

28.02.73

Сучасний
додручник



БІОМЕТРІЯ

Характеристики розподілів



1

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

**Л. О. АТРАМЕНТОВА
О. М. УТЄВСЬКА**

БІОМЕТРІЯ

I. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛІВ

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

НБ ПНУС



729762

Видавництво «Ранок»
Харків
2007

УДК 57.087.1
ББК 28в6
А 92

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1.4/18-Г-1479.1 від 06.09.07 р.)*

Рецензенти:

член-кореспондент НАН України, доктор біологічних наук, професор, завідувач відділу молекулярної генетики Інституту молекулярної біології і генетики НАН України С. С. Малюта;

доктор біологічних наук, професор, декан біологічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Л. І. Остапченко;

доктор медичних наук, професор, завідувач кафедри медичної біології Харківського державного медичного університету В. В. М'ясоєдов

Атраментова Л. О.

А 92 Біометрія. Ч. І. Характеристики розподілів: Підручник / Атраментова Л. О., Утєвська О. М. – Х.: Видавництво «Ранок», 2007. – 176 с.

ISBN 978-966-637-138-9 (повне зібрання)

ISBN 978-966-637-137-2 (частина І)

Підручник містить статистичні методи аналізу експериментальних даних біологічних наук. У підручнику наводяться сучасні методи біологічної статистики, включаючи параметричні й непараметричні тести, тести для корельованих і малих груп. Велика увага приділяється питанням планування експерименту й перевірки статистичних гіпотез. Кожний метод супроводжується прикладами з докладним описом техніки розрахунків. Додаток містить необхідні статистичні таблиці.

Підручник призначений для науковців, аспірантів і студентів біологічних, медичних і психологічних спеціальностей, може бути використаний викладачами вищих навчальних закладів.

прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
код 02125266

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

72 9762

Р. №

УДК 57.087.1
ББК 28в6

© Атраментова Л. О., Утєвська О. М., 2007
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2007

ЗАГАЛЬНА СТРУКТУРА ПІДРУЧНИКА

Частина І. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛІВ

1. Організація наукового дослідження

Планування експерименту є дуже важливим етапом наукового дослідження, на якому визначається схема дій, формуються групи експериментальних об'єктів, підбираються методи аналізу результатів.

Ця глава містить питання планування експерименту. Характеризується вибірковий метод дослідження, наводяться правила добору об'єктів у вибірку. Обговорюються умови проведення експерименту та фактори, що впливають на точність досліджень. Наводяться загальні правила та схеми вибору статистичних методів щодо аналізу даних.

2. Систематизація даних

Отримані в експерименті масиви даних необхідно систематизувати – наприклад, звести у таблиці або зобразити на графіках. Така форма подання даних робить результати наявними та надає можливість виявити особливості варіювання ознаки.

У даній главі розглядаються засоби систематизації експериментальних даних. Наводяться типи й правила побудови частотних розподілів та їх графіків як для кількісних, так і для якісних та рангових ознак.

3. Характеристики розподілів

Розподіли даних відображають характер мінливості ознаки. Для них визначаються середні величини та показники, що характеризують особливості варіації.

У даній главі характеризуються основні середні величини (середня арифметична, мода, медіана тощо) та показники варіації (стандартне відхилення, дисперсія тощо). Наводяться їхні формули та способи розрахунків.

4. Розподіли та ймовірності

Існують стандартні розподіли, які характеризують варіювання випадкових величин. Їх застосовують, зокрема, для опису мінливості біологічних ознак.

Глава містить базові поняття теорії ймовірностей. Характеризуються особливості розподілів – біноміального, нормального і Пуассона.

5. Оцінка генерального параметра

Випадковість формування вибірок приводить до того, що параметри генеральної сукупності можуть бути лише приблизно оцінені за вибірковими показниками. У даних оцінках користуються значенням статистичних похибок та надають інтервали, у межах яких з певною ймовірністю перебуває генеральний параметр.

У даній главі характеризується статистичні похибки. Пояснюється їх походження та обговорюються засоби їх зменшення. Розглядаються точкові та інтервальні засоби оцінки генеральних параметрів. Вводяться поняття довірчого інтервалу та довірчої ймовірності.

6. Статистичні гіпотези

З попередньої глави відомо, що оцінки генеральних параметрів за вибірковими показниками надаються лише з певною ймовірністю. Оцінка вірогідності результатів заснована на перевірці так званої нульової гіпотези – твердження про те, що причиною спостережуваного вибіркового результату є випадковість. Нульова гіпотеза перевіряється на істинність за допомогою статистичних критеріїв.

Характеризуються види статистичних гіпотез – нульова та альтернативна, наводиться алгоритм тестування нульової гіпотези. Вводяться поняття вірогідності та рівня значущості. Розглядається поняття статистичних критеріїв, наводяться їх особливості та правила застосування під час тестування нульової гіпотези.

7. Перевірка розподілу даних на відповідність до нормального закону

У залежності від характеру розподілу ознаки застосовуються різні методи статистичного аналізу: параметричні, якщо розподіл є нормальним, та непараметричні в інших випадках.

Глава містить методи перевірки розподілів різних обсягів даних на відповідність до нормального закону.

Частина II. ПОРІВНЯННЯ ГРУП І АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ

8. Порівняння даних з групою

Іноді серед експериментальних даних попадаються значення, які сильно відрізняються від інших. Вони можуть бути занадто великими чи занадто малими. У подальших розрахунках включення цих даних сильно змінює результат. Дослідник вирішує проблему – працювати з цими даними й надалі, чи визнати їх артефактом.

Дана глава містить методи, за допомогою яких можна визначити приналежність даних до певної статистичної сукупності.

9. Порівняння двох груп

Порівняння груп – найчастіший прийом статистичного аналізу. Порівнюються, наприклад, експериментальна та контрольна групи. За допомогою статистичних методів перевіряється нульова гіпотеза щодо приналежності обох груп до однієї генеральної сукупності.

Глава містить різні методи порівняння груп. Застосування цих методів залежить від деяких факторів, зокрема обсягу груп, залежності чи незалежності груп, характеру розподілу ознаки тощо. Методи дозволяють порівняти середні величини, показники варіації та ряди розподілів.

10. Кореляційний аналіз

Багато ознак варіюють спряжено, зміна однієї приводить до зміни іншої. В такому випадку за допомогою кореляційного аналізу підтверджують наявність зв'язку та оцінюють його напрямок та силу.

У даній главі наводяться методи, за допомогою яких встановлюється та оцінюється зв'язок між різними типами ознак – кількісними, ранговими та якісними.

11. Регресійний аналіз

Якщо встановлено наявність зв'язку між ознаками, за допомогою регресійного аналізу можна встановити форму цієї залежності та побудувати її графік.

Дана глава присвячена опису методів побудови ліній регресії.

12. Дисперсійний аналіз

Досить часто необхідно порівняти між собою три, чотири, п'ять чи більше груп. Іноді необхідно розглянути, як змінюється ознака під дією різних градацій певного фактора. Це можливо за допомогою дисперсійного аналізу.

У даній главі пояснюються основні принципи дисперсійного аналізу, наводяться параметричні та непараметричні методи однофакторного дисперсійного аналізу для кількісних та якісних ознак, надаються методи оцінки сили впливу фактора на ознаку.

13. Статистика та логіка

Дослідник робить цінні наукові висновки тоді, коли він не просто механічно використовує статистичні методи, а під час аналізу керується логікою та здоровим глуздом.

У даній главі наводяться приклади, на яких демонструється застосування логіки під час інтерпретації результатів статистичного аналізу.

Додаток. Таблиці статистичних критеріїв

Додаток містить 26 таблиць критичних значень статистичних критеріїв.

ЗМІСТ

Частина 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛІВ

Загальна структура підручника	3
Зміст	7
Передмова	10
Вступ	12
1. Організація наукового дослідження	16
1.1. Сукупності	16
Генеральні сукупності	16
Вибіркові сукупності	18
1.2. Методологія наукового дослідження	20
Експеримент і спостереження	20
Вибірковий метод дослідження	22
1.3. Умови проведення експерименту	32
Шифрування матеріалу. Сліпий експеримент	32
Однорідність експериментальних умов	33
1.4. Точність і похибки дослідження	36
Точність дослідження	36
Погрішності дослідження	38
1.5. Вибір статистичних методів	42
1.6. Контрольні завдання	46
2. Систематизація даних	48
2.1. Ознаки, дати	48
Якісні, кількісні та рангові ознаки	48
Дати, або спостереження	50
2.2. Частотний розподіл	51
Абсолютний частотний розподіл. Абсолютні частоти	51
Відносний частотний розподіл. Відносні частоти	52
Кумулятивний розподіл. Накопичені частоти	53
2.3. Ранжування	54
Правила ранжування	54
Ранжування двох вибірок у загальний ряд	55

2.4. Кількісна варіація	56
Варіаційний ряд	56
Графічне зображення кількісної варіації	59
2.5. Якісна варіація	65
Таблиці	65
Графічне зображення якісної варіації	66
2.6. Контрольні завдання	72
3. Характеристики розподілів	80
3.1. Середні величини	80
Середня арифметична	81
Зважена середня арифметична	82
Середня геометрична	83
Середня квадратична	86
Середня кубічна	89
Середня гармонійна	90
Мода	92
Медіана	93
3.2. Показники варіації	95
Межі та розмах варіації	96
Лінійне відхилення	97
Стандартне (середньоквадратичне) відхилення	97
Стандартне відхилення сумарної групи	99
Стандартне відхилення для якісних дат	99
Дисперсія	100
Коефіцієнт варіації	100
3.3. Контрольні завдання	101
4. Розподіли та ймовірності	104
4.1. Основні поняття теорії ймовірності	104
Події та ймовірності	104
Додавання і множення ймовірностей	106
4.2. Біноміальний розподіл	111
4.3. Нормальний розподіл	115
4.4. Розподіл Пуассона	120
4.5. Контрольні завдання	123
5. Оцінка генерального параметра	125
5.1. Статистичні похибки	125
Розподіл вибірових показників	126
Формули статистичних похибок	129
5.2. Оцінки генеральних параметрів	136

Точкові та інтервальні оцінки. Довірчий інтервал і довірча ймовірність	136
Формули довірчих інтервалів	138
Кутове перетворення часток	139
5.3. Контрольні завдання	143
6. Статистичні гіпотези	145
6.1. Статистичні гіпотези – нульова й альтернативна	145
Нульова гіпотеза	145
Альтернативна гіпотеза (неспрямована й спрямована)	146
Тестування нульових гіпотез	146
6.2. Вірогідність і рівень значущості	147
6.3. Статистичні критерії	149
Параметричні критерії	149
Непараметричні критерії	150
Таблиці статистичних критеріїв	151
Число ступенів свободи	152
Односторонній і двосторонній критерії	153
Потужність статистичного критерію	158
Умови, що впливають на потужність критерію	159
6.4. Контрольні завдання	163
7. Перевірка розподілу дат на відповідність до нормального закону	165
7.1. Характер розподілу дат і вибір статистичного методу	165
7.2. Великі вибірки (сотні дат)	166
Критерій Стюдента	167
Критичні значення показників асиметрії й ексцесу	170
7.3. Невеликі вибірки (до 50 дат)	171
Критичні значення показників асиметрії й ексцесу	171
Критерій χ^2	172
7.4. Вибірки менші ніж 30 дат	172
Критерій Шапіро–Уїлка	172
7.5. Контрольні завдання	174

ПЕРЕДМОВА

Статистичні методи вже понад сто років використовуються для аналізу даних біологічних експериментів і спостережень. Однак, незважаючи на достатню кількість посібників зі статистики й широкий вибір комп'ютерних програм, для переважної більшості дослідників-біологів статистика багато в чому залишається загадкою. Для багатьох наукових співробітників статистичний аналіз – це обов'язковий, але малозрозумілий етап на завершальній стадії оформлення роботи. А серед студентів досить поширена думка, що біологічна статистика є предметом складним й не дуже-то потрібним для біолога. Можливо, в основі таких уявлень лежать труднощі з математикою або ж недостатньо зрозуміле викладання предмета.

Цей підручник створювався нами з метою вирішити зазначені проблеми. Головним завданням було викласти базові концепції, принципи й методи статистики в максимально ясній і зрозумілій формі. У тексті підручника математичне обґрунтування методів є обмеженим, особливе значення надається їх практичному використанню. Основна увага приділяється питанням, що виникають у будь-якого дослідника, змушеного звернутися до статистики:

- Навіщо й на якому етапі дослідження необхідно звертатися до статистичного аналізу?
- Який статистичний метод відповідає цілям дослідження?
- Який статистичний критерій адекватний даним, що підлягають аналізу?
- Як із статистичних результатів зробити біологічні висновки?

Працюючи над підручником, ми не ставили за мету надати алгоритми виконання статистичних процедур у конкретних комп'ютерних програмах. Існує достатньо різноманітне програмне забезпечення зі статистики (STATA, SPSS, Statistica, Excel тощо), його використання має величезні переваги щодо швидкості й точності в порівнянні з ручними розрахунками. Однак користування цими програмами потребує володіння теоретичними основами статистики. Комп'ютер забезпечує технічний бік справи, але вибір методу й інтерпретація цифр, які програма видала як результат, залишаються за дослідником. Заповнення прогалини, що існує між можливостями комп'ютерних програм і станом знань з елементарної статистики у багатьох біологів, – призначення цього підручника. Засвоївши матеріал, наведений у підручнику, ви в кожній зі статистичних програм зустрінете знайомі терміни й легко зорієнтуєтесь у різноманітті запропонованих процедур.

Ми адресуємо цей підручник біологам, медикам, психологам, фармакологам – студентам, аспірантам, науковим співробітникам і викладачам – тим, котрі починають знайомство з цією дисципліною, а також досвідченим, і навіть таким, які не люблять математики або вважають, що ніколи не зрозуміють статистики.

Зараз ніхто не заперечує, що статистичний аналіз є необхідним в дослідницькій роботі. Між тим у багатьох експериментаторів склалися відношення до нього, як до чогось другорядного. Більшість дослідників-початківців вважають, що головне – виконати експеримент, одержати дані, котрі потім, як кажуть, «статистично обробити». Іншими словами, до статистики звертаються не тому, що почувають у ній потребу, що впливає із самої суті дослідження, а тому, що «так прийнято».

Науковець повинен бездоганно володіти спеціальними методиками дослідження. Але тільки цього для наукової роботи недостатньо. Мало одержати наукові факти, їх необхідно проаналізувати. Перший етап аналізу – аналіз статистичний. Саме статистичний аналіз, а не суб'єктивне відчуття, дає вченому право виключити з подальшого розгляду нестандартне спостереження, підібрати адекватний, а не «загально-прийнятий» критерій для перевірки запропонованої гіпотези. Часто буває так: зібрано великий експериментальний матеріал, а аналізувати, власне кажучи, нема чого. Є набір даних, зібраних без певної системи, з яких важко одержати скільки-небудь цінний у науковому відношенні результат, оскільки при формуванні порівнянних груп даних виявляється занадто мало. Так вийшло тому, що заздалегідь не був продуманий обсяг дослідження, і встановлена різниця виявилася статистично недостовірною. В інших випадках обсяг досліджень буває занадто великим. Це дає більш високу вірогідність, чим та, котру вважають достатньою. Здавалося б, нічого страшного в цьому немає: чим більше, тим краще. Однак існує принцип: менше не можна, а більше не потрібно. Не потрібно витратити час і матеріали на роботу, яка нічого

не додає до наукового висновку. Щоб розумно витратити ресурси, до статистики необхідно вдаватися не наприкінці дослідження, а ще на стадії планування роботи.

Типова помилка, що виявляється в багатьох роботах – використання неадекватного статистичного критерію. Це призводить до невірних статистичних, а потім і наукових, висновку й марним, якщо не шкідливим, практичним рекомендаціям. Вибір критерію також повинен бути обґрунтований за допомогою спеціальних дій, які є частиною загального наукового аналізу. Ось такий приклад. Мало хто з дослідників замислюється над результатами експерименту, у якому отримано, як кажуть, негативний результат: не виявлена різниця або зв'язок, не доведений вплив фактора, що вивчається. Зазвичай ці результати приймаються беззастережно на тій лише підставі, що отриманий показник є «статистично невірний». А може, у реальності різниця існує, але потужність критерію недостатня, щоб виявити її в експерименті? Але цей показник – потужність критерію – практично ніким з дослідників не оговорюється.

Не розуміючи значення статистики, деякі дослідники передають фактичний матеріал фахівцеві з «комп'ютерної обробки». Зазвичай це працівник з технічною освітою або просто «комп'ютерний геній». Не маючи уяви про сутність конкретної наукової проблеми, він виконує на комп'ютері розрахунки і передає замовникові безліч статистичних показників, а той, як правило, не знає, що з ними робити.

Взагалі слова «комп'ютерні програми» багатьох наукових працівників, що не мають математичної або технічної освіти, дуже вражають. Їм здається, що й інших теж. Написавши в науковій роботі фразу «дані статистично оброблені за допомогою такої-то комп'ютерної програми» (далі на 3–5 рядках позначається марка комп'ютера, його технічні характеристики, назва програми тощо), вони вважають своє завдання щодо інформування читача про статистичний аналіз виконаним.

Деякі беруться вирішувати проблему самостійно. Умови для цього існують. У продажі вдосталь посібників з використання комп'ютерних

програм. Але слід зазначити, що наявність програм створила у багатьох дослідників хибні надії. Вони вважають, що досить встановити таку програму на своєму комп'ютері, як проблеми зі статистичним аналізом вирішаться автоматично. Однак дива не буває. Трапляється, що програми роблять помилки, а дослідник, не маючи елементарних знань зі статистики, не бачить цього, навіть якщо на виході з'являється повний абсурд.

Усе більше стає науковців, які намагаються самостійно розібратися в комп'ютерних програмах, використовуючи спеціальні посібники. На жаль, теоретичні викладки, написані авторами програм, зазвичай недоступні для біологів. Результатом цього стала така ситуація: існують потужні комп'ютерні програми, а використовуються вони для найпростіших обчислень, які легко виконати за допомогою калькулятора. Але раніше, коли дослідник робив розрахунки на калькуляторах, він користувався формулами, звертався до таблиць статистичних критеріїв. Діставши комп'ютерну програму, дослідник віддаляється від розуміння того, що він робить і в усьому покладається на те, що видає машина.

Усе це сталося тому, що при підготовці біологів статистиці не приділялося достатньої уваги. Раніше на біологічних факультетах університетів викладався курс «Біометрія». Ця дисципліна відповідала зазначеній меті, якщо її викладали біологи. Зараз цю дисципліну замінено на «Математичні методи в біології з основами інформатики». Її викладають математики й програмісти. Це авторські курси й вони відбивають ціннісні установки викладача, що зазвичай далекий від проблем біології. Таким чином, склалася парадоксальна ситуація: існують величезні можливості комп'ютерної техніки, але немає можливості ефективно ними скористатися. Приступати до статистичного аналізу за допомогою комп'ютерних програм, не вміючи самостійно одержати необхідні статистичні показники, так само нерозумно, як сідати за кермо автомобіля, не знаючи правил дорожнього руху. Ми, університетські викладачі біології, як ніхто, розуміємо цю проблему. Постійно спілкуючись зі студентами, ми бачимо їхню безпорадність,

коли вони починають статистичний аналіз й опис результатів своїх досліджень. Все це спонукало нас створити посібник, корисний саме для тих, хто починає знайомство зі статистикою. Ми наповнили підручник завданнями, які дозволять студентам опанувати техніку статистичного аналізу й навчитися застосовувати його на практиці. Ми переконані, що без розуміння змісту статистичного аналізу неможливо ефективно використати сучасні комп'ютерні програми. Треба пам'ятати, що комп'ютер незамінний при наявності великої кількості показників у величезних вибірках. Без комп'ютера неможлива багатомірна статистика. Статистика, яку використовує більшість дослідників, є однією, але без її опанування неможливо зрозуміти й більш складні алгоритми.

ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. СУКУПНОСТІ

Статистичний аналіз застосовують при аналізі груп, починаючи з двох об'єктів. Будь-яка група незалежно від її розміру називається *сукупністю*. Найчастіше дослідники мають справу з об'єктами, які формують сукупності, але іноді науковий інтерес викликає не сукупність, а одиничний об'єкт; у таких дослідженнях статистичний аналіз не застосовується.

У статистиці розрізняють *генеральні* й *вибіркові* сукупності. Генеральна й вибірка сукупності співвідносяться як *ціле* та *частина*. Вибіркова сукупність є частиною генеральної сукупності, яка взята для дослідження за певними правилами.

ГЕНЕРАЛЬНІ СУКУПНОСТІ

Генеральна сукупність – загальна кількість організмів, об'єктів, подій або спостережень, які мають принаймні одну спільну рису. Залежно від особливостей дослідження в це поняття вкладається різний зміст. Генеральні сукупності можуть включати *реально існуючі об'єкти*. Тоді під генеральною сукупністю мають на увазі *абсолютно всі* об'єкти, які

можуть бути віднесені до категорії, що цікавить дослідника. Генеральною сукупністю може бути набір чисел, що описує дійсні або передбачувані властивості об'єктів. Якщо ті самі об'єкти вимірюються декілька разів у різних експериментальних умовах, то генеральними сукупностями є теоретично можливі набори дат, які одержані на одних і тих же фізичних об'єктах у різних умовах.

Генеральна сукупність може бути за чисельністю *скінченною* або *нескінченною*. У більшості випадків генеральна сукупність реально існуючих об'єктів є дуже великою, практично нескінченною. Така сукупність не може бути вивчена в повному обсязі. Розмір вибірки стосовно неї є нескінченно малим. Якщо генеральна сукупність хоча й велика, але все-таки складається із скінченного числа об'єктів, то можливо встановити, яку частку від неї становить вибірка. Іноді розмір генеральної сукупності може бути невеликим і доступним для *суцільного вивчення*.

Коло об'єктів, які належать генеральній сукупності, визначається задачею, що формулює дослідник. Наприклад, необхідно з'ясувати, чи впливає радіоактивне випромінювання на хромосоми людини, а якщо впливає, то яким чином. Ця наукова задача може бути вирішена за допомогою різних підходів. Можна провести експеримент з дії радіоактивного випромінювання на клітини людини в культурі (*in vitro*). Об'єктом дослідження в такому експерименті є окрема клітина зі своїми хромосомами. Генеральною сукупністю є всі клітини, які теоретично можна одержати при розмноженні культури. Таку генеральну сукупність можна вважати практично нескінченною.

Ця ж наукова задача може бути сформульована інакше: чи впливає радіоактивний фон на частоту хромосомних пошкоджень у працівників атомної електростанції? При такій постановці задачі об'єктами генеральної сукупності є не клітини, а люди. Така генеральна сукупність теж практично нескінченна, тому що висновки про дію випромінювання переносяться на всіх людей, які можуть працювати на атомній електростанції.

Ім'я Василя Стефаника
код 02125266
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

Можливий і такий варіант задачі: чи вплинув одноразовий витік радіоактивної речовини на хромосоми працівників атомної електро-станції? Генеральною сукупністю в такому дослідженні є співробітники станції, які перебували в зоні дії радіації. Обсяг цієї генеральної сукупності – кілька десятків або сотень людей. Таку генеральну сукупність можна вивчити повністю.

ВИБІРКОВІ СУКУПНОСТІ

У більшості випадків дослідник має справу з великими генеральними сукупностями. Повністю вивчити такі генеральні сукупності неможливо, і в цьому немає необхідності. Уявлення про генеральну сукупність можна скласти за її частиною – вибірковою сукупністю. *Вибіркова сукупність*, або *вибірка*, – це частина генеральної сукупності, що взята для дослідження. Відбір об'єктів з генеральної сукупності у вибірку роблять, дотримуючись *принципу випадковості*. При такому відборі кожен представник генеральної сукупності, незалежно від його індивідуальних особливостей, має рівний з усіма іншими її членами шанс потрапити до вибірки.

Із використанням вибірок вирішуються два види задач:

1. За вибіркою оцінюються невідомі параметри генеральної сукупності (перша модель генеральної сукупності).

2. З'ясовується, чи відповідає вибірка генеральній сукупності з відомими параметрами (друга модель генеральної сукупності).

Відповідно до цього виділяються два типи вибірок. Вибірка першого типу формується в тому випадку, коли об'єкти відбираються з *відомої генеральної сукупності з невідомими характеристиками*. Така вибірка вивчається для того, щоб скласти уявлення про всю генеральну сукупність. Наприклад, необхідно встановити схожість партії насіння, яким буде засіяно великі площі. Для цього у випадковому порядку відбирають певну кількість насіння (наприклад 200) і пророщують їх. Відсоток насіння (наприклад, 83 %) дає орієнтовне уявлення про

схожість всієї партії насіння. Схожість насіння враховують під час посіву: чим менша схожість, тим більше необхідно насіння.

Другий тип вибірок – це вибірки, походження яких невідоме (узяті з *невідомої генеральної сукупності*). Показники, отримані на такій вибірці, порівнюють з показниками відомої генеральної сукупності, й робиться висновок, чи належить досліджена вибірка до даної генеральної сукупності. Наприклад, є партія насіння із середньою масою насіння 517 мг. Необхідно вирішити, чи відноситься ця партія до сорту із середньою масою насіння 495 мг.

Найчастіше дослідники мають справу з декількома вибірками. Вибірки можуть бути *незалежними*; об'єкти, що складають такі вибірки, незалежні один від одного. Якщо з кожним об'єктом однієї вибірки співвідноситься певний об'єкт іншої вибірки, то такі вибірки є *залежними*; підбір об'єктів у другу вибірку визначається тим, який об'єкт потрапив у першу вибірку.

Параметри й статистики

Числові значення, що характеризують генеральну сукупність, називаються *генеральними параметрами*. Вони позначаються грецькими літерами, наприклад: μ – середня арифметична (див. п. 3.1), σ – стандартне відхилення (див. п. 3.2), ρ – коефіцієнт кореляції (див. п. 10.1). Числові значення, що характеризують вибірку, називаються *вибірковими характеристиками*, або *статистиками*. Їх позначають латинськими літерами: \bar{x} – середня арифметична, s – стандартне відхилення, r – коефіцієнт кореляції. Усі статистики мають статистичну похибку (див. п. 5.1). Параметри не мають статистичної похибки.

Що одержують при обчисленнях – параметри або статистики – залежить від того, яка сукупність досліджується – генеральна чи вибіркова. Як ми вже зазначали, генеральна сукупність реальних об'єктів, яку можна вивчити цілком, зустрічається рідко. Така ситуація можлива, наприклад, при вивченні ознак нової породи тварин, що налічує кілька десятків особин і тому доступна для суцільного вивчення. Якщо

вивчаються всі існуючі на певний момент особини породи, то вони складають генеральну сукупність, показники якої є параметрами й тому статистичної похибки не мають. Ситуацію можна представити інакше. Якщо нова порода буде розводиться, то існуючу на певний момент групу варто розглядати як вибірку практично необмеженої сукупності. У цьому випадку показники нині існуючої групи є статистиками і дають уявлення про майбутні покоління з деякою погрешністю, тому мають похибку вибіркової.

1.2. МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

ЕКСПЕРИМЕНТ І СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Існують два основні методи дослідження – експеримент і спостереження. *Спостереження* припускає вивчення об'єкта в природних умовах. Проводячи спостереження, випробувач не створює спеціальних умов, а особливим чином організує об'єкти та зіставляє їх. *Експеримент* – це вивчення об'єкта в штучно створених умовах. В експерименті дослідник контролює умови та керує фактором, що називається *незалежною змінною*. Експериментатор спостерігає, як під дією фактора змінюється ознака – *залежна змінна*.

Щоб організувати дослідження, випробувач повинен вирішити, що саме він має одержати. Від цього залежить кількість досліджуваного матеріалу та число груп, якими він представлений. Усі наукові проблеми зводяться до постановки типових задач. Однією з таких задач є аналіз розподілу ознаки. Для вирішення такої задачі досить однієї групи об'єктів. На одній групі проводиться також аналіз зв'язку між ознаками. Якщо стоїть задача з'ясувати, як впливає на ознаку деякий фактор, необхідно організувати принаймні дві групи об'єктів – контрольну й експериментальну (основну). Основна група підлягає експериментальним

впливам: її об'єкти піддаються опроміненню, дії хімічних мутагенів, лікарських препаратів, харчових добавок, фізичному навантаженню тощо. Після закінчення експерименту основна група порівнюється з контрольною, об'єкти якої не піддавалися впливам. Ступінь та характер розходжень між контрольною та основною групами дозволяють оцінити дію експериментальних факторів. Якщо вивчається дія кількох факторів (чи різних інтенсивностей одного фактора), число груп, відповідно, збільшується.

Формування груп порівняння – непросте завдання. Часто методичні труднощі викликає створення контрольної групи. Організація експерименту за схемою «до й після» дозволяє створити найбільш адекватний контроль: той самий об'єкт у дослідженні бере участь двічі: один раз – як контрольний (до впливу), другий раз як експериментальний (після впливу). Оскільки об'єкт ідентичний до самого себе, він є для себе найкращим контролем. Проводячи експерименти за схемою «до й після», дослідник може потрапити в пастку. Іноді сам вимір, що робиться до впливу фактора, змінює ознаку, тобто є неврахованим впливом. Наприклад, ми хотіли б з'ясувати, чи впливає вживання пива на швидкість бігу, і для цього декільком студентам запропонували пробігти дистанцію. Час першого пробігу прийняли за контроль. Після цього кожному студенту запропонували випити банку пива та попросили пробігтися ще раз. Виявилося, що час пробігу тієї ж дистанції в другий раз виявився більшим. Чи означає це, що пиво знижує швидкість бігу? Складно відповісти, чому студенти бігли повільніше – чи через пиво, чи втомилися після першого пробігу.

Іншою пасткою в експерименті «до й після» може бути час. Доки триває експеримент, у досліджуваних об'єктів можуть відбутися вікові зміни фізіологічних функцій, біохімічних процесів, поведінки. Особливо помітні вони у видів з коротким життєвим циклом. У людей одномісячна різниця у віці несуттєва (за винятком перших місяців життя), але для мишей, тривалість життя яких складає 1–1,5 року, це великий часовий проміжок, упродовж якого тварина може вирости, стати

статевозрілою чи постаріти. Розглянемо приклад, коли вивчається дія стимулятора на збільшення маси тіла. Перед початком експерименту молодих тварин зважують, а потім протягом декількох місяців вони одержують з їжею стимулятор зросту. Тварини набирають вагу. Треба, однак, мати на увазі, що тварини ростуть і додають у вазі в будь-якому випадку. У таких випадках зняти невизначеність допомагає контрольна група. Схема «контроль – дослід» більш відповідає подібним ситуаціям.

ВИБІРКОВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ

Оскільки вибірка – це частина генеральної сукупності, виникає ряд питань: наскільки правильно вона відображає генеральну сукупність; чи дорівнюють показники, обчислені для вибірки, показникам генеральної сукупності; з якою впевненістю висновки, отримані на вибірці, можна переносити на генеральну сукупність?

Жодна вибірка не може абсолютно точно характеризувати генеральну сукупність. При формуванні вибірки в неї випадково потрапляють ті чи інші об'єкти. Через випадкові причини різні вибірки, взяті з однієї й тієї ж сукупності, будуть розрізнятися, їхні характеристики не будуть цілком збігатися одна з одною та з генеральними параметрами. Тому судити про генеральні параметри за допомогою вибірки можна лише приблизно, поширювати висновки з вибірки на генеральну сукупність можна з певною ймовірністю.

З розбіжності вибіркових характеристик і генеральних параметрів виникає особливий вид похибок дослідження – статистичні, або стандартні, похибки (див. п. 5.1).

Принцип випадковості

Існують правила формування вибірок, яких слід дотримуватися під час добору об'єктів для дослідження. Основний принцип при формуванні вибірок – *випадковий добір*, або *добір за принципом*

випадковості. При такому доборі кожний представник генеральної сукупності, незалежно від його індивідуальних особливостей, має однаковий зі всіма іншими представниками генеральної сукупності шанс потрапити в досліджувану групу.

При формуванні вибірки не можна надавати перевагу яким-небудь об'єктам – найбільш типовим чи таким, що значно відрізняються від інших. При доборі типових об'єктів вилучаються межові форми, що приводить до занижених оцінок мінливості. Захоплення нестандартними об'єктами спотворить характер розподілу ознаки, може створити ілюзію бімодальності розподілу, не дасть уявлення про найбільш типовий об'єкт. Неправильно відбирати найкрасивіших, спокійних, тільки білих чи тільки сірих: тих, хто не тікає, не кусається тощо. Неправильно формувати вибірку так, щоб у ній була, наприклад, третина кращих, третина середніх і третина гірших об'єктів. Відбираючи об'єкти таким чином, ми маємо на увазі, що вже знаємо їхні властивості, хоча насправді ці властивості тільки треба вивчити.

Будь-яка особливість, будь-яка якість об'єкта може вплинути на досліджувану ознаку. Відомо, наприклад, що темперамент тварини впливає на результати експериментів, у яких вивчаються поведінкові чи нейрофізіологічні особливості. Здавалося б, темпераментом можна знехтувати, якщо вивчається вплив дієти на зростання маси. Однак в організмі все є взаємозалежним, і рухливість нервовопсихічних процесів впливає також на засвоєння їжі. Якщо для дослідження заради зручності відібрані найбільш спокійні тварини, то результат, що отриманий на такій вибірці, не характеризує всю групу, у якій є тварини з різним темпераментом.

На практиці дуже складно неупереджено підійти до добору об'єктів у вибірку. В ідеальному випадку добір повинен виглядати як жеребкування. У вибірку об'єкти повинні потрапляти навмання – так, ніби їх помістили в мішок і виймали із заплющеними очима. На практиці роблять так. Об'єкти дослідження нумерують, потім у випадковому порядку відбирають потрібну кількість. Можна також скористатися

таблицею випадкових чисел (див. табл. 1 Додатка). Необхідну кількість випадкових чисел можна скласти з наборів цифр, узятих відповідно до будь-якого принципу: навмання, зверху вниз, праворуч, ліворуч, підряд, через одну тощо. У залежності від числа об'єктів можна брати одну, дві перші, дві другі цифри.

Способи добору об'єктів у вибірку

Існують різні системи добору об'єктів з генеральної сукупності у вибірку. При випадковому *повторному доборі* об'єкти відбираються у вибірку, а після вивчення повертаються в генеральну сукупність. У такому випадку ті ж самі об'єкти можуть знову потрапити у вибірку. Наприклад, після того, як виловлені в природі та вивчені тварини випускаються на волю, вони можуть бути ще раз піймані та враховані.

При випадковому *безповторному доборі* об'єкти не повертаються в генеральну сукупність і не можуть повторно потрапити у вибірку. Так буває, якщо виловлених тварин мітять перед тим, як випустити на волю. Якщо тварина з міткою виловлюється повторно, її повертають у природу. Експерименти з лабораторними тваринами проводяться на вибірках, складених відповідно до принципу безповторного добору.

При *механічному доборі* генеральна сукупність поділяється на рівні частини, і з кожної частини випадковим чином відбирається потрібне число об'єктів. Наприклад, територія збирання зразків може бути механічно поділеною на ділянки рівної площі – квадрати, і з кожного квадрата береться один екземпляр. Можна з усієї групи, наприклад, зі списку студентів, відбирати кожного п'ятого, десятого, сотого тощо.

При *типовому пропорційному доборі* генеральна сукупність заздалегідь вивчається і розділяється на *типові групи* (наприклад, люди групуються за статтю, професією). Потім з кожної частини випадковим чином відбирається пропорційна її розмірам кількість об'єктів.

При *серійному доборі* генеральна сукупність поділяється на частини – *серії*. Потім випадковим чином відбираються певні серії та досліджуються повністю. Найчастіше серії виділяють за територіальним

принципом, використовуючи поділ на квадрати. Такий спосіб збирання матеріалу використовується, коли об'єкт рівномірно розподілений за ареалом.

Репрезентативна та зміщена вибірки

Вибірка, сформована випадковим чином, є *репрезентативною*, тобто представницькою. Така вибірка щонайкраще відображає генеральну сукупність. При невідповідному доборі об'єктів дослідження у вибірку вона буде *зміщеною*. Вибірка виявляється зміщеною, якщо об'єкти потрапили в неї не випадково, а відповідно до якого-небудь принципу (добір «середніх», добір «найбільш типових», добір «найбільших», тенденційність дослідника та ін.). Робота на зміщених вибірках призводить до неправильних висновків.

Рандомізація

У деяких дослідженнях відібрані у вибірку об'єкти необхідно розподіляти за окремими експериментальними групами. Таке групування необхідне, наприклад, при дослідженні впливу на ознаку декількох факторів. Розподіл об'єктів у порівнювані групи виконується випадковим чином. Ця процедура називається *рандомізацією* (від англ. *random* – випадковий). Рандомізацію проводять за допомогою жеребкування або таблиці випадкових чисел.

Обсяг вибірки

Скільки об'єктів потрібно вивчити, щоб одержати відповідь на поставлене наукове питання? Нерідко вважається, що чим більше, тим краще. Однак не всяка велика робота заслуговує схвалення. Обсяг дослідження обмежується часом і матеріальним забезпеченням. Витрати часу, реактивів, амортизація обладнання понад необхідності не виправдані. Якщо врахувати високу вартість багатьох сучасних методик, то нерозумне ставлення до кількості матеріалу стає економічною категорією,

а якщо дослідження пов'язане з використанням тварин, то й моральною. Робота, що передбачає вилучення організмів з природи, може завдати їй відчутної шкоди. Крім того, збільшення фактичного матеріалу після певної кількості істотно нічого не змінює. При плануванні числа об'єктів слід керуватися правилом: менше не можна, а більше не потрібно. Оптимальний обсяг вибірки можна оцінити за формулою:

$$n = \frac{t^2 s^2}{\Delta^2}, \quad (1.1)$$

де t – нормоване відхилення, значення якого визначається очікуваною ймовірністю безпомилкового прогнозу (див. 5.2); s – стандартне відхилення (визначається приблизно за розмахом варіації ознаки за формулою $R \approx 6s$) (див. п. 3.2); Δ – бажана точність дослідження, можливе відхилення \bar{x} від μ (задається дослідником).

Число об'єктів залежить від умов, що задаються. Серед цих умов – точність дослідження, ймовірність, з якою хочуть зробити прогноз, потужність методу та ін. Об'єктів у вибірці має бути досить багато, щоб за ними сформувати правильне уявлення про генеральну сукупність. Чим більше об'єктів, тим менше статистична похибка, але після досягнення визначеного обсягу подальше збільшення вибірки не чинить істотного впливу на результат.

Число основних і вимірюваних об'єктів

Іноді в дослідження включається ознака з множинною характеристикою (наприклад, характеристика дерев за масою плодів). Планують число основних об'єктів (дерев) і число вимірюваних об'єктів (загальне число плодів). Числу основних об'єктів відповідає число вторинних дат, а числу вимірюваних об'єктів – число первинних дат. Співвідношення кількості первинних і вторинних дат в ідеальному випадку повинне виражатися формулою:

$$n = \sqrt{\sum n_i}, \quad (1.2)$$

де n – кількість основних об'єктів (вторинних дат), n_i – кількість вимірюваних об'єктів (первинних дат) для i -го основного об'єкта.

Бувають ситуації, коли ця умова не може бути виконаною. Наприклад, немає достатньої кількості основних об'єктів (дерев), чи з одного основного об'єкта неможливо одержати необхідну кількість вимірюваних об'єктів (плодів). У такому випадку збільшують число вимірів з одного об'єкта чи збільшують число об'єктів так, щоб число первинних дат (плодів) відповідало запланованому:

$$\sum n_i = np_i, \quad (1.3)$$

де $\sum n_i$ – загальна кількість первинних дат, n – кількість основних об'єктів, n_i – кількість об'єктів, що вимірювані на одному основному об'єкті.

Формування порівнянних вибірок

У деяких дослідженнях потрібно сформувати однорідну групу досліджуваних об'єктів. Так, наприклад, вивчаючи вплив різних доз мутагену, експериментатори підбирають тварин одного виду, породи, статі, віку, які утримувалися в однакових умовах. Усі групи, що використовуються в експерименті, мають бути *порівнянними*, тобто рівноцінними. Неправильно, наприклад, в основну групу набирати людей із зайвою вагою, а в контрольну – з нормальною, оскільки ще до експерименту вони вже належали до різних генеральних сукупностей. Оцінюючи ефективність методик навчання, неправильно в одну групу набрати дітей з високими IQ, а в іншу – з низькими. Необхідно по можливості вирівняти в групах всі характеристики, що можуть вплинути на досліджувану ознаку.

Вирівнювання можна здійснити у різний спосіб. Припустімо, що вивчається залежність певної ознаки від статі. При цьому можна сформувати групу хлопчиків і групу дівчаток одного віку, наприклад 10-річних. Групи можуть бути неоднорідними за віком, але у цьому випадку необхідно забезпечити однакове співвідношення віку (наприклад, половина 9-річних, третина 10-річних, інші 11-річні). Непорівнянні групи 9-річних хлопчиків та 11-річних дівчаток чи групи з неоднаковими пропорціями дітей різного віку.

Вивчення фізіологічних функцій у хворих повинно проводитися на фоні контрольної групи, що складається зі здорових людей. За всіма показниками, крім стану здоров'я, групи не повинні розрізнятися. У реальності ця умова практично нездійсненна: до групи хворих зазвичай потрапляють люди різного віку, тому що зібрати досить велику однорікову групу часто неможливо. Контрольну групу здорових людей необхідно сформувати так, щоб вона за середнім віком і різноманітністю віку відповідала основній групі. В ідеальному випадку контрольну групу слід набрати так, щоб кожному хворому відповідала здорова людина того ж віку, статі, національності, соціального стану тощо.

Після того, як вибірки сформовані, необхідно навести статистичні докази їхньої порівняльності. Гіпотеза про рівність середніх показників в основній і контрольній групах перевіряється за допомогою критерію Стюдента (див. п. 9.2), гіпотеза про рівність дисперсій – за допомогою критерію Фішера (див. п. 9.2). Якщо порівнюються декілька груп, порівняння проводять за допомогою однофакторного дисперсійного аналізу (див. п. 12.2). Можна розбити групи на вікові класи та перевірити рівність рядів розподілів за допомогою критерію χ^2 (див. п. 9.5). Якщо в результаті перевірки виявиться, що групи розрізняються за віком (статтю, національністю тощо), їх вирівнюють. Для цього, залежно від ситуації, додають відсутнє або вилучають зайве.

Часовий тренд

Вивчаючи об'єкт, необхідно враховувати часові тенденції. Наприклад, відомо, що сучасні діти фізіологічно відрізняються від своїх однолітків, що жили півстоліття тому. Що відбувається, якщо при формуванні груп не враховується *часовий тренд*?

Розглянемо наступний приклад. Дослідник звернувся до медичної документації, у якій зафіксовані дані, отримані при обстеженні гіпертоніків за останні двадцять років. Він вирішує порівняти показники хворих людей з аналогічними показниками здорових людей – і за короткий термін (два місяці) формує контрольну групу з таким же

розподілом за віком, статтю та іншими ознаками. Проте такі групи не можуть вважатися порівняними. Інформація про основну групу збиралася протягом тривалого періоду, її представники жили в інших умовах. За цей час могли змінитися навколишнє середовище, тип харчування, соціальні умови, етнічний склад населення (рис. 1.1). *Помилкою в такій організації дослідження є роз'єднаність у часі формування основної та контрольної груп.*

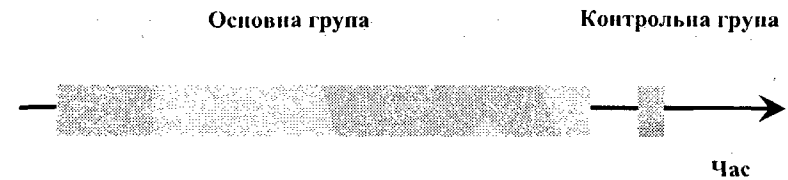


Рис. 1.1. Часовий тренд

Які ще похибки може внести в дослідження часовий тренд? За час дослідження може підвищитися кваліфікація експериментатора, методи стати більш досконалішими, прилади – більш точними. Якщо основна група набиралася протягом багатьох років у міру надходження хворих у лікувальні установи, то не виключено, що пацієнти, які були вивчені на початку експерименту, показали б зовсім інші результати, якби надійшли в його кінці.

Учений завжди повинен пам'ятати про обставини *місця та часу*. Виявлені в дослідженні закономірності справедливі *тут і тепер*, але їх може не бути *там і тоді*. Щоб мінливі умови не позначалися на чистоті дослідження, *добір об'єктів у порівнювані групи має проводитися одночасно*.

Співвідношення обсягів вибірок

Порівнювані вибірки можуть бути як рівновеликими, так і різновеликими. Однією з розповсюджених помилок є переконання, що обсяг

контрольної групи може бути значно меншим, ніж обсяг основної. Це помилкове переконання, очевидно, має психологічну основу. Експериментальна група найчастіше називається «основною», і в цьому терміні вже ніби закладається її першорядність. Стосовно основної групи група порівняння (контрольна) логічно уявляється менш важливою, ніби другорядною, тому здається, що її розмір не настільки важливий, як розмір основної групи.

Розглянемо, до чого може призвести зневаження розміром контрольною групи. На рис. 1.2 зображено шкалу досліджуваної кількісної ознаки. Середні значення ознаки в основній (О) і контрольній (К) групах відстоять на шкалі досить відчутно (а).

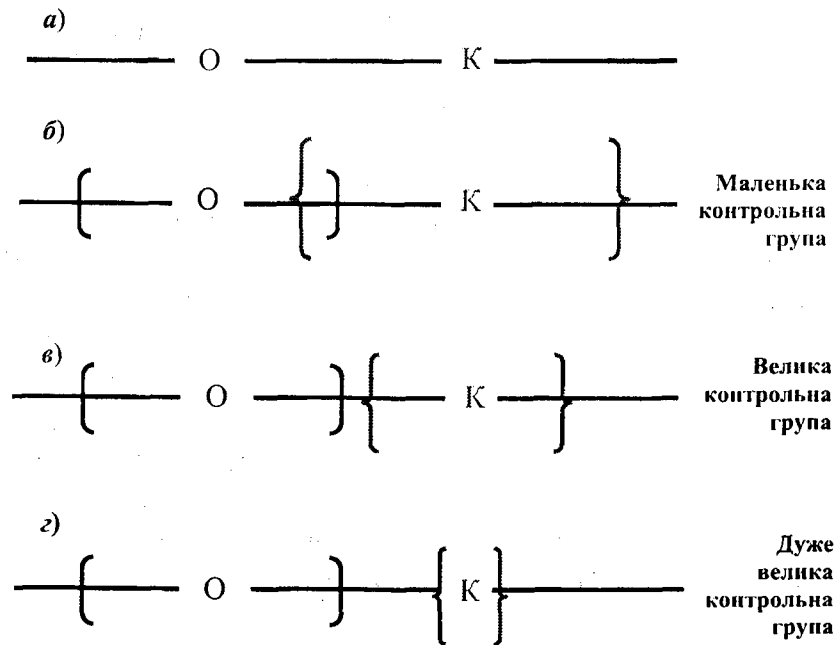


Рис. 1.2. Співвідношення обсягів основної та контрольної груп

Вибіркові показники мають статистичні похибки (див. п. 5.1). Зазначимо їх дужками (круглі – основна група, фігурні – контрольна). Дані, отримані на нечисленній вибірці, мають велику статистичну похибку (б), що перекриває різницю між середніми значеннями. При збільшенні обсягу контрольною групи статистична похибка зменшується (в, г), різниця стає достовірною. Цей приклад показує, що контрольна група статистично рівнозначна основній. Якщо зібрати контрольну групу легше, ніж основну, слід скористатися цим для того, щоб зменшити похибку різниці та підвищити потужність статистичного критерію.

Залежні й незалежні вибірки

Порівнювані вибірки, об'єкти яких випадковим чином і незалежно взяті з генеральної сукупності, є *незалежними*. Незалежні вибірки створюються при рандомізації, коли група об'єктів, що у випадковому порядку вилучена з генеральної сукупності, у випадковому порядку розподіляється за групами порівняння.

У деяких дослідженнях об'єкти порівнюваних груп виявляються якимось чином зв'язаними. Якщо кожному об'єкту однієї вибірки відповідає певний об'єкт іншої вибірки, то вибірки є *залежними*. Залежними є порівнювані групи в експериментах «до й після», групи, у які для порівняльності включені попарно зв'язані об'єкти – родичі, представники тієї ж статі, віку, національності, професії та ін. Залежні вибірки завжди збігаються за обсягом.

Дані у залежних вибірках корельовані. Ступінь корельованості оцінюється приблизно. Проте в деяких випадках можна дати кількісну оцінку зв'язаності вибірок. Вибірки «батьки – сини» (коефіцієнт спорідненості 0,5) корельовані сильніше, ніж вибірки «діди – онуки» (коефіцієнт спорідненості – 0,25). Вибірки «мати – нащадок», відповідно до законів генетики (цитоплазматична спадковість, материнський ефект), зв'язані трохи сильніше, ніж вибірки «батько – нащадок». Монозиготні близнюки, які розподілені в різні групи, демонструють високу кореляцію (коефіцієнт спорідненості 1).

Максимально корельованими вибірками є набори дат, отримані при обстеженні тих самих об'єктів у різних умовах: така ситуація типова для експериментів «до й після».

Використання корельованих вибірок підвищує потужність статистичного критерію. Чим більше корелюють вибірки, тим вища потужність критерію.

1.3. УМОВИ ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

ШИФРУВАННЯ МАТЕРІАЛУ. СЛІПІЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

У науці нерідко зустрічаються ситуації, коли досліднику небайдужий результат експерименту. Буває, що вчений, знайшовши в першому експерименті якусь тенденцію, настільки підпадає під її вплив, що в повторних експериментах мимоволі прагне побачити ту ж саму закономірність. Цілком можливо, що виявлена тенденція – усього лише випадковість (як це часто буває у вибіркових дослідженнях), однак спрямованість дослідника може вільно чи мимоволі вплинути на кінцевий результат. Щоб уникнути тенденційності, роботу треба вести на зашифрованому матеріалі – проводити *сліпий експеримент*.

Шифрування – це кодування зразків таким чином, щоб за кодом не можна було визначити, до якої групи вони належать. Шифрування та розшифрування матеріалу робить керівник дослідження. Записи з розшифруванням зберігаються в таємниці до кінця експерименту. Виконавець, знімаючи показання, не знає, до якої групи – контрольної чи основної – належить об'єкт, що вивчається. Після того, як усі виміри виконані та занесені в лабораторний журнал, проводиться розшифрування. У залежності від специфіки роботи, експериментальний матеріал може бути зашифрований і розшифрований на різних етапах

дослідження. Шифрування матеріалу не має сенсу в дослідженнях, що не потребують порівняння, тобто проводяться на одній групі.

Сліпий експеримент застосовують у суперечних ситуаціях, коли треба ще раз перевірити результат, чи коли виникає сумнів в об'єктивності отриманих даних. Деякі вчені взагалі не беруть до уваги результати, отримані на незашифрованому матеріалі. Щоб не виникало непорозумінь, скрізь, де можливо, необхідно працювати на зашифрованому матеріалі.

ОДНОРІДНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ УМОВ

Для того щоб групи, що вивчаються, були порівнянними, вхідні в них об'єкти повинні утримуватися в однакових умовах. Неоднакові умови – це ще один фактор, що впливає на результати експерименту. Цей фактор, якщо він не враховується, приводить до методичних похибок дослідження. Наприклад, температура сильно впливає на рівень обміну речовин та фізичну активність холонокровних тварин, водний режим і рівень освітленості – на будь-які характеристики рослин. Відомо, що реакція пацюків, мишей та деяких інших лабораторних тварин на подразники (отрути, лікарські препарати) сильно залежить від групового чи ізолизованого утримання. Токсичні й смертельні дози для тварин при груповому утримуванні в десятки разів відрізняються від доз того ж препарату, уведених тваринам тієї ж категорії, які утримуються ізоляційно. Неоднакові умови можуть спотворити результати експериментів аж до зворотних.

Наведемо такий приклад. У дитячих притулках Німеччини після Другої світової війни проводилися спостереження над характером харчування та збільшенням у вазі. Всупереч здоровому глузду та очікуванням експериментаторів, діти з притулку з посиленням харчуванням набирали вагу гірше своїх однолітків із притулку зі звичайним раціоном. При більш докладному вивченні обставин з'ясувалося, що

вихователка з першого притулку була дуже сувора і застосовувала щодо дітей жорстокі заходи. Постійний страх і психологічний дискомфорт зводили нанівець усі позитивні боки посиленого харчування.

Істотний вплив на результати досліджень можуть чинити *біологічні ритми* – періодичні коливання біологічних показників. Яскраво виражені, наприклад, добові й річні ритми, періоди яких у природних умовах синхронні з геофізичними циклами – зміною дня та ночі й пори року. У різних фазах періоду одні й ті самі показники можуть істотно розрізнятися. Дослідження контрольної та експериментальної груп, що проводиться в різних фазах циклу, може бути джерелом неправильних висновків щодо ознаки, якій властиві циклічні коливання.

Річну ритмічність мають багато видів біологічної активності. Протягом року міняються рівень основного обміну тварин, швидкість росту, маса тіла. Відбувається зміна шерсті чи оперення, міняються колір і якість хутра. У комах фотоперіодично регулюється поява сезонних морф, співвідношення статі, чутливість до інсектицидів, відновлення після теплового стресу. Найбільш яскравий прояв річної ритмічності – розмноження. У зв'язку з ним змінюється активність статевих залоз, зрушується рівень статевих гормонів, відбуваються морфологічні зміни гонад. Закономірним коливанням протягом року піддаються психічні функції людини, у тому числі й емоційні стани.

У польових і лабораторних умовах часто описуються ритми добової активності, під якою мається на увазі не тільки локомоторна, але й фізіологічна активність (інтенсивність обміну, споживання кисню, температура тіла, електроенцефалограма). З добовим ритмом сну пов'язані цикли багатьох гормонів. Добові ритми можуть впливати на процес навчання. Виконання лабораторними тваринами завдань, що вимагають навчання, змінюється в залежності від фази світлового циклу. Протягом доби змінюються пороги чутливості, мотивація, здатність до збереження інформації. Вплив лікарських препаратів залежить від часу їхнього введення щодо ендогенних гормональних і нейрохімічних ритмів.

В експериментах «контроль–дослід» експериментальна група піддається не тільки дії основного експериментального фактора, але й додатковим подразникам – наприклад, стресам від ін'єкцій, операцій, підвищеної уваги. Для вирівнювання умов з об'єктами контрольної групи слід проробляти ті ж маніпуляції, що й з об'єктами експериментальної групи, але за винятком дії досліджуваного фактора. Наприклад, приймання плацебо пацієнтами контрольної групи служить для вирівнювання психологічних умов. Якщо члени основної групи одержують таблетки з лікарським препаратом (харчовою добавкою, речовиною для зниження ваги тощо), то контрольна група теж повинна уживати таблетки, але з нейтральною речовиною (крейдою, глюкозою). При цьому учасники експерименту не знають, до якої групи вони належать і які препарати вживають. Знання може породити додаткову мотивацію, скажімо, до зниження ваги, або навпаки. При цьому експериментатор не повинен знати про те, хто з учасників експерименту належить до контрольної, а хто – до експериментальної групи і яка партія таблеток містить активну речовину. Якщо експериментатор інформований про схему експерименту, він може мимоволі заохочувати тих, хто одержує активну речовину.

Дослідження, у якому не інформовані ані випробувані, ані випробувач, називається *двічі сліпим експериментом*.

На результат дослідження може вплинути взаємодія дослідника й об'єкта дослідження. Наведемо класичний приклад. Він стосується проблеми, що довго хвилювала вчених, – спадкування набутих ознак. Існує погляд, що умовні рефлексі, що формуються у батьків, можуть успадковуватися нащадками. Перша спроба експериментальної перевірки цієї ідеї належить відомому російському фізіологу І. П. Павлову. Ідея цих експериментів полягала в наступному. У мишей шляхом багаторазових повторень виробляли умовний рефлекс – бігти до годівниці за дзвоником. Від навчених мишей одержували потомство і з'ясовували, як швидко (за скільки повторень) виробляється рефлекс у нащадків. Результати показували, що в нащадків навчених мишей рефлекс

виробляється швидше, ніж у батьків. Із цих експериментів випливало, що умовний рефлекс перетворюється в безумовний, тобто з неспадкоємного стає спадкоємним. Однак ретельний аналіз показав, що в процесі цих дослідів експериментатор удосконалював методику навчання мишей і в нащадків рефлекс вироблявся швидше тому, що навчання ставало більш ефективним. У міру удосконалювання навичок експериментатора послідовні покоління мишей виявлялися в різних експериментальних умовах і, відповідно, демонстрували різні результати.

1.4. ТОЧНІСТЬ І ПОХИБКИ ДОСЛІДЖЕННЯ

ТОЧНІСТЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

У науці є поняття *точності дослідження*. До нього належать такі складові: *точність вимірів*, *обчислень* і *статистична точність*. *Точність вимірів* обумовлена методикою, технічними засобами, цілями дослідження. Точність вимірів кількісних ознак задається особливістю ознаки та здоровим глуздом. У залежності від приладу й характеру об'єкта, маса може бути обмірювана з точністю до кілограма, грама, міліграма. Точність виміру не можна змінити, не змінюючи устаткування й методики, але вона визначається не тільки якістю приладів, але й кваліфікацією виконавця. Виміри проводять з точністю на один розряд більше, ніж потрібно подати в підсумкових таблицях.

Точність обчислень. При обчисленні середніх величин та інших статистичних показників можна одержати числа з будь-якою кількістю знаків після коми, однак не має рації враховувати, наприклад, п'яту цифру після коми, якщо прилад, на якому знімають показання, забезпечує точність до другого знака. Роблячи математичні розрахунки проміжних показників, слід домагатися точності на один знак більшої,

ніж планується в підсумку. Після виконання всіх розрахунків результати округляють за прийнятими правилами та заносять у підсумкові таблиці.

Статистична точність не пов'язана ні з розмірністю одиниць виміру, ні з точністю обчислень. Вона обумовлена двома факторами – ступенем різноманітності досліджуваного об'єкта й обсягом дослідження. Статистична точність дослідження перебуває в прямій залежності від кількості вивчених об'єктів і в зворотній – від ступеня їхнього різноманіття.

Наближені числа

Найчастіше дослідник оперує наближеними й округленими числами, що виходять у результаті математичних операцій. Ділення, знаходження коренів і логарифмів дають наближені числа. Щоб уникнути помилок, при записуванні таких чисел треба користуватися спеціальними правилами. Числа, які заносять в облікову документацію, повинні відповідати точності, що прийнята при вимірюванні. Якщо виміри роблять з точністю до одного десяткового знака, то результати не можна записувати з різною точністю: 7,3; 8; 5,786; 4,32. Правильний запис вимірювань виглядає так: 7,3; 8,0; 5,8; 4,3.

Наближені числа округляють у такий спосіб. Якщо за останньою цифрою, що зберігається, з'являються цифри 0, 1, 2, 3, 4, вони відкидаються – це *відбувається округлення з нестачею*. Якщо за останньою цифрою, що зберігається, з'являються цифри 5, 6, 7, 8, 9, то остання цифра збільшується на одиницю – це *округлення з надлишком*.

Для більшої точності округлення можна використовувати таке правило: якщо за останньою цифрою, що зберігається, з'являється цифра 5 (з нулями або без нулів), то округлення здійснюється з нестачею, за умови, що цифра, яка зберігається, *парна*. Якщо цифра, що зберігається, *непарна*, то округлення здійснюється з надлишком. Наприклад, числа 0,385 і 0,375 до двох десяткових знаків округляють так: 0,38 і 0,38.

ПОГРІШНОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Усе різноманіття похибок, що виникають у дослідницькій роботі, розділяється на дві категорії: *статистичні похибки* та *методичні помилки*. Перші можуть бути враховані за допомогою статистичних методів, другі не можуть бути виявлені статистикою.

Статистичні похибки

При статистичному аналізі з'являються дві категорії похибок: похибки вибіркової (статистичні, чи стандартні) і похибки, пов'язані з перевіркою статистичних гіпотез (похибки першого та другого роду). Аналізу цих похибок присвячені відповідні розділи книги. Похибки вибіркової неминучі при будь-якій роботі на вибірках, тому вони й мають таку назву. Похибки вибіркової не виникають, якщо досліджується не вибірка, а вся генеральна сукупність. Похибки, що враховуються статистичним аналізом, об'єктивні, не залежать від особистості працівника, а визначаються умовами дослідження – характером вибірки, природою досліджуваного матеріалу, факторами, що діють на об'єкт.

Методичні помилки

Методичні помилки мають різне походження, але їх об'єднує те, що вони не виявляються статистичним аналізом. Джерела *методичних помилок* – недбалість, неухильність, порушення методики, використання несправних приладів, недоброякісних реактивів, недотримання умов дослідження, тенденційність та ін. Методичну помилку неможливо врахувати при аналізі результатів. Застосування статистики не в змозі усунути методичні помилки. Якщо при дослідженні були допущені методичні помилки, результати будуть перекрученими, а висновки – неправильними. Уникнути методичних помилок можна тільки суворим

дотриманням усіх вимог у роботі. Якщо дослідник знайшов, що при проведенні роботи була допущена методична помилка, він не повинен використовувати отримані дані.

Помилки, пов'язані з похибками при формуванні вибірок, виникають, якщо групи непорівнянні за показниками, що можуть впливати на досліджувану ознаку, – за статтю, віком, умовами дослідження та ін. Уникнути таких помилок допоможе знання особливостей об'єкта, широкі освіченість дослідника.

Помилки типовості найчастіше роблять дослідники-початківці, або вони виникають на початкових етапах роботи з недостатньо вивченим об'єктом. Цей тип помилки виникає, коли об'єкти потрапляють у вибірку з генеральної сукупності не у випадковому порядку, а якимось іншим чином. Наприклад, якась частина генеральної сукупності має менший шанс потрапити у вибірку: у людей, які мешкають у будинках інвалідів, практично немає шансів потрапити у вибірку соціолога, якщо соціологічне опитування ведеться на вулицях чи підприємствах.

Помилки точності виникають при первинній реєстрації фактів, коли дослідник користується погано відрегульованими чи зіпсованими приладами. Помилки можуть виникати, якщо реєстрація ведеться з недостатньою точністю, при грубому округленні показників.

Помилки уваги – це плутанина з написами.

Особливий тип помилок – *тенденційність*. Вона виявляється в тому, що експериментатор віддає перевагу бажаним результатам і зневажає небажаними. Є два види тенденційності – неусвідомлена й усвідомлена. У першому випадку дослідник може бути так захоплений ідеєю, що бачить тільки те, що хоче. Щоб уникнути помилок, пов'язаних з неусвідомленою тенденційністю, необхідно працювати на зашифрованому матеріалі. В іншому випадку дослідник розуміє, що робить, і готовий на все, щоб одержати результати, що підтверджують його теорію. Історичний приклад усвідомленої тенденційності – це теорія Т. Д. Лисенка про спадкування набутих ознак, що багато років процвітала в СРСР. Теорія була помилковою, але одержала багато експериментальних «підтверджень».

Лисенківщина призвела до репресій і загибелі багатьох талановитих учених, що доводили її неспроможність. Боротися з навмисною тенденційністю можна створенням клімату нетерпимості до таких явищ.

Помилки запису

Перш ніж розпочати статистичний аналіз наукових даних, їх треба уважно переглянути. Це робиться для того, щоб виявити можливі помилки в записах. Помилкова дата може спотворити результат, особливо якщо вибірка невелика за чисельністю. Щоб помітити помилку, часто досить здорового глузду. Якщо об'єкт описується декількома показниками, то сполучення несумісних значень може вказувати на помилку в записі. Наприклад, у записі, зробленому в 2000 році, у графах про рік народження та вік чоловіка стоять числа 1970 і 40 (Табл. 1.1). Зрозуміло, що вони несумісні – чоловіку або 30 років, або він народився в 1960 році. Якщо уточнити інформацію не можливо (наприклад, дослідження було анонімним), то всю інформацію про згаданий об'єкт необхідно вилучити з аналізу.

Таблиця 1.1. Зразок помилки у записі

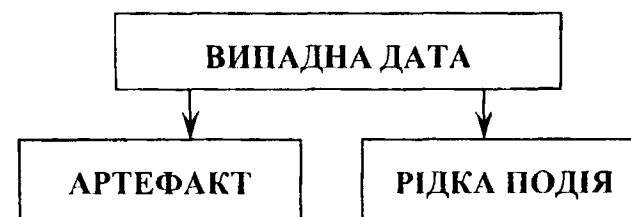
Прізвище	Дата обстеження	Рік народження	Повне число років
Іванов Д. С.	11.03.2000	1970	40

Випадні дати

Випадна дата може бути *артефактом* (штучною датою) або *рідкою подією* (див. п. 8). Артефакти, безперечно, вилучаються з аналізу, а рідкі події піддаються більш детальному аналізу. До артефактів можуть призвести збої в роботі приладу, неправильне вимірювання, неправильний запис, неоднорідність вибірки та інші причини, що призводять до *методичних помилок*. Наприклад, маємо дані про масу немовлят: 3,7;

2,8; 2,9; 34; 4,1 кг. Підозрілою є четверта дата: немовля не може важити 34 кг. Найімовірніше, це просто помилка в записі – не поставлено кому між цифрами 3 і 4.

Але не завжди артефакти очевидні, і тоді звертаються до статистики: дату, що занадто відхиляється, порівнюють з іншими датами, що не викликають сумніву. Ця процедура називається *перевіркою випадних дат* (див. п. 8). За допомогою статистичного аналізу можна показати, що випадна дата, настільки відрізняється від інших дат групи, що виникає необхідність віднести її до іншої категорії об'єктів. Однак за допомогою статистики неможливо з'ясувати природу відхилення дати – це артефакт чи рідка подія. Якщо встановлено, що випадна дата є артефактом, її виключають з аналізу.



Не всяку випадну дату слід вилучати з розгляду. Деякі випадання можуть стати матеріалом для самостійного дослідження. Наприклад, час згортання крові у хворого на гемофілію на фоні нормальних показників буде виглядати випадною датою, але не артефактом, а рідкою подією. Причиною того, що кров не згортається, може бути те, що її помилково помістили в пробірку з антикоагулянтном. Дата, що характеризує таку кров, буде артефактом. Однак артефакти не завжди виглядають як випадні дати, помилка виміру цілком може укладатися в наявний ряд чисел.

Нетипові варіанти можна аналізувати окремо та шукати причини, що викликали їхню появу. Може виявитися, що випадна дата – результат якоїсь рідкої і ще невідомої події. Сумнівна дата може підказати досліднику яку-небудь ідею, яка буде поясненою після нових наукових відкриттів.

1.5. ВИБІР СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДІВ

Вибір методу статистичного аналізу має бути науково обґрунтований. Застосування неадекватного методу знецінює наукові висновки навіть на основі даних, що отримані найбільш досконалими методами. Тип застосовуваного статистичного аналізу залежить від завдань дослідження та характеру матеріалу, що вивчається.

Якщо у завдання дослідження входить тільки спостереження об'єкта, достатнім є використання *описової статистики*. Наприклад, для опису метричних характеристик нової породи, щільності деревостою при щорічному моніторингу, національного складу населення тощо розраховуються середні величини чи відсотки, оцінюються мінімальність і характер розподілу ознак.

Як правило, дослідження не обмежується простим описом. Якщо в одній сукупності вивчаються кілька ознак, то може виникнути необхідність пошуку зв'язків між ними. Чи залежить площа сухостою в лісовому масиві від чисельності жуків-короїдів? Чи пов'язаний ріст із характером харчування? Чи пов'язані національний склад населення та захворюваність? Для пошуку зв'язку і встановлення залежностей між ознаками використовуються *кореляційний аналіз* або *аналіз таблиць спряженості*. Якщо залежність статистично доведена, то шляхом *регресійного аналізу* можна встановити її форму за допомогою спеціального рівняння.

Якщо дослідження проводять на декількох групах, то доводиться робити зіставлення. При порівнянні двох груп використовуються *парні критерії порівняння*. Для порівняння більше двох груп застосовується *дисперсійний аналіз*. Дисперсійний аналіз також дозволяє оцінити вірогідність впливу на ознаку одного чи більше факторів.

При виборі методів статистичного аналізу даних необхідно враховувати характер матеріалу – тип генеральної сукупності, її обсяг, обсяг вибірки та його співвідношення з обсягом генеральної сукупності, характер ознаки, розподіл ознаки в генеральній сукупності, співвідношення вибірок, структуру даних.

Таблиця 1.2. Логіка наукового дослідження

Зміст	Приклад
Висувається наукова проблема	Чи впливає радіоактивне випромінювання на хромосоми?
Формулюється наукова гіпотеза	Радіоактивне випромінювання, можливо, впливає на хромосоми
Висувається нульова змістовна гіпотеза	Радіоактивне випромінювання на хромосоми не впливає
Висувається нульова статистична гіпотеза	Середні числові значення хромосомних перебуток у генеральних сукупностях, звідки узяті вибірки, не відрізняються
Формуються та досліджуються контрольна й експериментальна вибірки	Досліджуються хромосомні перебутовки
Перевіряється нульова статистична гіпотеза	Нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх відхиляється (приймається)
Робиться статистичний висновок	Вибірки вірогідно розрізняються (не розрізняються)
Робиться науковий висновок	Радіоактивне випромінювання впливає (не впливає) на хромосоми

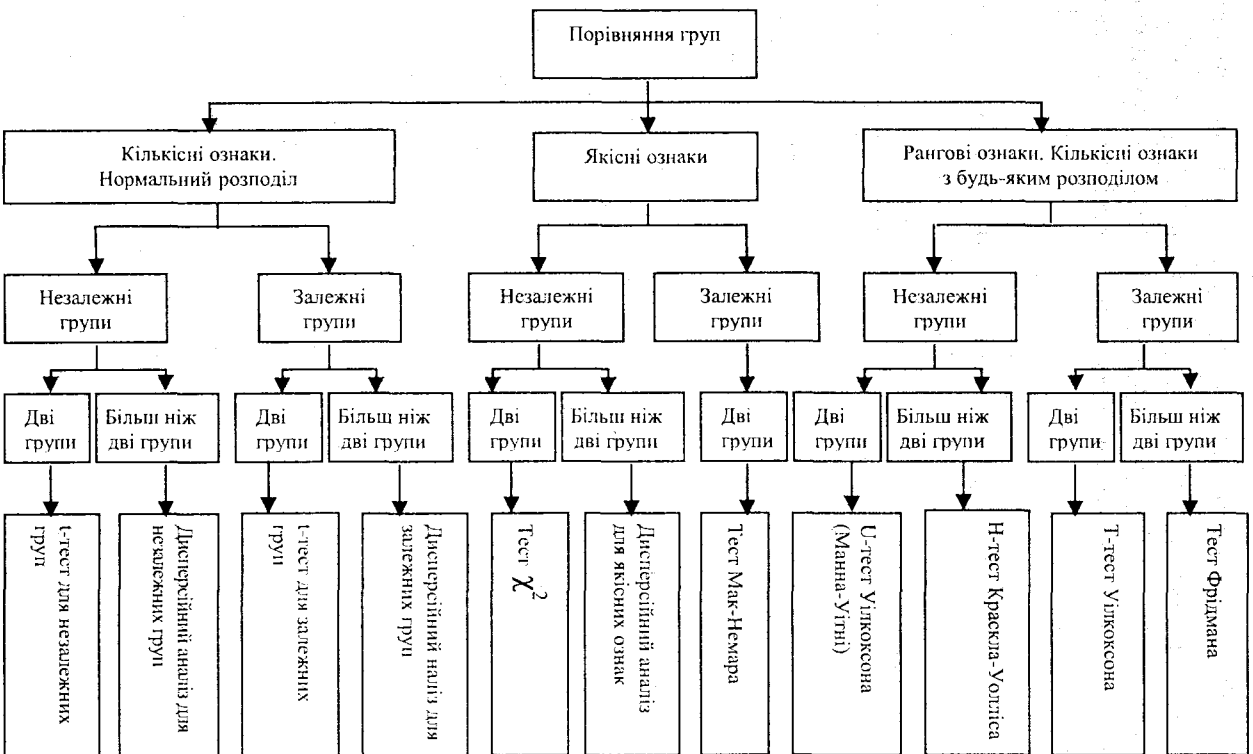


Рис. 1.3. Методи статистичного аналізу пошуку зв'язків

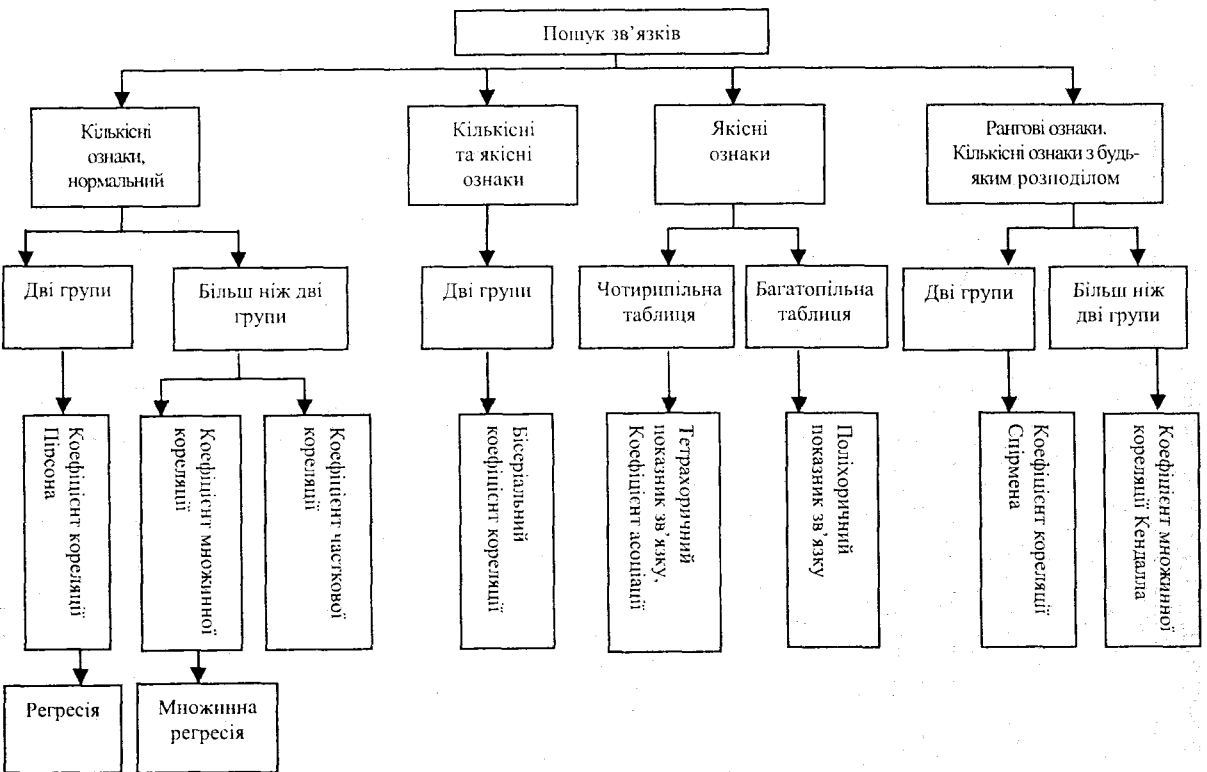


Рис. 1.4. Методи статистичного аналізу порівняння груп

1.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Поясніть різницю між вибіркою і генеральною сукупністю.
2. У чому полягає вибірковий метод дослідження?
3. Поясніть, чому в дослідженнях використовуються вибірки, а не генеральні сукупності.
4. Яким принципом варто керуватися при відборі об'єктів у вибірку?
5. Поясніть різницю між репрезентативною й зміщеною вибіркою.
6. Що значить сформувати порівнянні вибірки?
7. Навіщо в дослідженні з типу «контроль-експеримент» потрібна контрольна група?
8. Чи впливає розмір контрольної групи на висновки?
9. Яким чином часовий тренд може вплинути на порівняльність вибірок?
10. Перелічіть основні джерела погіршень дослідження.
11. Що таке артефакти і як вони можуть виникнути?
12. Поясніть, як використовується статистика на стадії планування експерименту.
13. Поясніть, чому вибірка, сформована зі студентів декількох навчальних груп, може виявитися нерепрезентативною відносно всіх студентів університету.
14. Для випробування засобу для схуднення була набрана група волонтерів. Вони випадковим чином були розділені на дві групи – контрольну (не одержували препарат) і експериментальну (одержували

препарат). Кілька повних людей виявили бажання перевести їх з контрольної групи до експериментальної, тому що їм дуже хотілося схуднути. Експериментатори задовольнили їхнє прохання. Укажіть потенційні джерела погіршень у даному експерименті.

15. Співробітник науково-дослідної лабораторії вивчав дію стресу на вироблення умовних рефлексів у тварин. У його розпорядженні було 40 тримісячних пацюків, яких він розділив нарівно на контрольну й експериментальну групи. Спочатку дослідник працював з експериментальною групою – піддавав тварин дії стресового фактора, а потім виробляв у них умовні рефлекси. Через 3 місяці він закінчив першу частину експерименту й приступив до вироблення рефлексів у пацюків контрольної групи. Укажіть методологічні помилки такої постановки експерименту.

2

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ДАНИХ

Дослідники найчастіше мають справу з великими масивами даних. Для кращого сприйняття й полегшення аналізу дані впорядковують згідно з певною системою. Залежно від характеру варіації первинні дані зводять у таблиці, розподіляють у варіаційні ряди, для більшої наочності зображують у вигляді графіків.

2.1. ОЗНАКИ, ДАТИ

Об'єкти характеризуються особливостями, які роблять їх відмінними від інших об'єктів, – *ознаками*. Для статистичного аналізу ознаки виражають за допомогою чисел, які називаються *датою*, або *спостереженнями*.

ЯКІСНІ, КІЛЬКІСНІ ТА РАНГОВІ ОЗНАКИ

Об'єкти характеризуються великою кількістю найрізноманітніших ознак. Ознаки поділяються на *якісні*, *кількісні* та *рангові*.

Кількісні ознаки можна виміряти, вирахувати та виразити в тих або інших одиницях виміру. Вони поділяються на *дискретні* й *безпервні*. За безпервними ознаками об'єкти можуть відрізнятися на

будь-яке мале значення. Кількісні ознаки з безпервною мінливістю можна виміряти до будь-якого практично значущого дробового значення. Наприклад, масу можна вимірювати в кілограмах, грамах, міліграмах, зріст – у метрах, сантиметрах, футах, дюймах тощо. Дискретні кількісні ознаки набувають цілком певних значень. За дискретними ознаками об'єкти можуть відрізнятися на мінімальне фіксоване значення, наприклад на одиницю (кількість дітей у родині може дорівнювати 1, 2, 3, 4 чи більше, але вона не може бути, наприклад, півтори чи дві десятих дитини).

На відмінність від кількісних ознак, у мінливості якісних ознак можна виділити чіткі класи (категорії) у відповідності до властивостей (якостей) об'єктів. Ознака може мати кілька варіантів (наприклад, шерсть може бути чорною, білою, коричневою, рудою чи плямистою; колір очей – чорним, карим, сірим, зеленим, блакитним). Деякі ознаки мають всього два варіанти (стать може бути чоловіча або жіноча, алель у якомусь локусі – мутантний або нормальний). Якісні ознаки з двома варіантами називаються *альтернативними*.

Різнорізноманітності за деякими ознаками неможливо дати точну кількісну або якісну характеристику. Наприклад, не можна чисельно виразити відмінність різних сортів яблук, хоча за допомогою хімічного аналізу можна визначити процентний вміст у них кислот і цукрів. Неможливо дати точну кількісну оцінку якості хутра тварин, хоча можна виміряти довжину й товщину волосся, а також кількість волосків на квадратному сантиметрі тіла. Ступінь розвитку таких ознак суб'єктивно оцінюється словами «краще або гірше», «більше чи менше» тощо. Кожному об'єкту можна присвоїти ранг – чисельне значення залежно від ступеня розвитку ознаки. Такі ознаки одержали назву *рангових*.

Ознаки бувають простими й складовими (із множинною характеристикою). Приклад простої ознаки – маса яблука. Для характеристики цієї ознаки досить виміряти один об'єкт. Приклад складової ознаки – маса яблука певного сорту. Щоб охарактеризувати цю ознаку, необхідно виміряти кілька плодів.

ДАТИ, АБО СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Значення, що характеризують кількісну ознаку, називаються *датою*, або *спостереженнями*. Вони являють собою числа будь-якої розмірності. Дати можуть являти собою *частки* – позитивні числа від 0 до 1, або відсотки – від 0 до 100 %. Датою можуть бути *ранги* – числа-символи, що не мають точного фізичного змісту.

Порівнюючи дві кількісні дати, ми одержуємо точну інформацію про різницю між ними. Наприклад, кроль масою 1,5 кг на 0,2 кг важчий за кроля, маса якого 1,3 кг. Якщо маса виражається у рангах, то кроль № 4 важчий за кроля № 3, а кроль № 3 – за кроля № 2, але в цьому випадку неможливо точно визначити, наскільки різною є маса цих тварин.

Дати можуть бути первинними й вторинними. *Первинні дати* – це результати безпосередніх вимірів. *Вторинні дати* є усередненням первинних дат. Наприклад, щоб визначити масу людини, її треба зважити. Цю просту процедуру досить виконати один раз, щоб мати точне уявлення про масу конкретної людини. Але в деяких випадках результат виходить менш точним. Наприклад, коли визначається вміст цукру в крові, проводиться кілька паралельних проб, за результатами яких обчислюється середня арифметична. У такому разі паралельні виміри усіх проб є первинними датами, а останній усереднений результат – вторинною датою.

Первинні й вторинні дати з'являються також при обліку ознак із *множинною характеристикою*. Наприклад, щоб охарактеризувати дерево за масою плодів, необхідно зважити кілька плодів (первинні дати) і знайти середню арифметичну (вторинна дата).

Якщо той самий об'єкт вимірюється двічі у різних експериментальних умовах, то отримані дати формують пари. Пари дат з'являються також у тому випадку, якщо кожному об'єкту однієї вибірки відповідає цілком певний об'єкт іншої вибірки. Сукупності цих дат являють собою вибірки з різних генеральних сукупностей і є *попарно зв'язаними датами*.

2.2. ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ

Найпоширеніший спосіб організації даних – побудова частотного розподілу. *Частотний розподіл* – це таблиця, що показує, яких значень набуває ознака і як часто ці значення зустрічаються в статистичній сукупності. Значення, яких може набувати ознака, позначаються як *класи*. Числа, що показують, як часто зустрічаються окремі класи, називаються *частотами*. Частоти, які виражені в кількості спостережень, називаються *абсолютними*, а виражені в частках одиниці або відсотках – *відносними*. Частотний розподіл можна представити у вигляді абсолютного, відносного й кумулятивного (з накопиченими частотами).

АБСОЛЮТНИЙ ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ. АБСОЛЮТНІ ЧАСТОТИ

Абсолютна частота – це кількість спостережень у певному класі. Розподіл, виражений в абсолютних частотах, називається *абсолютним частотним розподілом*. Приклад абсолютного частотного розподілу наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Абсолютний частотний розподіл жінок за кількістю дітей

Кількість дітей, x	Число жінок (f), що мають x дітей
0	44
1	282
2	200
3	18
4	3
5	1
Усього	$\sum f = 548$

ВІДНОСНИЙ ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ. ВІДНОСНІ ЧАСТОТИ

Два й більше розподілів зручно порівнювати не за абсолютними, а за відносними частотами. Наприклад, виражені в абсолютних частотах розподіли з табл. 2.2 (стовпці 2 і 3) складно порівнювати, тому що кожний з них складається з різного числа спостережень. У таких випадках абсолютні частоти переводять у відносні – виражають їх як частки або відсотки від загального числа спостережень. Відносний частотний розподіл показує пропорцію кожного класу в загальному обсягу спостережень (табл. 2.2, стовпці 4 і 5).

Таблиця 2.2. Частотний розподіл населення міст Харкова і Хмельницького за національністю (1985 р.)

Національність	Кількість, осіб		Кількість, %	
	Харків	Хмельницький	Харків	Хмельницький
Українці	505	549	45,9	83,2
Росіяни	504	75	45,8	11,4
Євреї	50	4	4,6	0,6
Білоруси	11	1	1,0	0,2
Інші	30	31	2,7	4,6
Усього	1100	660	100	100

Щоб розрахувати відносні частоти, абсолютну частоту кожного класу f ділять на загальне число дат n (f/n). Отримані пропорції класових інтервалів виражаються в частках. Якщо необхідно виразити відносні частоти у відсотках, то частки множаться на 100. Правильність розрахунків перевіряють підсумовуванням: при правильному обчисленні сума відносних частот буде дорівнювати 1 або 100 %.

КУМУЛЯТИВНИЙ ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ. НАКОПИЧЕНІ (КУМУЛЯТИВНІ) ЧАСТОТИ

Накопичена (кумулятивна) частота – це сума частот попередніх класів та частоти даного класу. Вона показує відсоток дат, які розташовуються між початком варіаційного ряду й верхніми межами класових інтервалів.

Накопичені частоти визначають послідовним підсумовуванням частот у напрямку від першого класу до кінця варіаційного ряду. Для побудови кумулятивного частотного розподілу спочатку будуватиметься звичайний частотний розподіл. Потім послідовно складають частоти всіх попередніх класів і частоту даного класу. Наприклад, щоб визначити кумулятивну частоту третього класу, необхідно скласти частоти першого, другого та третього класів. Частота останнього класу буде дорівнювати 100 %. Приклад кумулятивного частотного розподілу наведений у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Частотний розподіл студенток за зростом

Зріст, см	Кількість, осіб	Абсолютна накопичена частота, осіб	Кількість, %	Відносна накопичена частота, %
151 – 155	12	12	6,0	6,0
156 – 160	39	51	19,5	25,5
161 – 165	64	115	32,0	57,5
166 – 170	31	146	15,5	73,0
171 – 175	48	194	24,0	97,0
176 – 180	5	199	2,5	99,5
181 – 185	1	200	0,5	100,0
Усього	200		100,0	

2.3. РАНЖУВАННЯ

ПРАВИЛА РАНЖУВАННЯ

Ранжування – це заміна фактичних значень ознаки рангами. Ранги – це послідовні місця, які займають дати при їхньому впорядкуванні в разі зростання або убуття. Ранжування здійснюється щодо ознак, яким неможливо дати точний кількісний опис, але при цьому їх можна впорядкувати. Наприклад, собак на виставці можна розташувати у відповідності до стандартів породи, надавши їм місця – ранги. У таких випадках ранжування є єдиним прийомом кількісної оцінки. Рангова шкала показує, що ознака є більшою або меншою, але вона не вказує, наскільки велика різниця. У ранговому поданні відстані між об'єктами невідомі. Відомо, наприклад, що об'єкт із рангом 3 важчий, ніж об'єкт із рангом 2, але на скільки – на один грам чи три кілограми – невідомо.

Розглянемо на прикладі, як робиться ранжування. Набір дат у кількості n (наприклад 8, 5, 9, 7, 11, 6, 10, 9, 6, 15) записується в порядку зростання. Дати нумеруються від 1 до n :

дати:	5	6	6	7	8	9	9	10	11	15
порядкові номери:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Після цього кожній даті надається ранг. Якщо дати не повторюються, ранги збігаються з номерами. Якщо є повторювані дати, їм надаються однакові ранги, що являють собою середню арифметичну номерів однакових дат.

дати:	5	6	6	7	8	9	9	10	11	15
порядкові номери:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ранги:	1	2,5	2,5	4	5	6,5	6,5	8	9	10

Обчислення рангів для 2-ї і 3-ї дат: $\frac{2+3}{2} = 2,5$; для 6-ї і 7-ї дат: $\frac{6+7}{2} = 6,5$. Усі подальші статистичні прийоми здійснюються не з первинними датами, а з їхніми рангами.

РАНЖУВАННЯ ДВОХ ВИБІРОК У ЗАГАЛЬНИЙ РЯД

Ранжування двох вибірок у загальний ряд здійснюється при порівнянні двох груп.

Припустімо, існують дві групи дат:

1) 5, 3, 8, 4, 6, 3 ($n_1 = 6$);

2) 7, 8, 2, 9, 6, 9, 7 ($n_2 = 7$).

Приналежність дат до групи позначається індексами 1 і 2:

1) $5_1, 3_1, 8_1, 4_1, 6_1, 3_1$;

2) $7_2, 8_2, 2_2, 9_2, 6_2, 9_2, 7_2$.

Із двох груп формується загальний ряд. Дати поєднуються й розташовуються в порядку зростання. При цьому визначається приналежність кожної дати до своєї вибірки. Для цього можна скористатися нижніми індексами:

Дати	2_2	3_1	3_1	4_1	5_1	6_1	6_2	7_2	7_2	8_2	8_1	9_2	9_2
Номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ранги	1	2,5	2,5	4	5	6,5	6,5	8,5	8,5	10,5	10,5	12	13

Також можна роз'єднати ряди просторово:

Дати 1			3	3	4	5	6					8	
Дати 2	2							6	7	7	8		9 9
Номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ранги	1	2,5	2,5	4	5	6,5	6,5	8,5	8,5	10,5	10,5	12	13

Датам присвоюються порядкові номери, і подальше ранжування здійснюється за загальними правилами.

2.4. КІЛЬКІСНА ВАРІАЦІЯ

ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД

Для аналізу кількісних ознак їх організують у *варіаційний ряд* – подвійний ряд чисел, що показує, як значення ознаки пов’язані з їхньою повторюваністю. Для побудови варіаційного ряду весь розмах мінливості розбивають на рівні інтервали – *класи*, а потім визначають частоту кожного класу.

Сукупність дат можна розподілити у варіаційні ряди двох типів – *інтервальні* або *безінтервальні*. Безінтервальні варіаційні ряди включають класи з єдиним значенням ознаки. В інтервальних варіаційних рядах класи включають об’єкти зі значеннями ознаки, що лежать у певному проміжку значень – *класовому інтервалі*. Найбільше та найменше значення класового інтервалу називаються *класовими межами*. В інтервальні варіаційні ряди зазвичай розподіляються ознаки з великим розмахом мінливості, а в безінтервальні – з малим.

При побудові інтервального варіаційного ряду рекомендується дотримуватися таких правил.

1. Насамперед слід визначити розмах мінливості. Для цього необхідно знайти найбільшу та найменшу дати сукупності – x_{\max} і x_{\min} . Потім обчислюється різниця $R = x_{\max} - x_{\min}$, яка називається *розмахом мінливості* чи *розмахом варіації*.

2. Визначити приблизне число класів, на яке буде розбита сукупність. Зробити це можна у декілька способів. Наприклад, за допомогою формули Старджеса:

$$K = 1 + 3,32 \lg n \quad (2.1)$$

$$\text{або } K = 5 \lg n \quad (\text{при } n > 100), \quad (2.2)$$

де K – число класів, n – число дат у сукупності.

Можна, не роблячи розрахунків, скористатися таблицею 2.4.

Таблиця 2.4. Число класів варіаційного ряду в залежності від числа спостережень

Число спостережень n	Число класів K
25 – 40	5 – 6
40 – 60	6 – 8
60 – 100	7 – 10
100 – 200	8 – 12
> 200	10 – 15

Кваліфікований дослідник може визначити кількість класів інтуїтивно. Практика показує, що при великій варіації зручно розбивати сукупність на 10 – 20 класів. Велика кількість класів призводить до зайвої деталізації і збільшує трудомісткість роботи. Мале число класів згладжує ряд і спотворює розподіл частот (рис. 2.5, а, в, з).

3. Віднайти значення класового інтервалу. Для цього використовують формулу:

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{K}, \quad (2.3)$$

де λ – класовий інтервал, x_{\max} і x_{\min} – максимальна та мінімальна дати сукупності, K – число класів, на які буде розбита сукупність.

Якщо $\lambda = 1$, дані розподіляють у безінтервальний ряд; якщо $\lambda \neq 1$, то в інтервальний. Нерідко розраховане значення λ виявляється дробовим числом, незручним для роботи. Тому його округляють до найближчого зручного числа. Якщо ознака вимірюється цілими числами, то й класовий інтервал повинен бути цілим. Найкраще, якщо класовий інтервал дорівнює одиниці або числу, кратному 2, 5, 10, Наприклад, одержавши $\lambda = 6,88$, не обов’язково округляти її до $\lambda = 7$, можна взяти $\lambda = 5$ або $\lambda = 10$, але не $\lambda = 20$.

4. Намітити верхню та нижню межі кожного класу. Нижня межа першого класу варіаційного ряду має бути меншою за мінімальну дату

статистичної сукупності, верхня межа останнього класу – більшою за максимальну. Нижня межа першого класового інтервалу встановлюється так, щоб мінімальна дата сукупності була приблизно в середині першого інтервалу:

$$x_{\text{нижн}} = x_{\text{мін}} - \frac{\lambda}{2} \quad (2.4)$$

Верхня межа відстоїть від нижньої на значення класового інтервалу:

$$x_{\text{верхн}} = x_{\text{нижн}} + \lambda \quad (2.5)$$

Таким чином слід намітити межі всіх інтервалів, від першого до останнього. При виборі меж класових інтервалів треба керуватися міркуваннями зручності. Краще взяти 5, 10, 15..., ніж 3, 8, 13, Треба пам'ятати, що всі інтервали мають бути рівновеликими й не повинні перекриватися – нижня межа наступного класу не повинна точно збігатися з верхньою межею попереднього. Наприклад, у випадку ознак, вимірюваних у цілих числах, нижня межа наступного класу може бути на одиницю більше верхньої межі попереднього:

Клас	1	2	3	4
Інтервал	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20

Для ознак, які вимірювані в дробових числах, нижня межа наступного класу може бути більше верхньої межі попереднього на 0,1, 0,01, 0,001 або будь-яке інше число, що не перевищує точність виміру:

Клас	1	2	3	4
Інтервал	1,1 – 5,0	5,1 – 10,0	10,1 – 15,0	15,1 – 20,0

5. Розставити дати по класах. По черзі розглядаються всі дати, і кожна вноситься у відповідний класовий інтервал. Для зручності можна скористатися шифром частот – відзначати кожен дату в класі крапками або штрихами:

Частота	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Шифр	┌	┐	└	┘	⊠	⊞

Після того, як всі дати розставлені по класах, шифри перетворюють в абсолютні частоти. За необхідності абсолютні частоти перетворюють на відносні – розраховують відповідні частки чи відсотки.

* * *

Наведена схема побудови інтервального ряду не є єдиною можливою. Дотримуючись її, можна згрупувати дані більш ніж в один спосіб. Серед всіх варіантів потрібно вибрати найбільш зрозумілий і наочний.

ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ КІЛЬКІСНОЇ ВАРІАЦІЇ

Інформацію, що міститься в таблиці, можна представити графічно. Графіки краще сприймаються, на них легше вловити закономірності. Частотний розподіл кількісних ознак представляють у вигляді *гістограми*, *частотного полігона*, *кумулятивної кривої*.

Гістограма

Інтервальний варіаційний ряд зручно представити у вигляді *гістограми*. Гістограма складається із серії стовпців, кожен з яких представляє частоту спостережень в одному із класів розподілу (рис. 2.1).

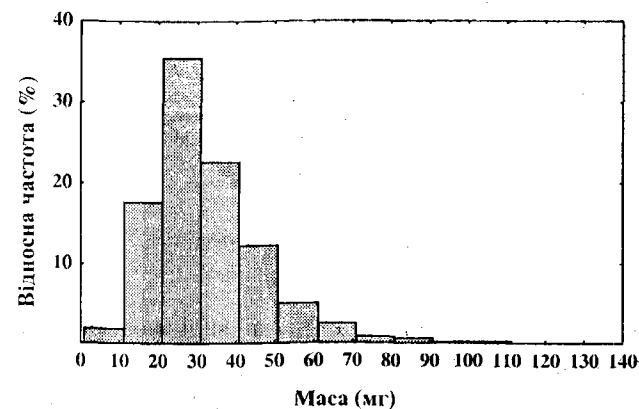


Рис. 2.1. Гістограма

При побудові гістограми по вертикальній осі відкладають частоти, по горизонтальній – межі класів. Частоти можуть виражатися як в абсолютних, так і у відносних одиницях. Бічні стінки стовпців збігаються з точними межами класових інтервалів. Ширина стовпця дорівнює значенню класового інтервалу, а висота – частоті. Гістограма відображає розподіл об'єктів однієї категорії з різним ступенем розвитку кількісної ознаки. Стовпці одного кольору розташовують без інтервалів, що відрізняє гістограму від стовпчастої діаграми (див. п. 2.5).

Полігон розподілу (частотний полігон)

Якщо центральні точки на верхніх межах стовпців гістограми послідовно з'єднати прямими лініями, то вийде *полігон розподілу*, або *частотний полігон* (рис. 2.2). Це графік, у якому серединні точки кожного класового інтервалу з'єднані між собою і з горизонтальною віссю координат.

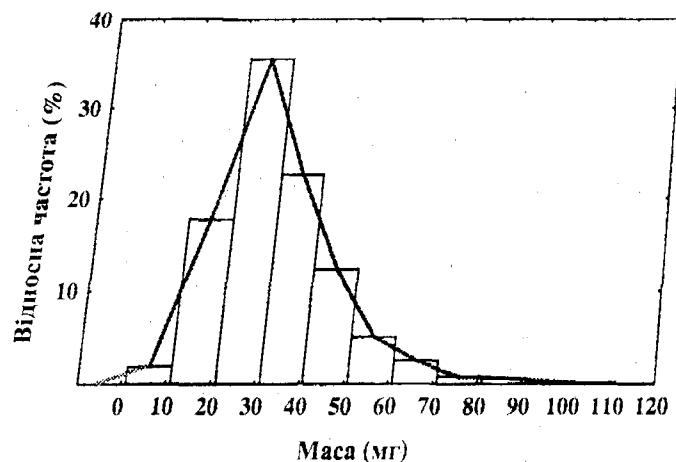


Рис. 2.2. Полігон розподілу

Для побудови частотного полігона виділяються два додаткові класові інтервали за межами розподілу. Один передус першому класовому інтервалу, інший іде за останнім. Ці інтервали розглядаються як інтервали з нульовою частотою. Серединні точки всіх

класових інтервалів, у тому числі й додаткових, з'єднуються прямими лініями. У результаті виходить ламана лінія – частотний полігон.

Кумулята й огіва

Якщо по горизонтальній осі відкладати значення класів, а по вертикальній – накопичені частоти з наступним з'єднанням точок прямими лініями, вийде графік, який називається *кумулятою* (рис. 2.3).

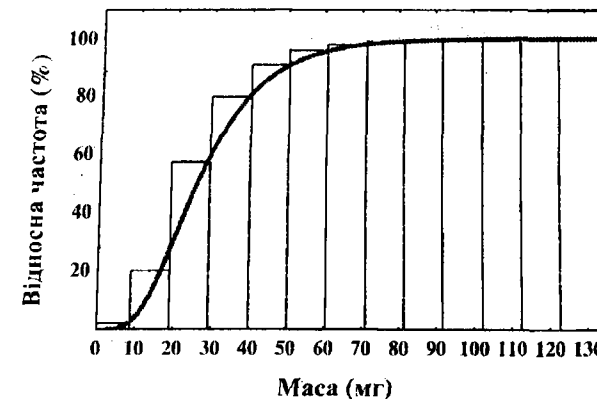


Рис. 2.3. Кумулята

Якщо по горизонтальній осі відкладати частоти, а по вертикальній – значення класів з наступним з'єднанням геометричних точок прямими лініями, виходить графік, який називається *огівою* (рис. 2.4).

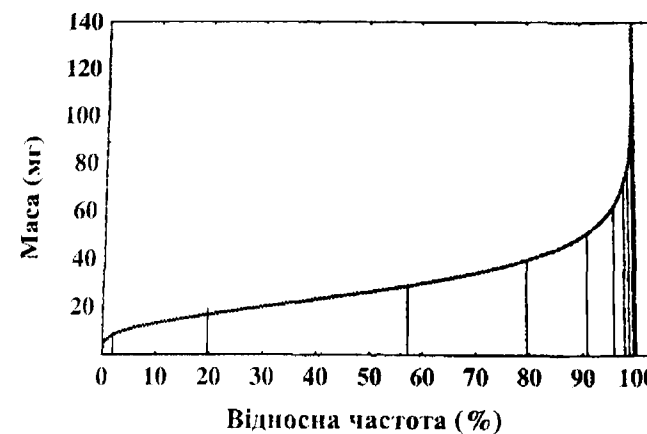


Рис. 2.4. Огіва

Накопичені частоти наносяться на графік у точках верхньої точної межі класових інтервалів. На горизонтальній осі позначається точка з нульовою кумулятивною частотою. За неї приймається нижня точна межа додаткового класового інтервалу, що передує першому класу. Позначені точки послідовно з'єднуються прямими лініями.

Приклад 2.1

Проведено вимірювання зросту студентів (см) в одній академічній групі університету. Побудуйте варіаційний ряд і графік розподілу за такими даними:

174	183	167	173	193	180	167	154	175	168
171	182	178	168	173	192	177	175	172	178
169	178	169	173	178	172	178	182	171	181
172	168	173	174	183	174	172	173	173	167
170	170	169	170	178	170	181	177	178	178
176	179	165	176	169	180	173	179	180	169
183	175	160	185	190	180	167	178	165	173
182	196	171	194	175	175	177	180	175	177
178	190	160	183	167	172	178	192	168	172
178	179	157	170	172	169	177	168	176	173
170	178	178	187	162	165	169	166	176	177
189	180	170	184	174	172	172	166	163	173
174	172	173	180	185	180	173	170	175	180
201	190	174	162	193	167	170	188	164	178
176	192	174	174	183	170	156	185	175	178
169	168	165	180	170	162	164	188	173	177
170	170	170	170	187	186	164	185	180	172
173	167	173	170	170	165	181	165	180	158
169	178	174	170	184	170	185	165	178	168
179	181	161	185	180	184	182	181	170	180

Розв'язання

1. Найбільша й найменша дати сукупності $x_{\min} = 154$, $x_{\max} = 201$, розмах мінливості $R = 201 - 154 = 47$, число дат у сукупності $n = 200$.

2. Число дат у сукупності $n > 100$, тому для визначення числа класів використаємо формулу (2.2): $K = 5 \lg n = 5 \lg 200 = 11,5$. Відповідно до табл. 2.4, число класів K може бути від 8 до 15.

3. Для визначення класового інтервалу використаємо формулу (2.3):

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{K}$$

При $K = 11,5$ класовий інтервал дорівнює $\lambda = \frac{47}{11,5} = 4,09$.

При $K = 8 \div 15$ класовий інтервал $\lambda = 5,88 \div 3,13$.

Зручніше взяти класовий інтервал $\lambda = 5$.

4. Розподіляємо дані в інтервальний ряд (табл. 2.5)

Таблиця 2.5. Частотний розподіл зросту студентів

Класи	Абсолютні частоти, осіб	Відносні частоти, %	Відносні накопичені частоти, %
151 – 155	1	0,5	0,5
156 – 160	5	2,5	3,0
161 – 165	15	7,5	10,5
166 – 170	45	22,5	33,0
171 – 175	46	23,0	56,0
176 – 180	48	24,0	80,0
181 – 185	23	11,5	91,5
186 – 190	9	4,5	96,0
191 – 195	6	3,0	99,0
196 – 200	1	0,5	99,5
201 – 205	1	0,5	100,0
Сума	200	100,0	

Намічаємо межі класів. Мінімальна дата сукупності $x_{\min} = 154$ повинна потрапити приблизно в середину першого класу. У цьому випадку зручно встановити $x_{\text{нижн}} = 151$, $x_{\text{верхн}} = 155$. Далі намічаємо межі інших класів: 156 – 160, 161 – 165, 166 – 170, ...

5. Після розташування даних по класах одержуємо абсолютні частоти, які переводимо у відносні й накопичені (табл. 2.5).

6. Отриманий частотний розподіл представимо у вигляді гістограми й кумуляти (рис. 2.5 а, б).

Перевіримо, як виглядає гістограма цього розподілу при інших значеннях класового інтервалу, наприклад, $\lambda = 10$ і $\lambda = 2$ (рис. 2.5, в, г).

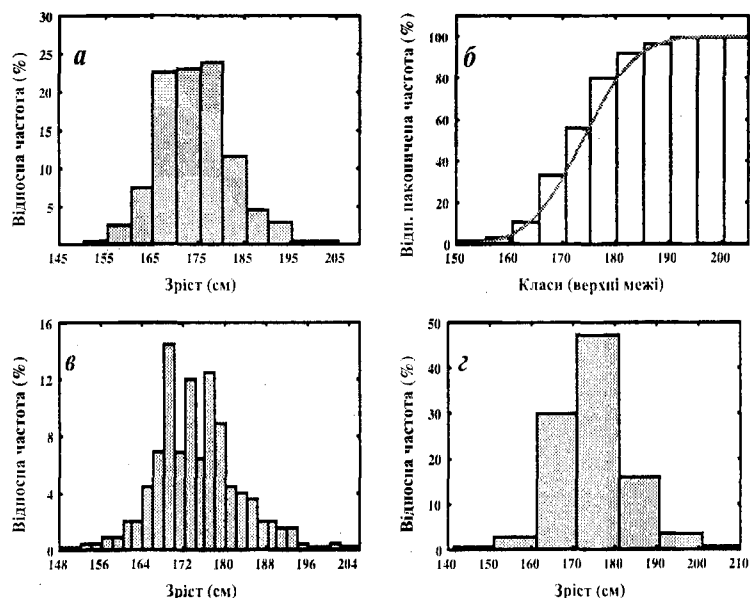


Рис. 2.5. Графічне зображення відносного частотного розподілу в залежності від розміру класового інтервалу:

а, в, г – гістограми, б – кумулята;

а, б – $\lambda = 5$; в – $\lambda = 2$; г – $\lambda = 10$

2.5. ЯКІСНА ВАРІАЦІЯ

Внутрішньогрупову різноманітність за якісними ознаками чисельно виражають у вигляді частки або відсотка:

$$p = \frac{m}{n} \quad \text{або} \quad p\% = \frac{m}{n} \cdot 100\%, \quad (2.6)$$

де p – частка, $p\%$ – відсоток, n – обсяг вибірки, m – число об'єктів, що належать до однієї категорії.

ТАБЛИЦІ

При аналізі якісної варіації дані зводять у таблиці. Частотний розподіл для якісної варіації представляють у вигляді чотирипільних або багатопільних таблиць, у які заносять абсолютні величини або частки.

Наприклад, у табл. 2.1 наведено частотний розподіл, де класи виділені відповідно до кількості дітей у жінок, а в таблиці 2.6 – відповідно до статі студента й факультету, на якому він навчається. У табл. 2.7 класи виділені на підставі кольору волосся. Табл. 2.8 являє собою частотний розподіл, класами якого є різні національності – українці, росіяни тощо.

Таблиця 2.6. Розподіл студентів різних факультетів за статтю

Факультет	Кількість студентів		Усього
	Чоловіків	Жінок	
Математичний	327	159	496
Фізичний	296	148	444
Філологічний	89	306	395
Психологічний	58	184	242
Біологічний	94	296	390
Усього	864	1093	1957

Таблиця 2.7. Частотний розподіл дітей за кольором волосся

Клас	Блондини	Шатени	Брюнети	Руді
Частота	177	80	19	5

Таблиця 2.8. Розподіл шлюбів за національністю чоловіка і жінки

	Українці	Росіяни	Білоруси	Євреї	Грузини	Вірмени	Поляки	Татари
Українці	548	265	12	8	1	1	0	0
Росіяни	282	302	4	0	0	0	0	0
Білоруси	15	10	3	0	0	0	0	0
Євреї	11	6	0	18	0	0	0	0
Грузини	7	5	0	0	2	0	0	0
Вірмени	9	4	0	0	0	29	0	0
Поляки	2	1	0	0	0	0	0	0
Татари	2	1	0	0	0	0	0	13

П р и м і т к а: по горизонталі – національність жінок, по вертикалі – чоловіків.

ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЯКІСНОЇ ВАРІАЦІЇ

Стовпчаста діаграма

Стовпчаста діаграма виглядає як серія стовпців. При її побудові по одній осі відкладають частоти (частки, відсотки), по іншій – категорії об'єктів. Висота стовпця відповідає частоті об'єктів з певною ознакою. Стовпці розміщують на певній відстані один від одного. Якщо ознаки

не впорядковані за яким-небудь принципом, стовпці розташовують за зменшенням висоти. Існують різні способи зображення стовпчастих діаграм. Комп'ютерні програми дають великий вибір різних видів графіки (рис. 2.6).

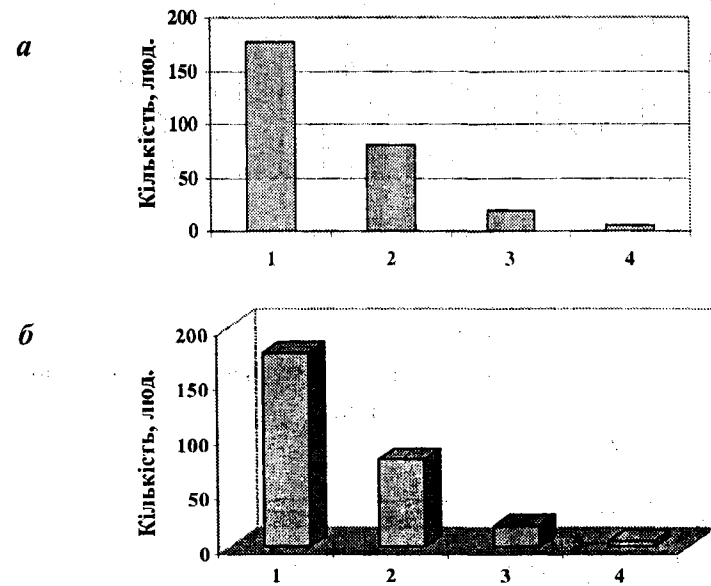


Рис. 2.6. Стовпчаста діаграма розподілу людей за кольором волосся

(а – плоска, б – об'ємна):

1 – блондини, 2 – шатени, 3 – брюнети, 4 – руді

Стовпці можуть складатися з декількох груп (рис. 2.7, 2.8). Для зіставлення пропорцій використовують складені стовпці (рис. 2.9). Якщо різноманітність ознак виражається в позитивних і негативних значеннях, то стовпці розміщують по обидва боки від нульового рівня (рис. 2.10). Стовпці можуть мати як вертикальну (рис. 2.6, 2.7, 2.10), так і горизонтальну орієнтацію (рис. 2.8, 2.9).

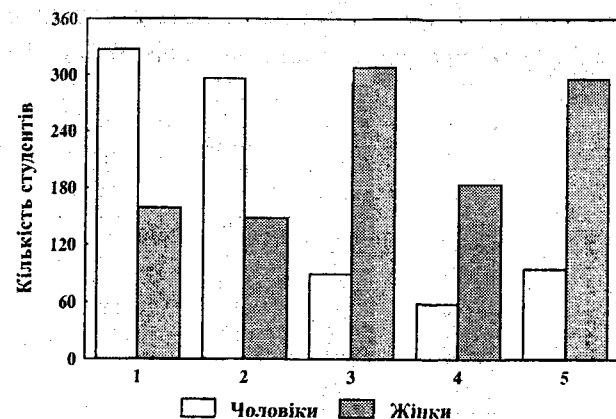


Рис. 2.7. Розподіл студентів різних факультетів за статтю:
1 – математичний, 2 – фізичний, 3 – філологічний, 4 – психологічний,
5 – біологічний

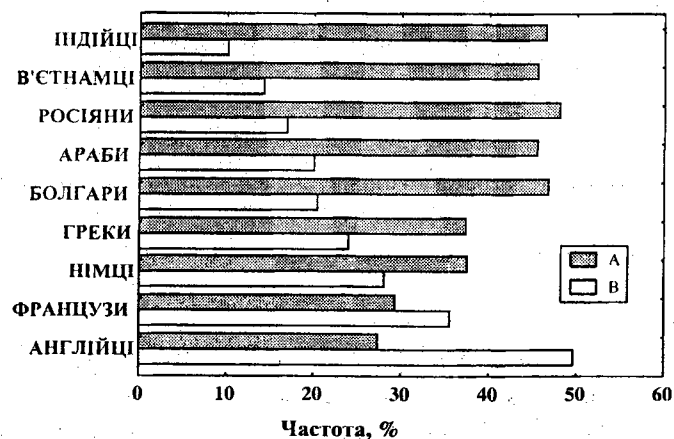


Рис. 2.8. Розподіл частот груп крові системи АВО в різних народів
(Айала Ф. Введение в популяционную и эволюционную генетику. –
М., 1984. – С. 130)

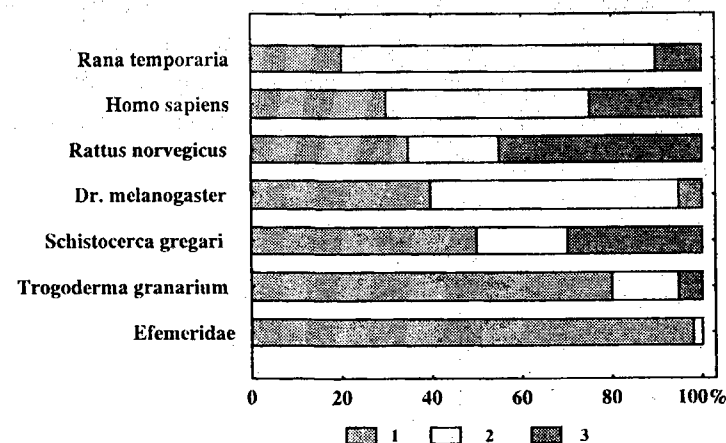


Рис. 2.9. Співвідношення тривалості дорепродуктивної (1), репро-
дуктивної (2) і пострепродуктивної (3) стадій онтогенезу в деяких видів
(Яблоков А. В., Ларина Н. И. Введение в фенетику популяций. – М., 1985. – С. 19)

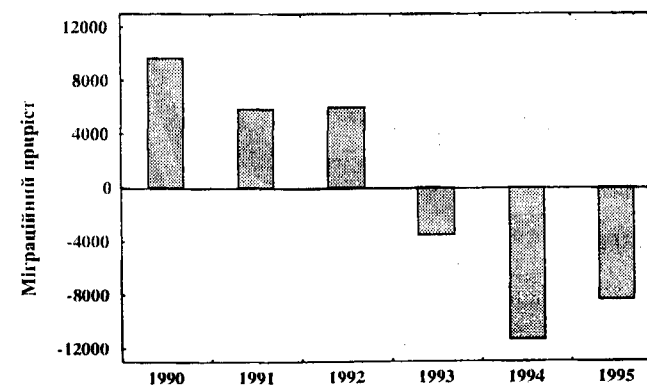


Рис. 2.10. Міграційний приріст населення Харківської області
в 1990–1995 рр. По вертикалі – кількість людей

Іноді діаграми зображуються на шкалі, що модифікована з лінійної в кругову. У цьому випадку стовпці зображують у вигляді радіально розбіжних променів, довжини яких відповідають частотам. Такий прийом застосовується для циклічних змін. Циклічність властива багатьом явищам. Наприклад, захворюваність на грип має сезонну циклічність. Сезонний характер має народжуваність у людини (рис. 2.11).

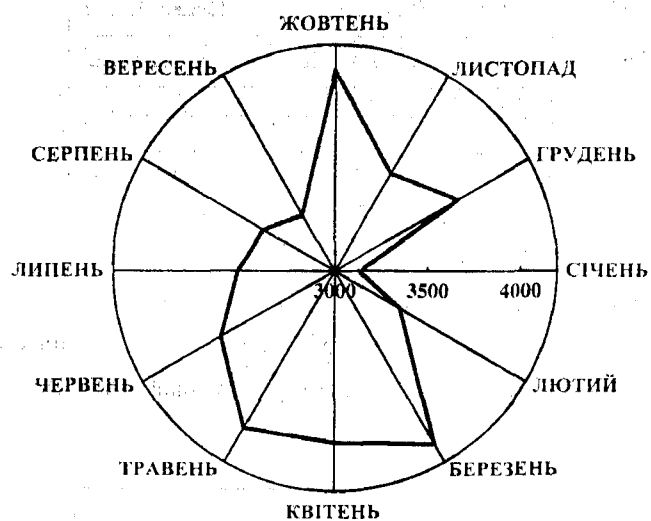


Рис. 2.11. Сезонність народжуваності у людини

Кругова діаграма

Розподіл частот якісних ознак можна подати у вигляді кругової діаграми (рис. 2.12). Кругова діаграма являє собою коло, яке розбите на сектори. Число секторів відповідає числу категорій, а їхні кути пропорційні розміру часток.

Побудова кругової діаграми включає такі етапи:

1. Об'єкти кожної категорії виражаються у відсотках – $f\%$.
2. Категорії впорядковуються за зменшенням відносних частот.

3. Для кожної категорії визначається кут сектора:

$$\angle = \frac{f\% \cdot 360^\circ}{100\%} \quad (2.7)$$

4. Коло розбивається на сектори, які розташовуються за годинниковою стрілкою в порядку убутання частот.

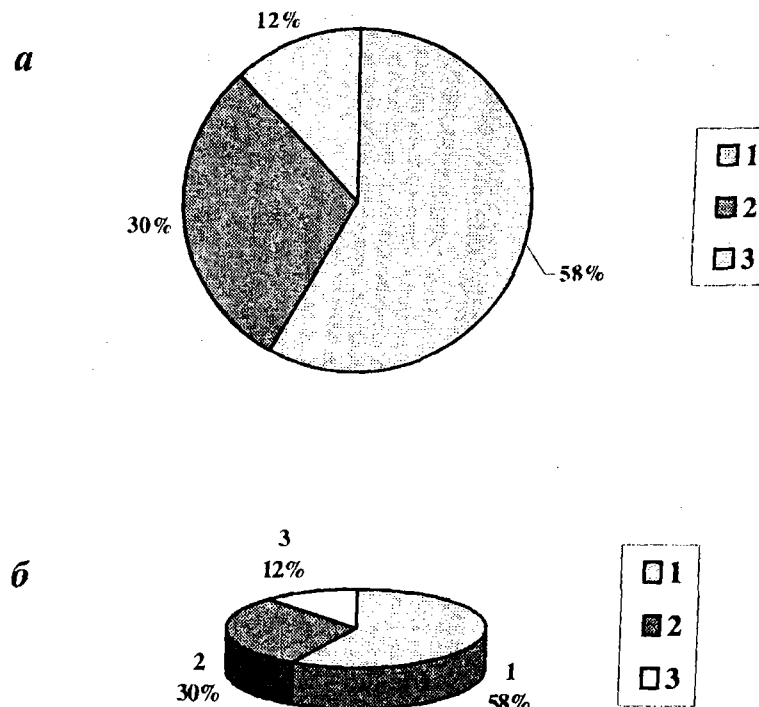


Рис. 2.12. Структура харчового раціону
(а – плоска діаграма, б – об'ємна діаграма):
1 – вуглеводи, 2 – жири, 3 – білки

2.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

- Що таке частотний розподіл? В яких координатах зображуються графіки частотного розподілу?
- Чому для побудови частотних розподілів перевагу віддають відносним, а не абсолютним частотам?
- Назвіть основні відмінності:
 - гістограми і стовпчастої діаграми;
 - стовпчастої і кругової діаграм;
 - гістограми і частотного полігона.
- Визначте, кількісною, якісною чи ранговою є дана ознака, назвіть можливі типи графіків для зображення її частотного розподілу:
 - вік;
 - концентрація глюкози в сироватці крові;
 - імена школярів у класі;
 - артеріальний тиск;
 - маса тіла;
 - стать;
 - зріст;
 - національність.
- Дано такі класові інтервали частотного розподілу: 90 – 99, 80 – 89, 70 – 79. Визначте розмір класового інтервалу. Вкажіть класові межі для інтервалу 80 – 89.
- Для кожного інтервалу надайте розмір класового інтервалу, нижню і верхню межі наступного (за збільшенням) інтервалу:
 - 10 – 14;
 - 20 – 39;
 - 2,50 – 2,74;
 - 1,0 – 1,9;
 - 30 – 40.

- Дані найбільша й найменша дати сукупності. Визначте розмах варіювання, розмір класового інтервалу, межі першого інтервалу, межі останнього інтервалу:
 - 36, 62;
 - 27, 101;
 - 56, 69;
 - 187, 821;
 - 6,3; 21,9;
 - 1,27; 3,47.
- Знайдіть помилки в побудові даного варіаційного ряду:

5 – 10
15 – 20
20 – 25
25 – 30
30 – 40
40 – 50
- Дано частотний розподіл ознаки. Дайте відповіді на запитання. Відобразіть даний розподіл на графіку. Назвіть вид графіка.
 - Дана ознака є кількісною чи якісною? Скільки класів визначено в мінливості ознаки? В яких одиницях визначена частота?

Група крові	I (0)	II (A)	III (B)	IV (AB)
Відносна частота	0,6	0,1	0,1	0,2

- Дана ознака є кількісною чи якісною? В яких одиницях визначена частота? Чому дорівнює класовий інтервал?

Клас	3 – 4	5 – 6	7 – 8	9 – 10	11 – 12	13 – 14
Відносна частота	5	10	35	25	15	10

- Варіаційний ряд є інтервальним чи безінтервальним? Чому дорівнює розмах мінливості? Розрахуйте обсяг вибірки.

Клас	11	12	13	14	15	16
Абсолютна частота	1	0	2	4	7	3

10. Дано частотний розподіл ознаки. Визначте n , переведіть абсолютні частоти у відносні, побудуйте кумулятивний розподіл. Побудуйте кумуляту й огіву.

а)	Класи	Абсолютна частота	б)	Класи	Абсолютна частота
	2,00 – 2,19	1		95 – 99	1
	2,20 – 2,39	3		90 – 94	2
	2,40 – 2,59	2		85 – 89	15
	2,60 – 2,79	7		80 – 84	10
	2,80 – 2,99	9		75 – 79	10
	3,00 – 3,19	5		70 – 74	6
	3,20 – 3,39	6		65 – 69	4
	3,40 – 3,59	4		60 – 64	2
	3,60 – 3,79	2			

11. Аналізи крові надали такі дані щодо вмісту глюкози (мг%):

107	145	237	91	185	106	177	120
116	105	109	186	257	218	164	158
117	130	132	138	131	88	161	145
128	231	78	113	134	104	122	442
237	148	231	161	119	185	118	98
218	147	176	106	109	138	84	137
139	97	169	160	123	130	198	215
177	100	91	141	139	176	218	146
128	127	76	126	184	58	95	144
124	167	150	156	193	194	73	98
127	153	161	194	87	188	149	215
163	111	198	265	143	136	298	173
148	110	188	208				

Побудуйте частотний розподіл даної ознаки, відобразіть його на графіку.

12. Вивчалось сприйняття матеріалу за двома методиками викладання. В експерименті взяли участь 200 студентів. Розподіл результатів перевірконого тестування надано у таблиці.

Бали	Частоти	
	Група 1 (методика А)	Група 2 (методика Б)
150 – 154		1
145 – 149	5	8
140 – 144	8	13
135 – 139	12	10
130 – 134	14	7
125 – 129	25	4
120 – 124	23	3
115 – 119	18	0
110 – 114	20	3
105 – 109	12	1
100 – 104	9	0
95 – 99	4	
$n = 150$		$n = 50$

- а) Відобразіть частотні полігони обох розподілів на одному графіку.
 б) Надайте результати у вигляді відносних частотних розподілів. Відобразіть їхні частотні полігони на одному графіку.
 в) Як краще подавати дані для порівняння – в абсолютних чи відносних частотах? Поясніть.

13. Результати вимірювання діастолічного артеріального тиску:

81	91	89	81	79	82	70	92
80	64	73	86	87	72	74	75
90	85	83	82	79	82	78	96
77	85	83	87	88	80		

- а) Побудуйте частотний розподіл з класовим інтервалом 3 і нижнім класом 63 – 65.
 б) Переведіть абсолютні частоти у відносні.
 в) Побудуйте гістограму і частотний полігон.

14. Відобразіть стовпчасту діаграму рівня освіти у відвідувачів ранкового сеансу в кінотеатрі.

№	Освіта	№	Освіта
1	Початкова	26	Середня
2	Відсутня	27	Початкова
3	Відсутня	28	Середня спеціальна
4	Початкова	29	Початкова
5	Початкова	30	Середня
6	Середня спеціальна	31	Середня спеціальна
7	Відсутня	32	Відсутня
8	Середня	33	Початкова
9	Вища	34	Початкова
10	Початкова	35	Початкова
11	Середня спеціальна	36	Середня
12	Відсутня	37	Початкова
13	Відсутня	38	Вища
14	Початкова	39	Відсутня
15	Середня	40	Відсутня
16	Середня спеціальна	41	Середня
17	Середня	42	Відсутня
18	Вища	43	Середня
19	Відсутня	44	Початкова
20	Середня спеціальна	45	Середня
21	Відсутня	46	Початкова
22	Середня	47	Відсутня
23	Початкова	48	Середня
24	Початкова	49	Відсутня
25	Середня	50	Середня

15. Відобразіть кругову діаграму відвідувачів кафе, яка відображає відношення курців і тих, що не палять.

№	Паління	№	Паління	№	Паління	№	Паління
1	+	26	-	51	-	76	-
2	-	27	+	52	-	77	+
3	+	28	-	53	+	78	-
4	+	29	-	54	-	79	-
5	-	30	-	55	+	80	+
6	-	31	-	56	-	81	-
7	-	32	+	57	-	82	-
8	+	33	-	58	-	83	-
9	-	34	-	59	-	84	-
10	-	35	-	60	-	85	-
11	+	36	-	61	+	86	+
12	-	37	-	62	-	87	-
13	-	38	-	63	+	88	-
14	-	39	+	64	-	89	+
15	-	40	+	65	+	90	-
16	-	41	+	66	+	91	-
17	+	42	-	67	+	92	-
18	-	43	+	68	-	93	-
19	-	44	+	69	-	94	+
20	-	45	+	70	-	95	-
21	+	46	+	71	+	96	-
22	+	47	-	72	-	97	-
23	+	48	+	73	+	98	-
24	-	49	-	74	+	99	-
25	+	50	+	75	-	100	+

Примітка: (+) – курці, (-) – не палять.

16. Аналізи крові осіб з низьким та помірним варіантами фізичної активності надали такі дані щодо концентрації холестеролу (мг%) у сироватці:

Фізична активність	Концентрація холестеролу	Фізична активність	Концентрація холестеролу	Фізична активність	Концентрація холестеролу
Низька	199	Низька	255	Помірна	178
Помірна	267	Низька	199	Низька	246
Низька	272	Низька	228	Помірна	176
Низька	166	Низька	240	Помірна	157
Низька	239	Помірна	184	Помірна	179
Помірна	189	Низька	192	Помірна	231
Низька	238	Помірна	211	Помірна	183
Низька	223	Низька	201	Помірна	213
Помірна	279	Низька	203	Помірна	232
Низька	190	Низька	243	Помірна	134
Помірна	240	Помірна	181	Помірна	181
Низька	209	Помірна	382	Низька	234
Помірна	210	Низька	186	Низька	161
Низька	171	Помірна	198	Помірна	289
Помірна	255	Низька	165	Помірна	186
Помірна	232	Помірна	219	Низька	298
Низька	147	Помірна	196	Низька	211
Помірна	268	Низька	239	Помірна	189
Помірна	231	Помірна	259	Помірна	164
Низька	199	Низька	162	Низька	219

а) Побудуйте частотний розподіл змісту холестеролу окремо для групи з низькою та групи з помірною активністю. Побудуйте гістограму та частотний полігон для кожної підгрупи. Порівняйте частотні розподіли. Поясніть відмінності в обох частотних розподілах.

б) Побудуйте частотні розподіли ознаки «фізична активність» для всієї вибірки і окремо для осіб з концентрацією холестеролу вище 230 мг%. Відобразіть їх на графіках. Порівняйте розподіли.

Розподіли різних сукупностей відрізняються положенням на шкалі значень ознаки та ступенем відхилення дат від центра. Відповідно до цього, виділяють дві групи статистичних показників – *характеристики положення та показники варіації*. Характеристики положення відображають рівень розвитку ознаки у певній сукупності, або центральні тенденції. До них належать *середні величини*: мода, медіана, середня арифметична (див. п. 3.1). Показники варіації характеризують розсіювання дат. До них належать: розмах варіації, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації (див. п. 3.2).

3.1. СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ

Середня величина є центром розподілу, навколо якого групуються всі дати статистичної сукупності. Вона описує групу в цілому, характеризуючи рівень ознаки одним числом. Середня величина займає проміжне положення між мінімальним та максимальним значеннями ознаки, однак її числове значення може жодного разу не зустрітися серед вихідних спостережень. Середня величина – це величина абстрактна, нерідко вона набуває значень, яких не може бути серед фактичних дат. Наприклад, кількість дітей у реальній родині завжди

є цілим числом – одна дитина, дві тощо. Середнє число дітей у групі родин може набувати дробового значення – 1,9; 2,3 та ін.

У статистиці існують кілька середніх величин: *середня арифметична, середня квадратична, середня кубічна, середня геометрична, середня гармонійна, медіана, мода*. Правильно обрана величина адекватно відображає групу. Правильність знаходження середньої величини визначається обґрунтованістю її вибору для конкретної задачі. Якщо середня величина обрана правильно, то сумарний ефект невірних значень ознаки буде дорівнювати сумарному ефекту її середніх величин.

Неможливо встановити єдиний критерій для вибору й застосування тієї чи іншої середньої величини. У кожному випадку необхідно з'ясувати, яка з них найкраще відповідає меті дослідження. Найчастіше використовується середня арифметична. Її зручно використовувати для аналізу кількісних дат однорідної сукупності. Мода й медіана – додаткові характеристики розподілу. Вони придатні при аналізі асиметричних розподілів або розподілів з невизначеними крайніми значеннями. Моду та медіану доцільно використовувати, якщо дані представлені в умовних балах або рангах.

СЕРЕДНЯ АРИФМЕТИЧНА

Середня арифметична (\bar{x}) – це сума всіх дат, що поділена на їхню кількість:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \quad (3.1)$$

де x – окремі дати, n – кількість дат.

Перевірка правильності вибору середньої арифметичної для певної задачі здійснюється підсумовуванням середніх і фактичних дат:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n\bar{x}. \quad (3.2)$$

Рівність цих сум указує на правильність знаходження середньої арифметичної.

Середня арифметична адекватно відображує центральні тенденції груп, у яких розподіл дат близький до нормального. У випадках, коли розподіл дат дуже асиметричний, середня арифметична є неадекватною.

Приклад 3.1

При дослідженні концентрації цукру в крові було проведено три паралельні аналізи й отримані такі результати: 109, 120, 116 мг%. Результатом аналізу є середня арифметична з окремих визначень:

$$\bar{x} = \frac{109 + 120 + 116}{3} = 115 \text{ мг\%}.$$

Перевірка

$$109 + 120 + 116 = 345,$$

$$115 + 115 + 115 = 345.$$

ЗВАЖЕНА СЕРЕДНЯ АРИФМЕТИЧНА

Середню арифметичну зважену ($\bar{\bar{x}}$) використовують у тих випадках, коли потрібно об'єднати середні арифметичні декількох груп. Середню зважену знаходять за формулою:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum (\bar{x}_i n_i)}{\sum n_i}, \quad (3.3)$$

де \bar{x}_i – середня арифметична i -ї групи, n_i – кількість дат в i -й групі.

Приклад 3.2

Три лаборанти зробили аналіз одного зразка корму для тварин. Перший лаборант зробив три паралельні проби й одержав середній вміст білка 17,6 %, другий – сім проб із середнім результатом 16,3 %, третій – п'ять проб із середнім результатом 15,8 %. Використовуючи ці дані, знайдемо вміст білка в цьому кормі:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{3 \cdot 17,6 + 7 \cdot 16,3 + 5 \cdot 15,8}{15} = 16,39 \text{ \%}.$$

Перевірка

$$17,6 + 17,6 + 17,6 + 16,3 + 16,3 + 16,3 + 16,3 + 16,3 + 16,3 + 16,3 + 15,8 + 15,8 + 15,8 + 15,8 + 15,8 = 15 \cdot 16,39.$$

СЕРЕДНЯ ГЕОМЕТРИЧНА

Середня геометрична (\bar{x}_g) – це корінь n -го ступеня з добутку n дат:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (3.4)$$

У біологічних дослідженнях середня геометрична використовується при описі ознак, що характеризують процеси, а також для характеристики дуже асиметричних розподілів. Існує два типи задач на характеристику процесів. Середню геометричну використовують, якщо необхідно дізнатися про середні прирости ознак за певний період: У задачах першого типу є відомості про прирости ознак за кожний з декількох рівних періодів, за якими необхідно знайти середній приріст за весь строк. У задачах другого типу є дані про абсолютні значення ознак на початку й наприкінці строку, і необхідно знайти середній приріст за окремі періоди.

Середню геометричну обчислюють за допомогою десяткових логарифмів. Для рішення різних задач використовуються різні формули. Формула обчислення середньої геометричної з абсолютних збільшень ознак за однакові проміжки часу:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\sum \lg x}{n}, \quad (3.5)$$

де x – окремі дати, n – кількість дат.

При обчисленні середньої геометричної з відносних збільшень ознаки за рівні проміжки часу використовується формула:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\sum \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{n}, \quad (3.6)$$

де $\left(\frac{x_2}{x_1} \right)$ – відношення кінцевої (x_2) та початкової (x_1) дат.

Якщо потрібно обчислити середню геометричну за різницею між кінцевим (x_2) та початковим (x_1) збільшеннями ознаки (другий тип задач), використовується формула:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\lg x_2 - \lg x_1}{n}, \quad (3.7)$$

де x_2 – кінцеве, x_1 – початкове значення ознаки.

Перевірка правильності знаходження середньої геометричної проводиться порівнянням добутку фактичних дат з добутком n середніх величин:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \bar{x}_g^n \quad (3.8)$$

Приклад 3.3

Користуючись даними, що наведені в табл. 3.1, обчислимо середньорічний приріст дитини.

Таблиця 3.1. Середньорічний приріст дитини

Вік, роки	Довжина тіла x , см	Абсолютний приріст $x_2 - x_1$, см	Відносний приріст $\frac{x_2}{x_1}$
1	73		
2	90	17	1,23
3	98	8	1,09
4	105	7	1,07
5	111	6	1,06
6	115	4	1,04

Розв'язання

Розраховуємо щорічний приріст – абсолютний і відносний (табл. 3.1).

1. Абсолютний середньорічний приріст:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[5]{17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4} = 7,41 \text{ см.}$$

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\sum \lg x}{n} = \frac{\lg 17 + \lg 8 + \lg 7 + \lg 6 + \lg 4}{5} = 0,87.$$

$$\bar{x}_g = 10^{0,87} = 7,41 \text{ см.}$$

2. Відносний середньорічний приріст (формула 3.6):

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\sum \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{n} = \frac{\lg 1,23 + \lg 1,09 + \lg 1,07 + \lg 1,06 + \lg 1,04}{5} = 0,04.$$

$$\bar{x}_g = 10^{0,04} = 1,096 \approx 1,1.$$

3. Відносний середньорічний приріст (формула 3.7):

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\lg x_2 - \lg x_1}{n} = \frac{\lg 115 - \lg 73}{5} = 0,04.$$

$$\bar{x}_g = 10^{0,04} = 1,096 \approx 1,1.$$

Відповідь

Абсолютний середньорічний приріст – 7,41 см, відносний – 1,1.

Приклад 3.4

З 1650 по 1900 р. населення Землі збільшилося з 470 млн осіб до 1571 млн. Знайдіть середньорічний приріст населення.

Розв'язання

Відносний середньорічний приріст населення:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\lg x_2 - \lg x_1}{n} = \frac{\lg 1571 - \lg 470}{1900 - 1650} = 0,002;$$

$$\bar{x}_g = 10^{0,002} = 1,005.$$

Відповідь

Населення зростало на 0,5 % за рік.

Приклад 3.5

Знайдіть середню біомасу мідій (мг) із морських донних проб з 10 гідрологічних станцій:

1, 4, 8, 14, 24, 30, 48, 143, 5291, 57235.

Розв'язання

Розподіл значень у ряді дуже асиметричний, тому середня арифметична $\bar{x} = 6279,8$ неадекватно відображує центральні тенденції групи.

Використаємо середню геометричну:

$$\lg \bar{x}_g = \frac{\sum \lg x}{n} = \frac{(\lg 1 + \lg 4 + \lg 8 + \dots + \lg 57235)}{10} = 1,78;$$

$$\bar{x}_g = 10^{1,78} = 60,25.$$

Відповідь

Середня біомаса мідій становить 60,25 мг.

СЕРЕДНЯ КВАДРАТИЧНА

Середня квадратична (\bar{x}_s) є квадратним коренем із середньої арифметичної квадратів даних:

$$\bar{x}_s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}, \quad (3.9)$$

де x – окремі дані, n – кількість даних.

Середня квадратична застосовується в тих випадках, коли предметом дослідження є площа об'єкта, що має форму кола, але безпосередньо вимірюється його діаметр.

Приклад 3.6

Діаметр п'яти квіток хризантеми нового сорту становить 105, 126, 138, 119 і 140 мм. Охарактеризуйте цей сорт за середнім діаметром квіток.

Розв'язання

Середня квадратична:

$$\bar{x}_s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}} = \sqrt{\frac{(105^2 + 126^2 + 138^2 + 119^2 + 140^2)}{5}} = 126,26 \text{ мм.}$$

Середня арифметична:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{105 + 126 + 138 + 119 + 140}{5} = 125,6 \text{ мм.}$$

Яка із середніх величин – середня арифметична чи середня квадратична – точніше відображує ознаку? З'ясуємо це питання, перевіривши правильність розрахунку середньої, ґрунтуючись на принципі рівності сумарної дії. У наведеному прикладі це означає, що сума площ кожної окремої хризантеми повинна дорівнювати сумі такого ж числа однакових хризантем із радіусом середньої величини. Площа круга $S = \pi r^2$, $r = \frac{d}{2}$. Знаходимо площу кожної квітки і підсумовуємо:

$$3,14 \cdot (52,5^2 + 63^2 + 69^2 + 59,5^2 + 70^2) = 6256,95.$$

Загальна площа п'яти квіток із діаметром, який дорівнює середній квадратичній:

$$5 \cdot 3,14 \cdot 63,13^2 = 62570,73.$$

Загальна площа п'яти квіток із діаметром, який дорівнює середній арифметичній:

$$5 \cdot 3,14 \cdot 62,8^2 = 61918,29.$$

Бачимо, що сума площ із використанням середньої квадратичної ближче до фактичної, ніж при використанні середньої арифметичної.

Відповідь

Середній діаметр квіток – 126,26 мм.

Приклад 3.7

Від десяти медичних п'явок було отримано потомство: 8, 14, 10, 18, 13, 17, 21, 9, 25 і 28 нащадків. Яка середня плодючість медичних п'явок?

Розв'язання

Якщо нас цікавить середня плодючість групи з десяти п'явок-батьків, її слід розрахувати як середню арифметичну:

$$\bar{x} = \frac{8+14+\dots+28}{10} = 16,3 \text{ нащадка.}$$

Якщо ж ми плануємо одержувати потомство від наступних поколінь і нас цікавить плодючість не тільки батьків, але й дітей, онуків тощо, у цьому випадку середня арифметична не буде адекватною характеристикою. Плодючість, як відомо, має спадковий характер, тому в нащадків вона в середньому буде такою ж, як у батьків. Якщо в батьків n дітей, то онуків буде n^2 , правнуків – $(n^2)^2$ тощо. Тому в цьому випадку середня плодючість буде дорівнювати середній квадратичній:

$$\bar{x}_s = \sqrt{\frac{8^2+14^2+\dots+28^2}{10}} = 17,53 \text{ нащадка.}$$

Розрахуємо, скільки особин буде одержано в наступному поколінні. Якщо кожен нащадок (медична п'явка – гермафродит, кожна особина здатна народжувати потомство) утворить стільки ж нащадків, скільки його батьки, то в наступному поколінні буде:

$$8^2 + 14^2 + 10^2 + 18^2 + 13^2 + 17^2 + 21^2 + 9^2 + 25^2 + 28^2 = 3073 \text{ нащадки.}$$

Якщо ми скористаємось з цією метою середньою квадратичною, то одержимо те ж саме значення:

$$10 \cdot 17,53^2 = 3073 \text{ нащадки.}$$

Якщо ми скористаємось середньою арифметичною, то число нащадків буде менше за фактичне:

$$10 \cdot 16,3^2 = 2657 \text{ нащадків.}$$

Отже, цю ситуацію правильно відображає середня квадратична, а не середня арифметична.

Відповідь

Середньоквадратична плодючість – 17,5 нащадка.

СЕРЕДНЯ КУБІЧНА

Середня кубічна (\bar{x}_q) – це корінь третього ступеня із суми кубів дат:

$$\bar{x}_q = \sqrt[3]{\frac{\sum x^3}{n}}, \quad (3.10)$$

де x – окремі дати, n – кількість дат.

Середня кубічна застосовується у випадках, коли вивчається об'єм кулястого об'єкта, але безпосередньо вимірюється *діаметр*.

Приклад 3.8

Для характеристики нового сорту динь вимірювали діаметр плодів: 15, 18, 13, 21, 19 см. Необхідно знайти середній розмір плодів.

Розв'язання

Плоди характеризуються об'ємом, тому використаємо середню кубічну:

$$\bar{x}_q = \sqrt[3]{\frac{\sum x^3}{n}} = \sqrt[3]{\frac{15^3+18^3+13^3+21^3+19^3}{5}} = 17,66 \text{ см.}$$

Для порівняння розрахуємо середню арифметичну:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15+18+13+21+19}{5} = 17,20 \text{ см.}$$

Якою ж величиною характеризувати плоди: середньою арифметичною або середньою кубічною? Використаємо обидві середні величини, а потім перевіримо на принцип рівності дії: сумарний об'єм п'яти плодів повинен дорівнювати сумі об'ємів п'яти плодів із середнім діаметром.

Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Знайдемо об'єми кожного плода та підсумуємо їх:

$$\frac{4}{3} \cdot 3,14 (7,5^3 + 9^3 + 6,5^3 + 10,5^3 + 9,5^3) = 14404,23 \text{ см}^3.$$

Об'єм п'яти плодів із радіусом, який дорівнює середній кубічній:

$$\frac{4}{3} \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot 8,83^3 = 10808,91 = 14411,21 \text{ см}^3.$$

Об'єм п'яти плодів з радіусом, який дорівнює середній арифметичній:

$$\frac{4}{3} \cdot 5 \cdot 3,14 \cdot 8,60^3 = 9986,08 = 13314,77 \text{ см}^3.$$

Сума об'ємів, яка знайдена за допомогою середньої кубічної радіуса, ближче до фактичної, ніж при використанні середньої арифметичної.

Відповідь

Середній розмір плодів – 17,66 см.

СЕРЕДНЯ ГАРМОНІЙНА

Середня гармонійна (\bar{x}_h) – це величина, зворотна середній арифметичній чисел, які зворотні датам. Середня гармонійна розраховується як кількість дат, що поділена на суму їхніх зворотних значень:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}, \quad (3.11)$$

де n – кількість дат, x – окремі дати.

Середня гармонійна застосовується при усередненні дат, які характеризують швидкість процесів. Правильність знаходження середньої геометричної перевіряють, порівнюючи добуток зворотних значень фактичних дат з добутком n -го числа зворотних середніх значень:

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n} = n \cdot \frac{1}{\bar{x}_g} \quad (3.12)$$

П р и к л а д 3.9

П'ятеро студентів, що по черзі працюють на комп'ютері, виконали по 100 тестових завдань і витратили на це 10, 20, 25, 30 і 20 хвилин. Яка середня швидкість роботи студентів?

Розв'язання

Знайдемо швидкість роботи кожного студента:

10 тестів/хв, 5 тестів/хв, 4 тести/хв, 5 тестів/хв, і 3,33 теста/хв.

Розрахуємо середню арифметичну та середню гармонійну:

$$\bar{x} = \frac{10 + 5 + 4 + 5 + 3,33}{5} = 5,47 = \text{теста/хв};$$

$$\bar{x}_h = \frac{5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3,33}} = 4,76 \text{ теста/хв.}$$

Яка середня величина правильно відображує ситуацію? Для відповіді на це запитання скористасмося правилом рівності підсумовуючої дії. Правильно розрахована середня швидкість – це така швидкість, працюючи з якою по черзі на одному комп'ютері, студенти витратять на виконання всієї роботи стільки ж часу, скільки вони витратили, працюючи з різними швидкостями.

Якби студенти працювали зі швидкістю, яка дорівнює середній арифметичній, то на виконання $5 \cdot 100 = 500$ тестів вони б витратили $500 : 5,47 = 91,4$ хвилини. Якби вони працювали зі швидкістю, яка дорівнює середній гармонійній, то б витратили $500 : 4,76 = 105$ хвилин, тобто стільки, скільки вони фактично працювали ($10 + 20 + 25 + 30 + 20 = 105$). Отже, цю ситуацію точно відображує середня гармонійна, а не середня арифметична.

За формулою (3.12): $1:10 + 1:5 + 1:4 + 1:3,33 + 1:5 = 5 \cdot (1:4,76)$.

Якби питання було поставлено так: скільки в середньому хвилин витратив кожний студент на виконання роботи, то правильною відповіддю було б визначення середньої арифметичної:

$$(10 + 20 + 25 + 20 + 30) : 5 = 21 \text{ хвилина.}$$

Про правильність такої відповіді свідчить перевірка з використанням середньої швидкості: $21 \cdot 5 = 105$ хвилин.

Відповідь

Середня швидкість роботи студентів – 4,76 теста/хв.

МОДА

Мода (Mo) – це дата, яка найчастіше зустрічається в сукупності. Найбільш чисельний клас називається *модальним*. На графіках частотних розподілів модальне значення відповідає найвищій точці.

У частотного розподілу може бути більше ніж одна мода. Такий розподіл називається *полімодальним (багатовершинним)*. Розподіл із двома вершинами називається *бімодальним (двовершинним)*. Багатовершинність графіка свідчить про гетерогенність сукупності, про наявність якихось угруповань у її межах – вікових, статевих тощо. Полімодальність може виникнути, якщо невеликі за об'ємом сукупності піддаються занадто дробному групуванню.

Мода може характеризувати не тільки кількісні, але й якісні дані. Наприклад, не можна знайти середню арифметичну або медіану для розподілу якісної ознаки «колір очей», але легко визначити модальний колір очей.

У безінтервальних рядах мода визначається за найбільшою частотою. Наприклад, у цьому ряді найбільшу частоту має клас зі значенням 15, $Mo = 15$:

Клас	14	15	16	17
Частота	1	7	5	2

В інтервальних рядах мода обчислюється за формулою:

$$Mo = x_{\text{нижн}} + \lambda \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_2 - f_1 + f_3} \right), \quad (3.13)$$

де $x_{\text{нижн}}$ – нижня межа модального класу, f_1 – частота класу, що передуює модальному, f_2 – частота модального класу, f_3 – частота класу, що йде після модального, λ – ширина класового інтервалу.

Приклад 3.10

Обчислимо моду в інтервальному ряді:

Клас	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20
Частота	2	6	9	3

Розв'язання

Модальний клас відповідає інтервалу 11 – 15. Відповідно, нижня межа модального класу $x_{\text{нижн}} = 11$, частота класу, що передуює модальному, $f_1 = 6$, частота модального класу $f_2 = 9$, частота класу, що йде після модального, $f_3 = 3$. Ширина класового інтервалу $\lambda = 5$.

$$Mo = x_{\text{нижн}} + \lambda \left(\frac{f_2 - f_1}{2f_2 - f_1 + f_3} \right) = 11 + 5 \left(\frac{9 - 6}{2 \cdot 9 - 6 + 3} \right) = 12.$$

Відповідь

$Mo = 12$.

МЕДІАНА

Медіана (Mn) – це дата, яка ділить ряд розподілу навпіл. До медіани розташовуються перші 50 % дат, решта 50 % розташовуються після неї. На значення медіани слабше, ніж на середню арифметичну, впливають дати, що випадають. Медіану зручно використовувати для характеристики дуже асиметричних розподілів. Іноді зустрічаються *розподіли з невизначеними крайніми датами* – наприклад, при вимірі часу поведінкової реакції дата може виглядати як «менше ніж 5 хвилин» або «більше ніж 30 хвилин». Для такого розподілу не можна розрахувати середню арифметичну, але можна розрахувати медіану.

Для малих рядів медіана знаходиться просто. Ряд ранжують, розташовуючи дати в порядку зростання. При непарній кількості членів за медіану приймають центральну дату, при парній – напівсуму двох центральних дат.

Розглянемо такий ряд: 8, 10, 11, 14, 15. У ньому медіана займає серединне положення й дорівнює 11.

У ряді 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9, 9 середина розташована між сімками, медіана дорівнює 7. Середина ряду 9, 12, 15, 17 розташована між 12 і 15, медіана дорівнює $Mn = (12 + 15) : 2 = 13,5$.

Великі ряди нерационально ранжувати тільки для того, щоб знайти медіану. У таких випадках дані розподіляються по класових інтервалах, а медіану знаходять за формулою:

$$Mn = x_{\text{нижн.}} + \lambda \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_{\text{поперед.}}}{f_{\text{медіан.}}} \right), \quad (3.14)$$

де $x_{\text{нижн.}}$ – нижня межа класового інтервалу, до якого належить медіана, $\sum f_{\text{поперед.}}$ – сума частот усіх класів, що розташовані перед медіанним класом, $f_{\text{медіан.}}$ – частота медіанного класу.

Приклад 3.11

Обчислимо медіану для інтервального ряду:

Клас	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20
Частота	2	6	9	3

Розв'язання

Знайдемо інтервал, у якому повинна бути медіана. Для цього послідовно підсумуємо класові частоти. Медіана належить до того класу,

після якого сума частот починає перевищувати $\frac{n}{2} = 10$.

Послідовно підсумуємо частоти всіх класів:

$$2 + 6 = 8,$$

$$2 + 6 + 9 = 17,$$

$$2 + 6 + 9 + 3 = 20.$$

Сума починає перевищувати $\frac{n}{2} = 10$ після додатка частоти третього класу (11 – 15). Отже, в цьому класі міститься медіана. Нижня межа класу, до якого належить медіана $x_{\text{нижн.}} = 11$, сума частот всіх класів, що розташовані перед медіанним $\sum f_{\text{поперед.}} = 8$, частота медіанного класу $f_{\text{медіан.}} = 9$. Ширина класового інтервалу $\lambda = 5$.

$$Mn = x_{\text{нижн.}} + \lambda \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_{\text{поперед.}}}{f_{\text{медіан.}}} \right) = 11 + 5 \left(\frac{10 - 8}{9} \right) = 12,11.$$

Відповідь

$$Mn = 12,11.$$

3.2. ПОКАЗНИКИ ВАРІАЦІЇ

При обчисленні середніх величин інформація про різноманіття об'єктів у групі втрачається. Дослідник і практик прагне знати, наскільки мінлива та чи інша ознака. Зміна різноманіття може бути більш чутливим індикатором реакції організмів на зовнішні впливи, ніж зміна середнього значення ознаки. Ефективна селекція можлива в групах тварин або рослин із високою мінливістю ознаки, тому що однорідна група не містить генетичного матеріалу для добору.

Інформацію про різноманіття ознак дають показники варіації. Вони характеризують розсіювання дат навколо центра розподілу. На рис. 3.1 представлені розподіли кількісної ознаки у двох групах. Групи мають однакові середні арифметичні, але істотно розрізняються за характером мінливості ознаки.

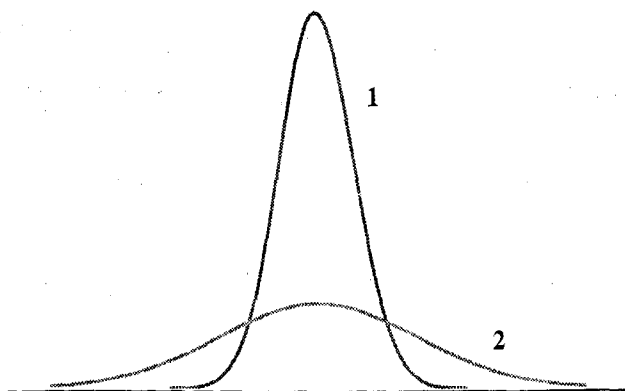


Рис. 3.1. Розподіли з однаковими середніми та неоднаковою варіацією:

1 – більшість дат групується поблизу середини розподілу,

2 – багато дат відхиляються далеко від середини.

У першому випадку розсіювання дат невелике, у другому – велике

МЕЖІ ТА РОЗМАХ ВАРІАЦІЇ

Серед усіх значень, яких набуває ознака, є найбільше та найменше. Максимальне й мінімальне значення ознаки в групі (x_{\max} і x_{\min}) називаються *межами варіації*. Різницю між максимальною й мінімальною датами виражає *розмах варіації* R :

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (3.15)$$

Розмах варіації є одним із показників різноманіття в групі, але він має ряд недоліків. Його інформативність невелика, тому що не дає відомості про різноманіття ознаки в інтервалі між крайніми датами. Крім того, значення цього показника залежить від розміру групи (підвищується при збільшенні числа спостережень). На показник розмаху варіації дуже впливають екстремальні дати.

ЛІНІЙНЕ ВІДХИЛЕННЯ

Ще одним показником різноманітності є *лінійне відхилення* (d) – величина, що показує, наскільки окрема дата x відхиляється від середньої арифметичної \bar{x} :

$$d = x - \bar{x}. \quad (3.16)$$

Якщо дата більша, ніж середня арифметична, лінійне відхилення позитивне, якщо менша, – негативне. Лінійне відхилення як показник варіації має істотний недолік: сума лінійних відхилень дат у групі завжди дорівнює нулю, а це не дає можливості порівнювати різні групи. Для того, щоб подолати цей недолік, підсумовують абсолютні значення відхилень – незважаючи на знак. Після ділення на кількість дат n одержуємо *середнє лінійне відхилення*:

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}. \quad (3.17)$$

СТАНДАРТНЕ (СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ) ВІДХИЛЕННЯ

Стандартне, або середньоквадратичне, відхилення (s) – це найбільш зручна міра різноманіття. Саме її найчастіше використовують для опису варіювання ознаки в групі. Цей показник лежить в основі багатьох методів статистичного аналізу. Стандартне відхилення розраховується за формулою (табл. 3.2):

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}, \quad (3.18)$$

де x – окремі дати, \bar{x} – середня арифметична, n – кількість дат.

Для розрахунків стандартного відхилення зручніша формула (табл. 3.3):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right)}, \quad (3.19)$$

Таблиця 3.2. Розрахунок стандартного відхилення. Спосіб 1-й

	x	(2) $x - \bar{x}$	(3) $(x - \bar{x})^2$
	10	$(10 - 6) = 4$	16
	8	$(8 - 6) = 2$	4
	6	$(6 - 6) = 0$	0
	4	$(4 - 6) = -2$	4
	2	$(2 - 6) = -4$	16
$n = 5$	$\sum x = 30$	(4) $\sum (x - \bar{x})^2 = 40$	

(1) $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$

(5) $s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = 3,16$

Стандартне відхилення виражається в тих же одиницях, що й сама ознака. Оскільки різноманіття не може бути негативним, використовується тільки позитивне значення кореня.

Таблиця 3.3. Розрахунок стандартного відхилення. Спосіб 2-й

	x	(1) x^2
	10	100
	8	64
	6	36
	4	16
	2	4
$n = 5$	(2) $\sum x = 30$	(3) $\sum x^2 = 220$
(4) $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(220 - \frac{30^2}{5} \right)} = 3,16$		

СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ СУМАРНОЇ ГРУПИ

Нерідко зібрати необхідний експериментальний матеріал за один прийом неможливо, тому дослідження проводять кілька разів, одержуючи дані, що порівнюються. У таких випадках можна зробити статистичний аналіз кожної повторності, а для розрахунку підсумкових показників скористатися статистиками, які вже розраховані.

У таких випадках середня арифметична розраховується як середня зважена (3.3), а стандартне відхилення розраховується за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{\sum s_i^2 (n_i - 1)}{\sum n_i - a}}, \quad (3.20)$$

де n_i – чисельність окремих груп, що об'єднуються, s_i – стандартне відхилення кожної групи, a – число груп.

СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ЯКІСНИХ ДАТ

Якісні показники виражаються в частках або відсотках. Стандартне відхилення для якісних ознак, які представлені в частках, обчислюється за формулою:

$$s = \sqrt{p(1 - p)}, \quad (3.21)$$

де p – частка (у частка: одиниці).

Стандартне відхилення для частки, яка представлена у відсотках, обчислюється за формулою:

$$s = \sqrt{p\%(100 - p\%)}, \quad (3.22)$$

де $p\%$ – частка (у відсотках).

Значення стандартного відхилення використовуються у деяких статистичних розрахунках, наприклад для обчислення довірчого інтервалу (див. п. 5.2) або стандартної похибки (див. п. 5.1).

ДИСПЕРСІЯ

Дисперсія (s^2) є другим ступенем стандартного відхилення (порівняйте формули (3.18) і (3.23)):

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (3.23)$$

де x – окремі дані, \bar{x} – середня арифметична, n – кількість дат.

Для обчислення дисперсії можна використати формулу:

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right). \quad (3.24)$$

Алгоритми розрахунку дисперсії аналогічні алгоритмам для стандартного відхилення (табл. 3.2, 3.3) з тією відмінністю, що на заключному етапі отримане значення s зводиться в другий ступінь.

Дисперсія як один з найважливіших показників різноманіття застосовується в ряді статистичних методів. Цей показник використовується для порівняльної оцінки однойменних величин. Порівняння дисперсій лежить в основі одного з найбільш розповсюджених статистичних методів – дисперсійного аналізу.

Як описовий індекс дисперсія має істотний недолік: її значення виражається у квадратах одиниць виміру. Тому дисперсія рідко використовується в описовій статистиці.

КОЕФІЦІЄНТ ВАРІАЦІЇ

У дослідницькій роботі доводиться порівнювати ознаки, які виражаються в різних одиницях виміру. Стандартне відхилення для цього не придатне, тому що воно використовується для порівняльної

оцінки однойменних величин. Для порівняння ознак, які виражені в різних одиницях виміру, використовується коефіцієнт варіації (Cv), значення якого виражається у відсотках:

$$Cv = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \%, \quad (3.25)$$

де s – стандартне відхилення, \bar{x} – середня арифметична.

Наприклад, середній зріст однієї зі статевих-вікових груп людини становить 170 см ($s = 5$ см), а середня маса – 70 кг ($s = 6,6$ кг). Порівняння коефіцієнтів варіації показує, що маса ($Cv = 9,43 \%$) – ознака, що варіює більше, ніж зріст ($Cv = 2,94 \%$).

3.3. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Які особливості розподілів характеризуються:
 - а) середніми величинами; б) показниками варіації?
2. Охарактеризуйте ситуації, коли як середню величину переважніше використовувати:
 - а) моду, б) медіану.
3. Поясніть, чому як показник варіації в описовій статистиці використовують стандартне відхилення, а не дисперсію.
4. Якій середній величині ви надасте перевагу для характеристики даного розподілу – моді, медіані чи середній арифметичній?

Поясніть.

 - а) Класи розподілу: чорна, сіра, руда, біла ...
 - б) Статистична сукупність: 10, 14, 17, 14, 23, 48, 351, 10938.

5. Визначте моду, медіану та середню арифметичну для таких рядів:

- а) 8, 10, 10, 10, 11, 13, 13, 15, 16, 16.
 б) 3, 4, 7, 5, 4, 6, 4, 5, 8, 3, 4, 5, 6, 5, 4.
 в) 18, 14, 17, 22, 16, 26, 33, 27, 35, 28, 44, 40, 31, 53, 70, 73, 62, 74, 93, 103, 75, 86, 84, 90, 79, 99, 73.

6. Визначте моду та медіану для такого розподілу:

Класи	1	2	3	4	5
Частота	12	9	20	24	15

7. Визначте середню арифметичну для таких розподілів.

а)

Класи	10	11	12
Частота	2	3	1

б)

Класи	5	6	7
Частота	4	2	2

8. Для вибірки 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6 розрахуйте стандартне відхилення, дисперсію, коефіцієнт варіації.

9. Розрахуйте стандартне відхилення для набору даних, якщо дисперсія дорівнює 144.

10. Розрахуйте середню арифметичну, моду, медіану, лінійне та стандартне відхилення для кожного з даних розподілів. Яка із середніх величин найбільше підходить для характеристики кожного розподілу? Відповідь поясніть.

- а) (2, 3, 4, 4, 4, 5, 6); б) (2, 3, 4, 4, 4, 5, 20);
 в) (-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5).

11. Визначте модальний клас у завданні 14, п. 2.6. Розрахуйте стандартне відхилення для частоти модального класу.

12. Відобразіть схематично на одному графіку два розподіли (1 і 2) так, щоб:

- а) $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, $s_1 < s_2$;
 б) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, $s_1 = s_2$;
 в) $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, $s_1 < s_2$;
 г) $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, $s_1 > s_2$.

13. Порівняйте розподіли з такими характеристиками:

- а) $\bar{x} = 540$, $s = 100$ и $\bar{x} = 555$, $s = 100$;
 б) $\bar{x} = 2,43$, $s = 0,30$ и $\bar{x} = 3,15$, $s = 0,40$.

4

РОЗПОДІЛИ ТА ЙМОВІРНОСТІ

4.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

З поняттям ймовірності ми зустрічаємось постійно, але часто про це навіть не підозрюємо. Ми вживаємо висловлювання, у яких присутня ймовірнісна оцінка. Вирішуючи, чи варто брати парасоль, ми оцінюємо ймовірність дощу. Вибираючи, де краще перейти вулицю, оцінюємо ймовірність автомобільного наїзду. Перебуваючи перед проблемою вибору, підкидаємо монету. Всі ці дії так чи інакше пов'язані з ймовірністю.

ПОДІЇ ТА ЙМОВІРНОСТІ

Загальне уявлення про теорію ймовірностей одержують на прикладі ігор. Монети, карти та гральні кістки – модельні об'єкти статистики, як, наприклад, дрозодфіла в генетиці чи жаба у фізіології. У монети два боки, і якщо її підкинути, то вона впаде або «орлом», або «решкою»¹, якщо виключити таку фантастичну подію, що вона стане на ребро.

¹ На старих монетах Російської імперії з одного боку був герб у вигляді двоголового орла, а з іншого – візерунок у вигляді решітки – «решки».

Мовою теорії ймовірностей результат одноразового випробування (підкидання монети) називається *подією*. Під *випробуванням* мають на увазі комплекс умов, необхідних для того, щоб той або інший результат випробування міг здійснитися. Якщо можливим є тільки один результат випробування, подія називається *достовірною* (монета впаде, а не залишиться літати в повітрі). Якщо подія відбутися не може, вона називається *неможливою* (якщо на монеті по обидва боки – «орли», ніколи не випаде «решка»).

Існують події, результат яких заздалегідь невідомий. Вони можуть відбутися, а можуть і не відбутися. Наприклад, при підкиданні монети орел може випасти, а може і не випасти. Такі події називаються *випадковими*. Результат випадкової події можна передбачити тільки з деякою ймовірністю. *Ймовірність* – числова міра можливості того, що при одиничному випробуванні подія здійсниться. Ймовірність події (p) виражається відношенням числа сприятливих випробувань m до числа всіх можливих випробувань n :

$$p = \frac{m}{n}. \quad (4.1)$$

Ймовірність являє собою число від нуля до одиниці. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю, ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Гральна кістка – це кубик, на шести гранях якого нанесені крапки – від 1 до 6. Якщо гральну кістку підкинути, то з ймовірністю $1/6$ на верхній грані випаде одиниця, або двійка, або будь-яке інше число до шести. Ймовірність витягнути даму пік з колоди у 52 карти дорівнює $1/52$, а ймовірність витягнути кожну з 13 карт цієї ж масті дорівнює $13/52 = 1/4$.

Кожне підкидання монети може закінчитися однією з двох взаємовиключних подій – падінням «орлом» або «решкою». Ймовірність кожної із цих можливих подій дорівнює $1/2$. Ймовірність того, що монета впаде на ребро, дорівнює 0. Ймовірність того, що монета впаде, а не зависне у повітрі, дорівнює 1.

Скільки б разів не випав «орел» при підкиданні монети, ймовірність того, що наступного разу знову випаде «орел», однаково залишається рівною $1/2$. Якщо довго кидати монети, то в половині випадків вони падають догори «орлом», у половині випадків – «решкою». У цьому проявляється *закон великих чисел*: при збільшенні числа випробувань частота очікуваної події наближається до її ймовірності.

Випадкові події, які у певних умовах не можуть відбутися одночасно, називаються *несумісними*. Народження хлопчика і дівчинки при одноплідній вагітності – події несумісні: народиться *або* хлопчик, *або* дівчинка. Якщо родина планує мати одну дитину, то вона буде мати або сина, або дочку – відбудеться тільки одна з несумісних подій.

Випадкові події, які в певних умовах можуть відбутися одночасно, називаються *сумісними*. Якщо родина планує двох дітей, то народження хлопчика і дівчинки – події сумісні. Перша дитина може виявитися дівчинкою, а друга – хлопчиком, або навпаки.

ДОДАВАННЯ Й МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

При оцінці ймовірності декількох подій використовують закони додавання та множення ймовірностей. Позначимо ймовірність очікуваної події символом p , а ймовірність протилежної події – символом q .

Ймовірність того, що здійсниться яка-небудь із несумісних подій, дорівнює одиниці: $p + q = 1$.

Ймовірність того, що одночасно відбудуться незалежні сумісні події, дорівнює добутку ймовірностей кожної з подій: $p \cdot q$.

Додавання ймовірностей несумісних подій

Ймовірності несумісних подій додаються одна до одної. Ймовірність того, що за певних умов здійсниться яка-небудь із несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей кожної події.

Родина очікує дитину. Відповідно до теорії хромосомного визначення статі, ймовірність народження хлопчика – $1/2$, дівчинки – теж $1/2$. Якщо планується одна дитина, то народження хлопчика і народження дівчинки – події несумісні. Ймовірність, що здійсниться яка-небудь з несумісних подій, дорівнює сумі ймовірностей кожної події:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ймовірність народження або хлопчика, або дівчинки, дорівнює 1.

Множення ймовірностей сумісних незалежних подій

Ймовірності незалежних сумісних подій перемножуються. Ймовірність того, що за певних умов сумісні події відбудуться одночасно, дорівнює добутку ймовірностей кожної події окремо.

Родина планує мати двох дітей. Ймовірність того, що першим народиться хлопчик (або дівчинка), дорівнює $1/2$. Стать другої дитини (як і всіх наступних) не залежить від статі першої дитини. Ймовірність народження хлопчика (або дівчинки) завжди залишається рівною $1/2$. Ймовірність двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей кожної події. Ймовірність того, що в родині буде два хлопчики, дорівнює $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, дві дівчинки – також $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. З такою ж ймовірністю першою народиться дівчинка, а другим – хлопчик. Те ж саме є справедливим і для зворотного порядку: перша дитина – хлопчик, друга – дівчинка. У цьому, в 25 % сімей з двома дітьми обидві дитини будуть хлопчиками, у 25 % – дівчатками, у 25 % старшою буде донька, молодшим – син, у 25 % – старший син і молодша донька.

Застосуємо до цієї ситуації закон додавання ймовірностей. Для цього необхідно розрізнити сумісні й несумісні події. Виділимо категорію родин, де обидві дитини – однієї статі. Це родини з двома хлопчиками й родини з двома дівчатками. Ці події несумісні – у родині або хлопчики, або дівчатка. Ймовірність того, що в родині дві дитини однієї статі, дорівнює сумі ймовірностей народження двох хлопчиків ($1/4$) і двох дівчаток ($1/4$), тобто $1/2$.

Закон додавання й множення ймовірностей можна перефразувати як закон «і / або». У ситуації «і» потрібно перемножувати, у ситуації «або» – додавати. Закони додавання й множення ймовірностей використовують, наприклад, під час медико-генетичного консультування, у криміналістиці тощо.

Приклад 4.1

Від пари чорних кішок, які гетерозиготні за генами кольору шерсті ($Aa \times Aa$), з імовірністю $3/4$ може народитися чорне кошеня та з імовірністю $1/4$ – біле. Від гетерозиготних зеленооких кішок ($Bb \times Bb$) з імовірністю $1/4$ може народитися синьооке та з імовірністю $3/4$ – зеленооке кошеня. Якщо один з батьків довгошерстий (cc), а другий гетерозиготний короткошерстий (Cc), то в них з імовірністю $1/2$ народиться як короткошерсте, так і довгошерсте кошеня. Усі три пари ознак успадковуються незалежно. Розрахуємо ймовірність народження білого синьоокого кошеняти з довгою шерстю.

Розв'язання

Розділимо події на сумісні й несумісні. Успадкування протилежних станів тієї самої ознаки (наприклад, довгої і короткої шерсті) – події несумісні. Успадкування будь-яких станів різних ознак (наприклад, синіх очей і короткої шерсті) – події сумісні. Перемножимо ймовірності успадкування кожної з названих ознак:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Відповідь

Серед усіх нащадків даної пари кішок білих синьооких кошенят з довгою шерстю буде близько 3 %.

Отримане значення ймовірності дозволяє нам приблизно оцінити, скільки кошенят повинно народитися в цієї пари кішок (або інших батьків з такими ж генотипами), щоб серед них було кошеня з бажаним поєднанням ознак.

Приклад 4.2

Світлана звернулася до медико-генетичної консультації, де їй було складено родовід. Прадід Світлани за материнською лінією Іван був дальтоніком. Яка ймовірність народження у Світлани дитини з дальтонізмом?

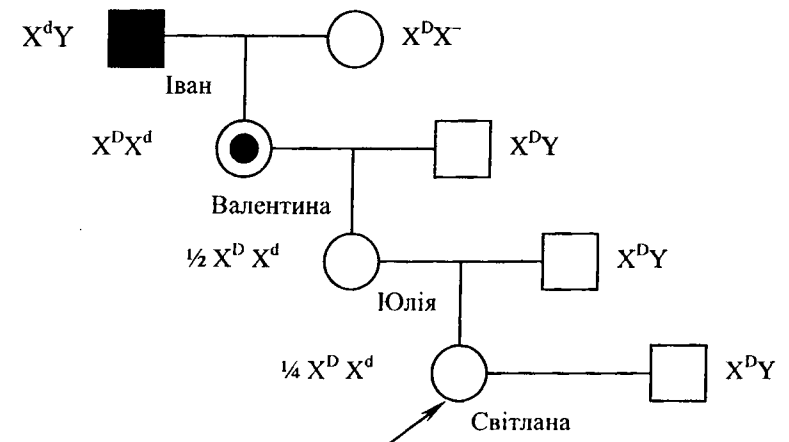


Рис. 4.1. Родовід до прикладу 4.2

Розв'язання

Дальтонізм, або кольорова сліпота, – це зчеплене зі статтю захворювання. Воно залежить від рецесивного гена d , що розташований в X-хромосомі. Генотип здорового чоловіка – $X^D Y$, хворого – $X^d Y$. Генотип здорової жінки може бути як $X^D X^D$, так і $X^D X^d$; в останньому випадку жінка є носієм гена дальтонізму. Для визначення ймовірності народження у Світлани дитини-дальтоніка, необхідно обчислити ймовірність того, що вона є носієм, тобто має генотип $X^D X^d$.

Звернемося до родоводу. Генотип Івана – $X^d Y$. З імовірністю 1 він передав свій дочці Валентині статеву хромосому з геном дальтонізму (X^d). Другу X-хромосому Валентина одержала від матері. Генотип

Валентини $X^D X^d$, вона є носієм гена дальтонізму. З імовірністю $1/2$ Валентина могла передати Юлії кожен з X -хромосом. Тобто ймовірність того, що Юлія також є носієм гена дальтонізму, дорівнює $1/2$. Якщо Юлія має генотип $X^D X^d$, то вона, у свою чергу, з імовірністю $1/2$ могла передати X^d -хромосому Світлані. Імовірність того, що Світлана є носієм гена дальтонізму, розраховується множенням імовірностей сумісних подій: $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Якщо Світлана – носій, то ймовірність передачі гена дальтонізму її дитині дорівнює $1/2$. У цьому випадку захворювання виявиться тільки у сина, гетерозиготна дочка буде мати нормальний зір. Імовірність того, що дитина буде хлопчиком, дорівнює $1/2$.

Імовірність народження у Світлани хворої дитини дорівнює добутку ймовірності того, що вона – носій гена дальтонізму, на ймовірність передачі відповідного гена дитині та на ймовірність народження хлопчика:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Відповідь

Імовірність народження у Світлани дитини з дальтонізмом – $\frac{1}{16}$.

Приклад 4.3

За залишками біологічного матеріалу з місця скоєння злочину було визначено генотип злочинця згідно з деякими локусами. Генотипи за цими локусами в знайденому зразку та їх частоти в популяції наведені у табл. 4.1. У людини, яка є підозрюваною в скоєнні злочину, виявився точно такий же генотип за цими локусами. Яка ймовірність того, що біологічний матеріал належить підозрюваному?

Розв'язання

Визначимо ймовірність поєднання цих чотирьох генотипів в індивіда з досліджуваної популяції. Для цього перемножимо популяційні частоти за кожним локусом:

$$P = 0,05 \cdot 0,02 \cdot 0,06 \cdot 0,03 = 1,8 \cdot 10^{-6} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ \%}.$$

Таблиця 4.1. Генотипи і частоти

Генотипи біологічного матеріалу	Частоти генотипів у популяції
FGA / 21,24	0,05
PENTAE / 7,14	0,02
D13S317 / 12,13	0,06
D16S539 / 10,12	0,03

Імовірність поєднання цих генотипів в одній людині дуже мала, і це поєднання виявлене в підозрюваного. Імовірність того, що біологічний матеріал належить підозрюваному, дорівнює:

$$100 \% - 1,8 \cdot 10^{-4} \% = 99,99982 \text{ \%}.$$

В і д п о в і д ь: ймовірність дорівнює 99,99982 %.

4.2. БІНОМІАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Розглянемо випадок, коли у випробуванні можливі два несумісні результати. Наприклад, монета падає «орлом» або «решкою», народжується хлопчик або дівчинка, на гральному кубикі випадає одиниця або не одиниця, рецесивний алель передається нащадкам або не передається. Припустимо, нас цікавить одна із двох можливих альтернатив; позначимо її як подію A . Повторимо випробування n раз. Тоді ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться m раз, дорівнює:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (4.2)$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (! – знак факторіала; запис $n!$ означає добуток усіх цілих чисел від 1 до n включно), p – ймовірність події A , q – ймовірність альтернативної події.

Формула (4.2) називається *формулою Бернуллі*.

Приклад 4.4

Яка ймовірність народження двох хлопчиків серед п'яти немовлят?

Розв'язання

Подія А – народження хлопчика, її ймовірність $p = 0,5$ (відповідно до теорії хромосомного визначення статі), ймовірність альтернативної події (народження дівчинки) $q = 0,5$.

Загальне число випробувань $n = 5$, серед них $m = 2$ завершуються подією А. За формулою Бернуллі (4.2), шукана ймовірність дорівнює:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^{(5-2)} = 0,3125.$$

Відповідь

Ймовірність того, що серед п'яти немовлят буде два хлопчики, дорівнює 0,3125.

Аналогічно можна розрахувати ймовірності появи 0, 1, 3, 4 і 5 хлопчиків серед 5 немовлят. Утворюється ряд:

$$P_5^0 = 0,0312; P_5^1 = 0,1562; P_5^2 = 0,3125; P_5^3 = 0,3125; P_5^4 = 0,1562; P_5^5 = 0,0312.$$

Ці ймовірності відповідають частотам, з якими 0, 1, 2, 3, 4 і 5 хлопчиків зустрічаються у вибірках з 5 немовлят. Розраховані частоти утворюють розподіл, що зображений на рис. 4.2. Такий розподіл називається *біноміальним*.

Біноміальний розподіл описує розподіл ймовірностей здійснення певної події А в n незалежних випробуваннях, які можуть закінчитися двома можливими результатами. Інакше кажучи, це розподіл частот ознаки, що має два стани, у вибірках обсягу n . Назва розподілу обумовлена тим, що ймовірності p та q розподіляються як коефіцієнти при розкладанні бінома Ньютона $(p + q)^n$:

$$\sum_{m=0}^n P_n^m = (p + q)^n. \quad (4.3)$$

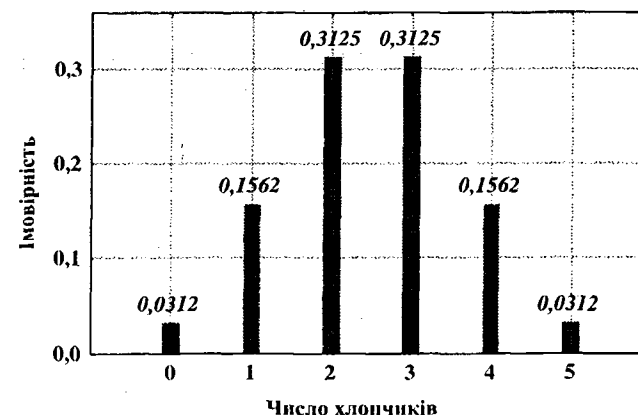


Рис. 4.2. Розподіл ймовірностей появи 0, 1, 2, 3, 4, 5 хлопчиків серед 5 немовлят

При $p = q$ біноміальна крива симетрична щодо максимальної ординати – центра біноміального розподілу. При $p \neq q$ крива розподілу асиметрична, причому чим більше відрізняються p та q , тим сильніше виражена асиметрія (рис. 4.3). При $p \approx q$ і $n \rightarrow \infty$ біноміальний розподіл наближається до нормального розподілу, при $p \ll q$ і $n \rightarrow \infty$ – до розподілу Пуассона.

Біноміальний розподіл застосовується в генетиці для аналізу співвідношення статі або генотипів у родинх однакового розміру, у медичних і фармакологічних дослідженнях при оцінці числа осіб, що виликувалися або вижили, захворілих та імунних, в екології при обліку зустрічності виду на пробних майданчиках тощо.

Обчислення ймовірностей (частот) зазвичай використовується для невеликих n у зв'язку з труднощами розрахунку коефіцієнта C_n^m . Існують спеціальні таблиці, котрі показують, яка ймовірність того, що при n випробуваннях подія відбудеться m раз. Таблиця 2 Додатка містить теоретичні ймовірності для вибірок обсягом $n \leq 15$. Вона розрахована для ймовірностей $p = 0,25$ і $p = 0,50$. Ці ймовірності найпоширеніші в біологічних завданнях.

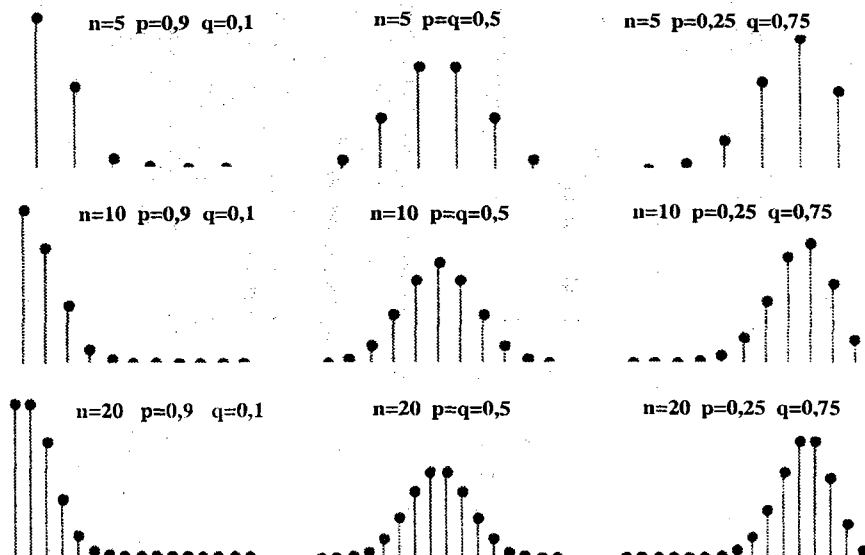


Рис. 4.3. Біноміальний розподіл для вибірок різної чисельності: чим більше відрізняються частоти p та q , тим сильніше виражена асиметрія

Приклад 4.5

У популяції є родини, де обидва подружжів гетерозиготні за геном серповидноклітинної анемії. Родини мають у середньому по чотири дитини. Яка ймовірність того, що серед дітей у родинях цього типу буде 0, 1, 2, 3 і 4 хворі дитини?

Розв'язання

Адель, який обумовлює розвиток серповидноклітинної анемії, позначається S , нормальний алель того ж локусу – A . Гетерозиготні батьки будуть мати генотипи $AS \times AS$. У такій родині, відповідно до законів генетики, ймовірність народження хворої на серповидноклітинну анемію дитини SS становить 0,25.

Скористаємося таблицею 2 Додатка для того, щоб передбачити частоти родин із різною кількістю хворих дітей. З таблиці 2 Додатка для ймовірності $p = 0,25$ встановлюємо, що в 32 % родин не буде хворих дітей, у 42 % родин буде одна хвора дитина, у 21 % – дві. По три хворі дитини буде менше ніж у 5 % родин, по чотири – менш ніж у 0,4 % родин.

Відповідь

Ймовірності, що в родині буде 0, 1, 2, 3 і 4 хворі дитини, дорівнюють, відповідно, 32 %, 42 %, 21 %, <5 %, <0,4 %.

Ці відсотки являють собою прогноз для потомства гетерозиготних чоловіка й жінки.

4.3. НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Нормальний розподіл є класичним розподілом математичної статистики. Він характеризує безперервні випадкові величини, значення яких визначаються безліччю одночасно діючих незалежних факторів. При $n \rightarrow \infty$ розподіл стає безперервним, полігон розподілу перетворюється на плавну лінію – нормальну варіаційну криву, або криву Гаусса (рис. 4.4).

У координатах значення ознаки (вісь абсцис) – частота (вісь ординат) крива нормального розподілу має вигляд симетричного дзвона. Вона не перетинає вісь абсцис, а наближається до неї асимптотично, хвости графіка поширюються необмежено далеко по обох боках від центра розподілу. Особливістю нормального розподілу є те, що в ньому з більшою частотою спостерігаються середні значення випадкової величини, з меншою – крайні. Чим сильніше відрізняється значення від середнього, тим рідше воно зустрічається. У такий спосіб розподілено багато біологічних ознак.

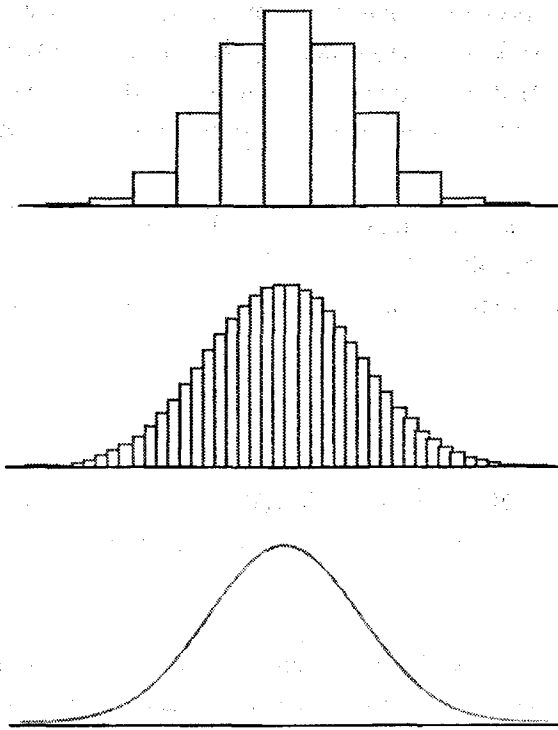


Рис. 4.4. При $p = q$ та $n \rightarrow \infty$ біноміальний розподіл стає безперервним і перетворюється на нормальний

Розподіл імовірностей значень безперервної випадкової величини виражається рівнянням:

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.4)$$

де x – значення випадкової величини, P – щільність розподілу, μ – середня арифметична (для генеральної сукупності), σ – стандартне відхилення (для генеральної сукупності), e – основа натурального логарифма ($e \approx 2,72$), π – число пі ($\pi \approx 3,1416$).

За цією формулою при різних значеннях μ і σ виходить сімейство нормальних (гаусових) кривих. Форма й положення кривої визначаються μ і σ . При зміні μ графік зміщується вправо або вліво по осі абсцис, але форма кривої не міняється. Зміна σ приводить до зміни ширини кривої – при зменшенні σ вона звужується, при збільшенні – розширюється (рис. 4.5).

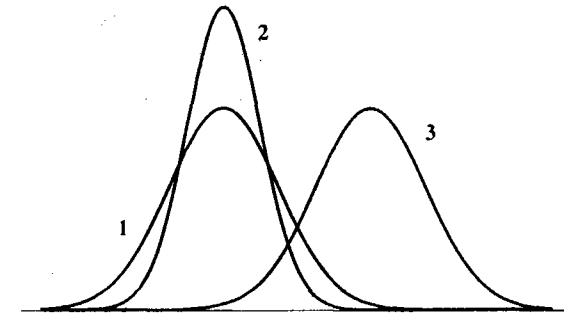


Рис. 4.5. Форма й положення нормальної кривої залежать від μ і σ :

$$\mu_1 = \mu_2, \mu_1 < \mu_3, \sigma_1 = \sigma_3, \sigma_1 > \sigma_2$$

Особливе місце в сімействі нормальних кривих займає так званий стандартний нормальний розподіл, що виходить при $\mu = 0$ і $\sigma = 1$. Будь-яку нормальну криву можна привести до стандартної шляхом центрування – вирахування з кожного значення x середнього арифметичного, та нормування – ділення різниці на значення стандартного відхилення. У результаті виходять стандартизовані z -величини, або нормовані відхилення:

$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (\text{для генеральної сукупності}),$$

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \quad (\text{для вибірки}). \quad (4.5)$$

Значення z називають стандартними значеннями, тому що їх середня дорівнює нулю, а стандартне відхилення – одиниці.

Площа під нормальною кривою дорівнює одиниці. Нульова координата на осі абсцис є центром стандартного розподілу. Вправо та вліво від центра випадкова величина може набувати будь-яких значень, імовірності яких характеризуються певними закономірностями:

- у межах $\mu \pm \sigma$ розташовано близько 68 % усіх дат;
- у межах $\mu \pm 2\sigma$ розташовано близько 95 % усіх дат;
- у межах $\mu \pm 3\sigma$ розташовано близько 99,7 % усіх дат.

Ці співвідношення представлені на рис. 4.6. Виявляється, що в нормальному розподілі практично всі дані лежать у межах від $\mu - 3\sigma$ до $\mu + 3\sigma$. Ця закономірність називається *законом плюс-мінус трьох сигм*.

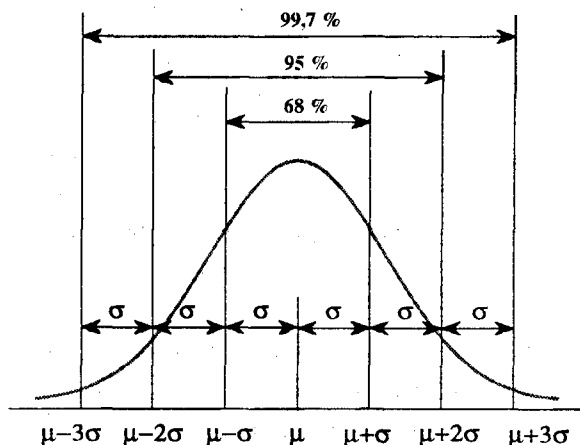


Рис. 4.6. Закономірності розміщення дат у нормальному розподілі:

99,7 % дат перебувають у межах від $\mu - 3\sigma$ до $\mu + 3\sigma$

Розмах варіації – відстань між максимальною та мінімальною датами – приблизно дорівнює шести сигмам:

$$R \approx 6\sigma. \quad (4.6)$$

Знаючи розмах варіювання для вибіркового розподілу, за формулою 4.6 можна приблизно оцінити значення стандартного відхилення. Таке завдання вирішується з метою визначення оптимального обсягу вибірки

(див. п. 1.2). Однак це співвідношення справджується для ідеального нормального розподілу. Розподіл дат у реальній випадковій вибірці практично не буває ідеально нормальним, завжди існують певні відхилення завдяки випадковим факторам, тому співвідношення буде приблизним.

Розподіли багатьох біологічних ознак, що безперервно варіюють (зріст, маса тощо), наближаються до нормального, однак дуже часто вони мають ті чи інші відхилення від нормального. Вибіркові оцінки генеральних параметрів часто додержуються нормального розподілу. Нормальному закону підкоряються розподіли критичних величин непараметричних тестів для великих n .

Відхилення від нормальної кривої можуть виглядати як *асиметрія* та *ексцес* (табл. 4.2).

Таблиця 4.2. Відхилення розподілу від нормальної кривої

Переважаючі ознаки	Мінімальні	Максимальні	Середні	Крайні
Особливості розподілу	Позитивна асиметрія	Негативна асиметрія	Позитивний ексцес	Негативний ексцес
Графік розподілу				

При *асиметрії* вершина кривої зміщена вправо або вліво від центра розподілу. *Позитивна асиметрія* виникає, коли якісь умови сприяють мінімальним значенням ознаки; при цьому більшість дат розташовується в лівій частині розподілу, а його права частина має довгий «хвіст». Якщо перевагу мають об'єкти з максимальним значенням ознаки, формується *негативна асиметрія*: вершина розташовується у правій, а «хвіст» – у лівій частині розподілу.

Ексцес – це гостровершинність або плосровершинність кривої. При *позитивному ексцесі* вершина являє собою пік, а при *негативному*

ексцесу виглядає плоскою або роздвоєною (двовершинна крива). Якщо зовнішні умови сприяють середнім значенням ознаки, виникає позитивний ексцес, якщо крайнім – негативний. У нормальному розподілі показники асиметрії та ексцесу дорівнюють нулю, значення моди, медіани і середньої арифметичної збігаються.

Існує кілька причин виникнення асиметричних розподілів. Механічна причина пов'язана з особливостями групування вибірових даних в інтервальний варіаційний ряд. Така асиметрія називається *помилковою*, тому що виникає внаслідок технічних причин. Інша причина – умови зовнішнього середовища, у яких відбувається розвиток організму. Відомо, наприклад, що посуха, неоднорідні ґрунтові умови, різна густина стояння рослин і подібні фактори спричиняють асиметрію розподілів кількісних ознак. Генетична причина асиметрії обумовлена внутрішньоалельними й міжалельними взаємодіями генів. Однією з причин асиметрії та ексцесу може бути неоднорідність сукупності (наприклад, за статтю, віком, соціальним статусом тощо). Якщо різниця між середніми значеннями двох підсукупностей більша, ніж стандартне відхилення кожної з них, то крива розподілу буде двовершинною. При невеликому розходженні значень крива має одну тупу вершину. Двовершинність розподілу може відображати дію дизруптивного добору, вказувати на наявність поліморфних угруповань у популяціях.

4.4. РОЗПОДІЛ ПУАССОНА

Розподіл Пуассона описує ймовірність дуже рідких подій. Прикладами рідких подій є народження близнюків, виникнення мутацій та ін. Розподіл Пуассона являє собою окремий випадок біноміального розподілу при $p \ll q$ і $n \rightarrow \infty$ (рис. 4.7).

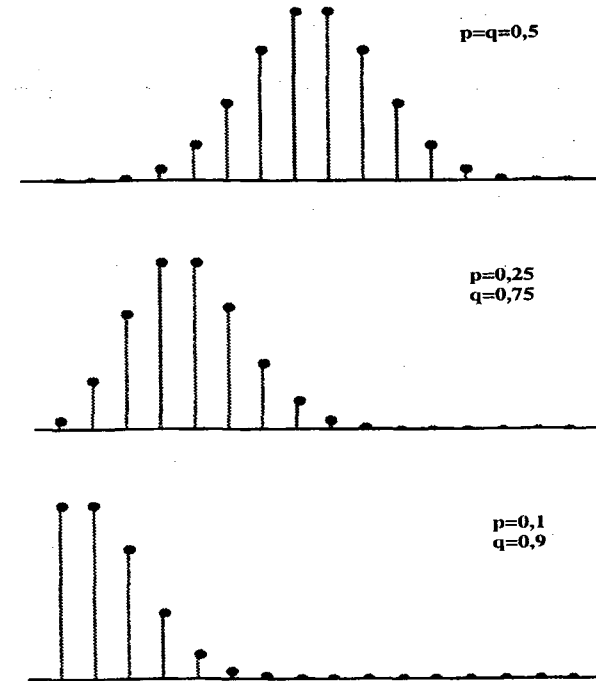


Рис. 4.7. При $p \ll q$ та $n \rightarrow \infty$ біноміальний розподіл перетворюється на розподіл Пуассона

Частота p рідкої події дуже мала, частота q альтернативної події наближається до одиниці. Імовірність того, що при n випробуваннях рідка подія відбудеться m раз, дорівнює:

$$P_n^m = \frac{\lambda^m}{m! e^{-\lambda}}, \quad (4.7)$$

де λ – середня арифметична для розподілу Пуассона, вона ж – найімовірніша частота очікуваної події: $\lambda = \bar{x} = np$, n – кількість спостережень, p – імовірність рідкої події, $!$ – знак факторіала (запис $m!$ означає добуток усіх цілих чисел від 1 до m включно), $e \approx 2,72$.

Графік розподілу Пуассона (рис. 4.8) – асиметричний і має вигляд букви *J*. Характерною ознакою розподілу Пуассона є рівність значень дисперсії та середньої арифметичної: $\bar{x} \approx s^2$.

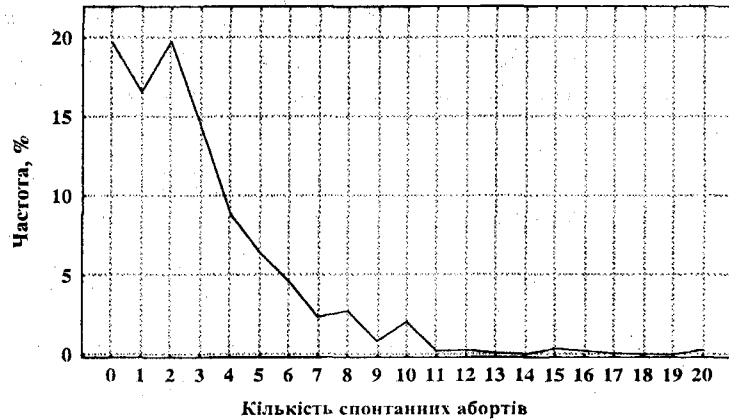


Рис. 4.8. Розподіл кількості спонтанних абортів у жінок за репродуктивний період

Приклад 4.6

У середньому одна дитина із 700 народжується із синдромом Дауна. У пологовому будинку за рік народилося 3500 дітей. Яка ймовірність того, що серед них немає жодної дитини із синдромом Дауна?

Розв'язання

Народження дитини із синдромом Дауна – рідка подія.

Її ймовірність дорівнює: $p = \frac{1}{700} \approx 0,00143$ – одна хвора дитина на 700 дітей.

Визначимо найімовірнішу частоту хворих на 3500 дітей:

$$\lambda = 3500 \cdot 0,00143 = 5.$$

Найімовірніше, що серед 3500 народжених дітей виявляться п'ятеро із синдромом Дауна.

Визначимо, якою є ймовірність, що серед 3500 народжених не буде жодної дитини з цим захворюванням ($m = 0$):

$$P_{3500}^0 = \frac{5^0}{0!e^5} = 0,0067.$$

Відповідь

Ймовірність того, що серед 3500 немовлят не буде жодної дитини із хворобою Дауна, становить 0,0067, або 0,7 %.

4.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Опишіть особливості біноміального розподілу.
2. Опишіть особливості нормального розподілу.
3. Наведіть три приклади біологічних ознак, що мають нормальний розподіл.
4. У яких випадках виникає бімодальний розподіл?
5. Опишіть особливості розподілу Пуассона.
6. Наведіть приклади біологічних ознак, що мають розподіл Пуассона.
7. Розрахуйте ймовірність того, що новий відвідувач кафе (див. п. 2.6, завдання 15) не палитиме.
8. Розрахуйте ймовірність того, що випадково обрана зі списку людина (див. п. 2.6, завдання 16) буде фізично неактивною з рівнем холестерину вище за 230 мг%

9. Подружня пара планує завести трьох дітей. Знайдіть імовірності того, що в родині будуть:
 - а) два хлопчики й одна дівчинка;
 - б) принаймні один хлопчик;
 - в) три дівчинки.
10. Яка ймовірність того, що випадково обрана дата нормального розподілу буде за межами трьох стандартних відхилень від середнього?
11. Дано характеристики розподілу: $\bar{x} = 78,2$; $s = 5,3$. Приймаючи, що розподіл є нормальним, розрахуйте приблизно інші величини, які його характеризують (дисперсію, розмах варіації, мінімальну й максимальну дати).
12. Який з розподілів (див. п. 3.3, завдання 10) є асиметричним?
13. Зобразіть схематично M_0 , M_e й \bar{x} у розподілу:
 - а) нормальному;
 - б) із правосторонньою асиметрією;
 - в) з лівосторонньою асиметрією.

5

ОЦІНКА ГЕНЕРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

5.1. СТАТИСТИЧНІ ПОХИБКИ

Статистичні похибки неминучі при будь-якому вибірковому дослідженні. Відомі дві категорії статистичних похибок. Похибки першої категорії пов'язані з оцінкою генеральних параметрів, друга категорія похибок виникає при тестуванні статистичних гіпотез (див. п. 6.1).

Похибки, які виникають, коли про генеральні параметри судять за вибірковими показниками, належать до *похибок вибіркової*, або *репрезентативності*. Їх також називають *стандартними похибками*. Природа похибки репрезентативності полягає в тому, що висновок про генеральну сукупність виносять на підставі вивчення вибірки, а судити про ціле за частиною можна тільки приблизно, тобто з деякою похибкою. Всі вибіркові показники (середня арифметична, стандартне відхилення та ін.) мають статистичну похибку. Показники, які обчислені на всій генеральній сукупності, статистичної похибки не мають.

Інша категорія похибок пов'язана з тестуванням статистичних гіпотез (див. п. 6.1). Тестування нульової гіпотези приводить до одного із двох рішень: вона відхиляється або приймається. Кожна з цих дій може бути як правильною (відкидається помилкова гіпотеза й приймається

правильна), так і помилковою (відкидається правильна гіпотеза й приймається помилкова). При цьому можливі два роди похибок. *Похибка першого роду* відбувається, коли відкидається правильна гіпотеза. *Похибка другого роду* трапляється, якщо приймається помилкова нульова гіпотеза. Похибка першого роду позначається символом α , похибка другого роду – символом β .

РОЗПОДІЛ ВИБІРКОВИХ ПОКАЗНИКІВ

Як виникають стандартні похибки?

З'ясуємо, як виникає похибка репрезентативності. Чи можна стверджувати, що обчислені для вибірки показники, наприклад середня арифметична, дорівнюють відповідним параметрам генеральної сукупності? Якщо з однієї генеральної сукупності взяти кілька вибірок і порівняти їхні характеристики, то, як правило, вони не збігаються. Середні значення, що отримано на одній вибірці, як правило, не збігається з генеральним середнім.

Якщо з генеральної сукупності у випадковому порядку формувати нескінченно велику кількість вибірок того ж самого обсягу і для кожної обчислювати середню арифметичну, то можна виявити, що вибіркові середні будуть мати різні значення. Якщо побудувати розподіл вибіркових середніх, то він буде являти собою нормальну криву певної ширини. Центром розподілу вибіркових середніх є середня генеральної сукупності. Стандартне відхилення вибіркових характеристик називається *стандартною (статистичною) похибкою*. Тобто статистичні похибки характеризують варіювання вибіркових показників навколо своїх генеральних параметрів.

Якщо збільшити обсяг вибірки й виконати той самий експеримент, то розмах середніх арифметичних зменшиться (рис. 5.1). Чим більше обсяг вибірки, тим менше ймовірність, що вибіркоче середнє буде значно відрізнятися від генерального середнього. Якщо, збільшуючи

обсяг вибірки, дійти до суцільного дослідження генеральної сукупності, то будь-яка кількість вимірів дасть ту саму величину – генеральну середню. Оскільки різноманітності середніх не буде, стандартне відхилення і, відповідно, статистична похибка дорівнюватимуть нулю.

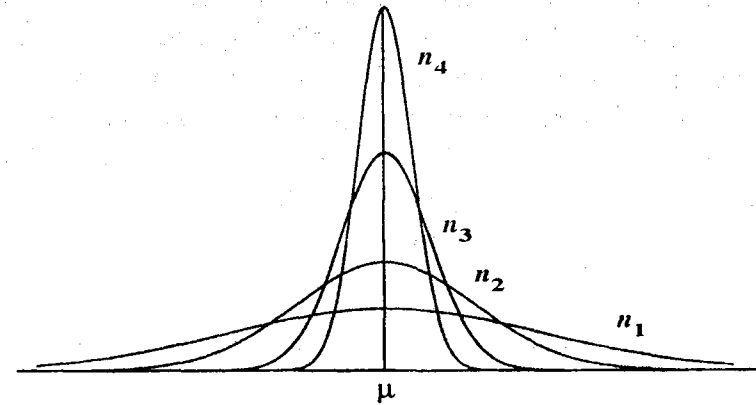


Рис. 5.1. Розподіл середніх арифметичних випадкових вибірок:
 μ – генеральна середня, $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ – розміри вибірок

Тепер уявімо собі, що з двох генеральних сукупностей нескінченне число разів формуються вибірки, які однакові за обсягом, але відрізняються за різноманітністю об'єктів. Очевидно, що розмах вибіркових середніх буде вищим у тому випадку, коли вибірки взяті з генеральної сукупності з більшим різноманіттям. Розмах середніх перебуває в прямій залежності від різноманітності досліджуваних об'єктів. Якщо об'єкти в генеральній сукупності не розрізняються, то розмах вибіркових середніх дорівнюватиме нулю. Отже, значення похибки вибіркості перебуває в прямій залежності від різноманітності досліджуваних об'єктів і у зворотній залежності від обсягу вибірки. Те ж саме справедливо для всіх вибіркових показників – коефіцієнта кореляції, стандартного відхилення, вибіркової частки та ін.

Якщо розподіл дат у генеральній сукупності відповідає нормальному закону, то розподіл вибірових середніх при будь-яких розмірах вибірок також буде нормальним. Якщо розподіл дат у генеральній сукупності не є нормальним, то розподіл вибірових середніх залежатиме від розміру вибірок: чим більша вибірка, тим ближчим до нормального буде розподіл вибірових середніх. Цей закон має один важливий висновок. Якщо в генеральній сукупності дати розподіляються не відповідно до нормального закону, а обсяг вибірки малий, користуватися параметричними критеріями (див. п. 6.3.) не можна. Якщо розподіл дат у генеральній сукупності не відповідає нормальному закону, але обсяг вибірки великий (близько 200 дат), використання параметричних критеріїв допустимо.

Статистична похибка й точність дослідження. Як зменшити статистичну похибку?

Стандартна похибка вказує на точність, з якою вибіровий показник представляє генеральний параметр. Чим менша похибка, тим точніша оцінка генерального параметра. Відношення статистичної похибки до своєї середньої називається показником точності дослідження:

$$Cs = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} 100 \% \quad \text{або} \quad Cs = \frac{Cv}{\sqrt{n}}, \quad (5.1)$$

де Cs – показник точності, $s_{\bar{x}}$ – статистична похибка середньої арифметичної, \bar{x} – середня арифметична, Cv – коефіцієнт варіації, n – обсяг вибірки.

Якщо значення похибки порівнянне зі значенням вибірового показника або перевищує його, оцінки генерального параметра стають дуже приблизними. Чи можна зменшити статистичну похибку й тим самим підвищити точність дослідження? Статистичні похибки не пов'язані з похибками вимірів або похибками в обчисленнях, їхніми джерелами є випадкові процеси, що супроводжують вибірові дослідження. При будь-яких вибірових дослідженнях статистичних похибок уникнути не

можна, але їх можна контролювати. Статистичні похибки зменшуються, якщо збільшується розмір вибірки. Якщо статистична похибка занадто велика, її можна зменшити дослідженням більшого числа об'єктів.

При яких дослідженнях статистичні похибки не розраховуються?

Якщо вивчається вся генеральна сукупність, статистична похибка стає рівною нулю. Показники, отримані на генеральній сукупності, статистичних похибок не мають.

Припустімо, що необхідно представити статистичні дані про національний склад жителів якого-небудь міста. Якщо при цьому використовується інформація про всіх жителів, то статистичні похибки не розраховуються, тому що представлені дані характеризують генеральну сукупність (у даному випадку – ціле місто) у повному обсязі. Якщо національний склад оцінюється за якоюсь частиною населення, наприклад за даними для одного мікрорайону, то статистичну похибку обчислювати необхідно. При цьому треба бути впевненим, що мікрорайон адекватно відображує структуру міського населення (наприклад, не є місцем компактного проживання певної етнічної групи).

Якщо оголошено конкурс на клас із найвищою успішністю, немає рації розраховувати статистичну похибку для середнього бала в класі. Якщо ж клас розглядається як вибірка зі школярів певного віку, то статистичну похибку варто розрахувати. При цьому треба бути впевненими, що діти не підібрані в цей клас за якою-небудь ознакою, наприклад за математичними здібностями або спортивними досягненнями.

ФОРМУЛИ СТАТИСТИЧНИХ ПОХИБОК

Усі показники, які розраховуються на підставі вибірових даних (середні величини, показники варіації, коефіцієнти кореляції та ін.), мають статистичну похибку. Для кожного вибірового показника існують

спеціальні формули обчислення статистичної похибки. Вибір формули залежить від багатьох факторів, таких як тип та розмір генеральної сукупності (скінченна, нескінченна), обсяг вибірки (великий, малий), співвідношення вибірок (залежні, незалежні), структура даних (первинні, вторинні).

Формула для знаходження статистичної похибки підбирається залежно від типу генеральної сукупності. Якщо робота пов'язана з аналізом генеральної сукупності реально існуючих об'єктів, важливо уявляти собі її обсяг – чи є вона нескінченно великою або чисельно доступною для огляду. Якщо генеральна сукупність, звідки взята вибірка, теоретично нескінченна, то для обчислення статистичної похибки використовується звичайна формула. Якщо генеральна сукупність чисельно доступна для огляду, то у формулу для розрахунку похибки вводиться поправка. В останньому випадку має значення інформація про те, яку частину від генеральної сукупності становить вибірка. Відношення обсягу вибірки n до обсягу генеральної сукупності N називається *часткою вибірки* ($\frac{n}{N}$).

Статистичну похибку позначають символом s із нижнім індексом, який відповідає вибіркового показнику. Наприклад, $s_{\bar{x}}$ – статистична похибка середньої арифметичної, s_p – статистична похибка частки. Розраховане значення статистичної похибки записується поруч із відповідним показником у такий спосіб: $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$.

Статистична похибка середньої арифметичної:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (5.2)$$

де s – стандартне відхилення, n – обсяг вибірки.

Формула (5.2) застосовується, якщо розмір генеральної сукупності нескінченно великий і чисельність вибірки дуже мала в порівнянні

з чисельністю генеральної сукупності. Якщо вибірка взята з генеральної сукупності відомого розміру й чисельність вибірки становить не менше 25 % від чисельності генеральної сукупності ($n > \frac{1}{4} N$), у формулу для обчислення статистичної похибки середньої арифметичної вводиться поправка:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}, \quad (5.3)$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Статистична похибка загальної (незваженої) середньої для декількох рівновеликих вибірок:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2 + \dots + s_{x_k}^2}, \quad (5.4)$$

де k – число вибірок, $s_{\bar{x}}$ – статистична похибка середньої арифметичної для кожної вибірки.

Статистична похибка зваженої середньої для декількох вибірок:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{s}^2}{n}}, \quad (5.5)$$

де n – сумарний обсяг вибірок, \bar{s}^2 – зважена дисперсія:

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - v)}, \quad (5.6)$$

де k – число вибірок, s_i^2 – дисперсія для кожної вибірки, n_i – обсяг кожної вибірки, v – число обмежень свободи варіації (число незалежних вибірових груп).

Якщо генеральна сукупність чисельно обмежена й обсяг вибірки досить великий у порівнянні з обсягом генеральної сукупності ($n > \frac{1}{4} N$), формула набуває вигляду:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad (5.7)$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Статистична похибка суми середніх $\Sigma = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n$:

$$s_{\Sigma} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}, \quad (5.8)$$

де \bar{x}_i – середні арифметичні, s_i – статистичні похибки середніх арифметичних.

Статистична похибка добутку середніх $\Pi = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$:

$$s_{\Pi} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \sqrt{\left(\frac{s_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\bar{x}_2}\right)^2}, \quad (5.9)$$

де \bar{x}_i – середні арифметичні, s_i – статистичні похибки середніх арифметичних.

Статистична похибка частки середніх $U = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}$:

$$s_U = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \sqrt{\left(\frac{s_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\bar{x}_2}\right)^2}, \quad (5.10)$$

де \bar{x}_i – середні арифметичні, s_i – статистичні похибки середніх арифметичних.

Статистична похибка стандартного відхилення:

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2n}}, \quad (5.11)$$

де s – стандартне відхилення, n – обсяг вибірки.

Статистична похибка дисперсії:

$$s_{s^2} = \frac{s^2}{\sqrt{2n}}, \quad (5.12)$$

де s^2 – дисперсія, n – обсяг вибірки.

Статистична похибка медіани:

$$s_{Me} = s_{\bar{x}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,253 \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad (5.13)$$

де $s_{\bar{x}}$ – статистична похибка середньої арифметичної, s – стандартне відхилення, n – обсяг вибірки.

Статистична похибка коефіцієнта варіації:

$$s_{Cv} = \frac{Cv}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{Cv}{100}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{Cv^2}{2n}}, \quad (5.14)$$

де Cv – коефіцієнт варіації, n – обсяг вибірки.

Статистична похибка вибіркової частки:

$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}, \quad (5.15)$$

де p – вибіркова частка, $q = 1 - p$, n – обсяг вибірки.

Якщо генеральна сукупність чисельно обмежена, а обсяг вибірки досить великий у порівнянні з обсягом генеральної сукупності ($n > \frac{1}{4} N$), формула набуває вигляду:

$$s_p = \sqrt{\frac{pq}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}, \quad (5.16)$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Статистична похибка вибіркової частки, яка виражена у відсотках:

$$s_{p\%} = \sqrt{\frac{p\%(100 - p\%)}{n}}, \quad (5.17)$$

де $p\%$ – вибірка частка у відсотках, n – обсяг вибірки.

Статистична похибка вибіркової частки, яка дорівнює 1 або 0:

$$s_p = \frac{1}{n+1}, \quad (5.18)$$

де n – обсяг вибірки.

Статистична похибка вибіркової частки при відомій генеральній частці:

$$s_p = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}, \quad (5.19)$$

де P – генеральна частка, n – обсяг вибірки.

Приклад 5.1

Відповідно до закономірностей спадкування, після моногібридного схрещування (за схемою Менделя) 25 % нащадків другого покоління повинні успадкувати рецесивну ознаку. Серед 264 нащадків другого покоління 59 мали рецесивну ознаку. Розрахуємо статистичну похибку вибіркової частки.

Розв'язання

У даній задачі відома генеральна частка – це теоретично очікуваний відсоток нащадків із рецесивною ознакою: $P = 25\% = 0,25$. Вибіркова частка, яка отримана в схрещуванні: $p = 59 : 264 = 0,223$. Статистична похибка вибіркової частки:

$$s_p = \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{264}} = 0,027.$$

Статистична похибка абсолютної частоти:

$$s_m = \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} = \sqrt{np(1-p)}, \quad (5.20)$$

де n – обсяг вибірки, m – число дат із певною ознакою, p – частка дат із певною ознакою, $p = \frac{m}{n}$.

Статистична похибка дат, які одержані декількома промірами

Деякі дати є результатом декількох промірів. У цьому випадку окремі проміри називаються *первинними датами*, а результуючі, які отримані на основі первинних дат, – *вторинними датами*.

При обчисленні похибки репрезентативності середньої арифметичної для групи чисел, що являють собою вторинні дати, число й різноманітність первинних дат може враховуватися або не враховуватися.

1. *Похибка середньої арифметичної без урахування первинних дат.* У дослідженнях, де здійснюється декілька промірів для того, щоб збільшити точність вимірювання (наприклад, при проведенні декількох варіантів біохімічного аналізу одного зразка) різноманітність паралельних дат при обчисленні статистичної похибки не враховується.

Паралельні проміри використовуються для обчислення середньої арифметичної, яка є остаточною характеристикою ознаки й розглядається як одиничне вимірювання.

2. *Похибка середньої арифметичної з урахуванням первинних дат.* У деяких дослідженнях для характеристики основного об'єкта (наприклад, дерева за масою плодів – вторинна дата) ураховують декілька повторюваних складових (маса окремих плодів – первинні дати). У таких дослідженнях набір первинних дат ураховується при обчисленні статистичної похибки.

Первинні й вторинні дати утворюють комплекс із a груп з n_i датами у кожній групі. У такому комплексі є два види випадкової варіації – варіація первинних дат (первинних промірів) і варіація вторинних дат (середніх значень ознаки). Це відповідає внутрішньогруповій і міжгруповій варіації в однофакторному дисперсійному комплексі, де градаціями фактора є основні об'єкти, а варіантами градацій – первинні дати.

Загальну середню та її статистичну похибку знаходять за методикою однофакторного дисперсійного аналізу.

5.2. ОЦІНКИ ГЕНЕРАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ

ТОЧКОВІ ТА ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ.

ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ І ДОВІРЧА ЙМОВІРНІСТЬ

Дослідник має справу з вибіркою, за якою робить висновки про генеральну сукупність. Судження про показники, що характеризують генеральну сукупність, на підставі вибірових даних являє собою процедуру, що називається *оцінкою генерального параметра*. Є два види оцінок параметрів – *точкові* й *інтервальні*.

Точкова оцінка – це значення, що виходить при аналізі вибірки. Наприклад, вибірова середня арифметична – це точкова оцінка генеральної середньої. Якщо послідовно брати з генеральної сукупності вибірки й знаходити середню арифметичну в кожній з них окремо, то

буде отримана деяка кількість точкових оцінок. Знайдені оцінки мають деякий розмах, і при цьому групуються навколо певного значення. Цей розмах показує, у яких межах перебуває генеральний параметр. Розмах, у межах якого з певною ймовірністю може перебувати генеральний параметр, є *інтервальною оцінкою*. Інтервальну оцінку одержують на підставі вибірових даних і математичних розрахунків.

Діапазон значень, у яких із заданою ймовірністю перебуває генеральний параметр у сукупності з нормальним розподілом дат, називається *довірчим інтервалом*. Довірчий інтервал для сукупностей, що розподіляються нормально, визначається за формулою:

$$\beta = b \pm t s_b, \quad (5.21)$$

де β – генеральний параметр, b – вибіровий показник (наприклад \bar{x} , s , s^2 , p тощо), t – нормоване відхилення, s_b – статистична похибка вибірового показника.

Значення b й s_b обчислюють за даними дослідження, t знаходять в таблиці критерію Стюдента (табл. 3 Додатка, двосторонній критерій), у рядку відповідно до ступенів свободи $df = n - 1$, де n – кількість об'єктів у вибірці. Необхідні значення t знаходяться на перетині цього рядка й колонок, що відповідають трьом *довірчим ймовірностям*: 0,95, 0,99 й 0,999. При великих вибірках ($n > 200$) довірчим ймовірностям відповідають значення нормованих відхилень:

- ймовірності $P_1 = 0,95$ відповідає $t_1 = 1,96$;
- ймовірності $P_2 = 0,99$ відповідає $t_2 = 2,58$;
- ймовірності $P_3 = 0,999$ відповідає $t_3 = 3,29$.

Підставляючи у формулу (5.21) значення s_b і поперемінно значення t , робимо висновок:

- з ймовірністю 95 % генеральний показник b розташований в межах від $b - t_1 s_b$ до $b + t_1 s_b$,
- з ймовірністю 99 % – у межах $b \pm t_2 s_b$,
- з ймовірністю 99,9 % – у межах $b \pm t_3 s_b$.

У такий спосіб роблять інтервальну оцінку будь-якого показника: середньої величини, частки, коефіцієнта кореляції тощо.

Запис $p = 0,95$ означає інтервал значень ознаки, у якому з імовірністю 0,95 перебуває значення генерального параметра (рис. 5.2). Відповідно, з імовірністю 0,05 генеральний параметр перебуває поза межами довірчого інтервалу.

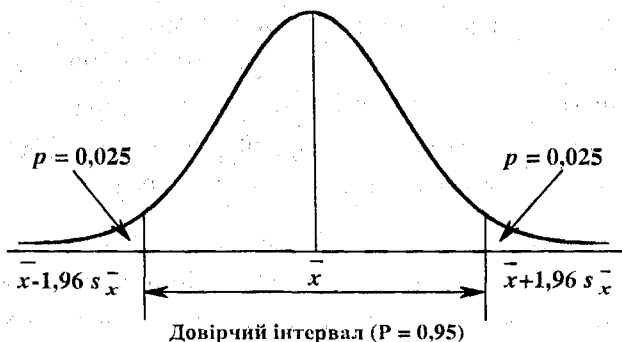


Рис. 5.2. 95%-й довірчий інтервал

За розміром довірчого інтервалу можна судити про точність оцінки генерального параметра. Припустимо, що отриманий довірчий інтервал генеральної середньої такий великий, що мало відрізняється від вибіркового розмаху варіації. Це означає, що генеральна середня може бути будь-де в межах розмаху варіації, і вибірка середня є її досить приблизною оцінкою.

ФОРМУЛИ ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ

Довірчий інтервал генеральної середньої арифметичної:

$$\mu = \bar{x} \pm t s_{\bar{x}} \text{ або } \mu = \bar{x} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}}, \quad (5.22)$$

де μ – генеральна середня, \bar{x} – вибірка середня, t – нормоване відхилення, $s_{\bar{x}}$ – статистична похибка вибіркової середньої, s – стандартне відхилення, n – обсяг вибірки.

Довірчий інтервал генеральної частки:

$$P = p \pm t s_p, \quad (5.23)$$

де P – генеральна частка, p – вибірка частка, t – нормоване відхилення, s_p – статистична похибка вибіркової частки (P і p виражені в частках одиниці або відсотках).

Формула (5.23) використовується для середніх часток, якщо $20\% < p < 80\%$. При крайніх частках, якщо $p > 80\%$ або $p < 20\%$, використовується метод кутового перетворення. При оцінці генерального параметра використовують не частки (відсотки), а їхні похідні – кути ϕ (фі) у радіанах. Цей спосіб більш точний і універсальний, його можна використовувати не тільки для крайніх, але й для будь-яких часток. Переведення відсотків у кути здійснюється за допомогою таблиці 4 Додатка. Оцінка генерального відсотка надається за формулою:

$$\Phi = \phi \pm \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad (5.24)$$

де Φ – переведений у радіани генеральний відсоток, ϕ – переведений у радіани вибіркового відсоток, t – нормоване відхилення, n – обсяг вибірки.

Отриманий довірчий інтервал у радіанах за допомогою тієї ж таблиці 4 Додатка переводиться назад в частки (відсотки). Остаточний довірчий інтервал представляється у вигляді

$$P = p \pm t s_p.$$

КУТОВЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧАСТОК

Метод кутового перетворення (кутової трансформації, арксинус-перетворення) полягає в переведенні часток p у кути ϕ :

$$\phi = 2 \arcsin \sqrt{p}, \quad (5.25)$$

де ϕ – величина кута (виражена в радіанах), p – частка (виражена в частках одиниці).

При лінійному зростанні частки p кут ϕ зростає нелінійно (рис. 5.3). Найбільша крутість кривої, що відображує високу швидкість зміни ϕ , спостерігається на ділянках, що відповідають малим і великим значенням p . Використання перетворення ϕ приводить до того, що вірогідність різниці для крайніх часток оцінюється більш точно.

Переведення часток (відсотків) у кути здійснюється з використанням таблиці 4 Додатка.

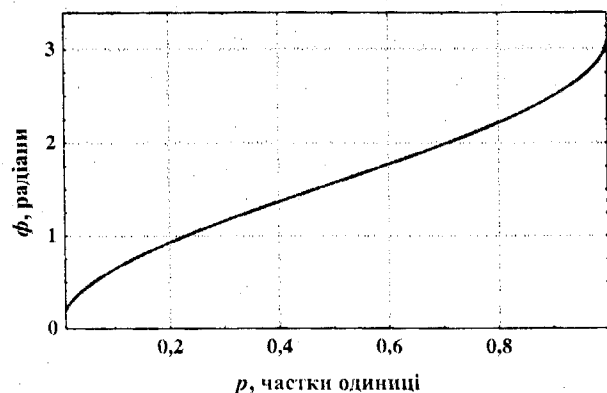


Рис. 5.3. Графік залежності кута ϕ від частки p

Приклад 5.2

Середній діаметр еритроцитів крові у здорових людей ($n = 125$) – 7,18 мкм, стандартне відхилення діаметра – 0,6. Зробимо оцінку генерального параметра.

Розв'язання

Розраховуємо стандартну похибку середнього діаметра еритроцитів за формулою (5.2):

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0,6}{\sqrt{125}} = 0,054.$$

Визначаємо межі довірчого інтервалу генеральної середньої при довірчій ймовірності $P = 0,95$.

$$\text{Нижня межа: } \bar{x} - ts_{\bar{x}} = 7,18 - 1,96 \cdot 0,06 = 7,06.$$

$$\text{Верхня межа: } \bar{x} + ts_{\bar{x}} = 7,18 + 1,96 \cdot 0,06 = 7,30.$$

З імовірністю 0,95 генеральна середня діаметра еритроцитів лежить у межах від 7,06 до 7,30 мкм:

$$7,06 \leq \mu \leq 7,30.$$

Аналогічно проводиться оцінка генерального параметра при довірчих імовірностях $P = 0,99$ і $P = 0,999$.

При ймовірності $P = 0,99$:

$$7,18 - 2,58 \cdot 0,06 \leq \mu \leq 7,18 + 2,58 \cdot 0,06;$$

$$7,03 \leq \mu \leq 7,33.$$

При ймовірності $P = 0,999$:

$$7,18 - 3,29 \cdot 0,06 \leq \mu \leq 7,18 + 3,29 \cdot 0,06;$$

$$6,98 \leq \mu \leq 7,38.$$

Відповідь

З імовірністю 0,95 генеральна середня діаметра еритроцитів лежить у межах $7,06 \div 7,30$ мкм,

з імовірністю 0,99 – у межах $7,03 \div 7,33$ мкм,

з імовірністю 0,999 – у межах $6,98 \div 7,38$ мкм.

Приклад 5.3

Серед 198 опитаних людей 79 палять. Дати оцінку генеральної частки курців.

Розв'язання

Частка курців у вибірковому дослідженні:

$$p = \frac{77}{198} = 0,3889 = 38,9 \, \%.$$

Застосуємо метод кутового перетворення й переведемо частки в кути за допомогою таблиці 4 Додатка: частці $p = 38,9 \, \%$ відповідає кут $\phi = 1,347$ радіан.

Визначимо межі довірчого інтервалу за формулою (5.24).

При довірчій імовірності $P = 0,95$:

$$\text{нижня межа } \Phi - \frac{t}{\sqrt{n}} = 1,347 - \frac{1,96}{\sqrt{198}} = 1,208,$$

$$\text{верхня межа: } \Phi + \frac{t}{\sqrt{n}} = 1,347 + \frac{1,96}{\sqrt{198}} = 1,486.$$

У такий спосіб межі генерального показника:

$$1,208 \leq \Phi \leq 1,486.$$

Переведемо радіани назад у відсотки за допомогою таблиці 4 Додатка. З імовірністю 0,95 генеральна частка перебуває в межах від 32,2 до 45,7 %:

$$0,322 \leq P \leq 0,457.$$

Аналогічно проводиться оцінка генерального параметра при довірчих імовірностях $P = 0,99$ і $P = 0,999$.

При ймовірності $P = 0,99$:

$$1,347 - \frac{2,58}{\sqrt{198}} \leq \Phi \leq 1,347 + \frac{2,58}{\sqrt{198}},$$

$$1,164 \leq \Phi \leq 1,530,$$

$$0,302 \leq P \leq 0,479.$$

При ймовірності $P = 0,999$:

$$1,347 - \frac{3,29}{\sqrt{198}} \leq \Phi \leq 1,347 + \frac{3,29}{\sqrt{198}},$$

$$1,113 \leq \Phi \leq 1,581,$$

$$0,279 \leq P \leq 0,505.$$

Відповідь

З імовірністю 0,95 генеральна частка перебуває в межах

$$0,322 \leq P \leq 0,457,$$

з імовірністю 0,99 – у межах $0,302 \leq P \leq 0,479$,

з імовірністю 0,999 – у межах $0,279 \leq P \leq 0,505$.

5.3. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

- Поясніть, у чому полягає причина виникнення статистичних похибок.
- Виберіть правильну відповідь на питання: як можна зменшити статистичну похибку?
 - Збільшити обсяг вибірки;
 - зменшити обсяг вибірки;
 - використати для експерименту більш точні прилади;
 - більш точно округляти експериментальні дані.
- Чи можна при вивченні вибірки зменшити значення статистичної похибки до нуля? Чому?
- Чи може виникнути статистична похибка при вивченні генеральної сукупності? Чому?
- Що означають записи $\bar{x} \pm s_x$ й $s \pm s_x$?
- У статистичній сукупності середня арифметична дорівнює 150, стандартне відхилення – 40. Визначте статистичні похибки \bar{x} й s , якщо обсяг вибірки дорівнює:
 - 1000;
 - 100;
 - 10.
- У науковій доповіді були представлені наступні характеристики розподілів.
 - $\bar{x} = 56 \pm 5$, $s = 30$, $n = 10$;
 - $\bar{x} = 200 \pm 25$, $s = 40$, $n = 100$.
 Знайдіть невідповідність представлених результатів. Які величини навмисно змінив доповідач з метою найкраще подати результати?

8. У групи людей визначили масу тіла, кг:

61, 62, 56, 55, 66, 59, 53, 66, 73, 59.

а) Розрахуйте стандартне відхилення й представте його у вигляді $s \pm s_x$.

б) Оцініть генеральне стандартне відхилення, використовуючи 99%-ний довірчий інтервал.

9. Вік людей, що входять в експериментальну групу, був таким:

52, 52, 50, 54, 48, 55, 49, 51, 53, 49.

а) Представте середню арифметичну у вигляді $\bar{x} \pm s_x$.

б) Оцініть генеральну середню, використовуючи 99%-ний довірчий інтервал.

в) Оцініть генеральне стандартне відхилення, використовуючи 95%-ний довірчий інтервал.

6

СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

6.1. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ – НУЛЬОВА Й АЛЬТЕРНАТИВНА

НУЛЬОВА ГІПОТЕЗА

У статистиці розрізняють два види гіпотез – *нульові й альтернативні*. Оцінка вірогідності результатів заснована на перевірці *нульової гіпотези* (H_0). Нульова гіпотеза H_0 – це твердження про те, що причиною спостережуваного вибіркового результату є випадковість. Формулювання нульової гіпотези залежить від сутності розв'язуваної наукової проблеми.

При порівнянні вибірових середніх нульова гіпотеза формулюється так: «різниця між генеральними середніми відсутня»; при порівнянні вибірових рядів розподілів: «різниця в розподілах ознаки в генеральних сукупностях, звідки взяті порівнювані вибірки, відсутня»; при оцінці зв'язку: «у генеральній сукупності, звідки взяті вибірки, зв'язок між досліджуваними ознаками відсутній»; при оцінці впливу фактора на ознаку: «у генеральній сукупності, звідки взяті вибірки, даний фактор не впливає на ознаку» тощо.

У більшості випадків нульова гіпотеза – це заперечення того, що ми в дійсності бажаємо виявити: розходжень, залежності, впливу фактора тощо. Відхилити нульову гіпотезу – значить виключити випадковість як

причину спостережуваного явища. Якщо нульова гіпотеза відкинута, подія вважається вірогідною. Якщо нульова гіпотеза прийнята, подія вважається випадковою – невірогідною.

Нульова гіпотеза може бути виражена у вигляді рівняння. У формулах відображується рівність параметрів або їхня рівність нулю. Гіпотеза про рівність середніх записується так: $\mu_1 = \mu_2$ (або $\mu_1 - \mu_2 = 0$); гіпотеза, яка стверджує, що генеральний показник зв'язку дорівнює нулю: $\rho = 0$ тощо.

АЛЬТЕРНАТИВНА ГІПОТЕЗА (НЕСПРЯМОВАНА Й СПРЯМОВАНА)

Протилежною нульовій гіпотезі є *альтернативна гіпотеза* H_A . Якщо нульова гіпотеза стверджує, що параметри рівні, альтернативна гіпотеза стверджує, що вони розрізняються. Альтернативна гіпотеза може стверджувати, що в генеральній сукупності немає рівності між шуканими параметрами ($\mu_1 \neq \mu_2$) або вони не дорівнюють нулю ($\rho \neq 0$). Якщо ми відхиляємо нульову гіпотезу, то приймаємо альтернативну. Якщо приймаємо нульову, то відхиляємо альтернативну.

Альтернативні гіпотези можуть бути спрямованими й неспрямованими. Якщо стверджується гіпотетична нерівність параметрів ($\mu_1 \neq \mu_2$), але не уточнюється, який саме з показників більше (або менше), альтернативна гіпотеза є *неспрямованою*. Якщо вказується напрямок різниці ($\mu_1 > \mu_2$ або $\mu_1 < \mu_2$), то альтернативна гіпотеза є *спрямованою*. Від формулювання альтернативної гіпотези залежить вибір між одностороннім і двостороннім статистичними критеріями.

ТЕСТУВАННЯ НУЛЬОВИХ ГІПОТЕЗ

Висунута нульова гіпотеза перевіряється на істинність за допомогою статистичних критеріїв. Значення статистичних критеріїв розраховуються на підставі вибірових даних, а потім порівнюються з критичними

АЛГОРИТМ ТЕСТУВАННЯ НУЛЬОВОЇ ГІПОТЕЗИ

1. Сформулювати нульову гіпотезу.
2. Вибрати статистичний критерій для тестування нульової гіпотези.
3. На основі вибірових даних розрахувати статистичний критерій.
4. Порівняти розрахований статистичний критерій із табличним.
5. Винести рішення щодо нульової гіпотези.

значеннями, які наведені в спеціальних таблицях. На підставі результатів порівняння нульова гіпотеза приймається або відхиляється. У результаті перевірки нульової гіпотези може бути зроблено один із двох висновків: «відхиляти нульову гіпотезу немає підстав» й «нульова гіпотеза відхиляється».

Після того, як ухвалено рішення щодо нульової гіпотези, робиться науковий висновок. Якщо нульова гіпотеза визнана дійсною, то робиться висновок: «генеральні середні рівні», «розподіли однакові», «фактор не впливає на ознаку», «зв'язку між ознаками немає» тощо. Якщо нульова гіпотеза відхилена, приймається протилежне твердження (альтернативна гіпотеза): «генеральні середні не рівні», «розподіли не однакові», «фактор впливає на ознаку», «між ознаками є зв'язок».

6.2. ВІРОГІДНІСТЬ І РІВЕНЬ ЗНАЧУЩОСТІ

Одним із ключових понять статистичного аналізу є *вірогідність*. Цей термін має кілька значень. У повсякденному житті «вірогідність» означає «відповідність дійсності». Вірогідні джерела – це надійні джерела, вірогідна інформація – це правдива інформація. У статистиці

поняття «вірогідність» має інший зміст. *Статистична вірогідність* – це впевненість у тім, що випадковість виключається як причина спостережуваного явища. Відмінності між групами, зв'язок між ознаками, вплив фактора вважаються *вірогідними*, якщо вони не є результатом випадкового збігу. Статистична вірогідність тісно пов'язана з імовірністю. Вірогідний – це той, що набув певної межової ймовірності, що припускає виключення випадковості. Невірогідний – той, що має ймовірність нижчу за межу.

Судження про те, дійсна чи ні нульова гіпотеза, не абсолютне, а має ту чи іншу ймовірність. Якщо нульова гіпотеза відхиляється з імовірністю 95 %, то ймовірність того, що вона відхилена помилково, становить не більш ніж 5 %. Перша величина (95 %) називається *вірогідністю*, а друга (5 %) – *рівнем значущості*. Вірогідність протилежна рівню значущості: вірогідність – це ймовірність безпомилкового прогнозу, а рівень значущості – це ймовірність того, що прогноз помилковий.

У дослідницькій роботі прийняті три межові рівні вірогідності:

$$P_1 = 95 \%, P_2 = 99 \% \text{ й } P_3 = 99,9 \%$$

Відповідні їм рівні значущості дорівнюють:

$$p_1 = 5 \%, p_2 = 1 \% \text{ і } p_3 = 0,1 \%$$

Можна сказати, що, роблячи висновки, ми праві на 95 %, 99 % або 99,9 % й помиляємося з імовірністю 5 %, 1 % або 0,1 %.

Запис $p \leq 0,05$ означає, що нульова гіпотеза відкинута як помилкова, але при цьому існує менше ніж 1 шанс з 20, що вона все-таки дійсна. Запис $p \leq 0,01$ означає, що відхилена нульова гіпотеза не більше, ніж в 1 випадку зі 100, може бути правильною. При $p \leq 0,001$ імовірність помилкового відхилення нульової гіпотези становить 1 на 1000.

Похибки, що виникають через невизначеність при тестуванні нульової гіпотези, бувають двох родів. *Похибка першого роду* (α) виникає, коли відхиляється правильна нульова гіпотеза. *Похибка другого роду* (β) відбувається, якщо приймається помилкова нульова гіпотеза.

6.3. СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ

Існує багато статистичних критеріїв, які застосовуються для тестування нульових гіпотез. Кожен критерій має певні межі застосування. Вибір відповідного критерію визначається низкою умов, головна з яких – характер розподілу досліджуваної ознаки. Саме цим визначається вибір параметричного або непараметричного критерію. Параметричні критерії можна використовувати для сукупностей, що розподіляються нормально, у той час як непараметричні критерії можна використовувати для будь-яких розподілів.

ПАРАМЕТРИЧНІ КРИТЕРІЇ

Параметричні критерії використовуються при статистичному аналізі вибірових даних, що взяті з генеральної сукупності з нормальним розподілом ознаки. Параметричними є критерій *t* Стюдента й критерій *F* Фішера (див. п. 9.2). За допомогою цих критеріїв порівнюються вибіркові середні, показники різноманітності й частки, встановлюються довірчі інтервали генерального параметра тощо. Ці критерії називаються параметричними тому, що їхнє обчислення припускає відомі параметри генеральної сукупності. Робота з ними вимагає великого обсягу обчислень. При використанні параметричних критеріїв необхідно розраховувати вибіркові характеристики – середні величини й показники варіації. Параметричні критерії адекватні для вибірок, які взяті з генеральних сукупностей, що нормально розподіляються. До таких вибірок можна застосовувати й непараметричні критерії, але вони в цьому випадку будуть мати меншу потужність.

У деяких випадках параметричні критерії можуть бути застосовані до аналізу вибірок, які взяті з генеральних сукупностей з відмінним від нормального розподілом дат. Якщо розподіл дат у генеральній сукупності не відповідає нормальному закону, але обсяг вибірки достатньо великий (близько 200 і більше дат), використання параметричних критеріїв допустиме.

НЕПАРАМЕТРИЧНІ КРИТЕРІЇ

Непараметричні критерії використовують при аналізі будь-яких вибірових дат. Найчастіше непараметричні критерії застосовують, якщо вибірка взята з генеральної сукупності з розподілом ознаки, який не відповідає нормальному закону, а також коли характер розподілу ознаки невідомий. При аналізі рангових ознак непараметричні критерії єдино можливі.

Непараметричні критерії також використовують при аналізі дат, що належать до нормальних генеральних сукупностей. Непараметричні критерії використовуються для таких же завдань, які вирішуються за допомогою параметричних. Серед непараметричних критеріїв найбільш відомі парний критерій Уїлкоксона (див. п. 9.3), критерій Уїлкоксона для незв'язаних дат (див. п. 9.3), критерії знаків (див. п. 9.3), Краскла-Уолліса (див. п. 12.4), χ^2 (див. п.9.5) та ін.

Переваги непараметричних методів полягають у швидкості обчислень, відносній нечутливості до випадкових дат, інваріантності при монотонній трансформації даних. Непараметричні критерії простіші в розрахунках. При їхньому використанні немає необхідності обчислювати середні величини й показники варіації. Непараметричні критерії можна використовувати для аналізу будь-яких сукупностей, у тому числі й таких, де ознака розподіляється нормально, однак в останньому випадку вони менш потужні, ніж параметричні.

ТАБЛИЦІ СТАТИСТИЧНИХ КРИТЕРІЇВ

Використання будь-якого критерію складається з ряду дій. Спочатку за вибіровими даними обчислюють числове значення критерію, що називається *фактичним* (*емпіричним*, *розрахованим*) і позначається $t_{ф.}$, $F_{факт.}$, $t_{розн.}$ або $F_{емп.}$ (формули критеріїв для кожного випадку наведені у відповідних розділах). Потім фактичне значення критерію необхідно порівняти зі *стандартним* (*критичним*, *граничним*, *табличним*) – $t_{станд.}$, $F_{табл.}$. Критичні значення статистичних критеріїв наведені в спеціальних таблицях (див. Додаток).

Для того щоб вибрати в таблиці саме те значення критерію, що відповідає конкретному випадку, необхідно визначити дві умови: число ступенів свободи й імовірність, з якою буде зроблений прогноз. Число ступенів свободи df обчислюється за формулою, що приводиться разом з формулою для розрахунку статистичного критерію. Імовірність прогнозу, або рівень значущості p (0,05, 0,01 або 0,001), задається дослідником. У біологічних дослідженнях, як правило, достатнім є рівень значущості $p = 0,05$.

У таблицях статистичних критеріїв числа ступенів свободи df зазначені в лівому стовпці (табл. 6.1). Необхідно вибрати число, що відповідає розрахованому значенню. Якщо такого числа немає, треба взяти найближче до нього. На рівні рядка, що відповідає числу ступенів свободи, у стовпці, що відповідає рівню значущості p , розташоване стандартне значення критерію. В одних підручниках критерії табельовані для двох рівнів значущості – $p = 0,05$ і $p = 0,01$, в інших є й третій – $p = 0,001$.

Визначається, у якому співвідношенні перебувають розраховане й табличне значення: чи дорівнює емпіричний критерій табличному, чи менший або більший за нього. Результат порівняння записується так: $t_{факт.} > t_{табл.}$, $F_{факт.} < F_{станд.}$. Залежно від співвідношення значень емпіричного й табличного критеріїв приймають рішення щодо нульової

гіпотези. Для критеріїв t й F , наприклад, діє правило: якщо фактичний критерій менший за табличний, то нульова гіпотеза приймається, якщо більший або дорівнює – то відхиляється.

Таблиця 6.1. Критичні значення критерію Стьюдента t (зразок)

df	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$	$t_{0,001}$
1	12,71	63,66	64,60
2	4,30	9,92	31,60
3	3,18	5,84	12,92
...
∞	1,96	2,58	3,29

ЧИСЛО СТУПЕНІВ СВОБОДИ

При обчисленні статистичних показників ураховується *число ступенів свободи* df – кількість одиниць, що вільно варіюють, у складі чисельно обмеженої статистичної сукупності. Число ступенів свободи дорівнює числу всіх наявних елементів за винятком обмежень різноманітності. Ця величина розраховується за формулою:

$$df = n - k, \quad (6.1)$$

де n – обсяг сукупності, k – число обмежень.

Кожний статистичний показник має своє число ступенів свободи. При обчисленні середньої арифметичної не виникає ніяких обмежень: середню арифметичну обчислюють як суму всіх дат, що поділена на їхню кількість. Для середньої арифметичної число ступенів свободи дорівнює числу дат у групі: $df = n$. При обчисленні стандартного відхилення суму квадратів центральних відхилень $\sum (x - \bar{x})^2$ ділять не на кількість дат n , а на $(n - 1)$.

Число ступенів свободи для стандартного відхилення на одиницю менше ніж число дат, оскільки є одне обмеження: стандартне відхилення обчислюється для груп, що мають конкретне значення середньої арифметичної. Середня арифметична групи i є чинником, що обмежує статистичну свободу. При порівнянні середніх арифметичних двох вибірок виникають два обмеження. Вони мають таке походження. При порівнянні середніх арифметичних використовуються дві статистичні похибки, кожна з яких розрахована з використанням стандартного відхилення, що має, як уже сказано, одне обмеження. Дві статистичні похибки – два стандартних відхилення – два обмеження. Тому число ступенів свободи при порівнянні двох вибірок на дві одиниці менше за обсяг груп: $df = n_1 + n_2 - 2$.

Формули для розрахунку числа ступенів свободи приводяться разом із формулами кожного показника.

ОДНОСТОРОННІЙ І ДВОСТОРОННІЙ КРИТЕРІЙ

Виконавши розрахунки, дослідник звертається до статистичних таблиць, щоб знайти критичні значення критерію. Іноді він може виявити дві таблиці – для одностороннього й двостороннього критеріїв. Оскільки ці таблиці розрізняються за змістом, виникає закономірне питання: якою з них користуватися? Це питання має бути вирішеним ще на стадії планування дослідження. Застосування одно- або двостороннього критерію залежить від того, який тип альтернативної гіпотези висувається – спрямована чи неспрямована.

Розглянемо, у чому полягає різниця між одно- і двостороннім критерієм. При тестуванні статистичних гіпотез завжди є деяка ймовірність того, що помилково відкинута правильну нульову гіпотезу (похибка першого роду α). Двосторонній критерій заснований на припущенні, що похибка α може виявитися в обох частинах розподілу t (рис. 6.1). Односторонній критерій припускає, що похибка α може виявитися в одній із частин розподілу t (рис. 6.2).

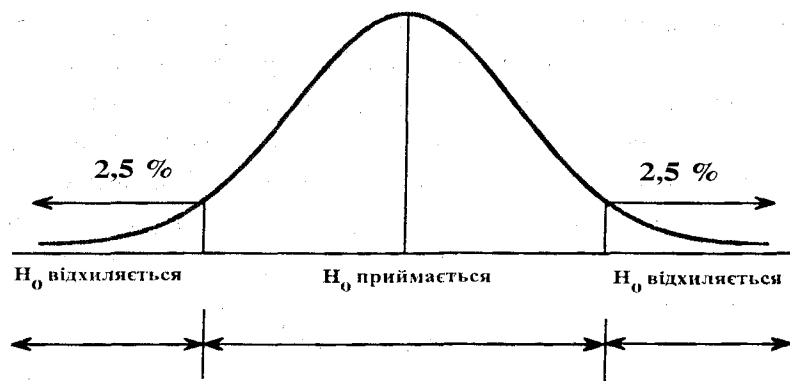


Рис. 6.1. Двосторонній критерій при $\alpha = 0,5$:
похибка α виявляється в обох частинах розподілу

Неспрямована альтернативна гіпотеза стверджує, що генеральні параметри *не рівні* (не більші й не менші один одного, а *різні*). Із цієї причини знак критерію не береться до уваги й тестування неспрямованої альтернативної гіпотези проводиться за допомогою двостороннього критерію. Якщо альтернативна гіпотеза є спрямованою, статистичний висновок робиться на підставі одностороннього критерію. Це обумовлено тим, що в таких випадках вирішальним є знак при критерії, тому адекватним є односторонній критерій.

Приклад 6.1

Досліджувався вплив раціону на інтенсивність росту тварин. Для експерименту відібрали 20 пацюків й у випадковому порядку розподілили їх на дві групи по 10 тварин. У корм тваринам однієї групи додавався мікроелемент (основна група). Інша група (контрольна) одержувала звичайний корм. За інформацією від розроблювачів кормів передбачалося, що добавка прискорює ріст. Експериментальна перевірка показала, що за той самий час середній приріст маси тварин основної

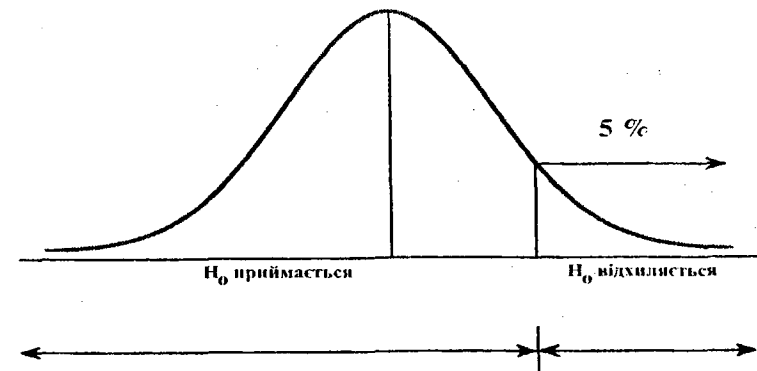
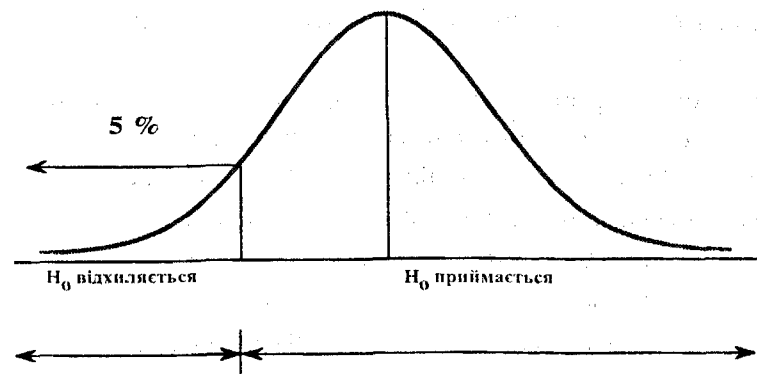


Рис. 6.2. Односторонній критерій при $\alpha = 0,5$:
похибка α виявляється в одній із частин розподілу

групи склав 55 грамів, а контрольної – 50 грамів. Обчислений критерій виявився рівним $t + 1,87$. Чи є отримані результати статистично вірогідними, чи розходження, що спостерігаються, є випадковими?

Розв'язання

І. Нульова гіпотеза стверджує, що розходження випадкові. Припущення розроблювачів кормів про те, що добавка прискорює ріст, дає нам підставу висунути спрямовану альтернативну гіпотезу: середнє

значення ознаки в генеральній сукупності, до якої відноситься основна група, більше, ніж у генеральній сукупності, до якої відноситься контрольна група.

Оскільки альтернативна гіпотеза є спрямованою (показник основної групи має бути вищим, ніж контрольної), все вирішує *знак* критерію. У цьому випадку він позитивний: $t_{\text{факт}} = +1,87$. Скористаємося таблицею одностороннього критерію t (табл. 3 Додатка). Для числа ступенів свободи $df = 10 + 10 - 2 = 18$ критичне значення $t_{\text{табл}} = 1,73$; при цьому ймовірність похибки першого роду (α) становить 5 % ($p = 0,05$). Розраховане значення критерію більше за табличне, отже, нульова гіпотеза про відсутність розходжень відхиляється; при цьому ймовірність похибки становить менше за 5 % ($p < 0,05$).

При всіх значеннях t , менших за 1,73, включаючи негативні значення, нульова гіпотеза має бути прийнята. Наприклад, значення $t = -3$ при односторонньому критерії ($df = 18$) приводить до прийняття нульової гіпотези, тоді як при двосторонньому критерії цього значення досить, щоб нульова гіпотеза була відхилена.

2. Статистичну задачу можна сформулювати інакше: показник контрольної групи нижчий, ніж основної. Передбачається негативна різниця між вибірковими середніми ($50 - 55 = -5$). Звідси очікується негативне значення критерію ($t = -1,87$), тому маємо справу з лівою стороною розподілу. Нульова гіпотеза про відсутність розходжень відхиляється на тому ж рівні значущості ($p < 0,05$).

В и с н о в о к

Основна й контрольна групи, взяті з однієї генеральної сукупності, після експерименту представляють дві окремі сукупності, які розрізняються параметрами. Розходження між групами вірогідні, отже, добавка мікроелемента в корм прискорює ріст не тільки вивчених, але й усіх інших тварин цієї категорії.

* * *

Якщо використовується односторонній критерій, то нульова гіпотеза відкидається при більш низьких значеннях статистичного критерію t ,

ніж при двосторонньому критерії. Може виникнути переконання, що одностороннім критерієм «вигідніше» користуватися, ніж двостороннім, тому що з його допомогою легше відхилити нульову гіпотезу. Здоровий глузд змушує нас запідозрити в цьому щось абсурдне – адже з *нічого* не буває *чогось*.

Проаналізуємо ситуацію уважніше. Що дає нам підставу звернутися до більш «вигідного» одностороннього тесту? Уже наявне знання, що дозволяє висунути спрямовану альтернативну гіпотезу. За це знання вже заплачено попереднім досвідом – розроблювачі перевірили дію корму. Чим ми ризикуємо, користуючись більш «вигідним» одностороннім тестом? У нас зростають шанси не одержати достовірної різниці, якщо значення критерію виявиться на протилежному боці розподілу, чого не трапиться, якщо використовується двосторонній критерій.

Якщо ми не маємо попередньої інформації про напрямок різниці, то висуваємо гіпотезу, для перевірки якої адекватним є двосторонній критерій. Знижується ймовірність одержати достовірну різницю в одному боці розподілу, однак протилежний бік розподілу також працює на нас.

Дуже часто в експериментальній роботі зустрічаються дослідження, у яких необхідно оцінити реакцію організму (тканини, клітини) на найрізноманітніші зовнішні фактори (радіоактивне опромінення, вплив низьких температур, лікарські препарати, отрути тощо). Напрямок реакції часто може бути непередбачуваним. Відомо, наприклад, що іонізуюче випромінювання чинить як стимулюючий, так і гнітючий вплив – результат залежить від дози. Хлорорганічні пестициди стимулюють активність мікосомальних ферментів, інсектициди й карбон сульфід – пригнічують. У тих випадках, коли напрямок різниці неможливо передбачити заздалегідь, формулюється ненаправлена гіпотеза й застосовується двосторонній тест.

Іноді ми не маємо попередньої інформації про напрямок різниці, але нам небайдужий характер змін. Припустімо, ми не знаємо, як діє нова кормова добавка – знижує масу чи збільшує її. Але для нас важливо, у якому напрямку вона діє: кормова добавка для тварин повинна

збільшувати масу тварин. Якщо вона знижує масу або не впливає на неї, нема рації її застосовувати. У таких випадках, коли для нас важливий напрямок різниці, у статистичному аналізі адекватні альтернативна спрямована гіпотеза й односторонній тест.

ПОТУЖНІСТЬ СТАТИСТИЧНОГО КРИТЕРІЮ

З похибкою другого роду β пов'язана характеристика критерію, що одержала назву *потужність*. Похибки другого роду виникають, коли приймається неправильна нульова гіпотеза. *Потужність статистичного критерію* визначається тим, з якою ймовірністю він може відхилити помилкову нульову гіпотезу. Потужність критерію і похибка другого роду β протилежні одне одному. Це впливає із сутності цих показників: ймовірність похибки другого роду – це ймовірність прийняти помилкову нульову гіпотезу, а потужність тесту – це ймовірність її відхилити.

$$\text{Потужність критерію} = 1 - \beta$$

Щоб зрозуміти, що таке потужність критерію, розглянемо приклад. Припустімо, вивчається вплив фактора на ознаку. У ході експерименту формуються основна та контрольна групи. Виконавши вимірювання й закінчивши обчислення, дослідник виявляє, що в основній групі середнє значення ознаки більше, ніж у контрольній. Перевірка за допомогою статистичного критерію показує, що різниця середніх достовірна. Уявімо собі, що експеримент буде повторюватися в тих самих умовах багато разів. За випадковими причинами його результати будуть якоюсь мірою розрізнятися. У більшості експериментів показники основної групи будуть перевищувати показники контрольної, у деяких експериментах різниця не виявиться, а можливо, буде протилежною. Частина експериментів дозволить відкинути нульову гіпотезу, а частина – прийняти. Припустімо, що 33 % повторних експериментів приводять до рішення відхилити нульову гіпотезу, а 67 % – до її

прийняття. У такому випадку говорять, що потужність критерію, який тестує нульову гіпотезу, становить 0,33. Відсоток випадків, які дозволяють відкинути нульову гіпотезу, є мірою потужності критерію.

УМОВИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ПОТУЖНІСТЬ КРИТЕРІЮ

Потужність критерію – це його можливість відхилити помилкову нульову гіпотезу. Від чого ж залежить потужність критерію? Розглянемо це на прикладі критерію t , за допомогою якого оцінюється вірогідність розходжень між вибірковими середніми (див. п. 9. 2).

Різниця середніх величин і статистична похибка

Нульова гіпотеза відхиляється, якщо критерій досягає критичного значення або перевищує його. Чим більший критерій t , тим більша впевненість у хибності нульової гіпотези. Значення $t \left(t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_d} \right)$ перебуває у прямій залежності від різниці показників, що порівнюються, й у зворотній залежності від значення статистичної похибки цієї різниці. Отже, чим більша різниця й менша статистична похибка, тим вища ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відхилена (рис. 6.3).

Нормована різниця

Нормована різниця (d) являє собою абсолютну різницю генеральних середніх $(\mu_1 - \mu_2)$, що поділена на стандартне відхилення σ (при рівності дисперсій груп, що порівнюються, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$):

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \quad (6.2)$$

Значення d (рис. 6.4) показує, наскільки відстоять один від одного генеральні розподіли. Рис. 6.4 *a* відповідає ситуації, коли нульова гіпотеза дійсна: $d = 0$. На рис. 6.4 *б* – d відображені ситуації, що відповідають

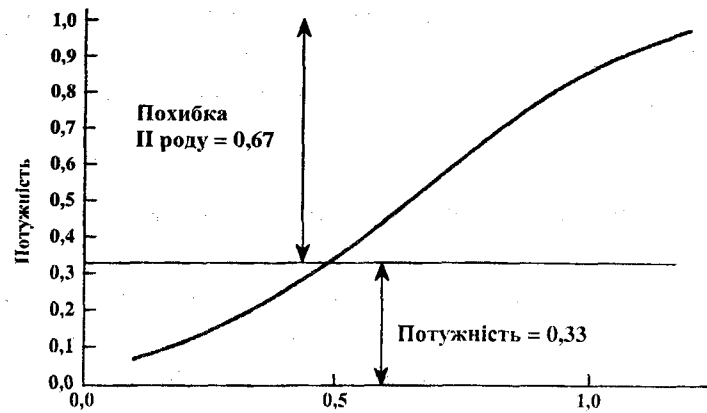


Рис. 6.3. Потужність критерію та похибка другого роду

помилковій нульовій гіпотезі: $d > 0$. Розподіли відрізняються один від одного різним ступенем. З більшою ймовірністю можна відкинути нульову гіпотезу, якщо вибірки належать до генеральних сукупностей з рисунку *д*, і з меншою – з рисунку *б*. Чим далі відстоять розподіли, тим за інших рівних умов вища ймовірність одержати достовірну різницю й мати підстави відкинути нульову гіпотезу.

Розмір вибірки

Зі збільшенням обсягу вибірки зменшується статистична помилка й збільшується статистичний критерій. Це підвищує ймовірність відкинути помилкову нульову гіпотезу. При одній і тій самій нормованій різниці d чим більший розмір вибірки n , тим вища потужність критерію. Таким чином, нормована різниця й обсяг вибірки – найважливіші умови, що визначають потужність критерію (рис. 6.5).

Рівень значущості

Чим більшим є прийняте значення рівня значущості p , тим більша область відхилення нульової гіпотези, тим вища потужність критерію.

Критерій має найнижчу потужність, якщо з його допомогою необхідно відхилити нульову гіпотезу на рівні значущості 0,001, і найвищу (серед прийнятих у дослідницькій роботі) на рівні значущості 0,05. Це справедливо як для односторонніх, так і для двосторонніх критеріїв. При невеликих обсягах вибірок рівень значущості 0,05 є переважнішим, ніж 0,01 і тим паче – 0,001, тому що при малих значеннях α потужність критерію незначна.

Зменшуючи рівень значущості, ми збільшуємо потужність критерію, але підвищуємо ризик визнати правильну нульову гіпотезу неправильною. Збільшуючи рівень значущості, ми зменшуємо ризик визнати правильну нульову гіпотезу неправильною (похибка першого роду), але знижуємо потужність критерію.

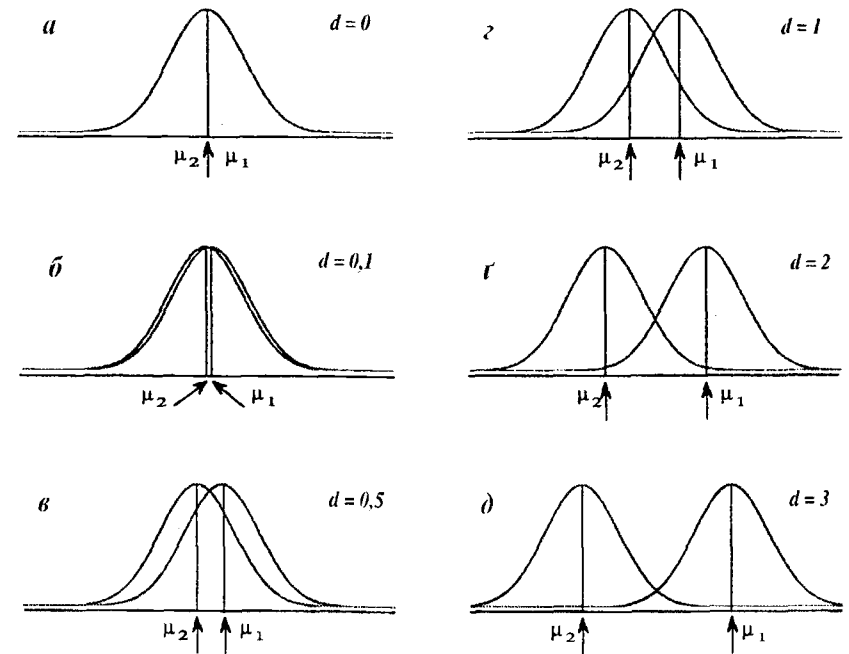


Рис. 6.4. Розходження між генеральними сукупностями

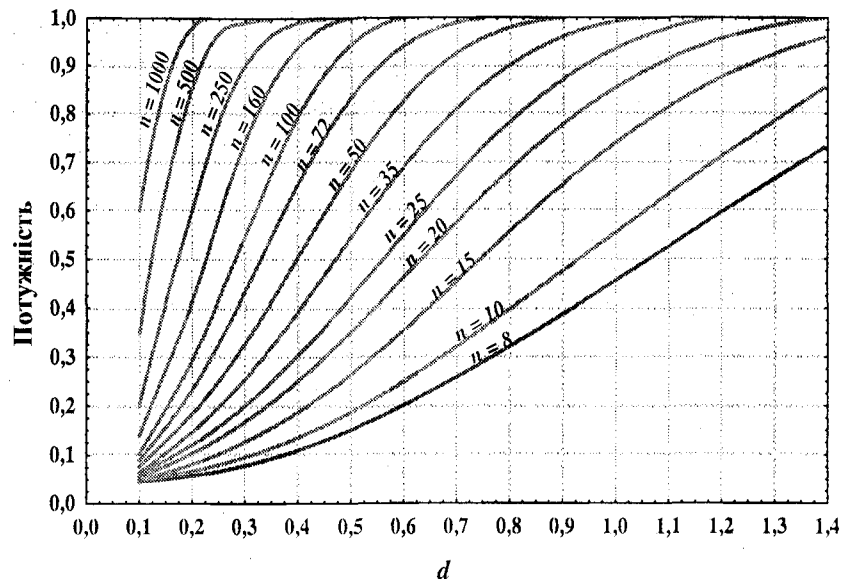


Рис. 6.5. Нормована різниця й обсяг вибірки – найважливіші умови, що визначають потужність критерію

Зв'язаність вибірок

Використання залежних вибірок за статистичними наслідками є аналогічним підвищенню обсягу дослідження. Статистична помилка різниці, яка отримана на залежних вибірках, менша ніж помилка, отримана на незалежних вибірках. Отже, потужність критерію вища, якщо аналіз ведеться на залежних вибірках. Чим сильніше зв'язані вибірки, тим вище потужність критерію.

Односторонній і двосторонній критерії

Потужності двостороннього й одностороннього критеріїв різні. За рівних умов (рівень значущості, обсяг і ступінь зв'язаності вибірок)

односторонній критерій є потужнішим за двосторонній. Якщо дозволяє постановка завдання, краще користуватися одностороннім критерієм, але за відсутності твердої підстави для висунення спрямованої альтернативної гіпотези слід використати двосторонній критерій.

6.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

- Поясніть, що таке нульова гіпотеза.
- Поясніть різницю між спрямованою й неспрямованою альтернативними гіпотезами.
- У яких випадках застосовуються параметричні критерії? Непараметричні критерії?
- У яких випадках використовуються таблиці односторонніх статистичних критеріїв? Двосторонніх статистичних критеріїв?
- Яка з пари статистичних гіпотез є нульовою?
 - Середні порівнюваних вибірок статистично вірогідно розрізняються.
 - Різниця між середніми порівнюваних вибірок статистично невірогідна.
- Які з наведених альтернативних гіпотез належать до направлених?
 - Дієта змінює вагу.
 - $H_A: \mu_1 < \mu_2$.
 - Дієта сприяє зниженню ваги.

г) Лікарські препарати по-різному діють на артеріальний тиск.

г) $H_A: \mu_1 \neq \mu$.

д) Фізичні навантаження збільшують силу м'язів.

7. Знайдіть критичні значення критерію Стюдента t (табл. 3 Додатка) при $p = 0,05$ і $p = 0,01$ для тестування нульової гіпотези $H_0: \mu = 50$ ($df = 1000$) проти:

а) $H_A: \mu_1 \neq \mu$;

б) $H_A: \mu_1 > 50$;

в) $H_A: \mu_1 < \mu$.

8. Знайдіть критичні значення критерію Фішера F (табл. 13 Додатка):

а) $df_1 = 36$, $df_2 = 148$, $p = 0,001$;

б) $df_1 = 7$, $df_2 = 10000$, $p = 0,05$;

в) $df_1 = 88$, $df_2 = 21$, $p = 0,01$.

7 ПЕРЕВІРКА РОЗПОДІЛУ ДАТ НА ВІДПОВІДНІСТЬ ДО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ

7.1. ХАРАКТЕР РОЗПОДІЛУ ДАТ І ВИБІР СТАТИСТИЧНОГО МЕТОДА

Вибір методу статистичного аналізу вибірових даних (параметричний або непараметричний) залежить від характеру розподілу даних у генеральній сукупності. Якщо вибірка взята з генеральної сукупності, де досліджувана ознака розподіляється відповідно до нормального закону, використовують параметричні методи – порівняння середніх арифметичних за допомогою критерію t Стюдента (див. п. 9.2), порівняння дисперсій за допомогою критерію F Фішера (див. п. 9.2), параметричний кореляційний аналіз (див. п. 10.2), параметричний дисперсійний аналіз (див. п. 12.1, 12.2). Якщо вибірка взята з генеральної сукупності, де розподіл ознаки не відповідає нормальному закону, використовують непараметричні методи статистики – непараметричний кореляційний аналіз (див. п. 10.4), непараметричний дисперсійний аналіз (див. п. 12.4), непараметричні критерії порівняння (див. п. 9.3). Непараметричну статистику використовують також у випадках, коли характер розподілу даних у генеральній сукупності невідомий.

Для того, щоб вирішити, який статистичний метод є адекватним для певної вибірки, слід з'ясувати, як розподіляється ознака у відповідній

генеральній сукупності. Необхідно визначити, чи розподіляється ознака в генеральній сукупності відповідно до нормального закону. Це називається *перевіркою на нормальність*. Існує кілька методів перевірки розподілу ознаки на нормальність. Вибір методу визначається, головним чином, обсягом вибірки. Процедура являє собою перевірку нульової гіпотези, що формулюється так: дати в генеральній сукупності, з якої взята вибірка, розподіляються відповідно до нормального закону. Якщо статистична гіпотеза залишається чинною, вибірку аналізують параметричними методами, якщо відхиляється, використовують непараметричну статистику.

7.2. ВЕЛИКІ ВИБІРКИ (СОТНІ ДАТ)

Графік нормального розподілу являє криву, що нагадує за формою симетричний дзвін (див. п. 4.3). Нормальний розподіл характеризується відсутністю асиметрії та ексцесу ($As = 0$, $Ex = 0$). Графік, що відображає розподіл дат у вибірці, навіть якщо вона взята з нормальної генеральної сукупності, завжди виглядає тією чи іншою мірою зміщеним від нормальної кривої, а вибіркові показники As й Ex практично завжди відрізняються від нуля.

Існують дві можливі причини відхилення вибіркових дат від нормального розподілу. Перша причина – генеральна сукупність, з якої взята вибірка, не є нормальною, і вибірка це відображає. Друга причина – випадковість: генеральна сукупність, з якої взята вибірка, є нормальною, але через випадкові причини у вибірку потрапили об'єкти, які спотворили нормальний розподіл. Завдання статистичного аналізу полягає в тому, щоб вирішити, випадково чи не випадково вибірковий розподіл відхиляється від нормального. Перевірка розподілу дат на

нормальність у цьому випадку зводиться до того, щоб вирішити, чи є відхилення показників асиметрії й ексцесу від нуля випадковим. На основі вибіркових дат обчислюють значення As й Ex і перевіряють нульові гіпотези $H_0: As = 0$ й $H_0: Ex = 0$. Для перевірки нульової гіпотези на великих вибірках використовують критерій Стюдента t .

КРИТЕРІЙ СТЬЮДЕНТА

Якщо у вибірці сотні дат, вірогідність показників асиметрії As й ексцесу Ex оцінюють за допомогою t -критерію. Показник асиметрії знаходять за формулою (7.1), ексцесу – за формулою (7.2):

$$As = \frac{\sum (x - \bar{x})^3}{ns^3}, \quad (7.1)$$

$$Ex = \frac{\sum (x - \bar{x})^4}{ns^4} - 3, \quad (7.2)$$

де As – показник асиметрії, Ex – показник ексцесу, x – дати, \bar{x} – середня арифметична, n – обсяг вибірки, s – стандартне відхилення.

Статистичні похибки вибіркових показників асиметрії й ексцесу обчислюються за наближеними формулами:

$$s_{As} = \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad (7.3)$$

$$s_{Ex} = 2\sqrt{\frac{6}{n}}, \quad (7.4)$$

де s_{As} й s_{Ex} – статистичні похибки показників асиметрії й ексцесу.

Точні формули для обчислення статистичних похибок:

$$s_{As} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \quad (7.5)$$

$$s_{Ex} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)(n-5)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (7.6)$$

Вірогідність вибірових показників асиметрії й ексцесу оцінюють, перевіряючи нульові гіпотези $H_0: A_s = 0$ й $H_0: E_x = 0$ за допомогою критерію t . Критерій t розраховується за формулами:

$$t = \frac{A_s}{s_{A_s}}, \quad (7.7)$$

$$t = \frac{E_x}{s_{E_x}}. \quad (7.8)$$

Розрахований критерій $t_{\text{факт.}}$ порівнюють зі стандартним значенням $t_{\text{табл.}}$ (табл. 3 Додатка, двосторонній критерій) для числа ступенів свободи $df = n - 1$ і прийнятого рівня значущості p .

Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза залишається чинною, відхилення показника асиметрії і/або ексцесу від нуля вважається невірогідним (випадковим), нульова гіпотеза про нормальність розподілу ознаки в генеральній сукупності залишається чинною.

Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза відхиляється на прийнятому рівні значущості p , відхилення показника асиметрії і/або ексцесу від нуля вважається вірогідним (невипадковим).

Якщо один або обидва показники вірогідно відхиляються від нуля ($A_s \neq 0$ і/або $E_x \neq 0$), подальший статистичний аналіз вибірових даних роблять за допомогою непараметричних методів. Якщо обидва показники невірогідно відхиляються від нуля ($A_s = 0$ і $E_x = 0$), подальший статистичний аналіз роблять за допомогою параметричних методів.

Приклад 7.1

Перевіримо на нормальність розподіл зросту студентів за даними з прикладу 2.1.

Розв'язання

Ми маємо справу з великою вибіркою ($n = 200$), тому для перевірки розподілу на нормальність оцінимо вірогідність показників асиметрії й ексцесу за допомогою t -критерію.

Стандартне відхилення (3.19):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{200-1} \left((174^2 + 171^2 + \dots) - \frac{(174 + 171 + \dots)^2}{200} \right)} = 7,94.$$

1. Показник асиметрії (7.1):

$$A_s = \frac{\sum (x - \bar{x})^3}{ns^3} = \frac{(174 - 174,9)^3 + (171 - 174,9)^3 + \dots}{200 \cdot 7,94^3} = 0,333.$$

Похибка показника асиметрії (7.3):

$$s_{A_s} = \sqrt{\frac{6}{n}} = \sqrt{\frac{6}{200}} = 0,17.$$

Тестуємо нульову гіпотезу ($H_0: A_s = 0$) за допомогою критерію t (7.7):

$$t = \frac{A_s}{s_{A_s}} = \frac{0,333}{0,17} = 1,96.$$

Згідно табл. 3 Додатка, $t_{\text{табл.}} = 1,96$ ($p = 0,05$).

$t_{\text{факт.}} \approx t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p = 0,05$. $A_s \neq 0$, розподіл має позитивну асиметрію.

2. Показник ексцесу (7.2):

$$E_x = \frac{\sum (x - \bar{x})^4}{ns^4} - 3 = \frac{(174 - 174,9)^4 + (171 - 174,9)^4 + \dots}{200 \cdot 7,94^4} - 3 = 0,41.$$

Статистична похибка показника ексцесу (7.4):

$$s_{E_x} = 2\sqrt{\frac{6}{n}} = 2\sqrt{\frac{6}{200}} = 0,34.$$

Тестуємо нульову гіпотезу ($H_0: Ex = 0$) за допомогою критерію t (7.8):

$$t = \frac{Ex}{s_{Ex}} = \frac{0,41}{0,34} = 1,206.$$

Згідно з табл. 3 Додатка, $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза приймається, відхилення показника Ex від нуля невірогідно.

Розподіл не має ексцесу.

В и с н о в о к

Розподіл відрізняється від нормального: має позитивну асиметрію.

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ АСИМЕТРІЇ Й ЕКСЦЕСУ

Для того, щоб оцінити вірогідність показників асиметрії й ексцесу, не обов'язково обчислювати їхні статистичні похибки й користуватися критерієм Стюдента. Процедура можна значно спростити, якщо скористатися табл. 5 й 6 Додатка. На основі вибірових дат необхідно розрахувати показники асиметрії й ексцесу, а в табл. 5 й 6 знайти критичні значення цих показників для певного обсягу вибірки n і прийнятого рівня значущості p .

Якщо фактичні показники асиметрії й ексцесу менші за критичні, їхнє відхилення від нуля вважається невірогідним, а статистична гіпотеза про нормальність розподілу залишається чинною. Якщо фактичне значення хоча б одного з показників дорівнює табличному або перевищує його, нульова гіпотеза ($As \neq 0$ й/або $Ex \neq 0$) відхиляється на прийнятому рівні значущості, розподіл не вважається нормальним.

П р и к л а д 7.2

Попередню задачу можна вирішити, не обчислюючи статистичних похибок, а за допомогою таблиць критичних значень As й Ex .

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємося розрахунками з попереднього прикладу.

Фактичний показник асиметрії $As_{\text{факт.}} = 0,333$.

Фактичний показник ексцесу $Ex_{\text{факт.}} = 0,41$.

Обсяг вибірки $n = 200$.

Критичні значення As й Ex з таблиць 5 й 6 Додатка такі:
для рівня значущості $p = 0,05$: $As_{\text{табл.}} = 0,280$, $Ex_{\text{табл.}} = 0,823$;

для рівня значущості $p = 0,01$: $As_{\text{табл.}} = 0,403$, $Ex_{\text{табл.}} = 0,832$.

Порівнюємо фактичні й табличні показники, оцінюємо нульові гіпотези $H_0: As = 0$ й $H_0: Ex = 0$.

$As_{\text{факт.}} > As_{\text{табл.}}$ для рівня значущості $p = 0,05$. Нульова гіпотеза $As = 0$ відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$. Показник асиметрії вірогідний.

$|Ex_{\text{факт.}}| > Ex_{\text{табл.}}$. Нульова гіпотеза $Ex = 0$ приймається. Показник ексцесу невірогідний.

В и с н о в о к

Розподіл відрізняється від нормального: має позитивну асиметрію.

7.3. НЕВЕЛИКІ ВИБІРКИ (ДО 50 ДАТ)

КРИТИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ АСИМЕТРІЇ Й ЕКСЦЕСУ

При нечисленних вибірках перевірку розподілу на нормальність проводять за допомогою табл. 5 й 6 Додатка. Обчислені значення As й Ex порівнюють із табличними. Якщо фактичні показники асиметрії або ексцесу менші за табличні значення при певному обсязі вибірки n для прийнятого рівня значущості p , нульова гіпотеза залишається чинною. Якщо фактичне значення хоча б одного з показників досягає

або перевищує табличне, гіпотеза про нормальний розподіл ознаки в генеральній сукупності відхиляється (див. приклад 7.2). Аналіз критичних значень показників асиметрії й ексцесу свідчить про те, що чим менша вибірка, тим більшим має бути фактичне значення показника для того, щоб його відхилення від нуля вважати вірогідним.

КРИТЕРІЙ χ^2

Якщо вибірка включає не менше 50 дат, тест на нормальність можна провести за допомогою критерію χ^2 (див. п. 9.5). Для цього розраховують частоти теоретично очікуваного розподілу й порівнюють із ним фактичні дати.

7.4. ВИБІРКИ МЕНШІ НІЖ 30 ДАТ

КРИТЕРІЙ ШАПІРО-УІЛКА

Якщо вибірки настільки малі, що використання табл. 5 й 6 Додатка стає неможливим, перевірку на нормальність проводять за допомогою критерія Шапіро-Уілка. Для цього дати ранжують у порядку зростання:

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n.$$

Обчислюють величину b . Для цього знаходять різниці між датами, що однаково відстоять від центра розподілу:

$$b = a_1(x_n - x_1) + a_2(x_{n-1} - x_2) + \dots \quad (7.9)$$

Якщо ряд включає непарну кількість дат, то дата, що стоїть в середині ряду $X_{\text{центр}}$, виключається з розрахунків.

Значення коефіцієнтів a знаходять за табл. 7 Додатка.

За допомогою критерію W тестується альтернативна гіпотеза H_A : розподіл не є нормальним. Критерій W розраховується за формулою:

$$W_{\text{факт.}} = \frac{b^2}{(n-1)s^2}, \quad (7.10)$$

де s – стандартне відхилення для вибірки, n – обсяг вибірки.

$W_{\text{факт.}}$ порівнюють із критичним значенням з табл. 8 Додатка. Якщо $W_{\text{факт.}} < W_{\text{табл.}}$, альтернативна гіпотеза залишається чинною, розподіл не є нормальним. Якщо $W_{\text{факт.}} > W_{\text{табл.}}$, альтернативна гіпотеза відхиляється, розподіл вважається нормальним.

П р и к л а д 7.3

Визначте, чи відповідає розподіл наступних дев'яти дат нормальному закону: 163, 157, 160, 168, 155, 168, 164, 157, 169.

Р о з в ' я з а н н я

Вибірка містить менше ніж 30 дат, тому для перевірки на нормальність скористаємося методом Шапіро-Уілка.

Розташовуємо вибіркові дати у порядку зростання:

$$155 \quad 157 \quad 160 \quad 163 \quad 164 \quad 168 \quad 168 \quad 169$$

Розраховуємо значення b , коефіцієнти a знайдемо у табл. 7 Додатка:

$$b = 0,5888(169 - 155) + 0,3244(168 - 157) + 0,1976(168 - 157) + 0,0947(164 - 160) + 0 = 14,36$$

Розраховуємо стандартне відхилення (3.19): $s = 5,34$.

Тестуємо гіпотезу (H_A : розподіл не є нормальним) за допомогою критерію W (7.10):

$$W_{\text{факт.}} = \frac{14,36^2}{(9-1)5,34^2} = 0,904; \quad W_{\text{табл.}} = 0,829 \text{ (табл. 8 Додатка).}$$

$W_{\text{факт.}} > W_{\text{табл.}}$, альтернативна гіпотеза відхиляється.

В и с н о в о к

Вибіркові дані взяті з генеральної сукупності з нормальним розподілом дат.

7.5 КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Поясніть, для чого необхідно з'ясовувати характер розподілу ознак.
2. Поясніть, на чому засновано принцип перевірки на нормальність за допомогою показників асиметрії та ексцесу.
3. З'ясуйте, чи відповідає розподіл нормальному закону:
 - а) зріст 62 новобранців: коефіцієнт асиметрії $As = 0,52$, коефіцієнт ексцесу $Ex = 0,06$;
 - б) кількість цуценят у 47 німецьких вівчарок: $As = 0,172$, $Ex = 0,93$;
 - в) вміст білка в насінні квасолі, отриманий на 78 спостереженнях: $As = 0,42$, $Ex = -0,72$.
4. Визначте, яким має бути відношення коефіцієнта асиметрії до його статистичної похибки $\frac{As}{s_{As}}$, щоб нульова гіпотеза $H_0: As = 0$:
 - а) була істинною при $n = 121$;
 - б) відхилялась на 0,1%-ому рівні значущості при $n = 28$?
5. З'ясуйте, чи відповідає розподіл 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6 нормальному закону. Зробіть висновок щодо асиметричності та наявності ексцесу.
6. За даними завдання 11 (див. п. 2.6) з'ясуйте, чи відповідає нормальному закону розподіл вмісту глюкози в крові.

Навчальне видання

Атраментова Любов Олексіївна

(Доктор біологічних наук, професор кафедри генетики і цитології
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна)

Утєвська Ольга Михайлівна

(Кандидат біологічних наук, доцент кафедри генетики і цитології
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна)

БІОМЕТРІЯ

I. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗПОДІЛІВ

НБ ПНУС



729762

Підписано до друку 16.09.07. Формат 60х90^{1/16}.

Папір офсетний. Друк офсетний.

Умов. друк. арк. 9,3. Обл. вид. арк. 11,0.

Наклад 2600 прим. Зам. № 15503-08

Надруковано у друкарні «Тріада+» м. Харків, вул. Киргизька, 19.
Тел.: (057) 757-98-16, 703-12-21.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 279 від 13.12.2000.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.

Тел. (057) 7194865, тел./факс (057) 7195867.

Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. Email: office@ranok.kharkov.ua