно якою неперервне відображення f компактної опуклої множини X у себе, $X \subset R^n$, має нерухому точку x^* , $x^* = f(x^*)$.

Розглянемо ціновий індикатор $\Delta(p) = (\Delta_i(p))_{i=1, n}$, поклавши $\Delta_i(p) = \max(0, \mathcal{E}_i(p))$. Тоді $\Delta(p)$ має такі властивості: 1) $(\Delta_i(p) > 0) \Leftrightarrow (\mathcal{E}_i(p) > 0)$; 2) $\Delta_i(p) = 0$, якщо $\mathcal{E}_i(p) = 0$; 3) $p_i + \Delta_i(p) \geq 0$; $i = 1, \dots, n$. Функція $\Delta(p)$ вказує на тенденцію зміни цін. Ціна i -го товару зростає, коли попит на нього не задовольняється і $\Delta_i(p) > 0$, та не змінюється, коли попит дорівнює пропозиції і $\Delta_i(p) = 0$. Змінені ціни $p_i + \Delta_i(p)$ залишаються невід'ємними.

Розглянемо нормовану функцію скоригованих цін.

$$f(p) = \frac{1}{\mu(p)} [p + \Delta(p)], \quad \mu(p) = \sum_{i=1}^n (p_i + \Delta_i(p)).$$

Функцію $f(p)$ визначено коректно, оскільки для $p \in S_n$ маємо

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \Delta_i(p) \geq 1 > 0.$$

З означення $f(p)$ випливає, що f є неперервною функцією, що відображує ціновий симплекс S_n у себе; $f: S_n \rightarrow S_n$, тому що $f(p) \geq 0$ і

$$\sum_{i=1}^n f_i(p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu(p)} [p_i + \Delta_i(p)] = 1.$$

Застосовуючи теорему Брауера до функції f , бачимо, що існує система цін p^* , яка є нерухомою точкою f , $p^* = f(p^*)$, $p^* \in S_n$, або $p^* + \Delta(p^*) = \mu(p^*)p^*$. Перевіримо, чи є p^* рівноважною системою цін, тобто чи $\mathcal{E}(p^*) \leq 0$. Покладемо $\alpha = (\mu(p^*) - 1)$. Тоді $\alpha p^* = \Delta(p^*)$. Помноживши цю рівність на $\mathcal{E}(p^*)$ зліва, дістанемо $\alpha \mathcal{E}(p^*)p^* = \mathcal{E}(p^*)\Delta(p^*)$, звідки $\mathcal{E}(p^*)p^* = 0$, за законом Вальраса (III). За означенням функції $\Delta(p)$, завжди $\mathcal{E}_i(p)p_i \geq 0$, тому остання рівність можлива тільки тоді, коли $\mathcal{E}_i(p^*)p_i^* = 0$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, $\mathcal{E}_i(p^*) \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, оскільки інакше з властивості 1) функції $\Delta(p)$ випливало б, що $\mathcal{E}_i(p^*)\Delta_i(p^*) > 0$.

Якщо з припущень I–III відносно функції надмірного попиту випливає існування рівноважних цін p^* , то для доведення їх єдиності цих припущень замало. Виявляється, що рівновага p^* є єдиною, коли загальна функція попиту задовольняє слабку аксіому виявленої переваги².

¹Брауер Лейтзен (1881–1966) — голландський математик-тополог, засновник інтуїтивно-геометричного напрямку в математиці.

²Див. Wald A. On Some Systems of Equation of Mathematical Economics // Econometrica. — 1951. — 19. — P. 368–403.

Іншою додатковою умовою, яка забезпечує єдність ринкових цін p^* , є «умова стійкості Хікса»¹, який розглядав цю умову при дослідженні стійкості рівноваги. Умова Хікса формулюється для диференційованих функцій надмірного попиту в термінах відповідної матриці Якобі.

Виберемо як одиницю вимірювання товар n і припустимо, що надмірний попит $E_n(p) \rightarrow \infty$, коли $p_n \rightarrow 0$ незалежно від цін на інші товари. Матриця Якобі подібної нормованої системи визначається рівністю $I = (\partial e_i(p) / \partial p_j)_{i=1, n-1}^{j=1, n-1}$. Рівновага p^* є єдиною, коли головні мінори матриці I змінюються за знаками так, що мінори парних (непарних) номерів рядків та стовпців I є додатними (від'ємними)².

3.4. РІВНОВАГА У МОДЕЛІ ЕРРОУ—ДЕБРЕ

У моделі, яку розглядали Ж. Дебре і К. Ерроу³ щодо кожного споживача h , $1 \leq h \leq H$ на відміну від узагальненої моделі вальрасівського типу з п. 3.2 додатково робляться такі припущення.

1. Функція доходу споживача h має вигляд

$$K_h(p) = b_h p + \sum_{e=1}^E \alpha_{h,e} (z_e p),$$

де b_h — початковий запас благ; $\alpha_{h,e}$ — частка доходів споживача h у виробництві (фірмі) e ; $\sum_{h=1}^H \alpha_{h,e} = 1$; z_e — випуск виробника e у термінах потоків. Отже, дохід споживача складається з продажу початкового запасу благ та участі у прибутках виробничого сектора.

2. Множина $X_h \subset R_+^n$, $h = 1, \dots, H$, на якій визначено функцію корисності U_h споживача h є опуклою, замкненою та необмеженою, причому для послідовності $x^k \in X_h$, $k = 1, 2, \dots$, деяка координата якої x_j^k прямує до нескінченності, всі інші координати також прямують до нескінченності.

3. Функція U_h — неперервна та угнута на X_h , $h = 1, \dots, H$.

4. Для кожного h існує такий вектор $\bar{x}_h \in X_h$, що $\bar{x}_h < b_h$, $h = 1, \dots, H$.

5. Кожен споживач задовольняє аксіому непасивності.

Зауважимо, що з припущення 4 випливає наявність у кожного споживача ненульового початкового запасу благ.

¹Хікс Джон (нар. 1904 р.) — англійський економіст математичного напрямку, лауреат Нобелівської премії 1972 р., присудженої за дослідження економічної рівноваги.

²Джн. Arrow K. J. Economic Equilibrium // International Encyclopedia of Social Sciences. — New York: The Macmillan Company and The Free Press, 1958. — Vol. 4. — P. 376—388.

³Ерроу Кеннет (нар. 1912 р.) — видатний американський математик-економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки 1972 р., присудженої за дослідження економічної рівноваги та теорії добробуту.

Щодо виробничого сектора економіки (що розглядається у варіанті потоків) припускається таке:

А. Множина T_e планів виробника e є компактною і $0 \in T_e$, $e = 1, \dots, E$.

Б. Множина $T = \sum_{e=1}^E T_e$ є опуклою.

Зауважимо, що окремим випадком моделі Ерроу—Дебре, як і моделі вальрасівського типу, є **модель чистого обміну**, тобто випадок, коли виробництво відсутнє.

Надалі буде потрібна допоміжна лема, що підкреслює роль закону Вальраса (3.22) при моделюванні подібного типу.

Лема Гейла¹. Нехай $S_n = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$ — стандартний симплекс, Γ — деякий компакт в R^n і $\varphi : S_n \rightarrow 2^\Gamma$ — багатозначне відображення, для якого виконуються такі умови: 1) φ є напівнеперервним зверху (тобто з того, що $p^k \rightarrow p^0$, $p^k \in S_n$, $y^k \in \varphi(p^k)$, $y^k \rightarrow y^0$ випливає, що $y^0 \in \varphi(p^0)$); 2) для кожного $p \in S_n$ образ $\varphi(p)$ є непорожньою опуклою підмножиною в Γ ; 3) виконується закон Вальраса у широкому розумінні, тобто $up \geq 0$ для довільного $u \in \varphi(p)$. Тоді існує такий вектор p^* , що $\varphi(p^*) \cap R_+^n \neq \emptyset$.

Введемо для кожного $u \in \Gamma$ множину

$$\eta(u) = \left\{ v \in S : uv = \min_{p \in S_n} up \right\}. \quad (3.25)$$

Нехай μ — багатозначне відображення декартового добутку $\Gamma \times S_n$ у себе, що має вигляд

$$\mu(u, p) = \varphi(p) \times \eta(p), \quad (u, p) \in \Gamma \times S_n.$$

Кожна з множин Γ та S_n опукла й компактна, і тому $\Gamma \times S_n$ теж опуклий компакт. Множини $\eta(u) \subset S_n$ для довільного $u \in \Gamma$ і $\varphi(p)$, $p \in S_n$ задовольняють умову 2). Тому множина $\mu(u, p)$ — теж є непорожньою та опуклою при довільному (u, p) . З умови 1) та означення (3.25) випливає, що μ є напівнеперервним зверху відображенням.

Скористаємося теоремою Какутані² про нерухому точку багатозначних відображень, згідно з якою напівнеперервне зверху відображення $v : X \rightarrow 2^X$ опуклого компакту X в R^n у себе, для якого множини $v(x)$ — непорожні й опуклі, має нерухому точку $x^* \in X$, для якої $x^* \in \varphi(x^*)$. Застосовуючи теорему Какутані до відображення μ , доходимо висновку, що існує така точка $(u^*, p^*) \in \Gamma \times S_n$, що $u^* \in \varphi(p^*)$, $p^* \in \eta(u^*)$. З (3.25) ви-

¹Gale D. The law of supply and demand // Math. Scand. 1955. — 3. — P. 155—169.

²Какутані Сізіо (нар. 1911 р.) — японський математик, який працював у США.

пливає, що $u^* p^* \leq u^* p$ для всіх $p \in S_n$. Із припущення 3) і того, що $u^* \in \Phi(p^*)$, $u^* p^* \geq 0$. Отже, для всіх $p \in S_n$ буде $u^* p \geq 0$, звідки $u^* > 0$, тобто $u^* \in \Phi(p^*) \cap R_+^n$. Δ

Тепер можемо здобути основний результат у вигляді такої теореми Ерроу — Дебре.

Теорема 3.2. У моделі Ерроу — Дебре, описаній вище, існує стан рівноваги.

∇ За допомогою функції сукупного попиту та пропозиції $\Xi(p)$ і $\Phi(p)$ визначимо багатозначну функцію надмірної пропозиції $Y(p) = \Phi(p) - \Xi(p)$, $Y: S_n \rightarrow 2^{R^n}$. Укажемо опуклий компакт Γ в R^n , що містить $Y(p)$ при всіх $p \in S_n$. Маємо $\Phi(p) \leq b + T$, де T , за припущенням А та Б, — опуклий компакт, і $\Xi(p) \subseteq \bigcup_h \bar{X}_h(p)$, де $\bar{X}_h(p)$ — множина наборів благ X_h , що задовольняє бюджетне обмеження споживача $h: xp \leq K_h(p)$.

Таким чином, при $p \in S_n$

$$\Xi(p) \subseteq \bigcup_{h=1}^H \bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p).$$

Установимо обмеженість множини $\bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p)$ при всіх h . Оскільки T_e — компакт, з (3.25) випливає, що функція $K_h(p)$ обмежена, тобто існує така константа C , що $K_h(p) \leq C$ при всіх $p \in S_n$, $z_e \in T_e$, $e = 1, \dots, E$. Отже, $\bar{X}_h(p) \subseteq \bar{X}_h(p) = \{x \in X_h: xp \leq C\}$, тобто достатньо довести обмеженість множини $\bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p)$.

Припустимо супротивне. Тоді існують такі послідовності $p^s \in S_n$ та $x^s \in \bar{X}_h(p^s)$, $s = 1, 2, \dots$, що послідовність $\{x^s\}_{s=1}^\infty$ є необмеженою. З припущення 2 про структуру множини X_h випливає, що починаючи з деякого номера s_0 , виконується нерівність $x_i^s \geq 2C$, $i = 1, \dots, n$. Вибравши $s \geq s_0$,

з умови $x^s \in \bar{X}_h(p^s)$ маємо $x^s p^s \leq C$, звідки $2C = 2C \sum_{i=1}^n p_i^s \leq x^s p^s \leq C$. Отримана суперечність доводить обмеженість множини $\bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p)$. Оскільки H скінченне число, множина $\bigcup_{h=1}^H \bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p)$ також є скінченною.

Таким чином, існує опуклий компакт M в R^n , для якого при всіх $p \in S_n$

$$\Xi(p) \subseteq \bigcup_{h=1}^H \bigcup_{p \in S_n} \bar{X}_h(p) \subseteq M.$$

За шуканий компакт Γ можна взяти опуклий компакт $\Gamma = b + T - M$, тоді, очевидно, $Y(p) \subseteq \Gamma$ при всіх $p \in S_n$.

Доведемо, що множини $\Xi(p)$ та $\Phi(p)$ — непорожні, опуклі й замкнені, а відображення $\Xi(p)$ і $\Phi(p)$ — напівнеперервні зверху. Наведемо відповідні міркування для Ξ (доведення для $\Phi(p)$ аналогічне). Очевидно, при кожному $p \in S_n$ множина $\bar{X}_h(p)$ — опукла, замкнена й обмежена. Непорожність її є наслідком припущення 4 моделі. З неперервності функції $x p = K_h(p)$ щодо (x, p) випливає, що відображення $\bar{X}_h(p)$ є напівнеперервним відносно p зверху та знизу. Звідси відображення

$$\Xi_h(p) = \begin{cases} \{x, x \in X_h(p), U_h(x) = \max_{x' \in \bar{X}_h(p)} U_h(x')\} \\ \emptyset \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

також є напівнеперервним зверху, а множини $\Xi_h(p)$ — непорожні, опуклі й замкнені. Відображення Ξ має подібні властивості як сума відображень Ξ_h .

Таким чином, можна зробити висновок, що функція Y надмірного попиту — напівнеперервна зверху, а образ $Y(p)$ є непорожньою опуклою множиною при будь-якому $p \in S_n$. Як було показано у п. 3.2 (3.22), відображення Y задовольняє закон Вальраса.

Отже, функція Y надмірного попиту задовольняє всі вимоги леми Гейла, відповідно до якої існують такі ціни p^* , що множина $Y(p^*)$ містить невід'ємний вектор u^* . За визначенням Y , маємо $u^* = z^* - \xi^*$, де $z^* \in \Phi(p^*)$, $\xi^* \in \Xi(p^*)$, причому $z^* \geq \xi^*$, тобто при цінах p^* попит не перевищує пропозиції.

Виконання закону Вальраса у вузькому розумінні ((3.23) з п. 3.2) випливає з припущення 5 моделі. Справді, з ненасичуваності випливає, що споживач, максимізуючи свою функцію корисності, витрачає весь свій дохід, тобто $x p = K_h(p)$ при довільному $h = 1, \dots, H$. Міркування аналогічні тим, що наводилися при виведенні закону Вальраса в широкому розумінні, дають рівність $\xi p = z p$ при довільних $\xi \in \Xi(p)$, $z \in \Phi(p)$. Δ

Детальніший виклад теорії рівноваги Ерроу — Дебре можна знайти в їхній праці¹.

3.5. МОДЕЛЬ РІВНОВАГИ ВАЛЬДА—КАССЕЛЯ

Спираючися ще на одній моделі згаданої економічної рівноваги, що є окремим випадком загальної моделі вальрасівського типу, запропонованою Г. Касселем². Наведений нижче сучасний варіант цієї моделі близький до моделей, які розглядалися Л. Вальдом³.

¹Arrow K., Debreu G. Existence of a equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*. — 1954. — Vol. 22. — P. 265–290.

²Кассель Г. Основные идеи теоретической экономики. М.: Л., 1929.

³Вальд Абрагам (1902–1950) — американський математик угорського походження, один із творців сучасної математичної статистики: *Wald A. Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. — Ergebn. Math. Colloq. — 1934. — 35, 7. Wald A. Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen. — Ergebn. Math. Colloq. — 1933. — 34, 6.*

У моделі Вальда—Касселя розрізняють продукти і фактори виробництва. Нехай є m видів первинних факторів виробництва, що є власністю споживачів, та n видів продуктів виробництва. Сукупний запас первинних факторів описується вектором $b = (b_i)_{i=1,m} > 0$, а виробничий сектор у цілому — лінійною статичною моделлю Леонтьєва (див. приклад 3.1), тобто характеризується лінійною моделлю з матрицею витрат $A = (a_{ij})_{i=1,m}^{j=1,n}$, де $a_{ij} \geq 0$ й a_{ij} — кількість i -го фактора виробництва, необхідного для виробництва однієї одиниці j -го продукту.

Якщо $x = (x_j)_{j=1,n}$ — вектор інтенсивностей роботи виробничого сектора, де x_j — обсяг продукції j -го типу, які виробляється за однаковою технологією, що характеризується елементами матриці витрат A , то сукупна пропозиція виробничого сектора також описується вектором x .

Нехай $p = (p_j)_{j=1,n}$ — вектор цін на вироблені продукти, а $w = (w_i)_{i=1,m}$ — вектор цін на первинні фактори виробництва. Тоді поведінка споживчого сектора характеризується функцією сукупного попиту $\Xi(p, w) = (\Xi_j(p, w))_{j=1,n}$, де $\Xi_j(p, w)$ — функція сукупного попиту на j -й продукт. Спінімося тепер на основних припущеннях моделі.

1. Виробнича матриця A економіки не містить нульових стовпців та рядків.

2. Функція сукупного попиту $\Xi(p, w)$ є однозначною і неперервною.

3. Функція $\Xi(p, w)$ задовольняє закон Вальраса у вузькому розумінні, тобто $\Xi(p, w)p = bw$.

4. Попит на кожний товар дорівнює його пропозиції. Зокрема, це означає, що виробничий сектор закуповує всі початкові запаси первинних факторів виробництва b . Отже, доходи цього сектора при цінах p, w становлять $xp - bw$, де витрати bw не залежать від p . Тому оптимальна поведінка виробничого сектора полягає в максимізації доходу xp за умов обмеженості виробничих витрат $Ax \leq b$, де $x \geq 0$.

Означення 3.5. Набір (x^*, p^*, w^*) є конкурентною рівновагою у моделі Вальда—Касселя, якщо виконуються такі умови: а) вектор x^* є розв'язком задачі раціональної поведінки виробничого сектора

$$xp \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (3.26)$$

яка є стандартною задачею лінійного програмування в основній формі;

б) вектори x^*, p^* та w^* пов'язані між собою умовою $x^* = \Xi(p^*, w^*)$, що описує поведінку споживчого сектора економіки.

Розглянемо двоїсту задачу до задачі лінійного програмування (3.26):

$$bw \rightarrow \min, w^* A \geq p, w \geq 0. \quad (3.27)$$

Неважко зрозуміти економічний зміст двоїстої задачі (3.27): рівноважні ціни w^* мають бути такими, щоб мінімізувати витрати bw виробничого сектора і водночас не дозволити йому мати додатний прибуток.

Основним результатом аналізу моделі Вальда—Касселя є така теорема.

Теорема 3.3. Для моделі Вальда—Касселя у припущеннях 1—4 існує конкурентна рівновага (x^*, p^*, w^*) , в якій рівноважні ціни на фактори виробництва є розв'язком двоїстої задачі (3.27) до задачі раціонального виробництва (3.26).

Доведення цієї теореми ґрунтується на використанні теореми Какутані для належним чином побудованого багатозначного відображення, але воно досить громіздке і тут не наводиться. Детальний виклад цього доведення можна знайти в [2]. Слід зауважити, що в доведенні, на відміну від попередніх теорем існування економічної рівноваги, не використовується однорідність функції попиту $\Xi(p, w)$, а застосовується закон Вальраса у вузькому розумінні. Досить споріднену, але більш складну модель загальної економічної рівноваги щодо моделі Вальда—Касселя, пов'язану з підходом «витрати - випуск» до моделювання економіки, розглянуто в другій частині книги.

3.6. ВЛАСТИВОСТІ КОНКУРЕНТНОЇ РІВНОВАГИ

Теорема Ерроу—Дебре з п. 3.4 не гарантує існування єдиного стану рівноваги економіки. Найявніші множинні стани спонукає до вивчення інших їхніх властивостей.

У багатьох абстрактних математичних побудовах у сучасній теорії вибору та прийняття рішень (зокрема, у теорії ігор, теорії багатокритеріальної оптимізації тощо) одним із важливих понять є оптимальність Парето¹. Відповідно до наших потреб це поняття формулюється так.

Нехай є H споживачів із функціями корисності $U^h : X_h \rightarrow R$, $h = 1, \dots, H$, а $X = \prod_{h=1}^H X_h$ — декартів добуток полів переваг цих споживачів і в X виділено в підмножину X_0 , яка називається множиною допустимості. Набір благ $x = (x_h)_{h=1,H}$, $x_h \in X_h$ називатимемо допустимим набором, або розподілом благ, якщо $x \in X_0$.

Означення 3.6. Розподіл $x = (x_h)_{h=1,H}$ називається **Парето-оптимальним**, якщо не існує розподілу $x' = (x'_h)_{h=1,H}$, для якого $U^h(x'_h) \geq U^h(x_h)$, $h = 1, \dots, H$, причому хоча б для одного зі споживачів виконується строга нерівність.

¹Парето Вільфредо (1848—1923) — видатний італійський економіст і соціолог, один із засновників сучасної математичної економіки.

Зміст Парето-оптимальності простий і наочний: доброю є така дія (рішення), щоб декому стало краще, але жодному з інших не ставало гірше.

Приклад 3.2. Проілюструємо можливі інтерпретації множини припустимості X_0 для узагальнення моделі Вальрасівського типу. Розглянемо множину $b+T$, де T — сукупна технологічна множина економіки, а b — сукупний початковий запас благ. Тоді $b+T$ є множиною всіх наборів благ, які можуть у принципі бути виробленими економікою.

Основою умовою, що забезпечує можливість функціонування економіки, яка описується загальною моделлю Вальраса, є вимога, щоб політ не перевищував пропозиції. Зрозуміло, що неможливий ніякий розподіл благ, при якому сумарний обсяг продукту, який розподіляється, більший від обсягу, що у принципі не може бути виготовлений. Тому для узагальненої моделі Вальраса множина допустимості X_0 має вигляд.

$$X_0 = \left\{ x = (x_h)_{h=1, H} : \exists z \in T, \sum_{h=1}^H x_h \leq b + z \right\}. \quad (3.28)$$

Одним із фактів, які пов'язують поняття конкуренції рівноваги та Парето-оптимальності, є результат, що формулюється такою теоремою

Теорема 3.4. Якщо (x^*, z^*, p^*) — конкурентна рівновага в моделі Ерроу — Дебре, то розподіл $x^* = (x_h^*)_{h=1, H}$ є Парето оптимальним.

∇ Нехай існує такий розподіл $x = (x_h)_{h=1, H} \in X_0$, що $U^h(x_h) \geq U^h(x_h^*)$, $h = 1, \dots, H$, причому нерівність для h_0 є строгою. Через ненасичуваність кожного споживача існує такий елемент $v_{h_0} \in X_{h_0}$, що $U^{h_0}(v_{h_0}) > U^{h_0}(x_{h_0})$. Припустимо, що $x_h(t) = (1-t)x_h + tv_{h_0}$. Тоді через угнутість функції корисності U^{h_0} маємо $U^{h_0}(x_{h_0}(t)) \geq (1-t)U^{h_0}(x_{h_0}) + tU^{h_0}(v_{h_0}) > U^{h_0}(x_{h_0})$ при $0 < t \leq 1$. Звідси $U^{h_0}(x_{h_0}(t)) > U^{h_0}(x_{h_0}^*)$, $h = 1, \dots, H$ при $0 < t \leq 1$. Значення $U^{h_0}(x_{h_0}^*)$ є максимально можливим для споживача h з його бюджетним обмеженням $x_h^* \in \bar{X}_h$, і при виборі z_1^*, \dots, z_E^* виробників одержана нерівність означає, що $x_h(t) \notin \bar{X}_h$, або $x_h(t)p^* > b_h p^* + \sum_{e=1}^E \alpha_{he}(z_e^* p^*)$.

У граничному переході при $t \rightarrow 0$ маємо

$$x_h p^* \geq b_h p^* + \sum_{e=1}^E \alpha_{he}(z_e^* p^*). \quad (3.29)$$

Хоча б одна з нерівностей (3.29) є строгою (наприклад, при $h = h_0$)

Підсумовуючи нерівності (3.29) із використанням того, що $\sum_{h=1}^H \alpha_{he} = 1$, $e = 1, \dots, E$, дістаємо нерівність

$$\left(\sum_{h=1}^H x_h \right) p^* > b p^* + \left(\sum_{e=1}^E z_e^* \right) p^*. \quad (3.30)$$

Оскільки вектор $z^* = \sum_{e=1}^E z_e^*$ є оптимальним вибором виробничого сектора при цінах p^* , виконується нерівність $z^* p^* \geq z p^*$ для довільного $z \in T$. Тоді з (3.30) випливає

$$\left(\sum_{h=1}^H x_h \right) p^* > (b + z) p^*. \quad (3.31)$$

Набір $x = (x_h)_{h=1, H}$ є розподілом благ і задовольняє нерівність $\sum_{h=1}^H x_h \leq b + z$ для деякого $z \in T$. Помноживши останню нерівність справа на вектор цін p^* , дістанемо нерівність, протилежну нерівності (3.31). Отримана суперечність доводить теорему. Δ

Іншим цікавим фактом є те, що будь-який Парето-оптимальний розподіл у деякому розумінні може брати участь у конкурентній рівновазі.

Теорема 3.5. Нехай розподіл благ $x^* = (x_h^*)_{h=1, H}$ є Парето-оптимальним. Тоді існують такі вектор цін p^* і набір випусків продукції $z^* = (z_e^*)_{e=1, E}$, $z_e^* \in T_e$, $e = 1, \dots, E$, що: (i) $\sum_{h=1}^H x_h^* \leq b + \sum_{e=1}^E z_e^*$; (ii) вектор z_e^* максимізує $z_e p^*$ при всіх $z_e \in T_e$, $e = 1, \dots, E$; (iii) вектор x_h^* мінімізує $x_h p^*$ при всіх $x_h \in X_h$, для яких $U^h(x_h) \geq U^h(x_h^*)$, $h = 1, \dots, H$.

∇ Нерівність (i) є очевидною. Перейдемо до доведення (ii). Нехай $M_h = \{x_h \in X_h : U^h(x_h) > U^h(x_h^*)\}$. Через ненасичуваність споживачів $M_h \neq \emptyset$. Неважко переконалися, що множина $G = b + T - \sum_{h=1}^H M_h$ не містить додатних векторів. Справді, якщо вектор $y \geq 0$ та $y \in G$, то $y = b + z - \sum_{h=1}^H x_h \geq 0$, $z \in T$, $x_h \in M_h$. Остання нерівність означає, що набір $(x_h)_{h=1, H}$ є допустимим, тобто є розподілом, а з означення M_h випливає, що він є кращим розподілом, ніж $(x_h^*)_{h=1, H}$, що суперечить Парето-оптимальності останнього.

Оскільки множини X_h , $h = 1, \dots, H$ — опуклі, а всі функції U^h — угнуті, множини M_h , $h = 1, \dots, H$, а отже, і множина G , також опуклі. Застосовуючи теорему про відокремлюваність опуклих множин, установлюємо, що існує такий невід'ємний вектор p^* , що $u p^* \leq 0$ для всіх $u \in G$. Тому для всіх $x_h \in M_h$, $h = 1, \dots, H$ і всіх $z_e \in T_e$, $e = 1, \dots, E$ виконується нерівність

$$\sum_{h=1}^H (b_h p^*) + \sum_{e=1}^E (z_e p^*) \leq \sum_{h=1}^H (x_h p^*). \quad (3.32)$$

Ця нерівність виконується також для будь-якого набору $\bar{x}_h \in \bar{M}_h = \{x_h \in X_h : U^h(x_h) \geq U^h(x_h^*)\}$, $h = 1, \dots, H$ (гуг \bar{M}_h є замиканням мно-

жини M_h). Справді, нехай $\bar{x}_h \in \bar{M}_h$, $x_h \in M_h$ і $x_h(t) = (1-t)x_h + tx_h$, $0 < t \leq 1$. Через угнутість функції U^h маємо $x_h(t) \in M_h$, а отже, нерівність (3.32) залишається правильною при заміні всіх x_h на $x_h(t)$. Переходячи до границі при $t \rightarrow 0$, доводимо нерівність.

Набір $(x_h^*)_{h=1, N}$ є розподілом, і тому існує вектор $z^* = \sum_{e=1}^E z_e^*$, $z_e^* \in T_e$, $e = 1, \dots, E$, при якому

$$\sum_{h=1}^H b_h + \sum_{e=1}^E z_e^* \geq \sum_{h=1}^H x_h^*. \quad (3.33)$$

Помноживши (3.33) справа на вектор p^* , отримуємо нерівність, протилежну (3.32). Оскільки $x_h^* \in M_h$, $h = 1, \dots, H$ і для них, як було показано, виконується (3.32), то

$$\sum_{h=1}^H (b_h p^*) + \sum_{e=1}^E (z_e^* p^*) = \sum_{h=1}^H (x_h^* p^*).$$

З цієї рівності та (3.32) випливає, що

$$\sum_{e=1}^E (z_e p^*) - \sum_{e=1}^E (z_e^* p^*) \leq \sum_{h=1}^H (x_h p^*) - \sum_{h=1}^H (x_h^* p^*) \quad (3.34)$$

для будь-яких $x_h \in \bar{M}_h$, $z_e \in T_e$. Тепер властивість (ii) теореми можна встановити, якщо в (3.34) припустити, що $x_h = x_h^*$, $h = 1, \dots, H$, $z_e = z_e^*$ для всіх e , крім одного. Отже, (ii) доведено. (iii) Доводиться аналогічно. Δ

На додаток до тверджень теореми 3.5 можна показати, що набір (x^*, z^*, p^*) є конкурентною рівновагою, якщо перерозподілити участь споживачів у прибутках таким чином, щоб $\alpha_{he} = 1/N$, а початкову власність так, щоб нова початкова власність споживача була

$$b'_h = x_h^* - \frac{1}{H} \sum_{e=1}^E z_e^*.$$

Відомий японський математик-економіст Х. Нікайдо так коментує практичне значення теореми 3.5 та її наслідків:

«Прихильники економічної теорії добробуту... надають великого значення теоремі та подібним до неї твердженням, вважаючи, що вони обґрунтовують досяжність Парето-оптимальних розподілів за допомогою конкурентного механізму цін. Однак не зрозуміло, чи справді такі розподіли можуть бути реалізовані суто конкурентним способом, адже при цьому припускаються перерозподіл початкової власності та належний розподіл прибутків, і немає ніякої гарантії, що вони здійснюються під дією конкурентного механізму. Деякі Парето-оптимальні розподіли можуть виявитися нездійсненними за допомогою механізму конкуренції, якщо індивідуальні учасники системи утримуватимуть свої привілеї, що історично

склалися, — початкову власність та частки участі у прибутках. Тому потрібно визнати, що хоч поняття Парето-оптимальності може бути плідним при розробці поведінки планувального органу, який прагне до «більш конкурентного та децентралізованого характеру функціонування економіки», це поняття все ж недостатньо відображає справжню суть конкуренції у приватновласницькій економіці»⁴.

3.7. РІВНОВАГА З ГАРАНТОВАНИМИ ДОХОДАМИ

Аналіз припущень, за яких досягається загальна економічна рівновага в моделі Ерроу – Дебре, показує, що головна складність у побудові моделі вальрасівського типу полягає в тому, щоб забезпечити кожному споживачеві додатний дохід при довільному ненульовому векторі цін.

Так, у моделі Ерроу – Дебре необхідність вимоги 4 про додатний початковий запас благ у кожного споживача зумовлюється неможливістю забезпечити йому додатний дохід у виробничому секторі. Справді, може статися, що всі ті підприємства, де споживач має ненульову частку α_{he} участі у прибутках при цінах p , є нерентабельними — їх оптимальний спосіб дії полягає у припиненні виробництва (тоді прибуток дорівнює 0). Таким чином, умову 4 в теоремі Ерроу – Дебре можна було б замінити на припущення, що кожне підприємство є рентабельним за будь-яких цін $p \geq 0$, $p \neq 0$, тобто на умову існування вектора $z_e(p) \in T_e$ для якого $z_e p > 0 \forall e$.

Багато хто з сучасних економістів вважають, що таке припущення не є реалістичним, адже в реальних економіках практично завжди існують нерентабельні підприємства й організації, без яких суспільство не може обійтися і які отримують різні субвенції, субсидії та інші привілеї (наприклад, протекціоністський захист від зовнішньої конкуренції тощо). Водночас припущення про рентабельність сукупного виробництва у всій економіці в цілому при довільних цінах $p \in R_+^n$ вважається досить допустимим.

Розглянемо модель змішаної економіки, або економіки з участю держави, що здійснює економічне регулювання частковим перерозподілом доходів на користь малозабезпечених верств населення. Часто її ще називають соціально орієнтованою ринковою економікою.

Для формального опису моделі введемо такі позначення:

$$\pi_e(p) = \max_{z_e \in T_e} z_e p, \quad e = 1, \dots, E; \quad (3.35)$$

$$\pi(p) = \sum_{e=1}^E \pi_e(p) = \max_{z \in T} z p. \quad (3.36)$$

⁴Нікайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — С. 365

Величина $\alpha = \pi(p)/H$ називається середнім рівнем доходу, що припадає на одного споживача при цінах p . Підприємство e вважається рентабельним при цінах p , якщо $\pi_e > 0$. Множина номерів усіх рентабельних підприємств позначається через $I_1(p)$, а нерентабельних — через $I_2(p)$.

При цінах $p \geq 0$ визначається значення d середнього рівня доходу і вибирається мінімальний його рівень μd , де нормувальний множник $\mu \in (0, 1]$. Щоб забезпечити кожному учасникові економічної системи мінімальний дохід μd , держава бере з кожного рентабельного підприємства податок $(1 - \mu) \cdot 100\%$. Тоді реальний прибуток $\tilde{\pi}_e(p)$ підприємства e , з якого сплачуються частки споживачам, які беруть участь у цьому, визначається рівностями

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_e(p) &= \mu \pi_e(p), \text{ якщо } e \in I_1(p); \\ \tilde{\pi}_e(p) &= 0, \text{ якщо } e \in I_2(p).\end{aligned}\quad (3.37)$$

У такому разі дохід кожного споживача h становить

$$K_h(p) = \sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p) + \max \left\{ 0, \mu d - \sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p) \right\}.$$

Нормувальний множник μ , що визначає мінімальний дохід, потрібно вибирати так, щоб забезпечити загальний фінансовий баланс, який виражається законом Вальраса у вузькому розумінні: $\sum_{h=1}^H K_h(p) = \pi(p)$.

Перетворюючи вираз для $K_h(p)$ з урахуванням рівності $\sum_{h=1}^H \alpha_{he} = 1$ та позначень (3.35) і (3.37) маємо таке рівняння для визначення множника $\mu = \mu(p)$:

$$\begin{aligned}\pi(p) &= \sum_{h=1}^H K_h(p) = \sum_{h=1}^H \sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p) + \sum_{h=1}^H \max \left\{ 0, \mu d - \sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p) \right\} = \\ &= \mu \sum_{e \in I_1(p)} \pi_e(p) + \sum_{h=1}^H \max \left\{ 0, d - \sum_{e \in I_1(p)} \alpha_{he} \pi_e(p) \right\},\end{aligned}$$

звідки

$$\mu(p) = \pi(p) \left[\sum_{e \in I_1(p)} \pi_e(p) + \sum_{h=1}^H \max \left\{ 0, d - \sum_{e \in I_1(p)} \alpha_{he} \pi_e(p) \right\} \right]^{-1}.$$

Із припущення, що загальний дохід $\pi(p) > 0$ при всіх $p \geq 0$, $p \neq 0$ та очевидної нерівності $\pi(p) \leq \sum_{e \in I_1(p)} \pi_e(p)$, випливає, що $0 < \mu(p) \leq 1$. Заува-

жимо, що дотація $\max \left\{ 0, \mu d - \sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p) \right\}$ сплачується кожному спо-

живачеві, чий дохід $\sum_{e=1}^E \alpha_{he} \tilde{\pi}_e(p)$ від участі у прибутках виробничого сектора менший від середнього рівня доходів d .

Зауважимо також, що функції $\mu(p)$ є неперервними при всіх $p \geq 0$, $p \neq 0$, оскільки функції $\pi_e(p)$ неперервні, а для кожного \bar{p} існує такий отвір $V(\bar{p})$, що при $p \in V(\bar{p})$ множини $I_1(p)$ та $I_1(\bar{p})$ збігаються. З неперервності $\mu(p)$ випливає неперервність $\tilde{\pi}_e(p)$, $e = 1, \dots, E$ і неперервність функцій $K_h(p)$, $h = 1, \dots, H$, що мають властивість однорідності першого степеня.

Функції сукупного попиту $\Xi_p(p)$ та пропозиції $\varphi(p)$ визначаються так само, як і в загальній моделі вальрасівського типу. Нехай $v(p) = 1 - \mu(p)$ — число, що визначає податок на прибутки для рентабельних підприємств. Оскільки сукупний попит Ξ залежить від $v(p)$, введемо позначення $\Xi(p, v(p))$.

Означення 3.7. Набір $\{x^*, z^*, p^*, v^*\}$ називається станом рівноваги в економіці з гарантованими доходами, якщо виконуються співвідношення $x^* \in \Xi(p^*, v^*(p^*))$, $z^* \in \varphi(p^*)$, $x^* \leq z^*$, $x^* p^* = z^* p^*$.

Теорема 3.6. Нехай виконуються такі припущення: 1) множина $X_h \in R_+^n$ опукла і замкнена, причому якщо $x^s \in X_h$, $\|x^s\| \rightarrow \infty$, $s = 1, 2, \dots$, то $x_1^s \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, n$; 2) функції корисності $U^h(x)$ неперервні й угнуті на X_h , $h = 1, \dots, H$; 3) $0 \in X_h$ для всіх $h = 1, \dots, H$; 4) для кожного споживача виконується аксіома насичуваності; 5) всі технологічні множини T_e є компактними; 6) множина $T = \sum_{e=1}^E T_e$ є опуклою; 7) існує такий загальний випуск $\bar{z} \in T$, що $\bar{z} > 0$ (випускаються всі види продукції). Тоді в економіці з гарантованими доходами існує стан загальної рівноваги, для якого $K_h(p^*) > 0$ при всіх $h = 1, \dots, H$.

Цю теорему можна довести міркуваннями, подібними до тих, які використовувалися при доведенні теореми Ерроу — Дебре.

3.8. РІВНОВАГА З ФІКСОВАНИМИ ДОХОДАМИ. БЮДЖЕТНИЙ ПАРАДОКС

Вальрасівська схема моделювання економіки стала прототипом багатьох різновидів моделей економічних систем, у яких звертається увага на ті чи ті особливості економічної діяльності. Прикладом ще одного типу моделей може бути модель економіки з фіксованими доходами, коли вважається, що дохід кожного учасника є сталим і не залежить від цін. Особливістю її є те, що вона не є замкнутою: у ній закон Вальраса для функцій сукупного попиту та пропозиції виконується не для всіх цін.

Перейдемо до опису такої моделі. Вважається, що є n типів продуктів й H споживачів з функціями корисності U^h , $h = 1, \dots, H$, визначеними на множині наборів продуктів $X_h \subset R_+^n$ та фіксованим значенням доходу K_h . Виробничий сектор економіки характеризується сукупною технологічною множиною T . Функція попиту $\Xi_p(p)$ споживача h при заданих цінах $p \in R_+^n$ є множиною розв'язків задачі раціонального споживання $U^h(x) \rightarrow \max$ при бюджетному обмеженні $xp \leq K_h$, $x \in M_h$. Функція пропозиції $\phi(p)$ виробничого сектора є множиною розв'язків задачі раціонального виробництва $zp \rightarrow \max$, $z \in T$. Означення стану рівноваги те саме, що і в загальній моделі вальрасівського типу (означення 3.3).

Подібна модель вивчалась у працях Подтеровича і Співака¹. Сформульована ними теорема існування рівноваги має такий вигляд.

Теорема 3.7. Нехай для моделі економіки з фіксованими доходами виконуються такі умови: 1) функції корисності U^h — угнуті та неперервні на X_h , $h = 1, \dots, H$; 2) множини X_h — замкнені й опуклі та $0 \in X_h$; 3) доходи додатні, $K_h > 0$, $h = 1, \dots, H$; 4) технологічна множина економіки T є опуклим компактом в R_+^n ; 5) існує додатний випуск \bar{z} , $\bar{z} > 0$, $\bar{z} \in T$. Тоді в моделі економіки з фіксованими доходами існує рівновага.

Порівнюючи вимоги теореми Ерроу — Дебре і теореми 3.7, бачимо, що в останній не фігурує аксіома ненасичуваності і не накладаються умови на структуру множини X_h , а припускається, що $T \subset R_+^n$. Якщо додати до умов теореми 3.7 припущення про спеціальну структуру множини X_h (умови 2 та 5 теореми Ерроу — Дебре), то теорему 3.7 легко довести за допомогою теореми Ерроу — Дебре.

Вважатимемо, що споживач h має частку γ_h у прибутках виробничого сектора $\gamma_h = K_h / \sum_{h=1}^H K_h$, $h = 1, \dots, H$, і позначимо $K_h = \gamma_h(zp)$, де z — довільний вектор з $\phi(p)$. Тоді модель з фіксованими доходами є частковим випадком моделі Ерроу — Дебре, коли $\alpha_{he} = \gamma_h$, $h = 1, \dots, H$, $e = 1, \dots, E$. Зазначимо, що теорема 3.7 містить мало гіпотез про характер споживання.

Модель економіки з фіксованими доходами є зручною для дослідження порівняльної статистики споживання. Нехай (x^*, z^*, p^*) — єдиний стан рівноваги моделі, $x^* = \sum_{h=1}^H x_h^*$, $x_h^* \in \Xi_h(p^*)$. Тоді, очевидно, міру задоволення

споживача $h: U_x^h = U^h(x^*)$ можна вважати функцією доходів: $U_x^h =$

$= U_x^h(K_1, \dots, K_H)$. Отже, виникає проблема дослідження U_x^h при зміні доходів K_h , $h = 1, \dots, H$. Наприклад, припустимо, що дохід K_1 першого споживача зріс до значення K_1' , $K_1' > K_1$, а доходи інших залишилися на попередньому рівні $K_h' = K_h$, $h = 2, \dots, H$. Чи виконуватиметься нерівність $U_x^1(K_1', \dots, K_H') > U_x^1(K_1, \dots, K_H)$?

Досить прості приклади показують, що при цьому можливими є ситуації, коли споживання першого учасника спадає і U_x^1 також спадає, а виграють деякі інші споживачі. Це явище називається **бюджетним парадоксом**. У [2] докладно аналізується приклад, коли у двопродуктовій економіці з трьома споживачами через збільшення доходу першого учасника зростає попит на перший продукт, що веде до підвищення ціни на нього. Третій учасник, для якого цей продукт є товаром Гіффена, також підвищує свій попит на нього, що веде до ще більшого зростання ціни, внаслідок чого перший споживач програє.

При дослідженні питань порівняльної статистики в моделях загальної економічної рівноваги важливу роль відіграє поняття валової змінюваності.

Означення 3.8. Функція надмірного попиту $E(p) = \Xi(p) - \phi(p)$, яку для простоти викладу вважатимемо однозначною, має властивості **валової замінюваності**, якщо для цін p , $p' \in R_+^n$, $p \geq p'$, $p_i = p'_i$ виконується нерівність $E_i(p) \geq E_i(p')$.

Це означення має таке економічне тлумачення: якщо ціни на окремі товари зросли, то надмірний попит на той товар, ціна якого залишилася незмінною, може тільки зростати. Якщо функція $E(p)$ є диференційованою, то властивість валової замінюваності означає, що $(\partial E_i / \partial p_j) \geq 0$ при $j \neq i$.

Дійсною є така теорема, доведення якої можна знайти в [2].
Теорема 3.8. Нехай для моделі економіки з фіксованими доходами виконуються такі умови: 1) функції $U^h(x)$ для всіх h — неперервні й угнуті; 2) кожний учасник задовольняє аксіомі ненасичуваності і для кожного продукту i , $1 \leq i \leq n$ знайдеться учасник, який не насичується ним; 3) будь-який продукт є цінним для першого споживача; 4) технологічна множина T є опуклим компактом, що містить строго додатний вектор; 5) функція надмірного попиту має властивість валової замінюваності. Тоді в цій моделі бюджетний парадокс щодо першого споживача неможливий.

3.9. ПРОЦЕСИ ФОРМУВАННЯ ЦІН

З економічного погляду, стан рівноваги є необхідною умовою стабільного та нормального функціонування економіки. З наведених вище фактів про конкурентну рівновагу не випливає, що вона може бути досягнута автоматично й через неузгоджені дії економічних агентів (учасників економічних процесів виробництва та споживання) у власних інтересах. По-

¹Подтерович В. М. Равновесные траектории экономического роста / Методы функционального анализа в математической экономике. — М.: Наука, 1978. — С. 56–97; Подтерович В. М., Спивак В. А. Бюджетный парадокс в модели экономического равновесия // Экономика и математич. методы. — 1979. — 15, № 1. — С. 115–127.



Рис. 3.4

ної ціни. Нехай є один продукт, попит та пропозиція якого описуються функціями сукупних попиту $\Xi(p)$ і пропозиції $\phi(p)$, що є однозначними, неперервними та визначеними для всіх $p > 0$, причому $\Xi(p)$ монотонно спадає, а $\phi(p)$ монотонно зростає; $\lim_{p \rightarrow 0} \Xi(p) = \infty$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \Xi(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow 0} \phi(p) = 0$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \phi(p) = \infty$.

Для одного товару у стані рівноваги, очевидно, $p \neq 0$, отже цей стан характеризується рівністю $\Xi(p^*) = \phi(p^*)$, де p^* — рівноважна ціна. Через припущення відносно функцій Ξ та ϕ ця рівність має єдиний розв'язок, так що стан рівноваги (p^*, x^*, z^*) описується рівностями $x^* = \Xi(p^*) = \phi(p^*) = z^*$. У разі порушень цих припущень стан рівноваги може не досягатися. Відповідний приклад показано на рис. 3.4.

Процес «намацування» для розглядуваної моделі такий. У початковий момент на продукт встановлюється ціна p^0 . Якщо $\Xi(p^0) > \phi(p^0)$ (попит перевищує пропозицію), то ціна збільшується до p^1 , щоб виконувалася рівність $\Xi(p^1) = \phi(p^0)$. Якщо ж $\Xi(p^0) < \phi(p^0)$ (надмірна пропозиція), то ціна знижується так, щоб попит збільшився до пропозиції. Якщо t — дискретні моменти часу, в які відбуваються зміни цін, то різницеве рівняння, що описує павутиноподібний процес «намацування», має вигляд $\Xi(p^t) = \phi(p^{t-1})$, $t = 1, 2, \dots$

Коли $\lim_{t \rightarrow \infty} p^t = p^*$, павутина називається збіжною, або динамічною (рис. 3.5, а). Проте така стабільність павутини досягається не завжди. Коли пропозиція є еластичнішою відносно попиту, павутина може бути

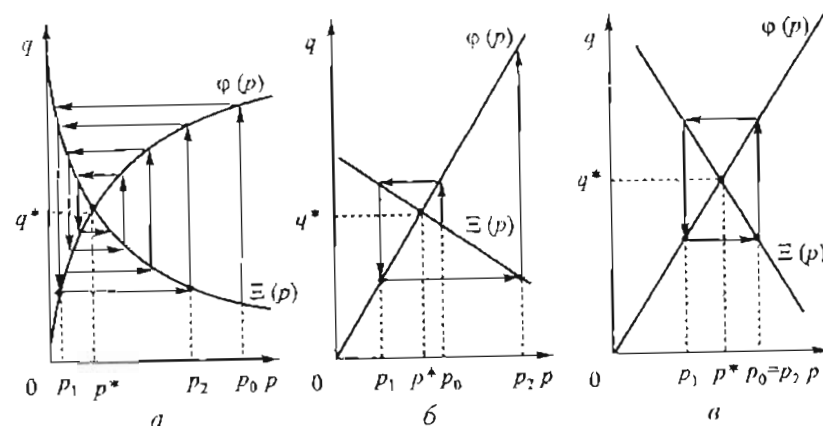


Рис. 3.5

розбіжною (рис. 3.5, б). Інший випадок пов'язаний із ситуацією, коли нахили прямолінійних функцій попиту та пропозиції однакові (рис. 3.5, в). Тоді павутина не збігається і не розбігається, а утворює один замкнений цикл (досконала павутина).

У моделі Еванса час t та ціна $p(t)$ на продукт змінюються неперервно і вводяться такі позначення для сукупних попиту та пропозиції, як функції часу: $d = d(t) = \Xi(p(t))$, $s = s(t) = \phi(p(t))$. У моделі постулюється, що попит та пропозиція є афінними функціями цін:

$\Xi(p) = a - bp$, $a > 0$, $b > 0$ (попит спадає при зростанні ціни); $G(p) = \alpha + \beta p$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (пропозиція зростає при збільшенні ціни). Вважається також, що $a > \alpha$ (при $p = 0$ попит перевищує пропозицію).

Головне припущення моделі полягає в тому, що зміна ціни пропорційна перевищенню попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t, \quad \gamma > 0. \quad (3.38)$$

Отже, ціна неперервно «пристосовується» до ринкової ситуації: при $d - s > 0$ зростає, а при $d - s < 0$ спадає.

Поділивши обидві частини рівності (3.38) на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, дістанемо таке диференціальне рівняння відносно ціни $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = -(b + \beta)\gamma p + \gamma(a - \alpha), \quad p(0) = p_0. \quad (3.39)$$

Тут функція $p(t)$ має стаціонарну точку p^0 , де $dp/dt = 0$,

$$p^0 = \frac{a - \alpha}{b + \beta} > 0. \quad (3.40)$$

¹Назва пов'язана з тим, що відповідна графічна ілюстрація процесу нагадує павутину.

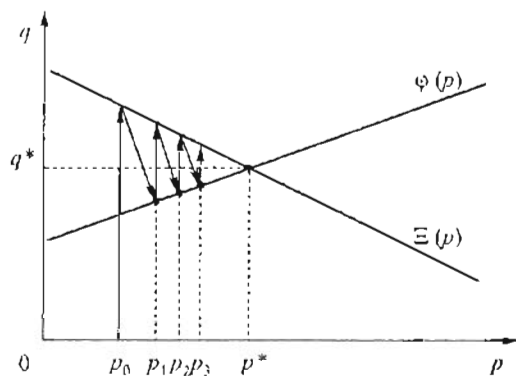


Рис. 3.6

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b+\beta)t} + \frac{\alpha - \alpha}{b + \beta} \left[1 - e^{-\gamma(b+\beta)t} \right].$$

Дискретний аналог моделі Еванса зображено на рис. 3.6, де показано механізм виникнення послідовності p_n наближень рівноважної ціни p^0 . Тут проміжок часу поділено на рівні інтервали завдовжки Δt , і ціна p_n у момент часу $t_n = n\Delta t$ визначається різницевою рівнянням

$$p_n = p_{n-1} + \gamma \Delta t \delta_{n-1},$$

де $\delta_{n-1} = (\sigma - \alpha) - (b - \beta)p_{n-1}$.

Для загального випадку наявності n видів товарів на ринку П. Самуельсон¹ [44] запропонував схему моделювання динаміки цін у неперервному часі на реальному ринку товарів. У цій моделі припускається, що функція надмірного попиту $\Xi(p)$ є однозначною та неперервною при всіх $p > 0$. Модель описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_i \Xi_i(p), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.41)$$

де додатне число λ_i називається коефіцієнтом підстроювання ціни на i -й товар. Система (3.41) моделює динамічний процес формування цін на товари таким чином: якщо $\Xi_i(p) > 0$ (тобто попит на товар i перевищує пропозицію), то ціна на товар i зростає; якщо ж $\Xi_i(p) < 0$, то ціна спадає.

Із теорії диференціальних рівнянь відносно системи відомо таке. (i) Для кожної точки p^0 з відкритої множини P , $P \subset R^n$, існує розв'язок $p(t)$ задачі Коші $dp_i/dt = \lambda_i \Xi_i(p)$, $p_i(0) = p_i^0$, $i = 1, \dots, n$ визначений на деякому проміжку $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ і при цьому $p(t) \in P$, $t \in [0, \varepsilon]$. Розв'язок не обов'язково єдиний? (ii) Якщо локальний розв'язок $p(t)$ задачі Коші

¹Самуельсон Пол (нар. 1915 р.) – американський економіст математичного напрямку, лауреат Нобелівської премії 1970 р., присудженої за поглиблення наукового аналізу в економічних науках.

²Наприклад, для одновимірної задачі Коші $\dot{p} = p^{1/3}$, $p(0) = 0$ існують два розв'язки $p(t) = (2p^{1/3})^{3/2} = p(t) = 0$

Із (3.39) випливає, що при $p_0 < p^0$ ($dp/dt > 0$), а при $p_0 > p^0$ ($dp/dt < 0$), і тому $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = p^0$. Очевидно, що p^0 є рівноважною ціною, оскільки $\Xi(p^0) = \Phi(p^0)$.

Такі самі результати можна отримати, якщо використати розв'язок рівняння (3.39)

на всій області свого визначення набуває значення з деякої обмеженої підмножини Γ множини P , то $p(t)$ можна продовжити на всю піввісь $[0, \infty]$.

Означення 3.9. Процес формування цін (3.41) називається **глобально стійким**, якщо при довільному $p^0 > 0$ існує і границя $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \bar{p}$, де \bar{p} – деякий вектор рівноважних цін, залежний від p^0 .

Означення 3.10. Функція надмірного попиту $\Xi(p)$ називається **нерозкладною**, якщо для будь-яких векторів $p, p' \in R^n$ з того, що $p \geq p'$, $p \neq p'$ та $I = \{i : p_i = p'_i\} \neq \emptyset$, випливає, що $\Xi_i(p) \geq \Xi_i(p')$ для всіх $i \in I$ та хоча б для одного такого, і ця умова має вигляд строгої неперервності.

Зрозуміло, що нерозкладність є підсиленням вимоги валової замінюваності.

Теорема 3.9. Нехай для моделі динаміки цін (3.41) виконуються такі умови: 1) цінні p належать множині $P = \{p \in R^n : p > 0\}$; 2) функція $\Xi(p)$ – однозначна, неперервна на P та нерозкладна; 3) виконується закон Вальраса у вузькому розумінні $\Xi(p)p = 0$; 4) функція $\Xi(p)$ – однорідна нульового степеня, $\Xi(\alpha p) = \Xi(p)$ при $\alpha > 0$; 5) існує рівноважний вектор цін $\bar{p} \in P$; 6) функція $\Xi(p)$ обмежена знизу на P .

Тоді процес формування цін (3.41) – глобально стійкий.

Доведення цієї теореми можна знайти у [2].

3.10. МОДЕЛЬ РІВНОВАГИ МАКАРОВА

Ідеї, закладені в моделях загальної рівноваги вальрасівського типу, відкривають можливості їх подальшого розвитку та вдосконалення. Як приклад подібних можливостей розглянемо загальну модель загальної рівноваги В. Л. Макарова¹, окремими випадками якої є узагальнена модель Вальраса, модель Ерроу – Дебре та модель з фіксованими доходами.

У моделі Макарова немає поділу економічних агентів (учасників економіки) на споживачів і виробників – кожний з агентів може виступати і як споживач, і як виробник. Нехай в економіці є n видів товарів та l економічних агентів. З агентом j пов'язані дві множини $X_j \subset R^n$, $Y_j \subset R^n$, де X_j – множиною стратегій агента j як споживача, а Y_j – множиною його виробничих можливостей. Отже, множиною альтернатив (виборів стратегій) агента j є декартовий добуток $Z_j = X_j \times Y_j$. У модель входить множина P допустимих цін $P \subset R^n$ і множина станів економіки $Z = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_l \times P$, елементи якої з називаються станами економіки: $z = (z_1, \dots, z_l, p)$, де $z_j \in Z_j$, $j = 1, \dots, l$. Інтереси агента j моделюються

¹Макаров Валерій Леонідович (нар. 1937 р.) – російський математик-економіст

за допомогою багатозначного відображення $S_j: Z \rightarrow 2^Z$, де $S_j(z)$ — множина тих станів z' , які, на думку учасника j , є більш переважними, ніж стан z .

Особливістю моделі є те, що інтереси агента залежать не тільки від того, що він отримує (вектор x_j), а й від стратегії y_j з Y_j . Оскільки Y_j характеризують праця j -го учасника, то його оцінка S_j стану z залежить також від отримуваного набору благ x_j і від того, яких зусиль це коштувало. Відображення S_j залежить не тільки від стану z_j учасника j , а й від станів z_i , $i \neq j$ інших економічних агентів. Отже, кожний агент діє певним чином, враховуючи дії інших агентів, тобто враховуються соціальні фактори (такі, як градивні, мода, задрість тощо).

Механізми розподілу доходів від виробничої діяльності описується функціями $\alpha_j: Z \rightarrow R$, $j = 1, \dots, I$, де $\alpha_j(z)$ — дохід агента j у стані z . Якщо стан z несприятливий для j , то дохід $\alpha_j(z)$ може бути від'ємним (заборгованість j).

Нехай для стану економіки $z = (z_1, \dots, z_I, p)$ символ $(z | \bar{z}_j)$ позначає стан $z = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_I, p)$ і \bar{S}_j є багатозначним відображенням, що визначається рівністю $\bar{S}_j(z) = \{\bar{z} \in Z: (z | \bar{z}_j) \in S_j(z)\}$. Відображення \bar{S}_j є зуженням відображення S_j на компоненту Z_j простору станів економіки Z і має таку економічну інтерпретацію, якщо склався стан економіки z , то за умови, що інші учасники зберігають свої стратегії z_i ($i \neq j$), будь-який стан $(z | \bar{z}_j)$ при $z_j \in S_j(z)$ є для агента j більш переважним, ніж z .

Бюджетні обмеження агента j задаються багатозначним відображенням $B_j: Z \rightarrow 2^{X_j}$, де $B_j(z) = \{\bar{z}_j \in Z_j: \bar{x}_j \cdot p \leq \alpha_j(z | \bar{z}_j)\}$. При цьому $B_j(z)$ називається бюджетною множиною агента j у стані z , оскільки $\alpha_j(z | \bar{z}_j)$ є доходом агента j у стані $(z | \bar{z}_j)$, а $\bar{x}_j \cdot p$ — вартістю товарів x_j у стані z (тобто коли вектор цін збігається з p).

Означення 3.11. Функцією надмірного попиту називається функція $E(z) = \sum_{i=1}^I v_i - \sum_{i=1}^I u_i$, а стан економіки z , $z \in Z$ збалансованим, якщо $E(z) = 0$.

Означення 3.12. Стан економіки z^* , $z^* \in Z$ називається станом економічної рівноваги, якщо виконуються умови

$$B_j(z^*) \cap \bar{S}_j(z^*) = \emptyset; \quad j = 1, \dots, I; \quad (3.42)$$

$$E(z^*) = 0; \quad (3.43)$$

$$z_j^* \in B_j(z^*), \quad j = 1, \dots, I. \quad (3.44)$$

Розглянемо змістовну інтерпретацію цих умов. Умова (3.44) означає, що у стані рівноваги z^* вибір агента j зроблено з урахуванням його бюджетних можливостей: видатки не перевищують доходу. Умова (3.43) є умовою збалансованості попиту та пропозиції. Умова (3.42) означає, що кожний агент діє найкращим для себе чином відповідно до ситуації, що склалася: жоден з агентів не може перевести стан z^* у стан, більш переважний для себе $(z^* | \bar{z}_j)$, вибором іншої стратегії \bar{z}_j , якщо інші агенти залишають свої стратегії незмінними. Зауважимо, що для читача, знайомого з теорією ігор і загальною теорією прийняття рішень, достатньо зрозумілим є ті факти, що в моделі Макарова широко застосовується математичний інструментарій моделювання цих теорій, і що умови загальної економічної рівноваги (3.42)–(3.44) є означенням розв'язку гри I осіб за Нешем, тобто рівновага z^* є оптимальною у розумінні Неша¹.

Означення 3.13. Якщо замість (3.13) в означенні (3.12) справджується нерівність $E(z^*) \leq 0$, то стан z^* називається піврівновагою.

Основним результатом у узагальненій моделі економіки, що розглядається, є таке твердження

Теорема 3.10 (Макарова). Нехай у моделі Макарова виконуються такі умови: 1) множина допустимих цін P є опуклим компактом, що містить точку $p = 0$ як внутрішню; 2) множини X_j , Y_j є опуклими компактами; 3) функції α_j — неперервні й цигнуті по z_j ; 4) множина $\Gamma_j = \{(z, z_j): z \in Z, z_j \in S_j(z)\}$ — відкрита; 5) для кожного $z \in Z$ вектор z_j не належить опуклому замиканню множини $P_j(z) = \{\bar{z}_j: \bar{z}_j = \alpha \bar{z}_j + (1-\alpha)z_j, \bar{z}_j \in B_j(z), 0 < \alpha \leq 1\}$; 6) виконується закон Вальраса у вузькому розумінні, тобто $\sum_{i=1}^I (y_i p) = \sum_{i=1}^I \alpha_i(z)$ для всіх $z \in Z$; 7) $\alpha_j(z) = 0$ для всіх $j = 1, \dots, I$, якщо $p = 0$; 8) для будь-якого $z \in Z$ при $p \neq 0$ знайдеться $\bar{x}_j \in X_j$, для якого $\bar{x}_j p < \alpha_j(z)$; 9) кожний з економічних агентів задовольняє умову ненасичуваності, тобто якщо $E(z) = 0$, то $P_j(z) \neq \emptyset$. Тоді в моделі існує стан загальної економічної рівноваги.

Докладнішу інформацію про модель Макарова читач знайде в [25].

Зауважимо, що наведена теорема дає досить широкі можливості для вирішення питань існування оптимальних станів рівноваги у конкретизованих моделях. При цьому низка умов із теореми 3.10 має технічний характер і для менш загальних моделей може впливати з інших причин.

¹Неш Джон — американський математик, фахівець із теорії ігор, лауреат Нобелівської премії з економіки 1994 р.

Задачі та вправи

3.1. Економіка чистого обміну характеризується тим, що в ній відсутнє виробництво, і кожний споживач має певний первісний (до початку обміну) запас кожного зі споживчих товарів. 1. Описати умови рівноваги в загальному випадку n споживачів та n споживчих товарів. Чи буде при цьому кількість рівнянь збігатися з кількістю невідомих? 2. Описати умови рівноваги у випадку, коли $n = 2$ і кожний споживач має квадратичну функцію корисності.

3.2. Нехай для економіки чистого обміну $n = 3$ (див. задачу 3.1) і початковий розподіл благ Q_0 та матриця граничної корисності MU задаються виразами

$$Q_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad MU = \begin{pmatrix} 1/x_1 & (b-x_2)/x_2^2 & 2(c-x_3)/x_3^2 \\ 1/x_1^2 & 1/x_2^2 & 0 \\ 1/x_1^2 & 0 & 1/x_3 \end{pmatrix}.$$

де рядки стосуються споживачів, а стовпці — товарів. Знайти рівноважні ціни та кінцевий розподіл благ. Описати обмін змислово. Чи є розв'язок розумним?

3.3. Класична модель вальраєвського типу, описана у п. 3.1, побудована на припущенні, що кожна фірма виробляє всі типи товарів та використовує фактори всіх видів і що кожний купує всі товари та продає всі фактори. Ослаблення цих припущень веде до появи нерівностей в умовах рівноваги. 1. Вивести умови, які складаються з нерівностей, і показати, що серед співвідношень, які залишаться, нерівностей не буде. 2. З'ясувати, яку форму має закон Вальраса у цьому випадку.

3.4. Нехай споживач h в економіці характеризується догнатифічною функцією корисності $U^h = \sum_{i=1}^n \alpha_i^h \log \alpha_i^h x_i^h$, $h = 1, \dots, H$, $\alpha_i^h > 0 \forall i, h$, $\sum_{h=1}^H \alpha_i^h = 1 \forall h$. Довести, що при фіксованні пропозиції всі товари є явно замінюваними. Знайти рівноважні ціни.

3.5. Нехай індивідум має функцію корисності для надмірного попиту \mathcal{E} на два товари вигляду $U = a_1 \exp(-b_1 \mathcal{E}_1) - a_2 \exp(-b_2 \mathcal{E}_2)$, де a_1, a_2, b_1, b_2 — додатні константи. Він максимізує корисність при виконанні бюджетного обмеження вигляду $p_1 \mathcal{E}_1 + p_2 \mathcal{E}_2 = 0$, де p_1, p_2 — ціни на відповідні товари. Знайти надмірний попит як функцію відношення p_2/p_1 . Чи є товари явно замінюваними? За якого співвідношення ціні існує економічна рівновага?

3.6. Прикладом економіки з нестійкою рівновагою є економіка чистого обміну з трьома споживачами і товарами, де початкові запаси товарів характеризуються матрицею $E_3 = (\delta_{ij})_{i=1,3}^{j=1,3}$ (одичинною матрицею), а функції корисності споживачів мають вигляд $U^1 = \min\{x_1^1, x_2^1\}$; $U^2 = \min\{x_2^2, x_3^2\}$; $U^3 = \min\{x_1^3, x_2^3\}$; $U^3 = \min\{x_1^3, x_3^3\}$. 1. Знайти функції попиту та надмірного попиту для споживача. 2. Знайти вектор ринкового надмірного попиту і показати, що рівновага існує та є єдиною, коли всі ціни збігаються.

3.7. Довести в моделі Ерроу — Дебре напівоперервність зверху відображення $\varphi(p)$.

3.8. Нехай в неокласичній задачі споживання $U(x) \rightarrow \max$, $x p \leq I$, $x \geq 0$ функція корисності — неперервна й увгнута, $p \geq 0$, $I > 0$. Чи є правильним твердження, що ця задача або має розв'язок при довільному $I > 0$, або не має розв'язку при всіх $I > 0$?

Вказівка. Розглянути функцію $U(x_1, x_2) = \min\{1, (x_2 - 1)/(1 + x_1)\}$. Якщо виявити ненасичуваність споживача, то слід розглядати функцію $U(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) + x_2$.

3.9. Розглянути таку модель типу Ерроу — Дебре. В економіці є два типи товарів та один споживач, а технологічна множина виробничого сектора $T = \{(z_1, z_2) : 0 \leq z_1 \leq 1, z_2 = 0\}$. Функція корисності споживача має вигляд $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ і визначена на множині $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 - 1 \leq x_1 \leq x_2 + 1\}$. Увесь дохід

$p_1 z_1 + p_2 z_2$ виробничого сектора надходить у розпорядження споживача. Перевірити, що в цій моделі виконуються всі умови теореми Ерроу — Дебре, за одним винятком: у споживача немає початкової власності.

3.10. Довести, що в моделі задачі 3.9 не існує конкурентної рівноваги.

3.11. Довести, що коли в моделі задачі 3.9 покласти $X = R_+^2$, то ринкова також не існує.

3.12. Для довільних векторів $x, y \in R_+^n$, $y \neq 0$ відомо позначення $x \preceq y$ — $\max\{\delta : \delta y \leq x\}$. Називатимемо вектор x допустимим для задачі (3.42) у моделі Вальда — Касселя (див. п. 3.4), ефективним, якщо $b \preceq Ax = 1$. Довести, що: 1) множина Ω всіх ефективних векторів задачі (3.42) є замкнутою; 2) для ефективного вектора x існує такий вектор $p \in R_+^n$, $p \neq 0$, що x є розв'язком задачі (3.42).

3.13. Нехай відображення $P: \Omega \rightarrow 2^{R_+^n}$ для моделі Вальда — Касселя зіставляє кожний вектор $x \in \Omega$ з множиною xP всіх векторів $p \in R_+^n$, існування яких стверджувалося у п. 2 попередньої задачі, відображення $V: R_+^n \rightarrow 2^{R_+^n}$ зіставляє довільний $p \in R_+^n$ з множиною pV розв'язків задачі (II) в моделі Вальда — Касселя, і для відображення $K: \Omega \rightarrow R_+^n \times R_+^n$ $xK = \{(p, v) : p \in xP, v \in pV\}$ для довільного $x \in \Omega$. Перевірити, що при кожному $x \in \Omega$ множина xP є конусом і відображення P, V та K є напівоперервними зверху.

3.14. Нехай для моделі рівноваги з фіксованими доходами на додаток до умов і з теореми 3.7 кожний учасник задовольняє умову ненасичуваності, а для кожного товару i , $1 \leq i \leq n$ знайдеться учасник, який є ненасиченим саме за цим товаром. Довести, що тоді рівноважні ціни p^* є строго додатними і $\mathcal{E}(p^*) = 0$.

3.15. Нехай функція надмірного попиту $\mathcal{E}(p)$, $p \in R^n$, $p > 0$ визначається рівністю

$$\mathcal{E}_i(p) = \frac{\bar{p}_i}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^n \bar{p}_j,$$

де $\bar{p} = (\bar{p}_j)_{j=1, \dots, n} > 0$ — деякий фіксований вектор. Перевірити такі властивості функції

$\mathcal{E}(p)$: 1) для неї виконується закон Вальраса у вузькому розумінні; 2) $\mathcal{E}(p)$ — нерозкладна функція; 3) $\mathcal{E}(p)$ — однорідна функція нульового степеня; 4) якщо \bar{p} — вектор рівноважних цін для $\mathcal{E}(p)$, то $\bar{p} = \alpha \bar{p}$ для деякого $\alpha > 0$; 5) мінімум функції $\psi(p) = \mathcal{E}(p) \bar{p}$ досягається у будь-якій точці променя $\alpha \bar{p}$, $\alpha > 0$ і тільки в цих точках.

3.16. Нехай функція надмірного попиту $\mathcal{E}(p)$ задовольняє умови 1–5 із теореми 3.9. Довести, що: 1) областю визначення функції $\mathcal{E}(p)$ є множина $P = \{p \in R^n : p > 0\}$; 2) будь-який рівноважний вектор ціні є додатним; 3) вектор \bar{p} є рівноважним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{E}(\bar{p}) = 0$; 4) якщо \bar{p} — рівноважний вектор ціні, то $\bar{p} = \alpha \bar{p}$ для деякого $\alpha > 0$.

Основні мікроекономіки невизначеності, в якій моделюється поведінка мікроекономічних агентів в умовах невизначеності стохастичного характеру, були закладені Дж. фон Нейманом та О. Моргенштерном в монографії [30]. По-далший її розвиток був пов'язаний з роботами Ерроу та Пратта у 60-ті роки ХХ ст., наслідком чого стали численні дослідження з прийняття економічних і фінансових рішень в умовах ризику.

Базовий підхід до відповідних проблем використовує низку припущень (цінності) і подвійної корисності. Незважаючи на деякі заперечення проти цих гіпотез, вони дають можливість розвинути досить потужний аналітичний апарат для дослідження відповідних проблем. Істотною рисою невизначеності відіграє в моделях пов'язаних з фінансовими та страховими ринками. Це спричинило бурхливий розвиток досліджень з фінансової економіки, аналітичною основою якої є сучасна фінансова та актирна (страхова) математика.

4.1. ПРИПУЩЕННЯ СПОДІВАНОЇ КОРИСНОСТІ. ТЕОРЕМА ФОН НЕЙМАНА—МОРГЕНШТЕРНА

У звичайній теорії економічного вибору в детермінованих умовах не припускається ніякої принципової відмінності між окремими актами вибору. Проте в умовах невизначеності акти вибору та їхні наслідки залежать від зовнішніх обставин, які трактуються як **стани природи, стани світу, або просто стани**.

Множина альтернатив, з якої робиться вибір, називається **проспектом**, або **лотереєю**.

Розглянемо випадок скінченної множини станів, яка складається з s елементів, так що кожний проспект має s наслідків вибору x^1, x^2, \dots, x^s в деякій підмножині X простору R^n . Вважається, що кожний наслідок x^i може бути отриманий з деякою ймовірністю p_i (яка розглядається як **суб'єктивна ймовірність**, що приписується цьому наслідку агентом, який робить вибір). Множина всіх подібних ймовірностей утворює деякий дискретний ймовірнісний розподіл $\{p_1, \dots, p_n\}$, тобто $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^s p_i = 1$. Описаний проспект (або лотерея) y в подальшому позначатиметься як

$$y = \bigoplus_{i=1}^s p_i \circ x^i = p_1 \circ x^1 \oplus p_2 \circ x^2 \oplus \dots \oplus p_s \circ x^s.$$

Зауважимо, що припущення про скінченність множини станів s та відповідну дискретність проспекту не є принциповими, і відповідні конструкції можуть бути поширені також на інші випадки.

Позначимо через Y множину всіх проспектів для окремого агента (або індивідуума), який стоїть перед проблемою вибору в умовах описаної вище невизначеності. Припускається, що агент може робити вибір з Y за допомогою деякого відношення переваги \succeq , що є повним квазіпорядком на Y (тобто повним бінарним транзитивним і рефлексивним відношенням). Крім того, вважається можливим утворення складних проспектів (або лотерей), компонентами (наслідками) яких є також проспекти

$$y_j = \bigoplus_{i=1}^s p_i^j \circ x_i^j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тоді складний проспект

$$y = \bigoplus_{j=1}^m q_j \circ y_j$$

пов'язаний з наслідками y_j , що отримуються згідно з дискретним розподілом ймовірностей $\{q_1, \dots, q_m\}$, $q_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$.

До найпростіших належать проспекти з двома й одним наслідками, тобто проспекти вигляду

$$y = p \circ x^1 \oplus (1-p) \circ x^2 = p \circ x^1 \oplus (1-p) \circ x^2 \oplus 0 \circ x^3 \oplus \dots \oplus 0 \circ x^s, \\ 0 \leq p \leq 1, \quad (4.1)$$

$$y = 1 \circ x = 1 \circ x \oplus 0 \circ z, \quad (4.2)$$

де z — деякий наслідок з X . При цьому бінарний проспект (4.1) характеризується трьома параметрами p, x^1, x^2 й іноді скорочено позначається як $y = (p; x^1, x^2)$, а унарний проспект (4.2), в якому з ймовірністю 1 реалізується наслідок x , практично може бути отождествлений з елементом x із множини X , $y = 1 \circ x = (1, x, x) = x$.

Основні припущення щодо поставленої вище проблеми вибору окремого агента з множини проспектів Y , відомі як аксіоми фон Неймана—Моргенштерна сподіваної корисності, описано нижче.

Аксіома 4.1. Агент має на множині Y усіх проспектів відношення переваги \succeq (повний квазіпорядок), а отже, (Y, \succeq) є полем переваг у заданій виборі рішення агентом.

Як наслідок цієї аксіоми, відношення переваг \succeq також є автоматично визначенням на множині X усіх наслідків проспектів, оскільки, зокрема $(p, x, x) = x$ для всіх $x \in X$, а отже, (X, \succeq) також є деяким полем переваг.

Аксіома 4.2 (неперервність). Для всіх $y^1, y^2, y^3 \in Y$ із властивістю $y^1 \succeq y^2 \succeq y^3$ існує таке α , $0 \leq \alpha \leq 1$, що $\alpha \circ y^1 \oplus (1-\alpha) y^3 = (x, y^1, y^3) \sim y^2$.

Інакше кажучи, для середнього проспекту існує можливість його інтерполяції деякою ймовірнісною сумішшю крайніх проспектів.

Аксіома 4.3 (редукція складного проспекту). Для складного проспекту $y = \bigoplus_{i=1}^m q_i \circ y_i$, де $y_i = \bigoplus_{j=1}^s p_j^i \circ x^j$ — звичайні проспекти, $i = 1, \dots, m$, існує звичайний проспект $y' = \bigoplus_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^m q_k p_j^k \right) \circ x^j$, еквівалентний y , $y' \sim y$.

Аксіома фактично означає, що при обчисленні ймовірностей наслідків x^j складної лотереї можна користуватися відомою формулою повної ймовірності. Так, формальну еквівалентність лотерей з двома наслідками

$$y = \left[\alpha; x^2, (\pi; x^1, x^2) \right] \sim \left[(1-\alpha)\pi; x^1, x^2 \right]$$

можна пояснити застосуванням звичайних правил обчислень ймовірностей P_r подій x^1 та x^2 :

$$Pr(x^1) = Pr(\pi; x^1, x^2) \quad Pr(x^1 / (\pi; x^1, x^2)) = (1-\alpha)\pi, \text{ де } Pr(A \mid B) \text{ позначає умовну ймовірність події } A \text{ за умови } B, \text{ й аналогічно } Pr(x^2) = Pr(x^2 / y) + Pr(x^2 / (\pi; x^1, x^2)) \quad Pr((\pi; x^1, x^2) / y) = \alpha + (1-\alpha)(1-\pi) = 1 - (1-\alpha)\pi.$$

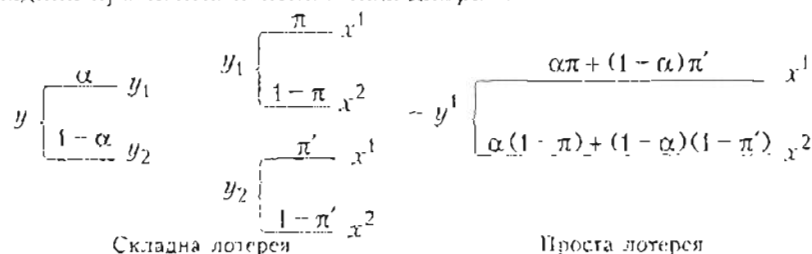
Зауважимо, що аксіома 4.3 дає змогу конструювати довільні проспекти з проспектів, що мають тільки два наслідки. Так,

$$\frac{1}{3} \circ x \oplus \frac{1}{3} \circ y \oplus \frac{1}{3} \circ z \sim \frac{2}{3} \circ \left[\frac{1}{2} \circ x \oplus \frac{1}{2} \circ y \right] \oplus \frac{1}{3} \circ z.$$

Тому аксіома 4.3 еквівалентна її окремому випадку для проспектів з двома наслідками

$$y = \left(\alpha; (\pi; x^1, x^2), (\pi'; x^1, x^2) \right) \sim \left(\alpha\pi + (1-\alpha)\pi'; x^1, x^2 \right),$$

де α , π та π' належать відрізку дійсних чисел $[0, 1]$. Цю форму редукції складних проспектів пояснює така діаграма:



Наслідкам лотерей відповідають двоє плечей, на яких позначено ймовірності цих наслідків.

Аксіома 4.4 (незалежність). (1) Для всіх $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \succ y_2$ існує α , $0 < \alpha < 1$, таке що для довільного $y \in Y$ $\alpha \circ y_1 \oplus (1-\alpha)y \succ \alpha \circ y_2 \oplus (1-\alpha)y$. (2) Для всіх $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \sim y_2$ існує α , $0 < \alpha < 1$, таке що для довільного $y \in Y$ $\alpha \circ y_1 \oplus (1-\alpha)y \sim \alpha \circ y_2 \oplus (1-\alpha)y$. (Тобто будь-яка третя альтернатива не порушує строгу перевагу або еквівалентність двох альтернатив).

Аксіома 4.5 (монотонність). Нехай $x^1, x^2 \in X$ і $x^1 \succeq x^2$, $0 < \pi, \pi' < 1$. Тоді

$$(\pi; x^1, x^2) \succ (\pi'; x^1, x^2) \Leftrightarrow \pi > \pi', \quad (4.3)$$

$$(\pi; x^1, x^2) \sim (\pi'; x^1, x^2) \Leftrightarrow \pi = \pi', \quad (4.4)$$

тобто перевага віддається лотереї з більшою ймовірністю отримання більш переважної альтернативи.

Зауважимо, що аксіома 4.5 не є незалежною і може бути отримана з попередніх аксіом.

Сформулюємо твердження, яке відіграє головну роль у цьому розділі.

Теорема 4.1 (теорема фон Неймана—Моргенштерна). За умови виконання наведених вище аксіом існує така дійсно значна функція на множині проспектів U , що:

(1) для $y_1, y_2 \in Y$ виконуються відношення $y_1 \succ y_2$ тоді і тільки тоді, коли $u(y_1) > u(y_2)$;

(2) для будь-якого проспекту $y = \bigoplus_{j=1}^s p_j \circ x^j$ маємо $u\left(\bigoplus_{j=1}^s p_j \circ x^j\right) = \sum_{j=1}^s p_j u(x^j)$.

∇ Розглянемо випадок $s = 2$ і позначимо $x = (x^1, x^2)$, а через b та w — відповідно найбільш переважний і найменш переважний проспекти в Y , тобто $b \succeq y$ та $y \succeq w$. Якщо $b \sim w$, то перевірка твердження теореми є тривіальною. Тому далі розглядатимемо випадок, коли $b \succ w$.

Розглянемо проспект $y = (\pi; x)$, де $x = (x^1, x^2) \in X^2$, $\pi \in [0, 1]$. За аксіомою неперервності існують такі ймовірності $\pi_1, \pi_2 \in [0, 1]$, що

$$(1; x^1, x^1) = x^1 \sim (\pi_1; b, w), \quad (1, x^2, x^2) = x^2 \sim (\pi_2; b, w).$$

З припущення (2) аксіоми незалежності маємо

$$y = (\pi; x) \sim [\pi; (\pi_1; b, w), (\pi_2; b, w)].$$

Використовуючи аксіому 4.3, встановлюємо, що

$$[\pi; (\pi_1; b, w), (\pi_2; b, w)] \sim (p; b, w),$$

де $p = \pi\pi_1 + (1-\pi)\pi_2$. Тоді за властивістю транзитивності відношення переваги в аксіомі 4.1

$$y = (\pi; x) \sim (p; b, w).$$

Нехай $y' = (\pi'; x') \in Y$, де $\pi' \in [0, 1]$ та $\pi' \in (x^1, x^2) \in X^2$. Враховуючи наведений вище аргументи, маємо

$$y' = (\pi', x') = (p'; b, \omega),$$

де $p' = \pi'\pi'_1 + (1 - \pi')\pi'_2$, $\pi'_1, \pi'_2 \in [0, 1]$.

За аксіомою монотонності $(p'; b, \omega) \succeq (p'; b, \omega)$ тоді і тільки тоді, коли $p \geq p'$.

Отже, за властивістю граничності відношення \succeq встановлюємо, що $y \succeq y'$ тоді і тільки тоді, коли $p \geq p'$.

Позначимо для перспективу $y = \bigoplus_{j=1}^s p_j \circ x^j$ через $\eta(y)$ дискретний випадковий вектор, що набуває значення x_j з імовірностями p_j . Тоді для будь-якої функції $f: X \rightarrow R$ математичне сподівання E випадкової величини $f(\eta(y))$ задається виразом

$$Ef(\eta(y)) = \sum_{j=1}^s p_j f(x^j).$$

Ураховуючи вищевикладене, потрібно побудувати таку функцію $u: X \rightarrow R$, щоб для сподівань $E[u(y)] = E[u(\eta(y))]$ та $E[u(y')] = E[u(\eta(y'))]$ виконувалося співвідношення

$$E[u(y)] \geq E[u(y')] \quad (4.5)$$

тоді і тільки тоді, коли $p \geq p'$.

Для введених вище наслідків $b, \omega, x^1, x^2, x^4, x^2$ припустимо, що

$$u(\omega) = 0, \quad u(b) = 1, \\ u(x^1) = \pi_1, \quad u(x^2) = \pi_2, \quad u(x^4) = \pi'_1, \quad u(x^2) = \pi'_2.$$

Тоді

$$E[u(y)] \geq \pi u(x^1) + (1 - \pi)u(x^2) = \pi\pi'_1 + (1 - \pi)\pi'_2 = p.$$

Аналогічно маємо $E[u(y')] = p'$. Це доводить твердження (4.5) для випадку $s = 2$. Виходячи з доведеного, легко поширити одержані результати на загальний випадок $s > 2$. Δ

Функція u , що характеризує відношення переваги на множині перспектив (лотерей) Y , називається функцією корисності фон Неймана—Моргенштерна, або скорочено НМ-функцією корисності чи НМ-корисністю.

Згідно з доведеною теоремою «раціональний» агент в умовах невизначеності, описаних вище, серед різних перспектив (альтернатив) вибиратиме той, що максимізує його сподівану корисність

$$E[u(y)] = \sum_{j=1}^s p_j u(x^j) = u\left(\bigoplus_{j=1}^s p_j \circ x^j\right).$$

Тому теорему фон Неймана—Моргенштерна також часто називають **теоремою сподіваної корисності**.

Зауважимо, що для теореми сподіваної корисності справедливою є обернена теорема, тобто якщо існує функція корисності $u: Y \rightarrow R$, що задовольняє умови (1) та (2) теореми сподіваної корисності, то виконуються аксіоми 4.1—4.4 для відношення переваги на Y . Щоб проілюструвати це, покажемо, наприклад, що з тверджень (1) і (2) теореми сподіваної корисності випливає аксіома 4.3 для випадку $s = 2$, $x = (x^1, x^2)$.

Спочатку встановимо таке співвідношення для всіх $x^1, x^2 \in X$, $\alpha, \pi, \pi' \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} u[\alpha; (\pi; x^1, x^2), (\pi'; x^1, x^2)] &= \alpha u(\pi; x^1, x^2) + (1 - \alpha)u(\pi'; x^1, x^2) = \\ &= \alpha[\pi u(x^1) + (1 - \pi)u(x^2)] + (1 - \alpha)[\pi' u(x^1) + (1 - \pi')u(x^2)] = \\ &= \{\alpha\pi + (1 - \alpha)\pi'\}u(x^1) + \{\alpha(1 - \pi) + (1 - \alpha)(1 - \pi')\}u(x^2) = \\ &= u(\alpha\pi + (1 - \alpha)\pi'; x^1, x^2). \end{aligned}$$

За твердженням (4.3) це означає, що $[\alpha; (\pi; x), (\pi'; x)] = (\alpha\pi + (1 - \alpha)\pi'; x)$. Тобто виконується аксіома 4.3. Аналогічно можна переконатися у виконанні й інших аксіом сподіваної корисності як наслідків тверджень (4.1) та (4.2) теореми сподіваної корисності.

Теорема 4.2 (про єдність НМ-функції корисності). *Якщо $u: Y \rightarrow R$ є НМ-функцією корисності, то вона визначена з точністю до довільного афінного перетворення з додатним коефіцієнтом однорідності, тобто: 1) для довільного $a > 0$ та $c \in R$ функція $v(y) = au(y) + c$, $y \in Y$ також є НМ-функцією корисності, що зображує таке саме відношення переваги на Y ; 2) для НМ-функції корисності u будь-яке монотонне перетворення v , яке зберігає властивість сподіваної корисності (4.2), є афінним перетворенням.*

∇ Нехай для НМ-функції корисності $u(y)$, $y \in Y$ функція $v(y) = au(y) + c$, $y \in Y$, $a > 0$, $c \in R$. Тоді $v(y)$ також зберігає відношення переваги, оскільки для довільних $y, y' \in Y$ $\{y \succ y'\} \Leftrightarrow \{u(y) > u(y')\} \Leftrightarrow \{au(y) + c > au(y') + c\} \Leftrightarrow \{v(y) > v(y')\}$.

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} v(\alpha; y, y') &= au(\alpha; y, y') + b = \\ &= a[\alpha u(y) + (1 - \alpha)u(y')] + b \equiv \alpha v(y) + (1 - \alpha)v(y'). \end{aligned}$$

Отже, v має властивість сподіваної корисності (4.2). Тим самим твердження 1) теореми доведено.

Доведемо твердження 2). Нехай $\phi(u)$ — монотонне перетворення u , що зберігає властивості сподіваної корисності: (i) $u(y) > u(y')$ тоді і тільки тоді, коли $\phi(u(y)) > \phi(u(y'))$; (ii) $\phi\{u[\alpha y + (1 - \alpha)y']\} = \alpha\phi\{u(y)\} + (1 - \alpha)\phi\{u(y')\}$, $\alpha \in [0, 1]$. Тоді u також має властивості типу (ii), оскільки,

записавши рівність (ii) у вигляді

$$\varphi[\alpha u(y) + (1 - \alpha)u(y')] = \alpha \varphi[u(y)] + (1 - \alpha)\varphi[u(y')], \\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

отримаємо, що φ переводить опуклі лінійні комбінації своїх аргументів у подібні комбінації значень функції цих аргументів, а отже, φ є афінним перетворенням. Δ

Розглянемо основні заперечення проти наведених припущень сподіваної корисності. Щодо аксіом 4.1 і 4.3, то вони сприймаються як припустимі. Як заперечення до універсальності аксіоми 4.2 неперервності при виборі в умовах невизначеності М. Алле¹ у 1953 р. висунув такий контрприклад. Нехай є лотерея (проспект) з наслідками: $x^1 = \$ 100$, $x^2 = \$ 1$, x^3 — отримати смертельний постріл. Тоді, очевидно, є строги переваги $x^1 > x^2 > x^3$. Чи можна постулювати існування додатної ймовірності $p \in (0, 1)$, для якої $p \circ x^1 \oplus (1 - p) \circ x^3 \sim x^2$? Навряд чи знайдеться раціональний індивідум, який погодиться на такі правила гри, коли він з позитивною ймовірністю отримує смертельний постріл заради виграшу одного долара.

Подібні заперечення можна усунути, якщо не розглядати екстремальні ситуації вибору і включати у простір наслідків X тільки нормальні події.

Найсерьозніші заперечення висунуті проти аксіом 4.4 (незалежності). Наприклад, розглянемо лотереї $y_1 = (1; \$ 3000, 0)$; $y_2 = (4/5; \$ 4000, 0)$.

Припустимо, що індивідум віддає перевагу y_1 перед y_2 , $y_1 > y_2$. Нехай $y = (1; 0, 0)$. Тоді не зрозуміло, чи можна стверджувати, що при всіх $\alpha \in (0, 1)$ $(\alpha; y_1, y) > (\alpha; y_2, y)$. Наприклад, при $\alpha = 1/4$ $y_3 \equiv (1/4; y_1, y) \sim (1/4; \$ 3000, 0)$, а $y_4 \equiv (1/4; y_2, y) \sim (1/5; \$ 4000, 0)$. Тут індивідум може віддати перевагу y_4 перед y_3 (оскільки при багаторазовій грі в лотереї він у середньому виграватиме при лотереї y_3 суму $\frac{1}{4} \cdot 3000 = \$ 750$, а при y_4 — суму $\frac{1}{5} \cdot 4000 = \$ 800$), що суперечить аксіомі 4.4. Цей парадокс називається парадоксом Алле.

Зауважимо, що при порушенні аксіом 4.4 властивість сподіваної корисності також порушується. Так, у наведеному прикладі, оскільки $y_1 > y_2$, для сподіваної корисності

$$u(y_1) = 1u(3000) + 0u(0) > (4/5)u(4000) + 0u(0),$$

тобто $u(3000) > (4/5)u(4000)$. Без утрати загальності можна вважати, що $u(0) = 0$, і тоді з $y_4 > y_3$ маємо $u(y_4) = (4/5)u(4000) + (1/5)u(0) = (4/5)u(4000) > (1/4)u(3000) = (1/4)u(3000) + (3/4)u(0) = u(y_3)$, а це суперечить нерівності $u(3000) > (4/5)u(4000)$.

¹Алле Моріс (нар. 1911 р.) — французький економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки за 1988 р., присудженої за внесок у теорію ринків і використання ресурсів.

4.2. ПОВЕДІНКА В УМОВАХ РИЗИКУ. МІРИ ЕРРОУ—ПРАТТА УНИКАННЯ РИЗИКУ

Нехай $y = \bigoplus_{j=1}^s p_j \circ x^j$ — лотерея з виплатами грошей x^j , $j = 1, \dots, s$.

Тоді сподіваним значенням y (сподіваним виграшем) є $E(y) = \sum_{j=1}^s p_j x^j$.

Якщо економічний агент має індивідуальну функцію корисності u , визначену на множині активів y з невизначеним ефектом Y , то він називається **нейтральним до ризику**, якщо

$$u\left(\sum_{j=1}^s p_j x^j\right) = \sum_{j=1}^s p_j u(x^j), \quad (4.6)$$

де припускається, що u є строго монотонно зростаючою функцією аргументу $x \in X$. Якщо агент є нейтральним до ризику для всіх проспектів y , то легко переконатися в тому, що він має функцію корисності

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + c, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x = (x_i)_{i=1}^n \in X.$$

Агент є **не схильним до ризику**, якщо його NM -функція корисності — строго угнута, тобто

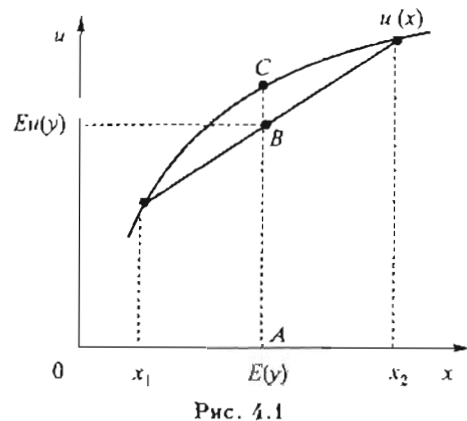
$$u\left(\sum_{j=1}^s p_j x^j\right) > \sum_{j=1}^s p_j u(x^j) \quad (4.7)$$

для $x^j \in X$, $p^j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, s$. Зокрема, при $n = 1$ ($X \subset R$) $u(x)$ є строго угнутою функцією при $u''(x) = (d^2 u / dx^2) < 0$, тобто агент є не схильним до ризику при $u''(x) < 0$.

Навпаки, агент є **схильним до ризику**, якщо його NM -функція корисності — строго опукла. При $X \subset R$, якщо $u''(x) > 0$, то u є строго опуклою функцією й агент схильний до ризику.

Зауважимо, що для строго угнутої функції u необов'язково $u''(x) < 0$, оскільки $u''(x)$ може дорівнювати нулю для деяких точок. Ігноруючи подібні випадки, іноді дають більш обмежуюче поняття нехильності до ризику, вважаючи, що агент не схильний до ризику тоді і тільки тоді, коли $u''(x) < 0$, і схильний до ризику тоді і тільки тоді, коли $u''(x) > 0$.

NM -функцію корисності ухильника ризику наведено на рис. 4.1, де сподіване значення проспекту $y = (\pi; x_1, x_2)$, що визначається виразом $Ey = \pi x_1 + (1 - \pi)x_2$, зображено відрізком OA (вважасмо, що $X = R_+$), сподівану корисність $Eu(y) = \pi u(x_1) + (1 - \pi)u(x_2)$ — відрізком AB , а корисність сподіваного виграшу $u(Ey)$ — відрізком AC . Положення точки C над точкою B свідчить про те, що агент не схильний до ризику, оскільки



це відповідає нерівності Ієнссена

$$u(\pi x_1 + (1 - \pi)x_2) = u(Ey) > \\ > Eu(y) = \pi u(x_1) + (1 - \pi)u(x_2),$$

де $0 < \pi < 1$ і $x_1, x_2 > 0, x_1 \neq x_2$, яка є еквівалентною строгой угнутій функції $u(x), x > 0$.

Для ілюстрації наступних важливих понять, що характеризують поведінку в умовах ризику, а саме: **еквівалента визначеності та ризикової премії** ρ , розглянемо такий приклад.

Нехай агент стоїть перед вибором однієї з двох альтернатив:

(i) отримати суму $\$(x_0 + h)$ з імовірністю $1/2$ і суму $\$(x_0 - h)$ з імовірністю $1/2$, де $0 < h < x_0$;

(ii) отримати суму $\$x_0$ з імовірністю 1.

Не схильний до ризику агент віддасть перевагу альтернативі (ii) перед альтернативою (i), хоча в останній він мав шанс отримати більшу суму $\$(x_0 + h)$. Для його функції корисності виконується нерівність

$$(0,5)u(x_0 + h) + (0,5)u(x_0 - h) < u(x_0). \quad (4.8)$$

Це ілюструє рис. 4.2, де строга угнутість функції $u(x)$ означає, що дуга ADB , яка сполучає точки $u(x_0 - h)$ та $u(x_0 + h)$ на графіку u , лежить вище хорди ACB , що сполучає ті самі точки, а $OF > OE$, де $OE = Eu(y) = (0,5)u(x_0 + h) + (0,5)u(x_0 - h)$.

Припускаючи, що функція u є двічі неперервно диференційованою, строго угнутою та зростаючою, маємо існування єдиної точки $z_0, z_0 < x_0$, такої, що $(0,5)u(x_0 + h) + (0,5)u(x_0 - h) = Eu(y) = u(z_0)$. Величина z_0 називається **еквівалентом визначеності** для випадкової величини x_0 , вказаної в альтернативі (i).

Визначимо величину ρ з рівності $z_0 = x_0 - \rho$. Легко побачити, що $\rho > 0$, коли агент не схильний до ризику, і $\rho < 0$, якщо він схильний до нього. У припущенні, що агент не схильний до ризику, так що $\rho > 0$, величина ρ називається **ризиковою премією**. Таким чином, ризикова премія ρ є максимальною сумою грошей, яку не схильний до ризику агент готовий сплатити, щоб мати вірогідний дохід на відміну від сподіваного доходу від невизначеного проспекту (лотереї). На рис. 4.2 ρ дорівнює довжині сегмента DC . Очевидно, що ρ залежить від x_0 та h , тому можна записати $\rho = \rho(x_0, h)$.

З означення ризикової премії $\rho(x, h)$ у випадку, коли альтернатива (i) виражається загальним проспектом $y = (\pi; x + h, x - h), 0 < \pi < 1$, маємо

таку тотожність:

$$u(x - \rho(x, h)) \equiv \\ \equiv \pi u(x + h) + (1 - \pi)u(x - h).$$

Застосовуючи розклад Тейлора до кожного з членів останньої тотожності, маємо

$$u(x - \rho(x, h)) \approx \\ \approx u(x) - \rho(x, h)u'(x);$$

$$u(x + h) \approx$$

$$\approx u(x) + hu'(x) + \left(\frac{h^2}{2}\right)u''(x);$$

$$u(x - h) \approx u(x) - hu'(x) - \left(\frac{h^2}{2}\right)u''(x)$$

при малих h . Підставляючи ці розклади в тотожність, знаходимо таку наближену рівність у випадку, коли $\pi = 0,5$:

$$u(x) - \rho(x, h)u'(x) \approx u(x) + \rho(x, h)u'(x),$$

відки

$$\rho(x, h) \approx -\left(\frac{h^2}{2}\right)\left[\frac{u''(x)}{u'(x)}\right], \quad (4.9)$$

тобто $\rho(x, h)$ при сталому h як функція x наближено пропорційна функції

$$R_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \quad (4.10)$$

Функцію (4.10) було введено Праттом¹ та Ерроу² як міру абсолютного уникання ризику, або **коефіцієнт абсолютного уникання ризику**. Згідно з (4.10) міра Ерроу – Пратта абсолютного уникання ризику пропорційна показникові угнутості $u''(x)$ функції корисності $u(x)$. Знак «мінус» уведено для того, щоб міра $R_a(x)$ була додатною. Нормувальний множник $(u'(x))^{-1}$ забезпечує інваріантність міри $R_a(x)$ щодо зміни масштабу вимірювання корисності u (докладніше це буде з'ясовано далі).

Іншою мірою уникання ризику, яку також було введено Ерроу та Праттом, є **коефіцієнт відносного уникання ризику**, або міра Ерроу – Пратта відносного уникання ризику

$$R_r(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = xR_a(x). \quad (4.11)$$

¹Pratt J. W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica. – 1964. – 32. – P. 122–136.

²Arrow K. J. Aspect of the Theory of Risk Bearing. Yrjö Jahnsson Lectures, Helsinki, 1965.

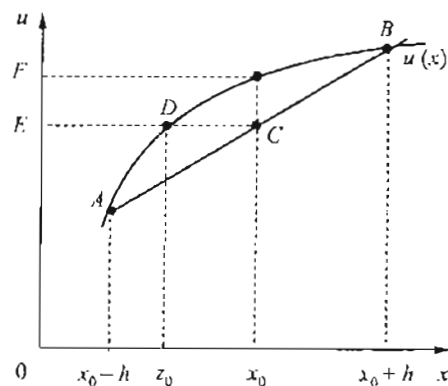


Рис. 4.2

Зауважимо, що зв'язок (4.9) між ризиковою премією $\rho(x, h)$ і мірою $R_a(x)$ можна подати у вигляді

$$R_a(x) = (2/h^2) \rho(x, h). \quad (4.12)$$

Припустимо, що є дві різні NM -функції корисності $u_i(x)$, $i = 1, 2$ та

$$R_{a_i}(x) = -\frac{u_i''(x)}{u_i'(x)}, \quad i = 1, 2,$$

а $\rho_i(x, h)$ — ризикова премія, що відповідає u_i , $i = 1, 2$. Користуючись співвідношенням (4.12), неважко переконатися в тому, що для досить малих h

$$\{R_{a1}(x) > R_{a2}(x)\} \Leftrightarrow \{\rho_1(x, h) > \rho_2(x, h)\}.$$

Виявилося, що подібний монотонний зв'язок між $R_a(x)$ і $\rho(x, h)$ для досить малих h виконується також глобально для всіх h . Точніше, є правильним таке твердження.

Теорема 4.3. (Теорема Пратта). Якщо функції корисності $u_i(x)$, $i = 1, 2$ є двічі неперервно диференційованими, монотонно зростаючими та строго увгнутими, то наступні три умови є еквівалентними:

- (a) $R_{a1}(x) > R_{a2}(x)$;
- (b) $\rho_1(x, h) > \rho_2(x, h)$ для всіх h ;
- (c) u_1 є більш увгнутою, ніж u_2 , тобто існує монотонно зростаюча строго увгнута функція φ , така що $u_1(x) = \varphi(u_2(x))$.

Доведення цієї теореми можна знайти у зазначеній вище праці Дж. В. Пратта, опублікованій у 1964 р.

Теорема 4.4. Міри унікального ризику $R_a(x)$ та $R_r(x)$ є інваріантними щодо афінних перетворень функції корисності $u(x)$, тобто якщо $u_1(x)$ — двічі неперервно диференційована, строго увгнута і зростаюча функція корисності, $u_2(x) = au_1(x) + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ — її афінне перетворення та $R_{a1}, R_{r1}, i = 1, 2$ — міри унікального ризику, що відповідають цим функціям, то

$$R_{a1}(x) = R_{a2}(x), \quad R_{r1}(x) = R_{r2}(x).$$

∇ Подінаємо перевірку твердження теореми з геометричною інтерпретацією мір $R_a(x)$ й $R_r(x)$. На рис. 4.3 відрізок OA відображує величину x_0 , так що відрізок CA має довжину $u'(x_0)$. З цього рисунка випливає, що

$$R_a(x_0) = -\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)} = \frac{CA/AB}{CA} = \frac{1}{AB};$$

$$R_r(x_0) = -\frac{x_0 u''(x_0)}{u'(x_0)} = \frac{OA}{AB}.$$

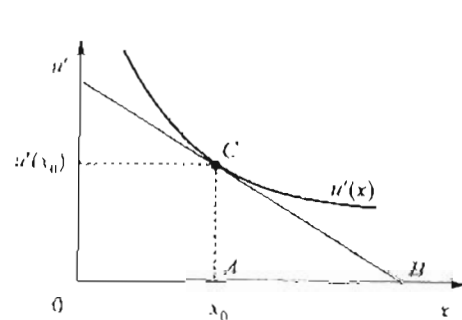


Рис. 4.3

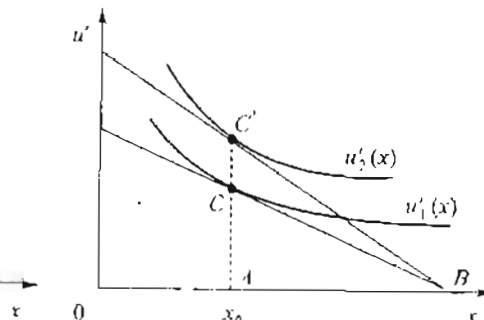


Рис. 4.4

Таким чином з'ясовано геометричний зміст мір $R_a(x)$ та $R_r(x)$. Інваріантність цих мір щодо афінних перетворень корисності ілюструє рис. 4.4. Оскільки за означенням $u_2(x) = au_1(x) + b$, $a > 0$, маємо $u'_2 = au'_1$ й $u''_2 = au''_1$.

Отже, з рис. 4.4 випливає, що $(C'A'/AB) = a(CA/CB)$ і виконуються рівності

$$R_{a1}(x_0) = \frac{CA/CB}{CA} = \frac{1}{AB} = \frac{C'A'/AB}{C'A'} = R_{a2}(x_0);$$

$$R_{r1}(x_0) = (OA/AB) = R_{r2}(x_0). \quad \Delta$$

Для введення такої характеристики, як відносна ризикова премія ρ^* , розглянемо задачу вибору рішення в умовах невизначеності. Нехай агент стоїть перед альтернативою:

(i') отримати суму $\$ x_0(1 + h^*)$ з імовірністю $1/2$ та суму $\$ x_0(1 - h^*)$ з імовірністю $1/2$;

(i'') отримати суму $\$ x_0$ з імовірністю 1

Для агента, не схильного до ризику, альтернатива (i'') більш переважна, і відповідний коефіцієнт визначеності z_0 величини x_0 задовольняє співвідношення

$$(0,5)u(x_0 + h^*x_0) + (0,5)u(x_0 - h^*x_0) = u(z_0). \quad (4.13)$$

Тоді величина ρ^* відносної ризикової премії $\rho^* > 0$ визначається співвідношенням

$$z_0 = (1 - \rho^*)x_0, \quad \text{де } \rho^* = \rho^*(x_0, h^*). \quad (4.14)$$

Для геометричної інтерпретації величини ρ^* скористаємося рис. 4.2. Якщо на ньому замінити $x_0 - h$, z_0 , x_0 та $x_0 + h$ відповідно $(1 - \rho^*)x_0$, $(1 - \rho^*)x_0$, x_0 й $(1 + h^*)x_0$, то матимемо $(DC'/EC) = (\rho^*x_0/x_0) = \rho^*$, тобто відношення DC'/EC відображає відносну ризикову премію.

Подібно до теореми 4.3 виконується таке твердження.

Теорема 4.5. Якщо функції корисності $u_i(x)$, $i = 1, 2$ є двічі неперервно диференційованими, строго унітними та монотонно зростаючими, то наступні дві умови є еквівалентними:

(а) $R_{r1}(x) > R_{r2}(x)$;

(в) $\rho_1^*(x, h^*) > \rho_2^*(x, h^*)$ для всіх h^* , де R_{ri} та ρ_i^* відповідно коефіцієнти відносного уникання ризику і відносної ризикової премії, що відповідають корисності $u_i(x)$, $i = 1, 2$.

К. Ерроу та Дж. В. Пратт постулювали такі гіпотези про індивідуальну поведінку агента щодо ризику.

Гіпотеза А. Коефіцієнт абсолютного уникання ризику є монотонно спадною функцією, тобто $R'_r(x) < 0$ для всіх x .

Гіпотеза В. Коефіцієнт відносного уникання ризику є монотонно зростаючою функцією, тобто $R'_r(x) > 0$ для всіх x .

За теоремою 4.3 гіпотеза А виконується тоді і тільки тоді, коли $(\partial \rho(x, h) / \partial x) < 0$ для довільного фіксованого h , тобто ця гіпотеза є еквівалентною твердженню, що ризикова премія агента спадає зі збільшенням x . Це означає, що багаті агенти є більш толерантними до ризику, ніж бідні.

Аналогічно теоремі 4.5 гіпотеза В виконується тоді і тільки тоді, коли $(\partial \rho^*(x, h^*) / \partial x) > 0$ для будь-якого фіксованого h^* , тобто відносна ризикова премія зростає при збільшенні x .

Підсумовуючи викладене вище, констатуємо, що типові NM-функції корисності $u(x)$ для не схильного до ризику агента мають такі властивості:

(i) $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$ для всіх $x \in X \subset R$;

(ii) $R'_a(x) < 0$; (iii) $R'_r(x) > 0$.

Розглянемо кілька прикладів, пов'язаних з перевіркою подібних властивостей для деяких поширених функцій корисності.

Приклад 4.1. Квадратична функція корисності

$u(x) = a + bx - cx^2$, де $b > 0$, $c > 0$, має властивості $u'(x) > 0$ та $u''(x) < 0$ при $0 \leq x \leq b/2c$. Оскільки $u''(x) < 0$, легко переконатися в тому, що $R'_a(x) < 0$ і $R'_r(x) > 0$.

Справді, прямий підрахунок дає

$$R_a(x) = \frac{2c}{b - 2cx}; \quad R_r(x) = \frac{2cx}{b - 2cx}.$$

Далі

$$R'_a(x) = \left[-\frac{u''(x)}{u'(x)} \right] = -\frac{u'u'' - (u')^2}{(u')^2}.$$

а отже,

$$R'_a(x) = \frac{4c^2}{(b - 2cx)^2} > 0.$$

Аналогічно

$$R'_r(x) = \frac{2bc}{(b - 2cx)^2} > 0.$$

Через нерівність $R'_a(x) > 0$ більш багаті агенти є менш толерантними до ризику, ніж бідні, що веде до усунення квадратичних функцій корисності в серйозних моделях поведінки економічних агентів в умовах ризику (наприклад, К. Ерроу назвав квадратичні припущення корисності в умовах невизначеності абсурдними).

Приклад 4.2. Логарифмічна функція корисності

$$u(x) = a + b \ln(x + c), \quad b > 0, \quad c \geq 0, \quad x > -c$$

задовольняє умови $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$. Прямий підрахунок показує, що

$$R_a(x) = \frac{1}{x + c}; \quad R'_a(x) = -\frac{1}{(x + c)^2} < 0,$$

$$R_r(x) = \frac{x}{x + c}; \quad R'_r(x) = \frac{c}{(x + c)^2} \geq 0,$$

тобто типові властивості (i) – (iii) виконуються.

Приклад 4.3. Гіперболічна функція корисності

$u(x) = a - \frac{1}{x + b}$, де $a \geq 0$, $b > 0$, $a - \frac{1}{b} \geq 0$, задовольняє умови $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$ та

$$R_a(x) = \frac{2}{x + b}; \quad R'_a(x) = -\frac{2}{(x + b)^2} < 0;$$

$$R_r(x) = \frac{2x}{x + b}; \quad R'_r(x) = \frac{2b}{(x + b)^2} > 0.$$

Отже, типові властивості (i) – (iii) виконуються.

Приклад 4.4. Знайдемо вигляд функцій корисності зі сталою мірою уникання ризику.

Припустивши $R_a(x) = \alpha = \text{const}$, інтегруванням рівняння $-u''(x) = \alpha u'(x)$ знаходимо, що $u(x) = -e^{-\alpha x}$ при $\alpha > 0$, а отже, $u' > 0$, $u'' < 0$.

Аналогічно для випадку $R_r(x) = \alpha = \text{const}$ інтегруванням устанолюємо, що

$$u(x) = x^{1-\alpha} \quad \text{при } 0 < \alpha < 1;$$

$$u(x) = \ln x \quad \text{при } \alpha = 1;$$

$$u(x) = x^{-(\alpha-1)} \quad \text{при } \alpha > 1.$$

Перейдемо до вивчення кривих байдужості сподіваної корисності. Якщо є лотерея $y = \bigoplus_{i=1}^m p_i \circ x_i$, $x_i \in X \subset R$ та агент з NM-функцією корисності, то його сподівана корисність

$$Eu(y) = \sum_{i=1}^m p_i u(x_i).$$

При фіксованому розподілі $\{p_1, \dots, p_m\}$ множина наслідків $(x_i)_{i=1}^m \in X^m$, для яких $Eu(y)$ є сталою функцією, утворює клас байдужості в умовах ризику, який при $m = 2$ є кривою байдужості.

Таким чином, клас байдужості має вигляд

$$I^0 = \left\{ (x_i)_{i=1}^m \in X^m : \sum_{i=1}^m p_i u(x_i) = u^0 \right\}.$$

Якщо агент не схильний до ризику (тобто $u'' < 0$), то легко показати, що криві байдужості ($m = 2$) є строго опуклими. Диференціюванням рівності $Eu(y) = u^0$ знаходимо диференціальні характеристики кривої байдужості

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{u=u^0} = - \left(\frac{p}{1-p} \right) \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}; \quad (4.15)$$

$$\left. \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} \right|_{u=u^0} = - \left(\frac{p}{1-p} \right) \frac{u''(x_1) + \frac{pu''(x_2)z^2}{1-p}}{u'(x_2)}. \quad (4.16)$$

де $(p, 1-p) = (p_1, p_2)$ – розподіл лотерей, а $z \equiv u'(x_1)/u'(x_2)$.

Із (4.16), зокрема, випливає, що при $u'' < 0$ ($d^2 x_2 / dx_1^2 > 0$), так що крива байдужості – справді строго опукла. Навпаки, якщо $(d^2 x_2 / dx_1^2) > 0$, то $u'' < 0$, а отже, агент не схильний до ризику.

Якщо розглянути похідну (4.16) на лінії $x_1 = x_2$, то рівність (4.16) матиме вигляд

$$\left. \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} \right|_{u=u^0} = R_a(x_1) \left(\frac{p}{(1-p)^2} \right), \quad (4.17)$$

що виражає нову інтерпретацію міри Ерроу–Пратта R_a абсолютного уникання ризику.

Отримані результати підсумовує таке твердження.

Пропозиція 4.1. Криві байдужості сподіваної корисності агента є строго опуклими тоді і тільки тоді, коли агент не схильний до ризику. Кривина кривої байдужості сподівань корисності на бісектрисі $x_1 = x_2$ з коефіцієнтом $p/(1-p)^2$ пропорційна коефіцієнту $R_a(x_1)$ абсолютного уникання ризику.

4.3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ СТРАХУВАННЯ. ПОПИТ НА СТРАХОВІ ПОСЛУГИ

Розглянемо агента, який володіє деяким активом вартістю a певних грошових одиниць. Наприклад, це може бути будинок. Припустимо, що агент стоїть перед ризиком утратити частину вартості b через деяку випадкову подію (наприклад, унаслідок пожежі будинку).

У рамках загальної формальної схеми, викладеної у п. 4.1, маємо два стани природи S_1 (коли відбулася несприятлива подія) та S_2 (коли такої події не було). При S_1 вартість активу дорівнює $a - b$, а при S_2 вона залишається тією самою. Це еквівалентно лотереї $y = (\pi; a - b, a)$, де π – ймовірність події.

Якщо агент діє раціонально (тобто дотримується результатів формальної теорії, розвиненої в п. 4.2), то максимальною сумою, яку він пого-

джується сплатити за уникання втрат через ризик, є його ризикова премія p , що визначається співвідношенням

$$u(a - p) = \pi u(a - b) + (1 - \pi) u(a),$$

де u – функція корисності агента; $(a - p)$ – величина еквівалента впаденості лотереї.

Якщо агент не схильний до ризику, то $p > 0$. Якщо $p = 0$, то він нейтральний до ризику, а при $p > 0$ агент схильний до ризику.

Приклад 4.5. Нехай $u(x) = \ln x$, $a = \$ 90\,000$, $b = \$ 80\,000$ та $\pi = 0,01$. Тоді $\ln(90\,000 - p) = (0,01)\ln(10\,000) + (0,99)\ln(90\,000)$, що дає $p = \$ 1,57$. Якщо $\pi = 0,05$, то $p = \$ 9,18$.

Припустимо, що агент може купити у деякій страховій компанії страховий поліс як захист від несприятливої події. Нехай x – сума, яку страхова компанія зобов'язується сплатити агентові, якщо настав стан S_1 (подія відбулася), а P – премія за страхування. Тоді очікуваний дохід агента виражатиметься сумою

$a_1 = a - b - P + x$, якщо відбувся стан S_1 ;

$a_2 = a - P$, якщо відбувся стан S_2 .

Це еквівалентно лотереї $(\pi; a_1, a_2) = (\pi; a - b - P + x, a - P)$. Сподівана корисність такої лотереї для агента є величиною $\pi u(a - b - P + x) + (1 - \pi)u(a - P)$. Він буде страхуватися, коли ця величина перевищує сподівану корисність без страхування, тобто значення $\pi u(a - b) + (1 - \pi)u(a)$.

Припустимо, що

$$0 < a - b < a_1 < a_2, \quad (4.18)$$

або

$$0 < a - b < a - b - P + x < a - P$$

(зауважимо, що нерівність $a - b < a_1$ означає, що $P < x$, тобто страхова премія P менша від страхового покриття x , а нерівність $a_1 < a_2$ – що $x < b$, тобто виплата, яка надається страховою компанією, не повністю відшкодовує втрати b).

Для не схильного до ризику агента (коли u – строго угнута функція)

$$\pi u(a_1) + (1 - \pi)u(a_2) > \pi u(a - b) + (1 - \pi)u(a), \quad (4.19)$$

як це впливає з рис. 4.5, а, що ілюструє попит на страхові послуги.

Таким чином, при зроблених вище припущеннях (4.18) не схильний до ризику агент купуватиме страхові послуги.

Якщо u – строго опукла функція (тобто агент, схильний до ризику), нерівність (4.19) замінюється на зворотню й агент не буде страхуватися. У разі нейтральності до ризику агент купуватиме страховий поліс ($x > 0$) залежно від виконання умови $\pi x > P$ (пропонуємо з'ясувати це самостійно). В цілому, агент страхуватиметься (незалежно від значень πx та P) тоді і тільки тоді, коли він не схильний до ризику (тобто коли його функція корисності u є строго угнутою).

Нехай $q = P/x$ — ціна страхування за одиницю страхового покриття x . Припустимо, що P — стала ціна для різних значень x та q , екзогенно задана для кожного, хто страхується. Тоді економічний агент вибратиме x так, щоб максимізувати свою сподівану корисність

$$\Phi(x) = \pi u(a - b - qx + x) + (1 - \pi)u(a - qx).$$

Припускаючи, що оптимальне значення $x^* > 0$, маємо умову першого порядку оптимальності вигляду $\Phi'(x^*) = 0$. Це дає співвідношення

$$\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{u'(a_1^*)}{u'(a_2^*)} = \frac{q}{1 - q} \left(= \frac{P}{x - P} \right). \quad (4.20)$$

Ця умова означає, що гранична норма заміщення між a_1 та a_2 , зважена з відповідними ймовірностями, дорівнює премії за одиницю страхового нетто-покриття (чистого страхового покриття $x - P$). Можна також підрахувати, що

$$\Phi'(x) = \pi u'(a_1^*)(1 - q)^2 + (1 - \pi)u'(a_2^*)q^2. \quad (4.21)$$

Отже, Φ'' — завжди від'ємна похідна я припущенні про неохильність агента до ризику. Таким чином, рівність (4.20) є необхідною й достатньою умовою глобального максимуму сподіваної корисності Φ .

Використовуючи (4.20) та означення R_a , з (4.21) знаходимо таке співвідношення

$$\Phi'(x^*) = -(1 - q)\pi u'(a_1^*)[(1 - q)R_a(a_1^*) + qR_a(a_2^*)] < 0.$$

Для того щоб отримати графічну інтерпретацію розглянутої проблеми, зауважимо спочатку, що з означень величин q , a_1 й a_2 випливає рівність $q = (a - a_2) / (a_1 - a_2 + b)$, або

$$qa_1 + (1 - q)a_2 = a - qb. \quad (4.22)$$

Зазначимо, що ті величини a_1^* , a_2^* , які задовольняють (4.20), також задовольняють співвідношення (4.22). Дійсно, a_1^* та a_2^* можуть бути знайдені вибором a_1 й a_2 , що максимізує $\pi u(a_1) + (1 - \pi)u(a_2)$ за умов (4.22), коли $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$.

Рівновагу агента, описану вище, ілюструє рис. 4.5, б. A позначає початкову точку $A = (a - b, a)$, або $OA_1 = a - b$, $OA_2 = a$. Лінія C_1C_2 проходить через точку A з нахилом $-q/(1 - q)$. Вона зображує положення тих величин (a_1, a_2) , які задовольняють (4.22), і тому називається **лінією можливостей**, оскільки агент може вибирати значення a_1 та a_2 уздовж цієї лінії.

Координатами точки $B \in (a_1^*, a_2^*)$, і вона є оптимальною точкою для агента. Оскільки нахил кривої байдужості

$$\left\{ (a_1, a_2) : \pi u(a_1) + (1 - \pi)u(a_2) = \pi u(a_1^*) + (1 - \pi)u(a_2^*) \right\} \quad (4.23)$$

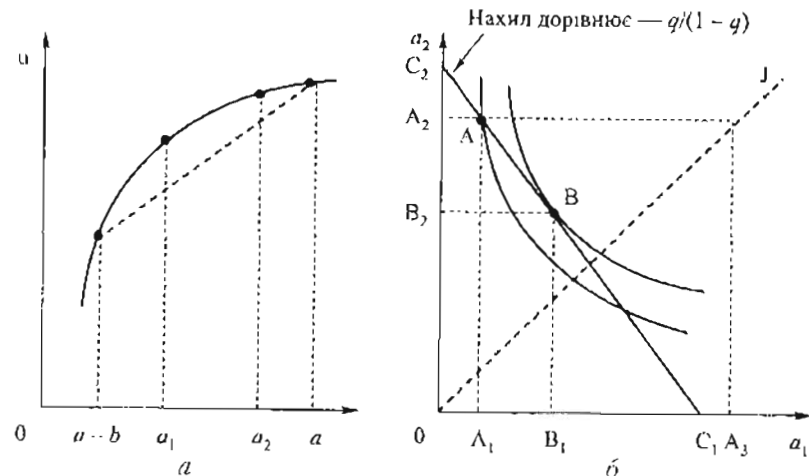


Рис. 4.5

визначається виразом

$$\frac{da_2}{da_1} = -\frac{\pi}{1 - \pi} \frac{u'(a_1)}{u'(a_2)},$$

умова (4.20) вимагає, щоб крива байдужості була дотичною до лінії можливостей у точці B . Оскільки агент не схильний до ризику, то криві байдужості — опуклі. Зауважимо також, що

$$OB_1 = a_1^* = a - b - qx^* = x^*; \quad OB_2 = a_2^* = a - qx^*.$$

Таким чином,

$$B_1A_1 = OB_1 - OA_1 = x^* - q x^*; \quad B_2A_2 = OA_2 - OB_2 = qx^* + P^*,$$

де x^* та P^* — відповідно валові страхові покриття та премія.

Нехай OL є променем із нахилом 45° , що описує рівняння $a_1 = a_2$, тобто місцезнаходження точок, де агент отримує ті самі активи. Оскільки $OA_1 = OA_3$, маємо $A_3A_1 = OA_3 - OA_1 = OA_2 - OA_1 = a - (a - b) = b$, тобто відрізок A_3A_1 зображує витрати від страхового випадку.

Розглянемо страхову компанію. **Нетто-виплатою**, яку компанія сплачує агенту, коли відбувся випадок, зазначений у страховому полісі, є $x - P = (1 - q)x$. Якщо страховий випадок не відбувся, то компанія отримує премію $P - qx$ як вартість страхового полісу. Сподіваний прибуток компанії дорівнює $-\pi(1 - q)x + (1 - \pi)qx$. При конкуренції у страховій справі загальні прибутки нульові, і тому $\pi(1 - q) = (1 - \pi)q$, або $\pi = q$.

За таких припущень кажуть, що компанія привласнює **актуарно справедливу премію**. Для клієнта страхування забезпечує **справедливий ризик** або гру в тому розумінні, що його сподіваний виграш дорівнює нулю.

Підставляючи отриману рівність у (4.20), отримуємо

$$u'(a - b - qx^* + x^*) = u'(a - qx^*). \quad (4.24)$$

Оскільки $u^* < 0$, з (4.24) випливає, що $x^* = b$, тобто страхове покриття x^* дорівнює втратам b . Таким чином, клієнт буде повністю захищений від утрат (**покриття є повним**).

Підсумовуючи викладене вище, отримуємо таке твердження.

Теорема 4.6 (i). Попит на страхові послуги є додатним (незалежно від значень π та q) тоді і тільки тоді, коли агент не схильний до ризику.

(ii). Аналітично попит на страхові послуги визначається умовою (4.20).

(iii). Якщо страхова компанія пропонує страхову політику проти втрат, що ґрунтується на актуарно справедливій премії, то клієнт цієї компанії віддаватиме перевагу політиці повного покриття втрат.

Зуважимо, що, використовуючи умови першого порядку, які забезпечують єдиний глобальний оптимум у задачі страхування, можна дослідити ефекти зміни параметрів задачі, таких як q , π , a , R_a , побудовою звичайної порівняльної статистики відповідної задачі за зразками, наведеними у перших двох розділах книги.

У цілому аналітичними задачами страхування, страхових ринків, взаємодії страхування з фінансовими ринками, моделювання поведінки страхових компаній тощо займається сучасна актуарна математика, з основами якої можна ознайомитись у посібниках [8], [38], [41], [57].

4.4. СТОХАСТИЧНА ТЕОРІЯ ФІРМИ

Як зазначалося у п. 4.1, припущення про скінченність множини наслідків проспекту та дискретність відповідного розподілу в теорії сподіваної корисності не є принциповими і відповідні конструкції можуть бути поширені на проспекти з нескінченними множинами наслідків за допомогою стандартних конструкцій теорії ймовірностей, коли від дискретних випадкових величин або векторів зі скінченною множиною значень переходять до випадкових величин або векторів із лічбевою кількістю значень чи континуальною множиною значень.

Таким чином, для проспекту y з континуальною множиною наслідків X , що утворює деяку область у R^n , і неперервним розподілом цих наслідків, який має щільність розподілу $\varphi(x)$, $x \in X$, відповідний проспект можна записати у вигляді $y = \oplus x \circ \varphi(x)$, а відповідна сподівана корисність, пов'язана з функцією корисності u , може бути подана у вигляді

$$Eu(y) = \int_X u(x) \varphi(x) dx.$$

Розглянемо конкурентну фірму, здатну продавати довільну кількість своєї продукції за встановленою ринковою ціною p . Припустимо, що ціна p

не є сталою, а утворює випадкову величину з відомою щільністю розподілу $\varphi(p)$, і не можна створювати запаси продукції. Єдиний вид продукції n випускається з використанням n типів факторів виробництва з вектором $w = (w_1, \dots, w_n)$ за допомогою технології, що описується виробничою функцією $F(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)^n$, де x_i — кількість використаного i -го фактора, причому

$$F(0) = 0; \quad MP(x) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}_{i=1, n} > 0;$$

$$H(x) = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i=1, n}^{j=1, n} < 0$$

для всіх $x \in \text{int } R^n$.

Вважатимемо, що випадкова ціна p та вектор w задані екзогенно (оскільки фірма є конкурентною). Тоді функція прибутку фірми має вигляд $\pi(x) = pF(x) - wx - a$, де a — стала вартість фіксованих виробничих витрат.

Припустимо, що фірма має NM -функцію корисності u на множині можливих значень випадкового прибутку π і вибирає вектор виробничих витрат x так, щоб максимізувати сподівану корисність прибутку

$$Eu(\pi) = E[u(pF(x) - wx - a)] = \int_0^\infty u(pF(x) - wx - a) \varphi(p) dp \rightarrow \max, \quad x \in R^n.$$

Якщо використати правило диференціювання інтеграла за параметром, то отримаємо такі умови першого порядку оптимальності вектора витрат x^* :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Eu(\pi) = E \left\{ u'(\pi) \left[p \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} - w_i \right] \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

або

$$E \left[u'(\pi) p \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} \right] = E[u'(\pi) w_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.25)$$

де вважається, що $x^* > 0$.

Тоді остання умова оптимуму другого порядку є строгою від'ємною визначеністю матриці $G = \{g_{ij}\}_{i,j=1, n}^{j=1, n}$ з елементами

$$g_{ij} = E \left\{ u''(\pi) \left[p \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} - w_i \right] \left[p \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} - w_j \right] + u'(\pi) p \frac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

Проведемо порівняльний аналіз поведінки фірми при випадковій ціні p та її поведінки при сталій ціні.

Через складність аналізу в загальному випадку обмежимося ситуацією, коли $n = 1$, тобто існує один змінний фактор виробництва, який вважати-
мемо працею. Позначивши для скорочення $x_1 = x$, $w_1 = w$ в припущенні, що $x^* > 0$, матимемо таку форму умов оптимальності

$$E[u'(\pi)pF'(x^*)] = E[u'(\pi)]w; \quad (4.26)$$

$$E[u'(\pi)[pF'(x^*) - w]^2 + u'(\pi)pF''(x^*)] < 0. \quad (4.27)$$

Зауважимо, що умова (4.27) виконуватиметься, якщо фірма не схильна до ризику, тобто $u'' < 0$ (за звичайних припущень, що $u' > 0$ та $F''(x^*) < 0$).

Позначивши через $\bar{p} = E(p)$ середню ціну (тобто сподівання випадкової величини p), можна переписати умову (4.26) як

$$E[u'(\pi)(p - \bar{p})]F'(x^*) = E[u'(\pi)(w - \bar{p})F'(x^*)]. \quad (4.28)$$

Оскільки $E(\pi) = E[pF'(x^*) - wx^* - a] = \bar{p}F'(x^*) - wx^* - a$, то $\pi - E(\pi) = (p - \bar{p})F'(x^*)$. Через нерівність $F'(x^*) > 0$, що випливає з припущення $x^* > 0$, в точці оптимуму

$$\pi \geq E(\pi), \text{ коли } p \geq \bar{p}; \quad \pi \leq E(\pi), \text{ коли } p \leq \bar{p}.$$

Тоді і тільки тоді, коли фірма не схильна до ризику, матимемо

$$u'(\pi) \leq u'(E\pi), \text{ коли } p \geq \bar{p}; \quad u'(\pi) \geq u'(E\pi), \text{ коли } p \leq \bar{p}.$$

Для фірми, що уникає ризику, з наведених нерівностей випливає таке співвідношення:

$$u'(\pi)(p - \bar{p}) \leq u'(E\pi)(p - \bar{p}), \quad (4.29)$$

де рівність виконується тільки тоді, коли $p = \bar{p}$.

Застосовуючи до обох частин нерівності (4.29) оператор математичного сподівання E з урахуванням того, що $E(p - \bar{p}) = 0$, отримуємо

$$E[u'(\pi)(p - \bar{p})] < 0$$

при $p \neq \bar{p}$. Звідси, беручи до уваги рівність (4.28) і припущення, що $F'(x^*) > 0$, матимемо

$$E[u'(\pi)[w - \bar{p}F'(x^*)]] < 0 \quad (4.30)$$

Ураховуючи, що $u' > 0$, $E u'(\pi) < 0$, а отже,

$$w < \bar{p}F'(x^*) \quad (4.31)$$

Якщо ж невизначеності в цінах немає, тобто $p = \bar{p}$, то замість нерівності (4.30) буде рівність, так що

$$w = \bar{p}F'(x^*). \quad (4.32)$$

Таким чином, для не схильної до ризику фірми оптимальні виробничі витрати x^* в умовах невизначеності задовольняють умову (4.31), а в умовах визначеності — умову (4.32), тобто *оптимальні виробничі витрати в умовах невизначеності є меншими, ніж в умовах визначеності (через нерівність $F''(x) < 0$)*.

Для подальшого аналізу використаємо випадкову ціну p у вигляді $p = \bar{p} + \epsilon$, де ϵ — випадкова величина з нульовим середнім ($E\epsilon = 0$). Параметр ϵ тут є індикатором невизначеності, оскільки при $\epsilon = 0$ невизначеність зникає, $p = \bar{p}$, а при $\epsilon \neq 0$ вона є.

Підставивши $p = \bar{p} + \epsilon$ в (4.28), дістанемо

$$(\bar{p} - q)F'(x^*) = w; \quad q = -\epsilon \frac{E[u'(\pi)\epsilon]}{E[u'(\pi)]}. \quad (4.33)$$

Із (4.33) випливає, що $\bar{p} - q > 0$, оскільки $w > 0$ та $F'(x^*) > 0$.

Використовуючи (4.29) з $p = \bar{p} + \epsilon$, доходимо висновку, що фірма є не схильною до ризику тоді і тільки тоді, коли $u'(\pi)\epsilon \leq u'(E\pi)(p - \bar{p})$, причому за цією умовою рівність виконується тільки при $p = \bar{p}$.

Узявши математичне сподівання від обох частин останньої нерівності, матимемо

$$\epsilon E[u'(\pi)\epsilon] < u'(E\pi)E(p - \bar{p}) = 0. \quad (4.34)$$

З останньої нерівності й означення q (4.33) випливає, що $q > 0$ *тоді і тільки тоді, коли фірма уникає ризику*. Застосовуючи аналогічні міркування, можна також дійти висновку, що *фірма є нейтральною до ризику тоді і тільки тоді, коли $q = 0$* .

При $q > 0$ рівність (4.33) означає, що не схильна до ризику фірма в умовах невизначеності має менші виробничі витрати (а отже, її випуск продукції), ніж в умовах визначеності. Це той самий висновок, який вже було сформульовано вище. В останньому підході до аналізу величина $\bar{p} - q > 0$ може бути інтерпретована як «**ефективна ціна**» випуску в умовах невизначеності, де q інтерпретується як «**плата за ризик**».

Розглянемо випадок двох факторів виробництва, коли $x = (x_1, x_2)$. Зауважимо, що в разі фіксованого другого фактора, позначивши $a = w_2x_2$, матимемо попередню модель. Умови оптимальності виробничих витрат x^* , що максимізують сподіваний прибуток, мають вигляд (4.25) при $i = 1, 2$. Підставляючи в них $p = \bar{p} + \epsilon$, дістаємо

$$(\bar{p} - q) \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = w_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.35)$$

де q визначається із (4.33). Із (4.35) випливає, що в умовах невизначеності «ефективне» значення граничної продуктивності кожного фактора

дорівнює його шм. Якщо спостерігається стала ефективність від розширення масштабу виробництва, то з рівняння Ейлера для однорідних функцій матимемо

$$F(x_1, x_2) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} x_2.$$

Тоді

$$(\bar{p} - q) F(x^*) = (\bar{p} - q) \left[\frac{\partial F(x^*)}{\partial x_1} x_1^* + \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_2} x_2^* \right] = w_1 x_1^* + w_2 x_2^*$$

Отже,

$$E(\pi) = \bar{p} F(x^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* = q F(x^*). \quad (4.36)$$

Як уже зазначалося, фірма є не схильною до ризику тоді і тільки тоді, коли $q > 0$. З (4.36) випливає, що $E(\pi) > 0$.

Цей результат контрастує з тим фактом, що в умовах невизначеності в довгостроковій класичній задачі фірми з технологією, яка має сталу ефективність від розширення масштабу виробництва, прибуток нульовий. Нерівність $E(\pi) > 0$ означає, що в умовах невизначеності подібний довгостроковий прибуток є додатним, у тому числі додатним у середньому, що є ефектом функції корисності, яка відповідає політиці уникнення ризику.

Підсумовуючи викладене вище, сформулюємо таку теорему.

Теорема 4.7. Нехай є задача максимізації сподіваного прибутку для конкурентної фірми, яка виробляє один тип продукції в умовах стохастичного ринку з випадковою ціною, що має щільність розподілу. Тоді виконуються такі твердження.

I. Якщо фірма вибирає оптимальний рівень використання тільки одного фактора виробництва та є не схильною до ризику, то рівні витрат і виписку фірми в умовах невизначеності менші, ніж в умовах визначеності.

II. Якщо фірма використовує два фактори виробництва з технологією, що дає сталі ефекти при розширенні масштабу виробництва, то довгостроковий сподіваний прибуток не схильний до ризику фірми є додатним.

4.5. ЗАДАЧА ВИБОРУ ПОРТФЕЛЯ З ДВОХ АКТИВІВ: РИЗИКОВОГО ТА БЕЗПЕЧНОГО

Розглянемо задачу вибору інвестиційного портфеля, який складається з двох фінансових активів для індивідуума з початковим капіталом A , що була досліджена К. Ерроу.

Припускається, що є два типи активів: один тип не дає прибутку, але є безпечним, інший — дає прибуток за випадковою ставкою нарощення r , яка може набувати також від'ємних значень, що веде до втрат. Перший тип активів називається **безпечним**, а другий — **ризиковим**. Позначимо через m та a відповідно початкові вкладення капіталу індивідуумом в

активи обох типів і через W — сумарний капітал індивідуума наприкінці відповідного періоду часу, матимемо $W = m + a(1 + r)$.

Для спрощення розгляду припускатимемо, що є тільки два стани природи S_1 та S_2 . Якщо настає S_1 , то $r = r_1 > 0$, а якщо настає S_2 , то $r = r_2 < 0$. Нехай p — ймовірність появи S_1 , а W_i — значення капіталу при S_i , $i = 1, 2$. Тоді

$$W_i = m + a(1 + r_i), \quad i = 1, 2.$$

Беручи до уваги, що $A = m + a$, можна записати останню рівність у вигляді

$$W_i = A + r_i a, \quad i = 1, 2. \quad (4.37)$$

Ситуація, описана вище, еквівалентна такій лотереї: $W = (p; W_1, W_2) = (p; A + r_1 a, A + r_2 a)$. Сподіване значення лотереї

$$E(W) = pW_1 + (1 - p)W_2 = A + a[p r_1 + (1 - p)r_2] = A + aE(r), \quad (4.38)$$

а сподівана корисність для індивідуума

$$p u(W_1) + (1 - p) u(W_2) = p u(A + r_1 a) + (1 - p) u(A + r_2 a) = \varphi(a),$$

де u — функція корисності індивідуума.

Індивідуум вибирає кількість ризикового активу a так, щоб максимізувати сподівану корисність $\varphi(a)$ для $0 \leq a \leq A$. Припускаючи, що оптимальне значення $a^* > 0$, умови першого порядку оптимальності набувають вигляду $\varphi'(a^*) = 0$, або

$$\frac{p}{1 - p} \frac{u'(W_1^*)}{u'(W_2^*)} = - \frac{r_2}{r_1} (= q), \quad (4.39)$$

де

$$u'(W_i^*) = u'(A + r_i a^*), \quad i = 1, 2.$$

Друга похідна

$$\varphi''(a) = p r_1^2 u''(W_1^*) + (1 - p) r_2^2 u''(W_2^*)$$

завжди від'ємна, якщо індивідуум не схильний до ризику (тобто $u'' < 0$). Отже, величина a^* , що визначається умовою (4.39), забезпечує глобальний максимум сподіваної корисності. Зauважимо, що умова (4.39) аналогічна умові (4.20) в задачі страхування.

Для отримання графічної ілюстрації наведених вище результатів зауважимо, що з (4.37) випливає рівність

$$\frac{A - W_2^*}{W_1^* - A} = - \frac{r_2}{r_1},$$

яку можна переписати у вигляді

$$q W_1 + W_2 = (1 + q) A, \quad \text{де} \quad q = -r_2 / r_1. \quad (4.40)$$

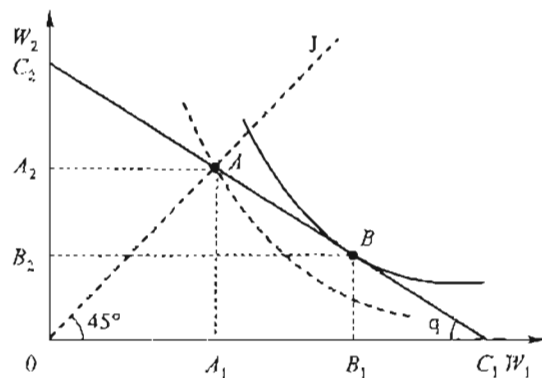


Рис. 4.6

(4.40), й $OC_1 = A(1+q)/q$, $OC_2 = A(1+q)$ (рис. 4.6). Ця лінія подібна до лінії C_1C_2 на рис. 4.5, б в задачі страхування, і тому є лінією можливостей для проблеми вибору портфеля. Точка A є перетином лінії можливостей та бісектриси OJ кута W_1OW_2 . Тоді, як випливає з (4.40), відрізок OA_1 (що дорівнює OA_2) визначає початкове значення активів (A). Як наслідок (4.37), у точці A індивідум не має ризикових активів ($a = 0$), так що лінія OJ називається ще лінією визначеності.

Нахил кривої байдужості

$$\{(W_1, W_2) : pu(W_1) + (1-p)u(W_2) = \text{const}\}$$

задається виразом

$$\frac{dW_2}{dW_1} = -\frac{p}{1-p} \frac{u'(W_1)}{u'(W_2)}. \quad (4.41)$$

З умови (4.39) випливає, що оптимальна точка B є точкою, де крива байдужості дотикається до лінії можливостей (див. рис. 4.5, б). Зауважимо, що

$$OB_1 = W_1^* = A + r_1 a^*, \quad OB_2 = W_2^* = A + r_2 a^*,$$

$$B_1 A_1 = r_1 a^*, \quad A_2 B_2 = -r_2 a^* (> 0).$$

Якщо $a^* > 0$, то $W_1^* > W_2^*$, звідки $u'(W_1^*) < u'(W_2^*)$. Тоді з (4.39) випливає, що $[q(1-p)/p] < 1$. Таким чином, сподівана ставка доходу додатна:

$$E(r) = pr_1 + (1-p)r_2 > 0. \quad (4.42)$$

Навпаки, якщо виконується (4.42), то $W_1^* > W_2^*$, так що $a^* > 0$.

Висновком із викладеного вище є таке твердження.

Теорема 4.8. *Індивідум, який уникає ризику, вкладає гроші в ризиковий актив тоді і тільки тоді, коли сподівана ставка чистого доходу від цього активу є додатною.*

У наведеній вище моделі припускалося, що безпечний актив не давав прибутку. В принципі можлива й інша ситуація, коли безпечний актив дає деякий прибуток зі ставкою нарахування i . Тоді

$$W_j = m(1+i) + a(1+r_j) = m' + a' + a(r_j - i) \quad \text{при } j = 1, 2,$$

$$\text{де } m' = m(1+i), \quad a' = a(1+i).$$

Позначивши $A' = m' + a'$, $r'_j = r_j - i$, маємо

$$W_j = A' + r'_j a, \quad j = 1, 2. \quad (4.43)$$

З цими позначеннями подальший аналіз зміненої моделі проводитиметься так само, як і аналіз первсної моделі з m, A замість m' та A' . Тому розгляд продовжуватиметься з використанням позначень m й A (тобто штрихи пропускатимуться).

Оптимальне значення вартості ризикових активів a^* залежить від параметра A , p та r відповідної моделі. Для дослідження ефекту зміни кожного з цих параметрів на a^* можна стандартним чином розвинути відповідну порівняльну статистику. Розглянемо як приклад вплив зміни A на значення a^* .

Диференціюючи вирази (4.39) і (4.40) по змінній A , дістаємо рівності

$$u'(W_1^*) dW_1^* = \beta q u'(W_2^*) dW_2^*; \quad q dW_1^* + dW_2^* = (1+q)dA,$$

де $\beta = (1-p)/p$.

Звідси

$$\frac{dW_1^*}{dA} = \beta q (1+q) u'(W_2^*) / \Delta; \quad (4.44)$$

$$\frac{dW_2^*}{dA} = (1+q) u'(W_1^*) / \Delta,$$

$$\text{де } \Delta = u'(W_1^*) = \beta q^2 u'(W_2^*).$$

Очевидно, що $\Delta < 0$, $(dW_1^* / dA) > 0$, $(dW_2^* / dA) > 0$ тоді і тільки тоді, коли $u'' < 0$, тобто коли індивідум не схильний до ризику.

Із (4.37) випливає, що

$$\frac{dW_1^*}{dA} - \frac{dW_2^*}{dA} = (r_1 - r_2) \frac{da^*}{dA} \quad (4.45)$$

Підставляючи (4.44) у (4.45) і враховуючи (4.39) та означення R_a , можна дістати рівність

$$\frac{da^*}{dA} = \frac{(1+q) u'(W_1^*) [R_a(W_2^*) - R_a(W_1^*)]}{\Delta (r_1 - r_2)}. \quad (4.46)$$

Припускаючи, що $u'' < 0$ й абсолютне уникання ризику спадає ($R'_a < 0$), знаходимо, що $(da^* / dA) > 0$, оскільки $W_1^* > W_2^*$ та $r_1 - r_2 > 0$.

Використовуючи рівності (4.44), (4.45) і враховуючи (4.39) й означення R_r , можна показати, що

$$\frac{A}{a^*} \frac{da^*}{dA} - 1 = \left[R_r(W_1^*) - R_r(W_2^*) \right] u'(W_1^*) / a^* \Delta r_1.$$

Оскільки $\Delta < 0$ тоді і тільки тоді, коли $u^* < 0$, доходимо такого висновку: попит на ризиковий актив за змінним початковим капіталом нееластичний тоді і тільки тоді, коли $R_r(W_1) > R_r(W_2)$, тобто

$$\frac{A}{a^*} \frac{da^*}{dA} < 1 \Leftrightarrow R_r(W_1) > R_r(W_2).$$

Отже, припускаючи зростання коефіцієнта відносного уникання ризику ($R'_r > 0$), маємо $(A/a^*) (da^*/dA) < 1$.

Підсумовуючи викладене вище, сформулюємо таке твердження.

Теорема 4.9. *Нехай індивідум, який вкладає капітал A у два типи активів: ризиковий та безпечний, не схильний до ризику. Тоді маємо такі пропозиції.*

1. *У припущенні про спадаючий коефіцієнт абсолютного уникання ризику підвищення A збільшує інвестування в ризиковий актив.*

II. *У припущенні про зростаючий коефіцієнт відносного уникання ризику підвищення A зменшує пропорцію ризикового активу у портфелі та збільшує пропорцію безпечного активу.*

Подальші дослідження показали, що наведені результати К. Ерроу не поширюються на випадок багатьох ризикових активів у портфелі. О. Д. Харт¹ довів, що необхідною й достатньою умовою узагальнення результатів К. Ерроу на випадок багатьох ризикових активів у портфелі є відокремлювана властивість функції корисності інвестора, яка полягає в тому, що з нею ризикові активи купуються у фіксованих пропорціях незалежно від рівня початкового капіталу. Клас подібних функцій корисності є дуже вузьким.

4.6. ДОМАШНІ ГОСПОДАРСТВА В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ: РІШЕННЯ ПРО ЗАОЩАДЖЕННЯ І СПОЖИВАННЯ

Розглядатимемо домашнє господарство як єдиного споживача, який використовує свій бюджет на цілі споживання та заощадження. Дослідимо модель відповідних рішень на проміжок часу, що складається з двох періодів: першого (теперішнього) та другого (майбутнього). Почнемо з елементарного аналізу ситуації, запропонованого І. Фішером² (подібний аналіз без особливих ускладнень може бути поширений також на випадок довільної кількості періодів).

Нехай C_1 і C_2 — відповідно рівні теперішнього та майбутнього споживання, а $u(C_1, C_2)$ — відповідне значення функції корисності споживача. Через I_1 та I_2 позначимо його зовнішній дохід відповідно для першого і другого періодів. Тоді заощадження споживача S (які можуть бути додатними, нульовими або від'ємними) для першого періоду становитимуть:

$$S = I_1 - C_1. \quad (4.47)$$

Дохід споживача за другий період (який вважається збіжним з періодом капіталізації заощаджень за відсотковою ставкою r) становитиме $I_2 + (1+r)S$, так що виконуватиметься нерівність

$$C_2 \leq I_2 + (1+r)S. \quad (4.48)$$

Комбінуючи співвідношення (4.47) і (4.48), дістаємо

$$(1+r)C_1 + C_2 \leq (1+r)I_1 + I_2. \quad (4.49)$$

Споживач повинен вибрати рівні споживання C_1 та C_2 так, щоб максимізувати корисність $u(C_1, C_2)$ при бюджетному обмеженні (4.49), де $C_1 \geq 0$ і $C_2 \geq 0$.

Для розв'язання цієї задачі математичного програмування запишемо її лагранжіан

$$L(C_1, C_2, \lambda) = u(C_1, C_2) + \lambda [(1+r)I_1 + I_2 - (1+r)C_1 - C_2].$$

Припускаючи, що в точці оптимуму $C_1^* > 0$, $C_2^* > 0$ (внутрішній оптимум), маємо такі умови оптимальності першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial C_1} - \lambda(1+r) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial C_2} - \lambda = 0; \quad (4.50)$$

$$(1+r)I_1 + I_2 - (1+r)C_1^* - C_2^* \geq 0, \quad (4.51)$$

$$\lambda [(1+r)I_1 + I_2 - (1+r)C_1^* - C_2^*] = 0, \quad (4.52)$$

де $\lambda \geq 0$ і $\partial u / \partial C_i = \partial u(C_1^*, C_2^*) / \partial C_i$, $i = 1, 2$.

Умову (4.50) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u / \partial C_1}{\partial u / \partial C_2} = 1+r, \quad (4.53)$$

включивши множник Лагранжа λ .

Враховуючи, що на підставі (4.50) $\lambda > 0$ ($\partial u / \partial C_2 > 0$), можна переписати (4.51) у вигляді

$$(1+r)C_1^* + C_2^* = (1+r)I_1 + I_2. \quad (4.54)$$

Рівняння (4.53) відоме як **закон Фішера** для двоперіодної задачі споживання й заощадження. Вираз $\left(\frac{\partial u / \partial C_1}{\partial u / \partial C_2} - 1 \right)$ називається **граничною нормою часових переваг** (закон Фішера вимагає, щоб ця норма дорівнювала ре-

¹Hart O. D. Some Negative Results on the Existence of Comparative Statics Results in Portfolio Theory // Review of Economic Studies. — 1975. — 42. — P. 615–621.

²Фішер Ірвінг (1867–1947) — видатний американський економіст, відомий працями з теорії грошей і фінансової математики.

альній нормі відсотка). Припускаючи, що u є строгою квазіугнутою функцією і враховуючи, що обмеження (4.49) лінійне, встановлюємо, що (4.53) і (4.54) є необхідними й достатніми умовами існування єдиної точки глобального максимуму.

Рівняння (4.53) та (4.54), що визначають оптимальні рівні споживання C_1^* і C_2^* , залежать від параметрів I_1 , I_2 та r . Дослідження цієї залежності можна провести, вдаючись до стандартного аналізу порівняльної статистики. Наприклад, певажко показати, що

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} = \frac{-(1+r) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} - (1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right]}{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - 2(1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} + (1+r)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right]}. \quad (4.55)$$

Знак похідної $\partial C_1 / \partial I_1$, взагалі кажучи, невизначений. Однак в умовах неенасичуваності $\left(\frac{\partial u}{\partial C_i} > 0 \right)$ можна додатково припускати, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial C_i^2} < 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial C_1} \right) \geq 0. \quad (4.56)$$

За цих припущень із (4.55) випливає, що $(\partial C_1 / \partial I_1) > 0$, тобто збільшення теперішнього доходу веде до збільшення теперішнього споживання.

Як зазначалося вище, з припущення $\partial u / \partial C_i > 0$ випливає, що $\lambda > 0$, а отже, в точці оптимуму бюджетна умова виконується з рівністю (4.54). Це, у свою чергу, веде до того, що нерівність (4.48) виконується як рівність, тобто

$$C_2 = I_2 + (1+r)S \quad (4.57)$$

при $C_2 = C_2^*$.

З умови (4.57) можна розглядати корисність споживання як функцію рівня заощадження S :

$$u(C_1, C_2) = u(I_1 - S, I_2 + (1+r)S) = \Gamma(S).$$

Тоді споживач може вибрати S так, щоб максимізувати $\Gamma(S)$. Відповідна умова оптимальності першого порядку має вигляд

$$\Gamma'(S^*) = \frac{\partial u}{\partial C_1} + (1+r) \frac{\partial u}{\partial C_2} = 0,$$

що дає знову закон Фішера (4.53). Враховуючи, що

$$\Gamma''(S) = \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - 2(1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} + (1+r)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2},$$

при припущеннях (4.56) $\Gamma''(S^*) < 0$, так що (4.53) визначає необхідні й достатні умови єдиного глобального максимуму.

Уведемо тепер у модель, яка розглядається, невизначеність, припускаючи, що майбутній дохід I_2 , не пов'язаний з параксуванням відсотків, є невизначеним, тобто є випадковою величиною зі щільністю розподілу $f(I_2)$. Подібна невизначеність доходу I_2 називається **ризиком доходу** для споживача. В цих припущеннях сподівана функція корисності споживача має вигляд

$$\begin{aligned} Eu(C_1, C_2) &= E\{u(I_1 - S, I_2 + (1+r)S)\} = \\ &= \int_I u(I_1 - S, I_2 + (1+r)S) f(I_2) dI_2 = \gamma(S), \end{aligned} \quad (4.58)$$

де I - проміжок значень I_2

Споживач вибиратиме оптимальний рівень заощадження S^* так, щоб максимізувати $\gamma(S)$. Умова оптимальності $\gamma'(S^*) = 0$ має вигляд

$$E \left[\frac{\partial u}{\partial C_1} - (1+r) \frac{\partial u}{\partial C_2} \right] = 0$$

і може бути переписана як

$$\frac{E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right)}{E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right)} = 1+r \quad (4.59)$$

Це не що інше, як версія закону Фішера для випадку невизначеності. Вона означає, що середня гранична норма часових переваг при невизначеності $[E(\partial u / \partial C_1) / E(\partial u / \partial C_2)] - 1$ дорівнює реальній нормі відсотка. В умовах (4.56) друга похідна

$$\gamma''(S^*) = E \left[\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - 2(1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} + (1+r)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right] < 0,$$

так що (4.59) є умовою єдиного глобального максимуму.

Припустимо, що I_2 має вигляд

$$I_2 = \bar{I}_2 + \beta \epsilon, \quad \beta > 0, \quad \bar{I}_2 = E I_2, \quad (4.60)$$

де ϵ - випадкова величина з нульовим середнім $E \epsilon = 0$.

Зауважимо, що при $\beta = 0$ невизначеність зникає, $I_2 = \bar{I}_2$. Визначимо функцію

$$\Theta(S; I_1, I_2, r, \beta) = [E(\partial u / \partial C_1) / E(\partial u / \partial C_2)] - 1. \quad (4.61)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial S} &= \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) E \left[- \frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} + (1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) E \left[- \frac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial C_1} + (1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right] \right\} \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Оскільки $\frac{\partial \Theta}{\partial S} > 0$, значення S^* єдиним чином визначається перетином Θ -кривої r -лінією, що задає рівень ставки r .

Для здобуття результатів порівняльної статистики можна показати, що

$$\frac{\partial \Theta}{\partial I_1} = \left[E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} \right) - E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right) \right] \left[E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) \right]^{-2} < 0; \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial I_2} = \left[E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right) - E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right) \right] \left[E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) \right]^{-2} > 0. \quad (4.64)$$

Отже, збільшення I_1 або спад I_2 змусить криву $\Theta(S)$ вниз, що зумовлює зростання оптимального споживання S^* , як це показано на рис. 4.7. Тому $\partial S / \partial I_1 > 0$, а $\partial S / \partial I_2 < 0$.

Неважко показати, що

$$\frac{\partial S}{\partial I_1} = E \left[\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} - (1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right] (\gamma^*)^{-1};$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} = (1+r) E \left[- \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} + (1+r) \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right] (\gamma^*)^{-1}.$$

Тому з припущень (4.56) і нерівності $\gamma^*(S) < 0$ випливає, що

$$\frac{\partial C_1}{\partial I_1} > 0; \quad \frac{\partial S}{\partial I_1} > 0,$$

тобто збільшення теперішнього доходу підвищує теперішнє споживання та заощадження. Це веде до того, що гранична схильність до споживання лежить між 0 та 1 через рівність $(\partial C_1 / \partial I_1) + (\partial S / \partial I_1) = 1$.

Нідрахунок дає

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right) - E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right) \right\} \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) \right\}^{-2} > 0.$$

Отже, при збільшенні r Θ -крива (див. рис. 4.7) змещується вгору, як і r -лінія, тому безпосередньо ефект збільшення r є невизначеним. Це потребує додаткових досліджень відповідної порівняльної статистики.

Диференціюючи (4.64) за змінною β , отримуємо

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right) \varepsilon - E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right) \varepsilon \right\} \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) \right\}^{-2}$$

Припускаючи, що

$$E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2} \right) \varepsilon < 0; \quad E \left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2} \right) \varepsilon \leq 0, \quad (4.65)$$

матимемо $(\partial \Theta / \partial \beta) < 0$, так що Θ -крива на рис. 4.7 зсувається вниз при збільшенні β , тобто попит на заощадження зростає при підвищенні ризику

доходу, або збільшення невизначеності щодо майбутнього доходу призводить до зростання заощаджень.

Умови (4.65) відіграють важливу роль у порівняльній статистиці. Для пояснення цих умов можна розглянути функцію

$$R_u(C_1, C_2) = - \left(\frac{\partial^2 u(C_1, C_2)}{\partial C_2^2} \right) \times \left(\frac{\partial u(C_1, C_2)}{\partial C_2} \right)^{-1}.$$

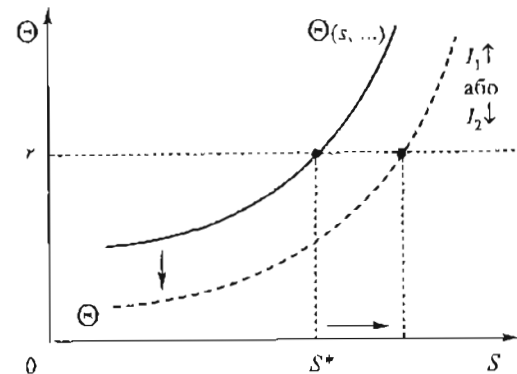


Рис. 4.7

подібну до міри Ерроу-Пратта абсолютного уникання ризику з тією різницею, що вона залежить від двох змінних C_1 і C_2 .

Виявляється, що умови

$$\frac{\partial R_u}{\partial C_2} < 0; \quad \frac{\partial R_u}{\partial C_1} \geq 0$$

забезпечують виконання нерівностей (4.65).

Розглянемо випадок, коли доходи I_1 та I_2 визначено, але реальна відсоткова ставка r («норма врожаю») є невизначеною, наприклад через інфляцію (або «погоду»). Невизначеність величини r називається **ризиком капіталу**, на відміну від ризику доходу, розглянутого вище.

Припустимо, що випадкова величина r має вигляд

$$r = \bar{r} + \beta \varepsilon, \quad \beta > 0, \quad \bar{r} = E r, \quad (4.66)$$

де ε — випадкова величина ($E \varepsilon = 0$) зі щільністю розподілу $g(\varepsilon)$.

Вважатимемо, що $r > -1$. Це еквівалентно припущенню

$$\rho = 1 + \bar{r} + \beta \varepsilon > 0.$$

Споживач вибирає рівень заощадження S , щоб максимізувати сподівану користь

$$E \{ u(I_1 - S, I_2 + (1 + \bar{r} + \beta \varepsilon) S) \} = \Psi(S).$$

Тоді умова оптимальності першого порядку $\Psi'(S^*) = 0$ матиме вигляд

$$E \left[- \frac{\partial u}{\partial C_1} + (1 + \bar{r} + \beta \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial C_2} \right] = 0,$$

звідки

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial C_1} \right) = E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) + \bar{r} E \left(\frac{\partial u}{\partial C_2} \right) + \beta E \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial C_2} \right).$$

Таким чином,

$$\frac{E(\partial u / \partial C_1)}{E(\partial u / \partial C_2)} - 1 = \bar{r} - \tau, \quad (4.67)$$

де

$$\tau = -\beta E\left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial C_2}\right) \left[E\left(\frac{\partial u}{\partial C_2}\right)\right]^{-1}. \quad (4.68)$$

Прямий підрахунок дає

$$\Psi^*(S) = E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2}\right) - 2E\left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2}\right) + E\left(\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}\right).$$

З урахуванням (4.56) і за умови, що $\rho > 0$ завжди $\Psi^* < 0$, так що рівність виражає необхідну і достатню умову єдиного глобального максимуму.

Оскільки $E\left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial C_2}\right) < 0$, через (4.68) $\tau > 0$. Зауважимо, що подібне τ може бути інтерпретоване як «плата за ризик». Тому умова оптимальності (4.67) означає, що в точці оптимуму середня гранична норма часової переваги при ризику капіталу дорівнює ефективній ставці відсотка, що є різницею середньої ставки та «плати за ризик», тобто $\bar{r} - \tau$.

Позначивши через Θ середню граничну норму часової переваги при ризику капіталу, матимемо

$$\frac{\partial \Theta}{\partial S} = \left[E\left(\frac{\partial u}{\partial C_2}\right) E\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial C_1^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial C_1 \partial C_2}\right) - E\left(\frac{\partial u}{\partial C_1}\right) E\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial C_2 \partial C_1} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial C_2^2}\right) \right] \times \\ \times \left[E\left(\frac{\partial u}{\partial C_2}\right) \right]^{-1}.$$

З урахуванням припущень (4.56) та $\rho > 0$ доходимо висновку, що $(\partial \Theta / \partial S) > 0$. Оптимальний рівень заощадження S^* при ризику капіталу визначається перетином Θ -кривої та $(\bar{r} - \tau)$ -кривої, як це зображено на рис. 4.8

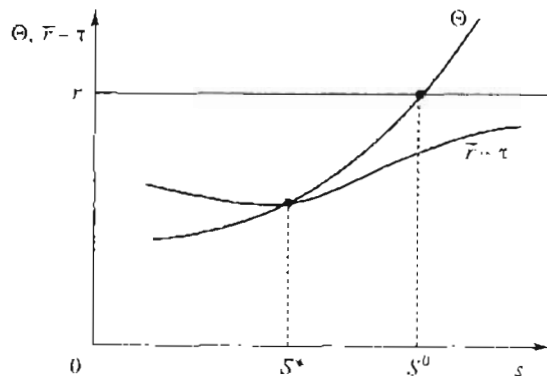


Рис. 4.8

при цьому знак $\partial(\bar{r} - \tau) / \partial S$ може бути або додатним, або від'ємним). Значення заощадження при ризику капіталу S^* завжди менше, ніж в умовах невизначеності S^0 , оскільки $\bar{r} - \tau < \bar{r}$.

Можна розвинути порівняльну статистику розглянутої задачі диференціюванням умови оптимальності (4.67).

Підсумовуючи викладене вище, сформулюємо таке твердження.

Теорема 4.10. *І. В умовах ризику доходу при невизначеному майбутньому доході, не пов'язаному з паростанням відсотків, правильними є такі пропозиції:*

а) збільшення теперішнього доходу зумовлює зростання теперішнього споживання і теперішніх заощаджень, гранична схильність до споживання лежить у проміжку $(0, 1)$;

б) збільшення сподіваного значення майбутнього безвідсоткового доходу зменшує заощадження;

в) ефект збільшення τ для заощаджень є невизначеним;

г) збільшення невизначеності щодо майбутнього безвідсоткового доходу підвищує заощадження у припущеннях (4.65).

II. В умовах ризику капіталу, коли ставка r є невизначеною, збільшення невизначеності зменшує заощадження.

4.7. ЕКОНОМІКА ІНФОРМАЦІЇ: АСИМЕТРІЯ ІНФОРМАЦІЇ, ПРИНЦИП «ЛИМОНЧИКІВ», СИГНАЛІЗАЦІЯ, ЗВОРОТНА СЕЛЕКЦІЯ. ЗАСТОСУВАННЯ ДО СТРАХУВАННЯ

На проблему інформаційної асиметрії в економіці та її вплив на поведінку економічних агентів і ринки товарів уперше звернув увагу американський економіст Джордж Акерлоф¹. За дослідження цього питання через три десятиліття він отримав Нобелівську премію з економіки (2001).

Асиметрія інформації — це ситуація, коли одна група агентів володіє необхідною для ведення справ інформацією, а інша — ні. З цієї позиції став досконалої конкуренції, коли ціни визначаються попитом та пропозицією і точно відповідають альтернативним видаткам, тобто точно передають інформацію про них власникам та покупцям благ, є випадком симетричного розподілу інформації, що дає змогу ефективно координувати економічну діяльність. Однак у дійсності економісти здебільшого стикаються з нерівномірним розподілом інформації.

Дж. Акерлоф уперше поставив проблему асиметрії інформації на ринку, що призводить до **зворотної селекції** — відтиснення з нього якісних товарів товарами з прихованими вадами («лимончиками»). Розглянемо докладніше проблему «лимончиків» (поганих товарів) на ринку продажу та купівлі використаних автомобілів в умовах, коли існують дві групи автомобілів, абсолютно однакові зовні, але істотно відмінні за якістю.

Нехай якісні автомобілі продаватимуться за середньою ціною \$ 20 тис., а купуватимуться за \$ 24 тис., неякісні (з прихованими вадами) — продаватимуться за \$ 5 тис., а купуватимуться за \$ 6 тис. Якщо якісних автомобілів і «лимончиків» приблизно однакова кількість, то середня сподівана ціна E_p довільного автомобіля для покупця становила 6 \$ 15 тис. ($E_p = 0,5 \cdot 24 + 0,5 \cdot 6 = 15$ тис. дол.). Однак за \$ 15 тис. якісні авто-

¹Akerlof G. The Market for Lemons: Quantitative Uncertainty and the Market Mechanism // Quarterly J. Econ. — 1970. — 84. — P. 488–500.

мобілі не продаватимуться, оскільки їхні власники їздитимуть на них самі, тобто через інформаційну асиметрію на ринку залишаться переважно не якісні товари (принцип «лимончиків»).

У США феномен дії принципу «лимончиків» набув особливої гостроти наприкінці 60-х – на початку 70-х років XX ст. на ринку використаних автомобілів, поки масовий імпорту японських автомобілів у 70-ті роки, серед яких було мало «лимончиків», не розв'язав проблему. Звісно, феномен «лимончиків» трапляється на багатьох інших ринках. Зокрема у страхуванні цей принцип фігурує як зворотна селекція.

Проблема асиметрії інформації має різноманітні цікаві застосування. Розглянемо приклад, пов'язаний із сигналами та сигналізацією. Щодо ринку використаних автомобілів, оцінка автомобіля автомеханіком сигналізує про якість товару. Коли якийсь сигнал існує, то ціна якісних товарів зростає. На ринку можуть бути одночасно як поінформовані, так і непоінформовані покупці. З плином часу непоінформовані покупці можуть дізнатися про значення сигналу з цін, оскільки ціни поступово відображатимуть повну інформацію про товар (у примусі, що є люди, які купують подібну інформацію). Існує багато обставин, за яких сигнал про якість товару пропонується екзогенно (зовнішньо). Оцінювання автомобіля механіком є таким прикладом.

Існують також обставини, за яких сигнал про товар пропонується учасниками ринку ендегенно (тобто внутрішньо). Такий випадок називається **самоселекцією**. Як приклад можна навести ринок праці, де освіта часто є важливим сигналом про кваліфікацію працівника.

Припустимо, що наймач на ринку праці не вивчений у продуктивних здібностях працівників (це досить типової ситуація) і що є два типи працівників: А і В. Значення граничної продуктивності кожного працівника типу А дорівнює a , а працівника типу В – a , причому $a < a$. Припустимо також, що наймач не може безпосередньо оцінити цю граничну продуктивність до факту наймання і використання працівника. Вважатимемо, що наймач нейтральний до ризику (так що все визначається тільки значенням граничної продуктивності), з урахуванням минулого досвіду існує сильна кореляція між здібностями працівника та рівнем його освіти. Нехай партіє освіти пропорційна рівню освіченості y , так що $C_i = k_i y$, $i = A, B$, причому $k_A > k_B$.

Таким чином, особа з меншими здібностями потребує більше коштів, ніж особа з більшими здібностями, для досягнення одного й того самого рівня освіченості y . Оскільки y є величиною, яка може бути оцінена (наприклад, спеціальним тестуванням), наймач може пропонувати працівникам рівень оплати, що залежить від їхнього рівня освіченості. Постає запитання: чи може наймач успішно диференціювати працівників за їхніми здібностями, використовуючи їхні рівні освіченості?

М. Спенс¹ вважає, що відповідь позитивна й існує **рівновага сигналювання**, за якої сигнал і видатки на освіту є дійсними витратами на сигна-

лізацію. Найманий працівник повинен розглядати себе як джерело інформації, що сигналює, і вибирає сигнали, щоб максимізувати різницю між оплатою, яка пропонується, та видатками на сигналізацію. Подібний підхід М. Спенс застосовує також для інших випадків.

У подальшому обмежимося докладнішим дослідженням асиметрії інформації, превентивною активністю з проблемою морального ризику в контексті страхових ринків.

Як і в п. 4.3, розглянемо агента, який розмірковує про купівлю страхового поліса. Припустимо, що є два стани природи S_1 та S_2 , і при S_1 агент має втрати b , а при S_2 він не зазнає втрат. Нехай a – початкове значення активу, який він хоче застрахувати, x – сума виплати страхової компанії (страхове покриття), у випадку, якщо станеться подія S_1 , а P – премія за подібне страхування. Припустимо також, що агент може вибрати рівень страхового покриття x .

На відміну від п. 4.3, припускатимемо, що агент може впливати на ймовірність втрат π превентивною діяльністю, витрати на яку z вимірюються в грошах, так що $\pi = \pi(z)$, причому $\pi' < 0$ і $\pi'' > 0$. Вважатимемо, що витрати на превентивну активність становлять одну грошову одиницю за одиницю і що страховик не може спостерігати z . Тоді перед агентом постає проблема вибору рішення в лотерії $\{\pi(z); a - b - z - P + x, a - z - P\}$.

Наведену вище ситуацію, зокрема, можна інтерпретувати як страхування автомобіля, де ймовірність страхового випадку залежить від рівня діяльності агента, спрямованої на запобігання подібному випадку. Асиметрія інформації полягає в тому, що агент знає про таку діяльність, а страховик – ні.

Агент повинен вибрати рівень страхування x . Спочатку він має визначити суму z при кожному заданому x , що максимізує його сподівану корисність

$$\phi(z) = \pi(z)u(a - b - z - P + x) + (1 - \pi(z))u(a - z - P)$$

при $z \geq 0$.

Умови першого порядку оптимальності тут мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(z^*)}{dz} &= \pi'(z^*)[u(a_1) - u(a_2)] - \\ &- [\pi'(z^*)u'(a_1) + (1 - \pi(z^*))u'(a_2)] \leq 0; \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$(d\phi/dz)z^* = 0, \quad z^* \geq 0, \quad (4.70)$$

де $a_1 = a - b - z^* - P + x$, $a_2 = a - z^* - P$.

Якщо $x = b$ (випадок повного покриття), то $u(a_1) = u(a_2)$, тому $d\phi/dz < 0$, що дає $z^* = 0$ (граничний екстремум). Таким чином, агент із повним покриттям не звертає уваги на превентивну діяльність. Також із співвідношення (4.69) випливає, що $d\phi/dz < 0$ для деякого x , меншого

¹Spence M. Job Market Signaling // Quarterly J. Econ. - 1973. - 87. - P. 355 - 374.

за b , коли $z^* = 0$. Для тих x , що дають $z^* > 0$ як оптимум, умови (4.69), (4.70) зводяться до рівності $(d\varphi/dz) = 0$. Тому

$$\pi'(z^*)[u(a_1) - u(a_2)] = \pi(z^*)u'(a_1) + (1 - \pi(z^*))u'(a_2). \quad (4.71)$$

Це, у свою чергу, визначає z^* як функцію x , тому $z^* = z^*(x)$, де припускається, що $(z^*)' < 0$. Зауважимо, що прямий підрахунок дає

$$(z^*)' = \frac{[\pi u'(a_1) - \pi' u'(a_1)]}{\{\pi''(u(a_1) - u(a_2))\} + \{\pi u'(a_1) + (1 - \pi)u'(a_2)\}},$$

де знаменник завжди від'ємний, а чисельник може бути додатним або від'ємним, оскільки $\pi' < 0$.

Припущення $(z^*)' < 0$ означає, що агент може знижувати рівень превентивної активності, коли страхове покриття зростає. Якщо $z^*(x) = 0$, тобто відсутня превентивна діяльність, що відповідає страховому покриттю x , то $(z^*)' = 0$.

Нагадаємо, що z^* є рівнем активності для кожного значення x , тобто $z^* = z^*(x)$, який визначається умовою (4.71). Тоді агент вибирає рівень покриття x , що максимізує сподівану користь для $x \geq 0$.

Нехай $P = P(x)$ — відповідна страхова премія. З урахуванням того, що $z^* = z^*(x)$ та $P = P(x)$, сподівана користь стає функцією x , тобто

$$\Psi(x) = \pi(z^*(x))u(a - b - z^*(x) - P(x) + x) + (1 - \pi(z^*(x)))u(a - z^*(x) - P(x)).$$

Таким чином, маємо другу задачу агента, яка полягає у виборі x , що максимізує $\Psi(x)$ при $x \geq 0$. Припускаючи, що в точці оптимуму x^* виконується умова $x^* > 0$ (внутрішній оптимум), отримуємо стандартну умову першого порядку $\Psi'(x^*) = 0$, яка набуває вигляду

$$[\pi u'(a_1) + (1 - \pi)u'(a_2)](dP/dx) = \pi u'(a_1) - [\pi u'(a_1) + (1 - \pi)u'(a_2)]z^* \pi' z^* [u(a_1) - u(a_2)]. \quad (4.72)$$

З урахуванням (4.71) останні два члени правої частини (4.72) мають нульову суму, що дає рівність

$$\frac{dP}{dx} = \pi u'(a_1) [\pi u'(a_1) + (1 - \pi)u'(a_2)]^{-1}. \quad (4.73)$$

Якщо страховик має можливість спостерігати z , то страхова премія призначається відповідно до z , що впливає на π .

Щоб вивчити проблему в умовах конкуренції, припустимо таке: всі агенти є ідентичними в тому розумінні, що вони купують однакову кількість страхових послуг при заданих цінах і що конкуренція в страхуванні призводить до нульових сподіваних прибутків, тобто конкуренція зводить

премії до актуарно справедливого рівня. Тоді $-\pi(x^* - P) + (1 - \pi)P = 0$, або

$$P(x^*) = \pi(z^*(x^*))x^*. \quad (4.74)$$

Тому $P' = \pi + \pi' z^* x^*$. Підставивши цей вираз у ліву частину рівності (4.73), дістанемо

$$\pi + \pi' z^* x^* = \pi u'(a_1) [\pi u'(a_1) + (1 - \pi)u'(a_2)]^{-1} = D(x^*), \quad (4.75)$$

де $D(x^*)$ — попит на страхове покриття x^* .

Страхова компанія не знає, який рівень превентивної активності z вибрав її клієнт. Іноді заперечується, що компанія, спостерігаючи x , здатна оцінити z із $z(x)$ і, таким чином, встановити відповідну ціну за одиницю страхового покриття. Однак цей аргумент не спрацьовує, оскільки компанія знає лише, скільки страхових послуг (у грошах) вона продає клієнтові. Якщо компанія збільшуватиме премію за одиницю відповідно до x , то раціонально діючий клієнт звернеться до іншої компанії з кращими умовами через припущення про конкурентність страхового ринку.

Неоптимальність конкурентності виникає через те, що конкурентна премія за одиницю страхових послуг dP/dx має бути однаковою для всіх клієнтів, тоді як сума z для них є різною. Оскільки страхова компанія не знає рівня z , вона продає кожну одиницю страхових послуг за ту саму ціну, скажімо, p . Підставивши її у (4.74), матимемо

$$p = \pi = D(x^*). \quad (4.76)$$

Зауважимо, що π менше, ніж вираз $\pi + \pi' z^* x^*$, записаний ліворуч у (4.74).

Оскільки $\pi' < 0$ і $z^* < 0$. Отже, припускаючи, що попит $D(x^*)$, який плачується, має спадний нахил, установлюємо, що попит на страхування має бути більшим, ніж визначений у (4.75). Таким чином, конкурентна рівновага може бути схарактеризована перепиробництвом страхових послуг.

У проблемі, що розглядалася, агент знав рівень своєї превентивної діяльності z , а страховик — ні. Це призводило до того, що страхова премія не впливала на рівень z . При цьому клієнт міг вибирати більш низькі рівні превентивної активності в разі зростання страхового покриття, тобто страхування спонукало агента до низького рівня z без зміни премії, внаслідок чого страхова компанія втрачала гроші. Таке явище називається проблемою **морального ризику**. Важливу роль тут відіграє асиметрія інформації. У випадку, коли страхова компанія може спостерігати z і варіювати страхову премію відповідно до z , проблема морального ризику не виникає.

Щоб не виникала проблема морального ризику, пропонуються два способи дій. За першим — треба застосовувати як політику неповне покриття втрат, за другим — вести спостереження за заходами безпеки проти страхових випадків.

Докладніше проблеми інформаційної асиметрії, несприятливого вибору, сигналізації, морального ризику для фінансових фірм і, зокрема, банків розглядаються в [34].

4.8. РИНОК СТРАХОВИХ ПОСЛУГ. ПОВЕДІНКА СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ

Разом із ринком цінних паперів ринок страхових послуг є найризикованішим серед усіх типів ринків. Тому основною частиною актуарної (страхової) математики, що забезпечує аналітичну підтримку вибору та прийняття рішень щодо страхування, є теорія ризику. Розглянемо стандартний для сучасної мікроекономіки підхід до проблеми теорії страхового ризику, що ґрунтується на використанні функції корисності відповідних економічних агентів (зокрема страхових компаній).

Щоб уникнути використання гіпотез сподіваної корисності та відповідних складностей, розглянутих у п. 4.1, вважатимемо, що функцію корисності відповідного економічного агента задано на множині X значень його суми багатства, доходів або прибутку, які можуть бути як детермінованими змінними величинами, так і випадковими величинами, так що значення $u(x)$ характеризує індивідуальну цінність (корисність) суми капіталу x , виражену в грошах.

Скористаємося звичайними припущеннями про існування другої похідної у функції $u(x)$, $x \in X$ та властивості $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$, які означають, що u є зростаючою строго увгнutoю функцією.

Відповідну функцію Ерроу — Пратта, що в цьому контексті є функцією уникання ризику або функцією неохильності до ризику, позначатимемо як

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{d}{dx} \ln u'(x). \quad (4.77)$$

Моделюваними прикладами функцій корисності, що використовуються в страхуванні, є три типи функцій, зміст яких розкривається в таких прикладах.

Приклад 4.6. Експоненціальна функція корисності з параметром $a > 0$

$$u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.78)$$

При $x \rightarrow \infty$ функція $u(x)$, залишаючись обмеженою, прямує до границі 1, a . Вона має сталу функцію неохильності до ризику

$$r(x) = a, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.79)$$

Від'ємне значення x інтерпретується як борг $|x|$.

Приклад 4.7. Степенева функція корисності першого роду з параметрами $s > 0$, $c > 0$

$$u(x) = \frac{s^{c+1} - (s-x)^{c+1}}{(c+1)s^c}, \quad x < s. \quad (4.80)$$

Відповідний вираз не може бути моделлю корисностей для значень $x > s$. Єдиний шлях продовження $u(x)$ для $x \geq s$ із збереженням нестрогої увгнutoсті та монотонності — припустити $u(x) = \frac{s}{c+1}$ для $x \geq s$. Тоді параметр s може бути інтерпретований як рівень насичення: максимальний рівень корисності досягається при скінчен-

ному багатстві x . Спеціальний випадок $c = 1$ приводить до квадратичної функції корисності

$$u(x) = x - \frac{x^2}{2s}, \quad x < s. \quad (4.81)$$

Для функції (4.80)

$$r(x) = \frac{c}{s-x}, \quad x < s, \quad (4.82)$$

тобто $r(x)$ збільшується із значенням x і прямує до нескінченності при $x \rightarrow s$ (коли багатство наближається до рівня насичення s , дуже незначне підвищення корисності може бути досяжним при збільшенні x , а отже, не існує потреби в ризиковій поведінці агента).

Приклад 4.8. Степенева функція корисності другого роду з параметром $c > 0$

$$u(x) = \frac{x^{c+1} - 1}{c+1}, \quad x > 0. \quad (4.83)$$

Для $c = 1$ вважається, що $u(x)$ є логарифмічною функцією

$$u(x) = \ln x, \quad x > 0. \quad (4.84)$$

Вираз (4.84) є границею (4.83) при $c \rightarrow 1$

Для функції (4.83)

$$r(x) = \frac{c}{x}, \quad x > 0, \quad (4.85)$$

тобто неохильність до ризику спадає при зростанні x (агент стає більш схильним до ризикової поведінки).

Зауважимо, що при $a \rightarrow 0$ у прикладі 4.6 або $s \rightarrow \infty$ у прикладі 4.7 $u(x) = x$, яка не є функцією корисності через порушення припущень $u' > 0$, $u'' < 0$. Аналогічно при $c \rightarrow 0$ у прикладі 4.8 $u(x) = x - 1$.

У подальшому вважатимемо, що $x < s$ для степеневих функцій корисності першого роду та $x > 0$ для степеневих функцій другого роду. Аналогічні припущення приймаються щодо функції корисності випадкового аргументу.

Оскільки афінні перетворення функції корисності $u(x)$ вигляду

$$u(x) = Au(x) + B, \quad A > 0, \quad B \in R^1 \quad (4.86)$$

дають еквівалентну корисність капіталу x (у порівняльному розумінні значень корисності) для визначеності застосовують операцію стандартизації функції корисності $u(x)$, $x \in X$ накладанням на неї умов

$$u(\xi) = 0; \quad u'(\xi) = 1 \quad (4.87)$$

у деякій вибраній точці $\xi \in X$.

Щодо прикладів 4.6, 4.7 доцільно покласти $\xi = 0$, а щодо прикладу 4.8 — $\xi = 1$.

Як зазначалося вище, функція неохильності до ризику $r(x)$ є інваріантною до еквівалентних перетворень корисності (4.86). За згаданого функцією $r(x)$ можна відновити функцію корисності $u(x)$, розв'язавши відповідне диференціальне рівняння другого порядку

$$u''(x) + r(x)u'(x) = 0. \quad (4.88)$$

Загальний розв'язок цього рівняння залежить від двох параметрів, визначити які можна за допомогою умов типу (4.87) для деякого ξ . Тоді роз-

в'язок (4.88) матиме вигляд

$$u(x) = \int_{\xi}^x \exp \left\{ - \int_{\xi}^s r(y) dy \right\} ds. \quad (4.89)$$

Для двох агентів 1 і 2 можна порівняти їхню неохочість або схильність до ризику, якщо розглянути відповідно їхні функції r_1 та r_2 .

Припустимо, наприклад, що

$$r_1(x) \leq r_2(x) \text{ для всіх } x \quad (4.90)$$

(тобто агент 2 не більше схильний до ризику в нестрогому розумінні, ніж агент 1). Нехай $u_1(x)$ та $u_2(x)$ - функції корисності цих агентів. У загальному випадку не можна порівняти корисності агентів, що відповідають одному й тому самому рівню їхнього добробуту x , оскільки u_1, u_2 визначено з точністю до еквівалентності (афінного перетворення їхніх значень). Однак, якщо припустити, що $u_1(x)$ та $u_2(x)$ стандартизовано у тій самій гомії ξ , тобто $u_i(\xi) = 0$, $u'_i(\xi) = 1$, $i = 1, 2$, то з (4.89) випливає, що

$$u_1(x) \geq u_2(x) \text{ для всіх } x \quad (4.91)$$

(тобто рівень добробуту x для агента 1 не менш корисний, ніж для агента 2).

Розглянемо питання введення порядку переваги, коли доходи агентів є випадковими. Якщо Γ_1 і Γ_2 - два випадкових доходи для агента, який вибирає один із них, маючи рівень добробуту (багатства) w , то вважатимемо, що він віддаватиме строгу перевагу Γ_1 перед Γ_2 , $\Gamma_1 > \Gamma_2$, коли

$$E[u(w + \Gamma_1)] > E[u(w + \Gamma_2)], \quad (4.92)$$

тобто коли сподівана корисність Γ_1 більша від сподіваної корисності Γ_2 . Якщо сподівані корисності однакові, то Γ_1 і Γ_2 байдужі для агента, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$. Це дає повне відношення переваги \succeq на множині випадкових доходів.

При афінному перетворенні корисності u вигляду (4.86) нерівність (4.92) зберігатиметься для перетвореної корисності \tilde{u} , так що $u(x)$ та $\tilde{u}(x)$ визначатимуть саме відношення переваги між випадковими доходами.

Приклад 4.9. Нехай агент має експоненціальну функцію корисності з параметром a і вибирає один із двох випадкових доходів Γ_1 та Γ_2 , що є нормально розподіленими зі середніми $E\Gamma_i = \alpha_i$ і дисперсіями $D\Gamma_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$.

Оскільки $E(e^{-a\Gamma_i}) = \exp(-a\alpha_i + \frac{1}{2}a^2\sigma_i^2)$, маємо $E[u(w + \Gamma_i)] = \frac{1}{a} \left(1 - \exp \times \left(1 - \exp(-aw - a\alpha_i + \frac{1}{2}a^2\sigma_i^2) \right) \right)$. Отже, $\Gamma_1 > \Gamma_2$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 - \frac{1}{2}a\sigma_1^2 > \alpha_2 - \frac{1}{2}a\sigma_2^2$.

Згідно з нерівністю Ієнсен, для будь-якої випадкової величини Γ виконується співвідношення

$$u(w + E\Gamma) > E[u(w + \Gamma)] \quad (4.93)$$

Отже, якщо агент вибиратиме між випадковим доходом Γ і сталим доходом, що є середнім значенням Γ ($E\Gamma$), то він віддаватиме перевагу останньому. Еквівалент визначеності ζ , пов'язаний з Γ , визначається тією умовою, що агент байдужий до вибору між Γ та фіксованим доходом ζ , тобто $u(w + \zeta) = E[u(w + \Gamma)]$. З (4.93) випливає, що $\zeta < E\Gamma$.

Приклад 4.10. Для експоненціальної функції корисності еквівалент визначеності не залежить від w і визначається виразом

$$\zeta = -\frac{1}{a} \ln E[\exp(-a\Gamma)] \quad (4.94)$$

Розкладаючи вираз праворуч за степенями a , отримуємо таку просту апроксимацію:

$$\zeta = E\Gamma - \frac{a}{2} D\Gamma. \quad (4.95)$$

Приклад 4.11. Для квадратичної функції корисності пошук ζ зводиться до розв'язання квадратного рівняння із розв'язком

$$\zeta = E\Gamma - (s - w - E\Gamma) \left[\left(1 + D\Gamma(s - w - E\Gamma)^{-2} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (4.96)$$

Застосувавши розклад Тейлора до квадратного кореня праворуч при величинах s , матимемо наближення

$$\zeta = E\Gamma - \frac{1}{2} D\Gamma(s - w - E\Gamma)^{-1}. \quad (4.97)$$

Згідно з (4.82) можна подати (4.97) у вигляді

$$\zeta = E\Gamma - \frac{1}{2} r(w + E\Gamma) D\Gamma, \quad (4.98)$$

що нагадує наближення (4.95).

Для загальної функції корисності виконується рівність

$$\zeta = u^{-1}(E[u(w + \Gamma)]) - w. \quad (4.99)$$

Щодо доходів Γ з «малим» ризиком це дає наближення

$$\zeta \approx E\Gamma - \frac{1}{2} r(w + E\Gamma) D\Gamma. \quad (4.100)$$

Зауважимо також, що коли для двох функцій корисності $u_1(x)$ та $u_2(x)$ виконується нерівність $r_1(x) \leq r_2(x)$ для всіх x , то для еквівалентів визначеності ζ_1 і ζ_2 , які відповідають цим корисностям, матимемо

$$\zeta_1 \geq \zeta_2. \quad (4.101)$$

Розглянемо визначення страхової премії при страхуванні ризику у випадку компанії з початковим капіталом w . Нехай компанія страхує ризик і повинна сплатити загальний страховий позов S (випадкову величину) наприкінці певного періоду. Якою має бути страхова премія P для подібного страхового контракту?

Відповідь можна отримати, використовуючи функцію корисності $u(x)$ та виходячи з умови справедливості рівня премії в термінах корисності.

Це означає, що сподівана корисність капіталу при виконанні контракту має дорівнювати корисності без контракту:

$$E[u(w + P - S)] = u(w). \quad (4.102)$$

Така умова називається **принципом еквівалентності корисності**.

Рівняння (4.102) визначає P єдиним способом, але взагалі його точного розв'язку не існує. Виятком є, наприклад, випадки експоненціальної функції корисності, коли

$$P = \frac{1}{a} \ln E \exp(aS), \quad (4.103)$$

та квадратичної функції корисності, для якої

$$P = ES + (s - w) \left\{ 1 - \left(1 - D(S)(s - w)^{-2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.104)$$

У випадку, коли S відповідає «малому» ризику, рівняння (4.102) має наближений розв'язок

$$P \approx ES + \frac{1}{2} r(w) DS \quad (4.105)$$

(щоб показати це, потрібно зобразити S у вигляді $\mu + zV$, $\mu = \text{const}$, $EV = 0$ і розкласти $P = P(z)$ за степенями z). Здебільшого реалістичнішим припущенням є те, що капітал без нового контракту сам по собі є випадковою величиною W . Тоді P можна знайти з рівняння

$$Eu(W + P - S) = Eu(W). \quad (4.106)$$

P залежатиме від спільного розподілу величин S та W .

Приклад 4.12. Якщо $u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$, то

$$P = \frac{1}{a} \ln \frac{E[e^{-a(S-W)}]}{E[e^{-aW}]}. \quad (4.107)$$

При малому a розкладом цього виразу праворуч за степенями a можна отримати таке наближення страхової премії:

$$P \approx ES + \frac{a}{2} D(S - W) - \frac{a}{2} D(W) = ES + \frac{a}{2} D(W) - a \text{Cov}(S, W). \quad (4.108)$$

Зауважимо, що (4.107) зводиться до (4.103) у випадку, коли S та W є незалежними випадковими величинами. Зазначимо також, що наближення (4.108) стає точним для випадку сумісного нормального розподілу S та W .

Приклад 4.13. Якщо $u(x) = x - \frac{x^2}{2\kappa}$, то

$$P = ES + (s - EW) \left\{ 1 - \left[1 - (DS - 2\text{Cov}(S, W))(s - EW)^{-2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.109)$$

Цей вираз зводиться до (4.104) при заміні w на EW у випадку, коли S і W є некорельованими випадковими величинами. Для великих значень s , виходячи з вира-

зу (4.109), можна дістати таке наближення:

$$P \approx ES - \frac{1}{2} \frac{DS - 2\text{Cov}(S, W)}{s - EW} = ES + \frac{1}{2} r(EW)(DS - 2\text{Cov}(S, W)). \quad (4.110)$$

Розглянемо питання **оптимальності страхового контракту із припиненням утрат**. Нехай є страхова компанія, яка повинна сплачувати випадкову суму S власникам полісів наприкінці року. Порівняємо два типи страхових угод.

1) контракт із припиненням утрат на рівні d , коли перестраховик сплачуватиме наприкінці року суму

$$(S - d)_+ = \begin{cases} S - d, & \text{якщо } S > d; \\ 0, & \text{якщо } S \leq d; \end{cases} \quad (4.111)$$

2) загальний контракт перестрахування задається функцією $h(x)$, так що перестраховик виплачує суму $h(S)$ наприкінці року. Єдине обмеження, яке накладається на функцію h , полягає в тому, що $0 < h(x) \leq x$.

Припустимо, що обидва контракти є порівнянними в тому розумінні, що сподівані виплати перестраховика — однакові, тобто

$$E(S - d)_+ = Eh(S). \quad (4.112)$$

Вважатимемо також, що обидві премії за перестрахування однакові. Тоді в термінах корисності контракт із припиненням утрат є більш переважним:

$$E[u(w - S + h(S))] \leq E[u(w - S + (S - d)_+)], \quad (4.113)$$

де w — капітал після одержання премій за перестрахування.

Для доведення (4.113) зауважимо спочатку, що угнута крива лежить під своєю дотичною, тобто $u(y) \leq u(x) + u'(x)(y - x)$ для всіх x і y .

Використовуючи це для $y = w - S + h(S)$ та $x = w - S + (S - d)_+$, маємо

$$\begin{aligned} u(w - S + h(S)) &\leq u(w - S + (S - d)_+) + \\ &+ u'(w - S + (S - d)_+)(h(S) - (S - d)_+) \leq \\ &\leq u(w - S + (S - d)_+) + u'(w - d)(h(S) - (S - d)_+). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Щоб перевірити другу нерівність, розглянемо випадок $S > d$, коли виконується рівність, і випадок $S \leq d$, коли

$$\begin{aligned} u'(w - S + (S - d)_+)(h(S) - (S - d)_+) &= u'(w - S)h(S) \leq \\ &\leq u'(w - d)h(S) = u'(w - d)(h(S) - (S - d)_+). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Узявши математичне сподівання в (4.115) і використавши (4.112), дістанемо (4.113).

4.9. ОПТИМАЛЬНІ СТУПІНЬ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ ТА ОБМІН РИЗИКАМИ

Розглянемо знову компанію, яка повинна сплатити випадкову загальну суму S наприкінці року. У цій ситуації може бути куплене пропорційне покриття перестрахування. Якщо P — премія перестрахування для повного покриття (звичайно, $P > ES$), то припускаємо, що при премії сумою ϕP ($0 < \phi \leq 1$) забезпечується частина ϕS зобов'язань. Тоді оптимальне значення ϕ величини ϕ має максимізувати вираз

$$E[u(\omega - \phi P - (1 - \phi)S)], \quad (4.116)$$

де $u(x)$ — відповідна функція корисності, а початковий надлишок ω включає отримані премії.

В окремому випадку експоненціальної функції корисності з параметрами a та S , розподіленої за нормальним законом із середнім μ і дисперсією σ^2 , можливий точний розрахунок ϕ . При цьому сподівана корисність має вигляд

$$a^{-1} [1 - E \exp(-a\omega + a\phi P + a(1 - \phi)S)] = \\ = a^{-1} \left[1 - \exp\left(-a\omega + a\phi P + a(1 - \phi)\mu + \frac{1}{2} a^2 (1 - \phi)^2 \sigma^2\right) \right].$$

Відповідний максимум її досягається при

$$1 - \phi = (P - \mu)(a\sigma^2)^{-1}, \quad (4.117)$$

тобто оптимальна частина премії, що утримується, пропорційна частці повного покриття у перестраховій премії та обернено пропорційна несхильності компанії до ризику і дисперсії позиву. Зауважимо, що в теорії фінансового ризику формула, подібна до (4.17), відома як відношення Мертона¹, встановлене для показникової функції корисності та логнормально розподіленої суми S .

Розглянемо n компаній (або економічних агентів). Припустимо, що компанія i має наприкінці року капітал W_i та приймає рішення, ґрунтуючись на функції корисності $u_i(x)$. Тут W_1, \dots, W_n випадкові величини з відомим сумісним розподілом. Позначимо через $W = W_1 + \dots + W_n$ загальний капітал компаній. Процес обміну ризиком веде до перерозподілу загального капіталу, внаслідок чого компанія i матиме капітал X_i , де X_1, \dots, X_n — такі випадкові величини, що

$$W = X_1 + \dots + X_n, \quad (4.118)$$

тобто загальний капітал залишається таким самим. Сподівана корисність подібного обміну для компанії i визначається величиною $Eu_i(X_i)$.

¹Мертон Роберт — лауреат Нобелівської премії з економіки 1997 р., присудженої за методи розрахунку дохідності похідних цінних паперів.

Обмін ризиками $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ називається Парето-оптимальним, якщо неможливо поліпшити ситуацію для однієї компанії без утрат для іншої. Іншими словами, не існує такого обміну (X_1, \dots, X_n) , що $Eu_i(X_i) \geq Eu_i(\bar{X}_i)$, $i = 1, \dots, n$, де хоча б одна із нерівностей була строгою. Якщо компанії погоджуються на кооперативні дії, то вони мають вибирати обмін ризиками, який є Парето-оптимальним.

Одним із основних результатів сучасної теорії ризику є така характеристика Парето-оптимальних обмінів ризиками.

Парето-оптимальні обміни ризиками утворюють сім'ю, що залежить від $n - 1$ параметрів. Вони можуть бути знайдені методом максимізації виразу

$$\sum_{i=1}^n k_i Eu_i(X_i) \quad (4.119)$$

з $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$, де максимум береться по всіх обмінах ризиками (X_1, \dots, X_n) . Розв'язок останньої проблеми визначає таке твердження.

Теорема 4.11 (теорема Борха). Обмін ризиками $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ максимізує (4.119) тоді і тільки тоді, коли випадкові величини $k_i u'(\bar{X}_i)$ є ідентичними для $i = 1, 2, \dots, n$.

▽ Припустимо, що $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ максимізує (4.119). Нехай $j \neq h$ і V — довільна випадкова величина. Визначимо величини X_i виразами $X_i = \bar{X}_i$ для $i \neq j, h$, $X_j = \bar{X}_j + tV$, $X_h = \bar{X}_h - tV$, де t є параметром. Позначимо

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i Eu_i(X_i). \quad (4.120)$$

Відповідно до припущень функція (4.120) має максимум при $t = 0$. Отже, $f'(t) = 0$ при $t = 0$, або

$$k_j E[V u'_j(\bar{X}_j)] - k_h E[V u'_h(\bar{X}_h)] = 0.$$

Подамо це рівняння у вигляді

$$E[V \{k_j u'_j(\bar{X}_j) - k_h u'_h(\bar{X}_h)\}] = 0.$$

Оскільки це рівняння виконується для довільної величини V , доходимо висновку, що з імовірністю 1

$$k_j u'_j(\bar{X}_j) - k_h u'_h(\bar{X}_h) = 0.$$

Це означає, що з точністю до еквівалентності випадкових величин (які отожднюємо) $k_i u'_i(\bar{X}_i)$ незалежні від i .

Навпаки, нехай (X_1, \dots, X_n) — такий обмін ризиками, що

$$k_i u'_i(\bar{X}_i) = \Lambda \quad (4.121)$$

є тією самою випадковою величиною для всіх i . Нехай (X_1, \dots, X_n) — інший обмін ризиками. З угнутої функції u_i випливає, що $u_i(X_i) \leq$

$\leq u_i(\bar{X}_i) + u'_i(\bar{X}_i)(X_i - \bar{X}_i)$. Якщо помножити цю нерівність на k_i і взяти суму по i , використовуючи (4.121), то матимемо

$$\sum_{i=1}^n k_i u_i(X_i) \leq \sum_{i=1}^n k_i u_i(\bar{X}_i) + \Lambda \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i) = \sum_{i=1}^n k_i u_i(\bar{X}_i).$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^n k_i E u_i(X_i) \leq \sum_{i=1}^n k_i E u_i(\bar{X}_i),$$

тобто вираз (4.119) справді досягає максимуму для $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$. Δ

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 4.14. Припустимо, що дві компанії використовують експоненціальну функцію корисності

$$u_j(x) = a_j^{-1} (1 - e^{-a_j x}), \quad j = 1, \dots, n$$

Тоді з умови (4.121) випливає, що $k_j e^{-a_j \bar{X}_j} = \Lambda$ або

$$X_j = -\frac{\ln \Lambda}{a_j} + \frac{\ln k_j}{a_j}. \quad (4.122)$$

Підсумовуючи ці вирази по всіх j , отримуємо рівняння, що визначає Λ :

$$W = -\sum_{j=1}^n a_j^{-1} \ln \Lambda + \sum_{j=1}^n a_j^{-1} \ln k_j. \quad (4.123)$$

Нехай $a^{-1} = a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}$. Тоді з (4.123)

$$-\ln \Lambda = aW - a \sum_{j=1}^n a_j^{-1} \ln k_j.$$

Підставляючи це в (4.122), маємо

$$\bar{X}_j = \frac{a}{a_j} W + \frac{\ln k_j}{a_j} - \frac{a}{a_j} \sum_{j=1}^n \frac{\ln k_j}{a_j} = \frac{aW}{a_j} + d_j$$

для $j = 1, \dots, n$.

Отже, компанія j отримує квоту $q_j = aa_j^{-1}$ загального капіталу W плюс плату d_j (яка може бути й негативною). Легко переконатися в тому, що

$$q_1 + \dots + q_n = 1; \quad d_1 + \dots + d_n = 0. \quad (4.124)$$

Зауважимо, що квота q_j обернено пропорційна нехильності до ризику i й однакова для всіх Парето-оптимальних обмінів ризиком.

Приклад 4.15. Нехай усі компанії використовують степеневі функції корисності першого роду

$$u_j(x) = \frac{s_j^{c+1}}{(c+1)s_j^c} (s_j - x)^{c+1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.125)$$

де s_j — рівень насичення компанії j .

Із (4.121) маємо

$$k_j \left(1 - \frac{x_j}{s_j}\right)^c = \Lambda \quad \text{або} \quad \bar{X}_j = \frac{s_j}{k_j^{1/c}} \Lambda^{1/c} + s_j. \quad (4.126)$$

Підсумовуючи останню рівність по j , отримуємо рівняння для визначення Λ :

$$W = -\sum_{j=1}^n s_j k_j^{-1/c} \Lambda^{1/c} + \sum_{j=1}^n s_j.$$

Звідки

$$\Lambda^{1/c} = (s - W) \left(\sum_{j=1}^n s_j k_j^{-1/c} \right)^{-1}, \quad s = \sum_{j=1}^n s_j. \quad (4.127)$$

Підставляючи ці рівняння в (4.126), маємо

$$\bar{X}_j = s_j k_j^{1/c} \left(\sum_{j=1}^n s_j k_j^{-1/c} \right) W + s_j - s_j k_j^{1/c} \left(\sum_{j=1}^n s_j k_j^{-1/c} \right) s = q_j W + d_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.128)$$

причому тут квота q_j та додатковий платіж d_j пов'язані між собою рівністю $d_j = s_j - q_j s$.

Із (4.128) випливає, що вираз $s_j - \bar{X}_j (= q_j(s - W))$ є тією кількістю капіталу, якої не вистачає для максимального задоволення та яка є фіксованою часткою $s - W$ (загальної кількості капіталу, якого не вистачає для всіх компаній).

Приклад 4.16. Нехай є n інвесторів з ідентичними степеневими функціями корисності другого роду

$$u_j(x) = \frac{1-c}{1-c} x^{1-c}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Із (4.121) маємо

$$k_j \bar{X}_j^{-c} = \Lambda, \quad \text{або} \quad \bar{X}_j = k_j^{1/c} \Lambda^{-1/c}. \quad (4.129)$$

Підсумовувавши останню рівність по j отримуємо

$$\Lambda^{-1/c} = W \left(\sum_{j=1}^n k_j^{1/c} \right)^{-1} \quad (4.130)$$

Підставивши (4.130) у (4.129), матимемо

$$\bar{X}_j = q_j W = \left(k_j^{1/c} \right) \left(\sum_{j=1}^n s_j k_j^{1/c} \right)^{-1} W, \quad (4.131)$$

тобто кожний інвестор отримує фіксовану квоту q_j загального капіталу W , а додаткові платежі тут є нульовими.

Приклад 4.17. Нехай $n = 2$ та $u_1(x) = x$, $u_2(x) = u(x)$, де $u''(x) < 0$. Тоді умова (4.121) означає, що $k_1 = k_2 u'(\bar{X}_2)$, тобто $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ стала, скажімо, дорівнює d . Отже, $X_1 = W - d$.

Результат цілком зрозумілий: компанія 1 є схильною до ризику і бере його на себе.

Приклад 4.18. Нехай $n = 2$ та $u_1(x)$, $u_2(x)$ є степеневими функціями корисності другого роду з параметрами $c_1 = 1$ і $c_2 = 2$, тобто $u_1(x) = \ln x$, $u_2(x) = 1 - 1/x^2$, $x > 0$.

Із умови (4.121) маємо $k_1^{-1} \bar{X}_1 = k_2^{-2} (\bar{X}_2)^2$. Звідси та з рівності $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = W$ випливає, що

$$\bar{X}_1 = W - \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 4aW} - a \right), \quad \bar{X}_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + 4aW} - a \right),$$

де $a = k_2/k_1$. Тут \bar{X}_j є нелинійними функціями W .

Приклад 4.14 допомагає зрозуміти структуру Парето-оптимального обміну ризиками в загальному випадку. Нехай $u_1(x), \dots, u_n(x)$ — довільні функції корисності, а $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ — Парето-оптимальний обмін ризиком, що максимізує вираз (4.119) при заданому $W = w$. Тоді $\bar{X}_i = \bar{X}_i(w)$ є функцією загального капіталу w .

Для $j \neq h$, згідно з теоремою Борха,

$$k_j u'_j(\bar{X}_j(w)) = k_h u'_h(\bar{X}_h(w)). \quad (4.132)$$

Диференціюванням (4.132) по w отримуємо рівність

$$k_j u''_j(\bar{X}_j(w)) \frac{d\bar{X}_j}{dw} = k_h u''_h(\bar{X}_h(w)) \frac{d\bar{X}_h}{dw}. \quad (4.133)$$

Відношення рівностей (4.132) та (4.133) дає рівність

$$r_j(\bar{X}_j(w)) \frac{d\bar{X}_j}{dw} = r_h(\bar{X}_h(w)) \frac{d\bar{X}_h}{dw}.$$

Звідси з очевидної рівності $d\bar{X}_1 + \dots + d\bar{X}_n = dw$ знаходимо

$$d\bar{X}_j = \frac{[r_j(\bar{X}_j)]^{-1}}{\sum_{h=1}^n [r_h(\bar{X}_h)]^{-1}} dw, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.134)$$

Таким чином, можна отримати сім'ю Парето-оптимальних обмінів ризиком. Для частинного значення w , скажімо w_0 , вибираються значення $\bar{X}_1(w_0), \dots, \bar{X}_n(w_0)$. Тоді $\bar{X}_1(w), \dots, \bar{X}_n(w)$ визначаються як розв'язок системи рівнянь (4.134) з граничною умовою в точці $w = w_0$.

Для ілюстрації застосування (4.134) повернемося до прикладів 4.15 і 4.16, припускаючи для зручності розгляду, що $[r_j(x)]^{-1} = \alpha x + \beta_j$, $j = 1, \dots, n$. Перевіримо, що

$$\bar{X}_j = q_j W + d_j, \text{ або } d\bar{X}_j = q_j dw \quad (4.135)$$

для множини квот q_1, \dots, q_n та додаткових платежів d_1, \dots, d_n .

Із (4.134) у наших припущеннях маємо

$$d\bar{X}_j = \frac{\alpha \bar{X}_j + \beta_j}{\sum_{h=1}^n (\alpha \bar{X}_h + \beta_h)} dw = \frac{\alpha \bar{X}_j + \beta_j}{\alpha W + \beta} dw,$$

де $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_n$.

Отже, з (4.135) випливає, що

$$d\bar{X}_j = \frac{\alpha q_j W + \alpha d_j + \beta_j}{\alpha W + \beta} dw.$$

Щоб показати, що останнє відношення дорівнює q_j , розглянемо два випадки:

1) якщо $\beta \neq 0$, то досить прийняти

$$q_j = \frac{\alpha d_j + \beta_j}{\beta}, \quad j = 1, \dots, n;$$

2) якщо $\beta = 0$, то q_1, \dots, q_n — довільні квоти, а додаткові платежі $d_j = -\beta_j / \alpha$, $j = 1, \dots, n$.

За теоремою Борха, Парето-оптимальний обмін ризиком $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ характеризується існуванням випадкової величини Λ , для якої $\Lambda = k_i u'_i(\bar{X}_i)$ при $i = 1, \dots, n$. Оскільки $\bar{X}_i = \bar{X}_i(w)$ є функцією загального капіталу w , то функція $\Lambda = \Lambda(w)$ також є функцією w . Звідси, диференціюючи рівність для Λ по w , маємо $\Lambda' = k_i u''_i(\bar{X}_i) \bar{X}'_i$, так що

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{1}{\sum_{h=1}^n [r_h(\bar{X}_h)]^{-1}}.$$

З останньої рівності випливає, що Λ є спадною функцією загального капіталу w .

Припустимо, що розподіл загального капіталу W вигляду (W_1, \dots, W_n) серед n компаній є Парето-оптимальним. Тоді постає запитання: скільки вигоди компанія може мати від кооперації?

Для відповіді на це запитання скористаємося поняттям **потенціал синергії** η (synergy potential). Це найбільше значення x , яке можна вилучити із системи без шкоди для компаній, тобто таке x , що існує обмін ризиком (X_1, \dots, X_n) , для якого $X_1 + X_2 + \dots + X_n = W - x$ та

$$Eu_i(X_i) \geq Eu_i(W_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.136)$$

Зрозуміло, що при $x = \eta$ (4.136) стає рівністю, так що $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ має бути Парето-оптимальним обміном ризиком для $W - \eta$.

Приклад 4.19. Цей приклад є продовженням прикладу 4.14, в якому всі компанії використовували експоненціальну функцію. Оскільки $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$ є Парето-оптимальним обміном ризиком для $W - \eta$, маємо $\bar{X}_j = \frac{a}{a_j} (W - \eta) + d_j$, $j = 1, \dots, n$.

Використавши умову $Eu_j(\bar{X}_j) = Eu_j(W_j)$, отримуємо

$$(E \exp(-aW)) \exp(a\eta - a_j d_j) = E \exp(-a_j W_j) \text{ або}$$

$$\frac{a}{a_j} \eta - d_j = \frac{1}{a_j} \ln E \left(e^{-a_j W_j} \right) - \frac{1}{a_j} \ln E \left(e^{-aW} \right).$$

Підсумовуючи останню рівність по j , записуємо вираз потенціалу синергії

$$\eta = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \ln E \left(e^{-a_j W_j} \right) - \frac{1}{a} \ln E \left(e^{-aW} \right) = \ln \left[\left(\prod_{j=1}^n E \left(e^{-a_j W_j} \right) \right)^{1/a} \left(E \left(e^{-aW} \right) \right)^{-1/a} \right].$$

Парето-оптимальний обмін ризиком можна описати за допомогою ринку випадкових платежів Y із ціною платежу $H(Y) = E(\Psi Y)$, де Ψ — деяка додатна випадкова величина, та умов рівноваги цього ринку.

Припускаючи, що $H(Y)$ — ціна наприкінці року, встановлюємо, що ціна сталого платежу є цією самою сталою, і тому $E\Psi = 1$. Тоді $H(Y) = EY + E\Psi Y - (E\Psi)(EY) = EY + \text{cov}(Y, \Psi)$, тобто ціна платежу є його сподіванням із поправкою на ринкові умови у вигляді коваріації Y та Ψ .

Альтернативно можна інтерпретувати ціну платежу $H(Y)$ як сподівання щодо модифікованої ймовірнісної міри Q (замість первинної міри), що визначається співвідношенням $E_Q(Y) = E\Psi Y$ для всіх Y , тобто Ψ є похідною Радона-Нікодіма міри Q за первісною ймовірнісною мірою. Таким чином, Ψ можна інтерпретувати як **деяку цінову щільність**.

Компанія j прагне купити такий платіж Y_j , щоб максимізувати сподівану користність від нього

$$E[u_j(W_j + Y_j - H(Y_j))] \rightarrow \max.$$

Платіж \bar{Y}_j є оптимальним тоді і тільки тоді, коли він задовольняє умову

$$u'_j(W_j + \bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j)) = \Psi E[u'_j(W_j + \bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j))]. \quad (4.137)$$

Платіж \bar{Y}_j є єдиним з точністю до адитивної сталої і, тому $Y_j - H(Y_j)$ визначається однозначно й інтерпретується як оптимальний платіж за нульовою ціною (**нетто-попит** компанії j).

Для заданої Ψ випадкова величина

$$\sum_{j=1}^n (\bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j)) \quad (4.138)$$

є надмірним попитом співтовариства компанії.

Цінова щільність Ψ та платежі $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ утворюють **ринкову рівновагу**, якщо (4.138) дорівнює нулю і рівняння (4.137) виконуються для всіх $j = 1, \dots, n$.

Така рівновага визначає обмін ризиком $(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$, для якого

$$\bar{X}_j = W_j + \bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Умова (4.137) означає, що

$$u'_j(\bar{X}_j) = \Psi E[u'_j(\bar{X}_j)], \quad j = 1, \dots, n.$$

Із цього факту та теореми Борха випливає, що подібний обмін ризиком є Парето-оптимальним, а рівність (4.121) виконується з $\Lambda = \Psi$. Зокрема, це означає, що Ψ є спадною функцією загального капіталу.

Зворотне твердження буде справедливим у такому розумінні. Припустимо, що (W_1, \dots, W_n) уже є Парето-оптимальним обміном; тоді W_1, \dots, W_n

і Ψ утворюють рівновагу, якщо прийняти $\Psi = u'_j(W_j) [Eu'_j(W_j)]^{-1}$. Більше

того, $Y_j - H(Y_j) = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Це випливає з (4.121) (із заміною \bar{X}_j на W_j) та (4.137).

Приклад 4.20. Цей приклад є продовженням прикладу 4.14. Якщо всі компанії використовують експоненціальну функцію користності, то з (4.137) випливає, що

$$\bar{Y}_j = -W_j - \frac{1}{a_j} \ln \Psi + g_j,$$

де g_j — деяка стала.

Отже, нетто-попит компанії j визначається як

$$\bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j) = -W_j - \frac{1}{a_j} \ln \Psi + E\Psi W_j + \frac{1}{a_j} E(\Psi \ln \Psi).$$

У стані ринкової рівноваги сума нетто-попитів є нульовою. Отже,

$$0 = -W - \frac{1}{a} \ln \Psi + g,$$

де g — стала.

Оскільки $E\Psi = 1$, рівноважна цінова щільність

$$\Psi = e^{-aW} (Ee^{-aW})^{-1}.$$

Звідси у стані рівноваги

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= W_j + \bar{Y}_j - H(\bar{Y}_j) = \frac{a}{a_j} W + E\Psi W_j - \\ &- \frac{a}{a_j} E\Psi W = \frac{a}{a_j} W + H(W_j) - \frac{a}{a_j} H(W). \end{aligned}$$

4.10. РИНОК БАНКІВСЬКО-КРЕДИТНИХ ПОСЛУГ

Ринок банківсько-кредитних послуг — це ринок, де основними товарами є гроші, банківські кредити та цінні папери (наприклад, векселі, облігації тощо). Банківсько-кредитні установи виступають посередниками між різними економічними агентами і надають їм фінансові послуги. Відповідні послуги виступають у формі різних фінансових операцій або угод, що потребують кількісних моделей для прийняття відповідних рішень.

Ці моделі є динамічними (тобто залежними від часу), оскільки вартості фінансових активів залежать від часу та змінюються з часом. При цьому розрізняють моделі з **дискретним часом** (коли стан фінансової операції змінюється в окремі дискретні моменти часу) і з **неперервним часом** (коли стан змінюється неперервно з плином часу), а також моделі з **прямим** (коли час змінюється від минулого через сучасне до майбутнього) та із **зворотним часом** (час змінюється від майбутнього моменту через сучасність до минулого моменту).

Розглянемо найпростіші моделі фінансових операцій або угод, коли загальний стан фінансового агента в момент часу t характеризується одним числом — загальною сумою його фінансових активів (у грошовому виразі) $S(t)$. Операція описується часовими параметрами: t_0 — моментом її початку, її терміном або періодом T ; моментом закінчення $t_1 = t_0 + T$.

Абсолютний результат операції дає приріст суми активів $S(t_1) - S(t_0) = I(t_0, T, S(t_0))$, який називається **інтересом**, або **відсотком**, відповідно до фінансового агента щодо операції (interest, return). Інтерес I є платою за відповідну фінансову послугу і водночас певною компенсацією за можливий ризик, пов'язаний з операцією.

Одним із найпоширеніших типів операцій є надання **кредиту** або **позики**. Тоді інтерес є платою за використання грошових коштів однієї особи (фізичної чи юридичної), яка називається **кредитором**, іншою особою (позичальником, чи **дебітором**), а також усередненою премією за можливий ризик не повернення грошей по множині подібних позик.

Показниками ефективності операції в моделях прямого часу є **ставка відсотка** (interest rate)

$$r(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0)},$$

а в моделях зворотного часу – **відносна знижка**, або **дисконт** (discount rate)

$$d(t_0, T) = \frac{S(t_0 + T) - S(t_0)}{S(t_0 + T)} = \frac{I(t_0, T, S(t_0))}{S(t_0 + T)}.$$

Між уведеними величинами **початкової суми** $S(t_0)$ (initial value), **наращеної суми** $S(t_0 + T)$ (accumulated value), ставками відсотка та дисконту $r(t_0, T)$ і $d(t_0, T)$ існують такі співвідношення:

$$r(t_0, T) = \frac{d(t_0, T)}{1 - d(t_0, T)}, \quad d(t_0, T) = \frac{r(t_0, T)}{1 + r(t_0, T)};$$

$$S(t_0 + T) = S(t_0) [1 + r(t_0, T)];$$

$$S(t_0) = S(t_0 + T) [1 - d(t_0, T)].$$

Перевірка цих співвідношень пропонується читачеві як вправа.

Здебільшого зручними для використання є ще два показники: **дисконт-фактор** (discount factor)

$$v(t_0, T) = 1 - d(t_0, T) = \frac{1}{1 + r(t_0, T)} = \frac{S(t_0)}{S(t_0 + T)}$$

та **коефіцієнт нарощення** (accumulation ratio)

$$a(t_0, T) = 1 + r(t_0, T) = \frac{1}{1 - d(t_0, T)} = \frac{S(t_0 + T)}{S(t_0)}.$$

Зауважимо, що в наведених вище формулах r і d є десятковими дробами, але у фінансовій практиці їх досить часто виражають у відсотках. Крім того, відсоток, або інтерес, у практиці банківсько-кредитних операцій

нараховують один раз за певну одиницю часу (інтервал часу), яку називають **базисною** (рік, квартал, місяць, день). Відповідний інтервал часу, чи період, називають періодом **капіталізації**, **конверсії** або **нарахування**.

Для нарахування відсотків (або інтересу) використовують схеми **простих відсотків** (simple interest) (для короткострокових операцій, що тривають не більше року), **складних відсотків** (compound interest) та різні їх комбінації.

Якщо прийняти момент t_0 за початок відліку часу ($t_0 = 0$), то $t_1 = T$, $S(t_0) = S(0)$, $S(t_0 + T) = S(T)$, $r(t_0, T) = r_T$, $d(t_0, T) = d_T$, і схема простих відповіває випадку лінійної залежності r_T і d_T від часу T :

$$r_T = rT; \quad d_T = dT,$$

де r – ставка відсотка за один період конверсії; d – облікова ставка за той самий період.

Тоді основні **формули нарощення** суми за простими відсотками мають вигляд

$$S(T) = S(0)[1 + rT]; \quad (4.139)$$

$$S(T) = S(0)[1 - dT]^{-1},$$

а **формули дисконтування** за простими відсотками, що визначають $S(0)$ за майбутньою вартістю (наращеною сумою) $S(T)$, – вигляд

$$S(0) = S(T)[1 + rT]^{-1} = S(T)v_T; \quad (4.140)$$

$$S(0) = S(T)[1 - dT] = S(T)a_T.$$

Зауважимо, що формули (4.139), (4.140) використовують не тільки в моделях із дискретним часом для цілого числа T періодів конверсії, а й у моделях з довільним T , тобто в моделях із неперервним часом.

Якщо ставка простих відсотків через інфляцію та інші обставини є змінною протягом інтервалу угоди $(t_0, t_0 + T)$, причому її зміни відбуваються у моменти часу τ_i :

$t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m-1} < t_0 + T$, а на підінтервалі (τ_{k-1}, τ_k) значення ставки є ρ_{k-1} , $k = 1, \dots, m$, де $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = t_0 + T$, то коефіцієнт нарощення на всьому інтервалі $(t_0, t_0 + T)$ визначається виразом

$$a(t_0, T) = \frac{S(\tau_m)}{S(\tau_0)} = 1 + \sum_{k=1}^m (\tau_k - \tau_{k-1}) \rho_{k-1}. \quad (4.141)$$

Нарощення простих відсотків на початкову суму $S(\tau_0) = S(t_0)$ на кожному підінтервалі (τ_{k-1}, τ_k) відбувається незалежно від нарощення на попередніх підінтервалах, а відповідний абсолютний приріст суми (індекс) $I(\tau_{k-1}, \tau_k, S(t_0))$ є функцією тільки τ_{k-1} , τ_k та $S(t_0)$, так що

$$I(t_0, T, S(t_0)) = \sum_{k=1}^m I(\tau_{k-1}, \tau_k, S(t_0)). \quad (4.142)$$

Поділивши обидві частини (4.142) на $S(t_0) = S(\tau_0)$, дістанемо

$$r(t_0, T) = \sum_{k=1}^m r(\tau_{k-1}, \tau_k) = \sum_{k=1}^m (\tau_k - \tau_{k-1}) \rho_{k-1},$$

де $r(\tau_{k-1}, \tau_k) = I(\tau_{k-1}, \tau_k, S(t_0)) [S(\tau_0)]^{-1}$ — відсоткова ставка на інтервалі (τ_{k-1}, τ_k) , що доводить (4.141).

Якщо в момент кожної зміни ставки відсотка парощена до цього моменту сума знову вкладається під новий простий відсоток (тобто відбувається реінвестування або капіталізація відсотків), то

$$S(t_0 + T) = S(\tau_m) = S(t_0) \prod_{k=1}^m (1 + (\tau_k - \tau_{k-1}) \rho_{k-1}).$$

Зокрема, коли $\tau_k - \tau_{k-1} \equiv 1$ для всіх k і $\rho_{k-1} \equiv r$ — стала величина, то парощена сума відповідає схемі складних відсотків за **складною ставкою відсотка r** , коли відсотки при кожному періоді конверсії нараховуються на парощену попередню суму (відсотки нараховуються на відсотки), а не на одну й ту саму початкову суму, як у схемі простих відсотків. При цьому

$$S(t_0 + T) = S(t_0) (1 + r)^T,$$

тобто при схемі складних відсотків ставка відсотка r_T за час T визначається так:

$$r_T = (1 + r)^T - 1,$$

де r — складна ставка відсотка за один період конверсії.

Така схема нарахування складних відсотків називається **декурсивною** (наступною) і відповідає методиці нарахування відсотка (інтересу) наприкінці кожного періоду конверсії.

Іншим варіантом схеми складних відсотків є **антисипативна** (попередня) схема, коли відсоток (інтерес) нараховується на початку кожного періоду конверсії. Кількісно вона відповідає використанню дисконту d_T , що має вигляд

$$d_T = 1 - (1 + r)^{-T},$$

де d — складна облікова ставка.

Тоді

$$S(0) = S(T) (1 + d)^T;$$

$$S(T) = S(0) (1 + d)^{-T}.$$

У практиці банківсько-кредитних розрахунків за базову одиницю часу найчастіше приймають один рік, але часто буває й так, що період конверсії становить $1/m$ частину року, тобто нарахування відсотків і дисконтування виконуються m разів на рік (особливо на великі суми). В такому разі річна ставка відсотків r або облікова ставка d є **номінальними**, а практичні розрахунки виконуються із застосуванням релятивних та еквівалентних ставок.

Релятивні ставки відсотків $r^{(m)}$ і релятивні облікові ставки $d^{(m)}$, що відповідають номінальним ставкам r та d , визначаються виразами

$$r^{(m)} = \frac{r}{m}; \quad d^{(m)} = \frac{d}{m},$$

так що парощені суми за T років при їх використанні мають вигляд

$$S(T) = S(0) \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT}; \quad (4.143)$$

$$S(T) = S(0) \left(1 - \frac{d}{m}\right)^{-mT}. \quad (4.144)$$

Використання релятивних ставок спрощує обчислення, але призводить до порушення **принципу еквівалентності фінансових угод**, за якими зміна умов фінансової операції не повинна змінювати результатів. Так, використання формул (4.143), (4.144) при $m \neq 1$ й $m = 1$ дає різні парощені суми за той самий час T , оскільки, як відомо з математичного аналізу, права частина цих формул як функція m є монотонно зростаючою посплідовністю від m , що при $m \rightarrow \infty$ прямує до границі

$$S(T) = S(0) e^{rT}$$

і відповідає неперервному нарахуванню відсотків в описаній схемі.

Щоб уникнути подібного ефекту використання релятивної ставки відсотків, замість неї використовують **еквівалентну, або зрівноважувальну, відсоткову ставку $r_e^{(m)}$** , що визначається умовою рівності відповідних коефіцієнтів парощення:

$$(1 + r)^T = \left(1 + r_e^{(m)}\right)^{mT},$$

звідси

$$r_e^{(m)} = \sqrt[m]{1 + r} - 1.$$

Ефективна річна ставка $r_{ef}^{(m)}$ для номінальної ставки r при нарахуванні відсотків m разів на рік визначається з умови рівності коефіцієнтів парощення за рік:

$$1 + \left(r_{ef}^{(m)}\right) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m, \quad (4.145)$$

тобто

$$r_{ef}^{(m)} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1.$$

Описані вище схеми простих і складних відсотків широко застосовуються для складання кількісних моделей різних фінансових операцій у банківсько-кредитній сфері, таких як визначення середнього терміну погашення позики, ломбардний та споживчий кредити, ведення розрахункових і поточних рахунків, дисконтування векселів тощо. Кількісні моделі фінансових операцій зі складнішою структурою будуть висвітлені в наступних розділах.

Спириємося на врахування впливу оподаткування та інфляції на нарощення відсотків.

Якщо отримані відсотки (інтерес) оподатковуються, то це призводить до зменшення нарощеної суми. Якщо позначити, як і раніше, нарощену суму до сплати податків (tax-free) через $S(T)$ за час T , а з урахуванням сплати — через $S^*(T)$, то при ставці податку на відсотки g у схемі простих відсотків матимемо

$$\begin{aligned} S^*(T) &= S(T) - (S(T) - S(0))g = \\ &= S(T)(1-g) + S(0)g = S(0)[1 + T(1-g)r]. \end{aligned}$$

тобто оподаткування призводить до скорочення реальної відсоткової ставки: замість r фактично діє ставка $(1-g)r$.

У довгострокових операціях при нарахуванні податку на складні відсотки можливі такі варіанти: податок нараховується відразу за весь термін (тобто на всю суму інтересу) або ж послідовно, наприкінці кожного періоду (наприклад, року). У першому випадку сума податку становить $S(0) \times [(1+r)^T - 1]g$, а нарощена сума після сплати податку

$$\begin{aligned} S^*(T) &= S(T) - (S(T) - S(0))g = S(T)(1-g) + S(0)g = \\ &= S(0)[(1-g)(1+r)^T + g]. \end{aligned}$$

У другому випадку податок G_t за період t задовольняє рекурентне відношення

$$G_t = I_t g = (S(t) - S(t-1))g = S(0)[(1+r)^t - (1+r)^{t-1}]g.$$

Темпи інфляції вимірюються за допомогою системи індексів інфляції, що характеризують середню зміну рівня цін для фіксованого набору (кошика) товарів та послуг за певний період часу. Якщо споживчий кошик складається з k благ, причому благо s входить до нього в кількості q_s відповідних одиниць, а ціна за відповідну одиницю в момент t становить $p_s(t)$ грошових одиниць, то вартість $P(t)$ кошика в момент t визначається як

$$P(t) = \sum_{s=1}^k p_s(t) q_s.$$

Індексом інфляції (або підвищення споживчих цін) за проміжок часу від τ_1 до τ_2 називається безрозмірна величина

$$H(\tau_1, \tau_2) = P(\tau_2) / [P(\tau_1)]^{-1}, \quad \tau_1 < \tau_2,$$

а темпом інфляції за цей проміжок часу — величина

$$h(\tau_1, \tau_2) = \frac{P(\tau_2) - P(\tau_1)}{P(\tau_1)} = H(\tau_1, \tau_2) - 1.$$

Зауважимо, що формально це подібне до визначення ставки відсотків. Розглянемо поведінку коефіцієнтів нарощення за змінними ставками відсотків. Насамперед зазначимо, що коефіцієнт нарощення $a(\tau_1, \tau_2) = S(\tau_2) / S(\tau_1)$ при $\tau_1 < \tau_2$ суми S за складними відсотками за проміжок часу (τ_1, τ_2) для трьох довільних моментів часу $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ задовольняє ланцюгове співвідношення

$$a(\tau_1, \tau_3) = a(\tau_1, \tau_2) a(\tau_2, \tau_3), \quad (4.146)$$

що безпосередньо випливає з означення коефіцієнта a .

Отже, враховуючи те, що $a(\tau_1, \tau_2) = (1+r)^{\tau_2 - \tau_1}$ при сталій ставці відсотка r на проміжку часу (τ_1, τ_2) і змінних відсоткових ставках r_1, r_2, \dots, r_k , що діють відповідно на проміжках часу $(\tau_0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{k-1}, \tau_k)$, де $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k$, коефіцієнт нарощення за весь термін часу (τ_0, τ_k) визначається як

$$a(\tau_0, \tau_k) = \prod_{s=1}^k (1+r_s)^{\tau_s - \tau_{s-1}}.$$

У разі довільних темпів інфляції (включаючи й змінні темпи) маємо таке ланцюгове правило: якщо моменти часу $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ — монотонні, то індекс інфляції $H(\tau_0, \tau_k)$ є добутком індексів інфляції $H(\tau_{s-1}, \tau_s) = 1 + h(\tau_{s-1}, \tau_s)$ на складових підінтервалах (τ_{s-1}, τ_s) , тобто $H(\tau_0, \tau_k) = \prod_{s=1}^k [1 + h(\tau_{s-1}, \tau_s)]$.

Звідси, зокрема при сталому темпі інфляції за одиницю часу h , індекс підвищення цін за час T визначається як

$$H_T = (1+h)^T.$$

Індекс купівельної спроможності грошей за проміжок часу (τ_1, τ_2)

$I_{nc}(\tau_1, \tau_2)$ пов'язаний з $H(\tau_1, \tau_2)$ відношенням $I_{nc}(\tau_1, \tau_2) = [H(\tau_1, \tau_2)]^{-1}$.

Реальна купівельна спроможність нарощеної суми грошей $S(T)$ за час T визначається як

$$S(T) = S(0) I_{nc}(0, T) = \frac{S(T)}{H_T}.$$

Отже, у випадку нарощення за простою ставкою відсотка r маємо

$$S(T) = S(0) \frac{1+rT}{(1+h)^T}$$

при сталому темпі інфляції h , а у випадку нарощення за складною ставкою r отримуємо

$$S(T) = S(0) \left[\frac{1+r}{1+h} \right]^T.$$

Досі, розглядаючи схему складних відсотків, ми вважали, що час є дискретним, тобто набуває цілочисельних значень, а за одиницю часу було

прийнято один період капіталізації (конверсії). Проте виведені за таких припущень формули можна застосовувати також у випадку неперервного часу для неперервного нарахування відсотків та неперервного дисконтування із належною інтерпретацією ставок, які там фігурують.

Так, формула нарощення при неперервному нарахуванні відсотків за ефективною неперервною ставкою r для довільного дійсного проміжку часу $T > 0$ набуває стандартного вигляду

$$S(t_0 + T) = S(t_0)(1 + r)^T = S(t_0)e^{T \ln(1+r)}. \quad (4.147)$$

При цьому величина $\ln(1 + r) = \delta$, що відображає номінальну неперервну ставку відсотків за базисну одиницю часу, називається **силою зростання** (force of interest). Дійсно, неперервному нарахуванню відсотків та довільному часу $T > 0$ відповідає граничний випадок розглянутої вище схеми нарахування відсотків m разів за одиницю часу при $m \rightarrow \infty$. Тоді, переходячи у формулі (4.145) до границі при $m \rightarrow \infty$ і позначаючи граничне значення $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{ef}^{(m)}$ ефективною ставкою через r (що є ефективною неперервною ставкою), а відповідну номінальну ставку за базисну одиницю часу через δ , можна записати

$$(1 + r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + r_{ef}^{(m)}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^m = e^{\delta}.$$

Це відповідає формулі (4.147). Очевидно, при цьому

$$\delta = \ln(1 + r); \quad 1 - d = v = e^{-\delta}.$$

Залежно від умов конкретної моделі з використанням неперервного нарахування відсотків (таку модель можна застосовувати при частому, наприклад щоденному, нарахуванні відсотків упродовж досить великого базисного періоду часу – кварталу, року) як вихідний можна прийняти один із чотирьох основних параметрів: δ , r , d , v (тут d – неперервна облікова ставка, а v – неперервний дисконт-фактор у номінальному значенні за одиницю часу) і виразити через нього значення інших трьох параметрів.

Наведемо порівняння коефіцієнтів нарощення за схемами простих і складних відсотків для різних періодів часу T . Дійсними є такі співвідношення:

$$1 + rT > (1 + r)^T \quad \text{при } 0 < T < 1;$$

$$1 + rT < (1 + r)^T \quad \text{при } T > 1,$$

а при $T = 1$ коефіцієнти нарощення збігаються і дорівнюють $1 + r$. Графічно це зображено на рис. 4.9, що пояснює помилковість схеми простих відсотків у короткострокових фінансових операціях для $T \leq 1$.

Розглянемо загальну модель неперервної зміни стану фінансової операції в часі. Нехай цей стан у довільний момент часу t є загальною сумою активів $S(t)$, причому $S(t)$ є неперервно диференційовною функцією

часу t . Динаміку операції характеризує швидкість зміни $S(t)$, тобто похідна dS/dt . Відношення dS/dt до поточного значення $S(t)$ називається загальною силою зростання, або інтересу, $\delta(t)$ в момент часу t :

$$\delta(t) = \frac{1}{S(t)} \frac{dS(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\ln S(t)].$$

Якщо змінна сила зростання $\delta(t)$ відома на проміжку часу $(t_0, t_0 + T)$, то нарощена за цей проміжок сума має вигляд

$$S(t_0 + T) = S(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) dt \right\}$$

при $t_0 = 0$ ставка інтересу

$$r_T = \exp \left\{ \int_0^T \delta(t) dt \right\} - 1.$$

При сталій силі зростання $\delta(t) = \delta = \text{const}$

$$a_T = 1 + r_T = e^{\delta T},$$

що збігається з наведеними вище результатами.

Звідси дисконт-фактор v_T за час T визначається як

$$v_T = \frac{S(0)}{S(T)} = \exp \left\{ - \int_0^T \delta(t) dt \right\}$$

і при сталому значенні $\delta(t)$ становить

$$v_T = e^{-\delta T},$$

так що за одиницю часу $v = e^{-\delta}$.

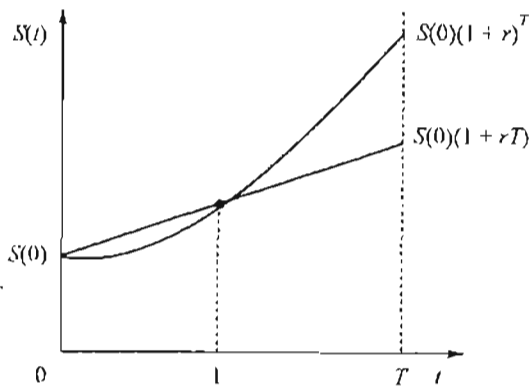


Рис. 4.9

4.11. ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ. РЕНТИ АБО АНУЇТЕТИ

Фінансові операції часто мають тривалий за часом характер і складаються не з разового платежу, а з деякої послідовності виплат, тобто є **потоком платежів** (cash flow), можливо, різних знаків, наприклад, є погашення позики частинами, орендна плата, інвестиції у виробництво тощо.

Нехай фінансова операція за угодою починається в момент часу t_0 , а закінчується в момент t_n , причому виплати суми Y_k відбуваються в момент t_k , $k = 0, 1, \dots, n$, де

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n.$$

Якщо всі члени Y_k потоку платежів мають один знак і виплати відбуваються через однакові інтервали часу $\tau = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, то така послідовність платежів називається **фінансовою рентою**, або **ануїтетом** (annuity), незалежно від призначення цих виплат, а τ — **періодом ренти**.

Крім указаних параметрів потоку платежів, для його опису потрібно мати базисну одиницю часу та ефективну ставку r складного відсотка, за якою здійснюються всі розрахунки, а також спосіб нарахування відсотків.

Виплата ренти може відбуватися l ($l \geq 1$) разів на рік, а нарахування відсотків — m разів на рік ($m \geq 1$). Це дискретні (l, m) -кратні ренти. Коли виплати й нарахування відсотків відбуваються досить часто, такі потоки платежів простіше аналізувати як неперервні. Якщо виплата здійснюється наприкінці кожного періоду, то рента називається **звичайною**, або **постнумерандо** (ordinary annuity), а якщо на початку періоду, то **пренумерандо**, або **авансованою** (annuity due).

За значенням своїх членів ренти поділяються на **сталі** ($Y_k = Y = \text{const.}$) та **змінні**, за ймовірністю виплати — на **вірні** (annuity certain) й **умовні** (contingent annuity). Вірні ренти підлягають безумовній сплаті (наприклад, погашення кредиту), причому кількість членів такої ренти заздалегідь відома. Виплата умовної ренти залежить від настання деякої випадкової події. Тому кількість її членів наперед невідома. До такого типу рент належать **страхові ануїтети** — різні послідовні платежі в особистому і майновому страхуванні.

За кількістю членів ренти розрізняють ренти зі скінченим числом членів, тобто **обмежені за терміном** (їхній термін наперед визначений), та **нескінчені**, або **довічні**, ренти (perpetuity). Щодо початку терміну ренти і певного моменту часу, що передує її початку (наприклад, початок дії контракту), ренти розподіляють на **негайні** та **відкладені** (instant and deferred annuity).

Аналіз потоку платежів передбачає розрахунок таких його узагальнених характеристик, як **пароцена вартість** (AV) або **майбутня вартість** (FV) потоку (суми всіх членів потоку з нарахуваннями на них до кінця терміну відсотками) і **сучасна вартість** (PV) потоку (суми всіх його членів, дисконтованих на початок терміну або ж на деякий попередній момент часу). Ці характеристики важливі для правильного визначення ціни продажу або купівлі ренти.

Розглянемо спочатку прямий метод розрахунку FV (future value) та PV (present value) потоку платежів Y_j , що сплачуються у цілочисельні моменти часу n_j після початкового моменту часу $t_0 = 0$ протягом n періодів часу одиничної тривалості, коли період потоку збігається з періодом конверсії (капіталізації). Це випадок **простого** потоку платежів з декурсив-

ним нарахуванням відсотків за ставкою r . При цьому

$$S(n) = FV(n) = \sum_j Y_j (1+r)^{n-n_j};$$

$$S(0) = PV(0) = \sum_j Y_j v^{n_j}, \quad v = (1+r)^{-1};$$

$$PV(0)(1+r)^n = FV(n); \quad S(0) = S(n)v^n.$$

Тепер розглянемо випадки простих рент. Нехай $S_0(t)$ — сумарна вартість усіх виплат ренти пренумерандо \mathcal{R}_0 , зведена до моменту часу t , а $S_1(t)$ — аналогічна величина для ренти постнумерандо \mathcal{R}_1 , $0 \leq t \leq n$. Виведемо формули для PV і FV цих рент, застосовуючи позначення

$$PV(\mathcal{R}_0) := S_0(0), \quad FV(\mathcal{R}_0) := S_0(n);$$

$$PV(\mathcal{R}_1) := S_1(0), \quad FV(\mathcal{R}_1) := S_1(n).$$

Зводячи всі виплати рент до моменту часу $t_0 = 0$ та застосовуючи формулу для суми членів геометричної прогресії, отримуємо

$$S_0(0) = Y(1 + v + \dots + v^{n-1}) = Y \frac{1-v^n}{1-v} = Y \frac{1-v^n}{d}; \quad (4.148)$$

$$S_1(0) = Y(v + \dots + v^n) = Yv \frac{1-v^n}{1-v} = Yv \frac{1-v^n}{d} = Y \frac{1-v^n}{r}. \quad (4.149)$$

Знаменником відповідних прогресій є коефіцієнт дисконтування $v = (1+r)^{-1} = 1-d$.

Переходячи від вартості рент у момент часу $t_0 = 0$ до їхньої вартості в момент часу n , отримуємо

$$S_0(n) = (1+r)^n S_0(0) = Yv^{-n} \frac{1-v^n}{d} = Y \frac{s^n - 1}{r}; \quad (4.150)$$

$$S_1(n) = (1+r)^n S_1(0) = Yv^{-n} \frac{1-v^n}{r} = Y \frac{s^n - 1}{r}, \quad (4.151)$$

де $s = (1+r) = v^{-1}$.

Для вартості рент з одиничними виплатами $Y = 1$ у фінансах і страхуванні прийнято спеціальні міжнародні позначення. Так, PV рент \mathcal{R}_1 та \mathcal{R}_0 позначаються як

$$a_{\overline{n}|r} := \frac{S_1(0)}{Y} = v + \dots + v^n = v \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-v^n}{r}; \quad (4.152)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|r} := \frac{S_0(0)}{Y} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}, \quad (4.153)$$

а FV — як

$$s_{\overline{n}|r} := \frac{S_1(n)}{Y} = v^{-n} \frac{1-v^n}{r} = \frac{s^n - 1}{r}; \quad (4.154)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|r} := \frac{S_0(n)}{Y} = v^{-n} \frac{1-v^n}{d} = s \frac{s^n - 1}{r}. \quad (4.155)$$

Величини $a_{n|r}$ та $\ddot{a}_{n|r}$ називаються відповідно коефіцієнтами дисконтування рент \mathcal{R}_1 і \mathcal{R}_0 , а $s_{n|r}$ та $\ddot{s}_{n|r}$ — коефіцієнтами нарощення цих рент. Якщо ефективна відсоткова ставка r фіксована, то в нижньому індексі часто пишуть n замість $n|r$.

З означення коефіцієнтів дисконтування та нарощування рент випливають такі прості властивості:

$$\begin{aligned} a_{n|0} &= \ddot{a}_{n|0} = s_{n|0} = \ddot{s}_{n|0} = n; \\ a_{0|r} &= \ddot{a}_{0|r} = s_{0|r} = \ddot{s}_{0|r} = 0; \\ \ddot{a}_{n|r} &= 1 + a_{n-1|r}, \quad n \geq 1, \\ \ddot{a}_{n|r} &= (1+r)a_{n|r}, \quad \ddot{s}_{n|r} = (1+r)s_{n|r}; \\ s_{n+1|r} &= 1 + \ddot{s}_{n|r}, \quad \ddot{a}_{n|r} = v^n \ddot{s}_{n|r}. \end{aligned}$$

Сучасну вартість довічних рент постнумерандо і пренумерандо легко визначити, переходячи у відповідних формулах для обмежених рент до границі при $n \rightarrow \infty$ з урахуванням того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} v^n = 0$, оскільки $v < 1$. Тоді, зокрема, відповідні коефіцієнти дисконтування довічних рент мають вигляд

$$\begin{aligned} a_{\infty|r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|r} = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{r}; \\ \ddot{a}_{\infty|r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{n|r} = \frac{v}{d} = \frac{1}{1-v}, \end{aligned}$$

тобто PV навіть необмеженого числа виплат — скінченна («далекі» гроші сьогодні ціняться дуже мало). Механізм довічного отримання доходу зі скінченної суми гранично простий — приріст суми за період між платежами ренти повністю компенсує виплату.

Відкладена рента — це негайна рента, зсувута в часі на період відстрочки. Тому PV відкладеної ренти є PV негайної ренти, дисконтованої на інтервал часу, що дорівнює періоду відстрочки m . Відповідні коефіцієнти дисконтування відкладеної ренти визначаються як

$$m \cdot a_{n|r} = v^m a_{n|r}; \quad m \cdot \ddot{a}_{n|r} = v^m \ddot{a}_{n|r}.$$

Розглянемо питання, пов'язані з розрахунком терміну ренти та її доходності. При розв'язуванні задач створення фінансового фонду або при погашенні заборгованості частинами, коли через обмежені фінансові можливості розмір періодичного платежу не може перевищувати значення Y , виникає запитання: протягом якого часу n може бути створений фонд або погашена заборгованість заданої суми S ? Неважко переконатися в тому, що для ренти \mathcal{R}_1 термін створення фонду

$$n = \frac{\ln(Sr/Y + 1)}{\ln(1+r)}, \quad \text{оскільки } Y = \frac{S}{s_{n|r}},$$

а термін погашення заборгованості

$$n = \frac{\ln(1 - Sr/Y)}{\ln(1+r)}, \quad \text{тому що } Y = \frac{S}{a_{n|r}}.$$

У разі потреби оцінити ефективність (дохідність) фінансово-банківських операцій або інвестиційних проєктів розв'язується задача визначення ставки доходності ренти r за відомими Y , n , $S_0(n)$ або $S_1(n)$, $S_0(0)$ чи $S_1(0)$. Для ренти \mathcal{R}_1 задача зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння

$$S_1(n) = Ys_{n|r} \quad \text{або} \quad S_1(0) = Ya_{n|r},$$

відносно r числовими методами.

Розглянемо m -кратні ренти, що виплачуються m разів на рік. При цьому розрахунок FV і PV виконується аналогічно випадку щорічних рент із використанням релятивної ставки $j = r/m$ за період $1/m$ року (де r — номінальна річна ставка). Якщо кількість членів сталої ренти дорівнює N , то для ренти \mathcal{R}_1 з одиничними членами маємо

$$\begin{aligned} S_1(N) &= s_{j,N} = \sum_{k=0}^{N-1} (1+j)^k = \frac{(1+j)^N - 1}{j}; \\ S_0(N) &= a_{j,N} = \sum_{k=1}^N (1+j)^{-k} = \frac{1 - 1/(1+j)^N}{j}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Коефіцієнти нарощення та дисконтування (4.156) є стандартними для типових фінансових і страхових розрахунків, їх табульовано, а позначаються вони так:

$$S_{1,n} \equiv FVIFA_{1,n}; \quad a_{1,n} \equiv PVIFA_{1,n}.$$

Для ренти пренумерандо \mathcal{R}_0 з $Y = 1$ маємо аналогічно

$$\begin{aligned} S_0(N) &= \ddot{s}_{j,N} = \sum_{k=1}^N (1+j)^k = \frac{(1+j)^{N+1} - 1}{j} (1+j) = s_{j,N} (1+j); \\ S_0(0) &= \ddot{s}_{j,N} = \sum_{k=0}^{N-1} (1+j)^{-k} = \frac{1 - 1/(1+j)^N}{j/(1+j)} = a_{j,N} (1+j). \end{aligned} \quad (4.157)$$

Для визначення членів $y^{(m)}$ m -кратної ренти \mathcal{R}_1 , еквівалентної відповідній річній ренті з одиничними платежами, необхідно замінити її платежі протягом року одним одиничним платежем наприкінці року. Тоді цей платіж дорівнюватиме FV m -кратної ренти \mathcal{R}_1 привалстю в 1 рік:

$$1 = y^{(m)} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{r_e^{(m)}}{m} \right)^k = y^{(m)} m s_{\frac{r}{m}}^{(m)}, \quad \text{де}$$

$$s_{\frac{r}{m}}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (1+j)^k = s_{j,m} / m; \quad j = r_e^{(m)} / m = \sqrt[m]{1+r} - 1 = s^{1/m} - 1.$$

Звідси

$$y^{(m)} = \frac{1}{ms_{\overline{1}|}^{(m)}} = \frac{r_e^{(m)}}{mr}$$

Значення членів m -кратної ренти \mathcal{R}_0 , еквівалентної відповідній одиничній річній ренті, визначається як

$$y^{(m)} = \frac{1}{m\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}} = \frac{r_e^{(m)}s}{mrs^{1/m}},$$

де

$$\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (1+j)^{-k} = \ddot{a}_{j,m} / m = \frac{rs^{1/m}}{r_e^{(m)}s}.$$

Нехай на інтервалі часу від початкового (нульового) до кінцевого моменту $n > 0$ рента сплачується досить часто, так що її можна вважати практично неперервною. Очевидно, що при неперервній виплаті різниця між рентами \mathcal{R}_0 та \mathcal{R}_1 зникає. PV неперервної ренти, що сплачується зі сталою інтенсивністю в одну грошову одиницю за одиницю часу при неперервному нарахуванні відсотків зі сталою інтенсивністю δ , позначимо через $\bar{a}_{\overline{n}|}\delta$. Оскільки за інтервал $(t, t + \Delta t)$ малої довжини Δt буде виплачено Δt грошей, а зведена на початковий момент вартість цієї суми дорівнює $e^{-\delta t} \Delta t$, то розбиваючи інтервал $(0, n)$ на подібні малі проміжки та підсумовуючи відповідні PV , дістанемо інтегральну суму для інтеграла від функції $e^{-\delta t}$ на проміжку $(0, n)$.

Пereйшовши до границі в цій сумі при $\Delta t \rightarrow 0$, матимемо

$$\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = \int_0^n e^{-\delta t} dt. \quad (4.158)$$

Зауважимо, що у формулі (4.158) n може бути довільним невід'ємним числом, необов'язково цілим. Якщо $\delta = 0$, то $\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = 0$, що узгоджується з фінансовими міркуваннями. Оскільки при неперервному нарахуванні відсотків $v = e^{-\delta}$, при $\delta > 0$ з (4.158) випливає, що PV одиничної неперервної ренти

$$\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta} = \frac{1 - v^n}{\delta} = \frac{1 - v^n}{-\ln v} = \frac{v^n - 1}{\ln v}, \quad (4.159)$$

або

$$\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = (r/\delta) \ddot{a}_{\overline{n}|r}.$$

Нехай h — довільне невід'ємне число (необов'язково ціле), а ${}_h\bar{a}_{\overline{n}|}\delta$ є PV відкладеної на h одиниць часу ренти, що сплачується неперервно з інтенсивністю 1 на інтервалі $(h, h+n)$. Тоді

$${}_h\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = \int_h^{h+n} e^{-\delta t} dt = \int_0^{h+n} e^{-\delta t} dt - \int_0^h e^{-\delta t} dt = e^{-\delta h} \int_0^n e^{-\delta s} ds.$$

Отже, відкладену неперервну ренту можна виразити через негайну:

$${}_h\bar{a}_{\overline{n}|}\delta = \bar{a}_{\overline{n+h}|}\delta - \bar{a}_{\overline{n}|}\delta = v^h \bar{a}_{\overline{n}|}\delta. \quad (4.160)$$

Розмірковуючи так, як і при виведенні формули (4.158), дістанемо вираз коефіцієнтів нарахування $\bar{s}_{\overline{n}|}\delta$ неперервної негайної ренти:

$$\bar{s}_{\overline{n}|}\delta = \int_0^n e^{\delta(n-t)} dt. \quad (4.161)$$

Отже, FV неперервної негайної ренти визначається як

$$\bar{s}_{\overline{n}|}\delta = e^{n\delta} \bar{a}_{\overline{n}|}\delta = \frac{r}{\delta} s_{\overline{n}|r} = \frac{r}{\delta} \left(v^{-n} \frac{1 - v^n}{r} \right) = \frac{s^n - 1}{\delta} = \frac{s^n - 1}{\ln s}, \quad (4.162)$$

де $s = 1 + r$, $v = s^{-1}$.

Зауважимо також, що формула (4.162) випливає з фінансових міркувань, оскільки $\bar{s}_{\overline{n}|}\delta = s^n \bar{a}_{\overline{n}|}\delta$.

З урахуванням (4.159) для довічної неперервної ренти при $\delta > 0$ маємо

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|}\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_{\overline{n}|}\delta = 1/\delta.$$

У моделях прийняття рішень щодо іпотечного кредитування (позик під заставу нерухомості), страхування життя, планування прямих інвестицій тощо досить широко застосовують ренти зі змінними членами.

Розрахунок FV і PV подібних рент та фондів виконується за рекурентними формулами, що пов'язують значення відповідних показників за два суміжні періоди (роки). Використовують розрахункові схеми в прямому і зворотному часі.

Якщо відома накопичена вартість FV фінансового фонду наприкінці $(k-1)$ -го року D_{k-1} і платіж Y_k , що вноситься наприкінці k -го року, то сума на кінець k -го року

$$D_k = D_{k-1}s + Y_k, \quad (4.163)$$

де $s = 1 + r$ — річний множник нарахування (схема прямого часу).

Якщо ж, навпаки, задано FV фонду D_k , то її поточне значення

$$D_{k-1} = v(D_k - Y_k) \quad (4.164)$$

(схема зворотного часу).

Розглянемо фінансовий фонд, в якому розміщено початковий капітал D_0 і куди наприкінці кожного року протягом n років вносяться додаткові суми Y_k , $k = 1, 2, \dots, n$, що утворюють змінну ренту \mathcal{R}_1 . Тоді $D_1 = D_0(1+r) + Y_1$.

Щоб визначити накопичену наприкінці t -го року суму D_t , помножимо обидві частини рекурентного співвідношення (4.163) на дисконтний множник v^k та підсумуємо по всіх k від 1 до t :

$$\sum_{k=1}^t D_k v^k = s \sum_{k=1}^t D_{k-1} v^k + \sum_{k=1}^t Y_k v^k$$

Тоді після певних перетворень дістанемо

$$D_t = D_0 s^t + \sum_{k=1}^t Y_k s^{t-k}. \quad (4.165)$$

Формулу (4.165) називають **ретроспективною**, оскільки вона виражає D_t через початковий капітал і вже внесені платежі Y_k . Як правило, ретроспективний метод застосовується для розрахунку AV рент та фондів.

Якщо задано вартість фонду в момент закінчення потоку платежів, то зручніше використовувати **перспективний метод**, виражаючи поточні значення показників через майбутні. Домножуючи (4.164) на v^{k-1} та підсумовуючи по всіх k від $t+1$ до n , маємо

$$D_t = D_n v^{n-1} - \sum_{k=t+1}^n Y_k v^{k-1}. \quad (4.166)$$

Формулу (4.166) називають **перспективною**. Легко з'ясувати, що формули (4.166) і (4.167) є еквівалентними, для цього досить підставити в (4.167) D_n із (4.166) (при $t = n$).

При перспективному методі всі показники виражаються не через час t , що минув від початку потоку платежів, а через час $\tau = n - t$, який залишився до його закінчення. Це стає очевидним, якщо переписати (4.166) у вигляді

$$D_\tau = D_n v^\tau - \sum_{q=0}^{\tau-1} Y_q v^{\tau-q}, \quad q = n - k.$$

Із формули (4.165) та (4.166) легко дістати всі попередні результати для сталих щорічних рент.

Стандартна зростаюча рента R_1 є сукупністю виплат, що зростають за арифметичною прогресією, починаючи з одиничної виплати наприкінці першого року: $Y_k = k$, $k = 1, 2, \dots, n$. PV такої ренти

$$S_1(n) := (Ia)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n k v^k = (\dot{a}_n - n v^n) r^{-1}.$$

При виведенні цієї формули застосовується формула для визначення суми арифметично-геометричної прогресії

$$Z_n = \sum_{q=0}^n (a_0 + qd) u^q = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} \left[a_0 + \frac{ud}{1-u} \right] - \frac{d(n+1)u^{n+1}}{1-u}.$$

Стандартна зростаюча рента R_1 є сукупністю виплат, що збільшуються за арифметичною прогресією, починаючи з одиничної виплати на початку першого року: $Y_k = 1 + k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. PV цієї ренти є

$$S_0(n) = (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+k) v^k = \frac{(Ia)_{\overline{n}|}}{v}.$$

FV цих рент пов'язані з PV співвідношеннями, подібними до випадку сталих рент.

У **стандартній спадній ренті R_1** виплати зменшуються за арифметичною прогресією, що завершується одиничною сплатою наприкінці n -го року: $Y_k = n + 1 - k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Якщо додати виплати стандартної зростаючої та спадної рент, то отримаємо сталу ренту з виплатами $n + 1$. Звідси

$$S_1(n) = PV(R_1) :=$$

$$= (Da)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n (n+1-k) v^k = (n+1) a_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|} = \frac{n-a_{\overline{n}|}}{r}. \quad (4.167)$$

Виплати стандартної спадної ренти R_0 зменшуються за арифметичною прогресією, що завершується одиничною сплатою на початку n -го року: $Y_k = n - k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. PV цієї ренти

$$PV(R_0) :=$$

$$= (D\ddot{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^k = (n+1) \ddot{a}_{\overline{n}|} - (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{n-a_{\overline{n}|}}{rv}. \quad (4.168)$$

4.12. ОЦІНЮВАННЯ ВАРТОСТІ ОБЛІГАЦІЙ ТА АКЦІЙ, А ТАКОЖ ЇХНЬОЇ ДОХІДНОСТІ

Облігації та акції — це найпоширеніші типи основних (або первинних) цінних паперів, що є товарами фондового ринку. Фінансово-економічні рішення учасників цього ринку значною мірою залежать від методів і моделей оцінки вартості та дохідності цих цінних паперів.

Облігації (bonds) є найпоширенішим типом цінних паперів з **фіксованим доходом** (fixed income securities), до емісії (випуску) яких вдаються держава, муніципалітети, банки, інші фінансові інституції, а також окремі компанії та їх об'єднання при потребі залучення значних грошових ресурсів (для фінансування великих проектів, покриття поточних витрат тощо).

Основні параметри облігації: **номінальна ціна**, або **помінал** (face value), — указана на ній сума, яку позичальник (емітент облігації) зобов'язується повернути її власнику (утримувачу) на термін закінчення її дії (на дату погашення — date of maturity); **викупна ціна** (redemption value) або **правило її визначення**; **норма дохідності**, або **купонна відсоткова ставка** (coupon rate), — відношення суми відсотків за рік до номіналу облігації; **дати виплати відсотків**.

Оцінювання облігації на поточний момент часу полягає у визначенні поточної вартості всіх майбутніх виплат за облігацією з урахуванням моментів часу, коли вони здійснюватимуться. Як правило, при цьому використовують ринкову (поточну) ставку відсотка, що встановилася на ринку цінних паперів на момент оцінювання. Поточна вартість купонної облігації дорівнює сумі PV номіналу та PV потоку купонних виплат.

¹Зазначимо, що символ D в позначенні PV ренти походить від англ. decrease — спадати, а символ I — від англ. increase — зростати.

Номінали різних облігацій можуть істотно відрізнятися, тому для їх зіставлення потрібен вимірник ринкових цін облігацій. Це **курс облігації** K , що є відсотковим відношенням ринкової ціни облігації P до її номіналу N : $K = \frac{P}{N} \cdot 100$. Так, якщо облігація номіналом у \$ 1000 продається за \$ 930, то її курс 93 %.

Розглянемо оцінювання курсу облігації терміном на n років у момент її емісії. Сукупність річних виплат за купонами є рентою R_1 із членом $C = cN$, де c — купонна ставка. Поточна вартість цієї ренти на момент емісії

$$P_c = cNa_{\overline{n}|r} = cN \frac{1-v^n}{r}, \quad (4.169)$$

де $v = (1+r)^{-1}$ — дисконтний множник.

Поточна вартість номіналу, що сплачується в момент погашення облігації через n років після її емісії,

$$P_N = v^n N. \quad (4.170)$$

На підставі (4.169), (4.170) курс облігації в момент емісії визначається як

$$\frac{K}{100} = \frac{P}{N} = \frac{P_c + P_N}{N} = v^n + ca_{\overline{n}|r} = 1 - a_{\overline{n}|r} + ca_{\overline{n}|r} = 1 + (c-r)a_{\overline{n}|r}. \quad (4.171)$$

Із (4.171) випливають такі висновки: 1) якщо поточна ставка r дорівнює купонній ставці, то курс облігації становить 100 % (ціна дорівнює номіналу), 2) якщо $r > c$, то $K < 100$ % (ціна нижча номіналу), облігація купується з дисконтом (при низькій ставці c для інвестора переважним є вкладання коштів у більш дохідні фінансові інструменти і продаж облігації за ціною, меншою від номіналу, що дає змогу отримувати додаткові кошти); 3) якщо $r < c$, то $K > 100$ % (ціна вища за номінал) і облігація продається з премією (для зрівноваження дохідності з ринковою ціною ціна облігації має бути більшою від номіналу).

Оцінювання облігації проводиться у будь-який момент часу t до моменту її погашення, і в цей момент облігація може бути продана або куплена на ринку цінних паперів за ринковою ціною. Найпростішим є оцінювання облігації в останньому перед погашенням купонному періоді, коли має бути виконана одна виплата $(c+1)N$ — останній купон плюс номінал.

Якщо інтервал часу від моменту оцінювання до моменту погашення дорівнює L , то, дисконтуючи виплати на цей інтервал часу, маємо поточну вартість облігації

$$P(t) = N(1+c)v^L; \quad K(t) = 100(1+c)v^L. \quad (4.172)$$

Курс облігації відразу після передостанньої купонної виплати ($t = 1$) $K = 100(1+c)v$.

Курс облігації на момент часу безпосередньо після чергової купонної виплати («чиста курсова вартість») легко визначити заміною в (4.171) n на T — кількість років від моменту оцінювання до моменту погашення.

$$\frac{K(T)}{100} = 1 + (c-r)a_{\overline{T}|r} = 1 + ((c-r) - 1)(1-r^T). \quad (4.173)$$

Із (4.173) випливає, що K змінюється в часі при наближенні до дати погашення облігації при сталій поточній ставці відсотка. Якщо облігація куплена з дисконтом, то його абсолютне значення, згідно з (4.173), спадає з наближення до дати погашення облігації, а її курс зростає (відбувається накопичення дисконту). Аналогічно, якщо облігація куплена з премією, то з плином часу її курс спадає (відшкодування премії).

Якщо час t від моменту оцінювання до моменту погашення облігації не є цілим ($t = T + \Theta$, де $T = [t]$ — ціла частина t , а $\Theta = \{t\}$ — дробова частина t , $0 < \Theta < 1$), то поточний курс облігації визначається як

$$\frac{K(T+\Theta)}{100} = \left[\frac{K(T)}{100} + c \right] v^\Theta = [1 + c + (c-r)a_{\overline{T}|r}] v^\Theta. \quad (4.174)$$

Для аналізу динаміки цін облігації та розрахунку податку на повну її ціну, за якою облігація реалізується (брутто-ціна), її зображують у вигляді нетто-ціни (чистої ціни) та купонного доходу, накопиченого з моменту останньої купонної виплати (або з моменту емісії). У моменті часу безпосередньо після чергової купонної виплати (або в момент емісії) нетто-ціна збігається з повною і визначається виразами (4.173), (4.171).

Сума купонного доходу A , накопиченого з моменту виплати попереднього купона до моменту придбання облігації, $A(\Theta) = Nc(1-\Theta)$. Нетто-ціна є різницею повної ціни та A :

$$P_n(T+\Theta) = NK(T+\Theta) - (N/100)c(1-\Theta). \quad (4.175)$$

Саме ця ціна публікується у зарубіжній пресі за результатами торгів цінними паперами.

За аналогією з ціною можна ввести «нетто-курс» і «накопичений курсовий купонний дохід»:

$$K_A = 100c(1-\Theta); \quad K_n = K - K_A. \quad (4.176)$$

Якщо купони виплачуються m разів на рік, то сума однієї виплати cN/m .

Поточна вартість номіналу, що сплачується в момент погашення облігації, визначається виразом (4.170), а поточна вартість купонних виплат на момент безпосередньо після чергової виплати відповідно до (4.156) — виразом

$$P_c = \frac{Nc}{m} \sum_{l=1}^L \frac{1}{(1+j)^l} = \frac{Nc}{m} a_{\overline{j,L}} = \frac{Nc[1 - 1/(1+j)^L]}{m_j},$$

де $j = (1+r)^{1/m} - 1$; L — кількість купонів, що залишилися до погашення.

Тоді оцінювання курсу облігації на цей момент визначається виразом

$$\frac{K(L/m)}{100} = v^{L/m} + \frac{c}{m} a_{\overline{j,L}} = \frac{1}{(1+j)^L} + \frac{c}{m} \frac{1 - 1/(1+j)^L}{j}.$$

Курс облігації та накопичений купонний дохід для довільного моменту часу $t = (L/m) + \Theta$ ($0 < \Theta < 1/m$) визначаються як

$$\frac{K(L/m + \Theta)}{100} = \left[\frac{K(L/m)}{100} + c/m \right] v^\Theta; \quad (4.177)$$

$$A(\Theta) = cN[(1/m) - \Theta] = N \frac{c}{m} (1 - m\Theta). \quad (4.178)$$

З'ясуємо, як змінюється ціна облігації при «миттєвій» зміні поточної відсоткової ставки r . Ціна облігації (як поточна вартість потоку платежів) для довільного моменту часу

$$P = \sum_q C_q v^{t_q},$$

де t_q – момент сплати суми C_q , відлічений від поточного моменту часу.

Якщо r зміниться на Δr , то зміна ціни облігації становитиме

$$\Delta P = \frac{dP}{dr} \Delta r = \frac{dP}{dv} \frac{dv}{dr} \Delta r. \quad (4.179)$$

Обчислення відповідних похідних дає:

$$\frac{dP}{dv} = \sum_q C_q t_q v^{t_q-1}; \quad \frac{dv}{dr} = -v^2; \quad \frac{dP}{dr} = -PvD,$$

звідки

$$D = -\frac{s}{P} \frac{dP}{dr} = -s \frac{d \ln P}{dr} = \frac{\sum_q C_q t_q v^{t_q}}{\sum_q C_q v^{t_q}}. \quad (4.180)$$

Таким чином,

$$\Delta P = -PDv\Delta r. \quad (4.181)$$

Щоб з'ясувати суть величини D , визначеної рівністю (4.180), перетворимо останню у вигляді

$$D = \sum_q t_q w_q, \quad w_q = C_q v^{t_q} / P, \quad \sum_q w_q = 1.$$

Тут w_q є вагою, яку вносить платіж у момент часу t_q . Отже, D є середньою зваженою протяжністю потоку платежів, або **дюрацією** (duration).

Дюрація для безкупонної облігації в точності дорівнює терміну до її погашення:

$$P = Nv^t; \quad D = \frac{tNv}{Nv} = t. \quad (4.182)$$

Дюрація купонної облігації в момент емісії або безпосередньо після виплати чергового купона (з урахуванням формули для визначення ста-

дартної зростаючої ренти)

$$D(T) = \frac{Tv^T + c \sum_{q=1}^T qv^q}{v^T + c \sum_{q=1}^T v^q} = \frac{Tv^T + c[a_T(1+r) - Tv^T]r^{-1}}{v^T + ca_T},$$

де T – кількість років до погашення облігації. Зокрема, якщо купонна ставка c дорівнює поточній ринковій відсотковій ставці r , то

$$D_c(T) = a_T(1+c) = (1-v^T)(1+1/c). \quad (4.183)$$

В інтервалі часу між купонними виплатами вартість облігації визначається виразом (4.174), підставивши який у співвідношення (4.180),

$$\ln K(T+\Theta) = \ln K(T+1) + (1-\Theta) \ln s;$$

$$D(T+\Theta) = -s \frac{d \ln K(T+\Theta)}{dr} = D(T+1) + \Theta - 1. \quad (4.184)$$

Із (4.184) випливає, що в інтервалі часу між купонними виплатами дюрація спадає з часом від значення $D(T+1)$ при $\Theta = 1$ до значення $D(T+1) - 1$ через рік ($\Theta = 0$). Після купонної виплати дюрація стрибком збільшується до значення $D(T)$, потім знову зменшується до значення $D(T) - 1$ наприкінці року і т. д. Після терміну погашення облігації її дюрація – нульова, тому з (4.184) маємо $D(1) = 1$.

Сформулюємо загальні висновки, що випливають з формули (4.179) та її наслідків:

1. Оскільки дюрація додатна, збільшення поточної відсоткової ставки призводить до зменшення поточної ціни облігації і, навпаки, якщо ставка r спадає, то вартість облігації зростає.

2. Чим більша дюрація, тим сильніша чутливість ціни до зміни відсоткової ставки. Це пояснює поведінку інвесторів у ситуації, коли на ринку очікується зміна ставки r . Якщо очікується зниження r , то найбільше підвищення вартості зазнає облігація з великою дюрацією, тобто для довгострокових облігацій. Тоді інвестори намагаються придбати їх, щоб «зафіксувати» високий рівень r . І навпаки, якщо очікується зростання r , то найменше зниження ціни буде у короткострокових облігацій, тому інвестори прагнуть позбавитися від довгострокових облігацій і інвестують кошти на короткі термини, очікуючи максимального підйому r , коли можна буде купити довгострокові облігації за мінімальною ціною.

Для спрощення рівняння (4.181) вдаються до модифікованої дюрації $MD = Dv$. Тоді (4.181) набуває вигляду $\Delta P = -PDv\Delta r = -MDP\Delta r$. Звідси MD є показником еластичності ціни за поточною ставкою r . Однак MD не має такого зрозумілого фінансового сенсу, як дюрація D , введена Макколі. Більш важливою характеристикою швидкості зростання інвестицій-

них купонів є не r , а сила зростання, або «миттєва» відсоткова ставка δ , відносно якої $\Delta P = -P\Delta\delta$. Щодо δ еластичністю ціни облигації є D .

Найважливішою характеристикою облигації є її здатність приносити дохід власнику — дохідність. Розрізняють три види дохідності: 1) **купонну**, що визначається при випуску облигації як відношення річної суми купонів до номіналу облигації; 2) **поточну** — відношення доходів за купонами за рік до ринкової ціни облигації; 3) **повну**, або дохідність до погашення, що визначається з урахуванням усіх грошових надходжень — періодичних купонних виплат і виплати номіналу при погашенні облигації.

Зв'язок між вартістю облигації та її дохідністю в деякий момент часу виражається рівняннями (4.174) або (4.177). Якщо задано поточну дохідність, то (4.174) дає оцінку поточної вартості майбутнього грошового потоку; якщо облигація придбана за відомою ціною, то рівняння (4.174) дає змогу оцінити повну дохідність. Однак ця задача досить складна, оскільки (4.174) містить r у степені вище другого, тому можна знайти тільки наближений числовий розв'язок, який зазвичай визначається методом ітерацій.

Задача істотно спрощується, якщо вважати, що поточна відсоткова ставка близька до купонної як у момент емісії, так і впродовж усього терміну дії облигації. Якщо до моменту її погашення залишається ціле число років T , то залежність дохідності від курсу K , за яким придбано облигацію безпосередньо після чергової купонної виплати, така:

$$r = c + \frac{1 - K/100}{a_{\overline{T}|r-c}} = c \left[1 + \frac{1 - K/100}{1 - 1/(1+c)^T} \right]. \quad (4.185)$$

Формула (4.185) є варіантом зображення співвідношення (4.181), оскільки, якщо в ньому з урахуванням (4.183) прийняти $\Delta r = r - c$, $\Delta P/P = [K - K(c)]/K(c) = (K/100) - 1$, $D(c)/(1+c) = a_{\overline{T}|c}$, то отримаємо (4.185).

Зауважимо, що співвідношення (4.181) можна використати для довільного моменту часу і тоді, коли поточна відсоткова ставка помітно відрізняється від купонної. Досить тільки знати наближене значення дохідності y (наприклад, за результатами попередніх торгів). Тоді

$$P - P(y) = \frac{D(y)}{1+y} P(y)(r-y), \quad r = y + \frac{1 - P/P(y)}{D(y)}(1+y). \quad (4.186)$$

Формули для визначення дохідності в останньому купонному періоді є досить простими. Якщо до погашення облигації залишається час, короткий за купонний період, а облигацію придбано за ціною P за час t до терміну її погашення, то рівняння для визначення її дохідності мають вигляд

$$P = (N+C)v^t; (1+r)^t - 1 = \frac{N+C}{P} - 1. \quad (4.187)$$

При цьому дохідність у вигляді ставки простих відсотків r_s визначається як

$$(1+r_s)^t - 1 = r_s t = \frac{N+C}{P} - 1,$$

$$r_s = \frac{1}{t} \left(\frac{N+C}{P} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(\frac{1+c/m}{K/100} - 1 \right). \quad (4.188)$$

а дохідність у вигляді річної ставки складних відсотків — як

$$r = \left(\frac{N+C}{P} \right)^{1/t} - 1 = (1+r_s t)^{1/t} - 1. \quad (4.189)$$

При оцінюванні вартості облигації у розрахунках використовують не повні, а чисті (за відрахуванням податків) потоки платежів.

Оподаткуванню підлягають: 1) купонний дохід; 2) приріст капіталу (якщо чиста ціна купівлі облигації нижча, ніж ціна її наступного продажу).

Якщо купонний дохід оподатковується за ставкою Tax_c , то чистий поточний дохід за всіма купонами, крім чергового, є добутком повного поточного доходу на $(1 - \text{Tax}_c)$. Оподатковується не весь дохід від чергового купона, а тільки його приріст $(C - A)$ з моменту купівлі облигації до моменту купонної виплати, де A — купонний дохід, накопичений із початку чергового купонного періоду. Наступні купони оподатковуються повністю. Податок з поточного купона згідно з рівністю $A(\Theta) = Nc(1 - \Theta)$ визначається як

$$(C - A)\text{Tax}_c = Nc\Theta\text{Tax}_c.$$

Податок на приріст капіталу становить $(N - P_n)\text{Tax}$, де Tax — ставка податку на приріст капіталу.

З урахуванням того, що податок із купонів сплачується в момент їх виплати, а податок з приросту капіталу — в момент погашення облигації, поточна вартість потоку чистих надходжень за час $t = T + \Theta$ до моменту погашення становить

$$P_n + A = e^{\Theta} \left[\left(N - \begin{cases} (N - P_n); & N > P_n \\ 0; & N < P_n \end{cases} \right) \text{Tax} \right] v^T + A\text{Tax}_c + C(1 - \text{Tax}_c)a_{\overline{T}|r}.$$

Зауважимо, що спочатку проводиться оцінювання поточної вартості облигації з урахуванням податку з купонів, а потім, якщо одержана чиста ціна нижча від номіналу, враховується також податок на приріст капіталу.

Підсумовуючи тему оцінювання вартості та дохідності облигацій за допомогою апарата потоків платежів, слід зазначити, що отримані результати не є вичерпними при прийнятті остаточних рішень щодо інвестування коштів у облигації. Інвестиції в цінні папери пов'язані з певним ризиком.

Основними видами ризику є кредитний (credit risk) і ринковий (market risk). Перший пов'язаний з можливістю відмови у сплаті відсотків та основної суми боргу (викупної ціни), а другий — з коливаннями ринкової ціни облігацій, що значною мірою зумовлено змінами відсоткової ставки на грошово-кредитному ринку. Ці ризики залежать від терміну облігації: чим він більший, тим вищі ризики.

Кредитний ризик характеризує кредитоспроможність та надійність самого емітента. Тому державні зобов'язання прийнято вважати найбільш надійними. Цінні папери комерційних інституцій є менш надійними, оскільки завжди залишається деяка ймовірність їх банкрутства. Якість облігацій щодо кредитного ризику оцінюється спеціальними агентствами віднесенням конкретних облігацій до тієї чи іншої категорії (тобто визначається рейтинг облігацій). Наприклад, у США рейтинг облігацій здійснюється головним чином компаніями Standard and Poors і Moody's.

У цілому ж дохід від облігацій нижчий, ніж від інших видів цінних паперів, але водночас він надійніший, оскільки менше залежить від кон'юнктурних коливань та фази економічного циклу, ніж, наприклад, дохід від акцій. У зв'язку з цим в облігації переважно інвестують вільні резерви такі інституції, як пенсійні фонди, страхові компанії, різного типу інвестиційні фонди. У деяких країнах у законодавчому порядку передбачені обов'язкові вкладання частини активів у державні облігації.

Розглянемо елементарні методи оцінювання вартості акцій та їх дохідності. Акції (stocks) є цінними паперами, що випускаються акціонерними товариствами для фінансування своєї діяльності. Розрізняють два основних типи акцій: привілейовані (preferred stocks) і звичайні (common stocks). Власник привілейованої акції має право отримувати фіксований дохід (дивіденд), причому сплата дивідендів за цими акціями здійснюється до розподілу дивідендів за звичайними акціями.

Проте привілейовані акції не дають права голосу на зборах акціонерів, тобто володіння цими акціями не дає права управляти акціонерним товариством. Привілейовані акції аналогічні облігаціям, але на відміну від останніх термін їх дії необмежений.

Акція (в класичному розумінні) є цінним папером, що не підлягає погашенню. Основну масу акцій становлять звичайні акції, власники яких є співвласниками частки акціонерного товариства, що дорівнює відношенню суми їхніх акцій до загального випуску акцій.

Із погляду теорії потоків платежів, привілейовані акції можна розглядати як довговічний рент постнумерандо. Якщо акція куплена на початку року, то її вартість дорівнює поточній вартості довічної ренти на цей момент часу:

$$P = Da_{\infty} = D / r, \quad (4.190)$$

де D — гарантована сума дивіденду за привілейовані акції, а r — річна ставка дохідності.

Як правило, формулою (4.190) користуються для оцінювання дохідності акцій за результатами торгів, коли ціна купівлі акцій відома

Якщо привілейовану акцію куплено за час Θ до чергової виплати дивідендів, то її вартість визначається як

$$P(\Theta) = \frac{D}{r} s^{1-\Theta} \approx \frac{D}{r} [1 + r(1 - \Theta)]. \quad (4.191)$$

За аналогією з ціною облігації ціну акції можна подати у вигляді суми «чистої» ціни акції, що визначається формулою (4.190), та «накопиченого» доходу з дивідендів

$$A(\Theta) = D(1 - \Theta). \quad (4.192)$$

Тоді для визначення дохідності акції слід відняти від ціни, за якою її куплено, накопичений дохід для сплати чергового дивіденду:

$$r = \frac{D}{P - A(\Theta)} - \frac{1}{P / D - (1 - \Theta)}. \quad (4.193)$$

Дохід від володіння звичайними акціями можна розглядати як нескінченний потік дивідендів (з погляду теорії потоків платежів). Тому вартість акції дорівнює поточній вартості нескінченної змінної ренти

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} D_k v^k. \quad (4.194)$$

Дивіденди звичайної акції можуть спадати, зростати або залишатися незмінними. Перший випадок нецікавий для аналізу. У випадку звичайної акції з нульовим зростанням дивіденди є сталими, і при $D_1 = D_2 = \dots = D$ маємо $P = Da_{\infty} = D / r$.

Реальна ціна акції може не збігатися з цією оцінкою, оскільки прогнози різних інвесторів — неоднакові. За відомою ринковою ціною акції можна оцінити її сподівану дохідність $r = D / P$.

Звичайні акції нормального (або сталого) зростання — це акції, за якими очікується щорічний приріст дивідендів зі сталим темпом

$$D_k = D_0 (1 + q)^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де k — номер року.

Ціна акції визначається як поточна вартість нескінченного потоку дивідендів

$$P = D_0 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + q)^k v^k = D_0 \sum_{k=1}^{\infty} w^k = D_0 \frac{w}{1 - w}, \quad w = v(1 + q).$$

Таким чином,

$$P = D_0 \frac{1 + q}{1 - q} = \frac{D_1}{1 - q}.$$

Ця модель називається моделлю Гордона.

4.13. СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ І ПЕНСІЙНЕ СТРАХУВАННЯ

Як приклади умовних рент, у яких фігурують імовірності появи відповідних подій (надходжень або виплат грошей), розглянемо найпоширеніші **страхові анuitети**, коли виплата члена ренти залежить від настання страхової події. До страхових, наприклад, належать усі анuitети, що застосовуються в особистому страхуванні. Відповідні грошові суми сплачуються тільки за життя (наприклад, пенсії) або, навпаки, в разі смерті застрахованої особи. Заздалегідь передбачити кількість платежів у таких анuitетах та їхній термін неможливо.

Відповідно до страхової угоди страхувальник сплачує наперед страховику деяку суму — страхову премію (premium). У свою чергу, він або його правонаступники мають право отримати страхову суму S після настання страхової події. Якщо ймовірність настання страхової події q задано (наприклад, на підставі минулого досвіду, за аналогією тощо), то теоретично, без урахування інших факторів, актуарно справедлива премія P визначається як сподівана величина страхової виплати σ , що набуває значення S з імовірністю q та значення 0 з імовірністю $1 - q$:

$$P = E\sigma = Sq.$$

Це відповідає принципу еквівалентних зобов'язань страховика і страхувальника. На практиці реальна страхова премія більша від Sq на суму **навантаження** (loading), що складається з витрат на ведення справи та деякого прибутку страхової компанії.

Простіше, як цей принцип реалізується при розрахунку **тарифної ставки** (ціни страхування), тобто ціли зобов'язання сплатити фіксовану суму при настанні страхової події в розрахунку на певну круглу суму страхової виплати (наприклад, 1000 грошових одиниць) при страхуванні життя.

Нехай P — сума нетто-премії (без страхового навантаження), а q_n — ймовірність смерті застрахованого через n років. Ураховуючи те, що у випадку, коли страхова подія відбудеться на першому році страхування, страхувальник отримав суму P (вважатимемо, що премії сплачуються на початку року), а коли на другому році, то сума премії становитиме $P(1+v)$ тощо, сподівана виплата такого ряду премій з урахуванням часової вартості грошей

$$E(A) = P \sum_{k=1}^n q_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} v^j \right),$$

де v — дисконтний множник за певною ставкою r .

Якщо вважати, що страхова сума сплачується наприкінці року, коли стався страховий випадок, то сподівання виплати в першому році є Svq_1 , у другому — Sv^2q_2 тощо. Отже, сподівання виплат з урахуванням часу платежу

$$E(S) = S \left\{ \sum_{k=1}^n v^k q_k \right\}.$$

Тоді згідно з принципом еквівалентності зобов'язань страховика і страхувальника маємо рівність $E(A) = E(S)$, що дає змогу знаходити шукану суму нетто-премії та тариф страхування без урахування навантаження.

У страхуванні майна можна припускати, що ймовірності появи страхового випадку — сталі ($q = q_k$), тоді маємо таке базове співвідношення для розрахунку нетто-премій і тарифних ставок за n років:

$$E(A) = Pq \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} v^j \right) = Sq \left(\sum_{k=1}^n v^k \right) = E(S).$$

У страхуванні життя використовуються значення ймовірностей щодо життя до певного віку або, навпаки, смерті в певному віці. Система таких характеристик визначається за допомогою таблиць смертності (mortality table), що дають змогу побудувати числову модель протесу вимірювання деякої сукупності людей. Ці таблиці використовують у демографічній статистиці і містять для кожного віку x такі дані, як: кількість l_x осіб кожного віку, які залишилися живими з початкової кількості в 100 тис. людей; кількість d_x осіб, які померли у кожній віковій групі після віку x протягом року; емпіричну ймовірність q_x померти протягом року після віку x років. Ці показники пов'язані такими співвідношеннями:

$$l_{x+1} = l_x - d_x; \quad d_x = l_x q_x.$$

На підставі числових даних таблиць смертності, які складають окремо для жінок і чоловіків, визначають ймовірність $p_x = l_{x+1}/l_x$ для кожної статі прожити ще один рік особі у віці x років та ймовірність ${}_np_x = l_{x+n}/l_x$ дожити з віку x до віку $x+n$ (тут n — кількість років майбутнього життя).

За числовими даними таблиць смертності можна знайти також ймовірності померти у певному віці. Так, ймовірність померти протягом року для особи у віці x років

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x},$$

а у віці від x до $x+n$ років

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{j=x}^{x+n-1} d_j.$$

Для спрощення запису страхових анuitетів та формул застосовують технічний апарат комутаційних функцій двох типів. До першого належать функції

$$D_x = l_x v^x, \quad N_x = \sum_{j=x}^{\infty} D_j,$$

де v — дисконтний множник за ставкою r ; ω — граничний вік, що використовується у розрахунку.

Другий тип включає функції $N_x^{(m)}$ і $\ddot{N}_x^{(m)}$, які застосовуються, коли є m виплат на рік.

Для розрахунку платежів постнумерандо використовується функція

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} D_x,$$

а платежів пренумерандо — функція

$$\bar{N}_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x.$$

До другого типу комунікаційних функцій належать також функції

$$C_x = d_x v^{x+1}; \quad M_x = \sum_{j=x}^w C_j.$$

Найпростішим випадком особистого страхування є страхування на дожиття (pure endowment), яке можна розглядати як спрощений варіант пенсійного страхування з однією пенсійною виплатою. Якщо людина у віці x років домовляється зі страховою компанією, що при досягненні певного віку, скажімо, 60 років вона отримає суму S , то розмір премії визначається математичним сподіванням суми страховки, дисконтованої на термін страхування.

$${}_{60-x}E_x = S {}_{60-x}p_x v^{60-x},$$

де ${}_{60-x}p_x$ — ймовірність дожити до 60 років особи у віці x років. У загальному випадку дожиття до віку $x+n$ років

$${}_nE_x = S ({}_np_x v^n) = S \frac{l_{x+n} v^x}{l_x v^x} v^n = S \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Розглянемо страхування життя, коли страхова сума S виплачується в разі смерті застрахованого, який уклав угоду у віці x років. Якщо він помре на першому році страхування, то вартість виплати на момент укладання контракту становитиме $q_x v S$, а при страховому випадку на другому році — ${}_2q_x v^2 S$ тощо (вважається, що виплата здійснюється наприкінці року).

Одноразовий нетто-тариф дорівнює PV страхового ануїтету або математичному сподіванню суми дисконтованих виплат

$$A = S \left(\frac{d_x}{l_x} v + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^2 + \dots + \frac{d_w}{l_x} v^{w-x} \right).$$

Помноживши та поділивши доданки цього виразу на v^x і використавши комутаційні функції D_x та M_x , матимемо

$$A = S \left(\frac{d_x}{D_x} v^{x+1} + \frac{d_{x+1}}{D_x} v^{x+2} + \dots + \frac{d_w}{D_x} v^w \right) = S \frac{M_x}{D_x}.$$

Розглянемо моделі діяльності недержавних пенсійних фондів, які в країнах з розвинутою ринковою економікою акумулюють великі кошти і значною мірою впливають на інвестиційні процеси в економіці.

Забезпечення пенсіями за віком з цих можна розглядати як довгостроковий інвестиційний процес, на першому етапі якого здійснюються вкладення (внески до фонду) і послідовне нарощення коштів завдяки доходам від інвестицій внесків, а на другому — отримується віддача від накопичень у вигляді періодичних пенсій. Особливості цього процесу зумовлюються прийнятими в конкретному фонді правилами, що регламентують внески та виплати пенсій.

Пенсійне страхування, очевидно, можна розглядати як страхування на дожиття, що послідовно повторюється. На практиці, однак, краще користуватися відповідним страховим ануїтетом.

Розглянемо найпростіший ануїтет, що складається з негалийних річних довічних виплат постнумерандо. При цьому вартість страхового ануїтету для особи у віці x років при щорічній виплаті обумовленої круглої суми (наприклад, 1000 грошових одиниць) становитиме

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 + \dots + \frac{l_w}{l_x} v^{w-x}$$

таких круглих сум, де w — максимальний вік, що враховується в розрахунку.

Помноживши і поділивши цей вираз на v^x , отримаємо

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{w-x} l_{x+j} v^{x+j}}{l_x v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \quad (4.195)$$

Вартість відкладеного на n років ануїтету постнумерандо становитиме

$${}_na_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}. \quad (4.196)$$

На практиці виплати проводяться найчастіше щомісяця в розмірі $1/12$ річної суми. Тоді замість формул (4.195) і (4.196) слід застосувати такі формули:

$$a_x^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)}}{D_x}; \quad {}_na_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x}.$$

Пенсії, як правило, сплачують у вигляді рент пренумерандо. При цьому вартість негалийного довічного ануїтету пренумерандо

$$\ddot{a}_x = \sum_{j=x}^w \frac{l_j}{l_x} v^{j-x} = \frac{N_x}{D_x},$$

а відкладеного на n років ануїтету

$${}_n\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

При щомісячних платежах

$$\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x}; \quad {}_n\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)}}{D_x}.$$

Якщо виплати здійснюються негайно, але не довічно, тобто протягом t років, то маємо негайні обмежені t -річні (t — year temporary life annuity) анuitети. Вартість такого анuitету постнумерандо

$$a_{x:t} = \sum_{j=1}^t E_x = \sum_{j=1}^t \frac{D_{x+j}}{D_x} = \frac{N_{x+t} - N_{x+t+1}}{D_x}.$$

Аналогічна для анuitетів пренумерандо

$$\ddot{a}_{x:t} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}.$$

Щодо відкладених на n років анuitетів постнумерандо та пренумерандо маємо

$${}_na_{x:t} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x},$$

$${}_n\ddot{a}_{x:t} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}.$$

У схемах пенсійного страхування, де за вихідну величину приймається розмір пенсії, основною задачею є розрахунок нетто-тарифу на обумовлену круглу суму пенсії.

Щодо разового внеску нетто-тариф дорівнює вартості анuitету, що відповідає умовам виплати пенсії, а нетто-премія — добутку вартості анuitету на розмір пенсії Y . Наприклад, для негайних і відкладених рент постнумерандо маємо

$$E = Ya_x = Y \frac{N_{x+1}}{D_x}; \quad E = Y({}_na_x) = Y \frac{N_{x+n+1}}{D_x}.$$

У практиці страхування премії найчастіше виплачуються кількома послдовними платежами (тобто в розстрочку). Деякі з цих платежів є страховим анuitетом, як і самі пенсії. Через еквівалентність фінансових зобов'язань учасників вартості відповідних анuitетів мають бути різними. Наприклад, коли преміальний анuitет є негайним, обмеженим, пенсійний — довічним, відкладеним, а щорічні платежі за обома анuitетами здійснюються постнумерандо, маємо рівність $Pa_{x:t} = Y({}_na_x)$, звідки нетто-премія

$$P = Y \frac{{}_na_x}{a_{1:t}} = Y \frac{\frac{N_{x+n+1}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t+1}}{D_x}} = Y \frac{N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+t+1}}.$$

4.14. ОЦІНЮВАННЯ І ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ТА КОМЕРЦІЙНИХ ПРОЄКТІВ

Теорія інвестицій (капіталовкладень) є складним і цікавим розділом сучасного фінансового аналізу та фінансової математики. Ми обмежимося розглядом деяких відносно простих методів аналітичного оцінювання ефективності, а також порівняльного аналізу інвестиційних та інших комерційних проєктів, коли спочатку вкладаються кошти в деяку сферу економіки чи фінансів (виробництво, будівельну галузь, торгівлю, цінні папери тощо), а потім вони поступово повертаються, приносячи інвестору певний прибуток. Завдання інвестора — групуючись на даних про проєкти (до їх початку) і відповідному прогнозу на період їх реалізації, вибрати оптимальний варіант вкладення своїх грошей, оцінивши дохідність проєктів. Це складне завдання, що містить моменти невизначеності та ризику. У відповідному фінансовому аналізі доцільно йти від простих моделей до складніших, щоб урахувати якомога більшу кількість факторів і параметрів. Розраховані на широке застосування моделі не повинні бути занадто складними. Нерідко порівняно прості моделі разом з експертними оцінками дають змогу мати достатню базу для прийняття рішення про інвестування.

Нижче будуються моделі детермінованих потоків грошових видатків та надходжень в інвестиційному проєкті, які розглядаються з різними знаками і розмірами платежів у дискретному та неперервному варіантах.

Нехай є інвестиційний проєкт, що починається в момент часу $t_0 = 0$ з капіталовкладенням $x(0)$, у момент часу t_k ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$) відбуваються додаткові видатки $x(t_k)$ або надходження (доходи) $y(t_k)$ — транзакції, при цьому взагалі $t_k - t_{k-1} \neq \text{const}$. Уведемо вектори $\vec{t} = (0, t_1, \dots, t_n)$, $\vec{x} = (x(0), x(t_1), \dots, x(t_n))$, $\vec{y} = (0, y(t_1), \dots, y(t_n))$ та позначимо потоки видатків і надходжень відповідно через $\pi(\vec{t}, \vec{x})$ та $\pi(\vec{t}, \vec{y})$. Для інвестора видатки вважаються від'ємними величинами, а доходи — додатними. Тоді $C(0) = -x(0)$ — початкова інвестиція, а $C(t_s) = y(t_s) - x(t_s)$ — нетто-платіж інвестора в момент t_s , $s = 1, \dots, n$ (при $C(t_s) < 0$ — це видаток, а при $C(t_s) > 0$ — дохід).

Можна розглянути один нетто-потік $\pi(\vec{t}, \vec{C})$, $\vec{C} = (C(0), C(t_1), \dots, C(t_n))$ з чистою вартістю NPV (Netto Present Value):

$$NPV\pi(\vec{t}, \vec{C}) = PV\pi(\vec{t}, \vec{y}) - PV\pi(\vec{t}, \vec{x}) = -x(0) + \sum_{s=1}^n C(t_s)(1+r)^{-t_s}$$

та чистою нарошеною вартістю NAV (Netto Accumulated Value) в момент $t > 0$:

$$NAV_t\pi(\vec{t}, \vec{C}) = \sum_{s: t_s \leq t} C(t_s)(1+r)^{t-t_s}.$$

За великої кількості дрібних платежів доцільно наближено описувати їх потік неперервною моделлю з кусково неперервною інтенсивністю нетто-потіку $\rho(t) = \rho_+(t) - \rho_-(t)$, де $\rho_-(t)$ — інтенсивність видатків, а $\rho_+(t)$ — інтенсивність доходів, так що на малому інтервалі часу $(t, t + \Delta t)$ чистий дохід приблизно дорівнює $\rho(t)\Delta t$.

Тоді сума M чистого доходу від потоку платежів на інтервалі $(0, \tau)$, $0 < \tau \in \mathbb{R}$ інтегралом:

$$M(\tau) = \int_0^{\tau} \rho(t) dt,$$

а NPV потоку $\pi[\rho(t), t < \tau]$ нетто-платежів визначається як

$$NPV\pi[\rho(t), t < \tau] = \int_0^{\tau} \rho(t)(1+r)^{-t} dt.$$

Модель неперервного потоку дає змогу аналізувати проекти без значних вкладень та доходів на відносно коротких проміжках часу. Для середньо- та довгострокових проектів потрібно застосовувати модель змішаного потоку коштів: поряд із відносно рідкими великими нетто-платежами $\bar{C} = (C(0), C(t_1), \dots, C(t_n))$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ на проміжних інтервалах часу платежі можна вважати неперервними з інтенсивністю нетто-потіку $\rho(t)$. Позначимо такий потік через $\pi[\bar{t}, \bar{c}, \rho, t < T]$.

Для вибору найкращих варіантів вкладення коштів у проекти використовують різні методи. Найчастіше вони ґрунтуються на застосуванні таких основних показників порівняння: 1) *чистої потокової вартості* NPV ; 2) *внутрішньої норми дохідності* IRR (Internal Rate of Return); 3) *періоду окупності капіталовкладень* (payback period); 4) *індексу рентабельності* (benefit cost ratio).

Найчастіше як першу характеристику проекту розглядають його NPV , що збігається з $NPV\pi$ відповідного потоку платежів π . Нерівність $NPV\pi < 0$ вказує на недоцільність застосування інвестором відповідного варіанта потоку платежів $\pi(\bar{t}, \bar{c}, \rho, t < T)$ при заданих параметрах \bar{t}, \bar{c}, ρ й r . Серед варіантів з $NPV\pi > 0$ потрібно вибрати той, де $NPV\pi$ більша, і порівняти його із вкладенням грошей на банківський депозит, що може бути більш рентабельним і до того ж значно менш ризиковим варіантом.

Для цього використовують показник IRR $r_0 = e^{\delta_0} - 1$, де r_0 є коренем рівняння

$$f(r) := NPV\pi = \sum_{s=0}^n C(t_s)(1+r)^{-t_s} + \int_0^T \rho(t)(1+r)^{-t} dt = 0 \quad (4.197)$$

(при $r > 0$), яке називається рівнянням вартості або дохідності проекту на момент часу 0.

Суть рівняння (4.197) полягає в тому, що PV на момент $t_0 = 0$ потоку видатків та потоку доходів збігаються, тобто проект при ставці r_0 є безприбутковим. Якщо рівняння (4.197) має єдиний додатний корінь r_0 , то

він називається IRR за базисну одиницю часу. При $r_0 < r$, де r — ринкова відсоткова ставка, проект потрібно відхилити, а при $r < r_0$ він потенційно придатний, але серед подібних варіантів слід вибрати із найбільшим значенням r_0 .

Якщо потік π задано, то $f(0)$ є недисконтованою сумою всіх нетто-платежів на термін проекту. З фінансових міркувань і суті f випливає, що слід відхилити всі варіанти з $f(0) \leq 0$ і розглядати тільки варіанти з $f(0) > 0$. Зауважимо також, що $f(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = C(0) = -x(0)$.

Приклад 4.21. Нехай в момент часу $t_0 = 0$ інвестор вкладає у проект суму грошей m , розраховуючи отримувати наприкінці кожного року 1, 2, 3, ..., n сталу суму доходу im , де i — норма дохідності за один рік, і наприкінці терміну повернути суму вкладу m . Обчислимо r_0 .

Рівняння (4.197) має вигляд

$$f(r) = -m + im \sum_{s=1}^n (1+r)^{-s} + m(1+r)^{-n} = -m + im \sum_{s=1}^n v^s + mv^{-n}, \quad (4.198)$$

де v — коефіцієнт дисконтування.

Оскільки $\sum_{s=1}^n v^s = (1 - v^n)r^{-1}$, після підстановки цього виразу в (4.198) та скорочення на $m > 0$ отримуємо

$$-1 + r(1 - v^n)r^{-1} + v^n = 0. \quad (4.199)$$

Очевидно, що $r_0 = i$ є єдиним коренем полінома в лівій частині (4.199), тобто IRR проекту дорівнює i .

Приклад 4.22. Нехай є схема погашення боргу m , взятого на n років за річною ставкою i з умовою виплати наприкінці кожного року 1, 2, ..., n відсотків у сумі im і повернення наприкінці року n нерівної суми боргу m . Це є іншою інтерпретацією прикладу 4.21, коли за допомогою ренти поступово зменшуємо рівняння (4.198) можна подати в еквівалентній формі $m = im a_{\overline{n}|r} + mv^n$.

Виконується таке твердження про достатні умови існування IRR .

Пропозиція 4.2. I. Якщо в потоці всі від'ємні платежі передують усім додатним, і навпаки, то r_0 визначено. II. Нехай $t_0 < t_1 < \dots < t_n$

та $C_n = \sum_{s=0}^n C(t_s)$, $n = 1, 2, \dots, k$, — накопичена сума всіх нетто-платежів інвестора від моменту $t_0 = 0$ до t_n включно. Якщо $C_0 \neq 0$, $C_k \neq 0$ і після виключення нульових значень послідовність (C_0, C_1, \dots, C_k) має тільки одну зміну знака, то рівняння дохідності (4.197) має єдиний додатний корінь¹.

Третім показником ефективності інвестиційних проектів є період окупності. Розглянемо дискретний потік платежів $(C_0, C_1, \dots, C_l, C_{l+1}, \dots, C_n)$ і припустимо, що вони віднесені до середини базисної одиниці часу (наприклад, місяця), причому перші $l + 1$ члени потоку платежів є суто інвестиційними, а інші — суто дохідними.

¹Доведення цього факту можна знайти в книзі McCutcheon J. J., Scott W. F. An introduction to the mathematics of finance. — Oxford: Heinemann, 1986.

Тоді загальний обсяг інвестицій $K = \sum_{j=0}^t |c_j|$, а період окупності m без зведення сум грошей до одного моменту часу можна знайти послідовним акумулюванням щомісячних доходів, коли вони не перевищують K

$$m = \min_{1 \leq s \leq n} \left(\sum_{t=1}^s C_{t+s} \geq K \right),$$

тобто період окупності m є розв'язком нерівності

$$\sum_{t=1}^{m-1} C_{t+s} < K \leq \sum_{t=1}^m C_{t+s}. \quad (4.200)$$

Наприклад, у найпростішому випадку, коли інвестиції в розмірі $|C_0| = K$ здійснюються тільки один раз, а всі надходження дорівнюють C_1 , умова (4.200) має вигляд $(m-1)C_1 < K \leq mC_1$.

У складнішому, але краще обґрунтованому варіанті потрібно спочатку звести всі грошові суми до одного моменту часу — моменту закінчення інвестицій, а потім визначити період окупності проєкту. Це уточнене значення (present value payback period) буде більшим за первісне.

Четвертий показник — індекс рентабельності BCR проєкту є відношенням суми всіх дисконтованих грошових доходів від інвестицій до суми всіх дисконтованих інвестиційних витрат. Якщо $BCR < 1$, то проєкт відхиляється, а серед проєктів з індексом > 1 перевага надається проєкту з найбільшим індексом BCR , але він може мати не найбільшу NPV .

Приклад 4.23. Нехай є два проєкти A і B . Для проєкту A PV усіх доходів дорівнює $\$ 10^6$, а інвестиційні витрати IC становлять $\$ 4 \cdot 10^5$. Для проєкту B відповідно $PV_B = \$ 245 \cdot 10^3$ та $IC_B = \$ 10^5$. Відомо, що NPV проєкту A більша за аналогічний показник для проєкту B . Індекси рентабельності цих проєктів

$$BCR(B) = PV_B / IC_B = 245 \cdot 10^3 / 10^5 = 2.45;$$

$$BCR(A) = PV_A / IC_A = 10^6 / (4 \cdot 10^5) = 2.25.$$

Тому за рентабельністю проєкт B кращий. Проте проєкт A дає змогу інвестувати більше коштів і має більшу NPV , тобто економічно він може бути вигіднішим. Отже, індекс рентабельності не є однозначним критерієм ефективності проєкту.

Розглянемо простий випадок, коли інвестор може отримати або дати кредит під однаковий відсоток, причому його можливості щодо взяття кредиту необмежені. Рівень інфляції для різних компонентів майбутнього потоку платежів може бути різним (наприклад, зарплата може зростати повільніше, ніж ціна на матеріали).

Розглянемо випадок, коли всі компоненти платежів за період $(0, T)$ мають однакову інфляцію з прогнозованим темпом h за базисну одиницю часу. Припустимо, що всі платежі індексуються з урахуванням h так, що прогнозні оцінки $C_h(t_0), C_h(t_1), \dots, C_h(t_n), 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ і $\rho_h(t), 0 \leq t \leq T$ для параметрів дискретно-неперервного потоку платежів набувають вигляду $C_h(t_s) = (1+h)^{t_s} C(t_s), \rho_h(t) = (1+h)^t \rho(t)$.

Тоді дисконтована на момент $t_0 = 0$ вартість потоку платежів при ставці відсотків r за базисну одиницю часу становитиме

$$\begin{aligned} NPV_h(r) &= \sum_{s=0}^n C_h(t_s)(1+r)^{-t_s} + \int_0^T \rho_h(t)(1+r)^{-t} dt = \\ &= \sum_{s=0}^n C(t_s)(1+j)^{-t_s} + \int_D \rho(t)(1+j)^{-t} dt, \end{aligned} \quad (4.201)$$

де j визначається рівністю $1+j = (1+r)/(1+h)$, тобто j можна інтерпретувати як ставку відсотків з урахуванням інфляції.

Очевидно, що при $h \geq r$ інвестиції не мають сенсу. Якщо $h < r$, причому h та r досить малі (наприклад, не перевищують 0,05 ... 0,1), то $j \approx r - h$.

Порівняння формул (4.201) і (4.197) дає рівність $NPV_h(r) = NPV(j)$, де праворуч інфляцію враховано переходом від r до j . Позначаючи IRR в лівій частині останньої рівності через $r_0^{(h)}$, а у правій — через r_0 , маємо $(r_0^{(h)} - h)/(1+h) = r_0$. Звідси $r_0^{(h)} = r_0(1+h) + h$, де r_0 — ставка доходності проєкту без урахування інфляції. Якщо $r_0 h$ досить мале, то $r_0^{(h)} \approx r_0 + h$.

Зробимо кілька загальних зауважень щодо методики вибору інвестиційного проєкту.

Насамперед усі суми, що враховуються, звільняють від податків. Потім, якщо для фірми-інвестора особливо важливим є період окупності, відхиляють усі неприпустимі варіанти. Якщо цей показник неважливий, то його часто зовсім не враховують. Далі застосовують два з трьох показників NPV , IRR і BCR . Аналітики фірми на підставі досвіду фірми ранжують ці показники. Наприклад, у США найчастіше видають перевагу парі $IRR - NPV$ або парі $NPV - IRR$. Якщо при виборі проєкту за допомогою вибраної пари показників трапляються помітні розбіжності, то застосовують ще й третій показник або проводять поглиблений аналіз проблеми.

У цілому західний досвід показує, що великі фірми використовують описаний вище апарат фінансового аналізу значно частіше, ніж малі (щодо останніх проєкти є дрібномасштабними та більш очевидними для аналізу).

4.15. АНАЛІЗ ПОРТФЕЛЬНИХ ІНВЕСТИЦІЙ. ТЕОРІЯ ПОРТФЕЛЯ. МОДЕЛЬ САРМ

Портфельні інвестиції полягають в інвестуванні коштів інвестора у певну сукупність фінансових активів тим чи іншим розподілом капіталу між активами. Отже, вони не пов'язані з інвестуванням, наприклад, в один тип акцій або в певну галузь економіки, фірму тощо. Як правило, відповідними фінансовими активами є цінні папери (переважно звичайні акції, що є фінансовим інструментом із плаваючою доходністю). Ось чому тут

цілком природним є застосування стохастичного апарата теорії ймовірностей і математичної статистики для аналізу характеристик цих інструментів та портфеля з них.

В основі такого підходу лежать стохастична модель ринку цінних паперів й аналіз середніх і коваріацій, які вперше були запропоновані Г. Марковіцем¹ й нині широко застосовуються в теорії інвестицій. Сутність цього аналізу² полягає в дослідженні дохідностей активів як випадкових величин за допомогою таких їхніх характеристик, як середні, дисперсії та коваріації.

Основна стохастична модель ринку цінних паперів будується на припущеннях про визначеність інвестиційного горизонту, наявність скінченної кількості фінансових інструментів з нефіксованою дохідністю, ігноруванні комісійних брокерам і витрат на перереєстрацію прав власності тощо.

У моделі припускається, що інвестор, маючи певний початковий капітал I_0 , використовує його в момент часу $t_0 = 0$ на придбання портфеля з усіх доступних йому активів на термін інвестиційного горизонту T . Наприкінці періоду інвестор реалізує (за ринковою ціною) всі активи портфеля, перетворюючи його на капітал I_T . При цьому відносна дохідність портфельної інвестиції $R = (I_T - I_0)I_0^{-1}$, де I_0 є детермінованою величиною, а I_T — випадковою величиною, як і дохідність R .

Ринкові ціни акцій (через співвідношення попиту та пропозиції) визначаються багатьма факторами економічного, політичного, інформаційного та іншого характеру. Сукупність цих факторів формує певний стан ринку в цілому. Кожен стан є елементарною подією у стохастичному просторі Ω всіх можливих станів ринку. Кожен стан ринку визначає дохідність усіх активів, певну сукупність яких $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ інвестор може залучити до портфеля. Вектор дохідності активів R є випадковим вектором на Ω , $R = \{R_1, \dots, R_n\}$, де R_i — дохідність активу a_i , $i = 1, \dots, n$, що є випадковою величиною на (Ω, \mathcal{B}, P) . Тут \mathcal{B} — алгебра випадкових подій на Ω , а P — ймовірнісна міра на \mathcal{B} .

В інвестора є можливість вибрати портфель π з певної сукупності допустимих портфелів Π . Під портфелем розуміють n -вимірний вектор $\pi = (x_1, \dots, x_n)$, що характеризує розподіл капіталу інвестора (в частках одиниці) між активами a_1, \dots, a_n , так що $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. Дохідність (ефективність) портфеля R_π є лінійною комбінацією дохідностей R_1, \dots, R_n , тобто $R_\pi = x_1 R_1 + \dots + x_n R_n$.

Отже, стохастична модель ринку, пов'язаного з портфельними інвестиціями, є впорядкованою сукупністю об'єктів $\{(\Omega, \mathcal{B}, P), A, R, \Pi\}$, де (Ω, \mathcal{B}, P) — ймовірнісний простір станів ринку.

¹Марковіц Гаррі (нар. 1927 р.) — американський економіст, лауреат Нобелівської премії 1990 р., присудженої за розробку теорії портфеля в теорії фінансів.

²Markowitz H. M. Portfolio Selection // J. of Finance — 1952. — 7, № 1. — Р. 77–91; Markowitz H. M. Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. — Basil: Blackwell, 1990.

Задача інвестора полягає у знаходженні оптимального портфеля π , який дає найкращі (для цього інвестора) характеристики R_π .

Математичні сподівання дохідностей $m_j = ER_j$ ($j = 1, \dots, n$) характеризують середню ефективність відповідних активів a_j , дисперсії $\sigma_j^2 = V_{jj} = E(R_j - Em_j)^2$ варіабельність відносних дохідностей R_j активів a_j , а отже, і ризиковість вкладення коштів у них.

Інвестор зацікавлений в отриманні більшої сподіваної ефективності вкладу, але водночас для нього важливим є бажання зменшити ризик.

Наприклад, якщо є вибір між двома видами цінних паперів, причому $m_1 > m_2$, а $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то раціональний інвестор вкладає гроші у цінні папери першого виду. Якщо, навпаки, $m_1 = m_2$, а $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, то інвестор вибере інший вид як менш ризиковий (з яким пов'язана менша невизначеність). Однак у загальному випадку, коли $m_1 < m_2$ та $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (або $m_1 > m_2$ і $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$), однозначного рішення немає. В цілому кожен інвестор, який вкладає гроші в акції або інший ризиковий вид цінних паперів, є свого роду гравцем, поведінка якого залежить від його схильності до ризику.

Будь-яка система заходів, спрямована на зниження ризику, називається **хеджуванням** (від англ. слова *hedge* — огорожа). Ідея саме портфельних інвестицій полягає у комбінованому вкладі коштів у різні активи, що дає змогу **диверсифікувати** ризик і оптимізацією портфеля додатково знизити показники ризиковості інвестування.

Сподіваний ефект портфельної інвестиції з портфелем $\pi = (x_1, \dots, x_n)$ визначається як

$$m_\pi = ER_\pi = E\left(\sum_{j=1}^n x_j R_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j ER_j = \sum_{j=1}^n x_j m_j.$$

Ризикованість такого портфеля характеризується дисперсією його ефекту

$$V_\pi = E(R_\pi - m_\pi)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E(R_i - m_i)(R_j - m_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij},$$

де $V_{ij} = E(R_i - m_i)(R_j - m_j)$, $j = 1, \dots, n$ є коваріаціями випадкових величин R_i та R_j , тобто $V_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j)$. Зокрема, $V_{jj} = E(R_j - m_j)^2 = \sigma_j^2$ є дисперсіями R_j , $j = 1, \dots, n$.

Розглянемо приклади, пов'язані з ефектом диверсифікації (різноманітності) портфеля.

Приклад 4.24. Нехай випадкові ефекти від різних видів цінних паперів у портфелі π є некорельованими, тобто $V_{ij} = 0$, $i \neq j$ (зокрема, взаємно незалежними). Тоді $V_\pi = \sum_{j=1}^n x_j^2 \sigma_j^2$, і за основний показник ризиковості портфеля можна прийняти його середнє квадратичне відхилення $\sigma_\pi = \sqrt{V_\pi}$.

Якщо інвестор вклав гроші однаковими частками в усі цінні папери ($x_j = 1/n$, $j = 1, \dots, n$), то

$$m_\pi = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j; \sigma_\pi = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} \sigma_j^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right)^{1/2}.$$

Звідси

$$\sigma_\pi \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right)^{1/2} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}; \bar{\sigma} = \max_j \sigma_j.$$

Отже, при зростанні кількості видів активів n ризик портфеля обмежується і прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ (за законом великих чисел теорії ймовірностей). Це ілюструє ефект диверсифікації та практичне правило фінансового ринку: для підвищення надійності інвестування в цінні папери слід складати портфель, що містить велику різноманітність паперів, ефект від яких випадковий, але випадкові відхилення — збігаються незалежні.

Приклад 4.25. Нехай до портфеля входять два типи цінних паперів ($n = 2$), відносно доходності яких обернено корельовані: $\rho_{12} = \frac{V_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -1$. Тоді

$V_\pi = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$, тобто якщо $x_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_1$, то $V_\pi = 0$. Отже, ризик відсутній.

Приклади з додатно корельованими цінними паперами, які складають портфель, показують, що в цьому разі диверсифікація вкладу може бути даремною.

Одним із можливих підходів до оптимальної поведінки інвестора щодо портфельних інвестицій може бути бажання: 1) максимізації сподіваної доходності портфеля m_π при заданому рівні ризику V_π ; 2) мінімізації ризику, вираженого через V_π , при заданому рівні сподіваної ефективності m_π . Подібні оптимізаційні задачі є сутністю аналізу середніх та дисперсії, запропонованого Г. Марковічем у теорії портфеля.

Розглянемо докладно другу задачу пошуку оптимального портфеля $\pi^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, що мінімізує дисперсію ефективності портфеля

$$V_\pi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min \quad (4.202)$$

за умови забезпечення заданого значення \bar{m}_π сподіваної ефективності

$$\sum_{j=1}^n x_j m_j = \bar{m}_\pi \quad (4.203)$$

та стандартної умови

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad (4.204)$$

яка виражає факт розподілу капіталу інвестора на частки серед активів, що входять до портфеля.

При цьому розв'язок задачі з $x_j^* > 0$ означає рекомендацію інвестору вкласти в актив a_j частку x_j^* наявного в нього капіталу, а з $x_j^* < 0$ — рекомендацію взяти в борг цієї активу у кількості $-x_j^*$ на одиницю наявно-

го капіталу, тобто брати участь в операції типу short sale. Проте це часто є неможливим, і тоді доводиться вводити в оптимізаційну задачу інвестора додаткові обмеження

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n. \quad (4.205)$$

Задача (4.202) – (4.204) є класичною задачею на умовний екстремум, що дає змогу дістати її розв'язок в явному вигляді, і відома як задача Марковіца. Задача (4.202) – (4.205) є задачею квадратичного програмування, яка не завжди має явну форму розв'язку.

Вводячи позначення $V = \{V_{ij}\}_{i,j=1}^n$ для матриці коваріацій, $m = (m_j)_{j=1, n}$ для вектора-стовпця сподіваних ефективностей та $I = (1)_{j=1, n}$ для вектора-стовпця з одиниць, а також $x = (x_j)_{j=1, n}$ для вектора, що зображує портфель π , задачу (4.202) – (4.204) можна подати в матричній формі

$$V_\pi = x^T V x \rightarrow \min; m^T x = \bar{m}_\pi; I^T x = 1, \quad (4.206)$$

де \bar{m}_π — фіксована величина, а V та m задані.

Функція Лагранжа задачі (4.206) має вигляд

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x) = x^T V x + \lambda_1 (I^T x - 1) + \lambda_2 (m^T x - \bar{m}_\pi).$$

Умова оптимальності першого порядку

$$\frac{\partial L(\lambda_1^*, \lambda_2^*, x^*)}{\partial x} = 0 \quad (4.207)$$

разом з умовами $\partial L / \partial \lambda_1 = D$ і $\partial L / \partial \lambda_2 = D$, що виражають обмеження задачі в разі додатної визначеності коваріаційної матриці V , є достатньою для оптимуму π . Рівняння (4.207) має явний вигляд

$$2Vx^* = -\lambda_1^* I - \lambda_2^* m,$$

звідки (враховуючи, що матриця V — додатно визначена, а отже, має обернену матрицю V^{-1})

$$x^* = \frac{-\lambda_1^*}{2} V^{-1} I - \frac{\lambda_2^*}{2} V^{-1} m. \quad (4.208)$$

Підставляючи (4.208) в обмеження (4.203) та (4.204), отримуємо систему лінійних рівнянь для визначення значень λ_1^* і λ_2^* множників Лагранжа:

$$\begin{aligned} -\lambda_1^* I^T V^{-1} I - \lambda_2^* I^T V^{-1} m &= 2; \\ -\lambda_1^* m^T V^{-1} I - \lambda_2^* m^T V^{-1} m &= 2\bar{m}_\pi. \end{aligned} \quad (4.209)$$

Розв'язавши (4.209) та підставивши знайдені λ_1^* , λ_2^* в (4.208), матимемо явне зображення оптимальної структури портфеля

$$\pi^* = x^* = V^{-1} \frac{\bar{m}_\pi (I J_{12} - m J_1) + m J_{12} - I J_2}{J_{12}^2 - J_1 J_2}, \quad (4.210)$$

де $J_1 = I^T V^{-1} I$; $J_2 = m^T V^{-1} m$; $J_{12} = I^T V^{-1} m$.

Отже, оптимальний розв'язок є афінною функцією параметра \bar{m}_π . Звідси оптимальне значення показника ризику $V_\pi^* = (x^*)^\# V x^*$ є угнутою функцією \bar{m}_π , і це саме стосується середнього квадратичного відхилення портфеля $\sigma_\pi^* = \sqrt{V_\pi^*}$.

Якщо на портфель накладено умову невід'ємності (4.205) (тобто отримання активів у борг є неможливим), то для відповідної задачі квадратичного програмування доводиться застосовувати спеціальні обчислювальні методи, щоб знайти x^* . Один із можливих підходів тут полягає в тому, що спочатку розв'язується задача без обмежень (4.205). Якщо в здобутому розв'язку деякі $x_j^* \leq 0$, то з портфеля виключаються відповідні цінні папери a_j , а задача розв'язується знову.

Зауважимо, що розв'язання задачі (4.210) значно спрощується, коли ефективності є некорельованими, тобто матриця V — діагональна:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$J_1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2}; \quad J_2 = \sum_{j=1}^n \frac{m_j^2}{\sigma_j^2}; \quad J_{1,2} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\sigma_j^2}.$$

Уяву про властивості розв'язку x^* можна отримати за допомогою узагальненого методу Лагранжа, вводючи додаткові множники $\mu = (\mu_j)_{j=1, n}$, що відповідають кожній нерівності $x_j \geq 0$.

Розв'язок, виражений через ці множники, має вигляд

$$x^* = V^{-1} \left\{ B^\# (B V^{-1} B^\#)^{-1} \left[d + \frac{1}{2} B V^{-1} \mu \right] \right\},$$

$$d^\# = (1, \bar{m}_\pi), \quad B^\# = (I^\#, m^\#),$$

а множники μ та x^* задовольняють умови додаткової нежорсткості

$$\mu_j x_j^* = 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad x_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Розглянемо тепер модифікацію портфеля цінних паперів, коли інвестор поряд із ризикованими вкладеннями капіталу може робити також безризикові. Позначивши через x_0 та r_0 відповідно частку й ефективність безризикової частини портфеля, отримаємо таку задачу формування оптимального портфеля:

$$x^\# V x \rightarrow \min; \quad m^\# x + r_0 x_0 = \bar{m}_\pi; \quad I^\# x + x_0 = 1, \quad (4.211)$$

відому як задача Тобіна¹.

¹Тобін Джеймс (нар. 1918 р.) — американський економіст математичного напрямку, лауреат Нобелівської премії з економіки 1981 р., присудженої за аналіз фінансових ринків та їх впливу на політику, пов'язану з безробіттям, виробництвом та цінами

Застосувавши функцію Лагранжа

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x, x_0) = x^\# V x + \lambda_1 (I^\# x + x_0 - 1) + \lambda_2 (m^\# x + r_0 x_0 - \bar{m}_\pi)$$

й умови оптимальності $\partial L / \partial x = 0$, $\partial L / \partial x_0 = 0$, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$2Vx^* + \lambda_1^* I + \lambda_2^* m = 0; \quad \lambda_1^* + \lambda_2^* r_0 = 0,$$

звідки

$$\lambda_1^* = -\lambda_2^* r_0, \quad x^* = V^{-1} (I r_0 - m) \quad (\lambda_2^* / 2). \quad (4.212)$$

Виключивши x_0^* з обмежень задачі, маємо $(m - r_0 I)^\# x^* = \bar{m}_\pi - r_0$. Підставивши x^* з (4.212), отримаємо рівняння для λ_2^* , з якого знаходимо

$$\lambda_2^* = -\frac{2(\bar{m}_\pi - r_0)}{(m - r_0 I)^\# V^{-1} (m - r_0 I)},$$

що дає змогу перетворити (4.212) на явний вираз розв'язку

$$x^* = x^* = \frac{V^{-1} (m - r_0 I) (\bar{m}_\pi - r_0)}{(m - r_0 I)^\# V^{-1} (m - r_0 I)}. \quad (4.213)$$

Із (4.213) випливає, що структура ризикових вкладень не залежить від \bar{m}_π :

$$\frac{x^*}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{V^{-1} (m - r_0 I)}{I^\# V^{-1} (m - r_0 I)}. \quad (4.214)$$

Мінімальна варіація портфеля має вигляд

$$V_\pi^* = (x^*)^\# V x^* = (\bar{m}_\pi - r_0)^2 g^{-2};$$

$$g^2 = (m - r_0 I)^\# V^{-1} (m - r_0 I).$$

Звідси випливає афінна залежність \bar{m}_π від σ_π^* :

$$\bar{m}_\pi = r_0 + g \sigma_\pi^*.$$

При $x_0^* = 0$ оптимальний портфель складається тільки з ризикових цінних паперів і є пайоптимальнішим серед можливих варіантів таких паперів.

Ці добрі властивості має розв'язок задачі Тобіна при обмеженнях невід'ємності змінних $x \geq 0$. Тут розв'язок можна подати у вигляді

$$x^* = (\bar{m}_\pi - r_0) g^{-2} V^{-1} (m - r_0 I) +$$

$$+ \frac{1}{2} V^{-1} [(m - r_0 I) (m - r_0 I)^\# V^{-1} g^{-2} - I] \mu, \quad (4.215)$$

де $\mu = (\mu_j)_{j=1, n}$ — множники, що разом з компонентами x^* задовольняють умови додаткової нежорсткості.

Не нульові множники визначаються сумісно з нульовими компонентами x^* із лінійної системи рівнянь, права частина якої пропорційна $\bar{m}_\pi - r_0$.

Тому й розв'язок x^* пропорційний $\bar{m}_\pi - r_0$, а отже, структура ризикових вкладень не повинна залежати від цього скалярного множника.

Зауважимо, що хоча гіпотеза Тобіна про можливість чисто безризикових вкладень практично некоректна, але можна довести, що за наявності слабкоризикових вкладень (з малим σ) розв'язок задачі Марковича близький до розв'язку задачі (4.211), побудованої з урахуванням нехтування слабким ризиком.

Розглянемо оцінювання внеску кожного цінного паперу, що ввійшов до оптимального портфеля, щодо загальної сподіваної його ефективності.

Ефективність оптимального портфеля є випадковою величиною

$$R_\pi^* = r_0 x_0 + \sum_{j=1}^n R_j x_j^* = r_0 x_0 + R^\# x^*.$$

Звідси з урахуванням умови $\bar{m}_\pi = r_0 x_0 + m^\# x^*$ маємо

$$R_\pi^* - \bar{m}_\pi = r_0 x_0 - \bar{m}_\pi + R^\# x^* = (R - m)^\# x^*.$$

Характеристикою внеску активу a_j в оптимальний портфель є величина β_j^* , яка називається «бетою внеску j в π^* » і визначається рівністю

$$\beta_j^* = \frac{1}{V_\pi^*} \text{Cov}(R_j, R_\pi^*) = \frac{1}{V_\pi^*} E(R_j - m_j)(R_\pi^* - \bar{m}_\pi). \quad (4.216)$$

Звідси вектор β^* з компонентами β_j^* має вигляд

$$\beta^* = \frac{1}{V_\pi^*} E(R - m)(R - m)^\# x^* = \frac{V x^*}{V_\pi^*}$$

або з урахуванням виразів V_π^* та рівності $\bar{m}_\pi r_0 = g \sigma_\pi^*$ — вигляд

$$\beta^* = (m - r_0 I)(\bar{m}_\pi - r_0)^{-1}. \quad (4.217)$$

Співвідношення (4.217) записують у скалярній формі як рівність

$$m_j - r_0 = \beta_j^* (\bar{m}_\pi - r_0), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.218)$$

Величини $m_j - r_0$ трактуються як премії за ризик активу a_j , включеного в оптимальний портфель. Із (4.218) випливає, що така премія для будь-якого цінного паперу пропорційна премії за ризик, пов'язаній з портфелем у цілому, тобто $\bar{m}_\pi - r_0$.

Практичне використання теорії оптимального портфеля потребує знання вектора математичних сподівань m і матриці коваріацій ефективностей V . Існують різні підходи до вирішення відповідної проблеми за допомогою статистичних даних про фінансовий ринок.

У країнах із розвинутою ринковою економікою ведеться статистика ринку цінних паперів, що включає послідовні дані, які відображають історію курсів цінних паперів та дивідендів від них за досить тривалий період. Маючи подібні дані, можна побудувати послідовності реальних ефективностей цінних паперів за кожний квартал, користуючись правилом:

якщо R_j^t — ефективність паперів a_j за період часу t , то

$$R_j^t = \frac{C_j^{(t+1)} + d_j^{(t)} - C_j^{(t)}}{C_j^{(t)}}, \quad (4.219)$$

де $C_j^{(t)}$ — ціна паперу на початку періоду t , а $d_j^{(t)}$ — дивіденди за цей період.

Трактуючи послідовності (4.219) як спостереження за випадковими величинами R_j протягом інтервалу часу $1 \leq t \leq T$, можна побудувати оцінки величин m_j та V_{ij} відповідно до стандартних правил математичної статистики:

$$\hat{m}_j^T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j^{(t)};$$

$\hat{V}_{ij}^T = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_i^{(t)} - m_i^T)(R_j^{(t)} - m_j^T)$ і використати оцінки \hat{m}_j^T та \hat{V}_{ij}^T для розрахунків оптимального портфеля як емпіричні значення m_j та V_{ij} .

На завершення розглянемо модель рівноваги на ринку цінних паперів, що відображає взаємодію попиту та пропозиції на подібні ризикові активи. Така модель була розроблена У. Ф. Шарпом¹, Лінчером та Моссіном під назвою «модель ціноутворення на ринку активів, пов'язаних із капіталовкладеннями (Capital Asset Pricing Model, або CAPM)». Обмежимося викладом простого варіанта опису цієї моделі.

Нехай на ринку цінних паперів діє скінченна кількість інвесторів I з номерами $i = 1, 2, \dots, I$; безризиковим паперам відповідає індекс $j = 0$, а ризиковим — індекси $j = 1, 2, \dots, n$. Припустимо, що в початковий момент інвестор i має частку x_{ij}^0 кількості ризикових цінних паперів виду j , а початкова ринкова вартість цієї кількості (ринкова оцінка емітента) дорівнює W_j^0 . При фіксованій кількості цінних паперів вона пропорційна ціні одного паперу. Нехай також інвестор має суму b_i^0 , вкладену в безризикові цінні папери.

Таким чином, початковий капітал інвестора

$$k_i^0 = b_i^0 + \sum_{j=1}^n x_{ij}^0 W_j^0.$$

Поведінка інвесторів визначається, виходячи з таких основних припущень:

1. Усі інвестори однаковою мірою інформовані про ефективність вкладень у довільні цінні папери, виражену через відомі значення сподіваних ефективностей m_j та коваріацій V_{ij} .

¹Шарп Уільям Ф. (нар. 1934 р.) — американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки за 1990 р., присудженої за розробку моделі ціноутворення активів корпорацій.

2. Кожен інвестор намагається придбати портфель ризикових цінних паперів, оптимальний за своєю структурою, а частку безризикової частини вкладень він визначає максимізацією середнього значення квадратичної функції корисності

$$u_i(kR) = kR - A_i(kR - km_R)^2, \quad m_R = ER$$

(тут R – випадкова ефективність при вибраній структурі портфеля, k – капітал), тобто максимізацією середнього

$$Eu_i(kR) = km_R - A_i k^2 \sigma_R^2, \quad i = 1, \dots, I. \quad (4.220)$$

Коефіцієнти $A_i > 0$ характеризують схильність інвесторів до ризику так, що при малому A_i схильність велика (тобто мірою схильності до ризику слід вважати величину A_i^{-1}).

Із наведених припущень випливає, що всі інвестори прагнуть придбати однакові за структурою портфелі ризикових цінних паперів, тобто ефективності ризикової частини у всіх інвесторів однакові і дорівнюють R^* .

Якщо i -й інвестор вкладає частку x_{i0} свого первісного капіталу в безризикові цінні папери, то наприкінці інтервалу часу, для якого визначено всі ефективності, його капітал становитиме

$$k_i^1 = x_{i0} k_i^0 (1 + r_0) + (1 - x_{i0}) k_i^0 (1 + R^*),$$

де r_0 – ефективність безризикового вкладення.

Сподівана корисність цього капіталу

$$g_i(x_{i0}) = Eu_i(k_i^0 R) = x_{i0} k_i^0 r_0 + (1 - x_{i0}) k_i^0 m^* - A_i (1 - x_{i0})^2 (k_i^0)^2 V^*,$$

де $m^* = ER^*$, а V^* – дисперсія R^* .

Оскільки

$$\frac{dg_i}{dx_{i0}} = k_i^0 (r_0 - m^*) + 2A_i (k_i^0)^2 (1 - x_{i0}) V^*,$$

максимум сподіваної корисності досягається при виборі частки безризикових вкладень

$$x_{i0}^* = 1 - \frac{m^* - r_0}{2A_i k_i^0 V^*},$$

тобто всі інвестори вкладають у ризикові цінні папери такий капітал:

$$\sum_{i=1}^I (1 - x_{i0}^*) k_i^0 = \frac{m^* - r_0}{2V^*} \sum_{i=1}^I \frac{1}{A_i}.$$

Рівновага фінансового ринку визначається зазвичай як рівність попиту та пропозицій:

$$\frac{m^* - r_0}{2V^*} \sum_{i=1}^I \frac{1}{A_i} = W^0, \quad (4.221)$$

де W^0 – сумарна вихідна вартість ризикових цінних паперів.

За визначенням ефективностей

$$R_i = \frac{W_i^1 - W_i^0}{W_i^0}; \quad R = \frac{W^1 - W^0}{W^0},$$

де W_i^0, W_i^1 – сумарні вихідна і майбутня вартості цінних паперів i -го виду; $W^1 = \sum_{i=1}^n W_i^1$ – сумарна майбутня вартість ризикових цінних паперів (W_i^0 та W^0 – не випадкові величини).

Звідси

$$m = ER = \frac{EW^1 - W^0}{W^0} = m^*; \quad m_i = ER_i = \frac{W_i^1}{W_i^0} - 1; \quad (4.222)$$

$$V = E(R - m)^2 = \frac{1}{(W^0)^2} E(W^1 - EW^1)^2 = V^*;$$

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R)}{V} = \frac{W_i^0 \text{cov}(W_i^1, W^1)}{W_i^0 \sigma_{W^1}^2}.$$

Підставивши останні вирази в рівняння (4.218) і розв'язавши кожне з них щодо W_i^0 , матимемо

$$W_i^0 = \frac{1}{1 + r_0} \left\{ EW_i^1 - \frac{\text{cov}(W_i^1, W^1)}{\sigma_{W^1}^2} [EW^1 - (1 + r_0)W^0] \right\}.$$

Аналогічно, підставивши вирази m, V з (4.222) в рівняння балансу (4.221), знайдемо

$$W^0 = \frac{1}{1 + r_0} \left[EW^1 - 2\sigma_{W^1}^2 \left(\sum_{i=1}^I A_i^{-1} \right)^{-1} \right].$$

Тому остаточний вираз рівноважного значення загальної вартості паперів I -виду

$$W_i^0 = \frac{1}{1 + r_0} \left[EW_i^1 - 2\text{cov}(W_i^1, W^1) \left(\sum_{i=1}^I A_i^{-1} \right)^{-1} \right].$$

Якщо ризик відсутній, тобто

$$W_i^1 = EW_i^1, \quad \text{cov}(W_i^1, W_j^1) = 0,$$

то рівноважні ціни збігаються з цінами в майбутньому, дисконтованими відповідно до ефективності безризикових вкладень:

$$W_i^0 = \frac{W_i^1}{1 + r_0}.$$

Паявність невизначеності змінює картину. Рівноважна ціна цінних паперів збільшується щодо сподіваної, якщо їхня ефективність перебуває у зворотній кореляції до ринку, та знижується, якщо ефективність паперів додатно корельована щодо ринку. Чим більше середнє відхилення від ризику Δ , тим чутливішими будуть ціни до ринкових випадковостей.

Іншим напрямом у теорії рівноважних фінансових ринків є **теорія арбітражу**. Арбітром на ринку цінних паперів називається особа, яка систематично виграв завдяки більшій, ніж в інших учасників, інформованості про стан ринку. Виявляється, що лише одного припущення про неможливість арбітражу (тобто неможливості подібного систематичного виграну) досить для аналізу властивостей ринку і, зокрема, для встановлення справедливості основного співвідношення пропорційності премії за ризик.

Відмова від гіпотези оптимальності є перевагою теорії арбітражу, але це потребує більш жорстких припущень про властивості випадкових цін та ефективностей.

Докладніше про теорію арбітражу при моделюванні фінансових ринків можна дізнатися з літератури [41], [56].

4.16. ДЕРИВАТИВИ. ОЦІНЮВАННЯ ПРЕМІЇ ЗА ОПЦІОН (ФОРМУЛА БЛЕКА—ШОУЛСА)

Розвиток торгівлі біржовими товарами спричинив появу нових специфічних фінансових інструментів, які отримали назву **похідних цінних паперів**, або скорочено — **деривативів**. До основних деривативів належать **контракти на поставку в майбутньому**, або **ф'ючерси** (futures) й **опціони** (options).

Ф'ючерсний контракт — це зобов'язання, що має юридичну силу, здійснити поставку або отримати обумовлену кількість товару за узгодженою ціною в певний день у певному місті. Під товаром можна розуміти матеріальний біржовий товар (зерно, м'ясо, нафту тощо) або цінні папери, наприклад акції. Водночас ф'ючерс також є товаром на фондовому ринку і до дати виконання може продаватися та купуватися.

Опціони — це цінні папери, що засвідчують право їхнього власника здійснювати купівлю або продаж певної кількості товару за фіксованою ціною в певний час (європейський опціон) чи до певного часу (американський опціон), або відмовитися від угоди. Товаром може бути довільний біржовий товар (акції, облигації, казначейські векселі, валюта іноземних держав, золото тощо).

Назва «похідні цінні папери» (деривативи) зумовлена тим, що ціна деривативів залежить від ціни товарів, які в них фігурують. Ф'ючерси й опціони на матеріальні товари з'явилися досить давно, але фінансові ф'ючерси та опціони виникли тільки на початку 70-х років XX ст., а поширення вони набули лише з 80-х років, коли з'явилася їх аналітична теорія.

Значення опціону полягає в тому, що він є фінансовим інструментом, у певному розумінні подібним до страхового полісу, оскільки забезпечує захист від невизначеності, пов'язаної з ринковими коливаннями цін (тобто є інструментом хеджування). Так, купивши акції та водночас опціон на їх

продаж (put option — опціон-пут), інвестор страхує себе від значних утрат при падінні в майбутньому цін на придбані акції.

Купивши опціон на купівлю (call option — опціон-кол), інвестор гарантує собі захист від зростання ціни на акції, вказаної в опціоні. За подібні гарантії доводиться платити, і кожний опціон має ціну (премію — premium), що залежить від ступеня невизначеності, проти якої він бореться. Більше того, опціони продаються також спеціальними групами: один put та один call на той самий вид акції з однаковою ціною виконання опціону (strike price) або два puts й один call, або один put і два calls. Ці групи відповідно мають спеціальні назви — straddle, strip, strap (стредл, стріп, стреп), які походять від жаргону гравців на іподромі.

Популярним варіантом опціону на купівлю є **варант** (warrant) — опціон на купівлю акцій корпорації, що випускається самою корпорацією та забезпечується її власністю. Основною практичною відмінністю варанта від звичайного опціону-колу є його значно більша тривалість (5 років і більше). Варант також може продаватися в поєднанні з іншими цінними паперами, наприклад бонами тієї самої корпорації.

Існують дискретні та неперервні (за часом) моделі визначення ціни опціонів. Тут обмежимося розглядом у стислій формі класичних результатів Блека—Шоулса¹, що стосуються європейських опціонів у неперервному часі.

Модель Блека—Шоулса ґрунтується на певних моделях динаміки цін безризикових вкладень і цін акцій. Вважається, що ефективність безризикових вкладень визначається сталою силою зростання δ , так що ціна вкладення $S_0(t)$ змінюється в часі відповідно до диференціального рівняння

$$dS_0(t) = \delta S_0(t) dt. \quad (4.223)$$

Ефективність вкладення в акції (або інші цінні папери, на які випускається опціон) є випадковою, а встановлення ціни акції є випадковим процесом, для опису динаміки якого потрібні певні знання стохастичного аналізу, що є розділом теорії випадкових процесів. Коротко опишемо відповідні поняття.

Гауссів процес $W(t)$, $t \geq 0$ з нульовим середнім, $EW(t) = 0$, та коваріаційною функцією вигляду $EW(t)W(s) = \min(t, s)$ називається стандартним вінерівським процесом, або процесом броунівського руху. Цей процес є неадиференційованим у звичайному розумінні. Узагальнена похідна $dW(t)/dt$ є узагальненим стаціонарним процесом зі сталою спектральною щільністю і називається «білий шум».

Динаміка випадкової ціни акції $S(t)$ описується стохастичним диференціальним рівнянням типу Ito²

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad (4.224)$$

¹Шоулс Майрон — лауреат Нобелівської премії з економіки 1997 р., присудженої за розрахунок дохідності деривативів. Див. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. // J. of Political Economy. — 1973. — 81. — P. 637–659. Фінсер Блек передчасно помер у 1995 р.

²Іто Кійосі — японський математик, один із засновників сучасного стохастичного аналізу поряд з українським математиком ІІ І. Гітманом.

яке через недиференційованість $W(t)$ розуміють у спеціальному сенсі, пов'язаному зі стохастичними інтегралами від випадкових функцій процесу $W(t)$. Пропускаючи відповідні (досить складні) міркування стохастичного аналізу, вкажемо, що суть рівняння (4.224) полягає в тому, що $S(t)$ є випадковим процесом (який дістав назву «геометричний броунівський рух») вигляду

$$S(t) = S(t_0) \exp \left\{ \mu t + \sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}, \quad (4.225)$$

де коефіцієнт μ — швидкість зростання, яка характеризує тренд (тенденцію) зміни відсоткових ставок за акціями, а σ — коефіцієнт, що відображає мінливість (волатильність) випадкових коливань ціни акції.

Модель динаміки цін акцій (4.224) була запропонована П. Самуельсоном як удосконалення простішої моделі динаміки $S(t)$, запропонованої на початку XX ст. французьким математиком Башельє, яка в сучасній термінології називається «арифметичним броунівським рухом» й описується стохастичним рівнянням

$$dS(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Зауважимо, що розв'язок рівняння (4.223) дає експоненціальний закон зростання ціни безризикового активу

$$S(t) = S(t_0) \exp \{\delta t\}. \quad (4.226)$$

Позначимо через P премію за опціон на продаж (put), а через C — премію за опціон на купівлю (call). Нехай E — ціна виконання (strike price) через час T після випуску опціону. Ці величини пов'язані між собою таким співвідношенням:

$$P = C + Ee^{-\delta T} - S, \quad (4.227)$$

де S — ціна на момент виплати премії.

Рівність (4.227) називається формулою Столла, або **теоремою паритету опціонів**.

Для доведення (4.227) проведемо два теоретичні експерименти.

1. Купимо опціон на продаж, сплативши премію P , і водночас купимо акцію за ціною S . Якщо ціна на момент виконання опціону перевищуватиме E , то збережемо акцію, а якщо ні, то продамо її, отримавши суму E .

2. Придбаємо опціон на купівлю, сплативши C , а також вкладемо суму $Ee^{-\delta T}$ в безризикові цінні папери. Якщо ціна акції перевищуватиме E , то продамо безризикові цінні папери, отримавши за це (з урахуванням зростання) суму E , і, використовуючи опціон, купимо акцію за ціною виконання E . Якщо ціна акції менша від E , то залишимо собі суму E .

Таким чином, незалежно від зміни цін обидва варіанти дій приводять до того самого результату, тобто обидва вкладення є еквівалентними.

$P + S = C + Ee^{-\delta T}$, що й доводить (4.227).

254

Аналогічним чином може міркувати і той, хто випускає опціон:

1. Випустивши опціон на купівлю, продамо його з премією C і водночас купимо акцію за ціною S . Тоді вкладення в операцію дорівнюватиме $S - C$.

2. Випустивши опціон на продаж із премією P , вкладемо суму $Ee^{-\delta T}$ в безризикові цінні папери. Тоді вкладення в операцію становитиме $Ee^{-\delta T} - P$.

Обидва варіанти рівнозначні, оскільки, якщо $S(T) > E$, то емітент нічого не отримає, а якщо $S(T) \leq E$, то збереже акцію.

Складнішою задачкою є обчислення премії окремо за деякий опціон. Прийнявши за основу модель динаміки ціни акції за законом геометричного броунівського руху, Блек і Шоулс вивели формулу для розрахунку премії C при ціні S на момент випуску опціону з терміном виконання T , що має вигляд

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - Ee^{-\delta T}\Phi(d_2), \quad (4.228)$$

де функція Φ виражається через стандартний інтеграл логістики і є розподілом Гаусса,

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx,$$

а величини d_1 та d_2 визначаються як

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S}{E} + \left(\delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right];$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S}{E} + \left(\delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right].$$

Незважаючи на відносну складність формули (4.228) та певну штучність припущень, вона набула досить широкого застосування на практиці. Важливо наголосити, що у формулу Блека—Шоулса не входить сподівана сила зростання μ ціни акції, а враховується тільки волатильність σ використанням темпу збільшення дисперсії.

Доведення формули (4.228), що ґрунтується на використанні результатів стохастичного аналізу, наводиться нижче у стислому вигляді.

Розглянемо портфель інвестиції, що складається з опціону на купівлю та деякої кількості x акцій. Тоді вкладення на придбання такого портфеля дорівнюватиме $C + xS$. Нехай курс S відомий у будь-який момент часу t , а x змінюється залежно від S так, що ціна портфеля $S_\pi = C + x(S)S$ не залежить від курсу, тобто

$$\frac{\partial S_\pi}{\partial S} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial C}{\partial S} + x = 0.$$

Тоді поточна ціна портфеля $S_\pi(t) = C(t) - \frac{\partial C}{\partial S} S(t)$.

Ефективність такого портфеля за малий інтервал часу dt становить

$$dR_{\pi} = \frac{dS_{\pi}}{S_{\pi}} = \frac{dC + x dS}{C + xS} = \frac{dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS}{C - \frac{\partial C}{\partial S} S}.$$

Скориставшись формулою Іто заміни змінних у стохастичних диференціалах (див. [22]), отримаємо

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] dt.$$

Отже,

$$dR_{\pi} = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt}{C - \frac{\partial C}{\partial S} S}. \quad (4.229)$$

Оскільки портфель безризиковий, його ефективність має збігатися з ефективністю інших безризикових цінних паперів, тобто $dR_{\pi} = \delta dt$.

Підставивши цей вираз у співвідношення (4.229), матимемо рівняння з частинними похідними для визначення премії $C(S, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \delta \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S \right). \quad (4.230)$$

Інтегруючи рівняння (4.230) при зміні відліку часу назад від моменту виконання опціону з урахуванням очевидної крайової умови

$$C(S, T) = \max\{S - E, 0\} = (S - E)_+ = \begin{cases} S - E, & S > E; \\ 0, & S \leq E. \end{cases}$$

отримаємо формулу Блека—Шоулса (4.228).

На завершення ще раз наголосимо, що формула (4.228) ґрунтується на досить сильному припущенні (4.224) про поведінку цін і, крім того, припускає «безфрикційність» ринку цінних паперів з «безплатними» операціями неперервного коригування портфеля.

У сучасній стохастичній фінансовій математиці розробляються й інші моделі динаміки цін на фінансові активи (в тому числі на акції).

Задачі та вправи

4.1. Клієнт поклав на банківський рахунок суму в \$ 100 тис. під щомісячну ставку в 1,6 %. Скільки місяців йому доведеться чекати, щоб отримати прибуток із вкладу в \$ 2000?

4.2. Контракт між фірмою та банком передбачає, що банк надає фірмі кредит протягом трьох років щорічними платежами в \$ 10^6 на початку кожного року. А фірма повертає борг за такою схемою: наприкінці третього року — \$ 10^6 , четвертого — \$ $2 \cdot 10^6$, п'ятого року — \$ 10^6 . Чи прийнятний такий контракт для банку, якщо діє річна ставка відсотків у 8 %?

4.3. Клієнт протягом 5 років робить внески в банк під складну відсоткову ставку 25 % річних. Гроші вносяться: а) на початку кожного кварталу; б) на початку кожного місяця. Визначити розмір суми, накопиченої наприкінці п'ятого року, якщо сума внесків за рік дорівнює 10 тис. грн.

4.4. Визначити розміри щоквартальних і щомісячних платежів для рент: а) постнумерандо, еквівалентних річній ренті постнумерандо з платежем $Y = 1000$ грн; б) пренумерандо, еквівалентних річній ренті пренумерандо з платежем $Y = 1000$ грн. Вважати, що річна ставка складних відсотків дорівнює 25 %.

4.5. Борг у сумі 100 тис. грн необхідно погасити за 5 років рівномірними платежами наприкінці кожного року. Визначити розмір щорічних виплат і скласти план погашення боргу, якщо діє 10 % ставка річних.

4.6. Поточну позичку розміром 300 тис. грн видано на термін 15 років під заставу нерухомості. Погашення — наприкінці кожного місяця однаковими внесками при номінальній річній ставці 20 %. Визначити суму щомісячного платежу та залишок боргу на кінець п'ятого року погашення.

4.7. Оцінити курс облігації терміном на 3 роки зі щорічною сплатою купонів у розмірі 25 % номіналу ($r = 0,25$): а) в момент емісії; б) через рік; в) через два роки. Відсоткову ставку прийняти за 20 %.

4.8. У схемі з неперервним нарахуванням відсотків і неперервним дисконтуванням показати, що річна облікова ставка d та сила зростання δ пов'язані між собою співвідношенням $1 - d = v = e^{-\delta}$. Вибравши один із чотирьох основних параметрів δ, i, v, d за базисний, виразити через нього значення інших трьох параметрів і подати відповідні результати у вигляді таблиці.

4.9. Нехай на проміжку часу $[0, 5]$ прогнозується така ступінчаста функція сили зростання $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0,20, & 0 \leq t < 2; \\ 0,15, & 2 \leq t < 4; \\ 0,10, & 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

Знайти відповідні функції коефіцієнта нарощення $a(0, t)$ і коефіцієнта дисконтування $v(0, t)$ на $[0, 5]$.

4.10. У задачі оптимізації портфеля цінних паперів (4.202)–(4.205) знайти явний вираз мінімальної дисперсії портфеля V_{π}^* , що відповідає його оптимальній структурі, у вигляді відношення двох виразів. Переконатися, що ці вирази є додатними.

4.11. Інвестор може скласти портфель із трьох видів цінних паперів, ефективності яких R_1, R_2, R_3 є некорельованими випадковими величинами з такими характеристиками

$$m_1 = ER_1 = 11; \sigma_1 = 4; ER_2 = 10; \sigma_2 = 3; ER_3 = 9, \sigma_3 = 1.$$

Визначити структуру оптимального портфеля при $\bar{m}_{\pi} = 10$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Arrow K. J. Social Choice Function and Individual Value. — New York: J. Wiley, 1951; 2nd ed., 1963.
2. Акимов С. А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984.
3. Baumol W. J. Business Behavior, Value and Growth. Revised Ed. — New York: Harcourt Brace and World, Inc., 1967.
4. Вэрман Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. — М.: ЮНИТИ, 1997.
5. Varian H. R. Microeconomic Analysis. — 3rd ed. — New York; London: Norton, 1992.
6. Varian H. R. (ed.). Computational Economics and Finance. Modeling and Analysis with Mathematica® — New York: Springer-Verlag, Inc., 1996.
7. Гальперин В. М., Игнатъев С. М., Моргунов В. И. Микроэкономика: В 2 т. — СПб.: Эконом. шк., 1998.
8. Гербер Х. Математика страхования жизни. — М.: Мир, 1995.
9. Gravelle H., Rees R. Microeconomics. — 2nd ed. — New York: Longman Publishing, 1994.
10. Dautin D. C., Pentikainen T., Pesonen M. Practical Risk Theory for Actuaries. — London: Chapman and Hall, 1996.
11. Debreu G. Theory of Value. — New York: John Wiley and Sons, Inc., 1959.
12. De Vylder F. E. Advanced Risk Theory. — Editions de Univ. Bruxelles, 1993.
13. Ниптридзгантор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.
14. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л., 1939.
15. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972.
16. Карагодова О. О., Чернашова Д. М. Микроэкономика. — К.: Четверга Хвиля, 1997.
17. Кидуэл Д. С., Петерсон Р. Л., Блэккуэлл Д. У. Финансовые институты, рынки и деньги. — СПб.: Питер, 2000.
18. Клейнер Г. Б. Методы анализа производственных функций. — М.: Информ-электро, 1980.
19. Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции. — СПб.: Питер, 2000.
20. Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. — СПб.: Питер, 2001.
21. Кутукова В. В. Основы финансовой и страховой математики. — М.: Дело, 1998.
22. Леоненко М. М., Мишура Ю. С., Пархоменко В. М., Яценко М. П. Теоретико-вероятностные та статистичні методи в економетрії та фінансовій математиці. К.: Інформтехніка, 1995.
23. Leontief W. W. Input — Output Economics. — New York: Oxford Univ. Press, 1966.
24. Леонтьев В. В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. — М.: Изд-во полит. лит., 1990.
25. Макаров В. Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство. Современные проблемы математики. — М., 1981. Т. 19. С. 22–57.
26. Макаров В. Л., Рубанов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973.
27. Маршалл А. Принципы экономической науки: В 3 т. — М.: Изд. группа «Прогресс», 1993. — Т. 1.
28. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. Microeconomic Theory. — New York: Oxford Univ. Press, 1995.
29. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991.
30. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
31. Перовзванский А. А., Перовзванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: Инфра-М, 1994.
32. Классика экономической мысли: Сочинения / В. Петти, А. Смит, Д. Рикардо и др. — М.: ЭКСМО-Пресс, 2000.
33. Пономаренко А. И. Финансовый анализ. — К.: ЭМЦ, 2000.
34. Пономаренко А. И. Банковское дело для финансовых аналитиков. — К.: ЭМЦ, 2002.
35. Ponomarenko O. I. Modern Microeconomic Analysis. Intensive Course. — Kyiv: Kyiv Univ., 2000.
36. Пономаренко О. І. Сучасна аналітична політологія. — К.: ВЦ «Київ. ун-т», 2000.
37. Пономаренко О. І. Основи теорії фінансів. — К.: ЕМЦ, 2001.
38. Пономаренко О. І. Вступ до актуарної математики. — К.: ЕМЦ, 2003.
39. Пономаренко О. І. Вступ до фінансової математики. — Ніжин: Вид-во НДПУ ім. М. Гоголя, 2003.
40. Пономаренко О. І. Основи фінансового та інвестиційного менеджменту. — Ніжин: Вид-во НДПУ ім. М. Гоголя, 2003.
41. Пономаренко О. І. Основи математики фінансів і страхування. — К.: ІВЦ Держкомстату України, 2004.
42. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурин В. М. Основи математичної економіки. — К.: Інформтехніка, 1995.
43. Пономаренко О. І., Пономаренко В. О. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. — К.: Либідь, 1995.
44. Samuelson P. A. Foundation of Economic Analysis. — Cambridge, Massachusetts: Harvard Univ. Press, 1948.
45. Samuelson P. A. Consumption Theory in Terms of Revealed Preference // Economica. — 1948. — 15. — P. 245–253.
46. Sen A. K. Collective Choice and Social Welfare. — San Francisco: Holden Day, 1970.
47. Sen A. K., Williams B. (eds.). Utilitarianism and Beyond. — Cambridge Univ. Press, 1982.

48. Slutsky E. Sulla Teoria del Belancio del Consumatore // Giornale degli Economisti. - 1915. - 51. - P. 1-26.
49. Takayama A. Analytical Methods in Economics. - New York: Harvester Wheaf, 1994.
50. Фалли Г. И. Фалли А. И. Введение в актуарную математику. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
51. Хайман Д. И. Современная микроэкономика: анализ и применение: В 2 т. - М.: Финансы и статистика, 1992. - Т. 1-2.
52. Handbook of Mathematical Economics / K. J. Arrow, M. D. Intriligator (eds.). - Amsterdam: North - Holland, 1981. - Vol. 1-2, 1983. - Vol. 3.
53. Houthakker H. S. Revealed Preference and the Utility Function // Economica. - 1950. - 17. - P. 159-174.
54. Хикс Дж. Р. Стоимость и капитал. - М.: Изд. группа «Прогресс», 1993.
55. Четыркин Е. М. Финансовая математика. - М.: Дело, 2000.
56. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики: В 2 т. - М. Фазис, 1998. - Т. 1-2.
57. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. - М., 1995.
58. Экланд И. Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.
59. Ястремський О. Г., Гриценко О. Г. Основи мікроекономіки. - К.: Т-во «Знання», КОО, 1993.

ЗМІСТ

Передмова	3
Вступ	5

Розділ 1. Теорія споживання

1.1. Простір товарів і відношення переваги	14
1.2. Загальна порядкова теорія споживчого вибору	20
1.3. Порядкові функції корисності. Теорема Дебре	26
1.4. Неокласична задача споживання	33
1.5. Функції попиту, граничної корисності грошей	36
1.6. Модель споживання Стоуна. Товари першої необхідності, вибору та розкоші	39
1.7. Дуальна задача споживання. Хіксіанський попит і функція витрат	43
1.8. Порівняльна статика споживання. Основне рівняння теорії споживання	47
1.9. Рівняння Слуцького і класифікація товарів	50
1.10. Еластичність попиту й умови агрегації	56
1.11. Підхід виявленої переваги в теорії споживання	64
Задачі та вправи	65

Розділ 2. Теорія виробництва

2.1. Простір витрат і виробничі функції	68
2.2. Еластичності випуску та можливості заміщення витрат	73
2.3. Основні типи виробничих функцій	77
2.4. Моделі поведінки фірми	82
2.5. Неокласична теорія поведінки однопродуктової фірми	90
2.6. Порівняльна статика фірми	95
2.7. Задачі максимізації випуску продукції та мінімізації витрат фірми	99
2.8. Фірма в умовах монополії та моносонії	105
2.9. Олігонодія та олігосонія	108
2.10. Теорія поведінки багатопродуктової фірми	111
Задачі та вправи	113

Розділ 3. Моделі ринку і теорія загальної рівноваги

3.1. Найпростіші агреговані моделі ринкової економіки (класична та кейнсіанська)	117
3.2. Моделі вальраського типу	122
3.3. Умова існування рівноваги за Вальрасом при неокласичному підході	131
3.4. Рівновага у моделі Ерроу - Дебре	134
3.5. Модель рівноваги Вальда - Касселя	137

3.6. Властивості конкурентної рівноваги	139
3.7. Рівновага з гарантованими доходами	143
3.8. Рівновага з фіксованими доходами. Бюджетний парадокс	145
3.9. Процеси формування цін	147
3.10. Модель рівноваги Макарова	151
<i>Задачі та вправи</i>	154

Розділ 4. Мікроекономіка невизначеності.

Фінансові та страхові ринки	156
4.1. Припущення сподіваної корисності. Теорема фон Неймана – Моргенштерна	156
4.2. Поведінка в умовах ризику. Міри Ерроу – Пратта уникання ризику	163
4.3. Застосування до задач страхування. Попит на страхові послуги	170
4.4. Стохастична теорія фірми	174
4.5. Задача вибору портфеля з двох активів: ризикового та безпечного	178
4.6. Домашнє господарство в умовах невизначеності: рішення про заощадження і споживання	182
4.7. Економіка інформації: асиметрія інформації, принцип «лимончиків», сигналізації, зворотна селекція. Застосування до страхування	189
4.8. Ринок страхових послуг. Поведінка страхових компаній	194
4.9. Оптимальні ступінь перестраховування та обмін ризиками	200
4.10. Ринок банківсько-кредитних послуг	207
4.11. Потіки платежів. Ренти або ануїтети	215
4.12. Оцінювання вартості облігацій та акцій, а також їхньої доходності	223
4.13. Страхування життя і пенсійне страхування	232
4.14. Оцінювання і порівняльний аналіз інвестиційних та комерційних проектів	237
4.15. Аналіз портфельних інвестицій. Теорія портфеля. Модель CAPM	241
4.16. Деривативи. Оцінювання премії за опціон (формула Блека – Шоулса)	252
<i>Задачі та вправи</i>	256
<i>Список використаної та рекомендованої літератури</i>	258

Навчальне видання

Попомаренко Олександр Іванович

Черестюк Микола Олексійович

Бурим Володимир Михайлович

СУЧАСНИЙ
ЕКОНОМІЧНИЙ
АНАЛІЗ

У двох частинах

ЧАСТИНА

**1 Мікро-
ЕКОНОМІКА**

Оправа і титул художника В. С. Жибортовського

Художній редактор Г. С. Муратова

Технічний редактор А. І. Омохваська

Коректори: Н. М. Мельник, Н. Г. Потаніна

Комп'ютерна верстка А. А. Коркішко