

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. М. ГОЙСА, В. М. СТЕЦЬЮК

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
У ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ
ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ
(Частина 1)

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ
2017

1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИЙ ПОТЕНЦІАЛ

1.1. Короткі теоретичні відомості

Взаємодія двох нерухомих точкових електричних зарядів описується законом Кулона

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.1)$$

де \vec{F}_{12} – сила, яка діє з боку заряду q_1 на заряд q_2 ; q_1, q_2 – величини зарядів, що взаємодіють; \vec{r} – радіус-вектор, напрямлений від заряду 1 до заряду 2, $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – електрична стала $\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi} \right)$. Величина заряду в системі

СІ вимірюється в кулонах [Кл]. За законом Кулона сили електростатичної взаємодії є центральними – вони залежать тільки від відстані між зарядами і спрямовані вздовж прямої, що з'єднує ці заряди.

Силову характеристику електростатичного поля є напруженість \vec{E} . Вона визначається як сила, що діє на одиничний нерухомий заряд: $\vec{F} = q\vec{E}$. Для поля точкового заряду

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.2)$$

В системі СІ одиницею напруженості електричного поля є $\left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$.

Якщо положення заряду задається радіус-вектором \vec{r}_0 (рис. 1.1), то напруженість поля цього заряду в будь-якій точці простору, положення якої в тій самій системі координат задається радіус-вектором \vec{r} , визначається формулою

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.3)$$

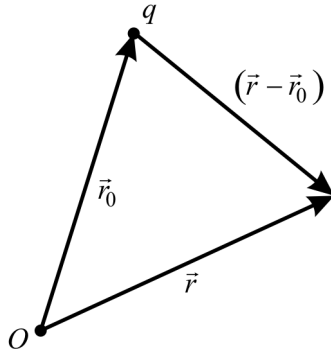


Рис. 1.1. До визначення напруженості поля точкового заряду, положення якого задається радіус-вектором \vec{r}_0

Для електричного поля виконується принцип суперпозиції: напруженість поля, що створюється кількома зарядами, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, що створюються кожним зарядом окремо

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.4)$$

За цією формулою можна знайти напруженість поля системи точкових зарядів. На практиці, як правило, доводиться мати справу з великою кількістю зарядів, які розподілені вздовж деякої кривої, по поверхні чи в просторі. Тому обчислення напруженості поля за (1.4) стає надто складним. Для спрощення розрахунків вводять

лінійну, поверхневу або об'ємну густини зарядів: $\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$, $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$,

$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ відповідно. В загальному вигляді λ , σ та ρ залежать від координат.

Найбільш загальним підходом до розв'язування задач електрики є розділення зарядженого тіла на елементарні заряди dq , які, в залежності від умови задачі, визначаються як $dq = \lambda dl$, $dq = \sigma dS$ чи $dq = \rho dV$, з подальшим використанням для знаходження напруженості поля векторного інтеграла

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}. \quad (1.5)$$

Зручніше розраховувати напруженість поля покомпонентно. Наприклад, для декартової системи координат

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} x, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} y, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} z,$$

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2.$$

Обчислення характеристик електричного поля в деяких випадках значно спрощується, якщо використовувати електростатичну теорему Гаусса: потік Φ вектора напруженості поля \vec{E} через замкнену поверхню S пропорційний алгебраїчній сумі всіх зарядів, що знаходяться всередині поверхні

$$\Phi = \oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

Тут S – замкнена поверхня, \vec{n} – нормаль до елемента поверхні dS , V – об'єм, охоплений поверхнею S , ρ – об'ємна густина заряду, Q – повний заряд всередині поверхні.

Поверхню інтегрування в (1.6) потрібно вибирати таким чином, щоб силові лінії електричного поля перетинали її під прямим кутом або були паралельними до неї. Такий вибір перетворює скалярний добуток в лівій частині теореми Гаусса у звичайний або робить його рівним нулю. Крім того бажано, щоб напруженість поля у всіх точках поверхні, де $(\vec{E} \cdot \vec{n}) \neq 0$, була однаковою. Тоді вираз у лівій частині спрощується до добутку $E \cdot S$. В залежності від симетрії задачі такими поверхнями найчастіше обирають циліндр або сферу.

Зауважимо, що застосування теореми Гаусса для розрахунку \vec{E} має значні обмеження, і може використовуватись лише для задач з певною симетрією.

Іноді виникають обернені задачі: для заданого поля $\vec{E}(\vec{r})$ визначити розподіл заряду у просторі $\rho(\vec{r})$. В такому випадку краще скористатись диференціальним записом теореми Гаусса

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

Енергетичною характеристикою електростатичного поля є потенціал ϕ . Фізичний зміст має лише різниця потенціалів між окремими точками, а не абсолютне значення потенціалу певної точки. Саме через різницю потенціалів визначається робота по переміщенню заряду q в електричному полі з точки 1 у точку 2

$$A_{12} = -q(\phi_2 - \phi_1). \quad (1.8)$$

Величина роботи не залежить від форми траєкторії руху заряду з початкової точки в кінцеву.

Між вектором напруженості електричного поля та потенціалом існує зв'язок

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi. \quad (1.9)$$

Гradient, за означенням, є вектором, який спрямований у бік зростання функції. Знаючи розподіл потенціалу $\phi(x, y, z)$, можна отримати компоненти вектора на-

пруженості: $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$. Розв'язок оберненої задачі дасть нам

значення різниці потенціалів між двома точками

$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.10)$$

Потенціал визначається з точністю до константи. У ролі цієї константи, відносно якої відраховується значення потенціалу, часто приймають потенціал нескінченно віддаленої точки, приписуючи йому нульове значення. В такому випадку, наприклад, потенціал точкового заряду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.11)$$

Для потенціалу, як і для напруженості електричного поля, справедливий принцип суперпозиції. Згідно з ним для системи точкових зарядів $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$. Якщо ж заряд розподілено вздовж кривої, по поверхні чи в об'ємі, то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.12)$$

Розподіл потенціалу $\varphi = \varphi(x, y, z)$ у просторі можна також отримати, виходячи з рівняння Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ та граничних умов. За відсутності сторонніх зарядів

($\rho = 0$) рівняння Пуассона переходить у рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В залежності від обраної системи координат, вигляд оператора Лапласа буде змінюватись. Наприклад, для декартової системи координат оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

При розв'язуванні задач з теорії електрики перевагу надають саме потенціалу. По-перше, потенціал є скалярною величиною; по-друге, різниця потенціалів, на відміну від напруженості поля, може бути просто і безпосередньо виміряна дослідним шляхом.

Графічно електричні поля зображуються або за допомогою силових ліній, або за допомогою екіпотенціальних поверхонь. Силкові лінії поля перпендикулярні до поверхонь сталого потенціалу. Тому, маючи картинку силових ліній електричного поля, можна побудувати екіпотенціальні поверхні, і навпаки.

1.2. Запитання та відповіді

1.2.1. Наведіть приклади способів зміни зарядового стану речовини.

- тертя (за рахунок наявності контактної різниці потенціалів між взаємодіючими тілами, наприклад, коли скло натирають шовком);
- опромінення зарядженими і нейтральними частинками (електрон-електронна, іонно-електронна, фотоелектронна емісії тощо);
- деформація твердих тіл (екзоелектронна емісія);
- використання явища електричної індукції.

1.2.2. В чому полягає ідея методу Кавендіша перевірки закону Кулона?

Кулон відкрив свій закон у 1785 році, вимірюючи сили взаємодії між зарядженими кульками за допомогою крутильних ваг, які, до речі, сам і винайшов.

В основу методу Кавендіша перевірки закону Кулона покладено той факт, що електричне поле всередині провідної зарядженої сфери відсутнє. Перевірка цього факту може бути проведена із значно більшою точністю, ніж пряме вимірювання сил взаємодії точкових зарядів.

Покажемо, що відсутність електричного поля всередині рівномірно зарядженої сфери є наслідком закону Кулона, а саме – оберненої пропорційності напруженості поля до квадрату відстані.

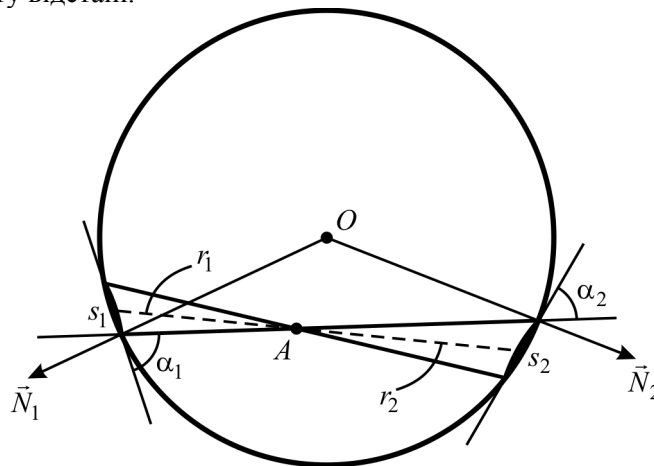


Рис. 1.2. До запитання 1.2.2

Отже, нехай маємо сферу, поверхня якої рівномірно заряджена з поверхневою густиною σ (рис. 1.2). Через довільну точку A проведемо пучок променів, які на поверхні сфери вирізають дві малі ділянки s_1 і s_2 . Розглянемо електричні поля \vec{E}_1 і \vec{E}_2 , які створюються цими ділянками в точці A .

Очевидно, що тілесні кути при точці A рівні між собою: $\frac{s_1 \sin \alpha_1}{r_1^2} = \frac{s_2 \sin \alpha_2}{r_2^2}$.

Нескладні геометричні побудови показують, що і кути α_1 та α_2 також рівні. А оскільки заряди ділянок s_1 і s_2 пропорційні до їх площ, то, врешті решт, ми приходимо до виразу: $\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2}$. Члени рівності з точністю до множника $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ співпада-

ють з виразами для напруженостей електричних полів, які створюються в точці A зарядами ділянок s_1 і s_2 . Ці поля однакові за величиною і протилежні за напрямком. Це також буде справедливим для будь-якої іншої пари s_1 і s_2 , на які можна

розбити всю поверхню нашої сфери. Тому сумарне електричне поле повинне бути рівне нулю для кожної точки всередині сферичної поверхні.

Як бачимо, відсутність електричного поля всередині рівномірно зарядженої сфери можлива лише, якщо $E \sim 1/r^2$. Будь-яка інша степенева залежність величини поля від відстані робила б це неможливим.

Вперше подібна перевірка закону Кулона була проведена у 1774 році Кавендішем (його робота з цього приводу була невідомою понад 100 років), а згодом, з більшою точністю, Максвеллом у 1879.

1.2.3. *В чому полягає сутність принципу суперпозиції?*

Сутність принципу суперпозиції полягає в тому, що сила взаємодії, наприклад, між двома точковими зарядженими тілами, не залежить від присутності третього точкового зарядженого тіла. Тобто сила, що діє на заряджене тіло, дорівнює векторній сумі окремих сил, що діють з боку кожного з інших заряджених тіл.

Принцип суперпозиції дозволяє розрахувати електростатичну взаємодію в будь-якій системі нерухомих зарядів, оскільки якщо заряди неточкові, то їх завжди можна звести до сукупності точкових зарядів.

1.2.4. *Чому сила взаємодії двох заряджених тіл, взагалі кажучи, змінюється в присутності третього тіла? Чи не суперечить це принципу суперпозиції?*

Нехай в деякій області простору є два заряджених тіла. При внесенні в цю область третього тіла (необов'язково зарядженого) відбувається перерозподіл зарядів на всіх тілах за рахунок явищ електричної індукції (метали) чи поляризації (діелектрики). Це, зрозуміло, призведе до зміни сили взаємодії між першими двома зарядженими тілами. Але, це не суперечить принципу суперпозиції, оскільки цей принцип справедливий за умови незмінності положення зарядів.

1.2.5. *Поясніть, чому із закону Кулона випливає неперервність силових ліній електростатичного поля?*

Силові лінії дозволяють наочно уявити електростатичне поле. За напрямком силових ліній можна визначити напрям вектора напруженості, за їх густиною – сказати, де і в скільки разів більша величина напруженості. Та головною властивістю силових ліній є їх неперервність. Силові лінії починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних або йдуть на нескінченність, як, наприклад, у випадку точкового заряду. Причому на кожному заряді починається (чи закінчується) число ліній, пропорційне до його величини.

Розглянемо поле точкового заряду. З віддаленням від заряду густина силових ліній зменшується. Так, наприклад, при зміні відстані вдвічі густина силових ліній зменшиться в чотири рази (число ліній не зміниться, а площа сфери, яка оточує точковий заряд, збільшиться в чотири рази). І саме в чотири рази зменшується напруженість електричного поля згідно з (1.2). Все це завдяки тому, що в законі Кулона стоїть $1/r^2$. Будь-яка інша степенева залежність від r призвела б до того, що

частину силових ліній прийшлося б обривати в порожньому просторі, оскільки густина ліній вже не відповідала б величині напруженості.

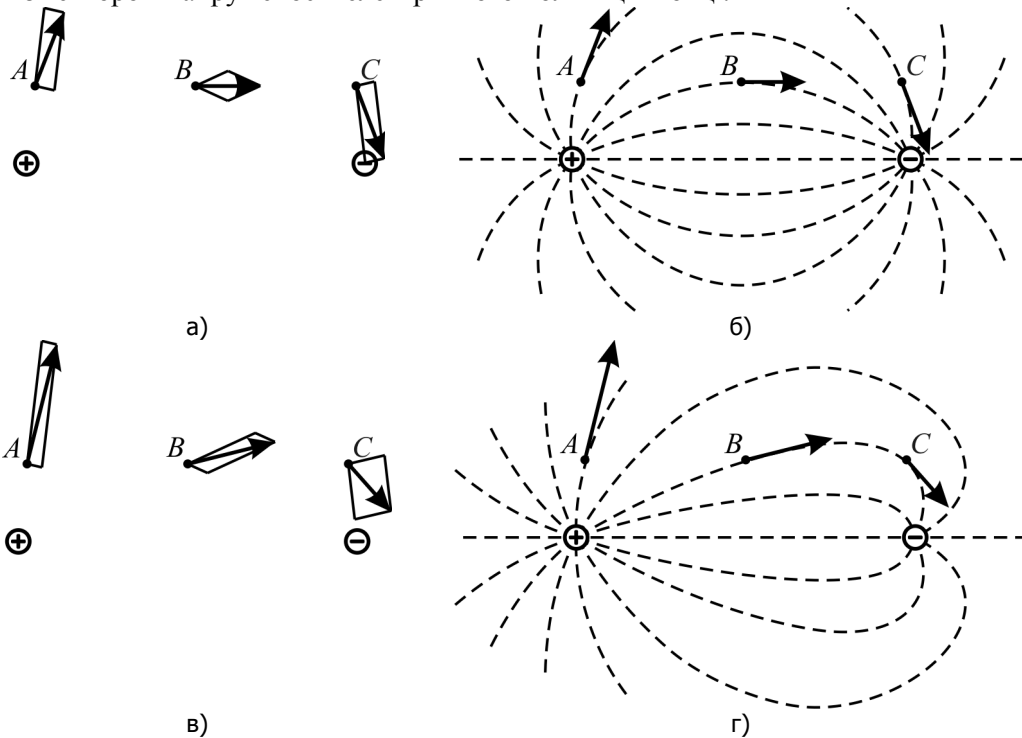
Математично строгим виразом властивості неперервності силових ліній електростатичного поля є теорема Гаусса (1.6).

1.2.6. Намалуйте картинку силових ліній електростатичного поля, створеного двома різноіменними точковими зарядами, для випадків:

а) заряди однакові за величиною;

б) один із зарядів (наприклад, позитивний) в кілька разів більший за інший.

Відповідь на першу частину завдання проста і очевидна. Напевно вже неодноразово вам доводилось бачити подібну картину силових ліній (рис. 1.36). Силові лінії малюються таким чином, щоб дотичні до них в кожній точці співпадали за напрямком з вектором напруженості електричного поля в цій точці.



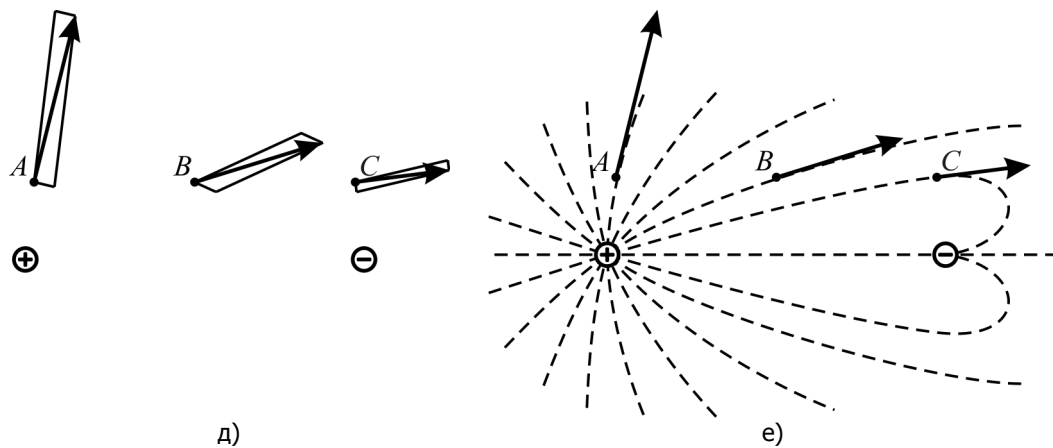


Рис. 1.3. До запитання 1.2.6

Величина напруженості у виділених точках A, B, C визначається суперпозицією полів, кожне з яких створюється окремо певним зарядом. Напруженості складаються векторно, як це показано на рис. 1.3а (сторони чотирикутників відповідають напруженостям полів, що створюються кожним зарядом окремо).

Припустимо тепер, що величину позитивного заряду збільшили, а негативного – зменшили. Виберемо ті ж точки A, B, C і покажемо для них (звичайно, якісно) спочатку, як зміняться величини полів кожного з зарядів, а потім – як зміниться їх векторна сума у кожній з означених точок (рис. 1.3в). Відповідна картинка силових ліній показана на рис. 1.3г.

Нарешті, якщо припустити подальше зростання позитивного заряду і зменшення негативного, то отримаємо рис. 1.3д і рис. 1.3е.

Як бачите, із зростанням відносного значення позитивного заряду його вплив стає сильнішим: поле позитивного заряду починає явно домінувати.

1.2.7. По тілу об'ємом V_1 розподілено заряд q_1 з густиною $\rho_1 = \rho_1(\vec{r}_1)$, а по тілу об'ємом V_2 розподілено заряд q_2 з густиною $\rho_2 = \rho_2(\vec{r}_2)$. Знайти силу електростатичної взаємодії \vec{F} між цими тілами?

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{r}_1) dV_1 \cdot \rho_2(\vec{r}_2) dV_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

1.2.8. Чому дорівнюють потенціал ϕ та напруженість поля \vec{E} в точці з радіус-вектором \vec{r}' , що створюються зарядом q , який розподілено з густиною $\rho(\vec{r})$ по об'єму V ?

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}' - \vec{r}|}; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}) dV}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}).$$

1.2.9. Яке поле називається однорідним? Як математично можна записати умову однорідності поля?

Поле є однорідним, якщо його напруженість \vec{E} за напрямком і модулем не залежить від координат. Математично це можна записати як $\vec{E} = \vec{a}$, де \vec{a} – сталий вектор.

1.2.10. Потенціал електростатичного поля має вигляд $\varphi = ax + by + cz$, де a, b, c – сталі. Чи є таке поле однорідним?

Так, оскільки $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$ є сталим вектором.

1.2.11. Чи можна стверджувати, що якщо в деякій області простору $\text{rot } \vec{E} = 0$ і $\text{div } \vec{E} = 0$, то поле є однорідним?

В загальному випадку, ні. Наприклад, цим умовам відповідає поле точкового заряду, яке не є однорідним.

1.2.12. Система складається з N точкових зарядів q_i . Координати кожного з них \vec{r}_i . Який фізичний зміст має вираз $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$?

Це сума всіх електростатичних сил, які діють на заряди. Вона дорівнює нулю, оскільки є сумою внутрішніх сил.

1.2.13. Визначити дивергенцію наступних виразів:

а) \vec{r} ;

б) \vec{r}/r^3 (за виключенням точки $\vec{r} = 0$);

в) $\vec{b} \cdot f(r)$, де \vec{b} – сталий вектор, $f(r)$ – довільна скалярна функція.

а) $\text{div } \vec{r} = 3$;

б) $\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \cdot \text{div } \vec{r} = 0$;

в) $\text{div}(\vec{b} \cdot f(r)) = \vec{b} \cdot \text{grad } f(r) + f(r) \cdot \text{div } \vec{b} = \vec{b} \cdot \text{grad } f(r)$.

1.2.14. За допомогою теореми Гаусса визначити потік вектора \vec{r} через замкнуту поверхню S , яка охоплює об'єм V .

$$\int_S (\vec{r} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div } \vec{r} \cdot dV = 3V.$$

1.2.15. На відстані ℓ від центра сфери радіуса R знаходиться заряд q ($\ell > R$). Чому дорівнює потік вектора напруженості електричного поля \vec{E} через сферу?

За теоремою Гаусса (1.6) потік $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$, де Q – заряд всередині сфери, а він за умовою відсутній. Отже, $\Phi = 0$.

Можна на це глянути і з іншого боку. Лінії напруженості поля, створеного зарядом q , перетинають поверхню сфери, входячи і виходячи з неї. Загальний створений потік дорівнюватиме нулю.

1.2.16. Чому дорівнює потік Φ вектора напруженості \vec{E} через поверхню сфери радіуса R , в центрі якої знаходиться електричний диполь з дипольним моментом \vec{p} ?

Електричний диполь складається з двох однакових за модулем, але протилежних за знаком зарядів. Таким чином, сумарний заряд всередині сфери дорівнює нулю. А отже, за теоремою Гаусса, і потік вектора \vec{E} теж дорівнює нулю.

1.2.17. Визначити інтеграли по контуру L (рис. 1.4):

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int_L |\vec{dr}|; \\ \text{б) } & \int_L \vec{dr}; \\ \text{в) } & \int_{r_1}^{r_2} dr. \end{aligned}$$

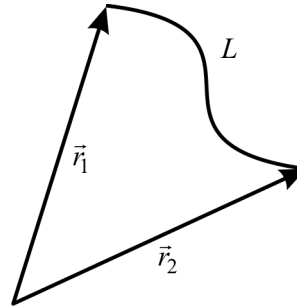


Рис. 1.4. До запитання 1.2.17

- а) L ;
- б) $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$;
- в) $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$.

1.2.18. Нехай на частинку діє сила \vec{F} . Який фізичний зміст має циркуляція вектора \vec{F} вздовж довільного контура L ?

$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ – це робота сили \vec{F} по переміщенню частинки вздовж заданого контура.

1.2.19. Як математично можна записати умову потенціальності векторного поля \vec{E} ?

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \text{ або } \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

1.2.20. Чи можуть силові лінії електростатичного поля бути замкнутими?

Ні, силові лінії електростатичного поля починаються і закінчуються на зарядах, або йдуть на нескінченність, як у випадку точкового заряду.

Якби силова лінія була замкнутою, то, переміщуючи заряд вздовж неї, ми могли б повернутись у вихідну точку, при цьому виконуючи роботу, яка б не дорівнювала нулю. З іншого боку, електростатичне поле потенціальне, і робота з переміщення

заряду по замкнутому контуру має бути рівна нулю. Отже, силові лінії електростатичного поля справді не можуть замикатись самі на себе.

1.2.21. Чи залежить робота по переміщенню заряду в електростатичному полі від траєкторії переміщення?

Розглянемо переміщення заряду з точки A у точку B по двом різним траєкторіям (рис. 1.5).

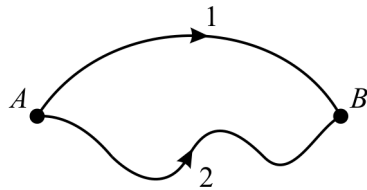


Рис. 1.5. До запитання 1.2.21

Позначимо роботу по переміщенню заряду вздовж шляху 1 через A_1 , а вздовж шляху 2 – через A_2 . Здійснимо обхід по замкнутому контуру: з точки A у точку B пройдемо по шляху 1, а з точки B у точку A – по шляху 2. Повна робота при обході по контуру буде рівною $A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$. Оскільки робота по будь-якому замкнутому контуру повинна дорівнювати нулю, то звідси випливає, що $A_1 = A_2$.

Якраз той факт, що робота по переміщенню заряду не залежить від вибору шляху переміщення, а повністю визначається початковою та кінцевою точками шляху, дозволяє використовувати цю величину у якості характеристики поля. Таким чином, ми отримуємо на додачу до напруженості \vec{E} ще одну характеристику поля – потенціал ϕ .

1.2.22. Під яким кутом перетинаються силові лінії та екіпотенціальні поверхні електричного поля?

Нехай в деякій точці A маємо перетин силової лінії та екіпотенціальної поверхні (рис. 1.6).

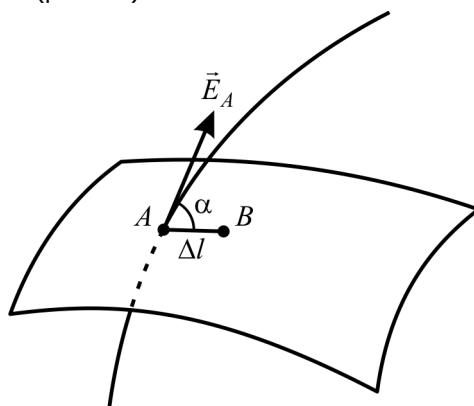


Рис. 1.6. До запитання 1.2.22

Напруженість поля в точці A описується вектором \vec{E}_A . Розглянемо переміщення пробного заряду q_0 з точки A у довільну точку B , яка лежить на цій же еквіпотенціальній поверхні на малій відстані Δl від точки A . Робота по переміщенню визначається за формулою

$$A = F \Delta l \cos \alpha = q_0 E_A \Delta l \cos \alpha,$$

де α – кут між напрямком вектора \vec{E}_A та напрямком переміщення.

Цю роботу можна виразити також через різницю потенціалів:

$$A = -q_0 (\varphi_B - \varphi_A).$$

Оскільки точки A і B лежать в межах однієї еквіпотенціальної поверхні, то $\varphi_B = \varphi_A$ і відповідна робота дорівнює нулю. Отже маємо, що

$$q_0 E_A \Delta l \cos \alpha = 0.$$

Із всіх множників у лівій частині останнього виразу нулю може бути рівний тільки $\cos \alpha$. Таким чином, робимо висновок, що $\alpha = 90^\circ$, тобто силові лінії і еквіпотенціальні поверхні орієнтуються взаємно перпендикулярно.

1.2.23. Чи може поле \vec{E} , силові лінії якого показані на рис. 1.7, бути потенціальним?

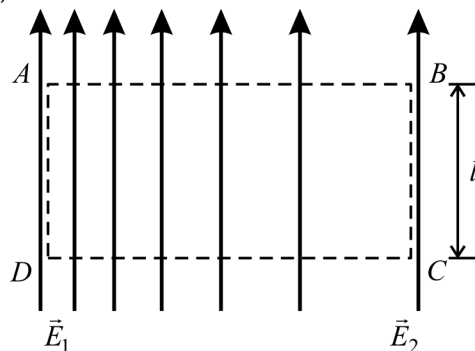


Рис. 1.7. До запитання 1.2.23

Нагадаємо, що чим густіше розташовані силові лінії, тим більшою є величина напруженості. Судячи з рисунку, $E_1 > E_2$. Порахуємо роботу по переміщенню деякого заряду q по замкнутому прямокутному контуру $ABCD$. Переміщення будемо здійснювати за годинниковою стрілкою.

Робота на відрізках AB і CD дорівнює нулю, оскільки тут силові лінії перпендикулярні до напрямку переміщення.

Робота на відрізку BC дорівнює $A_{BC} = -qE_2l$, а на відрізку DA – $A_{DA} = qE_1l$.

Сумарна робота по замкнутому контуру $A = q(E_1 - E_2)l \neq 0$, тобто поле не є потенціальним. Отже, або подібне електростатичне поле не може існувати, або мова йде не про електростатичне поле.

Крім цього, з нашого розгляду можна зробити ще один цікавий висновок. Якщо силові лінії електростатичного поля паралельні, то і їх густина повинна бути

рівномірною. Тобто, якщо напруженість поля однакова в усіх точках за напрямком, то і за величиною вона теж повинна бути однаковою.

Таким чином, в означенні однорідного поля достатньо говорити лише про однаковість напруженості або за напрямком, або за величиною. Інша ознака однорідності поля впливатиме автоматично.

1.2.24. Чи може система з N зарядів, в якій діють тільки кулонівські сили, знаходитись в стані рівноваги?

Так, така система можлива. Як приклад, можна навести систему точкових зарядів, зображену на рис. 1.8:

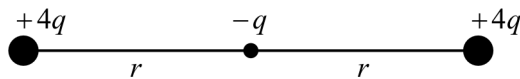


Рис. 1.8. До запитання 1.2.24

В такій системі сума кулонівських сил, що діють на кожен з зарядів з боку інших, дорівнює нулю. Мусимо зауважити, що дана рівновага не є стійкою. Навіть невелике зміщення будь-якого заряду призведе до руйнування системи.

Створити стійку рівноважну конфігурацію з нерухомих зарядів, між якими діють лише кулонівські сили, взагалі неможливо (теорема Ірншоу).

1.2.25. Заряджене тіло рухається зі швидкістю v . Як залежить заряд тіла від швидкості руху?

Не залежить, оскільки інваріантність заряду – одна з його фундаментальних властивостей.

1.2.26. Напруженість електричного поля $\vec{E} = ar \cdot \vec{r}$, де a – стала. Визначити об'ємну густину заряду ρ .

$$\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 (\vec{r} \cdot \operatorname{grad}(ar) + 3ar) = 4\epsilon_0 ar.$$

1.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. Точковий заряд $q = 50$ мкКл знаходиться на площині XU в точці з радіус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Знайти напруженість електричного поля та її модуль у точці з радіус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$. Компоненти радіус-векторів задано в метрах.

Розв'язання. Спочатку визначимо модуль вектора $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 10 \text{ м}.$$

Тепер компоненти вектора напруженості \vec{E} :

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} (x - x_0) = 2,7 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}; \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} (y - y_0) = -3,6 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

При подібних об-

рахунках зручно використовувати те, що коефіцієнт $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}$, а не підставляти окремо значення ϵ_0 чи π . Таким чином, $\vec{E} = 2,7\vec{i} - 3,6\vec{j} \left(\frac{\kappa B}{\text{м}} \right)$. Модуль напруженості $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 4,5 \frac{\kappa B}{\text{м}}$.

Приклад 1.2. Лінійний заряд розподілений з лінійною густиною $\lambda = \text{const}$ вздовж нитки довжиною $l = l_1 + l_2$. Знайти модуль вектора \vec{E} у площині $z = 0$ як функцію відстані R від нитки. Проаналізувати результат для випадку нескінченної рівномірно зарядженої нитки.

Розв'язання. Аналізуючи умову задачі, ми не можемо відразу вказати напрямки вектора напруженості електричного поля. В таких випадках рекомендується знаходити не сам вектор напруженості, а його проекції на координатні осі. В площині, перпендикулярній до осі OZ , величина напруженості поля буде залежати лише від відстані до нитки. Тому в даному випадку доцільно шукати поле \vec{E} у вигляді двох компонент: паралельної до осі OZ E_z та перпендикулярної до неї E_R .

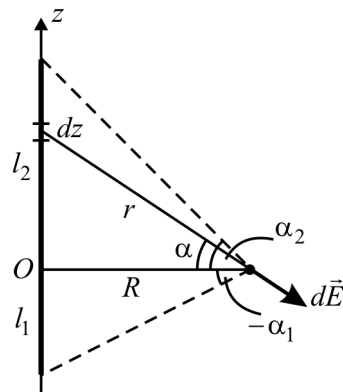


Рис. 1.9. До прикладу 1.2

Ділянка нитки довжиною dz створює в точці спостереження поле $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2}$. Компоненти, які нас цікавлять: $dE_z = -dE \cdot \sin \alpha$; $dE_R = dE \cdot \cos \alpha$.

До виразу для $dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{r^2} \sin \alpha$ входить три взаємно залежні змінні (z, r, α).

Дві з них потрібно виключити, представивши через третю. Як показує практика, найбільш прості підінтегральні вирази можна отримати, якщо за змінну інтегрування взяти кут. Тому виразимо dz та r через α : $z = R \tan \alpha$, тоді $dz = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha}$;

$r = \frac{R}{\cos \alpha}$. Підставимо все це у вираз для dE_z :

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot R^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \alpha d\alpha.$$

Кут α змінюється в межах двох граничних кутів ($\alpha \in [-\alpha_1; \alpha_2]$), які можна визначити з геометрії задачі. Таким чином,

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} \right).$$

Однією з ознак правильності розв'язку є можливість отримати із загальної відповіді якісь очевидні результати. Наприклад, очевидно, що при рівності відрізків $l_1 = l_2$ компонента напруженості поля $E_z = 0$ (це випливає із симетрії задачі). Або при $l_2 > l_1$ компонента E_z направлена в бік, протилежний осі OZ , тобто $E_z < 0$. Обом цим умовам отримана відповідь задовольняє. Знайдемо тепер компоненту, що лежить в площині, перпендикулярній до осі OZ :

$$E_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \left(\frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}} \right).$$

Загальний результат отримаємо, склавши дві складові вектора \vec{E} :

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_z^2}.$$

Для випадку $l_1 = l_2 \rightarrow \infty$ $E = E_R = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$, що відповідає полю нескінченної рівномірно зарядженої нитки.

Приклад 1.3. Тонке непровідне кільце радіуса R заряджене з лінійною густиною $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$, де φ – азимутальний кут, а λ_0 – додатна стала. Знайти модуль напруженості електричного поля \vec{E} в центрі кільця.

Розв'язання. В цій задачі, виходячи з її умови, можна відразу сказати, як буде напрямлено результуючий вектор \vec{E} . Розглядаючи кожну ділянку кола dl окремо, ми отримаємо набір векторів $d\vec{E}$, що характеризують напруженості полів окремих елементарних зарядів $dq = \lambda dl$. Слід звернути увагу на те, що функція $\cos \varphi$ при $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ має додатні значення, а при $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$ – від'ємні. Тому права половина кільця заряджена позитивно, а ліва – негативно. Кожна з цих половин буде створювати свій набір векторів $d\vec{E}$. Один з таких наборів зображений на рис. 1.10.

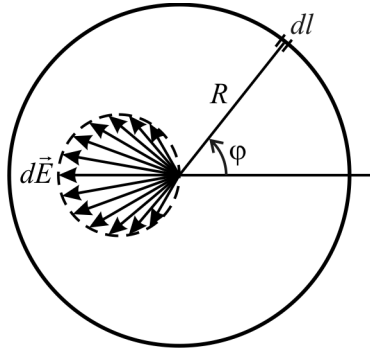


Рис. 1.10. До прикладу 1.3

Складання всіх цих векторів дасть нам результуючий вектор \vec{E} , спрямований у напрямку $\varphi = \pi$. Тому при знаходженні поля у центрі кільця нас буде цікавити не сам вектор $d\vec{E}$, а лише його проекція $dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 \cos^2 \varphi d\varphi}{R}$.

Інтегрування по всьому кільцю дає

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \cos^2 \varphi d\varphi}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}.$$

Приклад 1.4. Диск радіуса R заряджений рівномірно з поверхневою густиною σ . Знайти потенціал і напруженість електричного поля на осі диска в залежності від відстані z до його центра. Дослідити отриманий результат для $z \ll R$.

Розв'язання. На поверхні диска виділимо ділянку ds (рис. 1.11). Її заряд $dq = \sigma ds = \sigma r dr d\alpha$, де α – азимутальний кут. Елемент площі ds наведено у полярній системі координат, яку тут доцільно використати. Потенціал на осі буде складатися з потенціалів таких окремих ділянок. Завдяки тому, що потенціал є скалярною величиною, знаходження повного потенціалу, створюваного диском на осі, зводиться до простого інтегрування:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r dr d\alpha}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right).$$

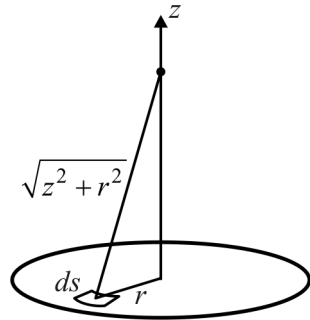


Рис. 1.11. До прикладу 1.4

Симетрія задачі дозволяє сказати, що результуючий вектор напруженості \vec{E} (результат інтегрування по всій поверхні диска) буде спрямований вздовж осі OZ . Проекція вектора напруженості на будь-який напрямок визначається зміною потенціалу вздовж цього напрямку: $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$. Цей зв'язок дозволяє спростити знаходження напруженості електричного поля, якщо вже відомий вираз для його потенціалу:

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right).$$

У наближенні $z \ll R$ ми отримаємо вираз для поля нескінченної рівномірно зарядженої площини: $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Приклад 1.5. Знайти напруженість електричного поля в центрі кулі радіуса R , об'ємна густина заряду в якій $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r}$, де \vec{a} – сталий вектор, \vec{r} – радіус-вектор, проведений з центра кулі.

Розв'язання. Помістимо початок координат в центр кулі, а вісь OZ спрямуємо вздовж вектора \vec{a} (рис. 1.12).

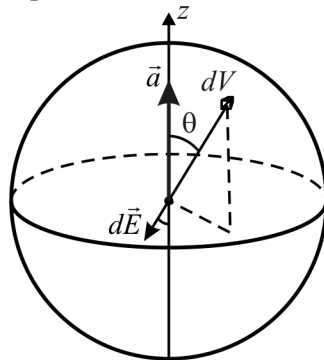


Рис. 1.12. До прикладу 1.5

Перейдемо до сферичної системи координат (r, θ, φ) . Елемент об'єму у цій системі $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$. Густина заряду при такому виборі системи координат $\rho = \vec{a} \cdot \vec{r} = ar \cos \theta$. Поле, що створюється в центрі кулі зарядом, зосередженим в елементі об'єму dV , $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} = \frac{ar}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi dr$. Слід звернути увагу на те, що знак скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{r}$ залежить від значення кута θ . Так, для $\theta \in [0; \pi/2]$ густина заряду виходить додатною, а при $\theta \in (\pi/2; \pi]$ – від'ємною. Відповідно буде визначатися і напрямок електричного поля. Результуючий вектор \vec{E} буде спрямований у від'ємний бік осі OZ (рис. 1.12). Тому замість модуля $d\vec{E}$ врахуємо лише його проекцію $dE_z = -dE \cdot \cos \theta = -\frac{ar}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi dr$.

$$\text{Сумарне поле } E = -\frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi = -\frac{aR^2}{6\epsilon_0}.$$

$$\text{У векторному вигляді: } \vec{E} = -\frac{\vec{a}R^2}{6\epsilon_0}.$$

Приклад 1.6. Простір заповнено зарядом з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, де ρ_0 та α – додатні константи, r – відстань від центра системи. Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію r . Дослідити отриманий вираз при малих та великих r , тобто при $\alpha r^3 \ll 1$ та $\alpha r^3 \gg 1$.

Розв'язання. Система сферично симетрична. Це видно з того, що густина заряду залежить лише від r . Отже, напруженість електричного поля може мати лише радіальну складову. Тому і поверхню для знаходження потоку напруженості виберемо у вигляді сфери радіуса r . Вираз для елемента об'єму легко отримати з формули для об'єму кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, звідси $dV = 4\pi r^2 dr$ (тут ми скористалися тим, що ρ не залежить від координат θ і φ , інакше довелось би писати $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ і проводити інтегрування по трьох змінних). За теоремою Гаусса: $\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^r \exp(-\alpha r'^3) \cdot 4\pi r'^2 dr'$. Отже, $E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 \alpha r^2} (1 - e^{-\alpha r^3})$.

При $\alpha r^3 \ll 1$ маємо $1 - e^{-\alpha r^3} \cong \alpha r^3$ і $E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$ (як для рівномірно зарядженої кулі).

При $\alpha r^3 \gg 1$ маємо $e^{-\alpha r^3} \rightarrow 0$ і $E = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 \alpha r^2}$ (як для точкового заряду величиною $q = \frac{4\pi}{3\alpha} \rho_0$).

Приклад 1.7. Всередині кулі, зарядженої рівномірно з густиною ρ , є сферична порожнина, центр якої зміщений на вектор \vec{a} відносно центра кулі. Знайти напруженість поля всередині порожнини.

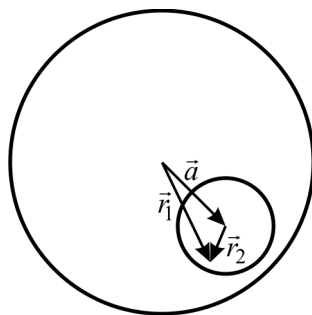


Рис. 1.13. До прикладу 1.7

Розв'язання. Сферичну симетрію в цій задачі порушено, і прямо застосувати теорему Гаусса неможливо. Заповнимо рівномірно порожнину зарядами з густиною $+\rho$ та $-\rho$ (причому, $|\rho| = +\rho = \rho$). Такий прийом дозволяє відновити симетрію задачі, не порушуючи електронейтральність порожнини і не змінюючи напруженість поля у просторі. Таким чином, поле всередині порожнини подається як суперпозиція полів двох рівномірно заряджених куль (великої з $+\rho$ і малої з $-\rho$). За

теоремою Гаусса, всередині рівномірно зарядженої кулі $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$. Тоді поле вели-

кої кулі – $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$, малої – $\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_2$. Сумарне поле

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$. Отже, поле в порожнині є однорідним.

Приклад 1.8. Показати, що потенціал поля точкового диполя з електричним моментом \vec{p} може бути записаний як $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$, де \vec{r} – радіус-вектор, проведений із центра диполя в точку спостереження (рис. 1.14). Знайти за допомогою цього виразу модуль напруженості електричного поля диполя.

Розв'язання. Розглянемо потенціал диполя як суперпозицію потенціалів точкових зарядів $+q$ та $-q$: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$. Електричний диполь

характеризується дипольним моментом \vec{p} , модуль якого дорівнює добутку ql , а напрям вибирається вздовж осі диполя від негативного заряду до позитивного. Положення точки, для якої визначається потенціал, зручно характеризувати відстанню r від центра диполя і кутом θ між вектором дипольного моменту та напрямком на точку спостереження (рис. 1.14). Для точкового диполя справедлива умова $l/r \ll 1$.

В такому випадку можна використати наближення $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$ та $r_1 r_2 \approx r^2$. З урахуванням цього вираз для потенціалу набуває вигляду

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta.$$

Враховуючи, що скалярний добуток $(\vec{p} \cdot \vec{r}) = pr \cos \theta$, можна отримати відповідь, яка задовольняє умові задачі:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

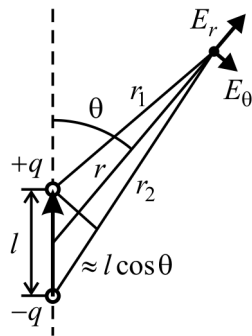


Рис. 1.14. До прикладу 1.8

При обчисленні модуля напруженості електричного поля диполя в точці спостереження використаємо отриманий нами вираз для потенціалу диполя. Результуючий вектор \vec{E} зручно представити у вигляді двох компонент: \vec{E}_r , спрямованої вздовж радіус-вектора \vec{r} , та \vec{E}_θ – перпендикулярної до нього. Проекція напруженості на будь-який напрямок E_s пов'язана із зміною потенціалу при переміщенні точки вздовж цього напрямку співвідношенням $E_s = -\partial\varphi/\partial s$.

Для знаходження E_r нам потрібно здійснити переміщення вздовж радіус-вектора:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos \theta.$$

Переміщення в напрямку, перпендикулярному до радіус-вектора, визначається виразом $\partial s = r \partial \theta$. Тоді $E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{r \partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta$. Модуль

напруженості електричного поля диполя дорівнює

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}.$$

Приклад 1.9. Тонке кільце радіуса R має заряд q , нерівномірно розподілений по кільцю. Знайти роботу електричних сил при переміщенні точкового заряду з центра кільця по довільному шляху в точку, яка знаходиться на осі кільця на відстані L від його центра (рис. 1.15). Заряди q та q' позитивні.

Розв'язання. Робота електричних сил по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2 визначається через різницю потенціалів між цими точками: $A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тому спочатку знайдемо розподіл потенціалу вздовж осі кільця. Виділимо на кільці відрізок $dl = R d\theta$. Цей відрізок має заряд $dq = \lambda(\theta) R d\theta$, де $\lambda(\theta)$ – лінійна густина заряду кільця. Нас не цікавить аналітичний вигляд цієї функції – повний заряд все одно визначатиметься як $q = \int_0^{2\pi} \lambda(\theta) R d\theta$.

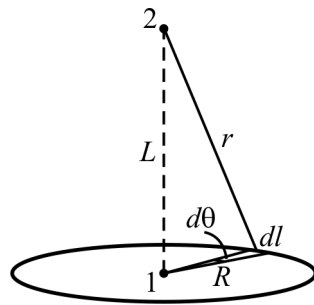


Рис. 1.15. До прикладу 1.9

Потенціал, що створюється на осі кільця виділеним відрізком dl , рівний

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r} \lambda(\theta) d\theta.$$

Тоді потенціал на осі

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda(\theta) \cdot R d\theta}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + L^2}},$$

а робота

$$A_{12} = q'[\varphi(0) - \varphi(L)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (L/R)^2}} \right).$$

Приклад 1.10. Дві нескінченні площини, які знаходяться на відстані l одна від одної, заряджені рівномірно з поверхневими густинами $+\sigma$ і $-\sigma$ відповідно. Площини мають коаксіальні отвори з радіусами $R \gg l$. Взявши координатну вісь x з початком відліку O (рис. 1.16), знайти потенціал і проекцію E_x напруженості електричного поля на вісь системи як функцію координати x .

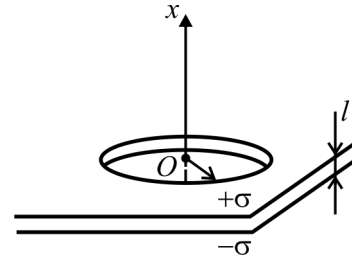


Рис. 1.16. До прикладу 1.10

Розв'язання. Вираз для потенціалу можна отримати, використавши знайдену раніше формулу для потенціалу точкового диполя (приклад 1.8).

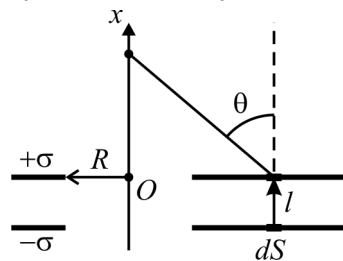


Рис. 1.17. До прикладу 1.10

Виділимо на верхній та нижній площинах елементарні ділянки так, щоб вони знаходились на одній вертикальній осі (рис. 1.17). Заряд верхньої ділянки $+\sigma dS$, нижньої $-\sigma dS$. Отримуємо диполь з дипольним моментом $dp = \sigma dS \cdot l$. На осі системи він створить потенціал $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dp \cos \theta}{r^2 + x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dp x}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$ (тут r – від-

стань від диполя до осі системи). Для інтегрування по всій площині використаємо полярну систему координат. В цій системі $dS = r dr d\alpha$. Інтегрування по азимутальному куту дасть множник 2π . Отримаємо

$$\varphi = \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} x \int_R^\infty \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Big|_R^\infty = \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Для знаходження проекції напруженості електричного поля на вісь системи використаємо зв'язок між напруженістю та потенціалом $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$.

Приклад 1.11. Рівномірно заряджену з поверхневою густиною σ сферу радіуса R розрізали навпіл. Знайти потенціал півсфери у будь-якій точці площини перерізу.

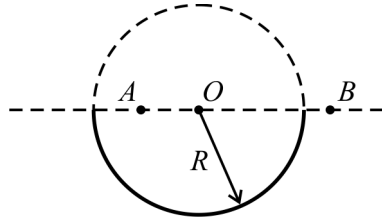


Рис. 1.18. До прикладу 1.11

Розв'язання. Розглянемо спочатку допоміжну задачу: знайдемо потенціал всередині рівномірно зарядженої сфери. Поле всередині сфери дорівнює нулю (наслідок теореми Гаусса). Оскільки $E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0$, то $\varphi = \text{const}$ скрізь всередині сфери (в тому числі і в точках площини, яка нас цікавить). Найлегше цей потенціал визначити для центра сфери: $\varphi_0 = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R} \int_S dS = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$.

Саме такий потенціал матиме також і довільна точка A всередині повної сфери. З іншого боку, за принципом суперпозиції цей потенціал дорівнює сумі потенціалів, що створюються двома півсферами – верхньою та нижньою. Із міркувань симетрії зрозуміло, що в будь-якій точці площини перерізу потенціали, які створюються півсферами, однакові. Тому потенціал, який створюється однією півсферою, дорівнює

$\varphi_A = \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$. Подібні міркування можна застосувати також і для тієї частини площини перерізу, яка знаходиться за межами сфери. Потенціал в точці B в однаковій мірі створюється верхньою та нижньою півсферами. Загалом він рівний

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$, де $r = OB$. Отже потенціал, що створюється окремою півсферою, відповідно вдвічі менший: $\varphi_B = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r}$.

Таким чином, потенціал довільної точки площини перерізу в межах півсфери є величиною сталою. Тобто така площина є екіпотенціальною поверхнею. Відомо, що силові лінії та екіпотенціальні поверхні взаємно перпендикулярні. Тому вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до цієї поверхні. Цей висновок, досить тривіальний для точки O , не є очевидним для всіх інших точок площини, яка розглядалась в задачі.

Приклад 1.12. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса R . Знайти потенціал в центрі кулі, а також всередині та ззовні кулі як функцію відстані r до її центра.

Розв'язання. Використовуючи теорему Гаусса, ми можемо отримати вираз для напруженості електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженою кулею. Всередині кулі, при $r \leq R$ $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r$, при $r \geq R$ $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

Розглянемо випадок $r \geq R$. Прийемо, що на нескінченності потенціал $\varphi_\infty = 0$.

$$\text{Тоді } \varphi_\infty - \varphi(r) = \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad \varphi(r) = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Для знаходження $\varphi(r)$ при $r \leq R$ ми можемо використати вже знайдений нами вираз для потенціалу на поверхні кулі $\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$. Тоді $\varphi(r) - \varphi(R) = \int_r^R E dr$. В

$$\text{результаті отримаємо } \varphi(r) = \varphi(R) - \int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r dr = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right). \quad \text{В центрі}$$

$$\varphi(0) = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

До знаходження потенціалу всередині кулі можна підійти і з іншого боку. Виділимо елементарний об'єм $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\alpha dr$. Цей об'єм має заряд $dq = \rho dV$ і створює потенціал в центрі кулі $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r}$. Для знаходження повного потенціалу потрібно проінтегрувати отриманий вираз по всьому об'єму кулі:

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho r^2 \sin \theta d\theta d\alpha dr}{r} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

$$\text{Тоді різниця потенціалів запишеться як } \varphi(r) - \varphi(0) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

$$\text{Остаточно } \varphi(r) = \varphi(0) - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right).$$

Приклад 1.13. Розв'язати приклад 1.12 за допомогою рівняння Пуассона.

Розв'язання. Задача має сферичну симетрію, тому очевидно, що потенціал залежатиме лише від радіуса. В такому випадку оператор Лапласа в сферичній системі координат матиме вигляд $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$. Ззовні кулі, за відсутності вільних

зарядів, $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$. Звідси отримуємо вираз $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$. З іншого боку, ми знає-

мо, що $\frac{d\varphi}{dr} = -E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$. Порівнюючи два вирази, отримаємо, що $C_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$.

Таким чином, $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, звідки $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C_2$. З граничної умови $\varphi(\infty) = 0$

випливає, що $C_2 = 0$. Отже, потенціал зовні кулі $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$.

Всередині кулі $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Далі: $r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r^3 + C_3$. Із симетрії за-

дачі випливає, що при $r = 0$ $E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0$. Тому $C_3 = 0$. Рівняння набуває вигляду

$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r$. Інтегруванням обох частин отримуємо $\varphi = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_4$. Для знахо-

дження останньої невідомої константи C_4 використаємо вже знайдений вираз для

потенціалу зовні кулі при $r = R$: $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$. Об'ємна густина заряду $\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$.

Підставляємо: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = -\frac{1}{6\epsilon_0} \frac{3q}{4\pi R^3} R^2 + C_4 = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} + C_4$, звідки $C_4 = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}$. В

результаті потенціал всередині кулі $\varphi = -\frac{1}{6\epsilon_0} \frac{3q}{4\pi R^3} r^2 + \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right)$.

Приклад 1.14. Між двома великими паралельними пластинами, відстань між якими d , знаходиться рівномірно розподілений об'ємний заряд. Різниця потенціалів пластин дорівнює $\Delta\varphi$. При якому значенні об'ємної густини заряду напруженість поля поблизу однієї з пластин буде рівна нулю? Якою буде при цьому напруженість поля біля іншої пластини?

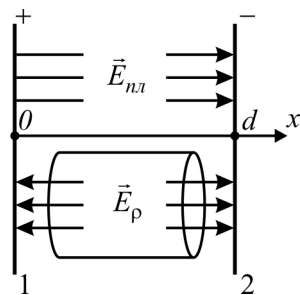


Рис. 1.19. До прикладу 1.14

Розв'язання. Нехай перша пластина заряджена позитивним зарядом, а друга – негативним. Потенціал будемо відраховувати відносно першої пластини, тобто приймемо її потенціал за нуль. Тоді потенціал другої пластини буде $(-\Delta\varphi)$. Поле

між пластинами є суперпозицією двох полів – поля самих пластин \vec{E}_{nl} та поля об'ємного заряду \vec{E}_ρ : $\vec{E} = \vec{E}_{nl} + \vec{E}_\rho$. Причому біля першої пластини модулі цих полів віднімаються, а біля другої – додаються. Поле пластин визначається різницею потенціалів $\Delta\varphi$ та відстанню між пластинами: $E_{nl} = \frac{\Delta\varphi}{d}$. Поле об'ємного заряду можна знайти за допомогою теореми Гаусса. Виділимо циліндр довжиною l з площею торця S (рис. 1.19). Тоді за теоремою Гаусса $E_\rho 2S = \frac{\rho S l}{\epsilon_0}$, звідси $E_\rho = \frac{\rho l}{2\epsilon_0}$. За умовою поле поблизу першої пластини $E_1 = 0$, тому $E_{nl} - E_\rho = \frac{\Delta\varphi}{d} - \frac{\rho d}{2\epsilon_0} = 0$. Отже, густина заряду, яка задовольняє умові задачі, $\rho = \frac{2\epsilon_0 \Delta\varphi}{d^2}$. Поле поблизу другої пластини можна визначити, пам'ятаючи, що там складаються два однакові за модулем поля ($E_{nl} = E_\rho$): $E_2 = E_{nl} + E_\rho = 2E_\rho = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$.

Цю ж задачу можна розв'язати за допомогою рівняння Пуассона.

$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho x}{\epsilon_0} + C_1 \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_1 x + C_2$. Невідомі константи визначимо із граничних умов $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(d) = -\Delta\varphi$. З першої умови випливає, що $C_2 = 0$, з другої – $C_1 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} - \frac{\Delta\varphi}{d}$. Напруженість електричного поля $E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} - C_1$. За умовою задачі $E(0) \equiv E_1 = 0$. Звідси випливає, що константа C_1 , яка задовольняє умові задачі, дорівнює нулю, а отже шукана густина заряду $\rho = \frac{2\epsilon_0 \Delta\varphi}{d^2}$. При цьому $E(d) \equiv E_2 = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$.

Приклад 1.15. В моделі атома водню Томпсона вважається, що позитивний заряд q (протон) сферично симетрично розподілений всередині кулі радіуса R . В центрі сфери знаходиться точковий негативний заряд $-q$ (електрон). Електрон зміщують на відстань r від центра. Вважаючи, що при цьому розподіл позитивного заряду не змінюється, визначити частоту коливань електрона.

Розв'язання. Напруженість поля всередині рівномірно зарядженої кулі дорівнює $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$, де $\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ – густина заряду; \vec{r} – радіус-вектор, проведений з центру кулі у точку спостереження. Цей результат можна отримати за допомогою

теорему Гаусса. При зміщенні електрона на відстань r від центра, на нього діятиме сила $\vec{F} = -q\vec{E}$. За другим законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{\ddot{r}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^3} \vec{r}$, або в скалярній

формі: $\ddot{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{q^2}{R^3} r = 0$. Отримане рівняння є рівнянням гармонічних коливань,

яке в загальному вигляді записується як $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$. Порівнюючи два останні вирази, можна сказати, що електрон буде здійснювати гармонічні коливання відносно

центра кулі з частотою $\omega = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} \sim 10^{16} \text{ c}^{-1}$ (для розрахунку використано ха-

рактерний розмір атома водню $R \sim 10^{-10} \text{ м}$).

Приклад 1.16. Сферу радіуса R зарядили з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, де σ_0 – додатна стала, θ – зенітний кут. Довести, що такий розподіл заряду можна представити як результат невеликого зсуву однієї відносно іншої рівномірно заряджених куль радіуса R , заряди яких однакові за величинами і протилежні за знаками. Визначити напруженість поля всередині сфери.

Розв'язання. Розглянемо дві рівномірно заряджені кулі радіуса R , що зміщені на певну відстань a одна відносно одної. Густини зарядів куль ρ однакові за величиною і протилежні за знаком (рис. 1.20).

За умови невеликого зсуву ($a \ll R$) можна вважати, що весь некомпенсований заряд розміщений в приповерхневому шарі. Причому верхня половина кулі матиме один знак поверхневого заряду, нижня – протилежний. Товщина такого приповерхневого шару визначається як $a \cos \theta$. Відповідний заряд, який приходить на одиницю площі поверхні, $\sigma(\theta) = \rho a \cos \theta$. Цей вираз, з точністю до позначення $\sigma_0 = \rho a$, співпадає з виразом, наведеним в умові задачі.

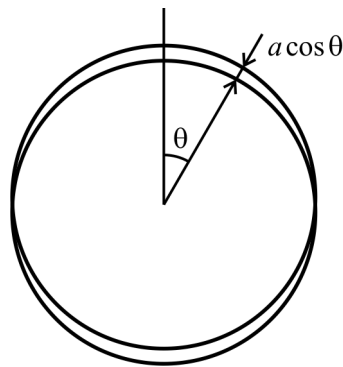


Рис. 1.20. До прикладу 1.16

Напруженість електричного поля в області перетину куль визначається як $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$ (докладно виведення цього виразу було розглянуто нами у прикладі 1.7). Таким чином, якщо сфера заряджена за законом косинуса, то поле всередині сфери є однорідним і дорівнює $E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$.

2. ПРОВІДНИКИ ТА ДІЕЛЕКТРИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

2.1. Короткі теоретичні відомості

Головною особливістю провідників, яка визначає їх властивості при взаємодії із зовнішнім електричним полем, є наявність вільних зарядів. Вільні електрони мають змогу переміщуватись в межах провідника під впливом електричного поля. Переміщення відбувається до тих пір, поки не встановиться рівноважний розподіл зарядів, при якому електростатичне поле всередині провідника перетворюється на нуль: $\vec{E} = 0$. Відсутність поля всередині провідника автоматично означає, що потенціал в усіх його точках є величиною сталою ($\varphi = const$), тобто поверхня і об'єм провідника в електростатичному полі є екіпотенціальними. Звідси ж випливає і те, що вектор напруженості на зовнішній поверхні провідника перпендикулярний до цієї поверхні у кожній її точці.

Внесення нейтрального провідника у зовнішнє електростатичне поле призводить до перерозподілу зарядів в ньому, в результаті чого надлишок негативних зарядів накопичується на одному кінці провідника, а надлишок позитивних зарядів – на іншому. Такі заряди називаються індукційними, а сам процес перерозподілу – електростатичною індукцією. Індукційні заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника.

Якщо провіднику надати певний заряд, то некомпенсовані заряди розташуються теж тільки на поверхні провідника.

Застосувавши теорему Гаусса, можна знайти вираз для електричного поля на поверхні провідника, зарядженого з поверхневою густиною σ

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}, \quad (2.1)$$

де \vec{n} – нормаль до поверхні провідника.

В діелектриках, на відміну від провідників, заряди можуть зміщуватися із своїх положень рівноваги тільки на малі відстані в межах одного атома чи молекули. Якщо діелектрик складається з нейтральних молекул, то під дією зовнішнього електричного поля \vec{E} центри негативних зарядів зміщуються відносно центрів позитивних зарядів, утворюючи диполі. Таке зміщення зарядів називається електричною поляризацією. Заряди, які виникають в результаті поляризації діелектрика, називають поляризаційними або зв'язаними. Всередині об'єму діелектрика поляризаційні заряди компенсують одне одного і, як і в провідниках, проявляють себе лише на поверхні діелектрика. Правда, це справедливо лише за однорідної поляризації діелектрика, коли всі молекули поляризовані і орієнтовані однаково. Якщо ж поляризація неоднорідна, то це призводить до появи об'ємних зв'язаних зарядів.

Кількісно поляризація діелектрика описується вектором поляризації \vec{P} , який визначається як сумарний дипольний момент одиниці об'єму діелектрика. Для ізотропного діелектрика та невеликих полів вектор поляризації прямо пропорційний напруженості прикладеного поля

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнт пропорційності α у останньому виразі називається діелектричною сприйнятливістю.

Потік вектора поляризації \vec{P} через замкнену поверхню S

$$\oint_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS = -q', \quad (2.3)$$

де \vec{n} – нормаль до елемента поверхні dS , q' – алгебраїчна сума зв'язаних зарядів всередині поверхні S .

Електричне поле в діелектрику характеризується вектором електричної індукції

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (2.4)$$

де $\epsilon = 1 + \alpha$ називають діелектричною проникністю речовини.

Для вектора \vec{D} також справедлива теорема Гаусса

$$\oint_S (\vec{D} \cdot \vec{n}) dS = Q. \quad (2.5)$$

Тут Q – алгебраїчна сума сторонніх зарядів всередині замкненої поверхні.

На межі поділу двох однорідних ізотропних діелектриків повинні виконуватись граничні умови:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (2.6)$$

де σ' і σ – поверхневі густини зв'язаних та сторонніх зарядів. Індексом n та τ позначено нормальні та тангенціальні складові відповідних векторів, а орт нормалі \vec{n} напрямлений із середовища 1 в середовище 2.

2.2. Запитання та відповіді

2.2.1. Як зміниться відхилення стрілки зарядженого електроскопа, якщо до нього піднести, не торкаючись, незаряджене провідне (діелектричне) тіло?

Внаслідок явища електричної індукції (провідник) і поляризації (діелектрик) відхилення стрілки зменшиться.

2.2.2. Чому при внесенні незарядженого провідника (діелектрика) в зовнішнє поле \vec{E}_0 , останнє спотворюється?

При внесенні речовини в зовнішнє поле за рахунок явища електричної індукції (поляризації) нейтральна в цілому речовина стає джерелом електричного поля. То-

му результуюче поле \vec{E} за принципом суперпозиції відрізняється від \vec{E}_0 : $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$, де \vec{E}_1 – поле, яке створюється речовиною.

2.2.3. В однорідне електричне поле вносять провідну незаряджену кулю. Наведіть якісно картину розташування індукованих зарядів на кулі. Намалюйте лінії напруженості електричного поля та еквіпотенціальні поверхні.

Якщо у зовнішнє електричне поле помістити провідну кулю, то вільні електрони всередині неї починають переміщуватись у напрямку протилежному до напрямку поля (рис. 2.1а). Відбувається перерозподіл зарядів, який продовжується до тих пір, поки напруженість поля всередині провідника знову не стане рівною нулю. Індуковані заряди при цьому мають створити поле, яке повністю скомпенсує зовнішнє поле $\vec{E}_1 = -\vec{E}_0$. Тобто поле індукованих зарядів всередині кулі має бути однорідним, що можливо лише за умови розподілу поверхневих індукованих зарядів за законом косинуса (див. прикладі 1.16 з розділу 1). В результаті заряд на поверхні кулі розподіляється нерівномірно: максимальне (за модулем) значення поверхневої густини заряду матимемо на «полюсах» кулі. По мірі віддалення від полюсів до «екватору» густина заряду поступово спадає до нуля (рис. 2.1б).

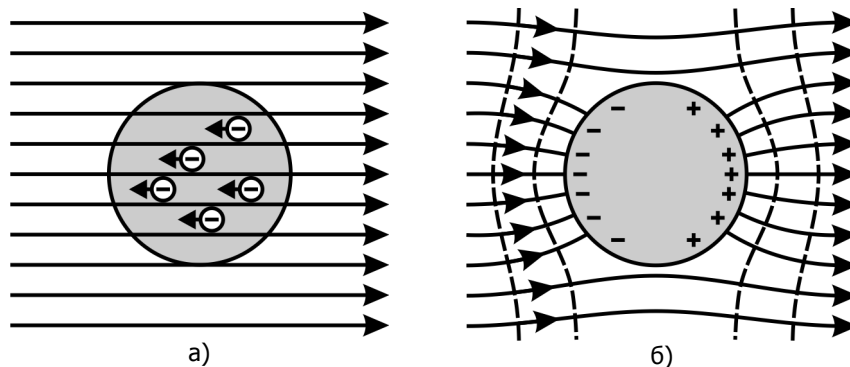


Рис. 2.1. До запитання 2.2.3

В результаті появи індукованих зарядів електричне поле у вакуумі перестає бути однорідним і вигляд силових ліній змінюється (рис. 2.1б). Деякі з них розриваються, закінчуючись на негативних індукованих зарядах і знову починаючись на позитивних. При цьому лінії напруженості залишаються перпендикулярними до поверхні провідника, адже вона залишається поверхнею рівного потенціалу. Інші еквіпотенціальні поверхні наведені на рис. 2.1б штрихованими лініями. В точках перетину з силовими лініями вони взаємно перпендикулярні.

По мірі віддалення від кулі вплив індукованих зарядів зменшується і однорідність поля відновлюється.

2.2.4. Чи можуть два однойменно заряджені тіла притягуватись?

Закон Кулона начебто однозначно визначає характер взаємодії однойменно заряджених тіл – вони повинні відштовхуватись одне від одного. Але справа в тому, що закон Кулона справедливий лише для точкових зарядів, тобто коли розміри заряджених тіл, що взаємодіють, малі порівняно з відстанями між ними. Якщо ж взаємодію між зарядженими тілами не можна розглядати як взаємодію точкових зарядів, то не все так однозначно.

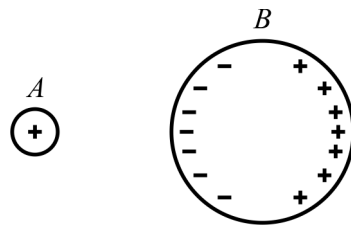


Рис. 2.2. До запитання 2.2.4

Нехай маємо заряджене позитивним зарядом тіло A (рис. 2.2). Наблизимо до нього провідну незаряджену кулю B . В результаті взаємодії вільних електронів кулі з електричним полем тіла A всередині кулі відбувається перерозподіл зарядів і на поверхні тіла з'являються індуковані заряди: на лівій половині кулі матимемо надлишок негативного заряду, на правій – надлишок позитивного. Оскільки до внесення в електричне поле куля була електронейтральною, то величини цих зарядів однакові за модулем, а от сили їх взаємодії з зарядом тіла A будуть відрізнятись. Справа в тому, що негативний заряд з'являється на ближній до тіла A половинці кулі. Відповідно і сила взаємодії з ним (притягання) буде більшою.

Деяко складнішою виглядатиме картина взаємодії у випадку, коли куля B має свій власний позитивний заряд. Кінцевий результат тепер буде визначатись трьома силами: силою притягання до індукованого негативного заряду і силами відштовхування від індукованого позитивного заряду та власного заряду кулі. В такому випадку цілком можлива ситуація, коли сила взаємодії дорівнюватиме нулю або сила притягання переважить силу відштовхування, і два однойменно заряджені тіла будуть притягуватись.

2.2.5. *Як за допомогою зарядженого провідника, не змінюючи його заряд, зарядити інший провідник?*

Це можна зробити, наприклад, наступним чином. З'єднаємо два незаряджених провідних тіла довгим тонким провідником (рис. 2.3а). Потім піднесемо, не торкаючись, до одного з них заряджене, наприклад позитивно, стороннє тіло (рис. 2.3б). Внаслідок явища електричної індукції заряди на з'єднаних дротиною провідниках перерозподіляться. Після цього провідники можна розділити (рис. 2.3в).

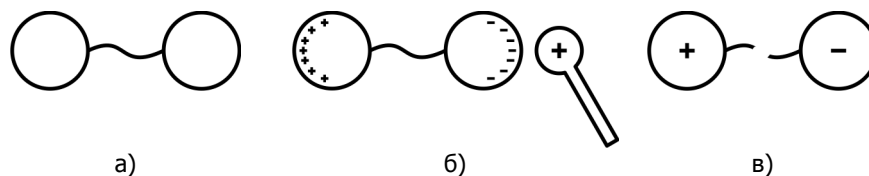


Рис. 2.3. До запитання 2.2.5

2.2.6. Всередині однорідного провідника є порожнина, всередині якої знаходиться точковий заряд q . Чому дорівнює сумарний заряд, який індукується на поверхні порожнини? Як залежить його величина від положення заряду q ?

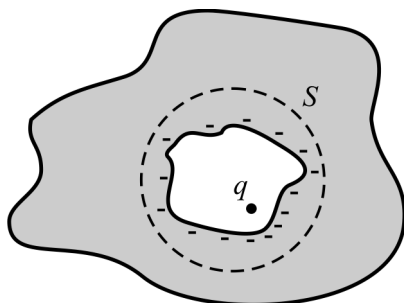


Рис. 2.4. До запитання 2.2.6

Електричне поле E_q , створюване зарядом q , викличе на поверхні провідника появу індукованих зарядів (рис. 2.4). Через неоднорідність цього поля індуковані заряди теж розподіляться нерівномірно. Густина індукованого заряду σ' буде мінятися від точки до точки і залежатиме від величини поля E_q поблизу поверхні.

Для відповіді на запитання використаємо теорему Гаусса. Оточимо порожнину разом з усіма зарядами оболонкою S . Форма оболонки не грає ніякої ролі. За теоремою Гаусса: $\int_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \frac{(q + q')}{\epsilon_0}$, де q' – сумарний індукований заряд. Оскільки

поле всередині провідника дорівнює нулю, то $\int_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 0$, тобто $q' = -q$.

Таким чином, на поверхні порожнини індукується заряд, який за модулем рівний заряду q , але протилежний йому за знаком. На величину індукованого заряду не впливає місцеположення заряду q – при переміщенні останнього буде змінюватись розподіл індукованого заряду, але сумарна його величина залишатиметься незмінною.

2.2.7. Всередині сферичної незарядженої провідної оболонки знаходиться точковий заряд q . Намалюйте силові лінії електричного поля всередині та ззовні оболонки. Як змінюється їх вигляд при переміщенні заряду q ?

Розглянемо спочатку більш простий випадок – розташуємо точковий заряд q (для визначеності нехай цей заряд буде позитивним) в центрі (рис. 2.5а).

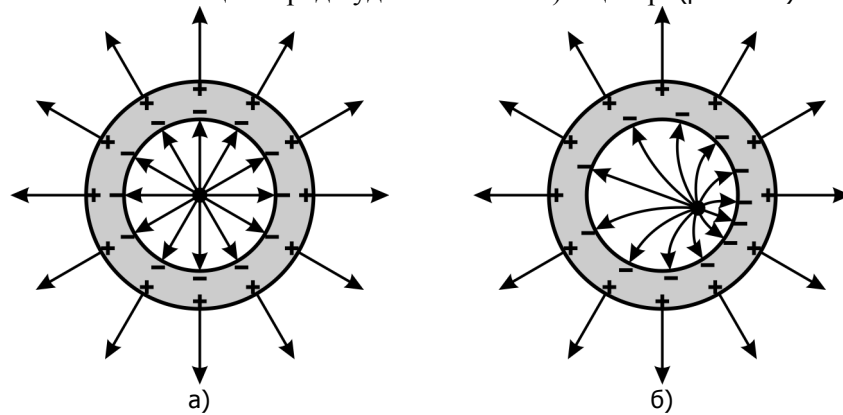


Рис. 2.5. запитання 2.2.7

Внесення в порожнину заряду q викличе появу на внутрішній поверхні сферичної оболонки негативного індукованого заряду $q' = -q$ (див. пит. 2.2.6), а розташування його в центрі призведе до рівномірного розподілу індукованого заряду. Відповідно і силові лінії утворять радіально-симетричну картину. Розташування і величина індукованого заряду q' не випадкові – поле індукованого заряду компенсує поле внесеного заряду q , так щоб напруженість поля в об'ємі провідника залишалась рівною нулю. Оскільки до внесення заряду q оболонка була електронейтральною, то надлишок негативного заряду на внутрішній поверхні викличе на зовнішній поверхні надлишок позитивного заряду $q'' = -q' = q$, який рівномірно розподілиться, утворюючи радіально-симетричну картину силових ліній за межами сферичної оболонки.

Зміщення заряду q викличе перерозподіл заряду q' (величина індукованого заряду при цьому зберігається). Тепер він буде розподілений нерівномірно – максимальна його густина буде у точці, найближчій до заряду q , мінімальна – у діаметрально протилежній точці. Зміниться і картина силових ліній (рис. 2.5б). Однак це ніяк не вплине на вигляд силових ліній за межами оболонки. Справа в тому, що взаємодія між зарядами здійснюється через електричне поле. Всередині ж провідника напруженість поля рівна нулеві. Тому перерозподіл заряду q' ніяк не вплине на розташування позитивних зарядів на зовнішній оболонці. Відповідно і картина силових ліній за межами оболонки не зміниться.

2.2.8. Як можна два довільних порожнистих провідника зарядити однаковим за величиною і знаком зарядом?

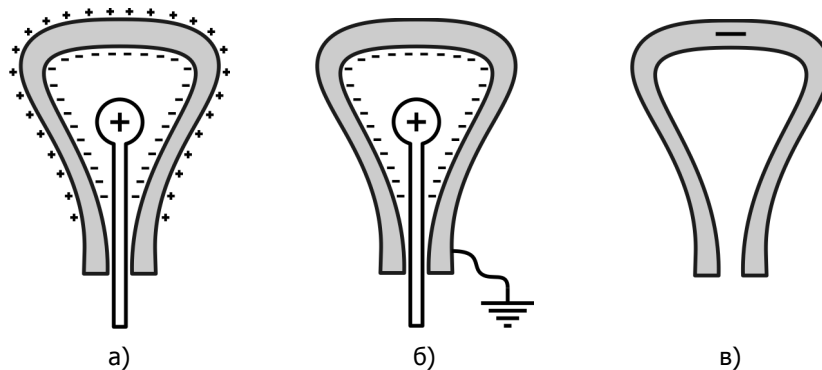


Рис. 2.6. До запитання 2.2.8

Як було показано в питанні 2.2.7, внесення зарядженого тіла в порожнистий провідник призводить до появи індукованих зарядів як на його внутрішній поверхні, так і на зовнішній (рис. 2.6а). Якщо після цього провідник на короткий час заземлити, то заряд з зовнішньої оболонки стікає в землю, а на внутрішній – залишається (рис. 2.6б). Після цього заряджене тіло вилучаємо і отримуємо заряджений провідник (рис. 2.6в). Те ж саме можна зробити з іншим провідником. Заряджені вони будуть однаково як за величиною, так і за знаком.

2.2.9. Як заряд одного провідного тіла повністю передати іншому провідному тілу?

Проведемо дослід дуже подібний до описаного в питанні 2.2.8. Внесемо так само заряджене тіло всередину порожнистого провідника. Заряд на внутрішній поверхні q' і заряд на зовнішній поверхні q'' за величиною рівні заряду внесеного в порожнину тіла q . Причому $q'' = -q' = -(-q) = q$. Тепер, після появи індукованих зарядів, доторкнемося до внутрішньої поверхні провідника. В результаті заряди на внутрішній поверхні провідника будуть скомпенсовані, а на зовнішній залишаться $q'' = q$. Таким чином заряд буде повністю передано від одного провідного тіла до іншого.

Взагалі таку процедуру можна повторити багаторазово і надати порожнистому тілу як завгодно великого заряду (на практиці величина заряду обмежується стіканням зарядів за рахунок іонізації повітря та автоелектронної емісії). Саме за таким принципом працює електростатичний генератор Ван де Граафа.

2.2.10. Як захистити тіла від впливу зовнішніх електростатичних полів?

Для захисту будь-яких тіл (наприклад, вимірювальних приладів) від впливу зовнішніх електростатичних полів їх потрібно оточити провідною оболонкою.

Принцип дії такого захисту полягає у наступному. Відомо, що електричне поле всередині провідника дорівнює нулю. Цей факт лишається незаперечним незалежно від величини і конфігурації заряджених тіл, які можуть створювати електричне поле за межами провідника. Провідник на це буде реагувати лише перерозподілом

індукційних зарядів на своїй поверхні. При рівновазі ці заряди будуть розподілятися на поверхні провідника таким чином, щоб скомпенсувати дію зовнішнього поля всередині. Створення всередині провідника порожнини ніяк не вплине на розподіл індукційних зарядів, а отже і на конфігурацію поля за його межами, оскільки видалення частини речовини (електронеutralної) з точки зору електростатики не призведе ні до появи нових зарядів, ні до зникнення старих. При цьому електричного поля всередині порожнини не буде. Зміни зовнішнього поля теж не призведуть до появи поля всередині порожнини.

Замість суцільного провідника для захисту може використовуватись металічна сітка, яка, до речі, є ефективною за наявності не тільки постійних, але і змінних електричних полів.

2.2.11. *За якої умови заряд розташовується на поверхні зарядженого провідника?*

Якщо напруженість поля в провіднику дорівнює нулю (а інакше б виникав впорядкований рух вільних зарядів без затрат енергії, що викликає протиріччя із законом збереження енергії), то потік вектора напруженості через будь-яку замкнуту поверхню, проведену всередині провідника, дорівнює нулю. А це означає, що нулю дорівнює і заряд всередині як завгодно малого об'єму провідника. Отже, всі заряди в провіднику розташовуються виключно на його поверхні.

Наше доведення ґрунтується на справедливості теореми Гаусса, яка, в свою чергу, справедлива лише тоді, якщо в законі Кулона стоїть саме $\frac{1}{r^2}$. Будь-яка інша залежність від r не дасть потрібного результату.

2.2.12. *Що називають електричним вітром?*

Густина розподілу зарядів на поверхні провідника залежить від кривизни цієї поверхні. На гострих виступах вона може досягати такого значення, що заряд починає з них стікати. Перебуваючи в неоднорідному полі молекули повітря поляризуються і починають притягуватись до виступу. Торкнувшись його, молекула отримує однойменний з виступом заряд і відштовхується від нього. Сила відштовхування переважає силу притягання, оскільки вона діє на заряджену молекулу, а сила притягання діяла на в цілому електронеutralну молекулу. З цієї причини віддалялись молекули від виступу будуть швидше, ніж наближались до нього. Таким чином утворюється потік повітря, направлений від виступу провідника, який і називають електричним вітром.

2.2.13. *Чому центрами конденсації пари в повітрі є заряджені пилінки або іони? Де використовується це явище?*

Заряджені частинки створюють навколо себе електричне поле. В цьому полі полярні молекули водяної пари намагаються зайняти положення, яке відповідає мінімуму їх потенціальної енергії – тобто дипольні моменти молекул \vec{p} орієнтуються вздовж силових ліній поля. При цьому виникає сила притягання між зарядженими частинками і молекулами пари, що призводить до конденсації останніх.

Використовується це явище, наприклад, у камері Вільсона.

2.2.14. Чому, тримаючи в руці ебонітову паличку, її можна наелектризувати тертям, а латунний стрижень ні?

Під час тертя на поверхні палички виникають заряди. Ебоніт – гарний діелектрик, латунь – провідник, і в останньому випадку, при електризації латунного стрижня, заряд стікатиме в землю через людське тіло.

2.2.15. У заряджений плоский конденсатор вставляють край діелектричної пластинки. Що відбудеться, якщо пластинка стане вільною?

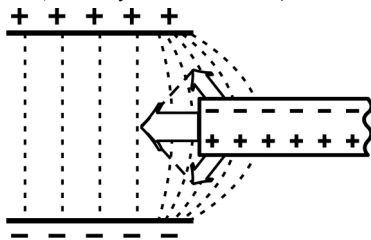


Рис. 2.7. До запитання 2.2.15

На краю конденсатора електричне поле є неоднорідним. За рахунок поляризації діелектрика в цьому полі на нього почне діяти сила, направлена в сторону зростання поля. Таким чином, діелектрик почне втягуватись всередину конденсатора (рис. 2.7).

2.2.16. Провідну кульку зарядили і оточили концентричною провідною оболонкою. Як зміниться потенціал кулі, якщо її з'єднати провідником з оболонкою?

При з'єднанні частина заряду з кульки перейде на оболонку. Зменшення заряду на кульці призведе і до зменшення її потенціалу.

2.2.17. В чому полягає метод електричних зображень?

Суть методу електричних зображень полягає в тому, що задача про поле у вакуумі, яке створюється вільними зарядами і зарядами, індукованими на поверхні провідника (розподіл яких наперед невідомий), замінюється на більш просту задачу, в якій поверхневі індуковані заряди замінюють системою фіктивних зарядів. Місцезнаходження фіктивних зарядів та їх величина вибираються так, щоб створене поле мало еквіпотенціальну поверхню, форма якої співпадала б з формою поверхні провідника, а потенціал – з потенціалом провідника. За теоремою про єдиність розв'язку така система вільних та фіктивних зарядів створює таке ж поле, що і реальні заряди.

2.2.18. Наведіть типи поляризації діелектриків.

1) *Електронна поляризація.* Цей тип поляризації характерний для діелектриків, молекули яких мають симетричну будову. За відсутності зовнішнього електричного поля центри позитивного і негативного зарядів таких молекул співпадають і, відповідно, їх дипольний момент дорівнює нулю. Молекули таких діелектриків називаються неполярними. Під впливом зовнішнього електричного поля заряди неполярних молекул зміщуються в протилежні сторони, утворюючи диполь.

2) *Іонна поляризація.* Цей тип поляризації характерний для речовин з іонною будовою (іонні кристали, рідини та гази з полярними молекулами). Наприклад, кристалічні ґратки іонних кристалів можна розглядати як дві окремі підґратки, що скла-

даються з позитивних або негативних іонів. При накладанні електричного поля ці підгратки дещо деформуються, зміщуючись одна відносно одної, що призводить до виникнення дипольних моментів.

3) *Орієнтаційна поляризація.* Цей тип поляризації спостерігається в речовинах, молекули яких вже за своєю будовою є диполями, тобто центри позитивного та негативного заряду в них не співпадають. Такі молекули називаються полярними. За відсутності зовнішнього електричного поля ці диполі орієнтуються хаотично, компенсуючи один одного так, що сумарний дипольний момент речовини дорівнює нулю. Внесення полярного діелектрика в електричне поле викликає появу сил, які намагаються зорієнтувати диполі вздовж силових ліній поля, роблячи сумарний дипольний момент речовини відмінним від нуля.

2.2.19. Довга вузька однорідна діелектрична паличка розміщена вздовж силових ліній однорідного поля \vec{E}_0 . Якісно зобразити залежність результуючого поля $E(x)$.

В зовнішньому полі паличка однорідно поляризується. В результаті на торцях палички виникають зв'язані поляризаційні поверхневі заряди: від'ємні на лівому торці і додатні на правому (рис. 2.8а).

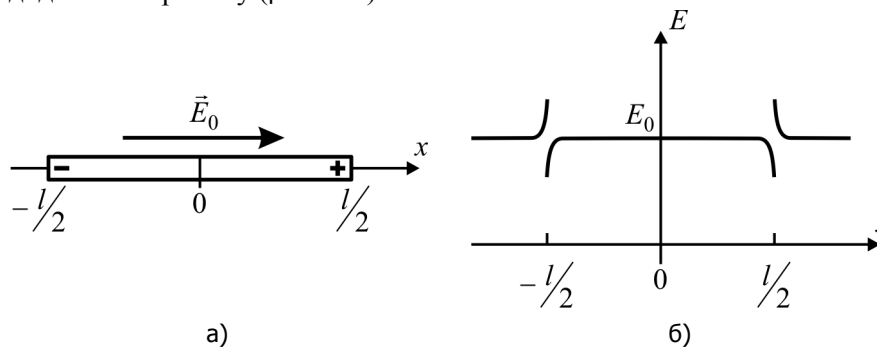


Рис. 2.8. До запитання 2.2.19

Результуюче поле поблизу торців складається з векторної суми зовнішнього поля \vec{E}_0 та поля поляризаційних зарядів \vec{E}' . Причому ззовні торців ці поля додаються, а всередині – віднімаються. В результаті на графіку (рис. 2.8б) спостерігаються розриви, які відповідають торцям палички.

Напруженість поля всередині палички співпадає з напруженістю зовнішнього поля, оскільки цього вимагають граничні умови, а саме, рівність між собою тангенціальних компонент вектора напруженості поля.

2.2.20. Чому дорівнює об'ємна густина ρ' зв'язаних зарядів в діелектрику, який однорідно поляризований?

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = 0.$$

2.2.21. Вважаючи відомим вектор поляризації \vec{P} на поверхні S діелектрика, написати вираз для середньої по об'єму діелектрика густини зв'язаних зарядів $\langle \rho' \rangle$.

$$\langle \rho' \rangle = \frac{\int_V \rho' dV}{V} = \frac{-\int_V \operatorname{div} \vec{P} dV}{V} = \frac{-\oint_S \vec{P} d\vec{S}}{V}$$

2.2.22. Фізичний зміст точки Кюрі і закону Кюрі для сегнетоелектриків.

В точці Кюрі, яка відповідає температурі T_C , відбувається фазовий перехід, при якому сегнетоелектрик переходить з неполярної фази в полярну (або навпаки). В неполярній фазі сегнетоелектрик стає «звичайним» діелектриком з великим значенням ϵ , для якого температурна залежність діелектричної проникності описується законом Кюрі $\epsilon \sim \frac{1}{T - T_C}$.

2.2.23. Як експериментально можна відрізнити електронний (індукований) та орієнтаційний механізми поляризації?

Можна, наприклад, дослідити температурну залежність діелектричної проникності $\epsilon(T)$.

Діелектрична проникність неполярних молекул, для яких якраз і є характерним електронний механізм поляризації, визначається внутрішньою будовою молекули і не залежить від температури. Справді, молекула є квантовою системою, енергія якої приймає лише певні дискретні значення. При звичайних температурах енергії теплового руху недостатньо, щоб перевести молекулу у збуджений стан. Так, для атома ртуті, мінімальна енергія збудження становить $\sim 4,9 \text{ eV}$, що відповідає температурі $\sim 5 \cdot 10^4 \text{ K}$. Тому з ростом температури внутрішня будова, а з нею і діелектрична проникність залишаються незмінними.

В полярних діелектриках присутні обидва механізми поляризації, але індуковані дипольні моменти на кілька порядків менші, ніж дипольні моменти, обумовлені несиметричністю будови молекул. Діелектрична проникність в цьому випадку складається з двох частин – індукованої та орієнтаційної. Індукована частина не залежить від температури, а орієнтаційна, яка грає головну роль, – обернено пропорційна до температури. Таку залежність неважко пояснити – тепловий рух молекул заважає орієнтуванню диполів вздовж електричного поля.

2.2.24. На рис. 2.9 наведено температурні залежності діелектричної проникності $\epsilon(T)$ для двох рідких діелектриків: тетрахлорметан CCl_4 та трихлорметан CCl_3H (більш відомий як хлороформ). Поясніть їх відмінність.

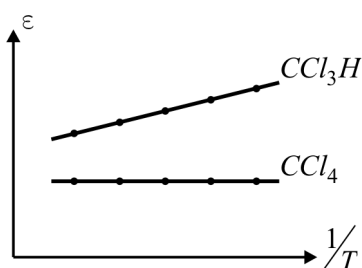
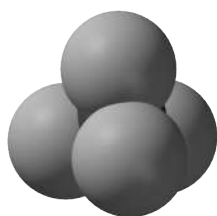


Рис. 2.9. До запитання 2.2.24

Відмінності у діелектричних властивостях молекул CCl_4 та CCl_3H визначаються їх будовою.



а) будова молекули CCl_4



б) будова молекули CCl_3H

Рис. 2.10. До запитання 2.2.24

Молекула CCl_4 має симетричну будову (рис. 2.10а) і тому є неполярною (її власний дипольний момент дорівнює нулю). Поляризація цього діелектрика має тільки індукований характер. Для зміни діелектричної проникності (зміни молекулярних орбіталей) молекулі потрібно надати досить значну енергію. Теплової енергії для цього не вистачає, тому $\epsilon \neq f(T)$.

Будова молекули CCl_3H несиметрична (рис. 2.10б), що призводить до появи власного дипольного моменту. Полярні молекули CCl_3H у зовнішньому полі намагаються зорієнтувати свій дипольний момент вздовж поля. Цьому заважає тепловий рух, який їх дезорієнтує. Зрозуміло, що, чим більша температура, тим ефект дезорієнтації відчутніший, а діелектрична проникність – менша.

2.2.25. Діелектричну кулю однорідно поляризували. Чому дорівнює локальне електричне поле $\vec{E}_{\text{лок}}$ всередині кулі?

Згідно Лорентца для ізотропного діелектрика $\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, де \vec{E}_0 – середнє макроскопічне поле всередині кулі. За умови однорідності поляризації кулі і за від-

сутності зовнішнього поля $\vec{E}_0 = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$ (воно створюється поверхневими зв'язаними зарядами). Тому $\vec{E}_{\text{лок}} = 0$.

2.2.26. Чи може в ізотропному діелектрику спостерігатися прямий (обернений) п'єзоефект?

Ні, не може. П'єзоелектричні властивості можуть спостерігатись тільки в іонних кристалах. Та й то із 32 кристалічних класів лише представники 20 класів є п'єзоелектриками. Справа в тому, що для існування п'єзоелектричних властивостей у кристалах необхідна відсутність в них центрів симетрії. Цій умові відповідає 21 кристалічний клас, але ще один клас виключається за сукупністю інших елементів симетрії.

2.2.27. Чому дорівнює потік вектора електричної індукції \vec{D} через поверхню сфери радіуса R , центр якої знаходиться на межі поділу двох діелектриків з проникностями ε_1 та ε_2 (рис. 2.11)? Вектор \vec{D}_1 в діелектрику 1 орієнтований під кутом θ відносно нормалі до межі поділу.

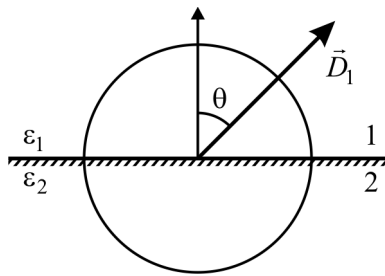


Рис. 2.11. До запитання 2.2.27

За теоремою Гаусса для діелектриків $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$, де q – сторонній заряд, що знаходиться всередині сфери. За його відсутності $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0$.

2.2.28. Виникнення взаємодії (сил притягання) між полярними молекулами просто пояснюється з позиції дипольної взаємодії. За рахунок чого ж виникають сили притягання між атомами інертних газів?

В атомах інертних газів розподіл зарядів в середньому є сферично-симетричним і середнє за часом значення дипольного моменту $\langle p \rangle = 0$. Разом з тим, миттєве положення центра електронної хмари не завжди співпадає з ядром. В такі моменти у атома з'являється відмінний від нуля дипольний момент \vec{p}_1 . Якщо \vec{p}_1 – миттєве значення дипольного моменту атома 1, то на відстані \vec{r} від цього атома створюється миттєве електричне поле $E_1 \sim p_1 / r^3$. Воно індукує в атомі 2 дипольний момент

індукованих зарядів, а не їх величина. Кожна частина за принципом суперпозиції індукує на поверхні металу такі заряди, наче на площині A знаходиться лише вона. Тому, якщо нас цікавить тільки величина зарядів q_1 та q_2 , а не їх розподіл, доцільно заряд q рівномірно «розпорошити» по всій площині A . Цей прийом спрощує розв'язування задачі, оскільки електричне поле тепер однорідне (рис. 2.126). В такому випадку індуковані на внутрішніх поверхнях пластин заряди q_1 та q_2 розподілені рівномірно з поверхневими густинами σ_1 та σ_2 . Напруженість електричного поля поблизу пластини 1 $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$, поблизу пластини 2 $E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$. Оскільки різниця потенціалів між пластинами $\Delta\varphi = -\int \vec{E} d\vec{l} = E_1 x - E_2 (l - x) = 0$, то $E_1 x = E_2 (l - x)$. Звідси випливає, що $q_1 x = q_2 (l - x)$. З іншого боку, величина індукованого заряду задовольняє умові: $q + q_1 + q_2 = 0$. Розв'язуючи систему двох рівнянь, маємо: $q_2 = -q \frac{x}{l}$; $q_1 = -q \frac{l-x}{l}$. При симетричному розташуванні заряду q отримаємо $q_1 = q_2 = -q/2$.

Приклад 2.2. Точковий заряд $+q$ знаходиться між двома провідними взаємно перпендикулярними півплощинами. Відстань від заряду до кожної півплощини дорівнює l . Знайти модуль сили, яка діє на заряд.

Розв'язання. Отже, спробуємо замінити індуковані на провідній поверхні заряди, розподіл яких невідомий, системою зарядів, розміщених таким чином, щоб сумарне електричне поле, створене цими зарядами, давало еквіпотенціальну поверхню у формі взаємно перпендикулярних провідних півплощин.

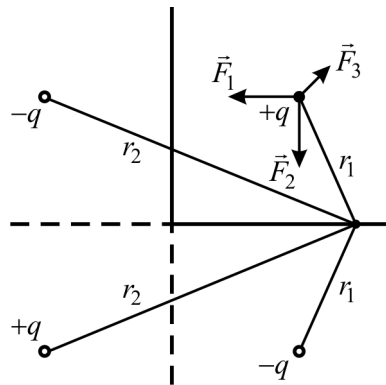


Рис. 2.13. До прикладу 2.2

Для однієї півплощини заміна очевидна. Поле провідної поверхні та точкового заряду $+q$ над нею ідентичне до поля двох точкових зарядів $+q$ та $-q$, розташованих один напроти одного на однаковій відстані від поверхні. При цьому заряд $-q$

називають зображенням заряду $+q$. Для врахування іншої півплощини вводять ще два додаткові заряди $-q$ та $+q$. Вони є зображеннями двох уже введених зарядів. Варто звернути увагу на те, що введений позитивний заряд має величину $+q$, а не $+2q$, як може спочатку здатися. Згадаємо, що величина і положення зарядів визначається вимогою еквіпотенціальності провідної поверхні, форма і потенціал якої задається в умові задачі. Для довільної точки поверхні (на рисунку вказана одна із них) можна легко пересвідчитись, що саме така величина заряду дасть сталість потенціалу по всій поверхні провідника: вираз $\frac{+q}{r_1} + \frac{-q}{r_2} + \frac{+q}{r_2} + \frac{-q}{r_1} = 0$ справедливий

для будь-якої точки.

Таким чином, для відповіді на запитання задачі потрібно розглянути взаємодію заряду $+q$ з його зображеннями. Із врахуванням того, що сили – величини векторні і складати їх потрібно відповідно, отримаємо:

$$F = F_1 \cos \frac{\pi}{4} + F_2 \cos \frac{\pi}{4} - F_3 = k \frac{q^2}{8l^2} (2\sqrt{2} - 1).$$

Приклад 2.3. Тонка нескінченно довга нитка, заряджена з лінійною густиною $+\lambda$, розташована паралельно до провідної площини на відстані a від неї. Знайти модуль сили, що діє на одиницю довжини нитки, і розподіл поверхневого заряду $\sigma(x)$ на площині (x – відстань від прямої на площині, де σ приймає максимальне значення).

Розв'язання. За допомогою методу електричних зображень задача зводиться до задачі про взаємодію двох нескінченних ниток, заряджених з лінійними густинами $+\lambda$ та $-\lambda$ (рис. 2.14а). Силу взаємодії можна знайти, розглядаючи заряджену нитку, яка знаходиться в електричному полі іншої нитки. Це поле визначається за допомогою теореми Гаусса: $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a}$. На елемент нитки dl із зарядом $dq = \lambda dl$,

діє сила $dF = dq \cdot E = \frac{\lambda^2 dl}{4\pi\epsilon_0 a}$. Тоді сила, яка діє на одиницю довжини нитки,

$$F_1 = \frac{dF}{dl} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda^2}{a}.$$

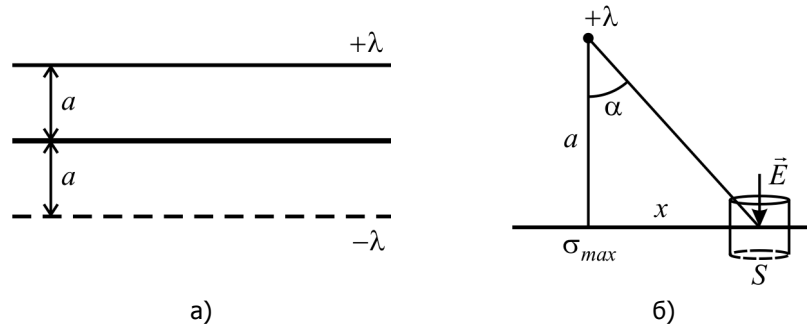


Рис. 2.14. До прикладу 2.3

Метод електричних зображень дозволяє визначити модуль напруженості електричного поля поблизу поверхні металу в залежності від координати x як

$$E(x) = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \cos \alpha = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)}. \text{ З іншого боку, цю ж величину можна}$$

визначити за формулою 2.1: $E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$. В останньому виразі враховано, що на пове-

рхні металу індукуються негативні заряди. Порівнюючи два вирази для поля, отри-

$$\text{маємо } \sigma(x) = -\frac{\lambda a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Приклад 2.4. Точковий заряд q знаходиться на відстані l від центра зарядженої провідної сфери радіуса R . Знайти заряд сфери, якщо відомо, що сила взаємодії між сферою та точковим зарядом дорівнює нулю.

Розв'язання. Для того, щоб зрозуміти, яким чином у випадку сферичної провідної поверхні розміщувати заряди-зображення, розглянемо спочатку випадок заземленої сфери.

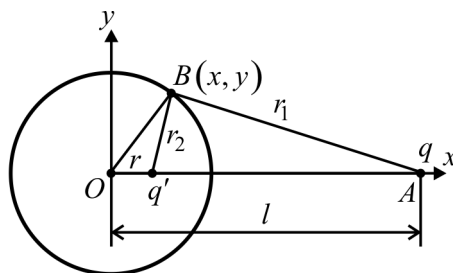


Рис. 2.15. До прикладу 2.4

Замінімо індукований поверхневий заряд на фіктивний q' . Умовою правильності вибору величини та положення q' є еквіпотенціальність поверхні сфери. Із міркувань симетрії зрозуміло, що цей заряд буде знаходитись на прямій OA (рис. 2.15).

Виберемо на сфері довільну точку B з координатами (x, y) . Потенціал в цій точці створюється зарядами q та q' : $\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right)$. Нам потрібно, щоб цей потенціал дорівнював нулю. Тому $\frac{q}{r_1} = -\frac{q'}{r_2}$. З рисунка видно, що $r_1^2 = (x-l)^2 + y^2$ і $r_2^2 = (x-r)^2 + y^2$. Введемо позначення $\eta = \left(\frac{q'}{q} \right)^2$. Тоді $r_2^2 = \eta r_1^2$. Після підстановки маємо: $(x-r)^2 + y^2 = \eta(x-l)^2 + \eta y^2$. Відкриємо дужки і зберемо коефіцієнти при однакових степенях x та y : $(\eta-1)x^2 + 2x(r-\eta l) + (\eta-1)y^2 = r^2 - \eta l^2$. Далі: $x^2 + 2x \frac{r-\eta l}{\eta-1} + y^2 = \frac{r^2 - \eta l^2}{\eta-1}$. Доповнимо вираз до повного квадрату: $\left(x + \frac{r-\eta l}{\eta-1} \right)^2 + y^2 = \frac{r^2 - \eta l^2}{\eta-1} - \left(\frac{r-\eta l}{\eta-1} \right)^2$. Рівняння еквіпотенціальної поверхні в обраній системі координат повинне співпадати з рівнянням кола: $x^2 + y^2 = R^2$. Для того, щоб отриманий нами вираз перейшов у це рівняння, потрібне виконання двох умов: $r - \eta l = 0$ і $\frac{r^2 - \eta l^2}{\eta-1} = R^2$. Розв'язуючи цю систему відносно η і r , отримаємо: $r = \frac{R^2}{l}$, $\eta = \frac{R^2}{l^2}$. Перший розв'язок дає нам положення заряду-зображення q' , а другий – його величину, яка, з урахуванням знаку, становить $q' = -q \frac{R}{l}$.

Таким чином, ми визначили, що взаємодія між точковим зарядом і заземленою провідною сферою аналогічна до взаємодії цього заряду з його зображенням, яке знаходиться на відстані r від центра сфери і має величину заряду q' . Заряди q та q' мають властивість взаємності: якщо q – заряд, а q' – його зображення, то для заряду q' зображенням є q . Це дозволяє розв'язати, наприклад, задачу про сферичну порожнину у провіднику з точковим зарядом всередині.

У випадку незарядженої та незаземленої провідної сфери наявність зовнішнього точкового заряду q призводить до появи ненульового потенціалу на її поверхні. При цьому сумарний заряд сфери залишається незмінним і рівним нулю (він лише перерозподіляється). Тоді для збереження умов електронеутральності та еквіпотенціальності сфери необхідно в її центрі розмістити ще один заряд $q'' = -q' = \frac{R}{l} q$ та врахувати поля трьох зарядів q , q' та q'' : заряди q та q' дадуть на сфері потенціал

$\varphi = 0$, а заряд q'' дасть на сфері потенціал $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}$, тобто потенціал, який створюється зарядом q всередині сфери.

Потенціал зарядженої сфери за наявності зовнішнього точкового заряду є суперпозицією двох потенціалів: потенціалу власного заряду та потенціалу, наведеного зовнішнім зарядом. Якщо заряд сфери позначити як q_0 , то $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{R} + \frac{q}{l} \right)$. При

використанні методу електричних зображень еквіпотенціальній поверхні у формі сфери, створеній системою зарядів q та q' , можна надати потрібного потенціалу, помістивши у центр сфери заряд q'' . Його величина визначається умовою

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{R} + \frac{q}{l} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R}, \text{ тобто } q'' = q_0 + q \frac{R}{l} = q_0 - q'.$$

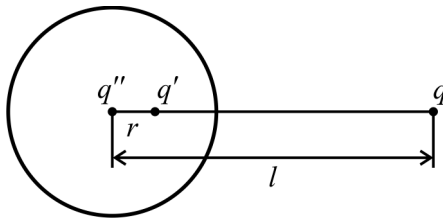


Рис. 2.16. До прикладу 2.4

Тепер можна повернутись до задачі. Згідно з вищесказаним, систему, описану в умові, за допомогою методу електричних зображень можна замінити на систему трьох точкових зарядів (рис. 2.16): самого заряду q , заряду q' , який знаходиться на відстані $r = \frac{R^2}{l}$ від центру сфери і має величину $q' = -q \frac{R}{l}$, та заряду $q'' = q_0 - q'$, який розташований у центрі сфери (q_0 – заряд сфери, поки що нам невідомий). За

$$\text{умовою } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(l-r)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq''}{l^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'}{(l-r)^2} + \frac{q_0}{l^2} - \frac{q'}{l^2} \right) = 0.$$

Підставляючи вирази для r та q' , отримаємо рівняння для визначення q_0 :

$$\frac{q_0}{l^2} = q \frac{R}{l} \left(\frac{l^2}{(l^2 - R^2)^2} - \frac{1}{l^2} \right). \text{ Введемо позначення } \alpha = \frac{R}{l}. \text{ Тоді } q_0 = q\alpha \frac{1 - (1 - \alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Приклад 2.5. На нескінченній плоскій поверхні провідника є напівсферичний виступ радіуса R , центр якого лежить на тій же поверхні. Над центром виступу на відстані l від площини розміщено точковий заряд q . Знайти силу притягання заряду до провідника.

Розв'язання. Введемо заряди-зображення q' , $-q'$, $-q$ (рис 2.17).

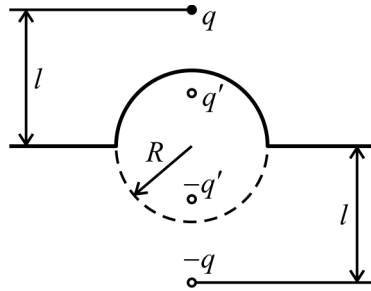


Рис. 2.17. До прикладу 2.5

Пари q та $-q$, q' та $-q'$ забезпечують на поверхні, що збігається з площиною, рівність нулю сумарного потенціалу. А пари q та q' , $-q$ та $-q'$ мають еквіпотенціальною поверхню, що за формою збігається з поверхнею напівсферичного виступу. Таким чином, чотири заряди дають нульовий потенціал на всій поверхні з виступом. Взаємодія точкового заряду q із поверхнею, описаною в умові задачі, зводиться до взаємодії чотирьох точкових зарядів. Величина заряду $q' = -q \frac{R}{l}$, а зна-

ходиться він на відстані $r = \frac{R^2}{l}$ від центру сферичного виступу (див. приклад 2.4).

Отже, сила, що діє на заряд q , буде

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4l^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(l-r)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(l+r)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Rl}{(l^2 + R^2)^2} - \frac{Rl}{(l^2 - R^2)^2} - \frac{1}{4l^2} \right].$$

Після спрощення $F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4l^3 R^3}{(l^4 - R^4)^2} + \frac{1}{4l^2} \right]$. Знак “-” у кінцевій формулі пока-

зує, що взаємодія між точковим зарядом q та провідною поверхнею має характер притягання.

Приклад 2.6. Всередині незарядженого провідного сферичного шару на відстані a від його центра знаходиться точковий заряд q . Радіус внутрішньої поверхні шару дорівнює r , зовнішньої – R . Знайти:

- поверхневу густину індукованих зарядів на зовнішній поверхні шару;
- потенціал сферичного шару, приймаючи за нуль потенціал нескінченно віддаленої точки;
- максимальну та мінімальну густину індукованих зарядів на внутрішній поверхні сферичного шару.

Розв'язання. Заряд q викличе появу індукованого заряду $q_1 = -q$ на внутрішній поверхні сферичного шару. Несиметричне розташування заряду q спричинить несиметричність силових ліній електричного поля навколо нього (див. пит. 2.2.7). Відповідний індукований заряд розподілиться по внутрішній поверхні нерівномірно: найбільша його густина буде в найближчій до заряду q точці поверхні, найменша – в діаметрально протилежній точці. Поява індукованого заряду q_1 є наслідком перерозподілу зарядів всередині провідника. Якщо до перерозподілу сферичний шар був, в цілому, електронейтральним, то після нього поява на внутрішній поверхні заряду q_1 призведе до виникнення на зовнішній поверхні заряду $q_2 = -q_1 = q$. Взаємодія між зарядами здійснюється через електричне поле. Всередині провідника напруженість електричного поля дорівнює нулю. Тому заряд q_2 не відчуває наявності зарядів q та q_1 . В результаті він розподілиться на зовнішній поверхні симетрично. Густина заряду на зовнішній поверхні буде визначатися формулою: $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$. Симетричність розподілу поверхневого заряду означає, що картина силових ліній електричного поля зовні оболонки буде теж радіально симетричною. Напруженість такого поля буде збігатися з напруженістю точкового заряду, поміщеного в центр сферичного шару. Відповідно і потенціал шару буде визначатися як $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$.

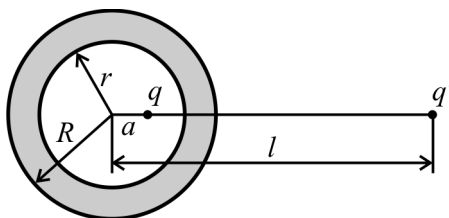


Рис. 2.18. До прикладу 2.6

Знайти максимальну та мінімальну густину індукованих зарядів на внутрішній поверхні оболонки можна, визначивши напруженість електричного поля в околі точок, які нас цікавлять. З одного боку, поле на поверхні визначається як $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, з іншого – цю величину можна знайти, якщо застосувати метод електричних зображень. Ми вже розглядали задачу про заряд поблизу сферичної провідної поверхні. Зокрема, згадувалось про взаємність заряду та його зображення. Знаючи про цю властивість та використовуючи формули, що визначають положення та величину заряду-зображення у прикладі 2.4, можна отримати відповідні вирази і для нашого випадку: $a = \frac{r^2}{l}$ та $q = -q' \frac{r}{l}$, звідки $l = \frac{r^2}{a}$ і $q' = -q \frac{r}{a}$. Напруженість електричного поля поблизу точки з максимальною густиною індукованих зарядів є суперпо-

зицією полів зарядів q та q' . З урахуванням напрямків векторів, можна записати

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r-a)^2} + \frac{r/a}{\left(\frac{r^2}{a} - r\right)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-a)^2} \left(1 + \frac{a}{r} \right). \text{ Порівнюючи цей вираз з ви-}$$

разом для напруженості поля, отриманим з теореми Гаусса, маємо

$$\sigma_{\max} = \frac{q}{4\pi(r-a)^2} \left(1 + \frac{a}{r} \right). \text{ Подібним чином визначається і } \sigma_{\min} = \frac{q}{4\pi(r+a)^2} \left(1 - \frac{a}{r} \right).$$

Приклад 2.7. Точковий сторонній заряд q знаходиться в центрі однорідної діелектричної кулі з проникністю ϵ . Знайти поляризованість \vec{P} як функцію радіус-вектора \vec{r} відносно центра кулі, а також зв'язаний заряд на поверхні та всередині сфери, радіус якої менший, ніж радіус кулі.

Розв'язання. Поле в діелектрику характеризується вектором електричної індукції $\vec{D} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ (цей вираз можна знайти за допомогою теореми Гаусса).

Враховуючи зв'язок $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E}$ та $\epsilon = 1 + \alpha$, де α – діелектрична сприйнятливість,

$$\text{запишемо вираз для вектора поляризації } \vec{P}(r) = \epsilon_0\alpha\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon-1)\vec{E} = q \frac{\epsilon-1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

$$\text{Поверхнева густина зв'язаного заряду } \sigma' = P_n = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\epsilon-1}{\epsilon}. \text{ Звідси поверхневий}$$

$$\text{зв'язаний заряд } q' = \sigma' \cdot 4\pi r^2 = q \frac{\epsilon-1}{\epsilon}.$$

Потік вектора \vec{P} через замкнену поверхню пов'язаний з величиною зв'язаного заряду всередині цієї поверхні:

$$q'' = - \int_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS = - \frac{q(\epsilon-1)}{4\pi\epsilon r^2} 4\pi r^2 = -q \frac{\epsilon-1}{\epsilon} = -q', \text{ що підтверджує умову електро-}$$

нейтральності кулі.

Приклад 2.8. Знайти густину зв'язаних зарядів на межі однорідного діелектрика та провідника. Діелектрична проникність діелектрика ϵ , поверхнева густина зарядів на провіднику – σ .

Розв'язання. Якщо поверхнева густина зарядів на провіднику σ , то поле, створене ними поблизу поверхні, $E_0 = \sigma / \epsilon_0$.

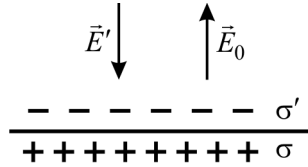


Рис. 2.19. До прикладу 2.8

Поле в діелектрику представляє собою суперпозицію поля E_0 та поля поляризаційних зарядів $E' = \sigma' / \epsilon_0$: $E = E_0 - \sigma' / \epsilon_0 = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$. З іншого боку,

$\sigma' = P_n = -\epsilon_0 (\epsilon - 1) E$, звідки $E = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}$. Порівнюючи вирази для напруженості,

отримаємо $\sigma' = -\sigma \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$.

Приклад 2.9. Ебонітову пластину помістили в однорідне електричне поле напруженістю E_0 . Вектор \vec{E}_0 складає з нормаллю до поверхні пластини кут φ . Знайти \vec{P} , \vec{E} та \vec{D} в пластині.

Розв'язання. Із граничних умов (2.6) : $E_0 \sin \varphi = \frac{D_\tau}{\epsilon_0 \epsilon}$, $\epsilon_0 E_0 \cos \varphi = D_n$. Таким чином, модулі шуканих векторів можна визначити через їх нормальні та тангенціальні складові: $D = \epsilon_0 E_0 \sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$; $E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = E_0 \frac{\sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}}{\epsilon}$. Всередині діелектрика вектори \vec{E} та \vec{D} створюють з нормаллю кут θ . З граничних умов $\frac{\tan \theta}{\tan \varphi} = \epsilon$.

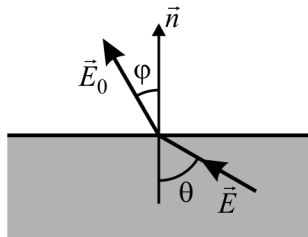


Рис. 2.20. До прикладу 2.9

Модуль вектора поляризації $P = \epsilon_0 \alpha E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{\sqrt{\epsilon^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}}{\epsilon} E_0$, а його нормальна складова визначає поверхневу густину зв'язаних зарядів: $P_n = \epsilon_0 \alpha E_n = \epsilon_0 \frac{\alpha E_0 \cos \varphi}{\epsilon} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{E_0 \cos \varphi}{\epsilon} = \sigma'$.

Приклад 2.10. Внаслідок неоднорідної деформації нескінченна n -ізoeлектрична пластина товщиною $2d$ виявляється поляризованою за законом $\vec{P} = \vec{P}_0 \left(1 - \frac{x}{d}\right)$, де \vec{P}_0 – вектор, перпендикулярний до пластини, x – відстань від середини пластини. Знайти напруженість електричного поля \vec{E} всередині пластини та різницю потенціалів $\Delta\varphi$ між її поверхнями.

Розв’язання. Зв’язаний заряд $q' = - \int_{(S)} (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS$. З іншого боку, за теоремою

Гаусса $\int_{(S)} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \frac{q'}{\epsilon_0} = - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{(S)} (\vec{P} \cdot \vec{n}) dS$. Порівнюючи ці вирази, отримаємо

$$\vec{E} = - \frac{\vec{P}_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{d}\right).$$

$$\text{Різниця потенціалів } \Delta\varphi = \int_{-d}^d E dx = \int_{-d}^d \frac{P_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{d}\right) dx = \frac{2P_0 d}{\epsilon_0}.$$

Приклад 2.11. Сторонні заряди з густиною $\rho > 0$ рівномірно розподілені по кулі радіуса R з однорідного діелектрика проникністю ϵ . Знайти модуль напруженості електричного поля та потенціал як функцію відстані r від центра кулі. Зобразити приблизний вигляд залежностей $E(r)$, $\varphi(r)$. Визначити об’ємну та поверхневу густини зв’язаних зарядів σ' та ρ' .

Розв’язання. Розглянемо випадок $r \leq R$. За теоремою Гаусса $\int_{(S)} (\vec{D} \cdot \vec{n}) dS = q = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$, звідки $D = \frac{\rho}{3} r$. Отже, для $r \leq R$ маємо лінійну залежність

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} r.$$

Подібним чином можна визначити поле для $r \geq R$: $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$, де

$$Q = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \text{ – повний заряд кулі.}$$

Приймаючи потенціал нескінченно віддаленої точки за нуль, отримаємо вираз для потенціалу за межами діелектричної кулі:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Далі, вже знаючи потенціал на поверхні $\varphi(R)$, знайдемо вираз для потенціалу всередині кулі:

$$\varphi(R) - \varphi(r) = \int_R^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0 \epsilon} dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{r^2 - R^2}{2} \right) \quad . \quad \text{Отже,} \quad \text{при} \quad r \leq R$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} - \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{r^2 - R^2}{2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right).$$

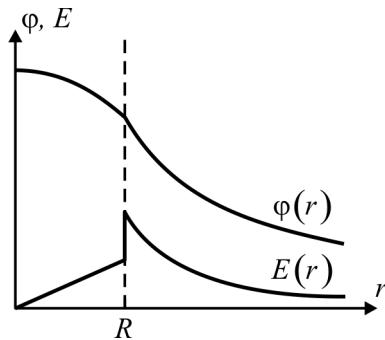


Рис. 2.21. До прикладу 2.11

На рис. 2.21 подано приблизний вигляд залежностей $E(r)$ та $\varphi(r)$. Зверніть увагу на стрибок функції $E(r)$ при $r = R$.

Густина зв'язаних зарядів знайдемо через вектор поляризації $P = \epsilon_0 \alpha E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} r = \rho \frac{\epsilon - 1}{3\epsilon} r$. Поверхнева густина зв'язаних зарядів

$$\sigma' = P(R) = \rho \frac{\epsilon - 1}{3\epsilon} R \quad . \quad \text{Об'ємна густина зв'язаних зарядів}$$

$$\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div} \left(\frac{\rho(\epsilon - 1)}{3\epsilon} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \right) = -\rho \frac{\epsilon - 1}{3\epsilon} 3 = -\rho \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \quad . \quad \text{Для перевірки відпо-}$$

віді порахуємо сумарний заряд об'ємних зв'язаних зарядів $q' = -\rho' \frac{4\pi}{3} R^3 = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$, що відповідає результату, отриманому в прикладі 2.7. А заряд поверхні $4\pi R^2 \sigma' = 4\pi R^2 \rho \frac{\epsilon - 1}{3\epsilon} R = -q'$. І це природно, оскільки поляризація діелектрика не призводить до появи нових зарядів, а лише до перерозподілу існуючих.

Приклад 2.12. Діелектрична куля поляризована однорідно і статично. Вектор поляризації кулі \vec{P} . Знайти напруженість електричного поля всередині кулі.

Розв'язання. За умови однорідної поляризації кулі ($\vec{P} = \text{const}$) об'ємна густина зв'язаних зарядів $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = 0$. Поверхнева ж густина зв'язаних зарядів визначається нормальною складовою вектора поляризації на поверхні кулі: $\sigma' = P_n = P \cos \theta$. Таким чином зв'язаний заряд розподілений по поверхні кулі за законом косинуса. У прикладі 1.16 було показано, що такий розподіл заряду можна

увияти як результат невеликого зсуву одна відносно одної двох сфер, рівномірно заряджених з густинами $\pm\rho$ (рис. 2.22).

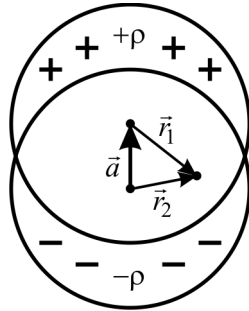


Рис. 2.22. До прикладу 2.12

Напруженість електричного поля всередині рівномірно зарядженої кулі можна розрахувати, скориставшись теоремою Гаусса. Отримаємо лінійну залежність від радіус-вектора \vec{r} : $\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$. Загальне поле поляризаційних зарядів:

$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$. В останньому виразі використано позначення $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{a}$. Введемо заряд кожної з куль: $q = \rho V$, де V – об'єм кулі. Тоді $\vec{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{q\vec{a}}{V} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{V}$. Дипольний момент одиниці об'єму діелектрика і є вектор поляризації \vec{P} . Таким чином, напруженість поля всередині однорідно поляризованої діелектричної кулі визначається як $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

Приклад 2.13. Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено діелектриком з проникністю ϵ_1 , в якому є мала порожнина у формі кулі, заповнена іншим діелектриком з проникністю ϵ_2 . Напруженість поля в конденсаторі до заповнення його діелектриком становила \vec{E}_0 . Знайти напруженість поля всередині другого діелектрика за умови сталості заряду на обкладках та малості порожнини у порівнянні з розмірами конденсатора.

Розв'язання. Поле в конденсаторі після заповнення його діелектриком зменшується: $E_1 = E_0 - E' = \frac{E_0}{\epsilon_1}$ (рис. 2.23а).

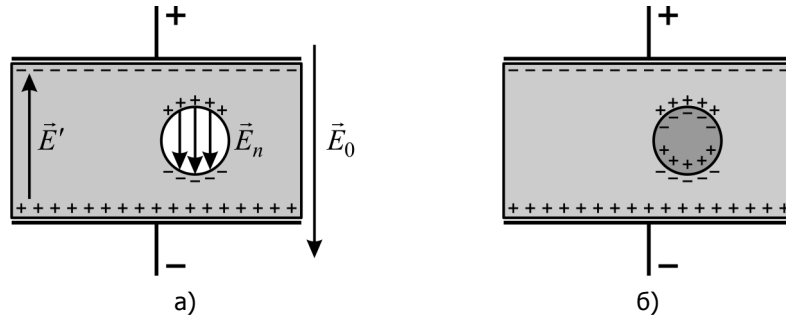


Рис. 2.23. До прикладу 2.13

Спочатку знайдемо поле в сферичній порожнині за відсутності другого діелектрика: $E_n = E_1 + \frac{P_1}{3\epsilon_0}$ (тут ми використовуємо результат прикладу 2.12). Таким чином,

$$E_n = E_1 + \frac{1}{3\epsilon_0} \epsilon_0 \alpha_1 E_1 = \left(1 + \frac{\alpha_1}{3}\right) E_1 = \frac{\epsilon_1 + 2}{3\epsilon_1} E_0.$$

При заповненні порожнини діелектриком поле в ній змінюється за рахунок появи поляризаційних зарядів на поверхні сфери (рис. 2.23б). Враховуючи напрямки полів, отримаємо: $E_2 = E_n - \frac{P_2}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_1 + 2}{3\epsilon_1} E_0 - \frac{\alpha_2}{3} E_2$. Тоді $E_2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{3}\right) = \frac{\epsilon_1 + 2}{3\epsilon_1} E_0$, звідки $E_2 \frac{\epsilon_2 + 2}{3} = \frac{\epsilon_1 + 2}{3\epsilon_1} E_0$. Остаточно $E_2 = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_2 + 2} \frac{E_0}{\epsilon_1}$.

Приклад 2.14. Точковий заряд q знаходиться на відстані l від плоскої межі між двома однорідними ізотропними діелектриками. Проникність діелектриків становить ϵ_1 та ϵ_2 . Знайти:

а) поверхневу густину зв'язаних зарядів як функцію відстані r від точкового заряду q ;

б) сумарний зв'язаний заряд на межі.

Розв'язання. Для розв'язку цієї задачі скористаємось методом електричних зображень (рис. 2.24). Поле в першому діелектрику є суперпозицією двох полів: поля точкового заряду q та поля поляризаційних зарядів на поверхні другого діелектрика. Останнє можна представити як поле точкового заряду q' , який знаходиться у точці, симетричній відносно межі поділу двох діелектриків до точки знаходження заряду q :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon_1 r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\epsilon_1 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

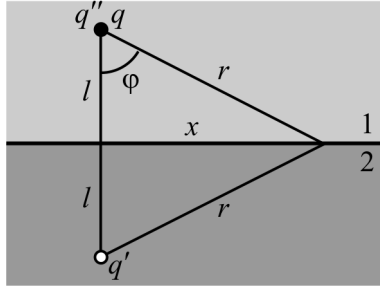


Рис. 2.24. До прикладу 2.14

Поле у другому діелектрику буде складатися лише з поля поляризаційних зарядів на поверхні першого діелектрика. Це поле можна подати як поле точкового заряду q'' , який просторово збігається з зарядом q : $\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$. На межі між

двома діелектриками ці два поля повинні задовольняти граничним умовам. Підставимо в ці умови вирази для полів і отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} D_{2n} = D_{1n} \\ E_{2\tau} = E_{1\tau} \end{cases} \quad \begin{cases} q \cos \varphi - q' \cos \varphi = q'' \cos \varphi \\ \frac{q}{\epsilon_1} \sin \varphi + \frac{q'}{\epsilon_1} \sin \varphi = \frac{q''}{\epsilon_2} \sin \varphi \end{cases}$$

Те, що $\cos \varphi$ та $\sin \varphi$ в цих рівняннях скорочуються, вказує на те, що дані умови справедливі в кожній точці на межі поділу діелектриків. Розв'язок системи дасть нам змогу знайти величини зарядів-зображень: $q' = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q$; $q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q$.

Поверхневу густину зв'язаних зарядів знайдемо, використавши ще одну граничну умову: $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$.

$$\sigma'(r) = \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) E_{1n} - \epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) E_{2n} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \cdot \frac{q}{r^3} l.$$

Для знаходження сумарного зв'язаного заряду виділимо на межі між двома діелектриками кільце радіусом x і шириною dx . Воно містить заряд $dQ = \sigma' dS = \sigma' 2\pi x dx$. З рисунку очевидно, що $x = \sqrt{r^2 - l^2}$, звідки $dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - l^2}}$.

$$\text{Отже, } dQ = \sigma' 2\pi r dr, \text{ а } Q = -\int_l^\infty \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \cdot \frac{q}{r^2} l dr = -q \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)}.$$

Розглянемо деякі окремі випадки:

1. $\epsilon_1 = 1$; $\epsilon_2 = \epsilon$ (заряд у вакуумі над поверхнею діелектрика): $Q = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}$. Результат збігається з виразом для q' , що, взагалі кажучи, і не дивно. Питання про

вираз для q'' не повинно виникати, оскільки у вакуумі поляризаційних зарядів не існує.

2. $\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ (заряд у вакуумі над поверхнею металу): $Q = -q$. Результат узгоджується з результатом, отриманим для поля точкового заряду над провідною площиною.

Приклад 2.15. Газ, який складається з атомів *He*, розмістили за нормальних умов у зовнішньому полі $E = 100 \text{ В/см}$. Діелектрична проникність газу за цих умов складає $\varepsilon = 1,000074$. Оцінити зміщення «центру мас» електронної оболонки атома *He* в такому полі та його індукований дипольний момент. Вважати, що за відсутності зовнішнього поля електрони в атомі *He* розподіляються сферично симетрично відносно ядра.

Розв'язання. Поляризованість речовини визначається як сумарний дипольний момент одиниці об'єму. Вважатимемо, що всі диполі зорієнтовані вздовж поля. То-

ді $|\vec{P}| = \left| \frac{\sum \vec{p}}{V} \right| = \frac{Np}{V} = N_L p$, де $N_L = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ – число Лошмідта, яке дає кіль-

кість атомів в 1 м^3 ідеального газу за нормальних умов (тиску 101325 Па , і температурі 0°C). Модуль вектора поляризації залежить від величини зовнішнього електричного поля $P = \varepsilon_0 \alpha E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E$. Таким чином, дипольний момент атома *He*

$$p = \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E}{N_L} \approx 2,43 \cdot 10^{-37} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Дипольний момент $p = ql$, де $q = 2e$ для атома *He*. Отже, зміщення «центра мас» електронної оболонки $l = \frac{p}{2e} \approx 7,6 \cdot 10^{-19} \text{ м}$ (порівняйте з характерним розміром атома $\sim 10^{-10} \text{ м}$).

3. ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

3.1. Короткі теоретичні відомості

Потенціал φ окремого зарядженого провідника за відсутності зовнішнього електричного поля пропорційний його заряду q :

$$\varphi = \frac{q}{C}. \quad (3.1)$$

Власна ємність C провідника чисельно дорівнює заряду, який необхідно надати провіднику, щоб змінити його потенціал на одиницю. У однорідному середовищі вона прямо пропорційна діелектричній проникності середовища і визначається геометричними розмірами провідника. В системі СІ ємність вимірюється у фарадах (Φ).

Взаємна ємність системи двох провідників, заряджених рівними за модулем різноіменними зарядами (конденсатор), визначається відношенням заряду одного з провідників до різниці потенціалів U між ними:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (3.2)$$

Взаємна ємність залежить лише від розмірів, форми та взаємного розташування провідників.

Розв'язування задач на знаходження електричної ємності зводиться до знаходження зв'язку між зарядом системи двох провідників q і різницею потенціалів U між ними.

Для забезпечення потрібної ємності при заданій робочій напрузі конденсатори об'єднують у батареї. Необхідність об'єднання викликана тим, що за достатньо великої напруги може відбутися “пробій” конденсатора, і він уже не зможе використовуватись як накопичувач електричної енергії. Будь-яку сукупність конденсаторів, об'єднаних у батарею, можна замінити одним еквівалентним конденсатором. Всі типи з'єднання конденсаторів у батареї можна розбити на дві групи: паралельне з'єднання та послідовне з'єднання.

При паралельному з'єднанні напруга на обкладках всіх конденсаторів однакова, сумарний заряд батареї є сумою зарядів на кожному конденсаторі, а загальна ємність батареї дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (3.3)$$

При послідовному з'єднанні однаковим для всіх конденсаторів є заряд, який дорівнює заряду батареї конденсаторів, напруга на батареї дорівнює сумі напруг на окремих конденсаторах, а загальна ємність батареї визначається виразом

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (3.4)$$

Розгляд деяких складних схем з'єднання конденсаторів значно спрощується, якщо схему перерисувати так, щоб можна було легко визначити послідовність чи паралельність з'єднань.

Потенціальна енергія взаємодії системи нерухомих точкових зарядів q_1, q_2, \dots, q_n дорівнює енергії взаємодії цих зарядів і може бути представлена, за принципом суперпозиції, у вигляді суми

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (3.5)$$

де φ_i – потенціал в точці, де знаходиться заряд q_i , створений всіма іншими зарядами.

У випадку неперервного розподілу заряду по об'єму з густиною ρ або по поверхні з густиною σ потенціальна енергія зарядженого тіла визначається виразами:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad \text{або} \quad W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad (3.6)$$

де φ – електричний потенціал всієї системи в точці розташування елементарного заряду ρdV або σdS . Останні формули дають можливість обрахувати повну енергію системи заряджених тіл. Крім потенціальної енергії взаємодії сукупності заряджених тіл, вона також містить власні енергії цих тіл, які дорівнюють енергії електростатичної взаємодії окремих частин кожного із заряджених тіл між собою. Власна енергія зарядженого тіла визначається через роботу зовнішніх сил, яку вони виконують при наданні тілу електричного заряду.

Енергія електричного поля локалізується там, де це поле існує. При цьому її характеризують величиною, яка отримала назву густини енергії ω_E . У вакуумі

$$\omega_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (3.7)$$

так що виконується співвідношення

$$W = \int_V \omega_E dV. \quad (3.8)$$

Об'ємна енергія визначає тиск електростатичного поля :

$$p_E = \omega_E \quad (3.9)$$

У випадку однорідного діелектрика електростатична енергія може бути представлена у вигляді

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV, \quad (3.10)$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля, \vec{D} – вектор електричної індукції в елементі об'єму dV .

Для неоднорідного діелектрика, в якому вектор \vec{D} змінюється від точки до точки, об'ємна густина енергії визначається таким виразом:

$$\omega_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{D}. \quad (3.11)$$

Енергія зарядженого конденсатора є повною енергією системи двох провідників і обраховується за формулою

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}, \quad (3.12)$$

Задачі, в яких розглядаються перетворення енергії в конденсаторі, можна умовно розділити на два типи: коли енергетичні процеси протікають при незмінному заряді на пластинах конденсатора і коли це відбувається при незмінній напрузі між обкладками. Відповідно в першому випадку краще використовувати формулу для енергії, в якій фігурує заряд на пластинах, а в другому – вираз для енергії, записаний через різницю потенціалів між обкладками.

3.2. Запитання та відповіді

3.2.1. *Ізольований провідник заряджено до потенціалу φ . Як зміниться потенціал провідника, якщо до нього на скінченну відстань наблизити заземлену провідну площину?*

Взаємна ємність системи при наближенні провідної площини збільшується (більш докладно це показано в прикладі 3.2). Оскільки $U = \frac{q}{C}$, то потенціал провідника зменшується.

3.2.2. *Як зміниться різниця потенціалів U між двома ізольованими зарядженими провідниками, якщо між ними розмістити металеву пластинку скінченної товщини?*

Так само, як і в попередньому питанні, зменшиться.

3.2.3. *Чому дорівнює сила, яка діє на одиницю площі поверхні провідника, зарядженого з поверхневою густиною σ ?*

Сила, яка діє на одиницю поверхні (тобто, тиск) зарядженого провідника, визначається об'ємною густиною енергії електростатичного поля поблизу його поверхні:

$$\frac{dF}{dS} = p_E = \omega_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

3.2.4. Як зміниться енергія зарядженої провідної кулі, якщо її заряд збільшити в α разів?

Енергія поля пропорційна квадрату напруженості поля E , яка, в свою чергу, пропорційна заряду кулі. Отже, енергія зарядженої кулі збільшиться в α^2 разів.

3.2.5. За яким законом змінюється густина енергії ω_E електричного поля у вакуумі при віддаленні від:

а) точкового заряду q ;

б) точкового електричного диполя \vec{p} ?

Оскільки густина енергії електричного поля $\omega_E \sim E^2$, то:

а) для точкового заряду $E \sim 1/r^2$. Тому $\omega_E \sim 1/r^4$;

б) для електричного диполя $E \sim 1/r^3$. Тому $\omega_E \sim 1/r^6$.

3.2.6. Два заряди $+q$ та $-q$, закріплених на кінцях жорсткого стрижня довжиною l , розмістили в однорідному полі \vec{E} . Чому дорівнюють потенціальна енергія стрижня W , момент сил \vec{M} та сила \vec{F} , що діють на стрижень, у випадках, зображених на рис. 3.1

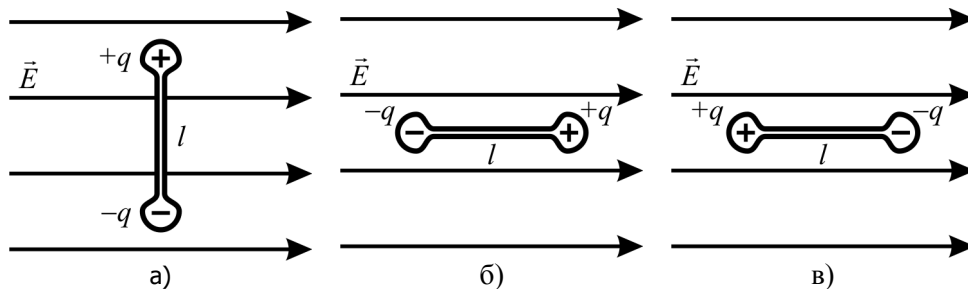


Рис. 3.1. До запитання 3.2.6

а) $W = 0$; $M = qEl$; $F = 0$;

б) $W = -qlE$; $M = 0$; $F = 0$;

в) $W = qlE$; $M = 0$; $F = 0$.

З огляду на вираз для енергії найбільш енергетично вигідним положенням є варіант б). Він характеризується мінімумом потенціальної енергії та стійкою рівновагою (при спробі вивести систему з положення рівноваги відразу виникають моменти сил, які намагаються повернути систему у попередній стан). Положення з нестійкою рівновагою зображено на рис. 3.1в.

3.2.7. Як відстань r між полярною та неполярною молекулами впливає на величину енергії та сили взаємодії між ними?

Енергія взаємодії між вказаними молекулами визначається виразом $W = -(\vec{p} \cdot \vec{E}_0)$, де \vec{p} – дипольний момент неполярної молекули, індукований полем \vec{E}_0 , яке створюється полярною молекулою у місці знаходження неполярної молекули. Оскільки $p \sim E_0$, а сама напруженість поля диполя $E_0 \sim 1/r^3$, то $W \sim 1/r^6$.

В свою чергу, сила взаємодії $F \sim dW/dr \sim 1/r^7$.

3.2.8. Як зміниться ємність відокремленого провідника, якщо його розміри пропорційно збільшити в α разів?

Збільшиться в α разів.

3.2.9. При повільному зближенні двох куль, кожна з яких має заряд $|Q|$, виконана робота A . Як при цьому зміниться різниця потенціалів між кулями?

$$U = A/Q.$$

3.2.10. Два однакових конденсатори з'єднані послідовно і під'єднані до джерела е.р.с. Як зміниться різниця потенціалів на першому конденсаторі, якщо другий занурити в діелектричну рідину?

Нехай U – різниця потенціалів, яка подається на конденсатори від джерела е.р.с. Під час досліду вона залишається незмінною. $U = U_1 + U_2$, де U_1, U_2 – спад напруги на першому та другому конденсаторах відповідно. При зануренні другого конденсатора в діелектрик його ємність зростає, а спад напруги U_2 зменшується. Тому напруга на першому конденсаторі має зрости.

3.2.11. Плоский повітряний конденсатор зарядили, а потім від'єднали від джерела е.р.с. Після цього зазор між пластинами конденсатора зменшили в α разів. Як при цьому змінились

- а) заряд на обкладках конденсатора;
- б) енергія конденсатора;
- в) об'ємна густина енергії поля в конденсаторі?
- а) не зміниться;

б) $W = q^2/2C$. Заряд q не зміниться, а ємність C обернено пропорційна до товщини зазору. Отже енергія зменшиться в α разів;

в) $\omega_E = W/V$. Об'єм конденсатора V зменшується пропорційно до товщини. Енергія теж. Отже об'ємна густина енергії не зміниться.

3.2.12. Повітряний конденсатор під'єднали до джерела е.р.с. Потім його занурили у діелектрик з діелектричною проникністю ϵ . Як при цьому змінились

- а) заряд на обкладках конденсатора;
- б) напруженість поля в конденсаторі;
- в) енергія конденсатора;

г) об'ємна густина енергії поля в конденсаторі?

Розглянути два випадки: під час занурення конденсатор залишається під'єднаним до джерела е.р.с.; перед зануренням конденсатор від'єднали від джерела е.р.с.

В першому випадку незмінною залишається різниця потенціалів U між обкладками конденсатора. Ємність конденсатора при зануренні у діелектрик зростає у ϵ разів. Інші характеристики:

а) $q = UC$ – заряд на обкладках конденсатора зростає в ϵ разів;

б) $E = U/d$ – напруженість поля в конденсаторі не зміниться;

в) $W = \frac{CU^2}{2}$ – енергія конденсатора збільшиться в ϵ разів;

г) зросте в ϵ разів і густина енергії в конденсаторі.

Другий випадок характеризується незмінним зарядом на обкладках конденсатора. Ємність конденсатора зростає, як і в попередньому випадку. Тому

а) $q = \text{const}$ – заряд залишається незмінним;

б) напруга на конденсаторі $U = q/C$ зменшується в ϵ разів. Відповідно і напруженість поля спадає;

в) $W = \frac{q^2}{2C}$ – енергія зменшується в ϵ разів;

г) густина енергії теж зменшується в ϵ разів.

3.2.13. Як потрібно змінити геометричні розміри сферичного конденсатора (початкові значення радіусів внутрішньої та зовнішньої обкладок R_1 та R_2), щоб при незмінній пробійній напруженості поля E збільшити його ємність?

Ємність сферичного конденсатора визначається виразом $C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1}$. Для її

збільшення необхідно зменшити відстань між зовнішньою та внутрішньою обкладками. Тобто або збільшити R_1 , або зменшити R_2 . Напруженість поля в сферичному

конденсаторі $E \sim \frac{1}{r^2}$, де r – відстань від центра конденсатора. Очевидно, що мак-

симальне значення напруженості поля буде приймати поблизу внутрішньої обкладки конденсатора. Отже, за умови збереження значення пробійної напруженості поля ємність конденсатора можна збільшити лише за рахунок зменшення радіуса зовнішньої обкладки.

3.2.14. Яку роботу треба виконати, щоб повернути електричний диполь \vec{p} , який орієнтується під кутом θ до напрямку однорідного електричного поля з напруженістю \vec{E} (рис. 3.2),

а) вздовж поля;

б) проти поля.

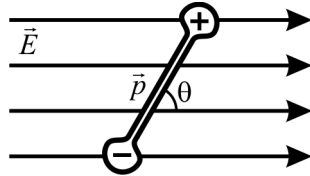


Рис. 3.2. До запитання 3.2.14

Роботу, яку необхідно виконати для повороту диполя, знайдемо як різницю потенціальних енергій диполя в кінцевому та початковому станах: $A = W_2 - W_1$.

а) $A = -pE - (-pE \cos \theta) = -pE(1 - \cos \theta) < 0$;

б) $A = pE - (-pE \cos \theta) = pE(1 + \cos \theta) > 0$.

Тобто, якщо в першому випадку диполь старається сам повернутися вздовж силових ліній електричного поля, то в другому випадку зовнішнім силам необхідно докласти зусиль, щоб повернути диполь проти напрямку електричного поля.

3.2.15. Над поверхнею незарядженого провідника знаходиться точковий заряд q . Як зміниться тиск електричного поля на поверхню провідника, якщо величину точкового заряду збільшити в β разів?

Тиск електростатичного поля дорівнює об'ємній густині енергії:
 $p_E = \omega_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Оскільки $E \sim q$, то при збільшенні заряду в β разів тиск поля на поверхню провідника збільшиться в β^2 разів.

3.2.16. Провідну кулю зарядили. Як зміниться тиск на поверхню кулі, якщо її радіус зменшити в α разів?

Тиск електростатичного поля на поверхню кулі пропорційний квадрату напруженості поля E на поверхні кулі. $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, де σ – поверхнева густина заряду кулі.

При зменшенні радіуса кулі в α разів поверхнева густина заряду зросте в α^2 разів. Тому тиск на поверхню кулі зросте в α^4 разів.

3.2.17. Якого знаку може набувати енергія взаємодії заряджених тіл і повна енергія цих зарядів?

Для прикладу розглянемо систему, яка складається з двох заряджених тіл. Кожне з них у точці спостереження створює своє електричне поле \vec{E}_1 та \vec{E}_2 відповідно.

Загальне поле є суперпозицією цих окремих полів: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Енергія електростатичного поля

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} (\vec{E})^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} E_1^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{(V)} E_2^2 dV + \epsilon_0 \int_{(V)} (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) dV .$$

Перші два доданки представляють власну енергію заряджених тіл, яка завжди додатна. Третій – енергію взаємодії заряджених тіл. Вона може бути будь-якого знаку, а також може бути рівною нулю. Але в будь-якому разі $E_1^2 + E_2^2 \geq (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2)$. Тому повна електростатична енергія зарядів завжди більша нуля.

3.2.18. Заряди на обкладках двох конденсаторів ємністю C_1 і C_2 дорівнюють q_1 і q_2 відповідно. Як зміниться електростатична енергія конденсаторів, якщо їх з'єднати паралельно?

За рахунок виділення тепла при протіканні струму в з'єднувальних провідниках енергія конденсаторів зменшиться. Тільки за умови рівності різниць потенціалів між обкладками $U_1 = U_2$ (тобто, коли $q_1 C_2 = q_2 C_1$) струм в з'єднувальних провідниках протікати не буде і енергія електростатичного поля в конденсаторах не зміниться.

3.2.19. Над поверхнею незарядженого провідника знаходиться у зафіксованому положенні заряджене тіло. Як буде змінюватись кінетична енергія тіла, якщо його відпустити?

Заряджене тіло індукує на поверхні провідника заряди, внаслідок чого між ними виникає сила притягання. Якщо заряджене тіло відпустити, то воно почне рухатись, прискорюючись, до провідника. При цьому його кінетична енергія зростатиме за рахунок зменшення енергії взаємодії між зарядженим тілом та індукованими зарядами.

3.2.20. Запишіть вираз для енергії взаємодії двох заряджених тіл довільної форми, якщо відомі їх густини об'ємних зарядів $\rho_i(x_i, y_i, z_i)$ та $\rho_j(x_j, y_j, z_j)$.

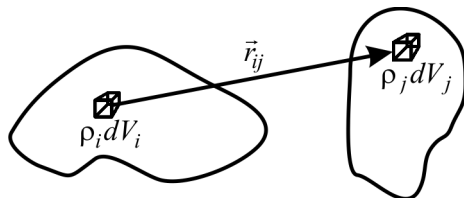


Рис. 3.3. До запитання 3.2.20

У відповідності до позначень на рис. 3.3
$$W = \frac{1}{2} \int_{V_i} \int_{V_j} \frac{\rho_i dV_i \cdot \rho_j dV_j}{r_{ij}}.$$

3.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Знайти взаємну ємність двох однакових металевих кульок радіуса a , розміщених в повітрі на відстані b одна від одної, $b \gg a$.

Розв'язання. Для визначення ємності надамо одній із кульок, наприклад, лівій, заряд $+q$, а правій $-q$ (рис. 3.4). За умови $b \gg a$ можна вважати, що заряд на кульках розподілений сферично симетрично, тобто можна не враховувати явище електростатичної індукції.

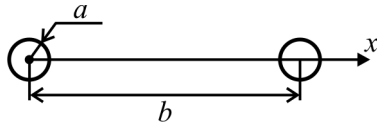


Рис. 3.4. До прикладу 3.1

В такому разі напруженість сумарного поля вздовж осі OX між кулями становить: $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(b-x)^2}$. Знайдемо різницю потенціалів між кулями:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{b-a} \left(\frac{q}{x^2} + \frac{q}{(b-x)^2} \right) dx = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Порівнюючи отриманий вираз з $U = \frac{q}{C}$, приходимо до висновку, що взаємна ємність двох кульок $C = 2\pi\epsilon_0 a$.

Приклад 3.2. Довгий прямий провідник розташовано паралельно нескінченній провідній площині на відстані b від неї, радіус перерізу провідника $a \ll b$. Знайти взаємну ємність системи на одиницю довжини провідника.

Розв'язання. Припустимо, що провідник рівномірно заряджено позитивним зарядом з лінійною густиною $+\lambda$ (рис. 3.5).

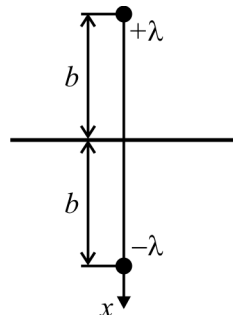


Рис. 3.5. До прикладу 3.2

Вираз для напруженості електричного поля між провідником та площиною можна знайти, скориставшись методом електричних зображень. В такому випадку задача знаходження поля зводиться до знаходження поля двопровідної лінії. Поле окремого нескінченного провідника $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$ (вираз можна отримати з викорис-

танням теореми Гаусса). Сумарне поле: $E(x) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (2b-x)}$. Далі знайдемо різницю потенціалів між провідником та площиною:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b E(x) dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2b-a}{a} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2b}{a}. \text{ Звідси ємність на одиницю довжини}$$

$$\text{провідника: } C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2b}{a}\right)}.$$

Приклад 3.3. Знайти різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками A та B схеми (рис. 3.6).

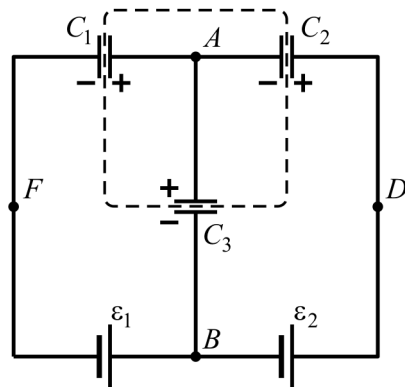


Рис. 3.6. До прикладу 3.3

Розв'язання. Дана схема з'єднання конденсаторів не зводиться до простої сукупності паралельних та послідовних з'єднань. Спробуємо записати систему рівнянь, яка дозволить дати відповідь на поставлене в умові питання. Позначимо через U_1, U_2, U_3 напруги на конденсаторах C_1, C_2, C_3 відповідно та розглянемо різницю потенціалів між окремими точками контуру, попередньо розставивши знаки зарядів на кожній обкладці. Знаки зарядів кожної пластини конденсаторів C_1 та C_2 можна вказати відразу: пластина, з'єднана з певним полюсом джерела е.р.с., матиме відповідний знак заряду. Дещо складніше щось сказати про заряди на пластинах конденсатора C_3 , тому що одна з його обкладок з'єднана одночасно і з додатнім полюсом одного джерела, і з від'ємним полюсом іншого. В подібних випадках краще не перейматися питанням визначення знаку заряду на обкладках, а задати його гіпотетично. Якщо ж ми не вгадаємо, то це проявиться лише в тому, що напруга U_3 матиме від'ємне значення.

Тепер можна написати рівняння, що пов'язують напруги на конденсаторах з е.р.с. джерел. Розглянемо різницю потенціалів $\varphi_D - \varphi_F$. З одного боку вона дорівнює $\epsilon_1 + \epsilon_2$, з іншого — сумі напруг на конденсаторах C_1 та C_2 . Тому $\epsilon_1 + \epsilon_2 = U_1 + U_2$. Подібним чином, виходячи з різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_F$, можна записати, що $U_1 = U_3 + \epsilon_1$. Для знаходження трьох невідомих напруг потрібно три рівняння. Якщо спробувати отримати третє рівняння з різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_D$, то ми отримаємо рівняння, яке є комбінацією попередніх двох. Відповідна система

рівнянь буде виродженою. Для отримання третього незалежного рівняння використаємо умову електронейтральності з'єднаних між собою обкладок конденсаторів, які не мають контакту з полюсами джерел. Така електронейтральна система виділена штриховою лінією на малюнку. Алгебраїчна сума зарядів на виділених обкладках дорівнює нулю: $C_1 U_1 + C_3 U_3 - C_2 U_2 = 0$. Система з трьох рівнянь дозволяє нам знайти напругу на конденсаторі C_3 , яка і буде дорівнювати шуканій різниці потенціалів: $\varphi_A - \varphi_B = U_3 = \frac{C_2 \varepsilon_2 - C_1 \varepsilon_1}{C_1 + C_2 + C_3}$.

Приклад 3.4. Знайти ємність схеми (рис. 3.7) між точками A та B .

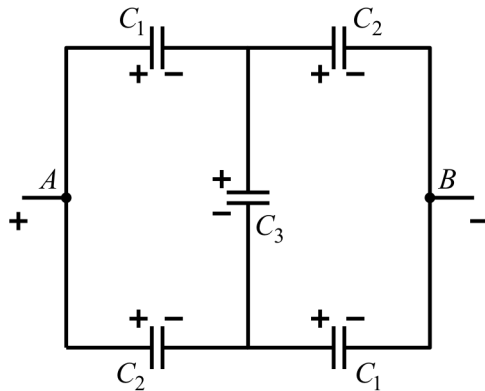


Рис. 3.7. До прикладу 3.4

Розв'язання. Фактично задача зводиться до знаходження еквівалентного конденсатора, ємність якого дорівнює загальній ємності батареї, зображеної на рисунку. Подати цю схему як сукупність паралельних та послідовних з'єднань не можна. Під'єднаємо до батареї зовнішнє джерело напруги і спробуємо знайти її ємність, використовуючи означення $C = \frac{q}{U}$. Як і в попередній задачі, складемо систему рівнянь,

використовуючи умову електронейтральності та записуючи різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$ різними способами:
$$\begin{cases} C_2 U_2 + C_3 U_3 - C_1 U_1 = 0 \\ U = U_1 + U_2 \\ U = 2U_1 + U_3 \end{cases}$$
 Тут через U_1, U_2, U_3 по-

значено напруги на конденсаторах C_1, C_2, C_3 відповідно. Розв'язуючи систему, отримаємо: $U_1 = \frac{(C_2 + C_3)U}{C_1 + C_2 + 2C_3}$, $U_2 = \frac{(C_1 + C_3)U}{C_1 + C_2 + 2C_3}$. Сумарний заряд на еквівалентному конденсаторі буде визначатися зарядами на зовнішніх обкладках конденсаторів C_1 та C_2 , оскільки заряди на пластинах конденсатора C_3 є результатом перерозподі-

лу заряду всередині батареї. Тому загальна ємність

$$C = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{U} = \frac{2C_1 C_2 + C_3 (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + 2C_3}.$$

Якщо $C_1 = C_2$, то $C = \frac{2C_1(C_1 + C_3)}{2C_1 + 2C_3} = C_1$ і не залежить від C_3 . Справді, в такому

випадку обидві обкладки конденсатора C_3 матимуть однаковий потенціал, і його можна замінити коротким замиканням. Тоді система представлятиме собою дві пари паралельно сполучених конденсаторів, з'єднаних послідовно. Її повна ємність буде дорівнювати C_1 .

Приклад 3.5. Система складається з двох концентричних провідних оболонок з радіусами R_1 , R_2 і відповідними зарядами q_1 , q_2 . Знайти власну енергію кожної оболонки, енергію взаємодії оболонок і повну енергію системи.

Розв'язання. Повна енергія системи складається з трьох частин: $W = W_1 + W_2 + W_{12}$, де W_1 , W_2 – власні енергії оболонок, а W_{12} – енергія їхньої взаємодії. Розрахуємо власну енергію як роботу, яка виконується при зарядженні тіла. Заряд dq переноситься із нескінченності на тіло, коли потенціал останнього дорівнює φ . Тому виконується робота $dA = dq \cdot \varphi$. Врахуємо, що потенціал сферичної

оболонки $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$. Тоді її власна енергія $W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{q_1} \frac{q}{R_1} dq = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}$. Аналогіч-

но $W_2 = \frac{q_2^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$. Нехай $R_1 < R_2$. Енергія взаємодії оболонок $dW_{12} = \sigma_2 dS_2 \cdot \varphi_{12}$, де

через φ_{12} позначено потенціал, створений зарядом першої сфери у місцях локалізації елементарних зарядів $\sigma_2 dS_2$ другої сфери. $W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_2} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$.

Повна енергія $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right)$.

Цю ж енергію можна знайти за формулою: $W = \int_V \omega_E dV$. Напруженість поля бу-

де

$$E = \begin{cases} 0, & r < R_1; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}, & R_1 < r < R_2; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2}, & r > R_2. \end{cases} \quad \text{Тоді}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q_1 + q_2)}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right)$$

Приклад 3.6. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса R . Знайти власну енергію кулі і відношення енергії електричного поля всередині кулі до енергії ззовні кулі.

Розв'язання. Знайдемо власну енергію кулі за формулою $W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$. Інтегрування проводиться по всьому об'єму, де є заряди. Введемо об'ємну густину заряду $\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$. Потенціал рівномірно зарядженої кулі був знайдений нами раніше

(див. Розділ 1, приклад 1.12): $\varphi(r) = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right)$. Тоді повна енергія (вона ж є і

власною енергією, оскільки інших заряджених тіл, між якими могла б виникнути взаємодія, немає) буде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R 4\pi r^2 \rho \cdot \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) dr = \frac{3\rho q}{4\varepsilon_0 R} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{15} \right) = \frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}.$$

Вираз для власної енергії зарядженої кулі можна також отримати, використавши поняття об'ємної густини енергії ω_E . Для цього потрібно знати розподіл електричного поля всередині та ззовні кулі. Знайти його досить легко завдяки тому, що задача має сферичну симетрію і, отже, можна використати теорему Гаусса (див. Розділ 1, приклад 1.12). Таким чином, поле всередині кулі ($r < R$) $E_{внутр} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r$, а ззо-

вні ($r > R$) $E_{зовн} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$.

Відповідно енергія всередині: $W_{внутр} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^R \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{10R}$, ззо-

вні: $W_{зовн} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

Повна енергія буде $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{10R} + \frac{q^2}{2R} \right) = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$. Шукане відношення

$$\frac{W_{\text{внутр}}}{W_{\text{зовн}}} = \frac{1}{5}.$$

Приклад 3.7. Ебонітова куля радіуса R рівномірно заряджена з об'ємною густиною ρ . Знайти радіус сфери R_1 , центр якої співпадає з центром кулі, яка ділить останню на дві частини з однаковими енергіями електростатичного поля.

Розв'язання. Як і при розрахунку енергії електростатичного поля у вакуумі, в діелектриках зручно використовувати поняття об'ємної густини енергії:

$$\omega_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \text{ Напруженість електричного поля всередині рівномірно заря-$$

дженої кулі можна розрахувати за теоремою Гаусса: $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon} r$. Тоді

$$dW = \omega_E dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} 4\pi r^2 dr. \text{ Розрахуємо енергію внутрішньої частини кулі:}$$

$$W_1 = \int_0^{R_1} dW = \frac{2\pi\rho^2 R_1^5}{45\epsilon_0 \epsilon}. \text{ Енергія зовнішньої частини: } W_2 = \int_{R_1}^R dW = \frac{2\pi\rho^2 (R^5 - R_1^5)}{45\epsilon_0 \epsilon}. \text{ За}$$

умовою $W_1 = W_2$. Звідси $R_1 = \frac{R}{\sqrt[5]{2}} \approx 0,87R$. Результат дещо неочікуваний: в зовніш-

ньому шарі товщиною $\approx \frac{1}{10}$ радіуса міститься половина енергії всієї кулі. Це пояснюється тим, що напруженість поля всередині кулі зростає при віддаленні від її центра.

Приклад 3.8. Заряджену провідну кулю радіуса R розрізали на дві частини площиною, що проходить на відстані h від центра кулі. Знайти силу взаємодії між цими частинами. Повний заряд кулі дорівнює Q .

Розв'язання. Заряди по поверхні кулі за відсутності поблизу інших заряджених чи незаряджених тіл розподіляться рівномірно з поверхневою густиною

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}. \text{ Поле всередині металевої кулі дорівнює нулю. Зовні кулі напруженість}$$

поля співпадає з напруженістю поля точкового заряду такої ж величини, поміщено-

$$\text{го в центр кулі } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \text{ Виділимо елемент площі } dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \text{ (рис. 3.8).}$$

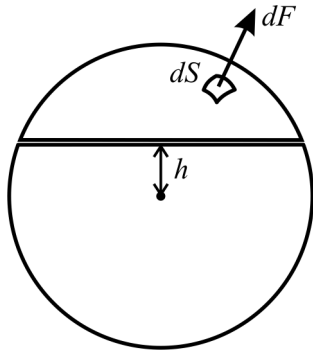


Рис. 3.8. До прикладу 3.8

Для того, щоб визначити, яка сила діє на заряд виділеного елемента, потрібно визначити напруженість поля, що створюється всією кулею в цій точці. Сам елемент dS , оскільки нас цікавить поле поблизу поверхні кулі, можна вважати плоским і при визначенні поля, створюваного ним, використати вираз для напруженості поля рівномірно зарядженої площини. Це поле існує по обидва боки від площини і дорівнює $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Поле елемента dS , напрямлене всередину, компенсується по-

лем, яке створюється всією іншою кулею так, щоб сумарне поле всередині дорівнювало нулю. Ззовні ж кулі ці поля складаються, даючи напруженість поля точкового заряду. З цього випливає, що поле, яке створює вся інша частина кулі поблизу обраного елемента поверхні, напрямлене назовні і за модулем збігається з полем заряду σdS . Таким чином, сила, яка діє на елемент поверхні dS , буде

$$dF = \sigma dS \cdot E_1 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta d\phi. \text{ Для знаходження сили, яка діє на ві-}$$

докремлену частину кулі, проінтегруємо отриманий вираз по всій поверхні відокремленої частини. При цьому потрібно врахувати, що результуюча сила буде визначатися лише проекціями на вертикальну вісь $dF \cos \theta$.

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi, \text{ де } \theta_0 = \arccos \frac{h}{R}.$$

$$\text{Тоді } F = -\frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0 R^2} \int_0^{\theta_0} \cos \theta d(\cos \theta) = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2} \right).$$

Цей же результат можна отримати не застосовуючи інтегрування. Сила, яка діє на одиничну площадку (тиск) $\frac{dF}{dS} = p_E = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$. Для знаходження рівнодійної сил електростатичного тиску можна уявити собі жорстку оболонку, всередині якої знаходиться газ під тиском p_E (рис. 3.9).

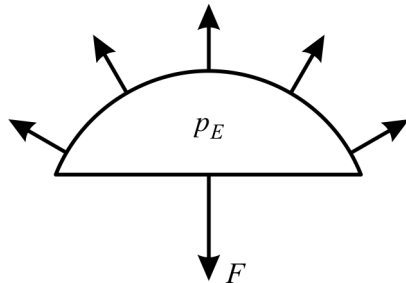


Рис. 3.9. До прикладу 3.8

Сила тиску цього газу на «кришку» оболонки збігається з силою F , яка нас цікавить. Але ж очевидно, що така сама за модулем сила діє і на «дно» оболонки. Тому $F = p_E S$, де $S = \pi(R^2 - h^2)$ – площа «дна». Таким чином, $F = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)$.

Сила відштовхування частин кулі буде максимальною, якщо кулю розрізати по діаметру ($h = 0$). Крім того, звернемо увагу на те, що до формули входить квадрат повного заряду. Це означає, що взаємодія між частинами кулі буде носити характер відштовхування, незалежно від знаку заряду, що взагалі-то очевидно з якісних фізичних міркувань.

Приклад 3.9. Всередині плоского конденсатора знаходиться паралельна до обкладок металева пластина, товщина якої складає частину η відстані між обкладками. Ємність конденсатора без пластини C_0 . Конденсатор з'єднано з джерелом постійної напруги U . Пластину повільно витягають із конденсатора. Знайти роботу, виконану проти електричних сил, якщо:

- 1) перед витяганням пластини конденсатор від'єднали від джерела напруги;
- 2) напруга на конденсаторі залишається незмінною.

Розв'язання. 1) Коли пластина знаходиться всередині конденсатора, то ми маємо справу з послідовним з'єднанням двох конденсаторів.

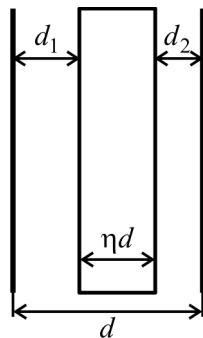


Рис. 3.10. До прикладу 3.9

$$\text{Загальна ємність такої системи } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d_2}}{\epsilon_0 S \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)} = \frac{C_0}{1 - \eta}.$$

Заряд, до

якого було заряджено конденсатор, $q = CU$. Після витягання пластини ємність системи набуває значення C_0 . При цьому заряди на пластинах залишаються незмінними. Робота, виконана проти електричних сил, буде визначатися зміною енергії конденсатора:

$$A = \frac{q^2}{2C_0} - \frac{q^2}{2C} = \frac{(CU)^2}{2C_0} - \frac{(CU)^2}{2C} = \frac{C_0 U^2}{2(1-\eta)^2} - \frac{C_0 U^2}{2(1-\eta)} = \frac{C_0 U^2}{2} \frac{\eta}{(1-\eta)^2}.$$

В даному випадку робота величина позитивна ($A > 0$), тобто на пластину з боку електричного поля діє сила, яка намагається втягнути пластину назад. Саме з подоланням цієї втягуючої сили і пов'язане виконання роботи, яке призводить до збільшення енергії конденсатора.

2) В цьому випадку конденсатор перебуває під впливом сталої напруги. Тому для визначення зміни енергії конденсатора зручніше використати вираз

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{C_0 U^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{C_0 U^2}{2} \frac{\eta}{1-\eta}.$$

Енергія конденсатора зменшується

($\Delta W < 0$). Як можна пояснити зменшення енергії конденсатора? Адже при витягуванні пластини виконується додатна робота проти електричних сил, і енергія системи при цьому повинна була б зростати. Вона і справді зростає, та тільки система в цьому випадку, крім конденсатора, містить ще й джерело напруги. Заряд конденсатора при зменшенні ємності також зменшується. Таке зменшення буде супроводжуватись проходженням заряду через джерело живлення у зворотному по відношенню до процесу зарядки напрямі (якщо джерелом живлення служить акумулятор, то він буде заряджатися). Зміна заряду конденсатора на величину Δq призводить до зміни його

енергії на величину $\Delta W = \frac{\Delta q U}{2}$. Джерело живлення при проходженні через нього

заряду Δq виконує роботу $A_{\text{дж}} = \Delta q U$. Таким чином, $A_{\text{дж}} = 2\Delta W$. Тепер запишемо рівняння балансу енергії в даній задачі: $A + A_{\text{дж}} = \Delta W$. Звідси робота зовнішніх сил $A = -\Delta W$. Оскільки енергія конденсатора зменшується ($\Delta W < 0$), то зовнішні сили справді виконують додатну роботу ($A > 0$).

Приклад 3.10. Сферичний конденсатор з радіусами обкладок R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$) заповнений діелектриками з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 . Діелектрики займають тілесні кути Ω_1 та Ω_2 (рис. 3.11). Заряд конденсатора дорівнює q . Знайти напруженості електричних полів у діелектриках, енергію та ємність конденсатора.

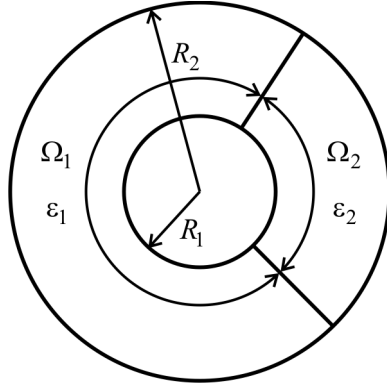


Рис. 3.11. До прикладу 3.10

Розв'язання. Силкові лінії електричного поля в сферичному конденсаторі є радіальними. Виконання граничних умов на межі поділу діелектриків, а саме рівність тангенціальних компонент поля $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, означає, що величини напруженості поля в обох діелектриках однакові $E_1 = E_2$. За теоремою Гаусса:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E S_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_2 E S_2 = q,$$

де $S_1 = \Omega_1 r^2$, $S_2 = \Omega_2 r^2$, а інтегрування проводиться по площі сфери радіуса r ($R_1 < r < R_2$). Отже,

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2) r^2}.$$

Енергія конденсатора W дорівнює

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varepsilon_0 \varepsilon_1 E^2 dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} \varepsilon_0 \varepsilon_2 E^2 dV_2,$$

де $V_1 + V_2 = V$ – об'єм конденсатора. Після інтегрування

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Ємність конденсатора визначимо, користуючись виразом для енергії $W = \frac{q^2}{2C}$.

$$C = \frac{q^2}{2W} = \varepsilon_0 (\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Неважко пересвідчитись, що у випадку діелектриків з однаковими ε ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) останній вираз переходить у формулу для ємності сферичного конденсатора.

Приклад 3.11. Точковий заряд q знаходиться в центрі сферичного незарядженого шару діелектрика з проникністю ε (рис. 3.12). Внутрішній та зовнішній радіуси шару дорівнюють відповідно R_1 та R_2 . Шар має маленький отвір вздовж радіуса.

Яку роботу треба виконати, щоб повільно перенести заряд q з центру шару на нескінченність у вакуум?

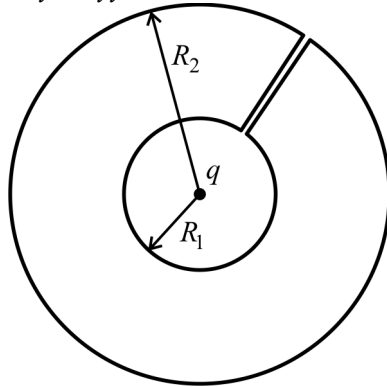


Рис. 3.12. До прикладу 3.11

Розв'язання. Робота, яку потрібно виконати для переміщення точкового заряду, буде дорівнювати зміні енергії електричного поля в просторі навколо нього: $A = W_2 - W_1$. Зміна ця відбудеться за рахунок збільшення поля в тій частині простору, яку раніше займав шар діелектрика:

$$W_2 = \int \omega_E dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{R_1} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right),$$

$$W_1 = \int \omega_E dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{R_1} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon r^2} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right).$$

$$\text{Звідси } A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} - \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon r^2} \right) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right).$$

Приклад 3.12. Плоский конденсатор розташований вертикально і дотикається пластинами до поверхні рідини з густиною ρ і діелектричною проникністю ϵ (рис. 3.13). Відстань між пластинами – d , прикладена напруга – U . На яку висоту підніметься рідина в проміжку між пластинами конденсатора? Крайовими ефектами та капілярними явищами знехтувати.

Провести розрахунок для випадку: $\epsilon = 81$ (вода), $d = 4$ мм, $U = 320$ В.

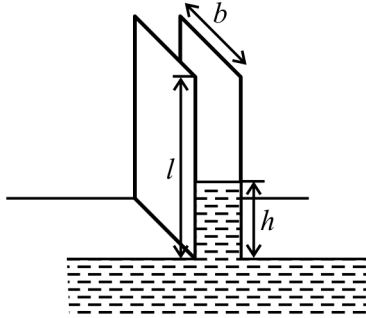


Рис. 3.13. До прикладу 3.12

Розв'язання. Дану систему можна представити як паралельне сполучення двох конденсаторів, один з яких заповнений водою, а інший – порожній. Тоді загальна ємність системи $C = \frac{\varepsilon_0 b(l-h)}{d} + \frac{\varepsilon \varepsilon_0 b h}{d}$. За рахунок підняття рідини в проміжку між обкладками на Δh ємність збільшується, змінюючись на величину $\Delta C = \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon - 1)}{d} \Delta h$. Загальна енергія системи при цьому зростає як за рахунок збільшення енергії електричного поля в конденсаторі, так і за рахунок зростання потенціальної енергії стовпчика рідини: $\Delta W = \Delta W_E + \Delta W_p$. Відповідні складові:

$$\Delta W_E = \Delta \left(\frac{CU^2}{2} \right) = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon - 1)}{d} \Delta h;$$

$$\Delta W_p = \Delta \left(mg \frac{h}{2} \right) = \Delta \left(\rho \cdot b d h \cdot g \frac{h}{2} \right) = \rho b d g h \Delta h.$$

Додаткова енергія у систему надходить за рахунок роботи джерела ЕРС, яке підтримує сталою напругу U . Рівняння балансу енергій в такому разі виглядає як $\Delta W_E + \Delta W_p = A_{дж}$. Як було показано у прикладі 3.9, $A_{дж} = 2\Delta W_E$. Тому остаточно $\Delta W_E = \Delta W_p$. Підставляючи відповідні вирази, отримаємо

$$h = \frac{U^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2 \rho g d^2}.$$

Проведемо розрахунок для заданих в умові величин:

$$h = \frac{(320)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (81 - 1)}{2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2} = 2,3 \cdot 10^{-4} = 0,23 \text{ (мм)}.$$

Приклад 3.13. Довгий циліндр радіуса R із однорідного діелектрика з проникністю ε_2 знаходиться в необмеженому діелектричному середовищі з проникністю ε_1 . В середовищі створено однорідне електричне поле з напруженістю \vec{E}_1 . Вісь циліндра

перпендикулярна до вектора \vec{E}_1 . Визначити енергію поля в циліндрі, яка припадає на одиницю його довжини.

Розв'язання. Енергія електричного поля в циліндрі

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \epsilon_2 E_2^2 dV,$$

де \vec{E}_2 – напруженість електричного поля в циліндрі. Вона складається із суми зовнішнього поля \vec{E}_1 і поля \vec{E}' , яке створюється поляризаційними зарядами.

Діелектрик у формі циліндра в зовнішньому однорідному полі поляризується однорідно. Тому об'ємна густина зв'язаних зарядів $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P} = 0$ (\vec{P} – вектор поляризації), а участь у створенні поля всередині циліндра приймають поляризаційні заряди зосереджені на поверхні циліндра.

Поверхневу густину зв'язаних зарядів можна отримати з граничних умов на бічній поверхні циліндра: $\sigma' = P_{2n} - P_{1n} = (P_2 - P_1) \cos \theta$ (тут вважається, що нормаль до бічної поверхні \vec{n} напрямлена назовні циліндра, а θ – кут між нормаллю так векторами поляризації (рис. 3.14)).

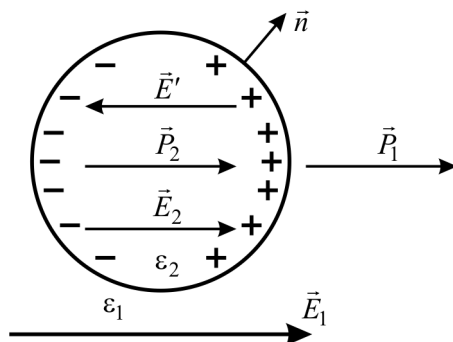


Рис. 3.14. До прикладу 3.13

Як бачимо, поверхневий заряд розподілений по бічній поверхні циліндра за законом косинуса. За такого розподілу поле, яке створюється поверхневим зарядом всередині циліндра, однорідне. Для його знаходження можна скористатись прийомом, описаним у прикладі 1.16, і представити такий розподіл заряду як результат зсуву на невелику відстань a один відносно одного двох рівномірно заряджених циліндрів з густинами зарядів $+\rho'$ та $-\rho'$. За теоремою Гаусса, всередині рівномірно зарядженого циліндра $\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}$. Тоді поле в області перетину двох циліндрів (поле поляризаційних зарядів \vec{E}') визначатиметься як $\vec{E}' = \frac{\rho'}{2\epsilon_0} \vec{a}$ (останній вираз отримується аналогічно до розв'язку прикладу 1.7).

Врахуємо, що за невеликого зміщення всі некомпенсовані поляризаційні заряди розміщуються в приповерхневому шарі товщиною $a \cos \theta$. Відповідний заряд одиниці площі поверхні циліндра $\sigma' = \rho' a \cos \theta$. Таким чином,

$$E' = \frac{\rho' a}{2\epsilon_0} = \frac{(P_2 - P_1)}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_2 - 1}{2} E_2 - \frac{\epsilon_1 - 1}{2} E_1.$$

Як вже було сказано на початку розв'язку, поле всередині циліндра $E_2 = E_1 - E'$.

Об'єднуючи два останні вирази, отримаємо, що $E_2 = \frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_2 + 1} E_1$.

Енергія електричного поля всередині циліндра

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \epsilon_2 E_2^2 dV = \frac{\pi R^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_2 + 1} E_1 \right)^2 \cdot L,$$

де L – довжина циліндра.

Тому енергія, яка припадає на одиницю довжини циліндра,

$$W_L = \frac{\pi R^2}{2} \epsilon_0 \epsilon_2 \left(\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_2 + 1} E_1 \right)^2.$$

Легко пересвідчитись, що для випадку $\epsilon_2 = \epsilon_1 = 1$ $W_L = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \pi R^2$, що дорівнює енергії електричного поля у вакуумі, сконцентрованої у об'ємі циліндра радіуса R одиничної довжини.

Приклад 3.14. Кожну з N незв'язаних крапель ртуті радіуса r зарядили до потенціалу φ_0 . Далі їх об'єднали у одну велику краплю. Приймаючи за нуль потенціал нескінченно віддаленої точки, визначити потенціал та поверхневу густину заряду великої краплі, а також зміну електричної енергії системи після об'єднання.

Розв'язання. Оскільки при об'єднанні крапель загальна маса системи не змінюється, то радіус великої краплі $R = N^{1/3} r$. Після об'єднання не зміниться також і загальний заряд крапель $q = Nq_0$, де $q_0 = 4\pi\epsilon_0 r \varphi_0$ – заряд окремої краплі.

Звідси отримаємо потенціал великої краплі: $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = N^{2/3} \varphi_0$, а також поверх-

неву густину заряду $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 N^{1/3} \varphi_0}{r}$.

Зміна енергії електричного поля:

$$W_2 - W_1 = \frac{q\varphi}{2} - N \frac{q_0 \varphi_0}{2} = 2\pi\epsilon_0 r \varphi_0^2 N \left(N^{2/3} - 1 \right).$$

4. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

4.1. Короткі теоретичні відомості

Електричним струмом називають впорядкований рух заряджених частинок. Напрямок електричного струму прийнято вважати напрямком руху позитивних зарядів. Для кількісної характеристики електричного струму вводиться поняття про силу та густину струму.

Силою струму називається заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (4.1)$$

Одиницею сили струму в системі СІ є ампер (A). Сила струму в $1A$ відповідає переносу через поперечний переріз провідника заряду в $1Kл$ за $1с$.

Густина електричного струму \vec{j} – це векторна величина, модуль якої визначає струм через одиницю площі поперечного перерізу провідника, а напрям вказує на напрям впорядкованого руху позитивних зарядів:

$$\vec{j} = en\vec{v}, \quad (4.2)$$

де e – заряд окремої частинки, n – концентрація носіїв струму, v – їх середня швидкість дрейфового руху. Знаючи густину струму в кожній точці провідника, можна знайти силу струму в цьому провіднику за формулою

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = \int_S j_n dS. \quad (4.3)$$

Тут \vec{n} – вектор нормалі до елемента площі dS .

Один з фундаментальних законів природи – закон збереження заряду – при проходженні електричного струму виражається рівнянням неперервності:

$$\frac{dq}{dt} + \oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (4.4)$$

Тут подано інтегральну та диференціальну форми рівняння. S – замкнена поверхня, що містить заряд q з об'ємною густиною ρ . Якщо вектор густини струму \vec{j} не змінюється з плином часу, то говорять про систему стаціонарних струмів. В цьому випадку рівняння неперервності мають вигляд:

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (4.5)$$

тобто потік вектора \vec{j} через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Для розв'язування задач про проходження струму в провідному середовищі використовують закон Ома. Його зручно представити у диференціальній формі, яка

містить величини, що характеризують електричний стан середовища в одній і тій же точці:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}, \quad (4.6)$$

де \vec{E} – вектор напруженості електричного поля, λ – питома провідність середовища.

Розв’язування задач на знаходження опору слабо провідного середовища зводиться до знаходження аналітичного зв’язку між падінням напруги на електричних контактах та струмом через середовище. Струм визначається як потік вектора \vec{j} через замкнену поверхню. Простота розв’язку часто визначається вдалим вибором поверхні інтегрування. Форму її вибирають в залежності від симетрії задачі.

При проходженні струму через опір відбувається розсіювання енергії. Джерело електричного струму виконує роботу по переміщенню електричних зарядів, збільшуючи внутрішню енергію провідника. Енергія, що витрачається джерелом струму, врешті-решт проявляється у вигляді теплоти. Кількість теплоти Q_t' , що виділяється в одиниці об’єму провідника при протіканні постійного струму, визначається законом Джоуля-Ленца:

$$Q_t' = j^2 \rho, \quad (4.7)$$

де ρ – питомий опір середовища. В інтегральній формі цей закон виглядає так:

$Q_t = \int j^2 \rho dV = \int j^2 \rho S dl = I^2 \int \rho \frac{dl}{S} = I^2 R$. Величину Q_t ще називають тепловою потужністю. Повну кількість теплоти, що виділяється в провіднику за час t , описують формулою

$$Q = \int_0^t Q_t dt = \int_0^t I^2 R dt. \quad (4.8)$$

4.2. Запитання та відповіді

4.2.1. Чи завжди струм в речовині обумовлений рухом вільних зарядів у зовнішньому полі?

Струми, що виникають в речовині, мають різну природу. Наприклад, дифузійні струми виникають за наявності градієнту концентрації носіїв в речовині. Теплові (флуктуаційні) струми пов’язані з тепловим рухом носіїв (флуктуації їх концентрації). І тільки струм провідності виникає за рахунок дії на речовину зовнішнього електричного поля.

4.2.2. Для постійного струму виконується умова $\text{div } \vec{j} = 0$. Як її можна трактувати?

Умова $\text{div } \vec{j} = 0$ означає, що силові лінії постійного струму є замкнутими.

4.2.3. Чи може стаціонарна густина струму \vec{j} в однорідному ізотропному провіднику виражатись формулами:

а) $\vec{j} = a(2x\vec{i} + y\vec{j} - 3z\vec{k})$;

б) $\vec{j} = b(3x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k})$;

в) $\vec{j} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$,

де x, y, z – декартові координати; a, b, c – сталі і не дорівнюють нулю?

Густина струму у випадку системи стаціонарних струмів повинна відповідати умові $\text{div } \vec{j} = 0$. З огляду на неї можна проаналізувати вирази для густини струму, подані в умові завдання:

а) може, оскільки $\text{div } \vec{j} = 0$;

б) не може, оскільки $\text{div } \vec{j} = 2b$;

в) може, якщо $a + b + c = 0$.

4.2.4. Чому дорівнює $\text{rot } \vec{j}$ для густини струму \vec{j} в однорідному провіднику за відсутності сторонніх сил (крім кулонівських)?

Електричне поле стаціонарних струмів є потенціальним. Математичним записом потенціальності електричного поля є

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv 0 \equiv \frac{1}{\lambda} \oint_L \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Оскільки у якості S може бути обрана довільна поверхня, натягнута на контур L , то ця тотожність виконується лише за умови $\text{rot } \vec{j} = 0$.

4.2.5. Який фізичний зміст рівняння неперервності $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$?

Рівняння неперервності виражає у локальній формі закон збереження заряду.

4.2.6. Чому дорівнює об'ємна густина зарядів в однорідному провіднику, по якому протікає постійний струм?

З рівняння неперервності $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, оскільки при постійному струмі густина зарядів ρ не змінюється з часом. З іншого боку, $\text{div } \vec{j} = \text{div}(\lambda \vec{E}) = \frac{\lambda}{\epsilon \epsilon_0} \text{div } \vec{D} = \frac{\lambda}{\epsilon \epsilon_0} 4\pi \rho$, де λ, ϵ – питома провідність і діелектрична проникність середовища відповідно. Порівнюючи ці два вирази, отримуємо, що $\rho = 0$.

Таким чином можна сказати, що поле в провіднику, по якому протікає постійний струм, створюється тільки зарядами на поверхні провідника.

4.2.7. За яких умов виконується закон Ома? Наведіть приклади його порушення.

Закон Ома виконується за умови лінійної залежності величини струму, що протікає в середовищі, від прикладеної напруги. Нелінійність цієї залежності означає порушення закону Ома. Прикладом можуть слугувати вольт-амперні характеристики напівпровідникових діодів, вакуумних діодів тощо. Крім того, закон Ома порушується при невиконанні умови квазістаціонарності струмів (наприклад, на високих частотах).

4.2.8. Два провідника з однаковими площами поперечного перерізу S та питомими опорами ρ_1 і ρ_2 з'єднані послідовно (рис. 4.1). По провідникам тече постійний струм I . Побудувати якісно графіки залежностей густини струму $j(x)$ і напруженості поля $E(x)$ всередині провідників, якщо $\rho_1 < \rho_2$?

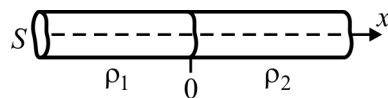


Рис. 4.1. До питання 4.2.8

За умовою $j = \frac{I}{S} = \text{const}$ (рис. 4.2а). З іншого боку, $j = \frac{E}{\rho}$, тому $E_1 = j\rho_1$, $E_2 = j\rho_2$ (рис. 4.2б).

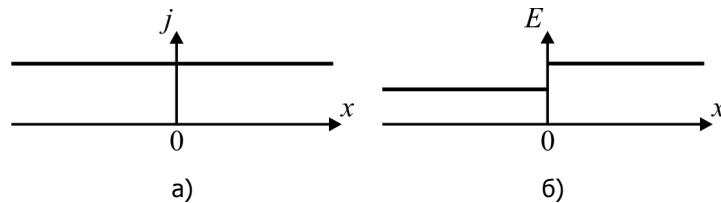


Рис. 4.2. До запитання 4.2.8

4.2.9. Побудувати графіки залежностей напруженості поля $E(x)$ та потенціалу $\varphi(x)$ на ділянці 1-6, зображеній на рис. 4.3, якщо $\varphi_1 > \varphi_6$?

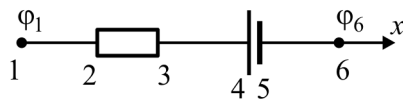


Рис. 4.3. До питання 4.2.9

Відповідь наведена на рис. 4.4.

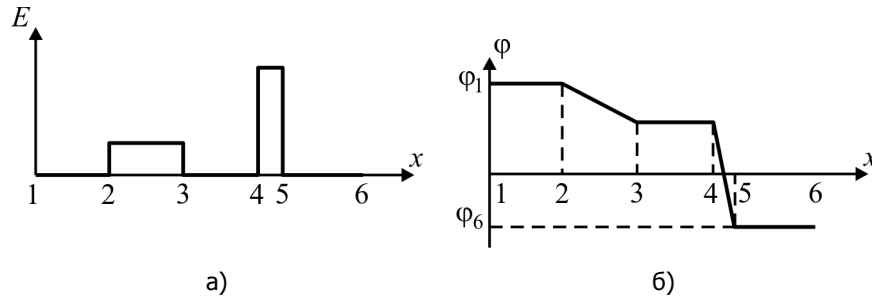


Рис. 4.4. До запитання 4.2.9

4.2.10. Замкнуте коло складається із m послідовно з'єднаних елементів живлення, е.р.с. яких ε , а внутрішній опір r . Опір з'єднувальних проводів дорівнює нулю. Що покаже ідеальний вольтметр, якщо його під'єднати до затискачів одного з елементів?

Ідеальним називається вольтметр, внутрішній опір якого нескінченно великий. При підключенні до затискачів одного з елементів живлення вольтметр зареєструє різницю потенціалів між затискачами $U = \varepsilon - Ir$, де I – струм, що протікає у колі.

За законом Ома цей струм $I = \frac{m\varepsilon}{mr}$. Тому напруга, яку показуватиме вольтметр $U = 0$.

4.2.11. Як залежить к.к.д. джерела струму з електрорушійною силою ε та внутрішнім опором r від опору зовнішнього навантаження R ?

Джерело струму – двополіусник, який генерує струм, величина якого не залежить від приєднаного навантаження.

К.к.д. джерела струму – це відношення корисної потужності (тобто потужності, що виділяється на зовнішньому опорі) до всієї потужності (тобто суми потужностей, що виділяються на зовнішньому та внутрішньому опорах):

$$\eta = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r}.$$

В режимі короткого замикання ($R = 0$), коли струм досягає максимального значення $I_0 = \frac{\varepsilon}{r}$, $\eta = 0$. У випадку, коли R нескінченно зростає (режим холостого ходу), к.к.д. джерела струму наближується до одиниці (рис. 4.5).

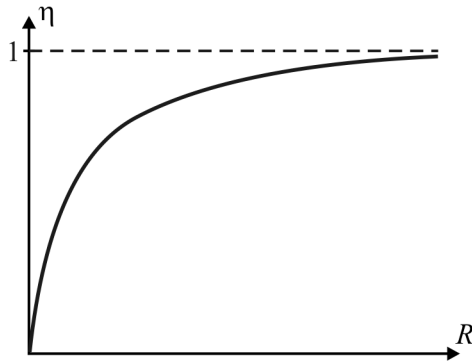


Рис. 4.5. До запитання 4.2.11

4.2.12. Як залежить корисна потужність джерела струму з попереднього питання від опору зовнішнього навантаження?

Зростання к.к.д. джерела струму при збільшенні опору навантаження (див. пит. 4.2.11) зовсім не означає, що при цьому зростає і корисна потужність. Збільшення к.к.д. говорить лише про збільшення відношення корисної потужності до повної потужності джерела. При цьому сама корисна потужність може зменшуватись.

Справді, корисна потужність

$$P_{\text{кор}} = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} R = \frac{\varepsilon^2}{r} \frac{x}{(x+1)^2},$$

де $x = R/r$. Якщо $x \ll 1$, то $P_{\text{кор}} \sim x$. Якщо $x \gg 1$, то $P_{\text{кор}} \sim 1/x$. Максимального значення корисна потужність набуває при $x=1$, тобто коли $R=r$. В такому разі кажуть, що джерело та навантаження узгоджені за потужністю. При цьому $P_{\text{кор}} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$. Графік на рис.4.6 ілюструє зміну корисної потужності в залежності від величини відношення опору зовнішнього навантаження до внутрішнього опору $x = R/r$.

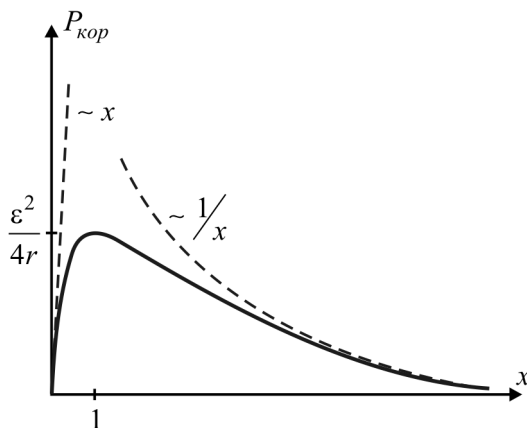


Рис. 4.6. До запитання 4.2.12

4.2.13. Поясніть, чому при протіканні струму крізь речовину вона нагрівається?

Під дією зовнішнього електричного поля вільні носії заряду в речовині набувають додаткової швидкості (кінетичної енергії). Під час свого направленого руху вони стикаються з молекулами (атомами) речовини і віддають їм набуту в зовнішньому полі додаткову енергію, яка, в решті решт, перетворюється на тепло. Тому під час проходження струму крізь речовину вона нагрівається.

4.2.14. Що фізично означає термін «слабко провідне середовище» (приклади 4.1, 4.2)?

Термін «слабко провідне середовище» означає, що провідність середовища значно менша у порівнянні з провідністю електродів, через які підводиться струм: $\lambda_{\text{сер}} \ll \lambda_{\text{пров}}$.

В загальному випадку не можна сказати, що електростатичне поле і поле постійного струму тотожні. Але за умови $\lambda_{\text{сер}} \ll \lambda_{\text{пров}}$ поле постійного струму можна моделювати електростатичним полем. І закони, які працюють для електростатики, працюватимуть і для постійного струму. Зокрема можна вважати, що тангенціальна складова електричного поля на поверхні провідника відсутня.

4.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Простір між електродами сферичного конденсатора заповнено однорідним слабко провідним середовищем з питомим опором ρ . Радіуси обкладок конденсатора a і b ($a < b$). Знайти опір міжелектродного проміжку.

Розв'язання. Напруженість електричного поля в міжелектродному проміжку визначається зарядом q , який знаходиться на внутрішній обкладці конденсатора:

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$. Знайдемо різницю потенціалів між внутрішньою та зовнішньою об-

кладками: $U = \int_a^b E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$.

Знайдемо струм через конденсатор: $I = \int_S j_n dS = \frac{1}{\rho} \int_S E_n dS$. У якості поверхні інтегрування виберемо зовнішню обкладку конденсатора. Проекція напруженості поля на нормаль до поверхні $E_n = E$ і, крім того, з огляду на симетрію задачі, вона має постійне значення в усіх точках вибраної поверхні.

$I = \frac{1}{\rho} E_n \int_{(S)} dS = \frac{1}{\rho} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} 4\pi b^2 = \frac{q}{\rho\epsilon_0} = \frac{4\pi ab}{\rho(b-a)} U$.

За законом Ома для ділянки кола $I = \frac{U}{R}$. Таким чином, для сферичного конденсатора $R = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ab}$.

Приклад 4.2. Дві металеві кульки однакового радіуса a знаходяться в однорідному слабо провідному середовищі з питомим опором ρ (рис. 4.7). Знайти опір середовища між кульками за умови, що відстань між ними b значно більша за їх радіус a .

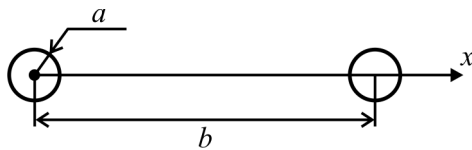


Рис. 4.7. До прикладу 4.2

Розв'язання. Вважатимемо, що напруга подана на кульки таким чином, що напрямок поля між ними збігається з додатнім напрямком координатної осі.

За рахунок явища електричної індукції заряди на поверхні кульок перерозподіляються. Тому поле кожної кульки за її межами не відповідає полю точкового заряду. Але, за умови $b \gg a$, таким перерозподілом заряду можна знехтувати. Тобто можна вважати, що заряди на поверхнях кульок розподіляються сферично симетрично, а поле цих зарядів за межами кульок відповідає полю еквівалентного точкового заряду. Тоді за модулем напруженість поля визначається виразом

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(b-x)^2}.$$

Знайдемо різницю потенціалів між кульками:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{b-a} \left(\frac{q}{x^2} + \frac{q}{(b-x)^2} \right) dx = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) \approx \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}.$$

Використане наближення випливає з умови задачі, де $b \gg a$.

Для знаходження електричного струму, що протікає між кульками, за формулою (4.3) потрібно спочатку визначитися з формою поверхні, по якій буде проводитись інтегрування. Доцільно вибирати поверхню такою, щоб силові лінії електричного поля, а отже і лінії струму, були перпендикулярні до неї. В даному випадку це може бути площина симетрії між двома кульками. Але є легший шлях, який виключає дещо складне інтегрування по такій площі. Знову ж таки скористаємось умовою $b \gg a$. За такої умови можна вважати, що поле біля поверхні однієї із кульок не

залежить від впливу іншої кульки. Тобто $E(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$. Причому це поле одна-

кове в усіх точках поверхні і його силові лінії направлені вздовж нормалі до поверхні (для справедливості останнього твердження необхідно, щоб питома провідність середовища була набагато менша за питому провідність провідника). Тоді струм

визначається за формулою $I = \frac{1}{\rho} ES = \frac{q}{\epsilon_0 \rho}$. Підставимо сюди вираз для заряду, записаний через різницю потенціалів U . Отримаємо $I = \frac{2\pi a}{\rho} U$. Таким чином, опір середовища між двома кульками $R = \frac{\rho}{2\pi a}$.

Порівнюючи вираз для опору середовища між двома металевими кульками з виразом для їх взаємної ємності, отриманим у розділі 3 (приклад 3.1), можна побачити, що

$$CR = \epsilon_0 \epsilon \rho. \quad (4.9)$$

Цей результат справедливий і в загальному випадку провідників довільної форми, як завгодно розташованих один відносно одного. Для правильності цього результату необхідно, щоб питома провідність середовища була набагато менша за питому провідність провідника. Формула ця виявляється в багатьох випадках корисною. Так, якщо потрібно визначити ємність якої-небудь пари провідників, то замість безпосереднього вимірювання їх ємності (що при малій її величині не так вже й просто) можна помістити провідники в середовище з відомими величинами ϵ та ρ і виміряти опір, після чого за формулою розрахувати ємність. І навпаки, вимірювання опору можна звести до вимірювання ємності.

Приклад 4.3. Зазор між обкладками плоского конденсатора заповнено послідовно двома діелектричними шарами 1 та 2 товщиною d_1 і d_2 , з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 і питомими опорами ρ_1 та ρ_2 . На конденсатор подано постійну напругу U , причому електричне поле направлено від шару 1 до шару 2. Знайти поверхневу густину сторонніх зарядів σ на межі поділу діелектриків і умову, за якої $\sigma = 0$.

Розв'язання. Густина струму по всьому перерізу між обкладками залишається сталою. Якщо E_1 та E_2 напруженості полів у 1 та 2 діелектриках відповідно, то густина струму $j = \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} \Rightarrow E_1 = \rho_1 j$; $E_2 = \rho_2 j$. Різниця потенціалів між об-

кладками $U = \int_0^{d_1} E_1 dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E_2 dx = (\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2) j \Rightarrow j = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}$. Тепер ми

можемо виразити напруженості електричних полів у діелектриках через зовнішню напругу: $E_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} U$; $E_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} U$. Для знаходження густини сторонніх зарядів на межі поділу двох діелектриків скористаємось граничними умовами:

$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$, тоді $\sigma = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1)}{(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2)} U$. Звідси очевидно, що

$\sigma = 0$ за умови $\varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2$.

Приклад 4.4. Нескінченний ланцюжок утворено повторенням однієї і тієї ж комірки, що складається з двох опорів R_1 та R_2 (рис. 4.8). Знайти опір між точками A та B .

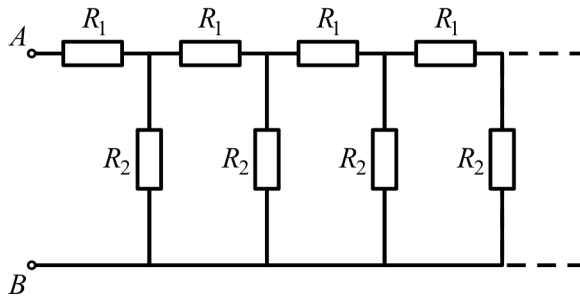


Рис. 4.8. До прикладу 4.4

Розв'язання. Уявно відкинемо першу комірку. Загальний опір ланцюжка не зміниться, оскільки без однієї комірки він не перестане бути нескінченним. Позначимо цей загальний опір як R_x . Тепер повернемо першу комірку на місце. Отримаємо еквівалентну схему, яку вже розрахувати набагато простіше (рис. 4.9). Причому розрахований опір теж буде рівний R_x (ланцюжок так само залишається нескінченним).

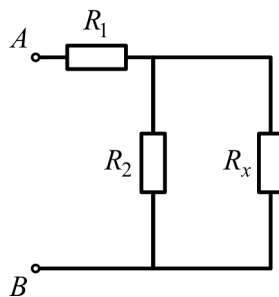


Рис. 4.9. До прикладу 4.4

$R_x = R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x}$. Розв'язуючи цю рівність відносно R_x , отримаємо квадратне рів-

няння $R_x^2 - R_1 R_x - R_1 R_2 = 0$; $R_x = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}$. Відповідь не може бути

від'ємною, тому нас задовольняє лише один корінь $R_x = \frac{R_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}} \right)$.

Приклад 4.5. Маємо нескінченну сітку з квадратними комірками. Опір кожного провідника між сусідніми вузлами дорівнює R_0 . Знайти опір R цієї сітки між точками A та B (рис. 4.10).

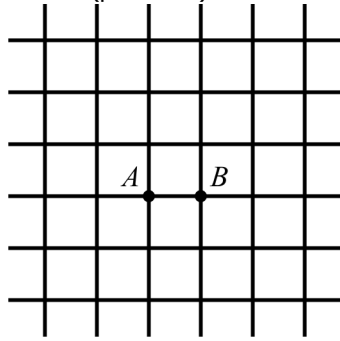


Рис. 4.10. До прикладу 4.5

Розв'язання. Під'єднаємо до точок A та B джерело напруги U . За законом Ома ця напруга $U = IR$, де R – загальний опір сітки, а I – струм, що підводиться до точок контакту. Нехай струм виходить з точки A і входить в точку B . Виходячи з точки A , струм ділиться на чотири частини (оскільки всі напрямки рівнозначні) і розтікається на нескінченність. При цьому на відрізку AB протікає струм $I/4$. Аналогічно, коли струм з нескінченності збирається у точку B , він приходить з чотирьох рівноцінних напрямків і через AB знову ж таки проходить струм $I/4$. Таким чином, загальний струм у вітці AB складає $I_0 = I/4 + I/4 = I/2$. З іншого боку, $I_0 R_0 = U$. Порівнюючи цей вираз з законом Ома, написаним на початку, отримаємо відповідь: $R = R_0/2$.

Приклад 4.6. Конденсатор, заповнений діелектриком з проникністю ϵ , втрачає за час τ половину наданого йому заряду. Вважаючи, що втрата заряду відбувається тільки через діелектричну прокладку, знайти її питомий опір.

Струм у конденсаторі можна записати через закон Ома $I = U/R$. Напруга на обкладках буде залежати від величини заряду конденсатора $U = q/C$ (тут q – поточний заряд на конденсаторі). За означенням сила струму $I = \frac{dq}{dt}$. Тому можна скласти диференціальне рівняння $\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$ (знак “–” вказує на те, що заряд конденсатора зменшується). Розв'язавши це рівняння, ми отримаємо закон зміни заряду конденсатора з часом. $\int \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int dt \Rightarrow \ln q = -\frac{t}{RC} + \text{const}$. Отже, маємо залеж-

ність $q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$. Щоб визначити константу A , використаємо початкову умову $q(0) = q_0$. Тоді $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. За умовою задачі $\frac{q_0}{2} = q_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} \Rightarrow \ln 2 = \frac{\tau}{RC}$. За формулою (4.9) існує зв'язок між ємністю плоского конденсатора і опором його прокладки: $CR = \epsilon_0 \epsilon_r$. Підставляємо цей вираз в останнє рівняння і отримуємо кінцевий результат: $\rho = \frac{\tau}{\epsilon_0 \epsilon \ln 2}$.

Як видно з отриманої залежності $q(t)$ процес розрядки конденсатора (і процес зарядки теж) продовжується нескінченно довго. Але як і в усіх подібних процесах, коли часова залежність описується експонентою з від'ємним показником, основна зміна величини, що розглядається, відбувається за скінченний проміжок часу. Параметром, що характеризує тривалість такого процесу, є проміжок часу $\tau = RC$. За цей час дана величина зміниться в $e \approx 2,72$ рази.

В будь-якій реальній системі перехідний процес продовжується на протязі скінченного відрізка часу, оскільки говорити про такий процес є сенс доти, поки описувана величина не зменшиться до значення, що відповідає рівню теплових флуктуацій в системі.

Приклад 4.7. Скільки тепла виділиться в спіралі з опором R при проходженні через неї кількості електрики q , якщо струм в спіралі:

- а) рівномірно спадає до нуля на протязі часу T ;
- б) монотонно спадає до нуля так, що за кожні T секунд він зменшувався вдвічі?

Розв'язання. В загальному випадку $Q = \int I^2 R dt$. Для розв'язку задачі нам потрібно знайти аналітичний вигляд залежності сили струму від часу.

а) В цьому випадку маємо справу з лінійною залежністю. Струм спадає від початкового значення I_0 до нуля за лінійним законом $I = I_0 - kt$. Константи I_0 та k можна визначити з умови задачі. В момент часу $t = T$ $I = 0 \Rightarrow I_0 = kT \Rightarrow I = k(T - t)$. Кількість електрики, що пройшла через спіраль

$$q = \int_0^T I dt = \int_0^T k(T - t) dt = \frac{kT^2}{2} \Rightarrow k = \frac{2q}{T^2}. \text{ Отже, струм змінювався за законом}$$

$$I = \frac{2q(T - t)}{T^2}. \text{ Кількість теплоти, що виділиться в спіралі,}$$

$$Q = \int_0^T I^2 R dt = \frac{4q^2}{T^4} R \int_0^T (T - t)^2 dt = \frac{4q^2 R}{3T}.$$

б) В цьому випадку падіння струму відбувається за законом $I = I_0 2^{-\frac{t}{T}}$. Константу I_0 знову ж таки визначимо з умови задачі.

$$q = \int_0^{\infty} I dt = I_0 \int_0^{\infty} 2^{-\frac{t}{T}} dt = I_0 \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\ln 2}{T} t\right\} dt = I_0 \frac{T}{\ln 2} \Rightarrow I_0 = \frac{q \ln 2}{T}.$$

Кількість теплоти,

$$\text{що виділиться в спіралі, } Q = I_0^2 R \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{2 \ln 2}{T} t\right\} dt = \left(\frac{q \ln 2}{T}\right)^2 R \frac{T}{2 \ln 2} = \frac{q^2 R \ln 2}{2T}.$$

Приклад 4.8. Схема складається з опорів R_1 , R_2 та невідомого опору R_x (рис. 4.11). При якому R_x теплова потужність, що виділяється на ньому, практично не буде залежати від невеликих змін цього опору? Напруга між точками A та B постійна.

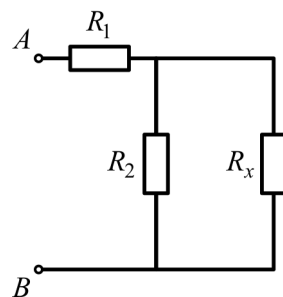


Рис. 4.11. До прикладу 4.8

Розв'язання. Загальний опір кола $R = R_1 + \frac{R_2 R_x}{R_2 + R_x}$. Струм у колі $I = U/R$. Визначимо падіння напруги на невідомому опорі R_x : $U_x = U - IR_1 = U \left(1 - \frac{R_1}{R}\right)$. Тепер можна записати вираз для теплової потужності, що виділяється на цьому опорі:

$$Q_x = \frac{U_x^2}{R_x} = \frac{U^2 R_2^2 R_x}{(R_1 R_2 + R_2 R_x + R_1 R_x)^2}.$$

Спробуємо умову про незалежність Q_x від малих флуктуацій R_x записати у вигляді формули: $\Delta Q_x = Q_x(R_x + \Delta R_x) - Q_x(R_x) = 0$. Подібний вираз зустрічається в курсі математичного аналізу: $Q_x(R_x + \Delta R_x) - Q_x(R_x) = \frac{dQ_x}{dR_x} \Delta R_x$. Отже, все, що залишилось зробити, це взяти від отриманого виразу для Q_x похідну по R_x і прирівняти її до нуля (фактично дослідити функцію на екстремум).

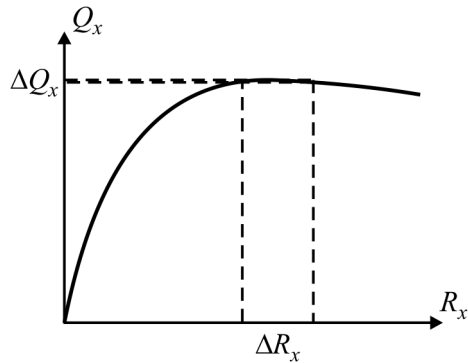


Рис. 4.12. До прикладу 4.8

Справді, як видно з графіка (рис. 4.12), навіть досить значні флуктуації опору R_x поблизу значення, яке відповідає максимуму функції $Q_x(R_x)$, призводять лише до незначних змін значення теплової потужності. Як результат дослідження отриманої функції на екстремум, ми отримаємо рівняння:

$$R_1 R_2 + R_1 R_x + R_2 R_x - 2 R_x (R_1 + R_2) = 0.$$

Звідси шуканий опір $R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Приклад 4.9. В схемі, показаній на рис. 4.13, один конденсатор зарядили до напруги U_0 і в момент часу $t=0$ замкнули ключ K . Знайти:

- струм I в колі як функцію часу t ;
- кількість тепла, що виділиться, знаючи залежність $I(t)$.

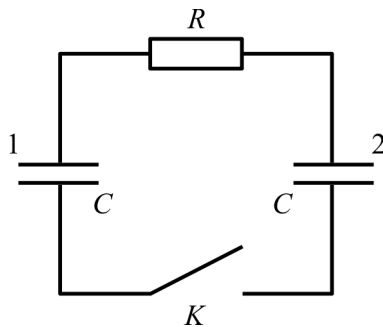


Рис. 4.13. До прикладу 4.9

Розв'язання. Нехай спочатку був заряджений перший конденсатор. Після замикання ключа в колі потече струм і заряд на конденсаторі починає зменшуватись: $dq = -Idt$. Струм у колі буде визначатися різницею поточних напруг на конденсаторах U_1, U_2 і опором R : $I = \frac{U_1 - U_2}{R}$. Поточні напруги на конденсаторах пов'язані між собою: $U_0 = U_1 + U_2$. З іншого боку, зменшення заряду на першому конденсаторі можна записати як $dq = CdU_1$. Таким чином, отримуємо диференцій-

не рівняння $-\frac{2U_1 - U_0}{R} dt = CdU_1$. Розділимо змінні: $-\frac{dt}{RC} = \frac{dU_1}{2U_1 - U_0}$. Після інтегрування отримаємо $-\frac{2t}{RC} + const = \ln(2U_1 - U_0)$, звідки $2U_1 - U_0 = const \cdot \exp\left\{-\frac{2t}{RC}\right\}$.

В момент часу $t = 0$ $U_1 = U_0$. Звідси випливає, що невідома $const = U_0$. Тепер ми можемо дати відповіді на питання, поставлені в задачі:

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= \frac{2U_1 - U_0}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{2t}{RC}}; \\ \text{б) } Q &= \int_0^\infty I^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{4t}{RC}} dt = \frac{CU_0^2}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 4.10. Котушка радіуса $r = 25 \text{ см}$, що містить $l = 500 \text{ м}$ тонкого мідного дроту, обертається з кутовою швидкістю $\omega = 300 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ навколо своєї осі. Через ковзаючі контакти котушка підключена до балістичного гальванометра. Загальний опір всього кола $R = 21 \text{ Ом}$. Знайти питомий заряд носіїв струму в міді, якщо при різкому гальмуванні котушки через гальванометр пройшов заряд $q = 10 \text{ нКл}$.

Розв'язання. В результаті гальмування на носіїв струму починає діяти сила інерції. За другим законом Ньютона $F = ma = m \frac{v}{t} = m \frac{\omega r}{t}$. Тут v – швидкість руху носіїв, t – час гальмування (він же – час проходження струму через гальванометр). Заряди починають переміщуватись на один кінець дроту. Через надлишок зарядів на кінці утворюється електричне поле, що перешкоджає їх подальшому переміщенню. Частинки будуть рухатись до тих пір, поки кулонівська сила не врівноважить силу інерції: $m \frac{\omega r}{t} = eE$. Між кінцями дроту виникає різниця потенціалів і по колу

проходить струм: $m \frac{\omega r}{t} = e \frac{U}{l} = e \frac{IR}{l} = e \frac{qR}{lt}$. Звідси $\frac{e}{m} = \frac{\omega r l}{qR} = 1,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

З М І С Т

1. Електростатичне поле у вакуумі. Електростатичний потенціал	2
1.1. Короткі теоретичні відомості	2
1.2. Запитання та відповіді	5
1.3. Приклади розв'язування задач	14
2. Провідники та діелектрики в електричному полі	30
2.1. Короткі теоретичні відомості	30
2.3. Запитання та відповіді	31
2.4. Приклади розв'язування задач	43
3. Електрична ємність. Енергія електричного поля	59
3.1. Короткі теоретичні відомості	59
3.3. Запитання та відповіді	61
3.4. Приклади розв'язування задач	66
4. Постійний електричний струм	81
4.1. Короткі теоретичні відомості	81
4.2. Запитання та відповіді	82
4.3. Приклади розв'язування задач	87