

## КОМБІНАТОРИКА МУЛЬТИМНОЖИН

1. Випишіть усі розміщення з повтореннями множини  $A = \{a, b\}$  по 3 елементи.
2. Випишіть усі комбінації з повтореннями множини  $A = \{a, b\}$  по 3 елементи.
3. Випишіть усі перестановки з елементів мультимножини  $A = \{a, a, a, b, b\}$  по 3 елементи.
4. Підрахувати кількість бітових рядків довжиною  $n$ .
5. Скільки різних слів можна утворити зі слова MISSISSIPPI, використовуючи усі літери?
6. Скільки бітових рядків можна утворити з 6 одиниць і 8 нулів?
7. Поїзд, у якому їдуть 10 пасажирів, робить 6 зупинок. Скількома способами можна вийти пасажирам на цих зупинках?
8. Скількома способами можна розподілити  $3n$  різних предметів між 3 людьми так, щоб кожен отримав по  $n$  предметів?
9. Скільки п'ятибуквених слів можна утворити з букв  $a, b, c$ , якщо буква  $a$  може зустрічатись у слові не більше 2 раз,  $b$  – не більше одного разу і  $c$  – не більше 3.
10. Скількома способами можна розмістити 7 білих, 3 чорних і 4 синіх кулі по 3 різних урнах?
11. Скількома способами можна розмістити  $m + n + s$  предметів на 3 групи так, щоб в одній групі було  $m$  предметів, у другій  $n$ , а у третій –  $s$  предметів?
12. Обчислити  $(x + y + z)^3$
13. У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок? Скількома способами можна купити 8 листівок, 8 різних листівок?
14. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5, які діляться на 4. Цифри можуть повторюватись.
15. Скільки шестизначних чисел можна скласти з цифр числа 1315113?
16. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр числа 977331?
17. Є 1 зелена, 1 жовта, 2 сині, 2 білі та 3 рожеві повітряні кулі. Скількома способами можна вибрати 5 куль, щоб об'єднати однією стрічкою?

**Алгоритм відшукування всіх  $m$ -перестановок мультимножини**  
 $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$

*1. Формування першої таблиці.*

1.0. Кратності елементів мультимножини розташувати у неспадному порядку:  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ .

1.1. Записуємо базовий рядок із  $k_1 + 1$  одиниць.

1.2. Під базовим рядком будуємо таблицю, що містить  $k_1 + 1$  стовпців і  $k_1 + k_2 + 1$  рядків. Рядки таблиці нумеруємо згори вниз числами від 0 до  $k_1 + k_2$ .

1.3. У  $k$ -й рядок записуємо  $k_1 + 1$  елементів  $k$ -го рядка таблиці Паскаля (якщо  $k$ -й рядок таблиці Паскаля містить менше, ніж  $k_1 + 1$  елементів, то дописуємо потрібну кількість нулів).

1.4. У лівому нижньому куті таблиці замінюємо записані числа нулями так, щоб нулі утворили прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом  $k_1$ .

1.5. Обчислюємо суму добутків елементів  $i$ -го рядка таблиці на відповідні елементи базового рядка. Отримане число дописуємо до  $i$ -го рядка справа.

1.6. Якщо кількість рядків таблиці більша від потужності мультимножини, то обчислення закінчуємо і вважаємо результатом роботи алгоритму стовпчик чисел, дописаних до таблиці справа. Інакше, цей стовпчик транспонуємо і розглядаємо як базовий для наступної таблиці. Переходимо до формування наступної таблиці.

*2. Формування другої таблиці*

2.1. Записуємо базовий рядок, отриманий в п.1.6.

2.2. Під базовим рядком будуємо таблицю, що містить  $k_1 + k_2 + 1$  стовпців та  $k_1 + k_2 + k_3 + 1$  рядків. Далі аналогічно п.1.2.

2.3. У  $k$ -й рядок таблиці 2 записуємо перші  $k_1 + k_2 + 1$  елементів  $k$ -го рядка таблиці Паскаля. Далі аналогічно п.1.3.

2.4. Аналогічно п.1.4. замінюємо числа нулями так, щоб утворився прямокутний трикутник з катетом  $k_1 + k_2$ .

2.5. Аналогічно п.1.5.

2.6. Аналогічно п.1.6.

і т.д.

Якщо мультимножина має базу потужності  $n$ , то виконання алгоритму вимагає складання  $(n - 1)$ -ї таблиці.

**Відшукування всіх  $m$ -підмультимножин мультимножини  $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$**

*Алгоритм для побудови узагальненого трикутника Паскаля*

1. Записуємо рядок із  $k_1$  нулів, 1 одиниці та  $k_1$  нулів.
2. У 2-й рядок записуємо  $k_2$  нулів (справа-наліво під нулями попереднього рядка), а наступні елементи знаходимо як суму відповідних  $k_1 + 1$  елементів першого рядка. Допишуємо ще  $k_2$  нулів.
3. У 3-й рядок записуємо  $k_3$  нулів, наступні елементи записуємо як суму відповідних  $k_2 + 1$  елементів 2-го рядка, дописуємо  $k_3$  нулів.
4. Далі аналогічно формуємо решту рядків.

Алгоритм завершується, якщо кількість рядків перевищує потужність бази мультимножини. Останній рядок дає нам  $m$ -комбінації:  $C_A^0, C_A^1, \dots, C_A^{k_1+k_2+\dots+k_n}$ .