

28 0273

A-92

Сучасний
Підручник



БІОМЕТРІЯ

Порівняння груп і аналіз зв'язку



2

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

**Л. О. АТРАМЕНТОВА
О. М. УТЄВСЬКА**

БІОМЕТРІЯ

II. ПОРІВНЯННЯ ГРУП І АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

НБ ПНУС



733514

Видавництво «Ранок»
Харків
2007

УДК 57.087.1

ББК 28в6

А 92

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1.4/18-Г-1479.1 від 06.09.07 р.)*

Рецензенти:

член-кореспондент НАН України, доктор біологічних наук, професор, завідувач відділу молекулярної генетики Інституту молекулярної біології і генетики НАН України С. С. Малюта;

доктор біологічних наук, професор, декан біологічного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Л. І. Остапченко;

доктор медичних наук, професор, завідувач кафедри медичної біології Харківського державного медичного університету В. В. М'ясоєдов

Атраментова Л. О.

А 92 Біометрія. Ч. II. Порівняння груп і аналіз зв'язку: Підручник / Атраментова Л. О., Утевська О. М. – Х.: Видавництво «Ранок», 2007. – 176 с.

ISBN 978-966-637-138-9 (повне зібрання)

ISBN 978-966-637-136-5 (частина II)

Підручник містить статистичні методи аналізу експериментальних даних біологічних наук. У підручнику наводяться сучасні методи біологічної статистики, включаючи параметричні й непараметричні тести, тести для корельованих і малих груп. Велика увага приділяється питанням планування експерименту й перевірки статистичних гіпотез. Кожен метод супроводжується прикладами з докладним описом техніки розрахунків. Додаток містить необхідні статистичні таблиці.

Підручник призначений для науковців, аспірантів і студентів біологічних, медичних, ветеринарних та інших спеціальностей, може бути використаний викладачами вищих навчальних закладів.

УДК 57.087.1

ББК 28в6

© Атраментова Л. О., Утевська О. М., 2007

© ТОВ Видавництво «Ранок», 2007

ЗМІСТ

Частина II. ПОРІВНЯННЯ ГРУП ТА АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ

8. Порівняння дати з групою	5
8.1. Дати, що випадають	5
8.2. Сукупності з нормальним розподілом дат	6
8.3. Сукупності з вільним розподілом дат	7
Відхиляється одна дата	7
Відхиляються дві дати	8
8.4. Контрольні завдання	10
9. Порівняння двох груп	11
9.1. Вибір методу	11
9.2. Кількісні ознаки. Дати, що розподіляються нормально. Великі вибірки	13
Порівняння дисперсій	15
Порівняння середніх арифметичних	16
9.3. Кількісні й рангові ознаки. Дати, що розподіляються вільно. Нечисленні вибірки	20
Незалежні вибірки	21
Залежні вибірки	26
9.4. Якісні ознаки	33
Порівняння вибірових часток	33
9.5. Порівняння рядів розподілів	35
Критерій Пірсона χ^2	35
9.6. Порівняння декількох груп	40
Поправка Бонферроні	41
9.7. Контрольні завдання	45
10. Кореляційний аналіз	50
10.1. Кореляційний зв'язок	50
10.2. Кількісні ознаки з нормальним розподілом. Лінійний зв'язок	51
Параметричний коефіцієнт кореляції Пірсона	51
Множинна кореляція	61
Часткова кореляція	63
10.3. Кількісні ознаки. Нелінійний зв'язок. Оцінка форми зв'язку	66
Кореляційне відношення	66
Коефіцієнти детермінації	68
Оцінка форми зв'язку	70
10.4. Кількісні і порядкові (рангові) ознаки	70
Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена	71
10.5. Якісні ознаки	75
Тетрахоричний показник зв'язку	75

Поліхоричний показник зв'язку	77
10.6. Зв'язок між якісними та кількісними ознаками	79
Бісеріальний коефіцієнт кореляції	79
10.7. Контрольні завдання	82
11. Регресійний аналіз	85
11.1. Основні поняття	85
11.2. Лінійна регресія	86
11.3. Нелінійна регресія	91
Загальна степеневая функція	91
Показова функція	92
Логарифмічна функція	93
11.4. Контрольні завдання	94
12. Дисперсійний аналіз	95
12.1. Теорія дисперсійного аналізу	95
Загальні поняття	95
Статистичний вплив фактора	96
Дисперсійний комплекс	97
Варіація всередині дисперсійного комплексу	97
Нульова гіпотеза дисперсійного аналізу	98
Статистичні критерії дисперсійного аналізу	100
Принципи параметричного дисперсійного аналізу	100
12.2. Однофакторний параметричний дисперсійний аналіз кількісних ознак	103
Незалежні групи. Нерівномірні комплекси	103
Незалежні групи. Рівномірні комплекси	109
Оцінка сили впливу фактора	113
Порівняння групових середніх дисперсійного комплексу	115
12.3. Дисперсійний аналіз якісних ознак	118
12.4. Непараметричний дисперсійний аналіз	120
Незалежні групи. Рівномірні й нерівномірні комплекси	120
Залежні групи. Рівномірні комплекси	123
Непараметричний показник сили впливу фактора	125
12.5. Контрольні завдання	127
13. Статистика та логіка	130
Післямова	138
Література	140
Додаток. Таблиці статистичних критеріїв	143
Список позначень	169
Алфавітний покажчик	172

8

ПОРІВНЯННЯ ДАТИ З ГРУПОЮ

8.1. ДАТИ, ЩО ВИПАДАЮТЬ

Необхідність порівняти одну дату з групою дат виникає з двох причин: якщо серед набору дат виявляється число, що значно відхиляється за своїм значенням від інших; якщо потрібно визначити, чи належить до існуючої групи незалежно отримана дата.

Іноді серед масиву даних може з'явитися занадто велика або занадто мала дата, що настільки випадає із загального ряду, що її присутність здається помилкою. Такі дати називаються *датами, що випадають*. Дата, що значно відрізняється від інших дат групи, може правильно відображати реально існуючий об'єкт, але може бути й результатом методичної похибки. В останньому випадку її називають *артефактом* (штучно утвореним). До артефактів можуть призвести збої в роботі приладу, недбалість, неправильний запис, неоднорідність вибірки та інші причини.

Аналіз ряду з датою, що випадає, значно змінює показники розподілу. Якщо дата є артефактом, вона має бути виключена з подальшої роботи. Однак для вилучення дати, що випадає, недостатньо одного суб'єктивного відчуття, що вона є нетиповою. Рішення про те, відкинути чи ні сумнівне значення, виноситься на підставі статистичних критеріїв, які оцінюють відхилення значення, що випадає, у порівнянні із загальною мінливістю у вибірці. Залежно від характеру розподілу ознаки, застосовуються

параметричні й непараметричні критерії. При відповідності розподілу нормальному потужнішим є параметричний критерій. Нульова гіпотеза формулюється так: дата належить до генеральної сукупності, з якої взята вибірка.

Іноді доводиться порівнювати незалежно одержану дату з групою дат. У цьому випадку визначається, чи можна приєднати результат незалежного одиничного спостереження до даних, які отримані в результаті серії одночасних спостережень. Чи не порушить таке включення закономірності, що намагаються виявити в дослідженні?

8.2. СУКУПНОСТІ З НОРМАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ ДАТ

Якщо відомо, що розподіл ознаки в генеральній сукупності відповідає нормальному закону, то перевірка нульової гіпотези проводиться за критерієм t , який дорівнює нормованому відхиленню дати, що випадає, від загальної середньої:

$$t = \frac{x_{\text{вип.}} - \bar{x}}{s}, \quad (8.1)$$

де t – критерій випадіння, $x_{\text{вип.}}$ – значення, що випадає (сумнівна дата), \bar{x} – середня арифметична, s – стандартне відхилення (\bar{x} і s розраховуються із включенням сумнівної дати).

Обчислене нормоване відхилення t порівнюють із критичними значеннями в табл. 9 Додатка. Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, сумнівну дату не вважають такою, що випадає. Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, сумнівну дату вважають такою, що випадає, й виключають з розрахунків.

П р и к л а д 8.1

Серед набору дат 1, 2, 3, 10 сумнів викликає четверта. Розрахуємо необхідні величини:

$$n = 4, \bar{x} = 4, s = 4, t_{10} = \frac{10 - 4}{4} = 1,5.$$

$t_{\text{табл.}} = 1,71$ (табл. 9 Додатка). $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза про приналежність дати до генеральної сукупності, звідки взята вибірка, залишається чинною. Дата 10 не може вважатися такою, що випадає.

П р и к л а д 8.2

Серед дат 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 21 сумнівна дата 21. Розрахуємо необхідні величини: $n = 9, \bar{x} = 5, s = 6,1, t_{21} = \frac{21 - 5}{6,1} = 2,6$.

$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}}$ ($p = 0,01$) (табл. 9 Додатка). Нульова гіпотеза про приналежність дати до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$. Дата 21 є такою, що випадає, і вилучається з аналізу.

8.3. СУКУПНОСТІ З ВІЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ ДАТ

Якщо ознака не розподіляється відповідно до нормального закону або характер її розподілу невідомий, то перевірка нульової гіпотези здійснюється за допомогою непараметричних критеріїв після ранжування ряду (див. п. 2.3). Непараметричні критерії оцінюють, наскільки дата, що випадає, відхиляється від найближчої дати в ранжованому ряді на фоні всієї групи.

ВІДХИЛЯЄТЬСЯ ОДНА ДАТА

Дата занадто мала

У ранжованому за зростанням ряді ця дата стоїть на першому місці. Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про приналежність мінімальної дати до генеральної сукупності, визначається за формулою:

$$t_{1\min} = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}, \quad (8.2)$$

де x_1 – перша дата в ранжованому ряді, можливий артефакт, x_2 – друга дата, x_n – остання дата.

Нульову гіпотезу про приналежність сумнівної дати до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляють при $\tau_{\text{факт.}} \geq \tau_{\text{табл.}}$ і залишають чинною при $\tau_{\text{факт.}} < \tau_{\text{табл.}}$. Критичні значення τ знаходять у табл. 10 Додатка.

Дата занадто велика

У ранжованому за зростанням ряді ця дата стоїть на останньому місці. Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про її приналежність до генеральної сукупності, визначається за формулою:

$$\tau_{1\max} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}, \quad (8.3)$$

де x_1 – перша дата в ранжованому ряді, x_{n-1} – передостання дата, x_n – остання дата, можливий артефакт.

Нульову гіпотезу про приналежність сумнівної дати до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляють при $\tau_{\text{факт.}} \geq \tau_{\text{табл.}}$ і залишають чинною при $\tau_{\text{факт.}} < \tau_{\text{табл.}}$. Критичні значення τ знаходять у табл. 10 Додатка.

ВІДХИЛЯЮТЬСЯ ДВІ ДАТИ

Дві занадто малі дати

Обидві сумнівні дати розташовані на початку ряду, що ранжований за зростанням. Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про приналежність двох мінімальних дат до генеральної сукупності, знаходять за формулою:

$$\tau_{2\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}, \quad (8.4)$$

де x_1 – перша дата в ранжованому ряді, один з можливих артефактів, третя дата, x_n – остання дата.

Нульову гіпотезу про приналежність сумнівної дати до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляють при $\tau_{\text{факт.}} \geq \tau_{\text{табл.}}$ і залишають чинною при $\tau_{\text{факт.}} < \tau_{\text{табл.}}$. Критичні значення τ знаходять у табл. 11 Додатка.

Дві занадто великі дати

Обидві дати розташовані наприкінці ряду, що ранжований за зростанням. Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про приналежність двох максимальних дат до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, знаходять за формулою:

$$\tau_{2\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}, \quad (8.5)$$

де x_1 – перша дата в ранжованому ряді (мінімальна), x_{n-2} – дата, третя від кінця ряду, x_n – остання в ряду дата (максимальна).

Нульову гіпотезу про приналежність сумнівної дати генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляють при $\tau_{\text{факт.}} \geq \tau_{\text{табл.}}$ і залишають чинною при $\tau_{\text{факт.}} < \tau_{\text{табл.}}$. Критичні значення τ знаходять у табл. 11 Додатка.

Одна дата занадто мала, інша – занадто велика

Дати розташовані в протилежних кінцях ранжованого ряду. Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про приналежність мінімальної дати до генеральної сукупності, знаходять за формулою:

$$\tau_{(1-1)\min} = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}, \quad (8.6)$$

де x_1 – перша дата в ранжованому ряді, можливий артефакт, x_2 – друга дата, x_{n-1} – передостання дата.

Критерій, що дозволяє перевірити нульову гіпотезу про приналежність максимальної дати до генеральної сукупності:

$$\tau_{(1-1)\max} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}, \quad (8.7)$$

де x_2 – друга дата в ранжованому ряді, x_{n-1} – передостання дата, x_n – остання дата, можливий артефакт.

Нульову гіпотезу про приналежність сумнівної дати до генеральної сукупності, з якої взята вибірка, відхиляють при $\tau_{\text{факт.}} \geq \tau_{\text{табл.}}$ і залишають чинною при $\tau_{\text{факт.}} < \tau_{\text{табл.}}$. Критичні значення τ знаходять у табл. 12 Додатка.

4. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

- 1. Що може бути причиною присутності в наборі даних випадної дати?
- 2. Треба чи не треба виключати випадну дату з розрахунків? Розгляньте та поясніть обидві можливості.
- 3. Дана статистична сукупність: 2, 14, 9, 15, 17, 10. Чи треба виключати з розрахунків дату 2?
- 4. Дана статистична сукупність: 34, 66, 5, 43, 57, 38. Чи належить до неї дата 103? Дати 5 і 103? Дата 103 за умовою, що дата 5 є артефактом?

9

ПОРІВНЯННЯ ГРУП

9.1. ВИБІР МЕТОДУ

Найпоширеніший прийом статистичного аналізу – порівняння. Найчастіше порівнюють дві вибірки, рідше – вибірку з генеральною сукупністю або вибіркові дані з теоретично очікуваними показниками. Порівнянню підлягають різні вибіркові показники – середні величини, частки, ряди, показники різноманіття та інші.

Порівняти середні арифметичні можна за допомогою параметричних критеріїв Фішера й Стюдента, для порівняння дисперсій застосовується критерій Фішера (див. п. 9.2). З непараметричних методів порівняння середніх величин (середньої арифметичної, моди й медіани) застосовують критерій знаків, парний критерій Уїлкоксона, критерій Уїлкоксона (Манна-Уїтні) (див. п. 9.3). Ряди розподілу зіставляють, використовуючи критерій χ^2 (див. п. 9.5).

При підборі статистичних критеріїв для оцінки вірогідності розходжень, що виявлені в порівнянні, необхідно враховувати ряд умов, від яких залежить вибір критерію, а також формула, за якою обчислюються статистичні похибки.

Природа аналізованої ознаки

Під час аналізу якісних, кількісних і рангових ознак (див. п. 2.1) використовують принципово різні підходи. Для порівняння вибірок за якісними показниками найчастіше застосовується метод кутового перетворення

ішера (див. п. 9.4). Для порядкових даних розроблений цілий ряд рангових непараметричних тестів. Для кількісних ознак використовуються параметричні й непараметричні методи.

Характер розподілу ознаки в генеральній сукупності

Ця особливість встановлюється для кількісних ознак. Залежно від того, чи відповідає їхній розподіл у генеральній сукупності нормальному закону чи ні (див. п. 4.3, 7.1, 7.2, 7.3), використовуються відповідно параметричні або непараметричні методи статистики (див. п. 6.3.).

Співвідношення вибірок

Порівнювані групи бувають залежними й незалежними (див. п. 1.2). У залежних групах дати попарно зв'язані між собою. Даті з однієї вибірки відповідає певна дата з іншої. Наприклад, в експериментах «до й після» ознака двічі вимірюється в того самого об'єкта – до експериментального впливу й після нього. Кожному об'єктові відповідає пара дат: одна належить першій вибірці, інша – другій.

У незалежних групах дати не зв'язані між собою. Один об'єкт входить тільки в одну групу. Наприклад, в експериментах «дослід – контроль» над контрольною й експериментальною груп формується з різних об'єктів.

Залежні й незалежні групи порівнюються з використанням різних критеріїв. У залежних групах зв'язані дати скорельовані одна з одною, й тести порівняння залежних груп ураховують цю кореляцію.

Обсяг вибірок

Вибірки можуть бути великими або малими. Як правило, малі вибірки порівнюються за кількісною ознакою, потребують використання непараметричних методів, великі вибірки можуть аналізуватися методами параметричної статистики незалежно від характеру розподілу дат. Статистичні критерії розраховуються на вибірки певного обсягу. Наприклад, U -критерій Уїлкоксона застосовується до вибірок, що містять не більше ніж 60 дат.

Вибірки можуть бути рівно- або різновеликими. Усі тести для залежних груп припускають, що вибірки рівновеликі. Тести для незалежних груп

використовують як рівновеликі, так і різновеликі вибірки, але для деяких методів важливим є співвідношення обсягів груп, що порівнюються. Наприклад, при використанні критерію Ван дер Вардена різниця в розмірах груп не повинна перевищувати п'яти спостережень.

9.2. КІЛЬКІСНІ ОЗНАКИ. ДАТИ, ЩО НОРМАЛЬНО РОЗПОДІЛЯЮТЬСЯ. ВЕЛИКІ ВИБІРКИ

Рівність груп припускає рівність їхніх розподілів. В абсолютно рівних групах розподіли збігаються (рис. 9.1 *a*). Як правило, розподіли порівнюваних груп у тому чи іншому ступені зміщені один до одного (рис. 9.1 *b – r*). Якщо зсув невеликий і статистично невірогідний, то вважають (з певною ймовірністю), що вибірки належать до однієї генеральної сукупності або до різних сукупностей з однаковими параметрами. Якщо розходження в розподілах статистично доведені, то вважають, що вибірки належать до генеральних сукупностей з різними параметрами.

Як ми вже відзначали, розподіл кількісної ознаки характеризується середніми величинами й показниками варіації. Порівняння груп за кількісною ознакою, що нормально розподіляється, зводиться до порівняння вибірових дисперсій і середніх арифметичних. Умови нерівності дисперсій або середніх арифметичних достатньо, щоб вважати розходження між вибірками статистично вірогідними.

Статистичний аналіз дат, що розподіляються нормально, проводять із використанням параметричних критеріїв: t Стьюдента й F Фішера. Якщо розходження між вибіровими дисперсіями і/або середніми арифметичними є статистично вірогідними, то робиться висновок про приналежність вибірок до різних генеральних сукупностей. Якщо різниця між вибіровими показниками розподілу статистично не доведена, немає підстав відносити вибірки до різних генеральних сукупностей.

Розглянемо експеримент «контроль – дослід». Контрольна й дослідна групи до впливу експериментального фактора належать до однієї генеральної

сукупності. Розподіли досліджуваної ознаки в групах виглядають так, як представлено на рис. 9.1 а. Після експериментального впливу на дослідну групу можливі такі варіанти:

1. Якщо фактор не вплинув на ознаку, то розподіли залишаються без змін, будуть характеризуватися однаковими середніми й варіацією (рис. 9.1 а).

2. Якщо фактор вплинув на ознаку, то будуть спостерігатися ситуації, що відображені на рис. 9.1 б – г.

На рис. 9.1 б, в середні значення ознаки змінюються, але характер варіації залишається тим самим. Вплив змінює середній рівень ознаки. Змінність характеру варіації свідчить про внутрішньогрупову неоднорідність об'єктів, які реагують на фактор однаково.

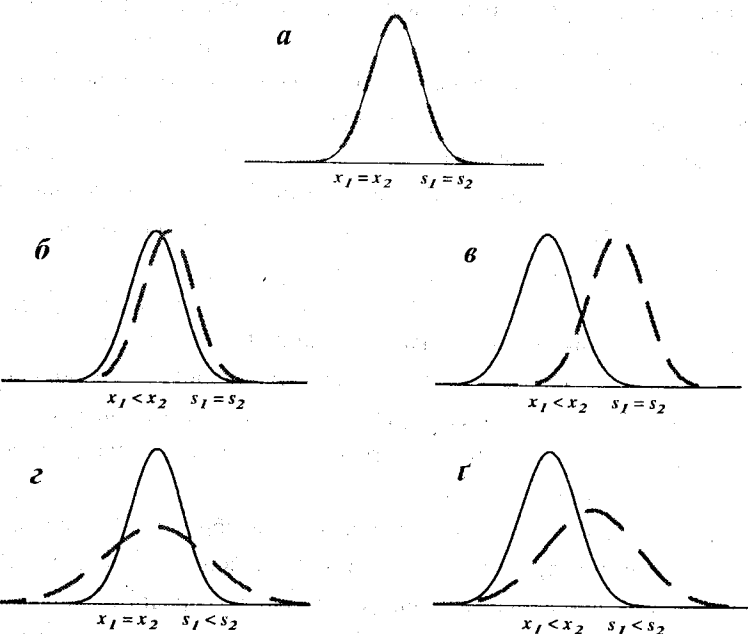


Рис. 9.1. Можливі співвідношення двох розподілів

На рис. 9.1 з середні значення ознаки залишаються тим самим, але характер варіації змінюється. Змінюються межі розподілу, розмах варіювання та частота модального класу. Група реагує на фактор, але реакція її членів

неоднорідна й навіть протилежна. Така реакція може свідчити про неоднорідність групи – генетичну, статеву, вікову тощо. У гетерогенній групі різні особини по-різному реагують на той самий фактор.

На рис. 9.1 г змінюються й середні значення ознаки, і характер варіації.

ПОРІВНЯННЯ ДИСПЕРСІЙ

Від співвідношення дисперсій у порівнюваних вибірках залежить вибір методики подальших розрахунків. Нульова гіпотеза при порівнянні дисперсій формулюється так: дисперсії генеральних сукупностей, з яких узяті вибірки, рівні – $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Перевірку нульової гіпотези проводять за допомогою критерію Фішера F.

Критерій Фішера F

Критерій Фішера F при порівнянні вибірок являє собою відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad s_1^2 > s_2^2, \quad (9.1)$$

де s_1^2 й s_2^2 – дисперсії порівнюваних груп.

Оскільки критерій Фішера – це відношення більшої дисперсії до меншої, його значення більше або дорівнює одиниці: $F \geq 1$. При рівності дисперсій ($s_1^2 = s_2^2$) F-критерій дорівнює одиниці. Чим значніше відрізняються дисперсії порівнюваних груп, тим більших значень набуває критерій Фішера.

Для того, щоб порівняти розрахований F-критерій із критичними значеннями (табл. 13 Додатка), необхідно знайти два числа ступенів свободи:

$$df_1 = n_1 - 1, \quad df_2 = n_2 - 1, \quad (9.2)$$

де df_1 – число ступенів свободи для більшої дисперсії (його значення розташовані у верхньому рядку таблиці), df_2 – число ступенів свободи для меншої дисперсії (його значення розташовані у лівому стовпці таблиці), n_1 й n_2 – обсяги вибірок.

Якщо $F_{\text{факт.}} < F_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза про рівність генеральних дисперсій залишається чинною, різниця між вибірковими дисперсіями вважається

випадковою (невірогідною). Якщо $F_{\text{факт.}} \geq F_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза відхиляється на прийнятому рівні значущості p , різниця між вибірковими дисперсіями вважається вірогідною.

ПОРІВНЯННЯ СЕРЕДНІХ АРИФМЕТИЧНИХ

Нульова гіпотеза формулюється так: середні арифметичні генеральних сукупностей, з яких узяті вибірки, не розрізняються – $H_0: \mu_1 = \mu_2$. Перевірку нульової гіпотези проводять за допомогою критерію Стюдента t .

Критерій Стюдента t

Вибір формули для обчислення критерію Стюдента залежить від того, чи є дисперсії порівнюваних груп, залежні чи незалежні групи.

Незалежні групи з рівними дисперсіями

Якщо дисперсії порівнюваних незалежних груп мають однакове значення, t -критерій розраховується за формулою:

$$t = \frac{d}{s_d}, \quad (9.3)$$

$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ – різниця вибірових середніх, \bar{x}_1 і \bar{x}_2 – середні арифметичні порівнюваних вибірок, s_d – статистична похибка різниці, що розраховується за формулами:

$$\text{при } n_1 = n_2 \quad s_d = \sqrt{s_{x1}^2 + s_{x2}^2}, \quad (9.4)$$

s_{x1} й s_{x2} – статистичні похибки середніх арифметичних першої й другої вибірок,

$$\text{при } n_1 \neq n_2 \quad s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)}, \quad (9.5)$$

s_1^2 й s_2^2 – дисперсії порівнюваних груп.

Число ступенів свободи при рівності дисперсій порівнюваних груп: $= n_1 + n_2 - 2$.

Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ (табл. 3 Додатка), то нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх залишається чинною, різниця між вибірковими середніми

вважається випадковою (невірогідною). Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза відхиляється на прийнятому рівні значущості p , різниця між вибірковими середніми вважається вірогідною.

Незалежні групи з нерівними дисперсіями

Якщо дисперсії порівнюваних груп мають різні значення, t -критерій розраховується за формулою:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}. \quad (9.6)$$

Число ступенів свободи при нерівності дисперсій груп:

$$\text{при } n_1 = n_2 \quad df = n - 1 + \frac{2n - 2}{\frac{s_1^2}{s_2^2} + \frac{s_2^2}{s_1^2}}, \quad (9.7)$$

$$\text{при } n_1 \neq n_2 \quad df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 + 1}} - 2. \quad (9.8)$$

Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ (табл. 3 Додатка), то нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх залишається чинною, різниця між вибірковими середніми вважається випадковою (невірогідною). Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза відхиляється на прийнятому рівні значущості p , різниця між вибірковими середніми вважається вірогідною.

Залежні групи

Для двох залежних груп t -критерій розраховується за формулою:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}}, \quad (9.9)$$

де $\bar{d} = \frac{\sum (x - y)}{n}$ – середня різниця, x й y – попарні дати, n – число пар спостережень, $s_{\bar{d}}$ – статистична похибка середньої різниці (9.10).

ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
код 02125266
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

Статистична похибка середньої різниці розраховується за формулою:

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\sum d^2}{n} - \bar{d}^2 \right)}, \quad (9.10)$$

де $\sum d^2$ – сума квадратів різниць між попарно зв'язаними даними порівнюваних груп:

$$\sum d^2 = \sum (x - y)^2. \quad (9.11)$$

Розрахований t -критерій Стьюдента порівнюється з критичним значенням (табл. 3 Додатка). Число ступенів свободи $df = n - 1$.

Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх залишається чинною, різниця між вибірковими середніми вважається випадковою (невірогідною). Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ для прийнятого рівня значущості p , то нульова гіпотеза відхиляється, різниця між середніми двох залежних груп вважається вірогідною.

Приклад 9.1

Відомо, що концентрація холестерину в сироватці крові залежить від особливостей харчування й генетичних факторів. Дієта, яка багата на білки й жири, створює більш високий рівень холестерину, ніж дієта з низьким вмістом цих компонентів. Харчування – не єдина причина, що визначає вміст ліпідів у крові: у представників різних етнічних груп при одній і тій самій дієті спостерігаються різні рівні холестерину.

Використовуючи наведені дані, визначте, чи вірогідні розходження за концентрацією холестерину в крові африканців і білих американців.

Африканські племена, концентрація холестерину в крові, мг%:

100	118	85	121	107	175	155	137	110	98	125	184	130	95
150	105	173	161	132	119	152	111	172	112	158	167	180	122
137	118	135	102	88	171	155	135	124	110	121	134	126	160
125	165	138	118	169	123	120	140	115	142	131	141	138	184
130	144	131	145	116	140	107	142	122					

Білі американці, концентрація холестерину в крові, мг%:

162	203	214	187	214	210	195	242	216	198	210	214	208	226
218	155	184	215	234	205	133	232	147	206	225	242	216	191
211	255	177	198	210	182	224	227	173	251	166	208	195	183
226	243	194	217	238	209	240	212						

Розв'язання

1. Знаходимо дисперсії порівнюваних груп:

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n_1} \right) = \frac{1}{64} \left((100^2 + 118^2 + 85^2 + \dots) - \frac{(100 + 118 + 85 + \dots)^2}{65} \right) = 626,62.$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n_2} \right) = \frac{1}{49} \left((162^2 + 203^2 + 214^2 + \dots) - \frac{(162 + 203 + 214 + \dots)^2}{50} \right) = 721,64.$$

Розраховуємо критерій Фішера (9.1), що дорівнює відношенню більшої (!) дисперсії до меншої:

$$s_2^2 > s_1^2, \text{ тому: } F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{721,64}{626,62} = 1,152.$$

Число ступенів свободи для більшої дисперсії $df_1 = n_2 - 1 = 50 - 1 = 49$, для меншої дисперсії $df_2 = n_1 - 1 = 65 - 1 = 64$.

Порівнюємо фактичний F -критерій із критичним за табл. 13 Додатка: $F_{\text{факт.}} < F_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза про рівність генеральних дисперсій є чинною, різниця між вибірковими дисперсіями невірогідна.

2. Ми встановили, що дисперсії однакові. Тепер порівнюємо середні арифметичні. Для незалежних груп з однаковими дисперсіями t -критерій розраховується за формулою (9.3):

$$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 206,8 - 133,0 = 73,8.$$

Похибка різниці s_d для нерівночисельних вибірок (9.5):

$$s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \right)} = \sqrt{\frac{(65 - 1) \cdot 616,98 + (50 - 1) \cdot 701,21}{65 + 50 - 2} \left(\frac{65 + 50}{65 \cdot 50} \right)} = 23,12.$$

Оцінюємо вірогідність різниці середніх:

$$t = \frac{d}{s_d} = \frac{73,8}{23,12} = 3,19. \quad df = n_1 + n_2 - 2 = 65 + 50 - 2 = 113.$$

$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}}$ ($p = 0,01$). Нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Висновок

Концентрації холестерину в крові африканців і білих американців вірогідно розрізняються.

9.3. КІЛЬКІСНІ Й РАНГОВІ ОЗНАКИ. ДАТИ, ЩО РОЗПОДІЛЯЮТЬСЯ ВІЛЬНО. НЕЧИСЛЕННІ ВИБІРКИ

Для аналізу дат, характер розподілу яких невідомий або не відповідає нормальному закону, використовують методи непараметричної статистики. Аналізу непараметричними методами піддаються вибірки невеликого обсягу. Непараметричну статистику можна застосовувати при аналізі груп, для характеристики яких використовують не середню арифметичну, а інші середні величини. Непараметричні критерії застосовуються як до кількісних, так і до порядкових даних.

Серед непараметричних критеріїв виділяють критерії центральних тенденцій і критерії характеру розподілів.

Критерії центральних тенденцій виявляють розходження між двома сукупностями тоді, коли вони стосуються таких характеристик, як середнє, медіана тощо. Розходження в яких-небудь особливостях форми розподілів ігноруються. Дві вибірки з рівними середніми, але різними дисперсіями за цими критеріями будуть вважатися однаковими. Критерії для оцінки розходжень у середніх тенденціях – критерій знаків, парний критерій Уїлкоксона, критерій Уїлкоксона (Манна–Уїтні).

Для порівняння залежних і незалежних груп використовуються різні непараметричні критерії. Критерії, що призначені для рішення однієї й тієї ж

задачі, можуть мати різну чутливість, тобто потужність. Як правило, збільшення потужності досягається ускладненням методу. Варто починати аналіз із менш потужного й простішого критерію. Якщо він не виявив розходжень, можна скористатися потужнішим, але трудомістким критерієм.

НЕЗАЛЕЖНІ ВИБІРКИ

Критерій Уїлкоксона (Манна–Уїтні) U

Ранговий U -критерій Уїлкоксона застосовується для порівняння центральних тенденцій двох незалежних вибірок. Метод визначає, наскільки великим є перекривання двох рядів розподілів (рис. 9.2).

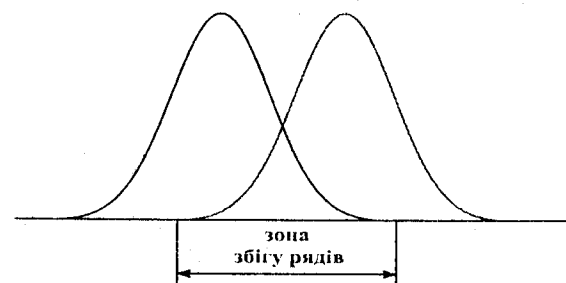


Рис. 9.2. Критерій Уїлкоксона (Манна–Уїтні) U оцінює зону збігу рядів

Використання критерію U припускає, що обидва розподіли належать до одного типу. З його допомогою можна виявляти розходження між малими вибірками, що містять до 60 дат ($n_1, n_2 \geq 3$ або $n_1 = 2, n_2 \geq 5; n_1, n_2 \leq 60$).

Для розрахунку U -критерію вибірові ряди поєднуються в один загальний ранжований ряд. В основі методу лежить припущення про те, що якщо вибірові ряди не розрізняються, то суми їхніх рангів повинні бути однаковими. Суми рангів кожної групи використовуються для визначення критерію U , значення якого показує, наскільки збігаються ряди розподілів. Чим менше значення критерію, тим менша область збігу рядів, тим сильніше розходження між розподілами. Чим більше значення U , тим значніше збігаються ряди.

Нульова гіпотеза: вибірки належать одній генеральній сукупності або різним генеральним сукупностям з однаковими параметрами.

Для обчислення U -критерію дані порівнюваних вибірок розташовують у загальний ряд у порядку зростання від 1 до $N = n_1 + n_2$, а потім ранжують (див. п. 2.3). Окремо для кожної вибірки знаходять суми рангів і винаходять значення U_1 й U_2 :

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1; \quad (9.12)$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2. \quad (9.13)$$

Правильність розрахунків можна перевірити за допомогою виразу:

$$U_1 + U_2 = n_1 n_2.$$

Менше значення U використовують як $U_{\text{факт.}}$. Критичні точки критерію знаходять за табл. 14 Додатка.

Нульова гіпотеза залишається чинною при $U_{\text{факт.}} > U_{\text{табл.}}$ і відхиляється при $U_{\text{факт.}} \leq U_{\text{табл.}}$.

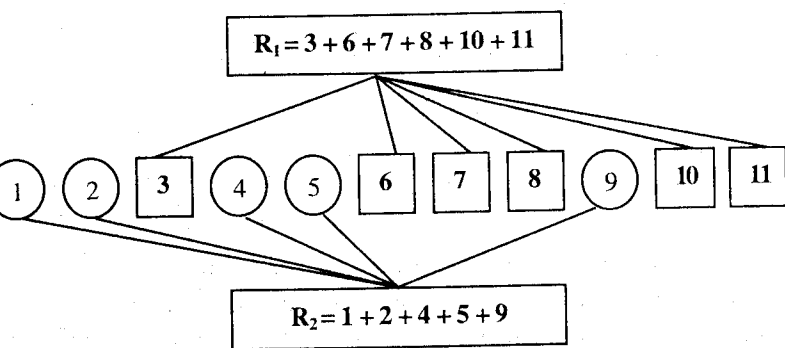


Рис. 9.3. Схема розрахунку критерію Уїлкоксона (Манна-Уїтні): для кожної вибірки розраховуються суми рангів в об'єднаному ряді

Приклад 9.2

На початку навчального року в першокласників оцінювалася швидкість читання. Зіставлялися результати шести- й семирічних учнів одного класу. Чи залежить швидкість читання від віку?

Таблиця 9.1. Швидкість читання

Вік	Кількість слів на хвилину										
6 років	16	17	20	21	39	38	36	35	34	29	28
7 років	40	41	43	42	90	44	55	60	31	30	

Розв'язання

Висуваємо нульову гіпотезу: шести- й семирічні діти читають з однаковою швидкістю, різниця в розподілах випадкова.

Для розв'язання задачі застосуємо критерій Уїлкоксона U . Для цього всі дані поєднуємо в один упорядкований ряд і надаємо кожній даті ранг. Потім для кожної вибірки розраховуються суми рангів.

Таблиця 9.2. Розрахунки до прикладу 9.2

x_1	x_2	R_1	R_2
16		1	
17		2	
20		3	
21		4	
28		5	
29		6	
	30		7
	31		8
34		9	
35		10	
36		11	
38		12	
39		13	
	40		14
	41		15
	42		16
	43		17
	44		18
	55		19
	60		20
	90		21
$n_1 = 11$	$n_2 = 10$	$\sum R_1 = 76$	$\sum R_2 = 155$

Розраховується U -критерій (9.12, 9.13):

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = 11 \cdot 10 + \frac{11(11+1)}{2} - 76 = 100;$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = 11 \cdot 10 + \frac{10(10+1)}{2} - 155 = 10.$$

Як фактичне значення критерію U використаємо менше з обчислених значень $U = 10$. Порівнюємо його із критичним (табл. 14 Додатка).

$U_{\text{факт.}} < U_{\text{табл.}}$ ($p = 0,01$). Нульова гіпотеза про приналежність вибірок однієї генеральної сукупності відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Висновок

Швидкість читання першокласників визначається їхнім віком.

Критерій Ван дер Вардена X

Критерій Ван дер Вардена оцінює розходження в центральних тенденціях між двома незалежними вибірками. При порівнянні вибірок із сукупностей, у яких розподіл ознаки близький до нормального, критерій Ван дер Вардена виявляється потужнішим за критерій Уїлкоксона. Критерій Ван дер Вардена застосовується, коли чисельність порівнюваних груп розрізняється не більше, ніж на 5 дат. Нульова гіпотеза: вибірки належать до однієї генеральної сукупності або різних генеральних сукупностей з однаковими параметрами.

Для знаходження критерію X дати двох вибірок ранжують у загальний ряд (див. п. 2.3). Для кожної дати однієї з вибірок (найчастіше меншої за обсягом) знаходять відношення:

$$\frac{R}{N+1}, \quad (9.14)$$

де R – ранг дати, $N = n_1 + n_2$, n_1 й n_2 – обсяги вибірок.

Для кожного значення $\frac{R}{N+1}$ за табл. 15 Додатка знаходять значення

функції $\psi \left[\frac{R}{N+1} \right]$. Сума значень ψ з урахуванням знаків являє собою фак-

тичний критерій Ван дер Вардена:

$$X = \sum \psi \left[\frac{R}{N+1} \right]. \quad (9.15)$$

Фактичне значення критерію порівнюють за табл. 16 Додатка із критичним значенням для прийнятого рівня значущості. Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $X_{\text{факт.}} \geq X_{\text{табл.}}$, і залишається чинною, якщо $X_{\text{факт.}} < X_{\text{табл.}}$.

Приклад 9.3

За часом виходу з лабіринту пацюків можна розділити на «розумних» (швидко знаходять вихід) і «нерозумних» (довго шукають вихід). Генетиками була проведена селекція пацюків за цією ознакою. Для цього схрещували «найрозумніших» і найбільш «нерозумних» з такими ж самими. Серед нащадків відбирали особин із крайніми значеннями ознаки й схрещували за тією ж самою схемою. Після декількох поколінь відбору були створені дві лінії пацюків. В узятих тварин (у випадковому порядку) з кожної лінії визначали час виходу з лабіринту (табл. 9.3). На підставі отриманих даних зробіть висновок, наскільки ефективним виявився відбір за цією ознакою.

Таблиця 9.3. Час проходження лабіринту

Лінія	Секунди							
«Нерозумні»	102	52	85	120	142	110	164	109
«Розумні»	67	88	105	49	45	67	115	

Розв'язання

Висуваємо нульову гіпотезу: лінії «розумних» і «нерозумних» пацюків являють собою єдину генеральну сукупність.

Середні арифметичні свідчать, що пацюки першої групи витрачають у середньому менше часу (76,6 с) на вихід з лабіринту, ніж тварини другої лінії (110,5 с). Вибірки нечисленні, тому для оцінки різниці між ними скористаємося непараметричним критерієм Ван дер Вардена. Висуваємо нульову гіпотезу: розходження в розподілах показників першої й другої ліній відсутні. Дати поєднуємо в загальний ряд і ранжуємо (табл. 9.4).

Число дат в обох групах: $N = n_1 + n_2 = 8 + 7 = 15$.

Незважаючи на те, що середні значення розрізняються майже в півтора рази, розподіли значно перекриваються. Оцінюємо вірогідність відмінностей: $X_{\text{факт.}} < X_{\text{табл.}}$, тому нульова гіпотеза відкинута бути не може.

Висновок

На цьому матеріалі ефективність добору не доведена.

Таблиця 9.4. Розрахунки до прикладу 9.3

x_1	x_2	R_1	R_2	$\frac{R}{N+1}$	$\Psi\left[\frac{R}{N+1}\right]$
52	45	3	1	$1:15 = 0,067$	-1,50
	49		2	$2:15 = 0,133$	-1,11
85	67	5	4	$4:15 = 0,267$	-0,62
	88		6	$6:15 = 0,400$	-0,25
102	94	8	7	$7:15 = 0,467$	-0,08
	105		9	$9:15 = 0,600$	0,25
109	115	10	12	$12:15 = 0,800$	0,84
110		11			
120		13			
142		14			
164		15			
$n_1=8$	$n_2=7$				$X = -2,47$

ЗАЛЕЖНІ ВИБІРКИ

Для оцінки розходжень між залежними вибірками застосовуються критерій знаків z і ранговий критерій Уїлкоксона T . Обидва критерії перевіряють розходження в центральних тенденціях. Більш простим в обчисленні, але менш потужним у перевірці нульової гіпотези є критерій знаків z . Його рекомендується використовувати першим, особливо при великому обсязі спостережень. Якщо критерій знаків не виявив відмінностей і число дат невелике (до 25), доцільно застосувати критерій T Уїлкоксона. Якщо значення абсолютної різниці між парними даними варіює в широких межах, краще застосувати T -критерій Уїлкоксона.

У тестах для порівняння залежних вибірок визначається не різниця групових середніх (як у тестах для незалежних вибірок), а середня різниця

між значеннями попарно зв'язаних дат. Критерій знаків ураховує знак різниці, критерій T Уїлкоксона враховує й знак, і розмір різниці. Через втрату частини інформації, що міститься в даних, критерій знаків має меншу потужність у порівнянні з критерієм T Уїлкоксона (рис. 9.4).

Однією з особливостей критерію знаків і T -критерію Уїлкоксона, що впливає на інтерпретацію результатів, є виключення нульових різниць. Критерії розглядають тільки пари даних, що розрізняються, для них оцінюють напрямок і ступінь розходження. Якщо парні значення однакові, вони не беруться для розрахунків. Якщо нульових різниць виявилось дуже багато, слід обережно робити висновки, оскільки в багатьох випадках значення ознаки не змінилися.

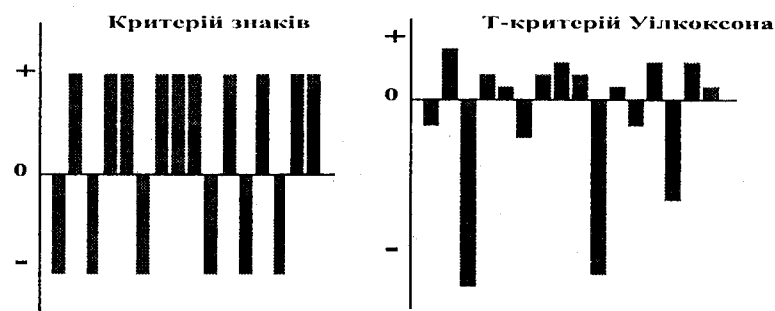


Рис. 9.4. Різниця між значеннями попарно зв'язаних дат: критерій знаків ураховує знак різниці, T -критерій Уїлкоксона враховує й знак, і розмір різниці

Критерій знаків z

Використання критерію знаків z – найпростіший метод оцінки розходжень між попарно зв'язаними вибірковими датами. Критерій знаків ураховує спрямованість розходжень у кожній парі дат і дозволяє встановити, у який бік – збільшення чи зменшення – змістилися значення ознаки. При цьому він не враховує ступеня розходжень між парними значеннями, чим обумовлена його менша потужність у порівнянні із критерієм Уїлкоксона T . Критерій знаків ефективний при великій кількості пар даних, підходить як для кількісних, так і для альтернативних якісних ознак.

Для обчислення критерію знаків оцінюється різниця між парними даними. Різниця виражається якісно – присвоєнням знака «+» чи «-». Нульові різниці в розрахунок не беруться. Кількість пар, що зіставляють, зменшується на число нульових різниць. Підраховується число позитивних і негативних знаків. Кількість знаків, що зустрічаються рідше, служить z -критерієм, який порівнюють із критичними значеннями (табл. 17 Додатка).

Нульова гіпотеза: у генеральній сукупності, з якої взята вибірка, кількість різниць зі знаком «+» дорівнює кількості різниць зі знаком «-», співвідношення вибірових різниць випадково відхиляється від цієї різниці. Чим значніше число різниць одного знака переважає над числом різниць іншого знака, тим менше впевненості у справедливості нульової гіпотези. Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $z_{\text{факт.}} \leq z_{\text{табл.}}$, і залишається чинною, якщо $z_{\text{факт.}} > z_{\text{табл.}}$.

Приклад 9.4

Вивчали вплив фізичного навантаження на артеріальний тиск у групі чоловіків. Результати до й після навантаження: 110 – 120, 100 – 130, 90 – 100, 120 – 110, 115 – 125, 130 – 110, 95 – 115, 90 – 120, 100 – 100, 135 – 150.

Чи змінює фізичне навантаження артеріальний тиск?

Розв'язання

Визначимо напрямок змін артеріального тиску (табл. 9.5). У семи чоловіків після фізичного навантаження артеріальний тиск підвищився (7 знаків «-»), у двох знизився (2 знаки «+»), в одного не змінився (1 значення «0»). Виходить, $z_{\text{факт.}} = 2$.

У таблиці критичних значень z (табл. 17 Додатка) знаходимо рядок, що відповідає обсягу вибірки за винятком нульових різниць $n = 10 - 1 = 9$: $z_{0,05} = 1$, $z_{0,01} = 0$.

$z_{\text{факт.}} > z_{\text{табл.}}$. Нульова гіпотеза залишається чинною.

Висновок

На підставі тільки цих даних не можна відповісти на запитання, чи впливає зазначене фізичне навантаження на артеріальний тиск у якомусь певному напрямку.

(Цю ж задачу можна розв'язати за допомогою критерію χ^2 . Нульова гіпотеза припускає рівність кількості позитивних і негативних знаків (5 і 5), з якими порівнюється їхнє фактичне число (8 й 2).)

Таблиця 9.5. Розрахунки до прикладу 9.4

№	x_1	x_2	$x_1 - x_2$
1	110	120	-
2	100	130	-
3	90	100	-
4	120	110	+
5	115	125	-
6	130	110	+
7	95	115	-
8	90	120	-
9	100	100	0
10	135	150	-

$$\sum «+» = 2, \sum «-» = 7, z = 2$$

Приклад 9.5

Трирічних дітей запитали, кого вони більше люблять, кішок (к) чи собак (с) (табл. 9.6). З тим самим запитанням до цих дітей звернулися через три роки. Чи змінюється з віком ставлення дітей до цих тварин?

Таблиця 9.6. Результати опитування дітей

3 роки	к	к	с	к	с	с	с	к	с	к	с	с	с
6 років	к	с	с	с	к	к	к	с	к	с	с	к	с

Розв'язання

Зміну в перевазі від кішки до собаки позначимо «-», від собаки до кішки – «+». Знак «0» свідчить про те, що симпатія не змінилася.

П'ятеро дітей поміняли пріоритети із собаки на кішку (5 знаків «+»), четверо – з кішки на собаку (4 знаки «-»), ще в чотирьох симпатії не змінилися (4 значення «0»). Виходить, $z_{\text{факт.}} = 4$.

У таблиці критичних значень z знаходимо рядок, що відповідає обсягу вибірки за винятком нульових різниць $n = 13 - 4 = 9$: $z_{0,05} = 1$, $z_{0,01} = 0$.

$z_{\text{факт.}} > z_{\text{табл.}}$. Нульова гіпотеза про випадковість відхилень залишається чинною.

Висновок

Віддання переваги з віком змінюється випадковим чином, закономірності в уподобанні тварин не встановлено.

Таблиця 9.7. Розрахунки до прикладу 9.5

Дитина	x_1	x_2	$x_1 - x_2$
Таня	к	к	0
Митько	к	с	-
Віра	с	с	0
Сашко	к	к	-
Ігор	с	к	+
Іра	с	к	+
Рита	с	с	+
Костя	к	к	-
Поля	с	с	+
Катя	к	с	-
Надійка	с	к	0
Вітя	с	с	+
Юрко	с	с	0

$\sum \text{«+»} = 5, \sum \text{«-»} = 4, z = 4$

Критерій Уїлкоксона T

T -критерій Уїлкоксона застосовується для аналізу попарно зв'язаних дат. На відміну від критерію знаків, T -критерій Уїлкоксона враховує і спрямованість, і ступінь розходжень між парними датами. Він дозволяє з'ясувати, чи є змінення в одному напрямку більш інтенсивними, ніж в іншому. Застосування T -критерію виправдано, якщо абсолютна різниця між парними даними варіює у широкому діапазоні. Для бінарних показників («так» або «ні», «плюс» або «мінус» тощо) він не застосовується.

Критерій T Уїлкоксона має більшу потужність у порівнянні з критерієм знаків, однак він обмежений обсягом – застосовується на вибірках до 25 парних дат. При більшому числі пар він стає трудомістким і за потужністю поступається критерію знаків.

Нульова гіпотеза: у генеральній сукупності, з якої взята вибірка, інтенсивність розходжень в одному напрямку дорівнює інтенсивності розходжень в іншому. Критерій T розраховується в такому порядку.

1. Обчислюються різниці між попарно зв'язаними датами з урахуванням знака різниці.

2. Абсолютні різниці ранжуються (див. п. 2.3). На цьому етапі знак не враховується, значення має тільки розмір розходжень. Перший ранг надається найменшому абсолютному значенню різниці незалежно від її знака. Якщо різниця дорівнює нулю, то вона вилучається з подальшого розгляду. Відповідно зменщується n .

3. Рангам надаються знаки, такі, як і знаки відповідних значень різниці.

4. Визначається величина T – сума рангів знака, що зустрічається рідше.

5. Вірогідність розходжень оцінюється за таблицею критичних значень T (табл. 18 Додатка).

Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $T_{\text{факт.}} \leq T_{\text{табл.}}$, і залишається чинною, якщо $T_{\text{факт.}} > T_{\text{табл.}}$.

Якщо виникає необхідність застосувати T -критерій Уїлкоксона при $n > 25$, можна скористатися формулою:

$$t = \frac{\bar{T} - T}{\sigma_T} = \frac{\frac{n(n+1)}{4} - T}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}. \quad (9.16)$$

При $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза відхиляється на відповідному рівні значущості.

Приклад 9.6

У табл. 9.8 представлені результати тестування студентів у балах до проходження спеціального тренінгу і після нього. Чи можна стверджувати, що тренінг гарантує підвищення результатів?

Таблиця 9.8. Результати тестування студентів

Результат	Студент									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До	85	90	92	93	93	94	95	95	140	150
Після	86	95	96	93	95	96	98	101	133	135

Розв'язання

Використаємо ранговий тест Уїлкоксона для попарно зв'язаних дат.

Нульова гіпотеза: зміни випадкові.

1. Визначаємо різниці між попарно зв'язаними датами (табл. 9.9).

2. Ранжуємо різниці за їхнім абсолютним значенням (правила ранжування див. п. 2.3). Для четвертої пари різниця дорівнює нулю, вона не включається в ранжування.

3. Надаємо рангам знак, що відповідає знаку різниці.

4. Рідше зустрічається знак рангів – «+». Знаходимо суму рангів зі знаком «+». Це і є значення фактичного Т-критерію.

Таблиця 9.9. Розрахунки до прикладу 9.6

Пари №	x_1	x_2	Різниця $d = x_1 - x_2$	Ранг абсолютної різниці R_d	Ранг із урахуванням знака $\pm R_d$	Ранги з рідким знаком
1	85	86	-1	1	-1	-
2	90	95	-5	6	-6	-
3	92	96	-4	5	-5	-
4	93	93	0	-	-	-
5	93	95	-2	2,5	-2,5	-
6	94	96	-2	2,5	-2,5	-
7	95	98	-3	4	-4	-
8	95	101	-6	7	-7	-
9	140	133	+7	8	+8	8
10	150	135	+15	9	+9	9

$T = 17$

5. Визначаємо вірогідність T за допомогою табл. 18 Додатка при $n = 9$ (з даних в умові десяти пар значень одна пара мала нульові розходження й тому не враховувалася, $n = 10 - 1 = 9$).

$T_{\text{факт.}} > T_{\text{табл.}}$. Нульова гіпотеза залишається чинною, розходження невірогідні.

Висновок

Зміни невірогідні.

9.4. ЯКІСНІ ОЗНАКИ

Різноманітність за якісною ознакою виражається в частках (див. п. 2.1, 2.5). Кожен клас, що відповідає певній якісній категорії, має свою пропорцію в загальному обсязі вибірки. Порівняння груп за варіацією якісних ознак зводиться до порівняння часток класів, що цікавлять дослідника.

ПОРІВНЯННЯ ВИБІРКОВИХ ЧАСТОК

Нульова гіпотеза формулюється таким чином: порівнювані вибірки належать до однієї генеральної сукупності, а розходження між вибірковими частками випадкові ($H_0: P_1 = P_2$). Перевірку нульової гіпотези проводять за допомогою критерію Фішера F .

Критерій Фішера F

Вірогідність розходжень між вибірковими відсотками оцінюють за допомогою F -критерію, значення якого знаходять за формулою:

$$F = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}, \quad (9.17)$$

де φ_1 й φ_2 – кути в радіанах для часток порівнюваних вибірок, n_1 й n_2 – обсяги вибірок.

Для переведення часток у кути користуються табл. 4 Додатка (див. п. 5.2). При роботі з таблицею використовуються частки, які виражені у відсотках. Жодна з часток, які зіставляють, не повинна дорівнювати нулю.

Розрахований F -критерій порівнюють із критичними значеннями при двох значеннях ступенів свободи: $df_1 = 1$ й $df_2 = n_1 + n_2 - 2$ (табл. 13 Додатка). Якщо $F_{\text{факт.}} < F_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза про рівність генеральних часток $H_0: P_1 = P_2$ залишається чинною. Якщо $F_{\text{факт.}} \geq F_{\text{табл.}}$, то нульова гіпотеза відхиляється, різниця вважається вірогідною.

Приклад 9.7

Досліджували, як впливає рентгенівське випромінювання на хромосоми дрозофіли. Для цього підраховували число хромосомних порушень у клітинах опромінених і неопромінених мух (табл. 9.10). Чи впливає рентгенівське випромінювання на структуру хромосом дрозофіли?

Таблиця 9.10. Вплив рентгенівського випромінювання на хромосоми дрозофіли

Варіант досліду	Кількість вивчених хромосом	Кількість хромосомних порушень
Контроль	25734	44
Доза 3000 Р	7122	978

Розв'язання

Висуваємо нульову гіпотезу: рентгенівське випромінювання не змінює структуру хромосом. Якщо це дійсно так, відсотки хромосомних порушень в основній і контрольній групах мають бути однаковими. Перевіримо це. Подамо дані у відсотках:

$$p\%_{\text{(контроль)}} = \frac{44}{25734} \cdot 100\% = 0,17\% ,$$
$$p\%_{\text{(3000 Р)}} = \frac{978}{7122} \cdot 100\% = 13,73\% .$$

Переведемо відсотки у радіани за допомогою табл. 4 Додатка:

$$\Phi_{\text{(контроль)}} = 0,082; \Phi_{\text{(3000 Р)}} = 0,758.$$

Знайдемо критерій F (9.17):

$$F = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} = (0,758 - 0,082)^2 \frac{25734 \cdot 7122}{25734 + 7122} = 2549,1;$$
$$df_1 = 1, df_2 = 25734 + 7122 - 2 = 32854.$$
$$F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}} \quad (p = 0,001).$$

Нульова гіпотеза про рівність часток у генеральних сукупностях відхиляється на рівні значущості $p < 0,001$.

Висновок

Опромінення дозою 3000 Р вірогідно збільшує відсоток хромосомних порушень.

9.5. ПОРІВНЯННЯ РЯДІВ РОЗПОДІЛІВ

Розподіли можуть розрізнятися середніми величинами, варіацією, показниками асиметрії й ексцесу, а також комбінаціями цих характеристик. Порівняння розподілів зводиться до розв'язання двох основних завдань – порівняння двох фактичних рядів і порівняння фактичного ряду з теоретичним розподілом.

Фактичні розподіли зіставляються при порівнянні вибірок й оцінці розходжень між групами. При цьому перевіряється гіпотеза про приналежність вибірок до однієї генеральної сукупності або до різних генеральних сукупностей з однаковими параметрами.

Фактичні розподіли порівнюються з теоретичними для перевірки гіпотез про закони розподілу. У дослідницькій роботі часто виникають ситуації, коли необхідно з'ясувати, чи відповідає розподіл вибірових даних теоретично очікуваному. Питання про вид розподілу доводиться вирішувати, наприклад, при розгляді генетичних гіпотез або при перевірці на нормальність. У таких випадках генеральною сукупністю виступає теоретичний розподіл.

КРИТЕРІЙ ПІРСОНА χ^2

Критерій Пірсона χ^2 застосовується для порівняння двох і більше фактичних розподілів, а також для порівняння фактичного розподілу з теоретичним. За допомогою критерію χ^2 зіставляються розподіли як кількісних, так і якісних ознак, у тому числі альтернативних. Якщо ознака виражена кількісно, то вся її різноманітність розбивається на класи. Критерій порівнює частоти різних значень ознаки в порівнюваних розподілах – окремо за кожним класом (рис. 9.5). Частоти мають бути абсолютними (відсотки не порівнюються). Класи можуть бути впорядкованими або неупорядкованими.

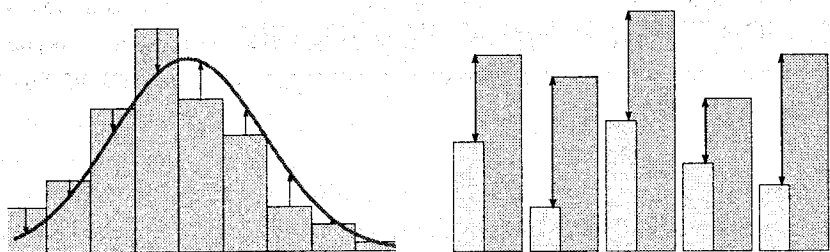


Рис. 9.5. Критерій Пірсона зіставляє абсолютні частоти за кожним класом

Критерій χ^2 дає високу точність при великих вибірках, $n \geq 30$. Вибірки, що порівнюються, можуть бути однаковими й різними за обсягом. Число дат у кожному класі має бути не менше п'яти. Якщо в класі менше п'яти дат, його поєднують із суміжним класом. Угрупування дат за класами має бути однаковим у всіх порівнюваних розподілах, класи не повинні перекриватися.

Значення критерію χ^2 завжди позитивне, від 0 до $+\infty$. При повному збігу частот $\chi^2 = 0$. Чим значніша розбіжність між розподілами, тим більше значення χ^2 .

Порівняння фактичного й теоретичного рядів

У дослідницькій роботі виникають ситуації, коли необхідно з'ясувати, чи відповідає розподіл вибірових даних якомусь очікуваному розподілу. Такі завдання виникають при перевірці генетичних гіпотез. Нульову гіпотезу можна сформулювати по-різному. Наприклад: розподіл дат у вибірці відповідає теоретично очікуваному, а спостережувані відхилення випадкові; або: вибірка взята з генеральної сукупності, розподіл дат у якій збігається із теоретично очікуваним.

Критерій χ^2 обчислюється як сума квадратів відхилень фактичних частот від теоретично очікуваних, що віднесена до теоретичних частот:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}, \tag{9.18}$$

де O – фактичні частоти, E – очікувані.

При повному збігу фактичних частот з очікуваними $\chi^2 = 0$.

Число ступенів свободи дорівнює $df = k - 1$, де k – число класів розподілу. Нульова гіпотеза про відповідність фактичного й теоретично очікуваного розподілів відхиляється, якщо $\chi^2_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{табл.}}$, і залишається чинною, якщо $\chi^2_{\text{факт.}} < \chi^2_{\text{табл.}}$ (табл. 19 Додатка).

Приклад 9.8

Студенти-генетики одержали завдання з'ясувати, вільно чи зчеплено успадковуються у дрозофіли колір очей і колір тіла. Одним із критеріїв вільного спадкування є розщеплення в другому поколінні в співвідношенні 9:3:3:1. У другому поколінні отримано 1179 сірих червонооких, 398 чорних червонооких, 407 сірих білооких й 133 чорні білоокі мухи. Незчеплено чи зчеплено успадковуються ознаки?

Розв'язання

Результати схрещування заносимо в табл. 9.11. Розподіляємо фактичне число дат (O) у співвідношенні, очікуваному для незчепленого успадкування (E). Для цього суму дат (2117) ділимо на кількість часток теоретичного розщеплення ($9 + 3 + 3 + 1 = 16$) і множимо на число часток у кожному фенотипічному класі (9, 3, 3 й 1). Теоретично очікуване число дат може бути дробовим.

Таблиця 9.11. Розрахунки до прикладу 9.8

Фенотипічний клас	Фактична кількість мух (O)	Очікуване розщеплення	Теоретично очікувана кількість мух, (E)	$\frac{(O - E)^2}{E}$
Сірі червоноокі	1179	9	1190,9	0,1189
Чорні червоноокі	398	3	396,9	0,0030
Сірі білоокі	407	3	396,9	0,2570
Чорні білоокі	133	1	132,3	0,0037
Сума	2117	16	2117	$\chi^2 = 0,3826$

Сума квадратів різниць між теоретично очікуваними й фактичними даними, поділена на теоретично очікуване значення, являє собою критерій χ^2 . Розрахований критерій χ^2 порівнюється із критичним у табл. 19 Додатка. Число ступенів свободи: $df = k - 1 = 4 - 1 = 3$.

$\chi^2_{\text{факт.}} < \chi^2_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза залишається чинною.

В и с н о в о к

Колір очей і колір тіла успадковуються незалежно.

Порівняння фактичних рядів

Для обчислення критерію χ^2 при порівнянні фактичних рядів створюють два паралельні варіаційні ряди, а потім знаходять емпіричне значення критерію:

при $n_1 = n_2$
$$\chi^2 = 4 \left(\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{f_1 + f_2} \right) - N, \tag{9.19}$$

при $n_1 \neq n_2$
$$\chi^2 = \frac{N^2}{n_1 n_2} \left(\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{f_1 + f_2} - \frac{n_1^2}{N} \right), \tag{9.20}$$

де n_1 і n_2 – обсяги першої й другої вибірки, $N = n_1 + n_2$, f_1 й f_2 – частоти класів першої й другої вибірки, k – число класів розподілу.

Нульова гіпотеза формулюється так: вибірки належать до однієї генеральної сукупності або до різних генеральних сукупностей з однаковими параметрами. Для перевірки нульової гіпотези про рівність розподілів даних у генеральних сукупностях, звідки взяті вибірки, фактичне значення χ^2 порівнюють із критичним значенням для числа ступенів свободи $df = k - 1$ за табл. 19 Додатка. Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $\chi^2_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{табл.}}$ й залишається чинною, якщо $\chi^2_{\text{факт.}} < \chi^2_{\text{табл.}}$.

П р и к л а д 9.9

У табл. 9.12 наведені дані про вік вступу до шлюбу для 495 чоловіків й 586 жінок. Чи розрізняється розподіл шлюбного віку серед чоловіків і жінок?

Таблиця 9.12. Вік вступу до шлюбу

Вік, роки	Кількість		Вік, роки	Кількість		Вік, роки	Кількість		Вік, роки	Кількість	
	Чоловіки	Жінки		Чоловіки	Жінки		Чоловіки	Жінки		Чоловіки	Жінки
16	–	5	31	8	10	46	5	2	61	2	–
17	–	16	32	8	8	47	1	3	62	3	–
18	6	47	33	10	6	48	3	2	63	2	–
19	25	61	34	8	6	49	3	3	64	1	1
20	28	79	35	–	4	50	3	3	65	3	–
21	39	59	36	1	3	51	–	2	66	1	–
22	71	52	37	3	2	52	–	2	67	–	2
23	77	46	38	–	4	53	3	3	69	–	1
24	55	21	39	3	4	54	2	3	72	1	–
25	24	20	40	1	4	55	3	1	73	1	1
26	16	18	41	2	1	56	1	6	74	3	–
27	20	18	42	2	5	57	1	2	83	1	–
28	16	17	43	4	1	58	2	4	84	–	1
29	8	11	44	–	4	59	2	3			
30	10	6	45	1	2	60	2	1			

Р о з в ' я з а н н я

Розподілимо дані за двома інтервальними рядами з п'ятирічним класовим інтервалом (табл. 9.13). Останні вікові класи об'єднаємо так, щоб їхня частота була не менше 5. Висуваємо нульову гіпотезу про те, що розподіли віку чоловіків і жінок не розрізняються. Перевіряємо її, порівнюючи ряди розподілу віку за допомогою критерію χ^2 для $n_1 \neq n_2$:

$$\chi^2 = \frac{N^2}{n_1 n_2} \left(\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{f_1 + f_2} - \frac{n_1^2}{N} \right) = \frac{(495 + 586)^2}{495 \cdot 586} \left(251,34 - \frac{495^2}{495 + 586} \right) = 99,4.$$

$$df = 10 - 1 = 9.$$

$\chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{табл.}}$ ($p = 0,001$). Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,001$.

В и с н о в о к

Розподіли віку вступу до шлюбу чоловіків і жінок вірогідно розрізняються.

Таблиця 9.13. Розрахунки до прикладу 9.9

Вік вступу до шлюбу (x)	Кількість у віці x		f_i^2
	чоловіків (f_1)	жінок (f_2)	$f_1 + f_2$
16-20	59	208	13,04
21-25	266	198	152,49
26-30	70	70	35,00
31-35	34	34	17,00
36-40	8	17	2,56
41-45	9	13	3,68
46-50	15	13	8,04
51-55	8	11	3,37
56-60	8	16	2,67
61 і старше	18	6	13,5
Усього	495	586	251,34

9.6. ПОРІВНЯННЯ ДЕКІЛЬКОХ ГРУП

Значна частина експериментів проводиться на декількох групах. Під час статистичного аналізу отримані результати порівнюються, причому більшість дослідників користується для цього критерієм Стюдента, за допомогою якого групи порівнюються в різних напрямках. Однак робити цього не можна. Слід пам'ятати, що критерій Стюдента використовують тільки в дослідженнях, які складаються з двох груп. Якщо проводити множинні попарні порівняння декількох груп, то завдяки підвищенню ймовірності похибки може виникнути статистичний артефакт.

Для того, щоб уникнути додаткових помилок, при множинних порівняннях необхідно застосовувати дисперсійний аналіз (див. п. 12), тобто користуватися критерієм Фішера, а при використанні методу Стюдента вводити *поправку Бонферроні*.

ПОПРАВКА БОНФЕРРОНІ

Множинні порівняння

У випадках, коли для множинних порівнянь використовують критерій Стюдента, необхідно перетворити рівень значущості. Якщо в дослідженні для перевірки нульової гіпотези прийнятий рівень значущості дорівнює p , то в кожному з k порівнянь рівень значущості p' повинен бути:

$$p' = \frac{p}{k} \quad (9.21)$$

Це і є *поправка Бонферроні*. Для того, щоб при низьких значеннях p' одержати статистично вірогідний результат, необхідно збільшити обсяг дослідження. Якщо в дослідженні порівнюється багато груп, значення p' може виявитися таким низьким, що статистично значущого результату можна взагалі не одержати. Поправка Бонферроні працює, якщо число порівнянь не перевищує 8. При більшому числі порівнянь використовують критерій Ньюмена–Кейлса. Його потужність вища, ніж потужність критерію Стюдента з поправкою Бонферроні.

Чому є необхідність введення поправки Бонферроні та пониження рівня значущості? Тому, що при серії порівнянь підвищується ймовірність випадково отримати статистично значущий результат, який у дійсності не є таким. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 9.10

Для прогнозування ризику спадкового захворювання генетики проводять пошук генетичних маркерів. Зазвичай вони вивчають різні види поліморфізму ДНК, вирішуючи проблему статистичної асоціації генетичного варіанта із захворюванням. Припустимо, що існують десять різних варіантів ДНК ($M_1 \dots M_{10}$), які розглядаються як потенційні маркери десяти різних спадкових захворювань ($Z_1 \dots Z_{10}$). Визначаються частоти, з якими дані специфічності зустрічаються серед здорових людей. Потім ці дані зіставляються з аналогічними частотами в кожній з 10 груп хворих. За допомогою критерію χ^2 (див. п. 9.5) з'ясовується, чи існує асоціація кожного з 10 захворювань з кожним із 10 маркерів. Таким чином проводяться 100 порівнянь.

Що буде, якщо в кожному порівнянні прийняти 5%-ний рівень значущості? Можливо, ми отримаємо 3–5 статистично вірогідних показників. Але це ще не буде підтвердженням існування асоціації, і ось чому. Ці результати ми можемо одержати випадково. У таблиці 9.14 наведено значення p , які штучно одержані за допомогою таблиці випадкових чисел. З них чотири виявилися такими, що відповідають рівню значущості менше 0,05. Тобто, випадково п'ять із ста порівнянь дали «статистично значущий» результат, що й виходить з теорії імовірності. А насправді між зазначеними маркерами і вивченими захворюваннями зв'язку може не існувати. Якщо ввести поправку Бонферроні та модифікувати рівень значущості $p = 0,05 : 100 = 0,0005$, то жодна з асоціацій не виявиться вірогідною.

Таблиця 9.14. Значення p , які одержані за допомогою таблиці випадкових чисел

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}
M_1	0,29	0,47	0,80	0,47	0,36	0,13	0,93	0,15	0,08	0,68
M_2	0,21	0,26	0,38	0,55	0,96	0,61	0,46	0,28	0,10	0,40
M_3	0,36	0,87	0,61	0,76	0,80	0,51	0,44	0,11	0,76	0,99
M_4	0,12	0,77	0,20	0,68	0,88	0,47	0,39	0,05	0,50	0,53
M_5	0,09	0,57	0,01	0,93	0,24	0,81	0,18	0,42	0,04	0,18
M_6	0,61	0,83	0,27	0,95	0,66	0,03	0,24	0,28	0,03	0,87
M_7	0,63	0,64	0,12	0,33	0,76	0,09	0,54	0,05	0,42	0,09
M_8	0,24	0,12	0,06	0,65	0,98	0,52	0,91	0,68	0,68	0,23
M_9	0,36	0,03	0,15	0,62	0,68	0,88	0,15	0,94	0,94	0,55
M_{10}	0,27	0,94	0,31	0,32	0,54	0,06	0,20	0,63	0,53	0,38

Приклад 9.11.

Скільки можна знайти хибно значущих асоціацій, якщо використовувати немодифікований рівень значущості? Це можливо встановити, знаючи кількість порівнянь.

Припустимо, що проводиться пошук генетичних маркерів цукрового діабету. Для цього вивчають розподіл маркерів у хворих на цукровий діабет та здорових людей а потім з'ясовують асоціацію стану здоров'я

з генетичними маркерами. Припустимо, що для цього були вивчені 2 локуси із трьома алелями, 5 локусів із чотирма алелями і 1 локус із шістьма алелями.

Під час пошуку генетичних маркерів число порівнянь N розраховують за такими формулами:

– якщо всі локуси мають рівне число алелів: $N = n(m - 1)$, де n – число локусів, m – число алелів у локусі;

– якщо різні локуси мають різну кількість алелів: $N = \sum (m_i - 1)$, де m_i – число алелів в i -му локусі.

Обчислимо кількість порівнянь у нашому прикладі:

$$N = 2(3 - 1) + 5(4 - 1) + 1(6 - 1) = 24.$$

Якщо ми приймаємо 5%-ний рівень значущості, то слід очікувати 5 % хибно значущих результатів, тобто приблизно 1 випадок серед 24 порівнянь.

Для практичної перевірки цього припущення звернемося до таблиці випадкових чисел і за її допомогою складемо 24 випадкових числа. Для цього, наприклад, в першому стовпчику візьмемо другу і третю цифру і складемо з них двоцифрові числа. Вони будуть відповідати відсотку або частці: 39, 10, 89, 08, 63, 31, 87, 38, 61, 85, 35, 90, 42, 21, 69, 91, 63, 51, 96, 84, 19, 43, 10, 15. Одержаний ряд чисел не містить жодного, що менше 05. Візьмемо в десятому стовпчику дві середні цифри: 41, 71, 69, 35, 88, 65, 40, 63, 43, 49, 22, 34, 88, 79, 53, 03, 00, 63, 04, 17, 12, 38, 55, 59. Тепер випадково одержано два числа: 00 і 04. Середня арифметична з цих двох теоретичних експериментів і становить 1.

Кілька порівнянь із контролем

У деяких дослідженнях передбачається порівняти кілька груп з однієї й тією же групою, наприклад із загальним контролем. Поправка Бонферроні в таких випадках обчислюється за формулою:

$$p' = \frac{p}{m-1}, \quad (9.22)$$

де m – число груп в експерименті.

При такому аналізі робиться висновок тільки про відмінність кожної групи від контролю, але не робиться висновку про розходження між

експериментальними групами. Через обмеження числа порівнянь рівень значущості виявляється більше, тому й потужність критерію буде вищою, ніж при попарному порівнянні всіх груп.

Обчислення проміжного критерію Стюдента

При використанні поправки Бонферроні постає проблема знайти значення критерія Стюдента, що відсутні в таблиці. Наприклад, здійснюючи множинні порівняння, ми приймаємо 5%-ний рівень значущості. У дослідженні заплановано вивчити чотири групи об'єктів: контрольну й три експериментальні. Планується порівняти кожну групу з контрольною. Щоб у цих трьох порівняннях дотриматися прийнятого рівня значущості 0,05, у кожному порівнянні прийнятий рівень значущості (5 %) необхідно зменшити в три рази. Про вірогідність розходжень на прийнятому рівні значущості можна говорити, якщо фактичний критерій буде не менше значення, що відповідає рівню значущості $0,05 : 3 = 0,017$. У статистичних таблицях немає значень критерію для такого рівня значущості, але його можна знайти за формулою:

$$t' = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)(p' - p_2)}{(p_2 - p_1)} \quad (9.23)$$

де t' – критичне значення для p' , t_2 і t_1 – табличні значення критерія Стюдента для p_2 і p_1 .

Якщо $t_{\text{факт.}} < t'$, нульова гіпотеза про відсутність різниці залишається в силі, якщо $t_{\text{факт.}} > t'$, нульова гіпотеза відхиляється на початковому рівні значущості p (не p').

Використання дисперсійного аналізу

Якщо при використанні критерію Стюдента з поправкою Бонферроні рівні значущості для окремих порівнянь виявляються занадто низькими й потребують більшого числа об'єктів, то доцільно застосувати однофакторний дисперсійний аналіз, критерій Фішера (див. п. 12.1, 12.2). Це дозволить перевірити гіпотезу про рівність всіх середніх. Якщо гіпотеза відхиляється, то залишається невідомим, між якими групами існує розходження, а між якими відсутнє. Якщо в результаті аналізу нульова гіпотеза відхиляється, то для порівняння окремих груп використовують метод Тьюки або Шеффе (див. п. 12.2).

9.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. При яких умовах застосовуються параметричні методи порівняння груп? Непараметричні методи?
2. Чим відрізняються залежні та незалежні вибірки? Чи залежить вибір методу порівняння від співвідношення вибірок?
3. Що означає нульова гіпотеза $\mu_1 = \mu_2$? $\sigma_1 = \sigma_2$?
4. Як порівнюються групи за якісними ознаками?
5. Які статистичні методи дозволяють порівняти:
 - а) середні тенденції;
 - б) варіацію ознаки;
 - в) розподіли?
6. Для кожного з наведених прикладів надайте критичне значення t :
 - а) $H_A: \mu_1 > \mu$, $n_1 = 6$, $n_2 = 12$, $p = 0,05$;
 - б) $H_A: \mu_1 \neq \mu$, $n_1 = 12$, $n_2 = 14$, $p = 0,01$.
7. Для кожного з наведених прикладів надайте критичне значення F :
 - а) $n_1 = 40$, $n_2 = 65$, $p = 0,01$;
 - б) $n_1 = 12$, $n_2 = 6$, $p = 0,001$.
8. Розрахуйте критерій Фішера, порівняйте його з табличним ($p = 0,05$), зробіть висновок щодо нульової гіпотези $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$.
 - а) $n_1 = 42$, $s_1 = 1,1$, $n_2 = 38$, $s_2 = 2,7$;
 - б) $n_1 = 12$, $\sum x_1 = 204$, $\sum x_1^2 = 3660$, $n_2 = 16$, $\sum x_2 = 248$, $\sum x_2^2 = 3988$.
9. На двох групах студентів вивчалась ефективність різних методів читання (А і В). Результати (слів у хвилину) були такими:

метод А: $n_A = 75$, $\bar{x}_A = 300,4$, $s_A = 12,3$;

метод В: $n_B = 65$, $\bar{x}_B = 295,5$, $s_B = 14,9$.

БІОМЕТРИЯ. II. Порівняння груп і аналіз зв'язку

а) Порівняйте дисперсії: сформулюйте нульову гіпотезу; розрахуйте критерій Фішера, порівняйте його з табличним ($p = 0,05$), зробіть висновок щодо нульової гіпотези, зробіть висновок щодо рівності дисперсій.

б) Порівняйте середні арифметичні: наведіть нульову гіпотезу; розрахуйте критерій Стюдента, порівняйте його з табличним ($p = 0,05$), зробіть висновок щодо нульової гіпотези, зробіть висновок щодо рівності середніх.

в) Зробіть висновок щодо ефективності методів.

10. Дано результати виміру довжини тіла в немовлят.

Група	Обсяг вибірки	\bar{X} , см	s, см
Хлопчики	12	52,2	8,6
Дівчатка	9	50,7	9,5

З'ясуйте, чи вірогідно довжина тіла при народженні в хлопчиків перевищує таку в дівчаток. Прийміть, що розподіл ознаки в генеральній сукупності нормальний, дисперсії порівнюваних груп рівні.

11. Вимірювання рівня холестеролу у вегетаріанців і невегетаріанців дало такі результати.

Вегетаріанці									
115	130	140	150	160	165	165	165	185	
170	175	180	215	125	130	140	170	230	
150	160	165	170	170	180	185	175	130	
215	125	135	140	150	160	165	180	140	
170	170	180	185	225	130	135	200	145	
145	155	160	165	170	175	180	160	165	
Невегетаріанці									
105	130	150	170	175	180	190	200	210	220
110	135	160	170	175	180	190	200	210	230
115	145	165	170	175	185	190	200	210	230
125	145	165	170	180	185	195	200	210	240
125	150	165	170	180	190	200	205	215	240

Чи відрізняється рівень холестеролу у вегетаріанців і невегетаріанців? (Використайте параметричні методи порівняння дисперсій і середніх арифметичних.)

12. Проаналізуйте дані, наведені у таблиці, та зробіть висновок:

а) чи впливає тренування на рівень кров'яного тиску у чоловіків та жінок;

б) чи відрізняються чоловіки та жінки за рівнем кров'яного тиску до і після тренування.

Використайте параметричні методи для залежних і незалежних груп.

Стать	Кров'яний тиск		Стать	Кров'яний тиск		Стать	Кров'яний тиск	
	До тренування	Після тренування		До тренування	Після тренування		До тренування	Після тренування
ч	134	134	ч	108	111	ж	108	105
ч	103	106	ч	111	115	ж	112	110
ч	116	110	ч	125	125	ж	97	100
ч	113	115	ч	134	130	ж	104	107
ч	124	122	ч	134	138	ж	103	100
ч	120	126	ж	118	120	ж	114	112
ч	128	130	ж	97	95	ж	96	98
ч	122	118	ж	104	105	ж	126	127
ч	123	125	ж	99	104	ж	109	106
ч	108	110	ж	131	134	ж	105	103

13. Порівняйте частоту серцевих скорочень у жінок, що палять, і жінок, що не палять.

Палять	78	100	88	62	94	88	76
	90	85	82	77	91	90	68
Не палять	72	82	62	84	61	68	72
	64	76	62	66	68	96	58
	87	80	78	69			

Встановіть вірогідність розходжень ($p = 0,05$). (Використайте двосторонній критерій.)

14. Зразки крові від 10 пацієнтів були перевірені у двох лабораторіях на рівень холестеролу. Результати представлені в таблиці. Чи існують статистично достовірні розходження між результатами, отриманими в обох лабораторіях ($p = 0,01$)? (Використайте непараметричні методи.)

Пацієнт	Рівень холестеролу, мг%	
	Лабораторія 1	Лабораторія 2
1	296	318
2	268	287
3	244	260
4	272	279
5	240	245
6	244	249
7	282	294
8	254	271
9	244	262
10	262	285

15. Дві лінії мишей піддавалися дії рентгенівського опромінення. У резистентній лінії народилося 90 нормальних мишенят й 10 з аномаліями, у нерезистентній – 60 нормальних й 90 з аномаліями. Чи достовірна різниця між резистентною й нерезистентною лініями?
16. В одній групі дитячого саду діти регулярно приймали вітамін С, а в іншій – не приймали. Під час епідемії грипу з 15-ти дітей першої групи занедужала тільки 1 дитина, з 25-ти дітей другої групи занедужало 8 дітей. Чи можна на підставі цих даних говорити про достовірний ефект вітаміну С?
17. Відповідно до хромосомної теорії визначення статі співвідношення статі у людини при народженні має бути 1:1. Дані, отримані в пологових будинках, свідчать, що в місті за певний період серед 100 000 немовлят було 51 239 хлопчиків й 48 761 дівчинка. Чи відповідають ці числа співвідношенню 1:1?

18. У класичних дослідах Менделя в другому поколінні було отримано 315 жовтих гладких, 108 жовтих зморшкуватих, 101 зелена гладка й 32 зелені зморшкуваті насінини гороху. Чи відповідають ці дані очікуваному за схемою Менделя розщепленню 9:3:3:1?

19. Зрівняйте вікові розподіли для осіб з аритмією й для населення району в цілому. Оцініть вірогідність розходжень.

Віковий інтервал	Населення в цілому, осіб	Пацієнти з аритмією, осіб
25 – 34	140195	18
35 – 44	125363	33
45 – 54	120826	54
55 – 64	98884	48
65 і більше	125884	35
Усього	611152	188

10

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ
АНАЛІЗ

10.1. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ЗВ'ЯЗОК

Кореляційний аналіз – це сукупність статистичних заходів, за допомогою яких досліджуються зв'язки між ознаками. У науці відомі два типи зв'язків – функціональні й кореляційні. При *функціональному зв'язку* певному значенню однієї ознаки відповідає єдине значення іншої ознаки. При *кореляційному зв'язку* (від латин. *correlatio* – співвідношення, зв'язок) одному значенню першої ознаки відповідає певний розмах значень іншої ознаки.

Характеризуючи зв'язок між ознаками, говорять про його напрямок (прямий чи зворотний) і силу (слабкий, сильний чи середній). Зв'язок між ознаками називається *прямим*, якщо при збільшенні однієї з них також збільшується значення іншої. При *зворотному зв'язку* збільшення однієї ознаки супроводжує зменшення іншої. Прикладом прямого зв'язку може бути зв'язок між зростом і масою у тварин, прикладом зворотного – врожайність і стійкість у рослин. Сила зв'язку показує, наскільки значення однієї ознаки залежить від значення іншої.

Напрямок і сила зв'язку відображаються у показнику, що називається *коефіцієнтом кореляції*. Генеральний показник зв'язку позначається грецькою літерою ρ , вибірковий – латинською літерою r . Якщо ознаки, що аналізуються, в генеральній сукупності розподіляються відповідно до закону нормального розподілу, для опису зв'язку між ними використовують *параметричний коефіцієнт кореляції* (див. п. 10.2) Якщо розподіл ознак не підпорядковується нормальному закону або якщо характер розподілу ознаки невідомий, використовують *непараметричні показники зв'язку* (див. п. 10.4).

10.2. КІЛЬКІСНІ ОЗНАКИ З НОРМАЛЬНИМ
РОЗПОДІЛОМ. ЛІНІЙНИЙ ЗВ'ЯЗОКПАРАМЕТРИЧНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ ПІРСОНА r Обчислення r для великих вибірок

Коефіцієнт кореляції Пірсона (r) застосовується для оцінки лінійного зв'язку між двома кількісними ознаками з нормальним або лог-нормальним розподілом. Вибірковий коефіцієнт кореляції розраховується за формулами:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}, \quad (10.1)$$

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right) \left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} \right)}}, \quad (10.2)$$

де r – коефіцієнт кореляції, x – значення однієї ознаки, y – значення іншої ознаки, n – обсяг вибірки (число пар ознак).

Формула (10.1) є математичним вираженням сутності коефіцієнта кореляції, а формула (10.2) – робочою формулою, яка зручна для розрахунків (табл. 10.2).

Значення коефіцієнта кореляції містяться у межах від -1 до $+1$. Значення $r = 0$ указує на відсутність зв'язку, $r = 1$ свідчить про повний (функціональний) зв'язок. Обидва ці значення в біологічних дослідженнях практично не зустрічаються. Як правило, абсолютні значення коефіцієнта кореляції містяться у межах: $1 > |r| > 0$. При прямому зв'язку $r > 0$, при зворотному $r < 0$.

Якщо абсолютне значення r міститься у межах від 0 до 0,3, зв'язок називають *слабким*, від 0,4 до 0,6 – *середнім*, 0,7 і більше – *сильним*. Однак

я характеристика відносна. Наприклад, коефіцієнт кореляції за кількісними ознаками з повною успадкованістю в парах «батько–нащадок» може перевищувати +0,5. У таких випадках при $r = +0,4$ зв'язок оцінюється як сильний.

Скатер-діаграма

Орієнтовне уявлення про силу й напрямок зв'язку між двома ознаками можна скласти за допомогою скатер-діаграми. *Скатер-діаграма* – це точковий графік, на якому зображені розподіли обох ознак (рис. 10.1). При побудові скатер-діаграми по осі абсцис відкладаються значення першої ознаки, а по осі ординат – другої. Кожен об'єкт, у якого вимірювані обидві ознаки, зображується точкою на перетині координат. Форма кореляційного поля дозволяє оцінити напрямок зв'язку. Ступінь асоціації точок за напрямком зв'язку вказує на сильну, середню або слабку залежність між ознаками.

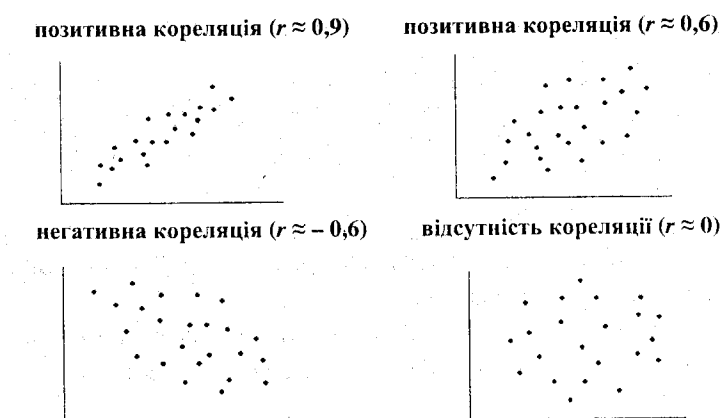


Рис. 10.1. Скатер-діаграми, що показують різний ступінь і напрямок зв'язку

Статистична похибка коефіцієнта кореляції

Вибірковий коефіцієнт кореляції r служить точковою оцінкою генерального коефіцієнта кореляції – параметра ρ . Як будь-яка випадкова величина, він змінює свої значення при повторних вибіркових дослідженнях

однієї й тієї ж генеральної сукупності й має статистичну похибку, що обчислюють за формулою:

$$s_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}, \quad (10.3)$$

де s_r – статистична похибка вибіркового коефіцієнта кореляції, r – вибірковий коефіцієнт кореляції, n – число вивчених об'єктів, у яких вимірювані дві ознаки.

Довірчий інтервал коефіцієнта кореляції

Довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції двох ознак, що нормально розподіляються, подається в такому вигляді:

$$r - ts_r \leq \rho \leq r + ts_r, \quad (10.4)$$

де ρ – коефіцієнт кореляції в генеральній сукупності, $r - ts_r$ і $r + ts_r$ – відповідно нижня та верхня межі довірчого інтервалу.

Вірогідність вибіркового коефіцієнта кореляції

При аналізі зв'язку перевіряється нульова гіпотеза: у генеральній сукупності зв'язок між ознаками відсутній ($H_0: \rho = 0$). Для того щоб вирішити, чи є відмінність вибіркового коефіцієнта кореляції від нуля випадковою чи ні, проводять перевірку нульової гіпотези. Якщо різниця між ρ і r не випадкова, вибірковий коефіцієнт кореляції вважається вірогідним. Для перевірки нульової гіпотези (якщо обидві ознаки розподіляються нормально) використовують параметричний критерій Стюдента t :

$$t = \frac{r}{s_r}, \quad (10.5)$$

де r – коефіцієнт кореляції, s_r – статистична похибка коефіцієнта кореляції.

Розрахований критерій $t_{\text{факт.}}$ порівнюють з критичним значенням (табл. 3 Додатка) при числі ступенів свободи $df = n - 2$. Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза не відхиляється. Це означає, що зв'язок між ознаками в генеральній сукупності не доведений, коефіцієнт кореляції невірогідний, його відхилення від нуля для вибірки такого обсягу недостатньо, щоб бути взятим до уваги. Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, нульову гіпотезу відхиляють. Це означає, що вибірковий коефіцієнт кореляції значно відрізняється від нуля і не може вважатися випадковим.

Вірогідність вибіркового коефіцієнта кореляції можна оцінити без обчислення статистичної похибки та критерію Стюдента. Для цього використовують табл. 20 Додатка, у якій показано, яким має бути значення r при певному обсязі вибірки, щоб його відхилення від нуля вважалося достовірним (не випадковим). Для того щоб скористатися табл. 20 Додатка, обчислюють кількість ступенів свободи ($df = n - 2$, де n – число вивчених пар ознак), знаходять у таблиці відповідний рядок і порівнюють емпіричний r із табличними. Якщо $r_{\text{факт.}} \geq r_{\text{табл.}}$, вибіркового коефіцієнта кореляції r вважається вірогідним, наявність зв'язку між ознаками в генеральній сукупності доведена на необхідному рівні значущості. Якщо $r_{\text{факт.}} < r_{\text{табл.}}$, r вважається невірогідним.

Якщо коефіцієнт кореляції виявився невірогідним (занадто велика статистична похибка), то за допомогою табл. 20 Додатка можна з'ясувати, яким має бути обсяг вибірки, щоб дане значення коефіцієнта кореляції було вірогідним. При продовженні досліджень (збільшенні обсягу вибірки) значення r може не змінитися, але значення статистичної похибки зменшиться, що зробить r вірогідним. Можливо, що при подальших дослідженнях поряд зі зменшенням статистичної похибки зменшиться і коефіцієнт кореляції, що буде свідчити про відсутність зв'язку між ознаками.

Причини кореляції

Вірогідний коефіцієнт кореляції вказує на те, що досліджувані ознаки варіюють зв'язано. Однак зв'язана варіація не є доказом причинної чи функціональної залежності однієї ознаки від іншої. Кореляція може мати місце, якщо одна з узятих ознак є частиною іншої (наприклад, довжина стегна та довжина ноги), чи обидві вони є складовими третьої ознаки. Іноді кореляція між ознаками може виникнути через випадкові причини, пов'язані з підбором вихідного матеріалу. Перекручена картина може виникати при аналізі неоднорідної сукупності. Розглянемо такий приклад. Між шовконосністю і масою кокона шовковичного шовкопряда в загальній популяції спостерігається невелика негативна кореляція, яка описується коефіцієнтом $r = -0,223$ (рис. 10.2). Якщо окремо досліджувати самців і самок, то в кожній із цих підгруп спостерігається позитивна кореляція (коефіцієнт кореляції в самців $r = 0,300$, у самок $r = 0,522$).

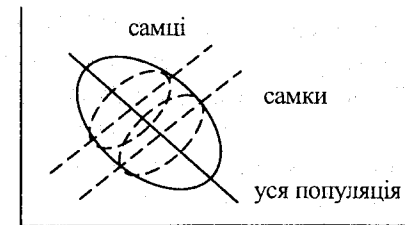


Рис. 10.2. Співвідношення коефіцієнтів кореляції в неоднорідній групі

Приклад 10.1

Використовуючи дані з табл. 10.1, розрахуємо коефіцієнти кореляції між зростом і масою у студенток.

Таблиця 10.1. Дані щодо зросту, маси та розміру взуття студентів

№	Стать	Зріст, см	Маса, кг	Розмір взуття	№	Стать	Зріст, см	Маса, кг	Розмір взуття
1	Жін.	164	50	37,5	19	Жін.	165	62	38,0
2	Жін.	165	50	37,5	20	Чол.	175	65	40,0
3	Жін.	160	48	36,0	21	Чол.	178	65	42,0
4	Чол.	181	68	43,0	22	Чол.	184	63	43,0
5	Жін.	174	53	37,5	23	Жін.	155	48	36,0
6	Чол.	178	65	43,0	24	Жін.	172	58	39,0
7	Чол.	182	69	43,5	25	Чол.	184	75	42,0
8	Чол.	160	60	43,5	26	Жін.	164	53	37,5
9	Чол.	187	68	43,5	27	Жін.	172	69	39,0
10	Чол.	193	108	46,5	28	Жін.	166	50	36,5
11	Чол.	184	82	45,5	29	Жін.	160	47	36,5
12	Чол.	184	78	44,5	30	Чол.	174	73	41,0
13	Жін.	167	54	38,0	31	Чол.	185	87	45,0
14	Жін.	161	56	36,0	32	Жін.	159	50	36,0
15	Жін.	164	53	36,0	33	Жін.	158	51	37,0
16	Жін.	165	55	37,0	34	Жін.	173	57	39,0
17	Жін.	169	60	39,0	35	Чол.	175	90	42,0
18	Жін.	175	62	39,0					

Розв'язання

Позначимо зріст як ознаку X , масу – як ознаку Y .

Для визначення коефіцієнта кореляції Персона скористаємось формулою (10.2).

Спочатку для кожної пари значень x і y розрахуємо x^2 , y^2 , xy , а потім $\sum x$, $\sum y$, $\sum x^2$, $\sum y^2$, $\sum xy$ (табл. 10.2).

Таблиця 10.2. Розрахунки до прикладу 10.1

№	x	y	x^2	y^2	xy
1	164	50	26896	2500	8200
2	165	50	27225	2500	8250
3	160	48	25600	2304	7680
4	174	53	30276	2809	9222
5	167	54	27889	2916	9018
6	161	56	25921	3136	9016
7	164	53	26896	2809	8692
8	165	55	27225	3025	9075
9	169	60	28561	3600	10140
10	175	62	30625	3844	10850
11	165	62	27225	3844	10230
12	155	48	24025	2304	7440
13	172	58	29584	3364	9976
14	164	53	26896	2809	8692
15	172	69	29584	4761	11868
16	166	50	27556	2500	8300
17	160	47	25600	2209	7520
18	159	50	25281	2500	7950
19	158	51	24964	2601	8058
20	173	57	29929	3249	9861
$n = 20$	$\sum x = 3308$	$\sum y = 1086$	$\sum x^2 = 547758$	$\sum y^2 = 59584$	$\sum xy = 180038$

Для розрахунку коефіцієнта кореляції скористаємось формулою (10.2):

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}} =$$

$$= \frac{180038 - \frac{3308 \cdot 1086}{20}}{\sqrt{\left(547758 - \frac{3308^2}{20}\right)\left(59584 - \frac{1086^2}{20}\right)}} = 0,67.$$

Оцінимо вірогідність отриманого коефіцієнта кореляції.

1. Перевіримо нульову гіпотезу $H_0: \rho = 0$ за допомогою t -критерію (10.5) (табл. 3 Додатка).

$$t = r_{xy} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 0,67 \sqrt{\frac{20-2}{1-0,67^2}} = 3,83;$$

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18;$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} (p = 0,01).$$

Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$, $\rho \neq 0$, коефіцієнт кореляції вірогідний.

2. Перевіримо нульову гіпотезу $H_0: \rho = 0$ за допомогою критичних значень r (табл. 20 Додатка).

$$r_{\text{факт.}} = 0,67;$$

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18;$$

Критичні значення $r_{\text{табл.}}$ для рівня значущості $p = 0,05$ $r_{\text{табл.}} = 0,423$; для рівня значущості $p = 0,01$ $r_{\text{табл.}} = 0,537$;

$$r_{\text{факт.}} > r_{\text{табл.}} \text{ для } p = 0,01.$$

Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$, $\rho \neq 0$, коефіцієнт кореляції вірогідний.

Висновок

Між зростом і масою (у студенток) існує пряма залежність, $r = 0,67$.

Обчислення r для нечисленних вибірок: z -перетворення Фішера

Для роботи з нечисленними вибірками різні автори пропонують увести виправлення і користуватися спеціальними методами розрахунку. При обчисленні коефіцієнта кореляції на вибірках обсягом $n < 30$ уводять виправлення:

$$r^* = r \left[1 + \frac{1-r^2}{2(n-3)} \right]. \quad (10.6)$$

Вибір методу для аналізу зв'язку між ознаками визначається не тільки обсягом вибірки, але й значенням вибіркового коефіцієнта кореляції. При роботі з невеликими вибірками, якщо $r \leq 0,20$ чи $r > 0,50$, використовують метод Фішера – тобто z -перетворення Фішера. При цьому коефіцієнт кореляції r замінюється на перетворену величину z :

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad \text{або} \quad z = 1,15129 \lg \frac{1+r}{1-r}. \quad (10.7)$$

Величина z набуває значення від $-\infty$ до $+\infty$. Її статистична похибка:

$$s_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (10.8)$$

Перетворення коефіцієнта кореляції у величину z роблять за допомогою табл. 21 Додатка. Критерієм вірогідності показника z є відношення:

$$t = \frac{z}{s_z} = z\sqrt{n-3}. \quad (10.9)$$

Критичні значення t при числі ступенів свободи $df = n - 2$ наведені в табл. 3 Додатка.

Приклад 10.2

Провести кореляційний аналіз даних із прикладу 10.1, використовуючи z -перетворення Фішера.

Розв'язання

$$r = 0,67.$$

За табл. 21 Додатка: $z = 0,811$.

За формулою (10.9): $t = z\sqrt{n-3} = 0,811\sqrt{20-3} = 3,34$.

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18.$$

$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}}$ ($p = 0,01$), нульова гіпотеза про відсутність зв'язку між ознаками відхиляється.

Висновок

Між зростом і масою (у студенток) існує пряма залежність.

Оцінка різниці між коефіцієнтами кореляції

Вірогідність різниці між коефіцієнтами кореляції, які обчислені на двох незалежних вибірках, оцінюють за допомогою t -критерію. Нульова гіпотеза: вибірки, які порівнюються, узяті з однієї генеральної сукупності чи з різних генеральних сукупностей з однаковим типом зв'язку між досліджуваними ознаками. Для великих вибірок ($n > 100$) використовують відношення різниці порівнюваних коефіцієнтів кореляції до похибки різниці:

$$t = \frac{r_1 - r_2}{s_d}, \quad (10.10)$$

де r_1 і r_2 – коефіцієнти кореляції двох незалежних вибірок, s_d – похибка різниці:

$$s_d = \sqrt{s_{r_1}^2 + s_{r_2}^2}, \quad (10.11)$$

де s_{r_1} і s_{r_2} – статистичні похибки порівнюваних коефіцієнтів кореляції.

Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ для прийнятого рівня значущості p і числа ступенів свободи $df = n_1 + n_2 - 4$, нульова гіпотеза відхиляється. При $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза не відхиляється.

Якщо обсяг вибірок $n < 100$ і абсолютні значення коефіцієнтів кореляції перевищують 0,5, для більш точної оцінки значення коефіцієнтів кореляції переводять у число z . Вірогідність різниці $z_1 - z_2$ визначають за допомогою t -критерію:

$$t = \frac{z_1 - z_2}{s_d}, \quad (10.12)$$

де s_d – похибка різниці:

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}. \quad (10.13)$$

Нульова гіпотеза відхиляється за умови, що $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ для прийнятого рівня значущості p і числа ступенів свободи $df = n_1 + n_2 - 4$.

При $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза не відхиляється.

Приклад 10.3

Чи вірогідно розрізняються коефіцієнти кореляції між зростом і масою, розраховані для студентів і студенток (за даними таблиці 10.1)? Чи можна проводити наступні розрахунки, користуючись єдиним коефіцієнтом кореляції?

Розв'язання

Порівнювані вибірки малі ($n_1 = 20$, $n_2 = 15$), тому необхідне перетворення коефіцієнта кореляції Пірсона r на величину z .

Скористаємось результатами, отриманими в прикладі 10.2 для студенток: $z_1 = 0,811$.

Коефіцієнт кореляції і відповідне значення z для студентів віднайдемо, як у прикладах 10.1 та 10.2:

$$r = 0,54, \quad z_2 = 0,604.$$

Оцінимо вірогідність різниці між цими показниками зв'язку, перевіривши нульову гіпотезу: різниця між генеральними коефіцієнтами кореляції студентів і студенток дорівнює нулю ($H_0: \rho_{\bar{x}} - \rho_{\bar{y}} = 0$).

Похибка різниці (10.13):

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}} = \sqrt{\frac{1}{20 - 3} + \frac{1}{15 - 3}} = 0,377.$$

Критерій t (10.12):

$$t = \frac{z_1 - z_2}{s_d} = \frac{0,811 - 0,604}{0,377} = 0,549.$$

$$df = n_1 + n_2 - 4 = 20 + 15 - 4 = 31.$$

$$t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$$

Нульова гіпотеза не відхиляється, генеральні коефіцієнти кореляції не розрізняються.

Висновок

Коефіцієнти кореляції між зростом і масою, розраховані для студентів і студенток, розрізняються невірогідно. Усі подальші обчислення можна проводити, користуючись загальним коефіцієнтом кореляції.

МНОЖИННА КОРЕЛЯЦІЯ

Множинна кореляція – це кореляція між більше ніж двома ознаками. Найпростішим випадком множинної кореляції є зв'язок між трьома ознаками. Вона вимірюється за допомогою коефіцієнта множинної кореляції, що оцінює міцність зв'язку однієї ознаки (X) із двома іншими (Y і Z):

$$r_{x(yz)} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}}, \quad (10.14)$$

де $r_{x(yz)}$ – коефіцієнт множинної кореляції ознаки X з ознаками Y і Z ; r_{xy} ,

r_{xz} , r_{yz} – коефіцієнти лінійної кореляції Пірсона між парами ознак X та Y , X і Z , Y і Z .

Коефіцієнт множинної кореляції змінюється від 0 до +1. Його вірогідність оцінюється за допомогою t -критерію Стьюдента на прийнятому рівні значущості при числі ступенів свободи $df = n - 3$, де n – число об'єктів, у яких вимірювані ознаки X , Y і Z :

$$t = r_{x(yz)} \sqrt{\frac{n - 3}{1 - r_{x(yz)}^2}}. \quad (10.15)$$

Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) залишається чинною. Це означає, що зв'язок між ознаками в генеральній сукупності не доведений, коефіцієнт множинної кореляції невірогідний. Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, нульову гіпотезу відхиляють на відповідному рівні значущості, зв'язок вважають доведеним, коефіцієнт кореляції – вірогідним.

Приклад 10.4

За даними, які наведені в табл. 10.1, розрахувати коефіцієнти множинної кореляції для зросту, маси та розміру взуття для студентів.

Розв'язання

Позначимо зріст як ознаку X , масу – як Y , розмір взуття – як Z . Парні коефіцієнти кореляції Пірсона між X , Y і Z розраховуються за формулою (10.2). Коефіцієнти кореляції r_{xy} , r_{xz} і r_{yz} розраховуються як у прикладі 10.1:

$$r_{xy} = 0,54; \quad r_{xz} = 0,52; \quad r_{yz} = 0,58.$$

1. Коефіцієнт множинної кореляції зросту з масою та розміром взуття:

$$r_{x(yz)} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}} = \sqrt{\frac{0,54^2 + 0,52^2 - 2 \cdot 0,54 \cdot 0,52 \cdot 0,58}{1 - 0,58^2}} = 0,60;$$

$$t = r_{x(yz)} \sqrt{\frac{n-3}{1-r_{x(yz)}^2}} = 0,60 \sqrt{\frac{15-3}{1-0,60^2}} = 2,60;$$

$$df = n - 3 = 15 - 3 = 12.$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$, коефіцієнт множинної кореляції вірогідний.

2. Коефіцієнт множинної кореляції маси зі зростом і розміром взуття:

$$r_{y(xz)} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{xz}^2}} = \sqrt{\frac{0,54^2 + 0,58^2 - 2 \cdot 0,54 \cdot 0,52 \cdot 0,58}{1 - 0,52^2}} = 0,64;$$

$$t = r_{y(xz)} \sqrt{\frac{n-3}{1-r_{y(xz)}^2}} = 0,64 \sqrt{\frac{15-3}{1-0,64^2}} = 2,89;$$

$$df = n - 3 = 15 - 3 = 12.$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$, коефіцієнт множинної кореляції вірогідний.

3. Коефіцієнт множинної кореляції розміру взуття зі зростом і масою:

$$r_{z(xy)} = \sqrt{\frac{r_{xz}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}} = \sqrt{\frac{0,52^2 + 0,58^2 - 2 \cdot 0,54 \cdot 0,52 \cdot 0,58}{1 - 0,54^2}} = 0,63;$$

$$t = r_{z(xy)} \sqrt{\frac{n-3}{1-r_{z(xy)}^2}} = 0,63 \sqrt{\frac{15-3}{1-0,63^2}} = 2,81;$$

$$df = n - 3 = 15 - 3 = 12.$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$, коефіцієнт множинної кореляції вірогідний.

Висновок

Коефіцієнти множинної кореляції для студентів:

зросту з масою і розміром взуття $r_{x(yz)} = 0,60$,

маси зі зростом і розміром взуття $r_{y(xz)} = 0,64$,

розміру взуття зі зростом і масою $r_{z(xy)} = 0,63$.

Усі коефіцієнти вірогідні (ймовірність похибки $p < 0,05$), указують на зв'язок середньої сили.

ЧАСТКОВА КОРЕЛЯЦІЯ

Часткова кореляція – це зв'язок між двома ознаками, що варіюють, при постійному значенні третьої ознаки. Вона описується коефіцієнтами часткової кореляції:

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}}, \quad (10.16)$$

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}}, \quad (10.17)$$

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}, \quad (10.18)$$

де $r_{xy(z)}$ – коефіцієнт часткової кореляції між ознаками X та Y при постійному Z ,

$r_{xz(y)}$ – коефіцієнт часткової кореляції між ознаками X та Z при постійному Y ,

$r_{yz(x)}$ – коефіцієнт часткової кореляції між ознаками Y та Z при постійному X ,

r_{xy} , r_{xz} , r_{yz} – коефіцієнти лінійної кореляції Пірсона.

Вірогідність часткових коефіцієнтів кореляції оцінюється за допомогою критерію Стюдента на прийнятому рівні значущості при числі ступенів свободи $df = n - 2$, де n – число об'єктів, у яких обмірювані ознаки X , Y і Z :

$$t = r_{xy(z)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy(z)}^2}}; \quad t = r_{xz(y)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xz(y)}^2}}; \quad t = r_{yz(x)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{yz(x)}^2}}. \quad (10.19)$$

При $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) залишається чинною. Це означає, що зв'язок між ознаками в генеральній сукупності не доведений, коефіцієнт часткової кореляції невірогідний. При $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза відхиляється, зв'язок між двома ознаками при постійному значенні третьої вважається доведеним, коефіцієнт часткової кореляції вірогідний.

Приклад 10.5

Згідно з даними, які наведені у табл. 10.1, необхідно розрахувати коефіцієнти часткової кореляції для зросту, маси і розміру взуття студенток.

Розв'язання

Позначимо зріст як ознаку X , масу – як Y , розмір взуття – як Z . Парні коефіцієнти кореляції Пірсона між X , Y і Z розраховуються за формулою (10.2). Коефіцієнт кореляції r_{xy} розрахований у прикладі 10.1, аналогічно розраховуються r_{xz} і r_{yz} :

$$r_{xy} = 0,67; \quad r_{xz} = 0,82; \quad r_{yz} = 0,75.$$

1. Коефіцієнт часткової кореляції між зростом і масою в студенток з однаковим розміром взуття:

$$r_{xy(z)} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}} = \frac{0,67 - 0,82 \cdot 0,75}{\sqrt{(1-0,82^2)(1-0,75^2)}} = 0,15;$$

$$t = r_{xy(z)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy(z)}^2}} = 0,15 \sqrt{\frac{20-2}{1-0,15^2}} = 0,64;$$

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18;$$

$$t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$$

Нульова гіпотеза ($H_0: \rho = 0$) залишається чинною. Зв'язок не доведений, коефіцієнт часткової кореляції невірогідний.

2. Коефіцієнт часткової кореляції між зростом і розміром взуття у студенток з однаковою масою:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{yz}^2)}} = \frac{0,82 - 0,67 \cdot 0,75}{\sqrt{(1-0,67^2)(1-0,75^2)}} = 0,65;$$

$$t = r_{xz(y)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xz(y)}^2}} = 0,65 \sqrt{\frac{20-2}{1-0,65^2}} = 3,63;$$

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18;$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} \quad (p = 0,01).$$

Нульова гіпотеза про відсутність зв'язку ($H_0: \rho = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$. Зв'язок доведений, коефіцієнт часткової кореляції вірогідний.

3. Коефіцієнт часткової кореляції між масою і розміром взуття у студенток однакового зросту:

$$r_{yz(x)} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} = \frac{0,75 - 0,67 \cdot 0,82}{\sqrt{(1-0,67^2)(1-0,82^2)}} = 0,47;$$

$$t = r_{yz(x)} \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{yz(x)}^2}} = 0,47 \sqrt{\frac{20-2}{1-0,47^2}} = 2,26;$$

$$df = n - 2 = 20 - 2 = 18;$$

$$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}} \quad (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза про відсутність зв'язку ($H_0: \rho = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$. Зв'язок доведений, коефіцієнт часткової кореляції вірогідний.

Висновок

Коефіцієнт часткової кореляції між зростом і масою у студенток з однаковим розміром взуття невірогідний, зв'язок цих ознак не доведений.

Коефіцієнт часткової кореляції між зростом і розміром взуття у студенток з однаковою масою $r_{xz(y)} = 0,65$ ($p < 0,01$).

Коефіцієнт часткової кореляції між масою і розміром взуття у студенток однакового зросту $r_{yz(x)} = 0,47$ ($p < 0,05$).

10.3. КІЛЬКІСНІ ОЗНАКИ. НЕЛІНІЙНИЙ ЗВ'ЯЗОК. ОЦІНКА ФОРМИ ЗВ'ЯЗКУ

Зв'язок, при якому рівномірній зміні однієї ознаки відповідає рівномірна зміна іншої, називається *прямолінійним*. Графік такого зв'язку має вигляд прямої лінії. Зв'язок, при якому рівномірним змінам однієї ознаки відповідає закономірна нерівномірна зміна іншої, називається *криво-лінійним*. Графік такого зв'язку має вигляд кривої лінії.

КОРЕЛЯЦІЙНЕ ВІДНОШЕННЯ

Формули коефіцієнтів кореляційного відношення

Кореляційне відношення – це показник, що характеризує ступінь нелінійного зв'язку. Нелінійний зв'язок між двома ознаками X і Y може бути описаний подвійно: як залежність Y від X та як залежність X від Y . Тому існують два коефіцієнти кореляційного відношення:

$$h_{yx} = \sqrt{\frac{\sum f_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{\sum f_y (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{та} \quad h_{xy} = \sqrt{\frac{\sum f_y (\bar{x}_y - \bar{x})^2}{\sum f_x (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (10.20 \text{ а, б})$$

де h_{yx} – коефіцієнт кореляційного відношення X за Y , h_{xy} – коефіцієнт кореляційного відношення Y за X , \bar{x} та \bar{y} – загальні середні арифметичні, \bar{x}_y і \bar{y}_x – групові середні арифметичні, y_i , x_i – класові середні, f_x – частоти ряду X , f_y – частоти ряду Y .

Кореляційне відношення розраховується за такою схемою.

1. Первинні дані групуються у вигляді кореляційної таблиці.
2. Визначаються загальні та групові середні.
3. Відхилення групових середніх від загальної середньої зводяться у квадрат, помножуються на відповідні частоти f , результати додаються.
4. Відхилення класових дат від загальної середньої зводяться у квадрат, помножуються на відповідні частоти f , результати додаються.
5. Розраховуються кореляційні відношення.

Статистична похибка кореляційного відношення

Статистична похибка кореляційного відношення розраховується за формулою:

$$s_h = \sqrt{\frac{1-h^2}{n-2}}, \quad (10.21)$$

де s_h – статистична похибка кореляційного відношення, h – кореляційне відношення, n – число пар, що корелюють.

Вірогідність кореляційного відношення

Вірогідність кореляційного відношення оцінюється за допомогою критерію Стьюдента t :

$$t = \frac{h}{s_h}. \quad (10.22)$$

Нульова гіпотеза припускає, що генеральний показник зв'язку дорівнює нулю. Розрахований критерій $t_{\text{факт.}}$ порівнюють із табличним значенням при числі ступенів свободи $df = n - 2$. Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза залишається чинною. Якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, нульову гіпотезу відхиляють.

Приклад 10.6

Користуючись даними табл. 10.3, розрахувати кореляційне відношення зросту за віком.

Розв'язання

1. Розбиваємо на класи варіацію обох ознак: X – зросту та Y – віку (див. п. 2.4). Для зросту вибираємо класовий інтервал, який дорівнює 10 см, для віку – 10-річний інтервал.

2. Групуємо первинні дані у вигляді кореляційної таблиці. По горизонталі відзначаємо групи, що відповідають зросту, по вертикалі – класи, що відповідають віку. Визначаємо частоти f_x і f_y . Розраховуємо y_i – середини класових інтервалів (табл. 10.4).

3. Визначаємо загальну середню для віку – $\bar{y} = 38,5$ року.

4. Визначаємо групові середні для віку – \bar{y}_x . Вони дорівнюють сумі відповідних y_i , що віднесені до відповідної частоти f_x .

$$\text{Наприклад: } \bar{y}_{141-150} = \frac{75,5 \cdot 2 + 5,5}{3} = 52,16.$$

Таблиця 10.3. Зріст у залежності від віку

Вік, роки	Зріст, см	Вік, роки	Зріст, см	Вік, роки	Зріст, см
38	176	20	172	41	174
18	176	27	172	72	142
36	192	72	165	31	190
33	172	24	194	32	190
10	147	5	123	32	181
16	190	12	162	31	171
61	176	5	114	31	171
53	168	71	150	71	151
20	163	54	162	71	151
44	192	63	162	72	163
54	185	22	176	72	163
42	172	12	164	21	181

5. Розраховуємо відхилення групових середніх від загальної середньої ($\bar{y}_x - \bar{y}$), зводимо їх у квадрат і множимо на частоти f_x . Результати складаємо: $\Sigma = 8661,5$.

6. Розраховуємо відхилення класових дат від загальної середньої ($y_i - \bar{y}$), зводимо їх у квадрат і множимо на частоти f_y . Результати складаємо: $\Sigma = 23487,71$.

7. Розраховуємо кореляційне відношення (10.20):

$$h_{yx} = \sqrt{\frac{\sum f_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{\sum f_y (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{8661,5}{23487,71}} = 0,607.$$

8. Статистична похибка кореляційного відношення (10.21):

$$s_h = \sqrt{\frac{1-h^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,607^2}{36-2}} = 0,136.$$

9. Оцінюємо вірогідність кореляційного відношення (10.22):

$$t = \frac{h}{s_h} = \frac{0,607}{0,136} = 4,45; \quad df = 36 - 2 = 34.$$

$t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$, ($p = 0,001$), нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,001$, значення кореляційного відношення є вірогідним.

Висновок

Кореляційне відношення зросту за віком – 0,607 ($p < 0,001$).

Таблиця 10.4. Кореляційна таблиця до прикладу 10.6

Вік, років	y_i	Зріст, см									f_y	$y_i - \bar{y}$	$f_y (y_i - \bar{y})^2$
		111 – 120	121 – 130	131 – 140	141 – 150	151 – 160	161 – 170	171 – 180	181 – 190	191 – 200			
71 – 80	75,5				2	4	1				7	46,04	14837,77
61 – 70	65,5						1	1			2	36,04	2597,76
51 – 60	55,5						2		1		3	26,04	2034,24
41 – 50	45,5							2		1	3	16,04	771,84
31 – 40	35,5							4	3	1	8	6,04	291,85
21 – 30	25,5							2	1	1	4	– 3,96	62,72
11 – 20	15,5						3	2	1		6	– 13,96	1169,29
1 – 10	5,5	1	1		1						3	– 23,96	1722,24
f_x		1	1	0	3	4	7	11	6	3	36		$\Sigma = 23487,71$
\bar{y}_x		5,5	5,5	0,0	52,2	75,5	42,6	34,6	33,8	35,5			
$\bar{y}_x - \bar{y}$		– 33,0	– 33,0	– 38,5	13,7	37,0	4,1	– 3,9	– 4,7	– 3,0			
$f_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2$		1089,0	1089,0	0,0	559,8	5476,0	120,0	168,2	132,5	27,0			$\Sigma = 8661,5$

КОЕФІЦІЄНТИ ДЕТЕРМІНАЦІЇ

Коефіцієнт детермінації показує, яка частка варіації однієї ознаки належить від варіації іншої ознаки. Якщо зв'язок між двома ознаками лінійний, то коефіцієнтом детермінації служить квадрат коефіцієнта кореляції r^2 , якщо ж зв'язок нелінійний, то коефіцієнтом детермінації служить квадрат кореляційного відношення h^2 . Наприклад, коефіцієнт детермінації (див. приклад 9.6) $h^2 = 0,607^2 = 0,37$ (37 %) свідчить про те, що 37 % варіації зросту визначається варіюванням віку.

ОЦІНКА ФОРМИ ЗВ'ЯЗКУ

Критерій криволінійності

При лінійній залежності обидва коефіцієнти кореляційного відношення є рівними, і їхні значення збігаються зі значенням коефіцієнта кореляції:

$$h_{yx} = h_{xy} = r_{xy}. \text{ Також рівні коефіцієнти детермінації: } h_{yx}^2 = r_{xy}^2.$$

При нелінійній залежності коефіцієнти детермінації нерівні: $h_{yx}^2 \neq r_{xy}^2$.

За різницею між ними можна судити про форму кореляційного зв'язку. Для цього розраховується наступний показник:

$$\gamma = h^2 - r^2. \quad (10.23)$$

Якщо $\gamma = 0$, то зв'язок лінійний; якщо $\gamma > 0$, то зв'язок нелінійний.

Вірогідність показника γ перевіряється за допомогою F -критерію:

$$F = \frac{\gamma}{1 - h^2} \cdot \frac{N - a}{a - 2}. \quad (10.24)$$

де a – чисельність груп чи класів варіаційного ряду, N – обсяг вибірки.

Нульова гіпотеза $H_0: \gamma = 0$ відхиляється, якщо $F_{\text{факт.}} \geq F_{\text{табл.}}$ для числа ступенів свободи $df_1 = a - 2$, $df_2 = N - a$ на прийнятому рівні значущості.

10.4. КІЛЬКІСНІ ТА ПОРЯДКОВІ (РАНГОВІ) ОЗНАКИ. НЕПАРАМЕТРИЧНІ ПОКАЗНИКИ ЗВ'ЯЗКУ

Непараметричні показники зв'язку дозволяють оцінювати взаємозв'язок між ознаками незалежно від характеру їхнього розподілу. Вони використовуються для оцінки сили і напрямку зв'язку між якісними та кількісними ознаками, що не піддаються безпосередньому виміру, але можуть бути виражені балами або іншими умовними одиницями.

Опис зв'язку між ознаками, розподіл яких не відповідає нормальному закону, а також між ознаками, що виражені в умовних одиницях (рангах), проводять за допомогою коефіцієнтів рангової кореляції. Для обчислення

цих коефіцієнтів дати ранжують (правила ранжування див. п. 2.3). У деяких дослідженнях, наприклад психологічних, ранги часто є вихідними даними.

Коефіцієнти кореляції рангів характеризують лінійний зв'язок між ознаками незалежно від характеру їхнього розподілу. Однак якщо ознаки розподіляються нормально, варто надавати перевагу параметричному коефіцієнту кореляції Пірсона як більш потужному.

КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ РАНГІВ СПІРМЕНА

Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена r_s – непараметричний аналог коефіцієнта кореляції Пірсона r_{xy} :

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2, \quad (10.25)$$

де $d = R_x - R_y$ – різниця між рангами сполучених значень ознак X та Y , n – число парних членів ряду, чи обсяг вибірки.

Значення $\frac{6}{n(n^2 - 1)}$ розраховані та приведені в табл. 22 Додатка.

Значення коефіцієнта кореляції Спірмена лежать у межах від 0 до ± 1 . Чим ближче значення коефіцієнта до ± 1 , тим сильніший зв'язок. При прямому зв'язку $r > 0$, при зворотному $r < 0$.

При нечисленних вибірках ($n < 10$) вірогідність емпіричного коефіцієнта Спірмена оцінюють шляхом його порівняння із критичними значеннями в табл. 23 Додатка.

Нульову гіпотезу ($H_0: \rho_s = 0$) відхиляють, якщо $r_{s\text{факт.}} \geq r_{s\text{табл.}}$ для прийнятого рівня значущості та обсягу вибірки n . Якщо $r_{s\text{факт.}} < r_{s\text{табл.}}$, нульова гіпотеза залишається чинною.

При $n \geq 10$ вірогідність коефіцієнта Спірмена можна оцінити за допомогою t -критерію Стюдента:

$$t_{\text{факт.}} = |r_s| \sqrt{\frac{n - 2}{1 - r_s^2}}. \quad (10.26)$$

Нульову гіпотезу ($H_0: \rho_s = 0$) відхиляють, якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ для числа ступенів свободи $df = n - 2$ і прийнятого рівня значущості. Нульова гіпотеза залишається чинною, якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$.

Приклад 10.7

Серед дівчат-курсанток військового училища проводилися дослідження, чи існує кореляція між агресивністю та схильністю до лідерства. Випадковим чином були відібрані 10 курсанток.

Кожній курсантці були привласнені ранг агресивності R_1 (від 1 – низька агресивність, до 10 – висока агресивність) і ранг схильності до лідерства R_2 (від 1 – слабка схильність до лідерства, до 10 – значно виражена схильність до лідерства).

Отримані дані подано в табл. 10.5. Чи існує залежність між схильністю до лідерства й агресивністю?

Таблиця 10.5. Оцінки агресивності та схильності до лідерства курсанток військового училища

Якості	Курсантки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Агресивність (R_1)	2	3	7	6	1	5	10	8	9	4
Схильність до лідерства (R_2)	3	1	5	9	2	6	8	10	7	4

Розв'язання

Нульова гіпотеза: зв'язок між ознаками відсутній, генеральний коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Для її перевірки застосуємо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Розрахуємо його за схемою, наведеною в табл. 10.6.

Оцінку вірогідності розрахованого коефіцієнта Спірмена $r_s = 0,81$ проводимо за допомогою табл. 23 Додатка:

$$r_{s\text{факт.}} > r_{s\text{табл.}} \quad (p = 0,01).$$

Нульова гіпотеза H_0 : $\rho_s = 0$ відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Розрахований коефіцієнт Спірмена вірогідний.

Висновок

У курсанток між агресивністю та схильністю до лідерства існує позитивна кореляція, більш агресивні курсантки схильніші до лідерства. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена дорівнює 0,81.

Таблиця 10.6. Розрахунки до прикладу 10.7

Курсантка	R_1	R_2	$d = R_1 - R_2 $	d^2
1	2	3	1	1
2	3	1	2	4
3	7	5	2	4
4	6	9	3	9
5	1	2	1	1
6	5	6	1	1
7	10	8	2	4
8	8	10	2	4
9	9	7	2	4
10	4	4	0	0

$$\sum d^2 = 32$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 32}{10(10^2 - 1)} = 0,81$$

Приклад 10.8

У табл. 10.7 для різних видів ссавців наведені дані про масу їхнього тіла (кг) і головного мозку (% від маси тіла). Чи існує кореляція між цими показниками?

Таблиця 10.7. Маса тіла і мозку деяких видів ссавців

Ссавець	Маса тіла, кг	Маса мозку (% від маси тіла)
Лев	119,5	0,18
Антилопа	8,6	0,58
Зебра	255,0	0,21
Носоріг	765,0	0,09
Кішка	3,3	0,94
Леопард	27,7	0,59
Слон	3048,0	0,18

Розв'язання

Розподіл маси тіла виразно асиметричний: більшість значень менша за 1000 кг, але два значення набагато більші – 765 і 3048 кг. Середня арифметична маси тіла – 603,9 кг, медіана – 119,5 кг. Розподіл відрізняється від нормального, тому для перевірки зв'язку скористаємося непараметричним коефіцієнтом кореляції Спірмена. Позначимо масу тіла як ознаку X , масу мозку – як Y . Для розрахунку коефіцієнта кореляції Спірмена необхідно абсолютні значення перевести в ранги R_x і R_y .

Таблиця 10.8. Розрахунки до прикладу 10.8

x	y	R_x	R_y	d	d^2
119,5	0,18	4	2,5	1,5	2,25
8,6	0,58	2	5	3	9
255,0	0,21	5	4	1	1
765,0	0,09	6	1	5	25
3,3	0,94	1	7	6	36
27,7	0,59	3	6	3	9
3048,0	0,18	7	2,5	4,5	20,25
$n = 7$					$\sum d^2 = 102,5$

Коефіцієнт кореляції Спірмена:

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 = 1 - \frac{6}{7(7^2 - 1)} \cdot 102,5 = -0,83.$$

Вибірка нечисленна ($n = 7$), тому вірогідність r оцінимо, порівнюючи його значення з критичними з табл. 23 Додатка.

$$r_{s\text{факт.}} > r_{s\text{табл.}} (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза ($H_0: \rho_s = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$. Коефіцієнт кореляції вірогідно відрізняється від нуля.

Висновок

Між масою тіла ссавців і масою головного мозку, що виражена у відсотках від маси тіла, існує значна зворотна залежність з коефіцієнтом кореляції $r = -0,83$. Чим більший ссавець, тим менший відсоток складас маса його мозку порівняно із загальною масою тіла.

10.5. ЯКІСНІ ОЗНАКИ

Аналіз мінливості за альтернативними ознаками проводять за допомогою кореляційних таблиць. Під час аналізу альтернативної мінливості за двома якісними ознаками використовують *чотирипільну кореляційну таблицю*. Дві колонки розподіляють об'єкти за станом першої ознаки, два рядки – за станом другої. Поля таблиці позначають літерами a, b, c, d .

Якщо якісні ознаки мають більше двох класів (градацій), то використовують багатопільну кореляційну таблицю, яка складається, відповідно, з декількох рядків та стовпців.

ТЕТРАХОРИЧНИЙ ПОКАЗНИК ЗВ'ЯЗКУ

За допомогою *тетрахоричного показника*, або *коефіцієнта асоціації*, аналізують зв'язок між двома якісними ознаками, кожна з яких може набувати двох станів. Ознаки групуються в чотирипільну таблицю. Показник зв'язку розраховується за формулою:

$$r_A = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}, \quad (10.27)$$

де r_A – тетрахоричний показник зв'язку; a, b, c, d – частоти в клітинах чотирипільної таблиці.

Тетрахоричний показник зв'язку змінюється від -1 до $+1$. Його стандартна похибка:

$$s_{r_A} = \frac{1 - r_A^2}{\sqrt{n}}, \quad (10.28)$$

де n – обсяг вибірки.

Вірогідність r_A оцінюється за допомогою критерію χ^2 :

$$\chi^2 = n r_A^2. \quad (10.29)$$

Нульова гіпотеза $H_0: \rho_A = 0$ відхиляється, якщо $\chi_{\text{факт.}}^2 \geq \chi_{\text{табл.}}^2$ (табл. 19 Додатка) для прийнятого рівня значущості та числа ступенів свободи $df = 1$.

Нульова гіпотеза залишається чинною, якщо $\chi_{\text{факт.}}^2 < \chi_{\text{табл.}}^2$.

Вірогідність тетрагоричного показника зв'язку також можна оцінити за допомогою t -критерію Стюдента:

$$t = \frac{r_A \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_A^2}} \quad (10.30)$$

Нульова гіпотеза $H_0: \rho_A = 0$ відхиляється, якщо $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ (табл. 3 Додатка) для числа ступенів свободи $df = n - 2$ та прийнятого рівня значущості. Якщо $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза приймається.

Приклад 10.9

Було проведено дослідження, ціль якого – з'ясувати, чи можна підвищити стійкість до грипу прийманням вітаміну С. Було сформовано дві групи випробуваних по 30 осіб. Групі А впродовж трьох місяців давали по 250 мг вітаміну С у день, групі В давали плацебо. У групі А на грип занедужало 10 осіб, у групі В – 15. Чи існує зв'язок між прийманням вітаміну С та захворюваністю на грип?

Розв'язання

Формуємо чотирипільну таблицю (табл. 10.9).

Таблиця 10.9. Розрахунки до прикладу 10.9

	Занедужали на грип		Не занедужали		Σ
Група А: вітамін С	(a)	10	(b)	20	(a + b) 30
Група В: без вітаміну С	(c)	15	(d)	15	(c + d) 30
Σ	(a + c)	25	(b + d)	35	(n) 60

Обчислюємо тетрагоричний показник зв'язку r_A (10.27):

$$r_A = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} = \frac{10 \cdot 15 - 20 \cdot 15}{\sqrt{30 \cdot 30 \cdot 25 \cdot 35}} = -0,17.$$

Перевіряємо нульову гіпотезу: $H_0: \rho_A = 0$ (приймання вітаміну С не впливає на захворюваність на грип).

1. Використовуємо критерій χ^2 (10.29):

$$\chi^2 = nr_A^2 = 60 \cdot 0,17^2 = 10,2; \quad df = 1;$$

$\chi_{\text{факт.}}^2 > \chi_{\text{табл.}}^2$, нульова гіпотеза $H_0: \rho_A = 0$ відхиляється.

2. Використовуємо t -критерій (10.30):

$$t = \frac{r_A \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_A^2}} = \frac{0,17 \sqrt{60-2}}{\sqrt{1-0,17^2}} = 1,31;$$

$$df = n - 2 = 60 - 2 = 58;$$

$t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза $H_0: \rho_A = 0$ залишається чинною, на даному обсязі дослідження зв'язок не доведений.

Висновок

Перевірка нульової гіпотези за допомогою різних критеріїв дала неоднозначний результат. У подібних випадках варто надавати перевагу більш потужному методу, яким є той, котрий дозволяє відкинути нульову гіпотезу. Адекватним критерієм у цьому випадку є непараметричний критерій χ^2 , за допомогою якого нульова гіпотеза відхиляється, і робиться висновок, що приймання вітаміну С вірогідно знижує захворюваність на грип.

ПОЛІГОРИЧНИЙ ПОКАЗНИК ЗВ'ЯЗКУ

За допомогою полігоричного показника оцінюють характер зв'язку між двома якісними ознаками, що мають більше двох станів. Ознаки групуються в багатопільну таблицю. Полігоричний показник зв'язку обчислюється за формулою:

$$K = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(n_x - 1)(n_y - 1)}}}, \quad (10.31)$$

де $\varphi^2 = \sum \frac{f_{xy}^2}{\sum f_x \sum f_y} - 1$, f_{xy} – частоти в окремих клітинках багатопільної таблиці, $\sum f_x$, $\sum f_y$ – суми частот за рядками і стовпцями багатопільної таблиці, n_x та n_y – чисельність груп за рядками і стовпцями таблиці.

Вірогідність полігоричного показника зв'язку оцінюють за допомогою критерію χ^2 :

$$\chi^2 = N\varphi^2, \quad (10.32)$$

де N – загальна сума частот, або обсяг вибірки.

Якщо $\chi^2_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{табл.}}$ (табл. 19 Додатка), нульова гіпотеза про відсутність зв'язку відхиляється для прийнятого рівня значущості й числа ступенів вободи $df = (n_x - 1)(n_y - 1)$.

Застосування критерію χ^2 є правильним, якщо в клітинках кореляційної таблиці міститься не менше 5 дат, а загальне число спостережень не менше 50.

Приклад 10.10

Національний склад чоловіків та жінок, які брали шлюб у 1985 р. у місті Кмельницькому, наведено в таблиці 10.10. Чи існує шлюбна асортативність а національністю або за цією ознакою шлюби формуються випадково?

Таблиця 10.10. Структура шлюбів за національністю

Національність		Жінки					
		Українки	Росіянки	Польки	Євреї	Білоруски	Інші
Чоловіки	Українці	369	59	18	2	4	0
	Росіяни	88	29	5	0	2	0
	Польки	9	0	2	0	0	0
	Євреї	4	3	0	5	0	0
	Білоруси	6	2	0	0	0	0
	Інші	9	1	0	0	0	1

Розв'язання

Нульову гіпотезу «шлюби за національністю формуються випадково» перевіряємо за допомогою поліхоричного показника зв'язку.

$$\varphi^2 = \frac{\sum \frac{f_{xy}^2}{\sum f_x \sum f_y} - 1}{369^2} + \frac{(369 + 59 + 18 + 2 + 4 + 0)(369 + 88 + 9 + 4 + 6 + 9)}{59^2} + \dots - 1 = 1,404.$$

Поліхоричний показник зв'язку визначається за формулою (10.31):

$$K = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(n_x - 1)(n_y - 1)}}} = \sqrt{\frac{1,404}{\sqrt{(6-1)(6-1)}}} = 0,53.$$

N – загальна сума частот, або обсяг вибірки, $N = 622$.

Вірогідність K оцінюємо за допомогою критерію χ^2 (10.32):

$$\chi^2 = N\varphi^2 = 622 \cdot 1,404 = 873,29.$$

$$df = (n_x - 1)(n_y - 1) = (6 - 1)(6 - 1) = 25.$$

$$\chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{табл.}} \quad (p < 0,001).$$

Нульова гіпотеза про відсутність зв'язку між національностями чоловіків та жінок відхиляється.

Висновок

Національність впливає на вибір шлюбного партнера.

10.6. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЯКІСНИМИ ТА КІЛЬКІСНИМИ ОЗНАКАМИ

БІСЕРІАЛЬНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Бісеріальний коефіцієнт кореляції використовується для оцінки зв'язку між якісними та кількісними ознаками. При цьому якісна ознака може мати два альтернативні стани (наприклад, стать – чоловіча та жіноча, колір – жовтий і зелений), кількісна – безперервний ряд станів (наприклад, маса, зріст). Бісеріальний коефіцієнт кореляції розраховується за формулою:

$$r_{BS} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}}, \quad (10.33)$$

де \bar{x}_1 і \bar{x}_2 – середні арифметичні кількісної ознаки в групах з альтернативними станами якісної ознаки; n_1, n_2 – число об'єктів у групах, що порівнюються; N – загальне число спостережень, $N = n_1 + n_2$; s – стандартне відхилення кількісної ознаки для всієї вибірки.

Бісеріальний коефіцієнт кореляції змінюється від -1 до $+1$. При $r_{BS} = 0$ зв'язок відсутній. Знак при цьому показнику значення не має. Вірогідність біркового бісеріального коефіцієнта кореляції оцінюється за допомогою критерію Стюдента при числі ступенів свободи $df = N - 2$:

$$t = r_{BS} \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{BS}^2}}. \quad (10.34)$$

При $t_{\text{факт.}} \geq t_{\text{табл.}}$ (табл. 3 Додатка) нульова гіпотеза про відсутність зв'язку між ознаками (у генеральній сукупності коефіцієнт кореляції дорівнює нулю $H_0: \rho_{r_{BS}} = 0$) відхиляється на прийнятому рівні значущості. При $t_{\text{факт.}} < t_{\text{табл.}}$ нульова гіпотеза $H_0: \rho_{r_{BS}} = 0$ залишається чинною, коефіцієнт кореляції вважається невірогідним, зв'язок між ознаками не доведений.

Приклад 10.11

Згідно з даними, що наведені в табл. 10.1, установити, чи є зв'язок між статтю і зростом студентів.

Розв'язання

Стать – якісна ознака, зріст – кількісна. Позначимо зріст як ознаку X . Оцінімо зв'язок між ознаками за допомогою бісеріального коефіцієнта кореляції.

Обсяги вибірок: $n_{\text{чол.}} = 15$, $n_{\text{жін.}} = 20$.

$N = n_{\text{чол.}} + n_{\text{жін.}} = 15 + 20 = 35$.

Середні арифметичні зросту в обох групах:

$$\bar{x}_{\text{чол.}} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2704}{15} = 180,3;$$

$$\bar{x}_{\text{жін.}} = \frac{\sum x}{n} = \frac{3308}{20} = 165,4.$$

Стандартне відхилення:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N} \right)} = \sqrt{\frac{1}{35} \left((488246 + 547758) - \frac{(2704 + 3308)^2}{35} \right)} = 9,73.$$

Таблиця 10.11. Розрахунки до прикладу 10.11

№	$x_{\text{чол.}}$	$x_{\text{жін.}}$	$x_{\text{чол.}}^2$	$x_{\text{жін.}}^2$
1	181	164	32761	26896
2	178	165	31684	27225
3	182	160	33124	25600
4	160	174	25600	30276
5	187	167	34969	27889
6	193	161	37249	25921
7	184	164	33856	26896
8	184	165	33856	27225
9	175	169	30625	28561
10	178	175	31684	30625
11	184	165	33856	27225
12	184	155	33856	24025
13	174	172	30276	29584
14	185	164	34225	26896
15	175	172	30625	29584
16		166		27556
17		160		25600
18		159		25281
19		158		24964
20		173		29929
Сума	2704	3308	488246	547758

Бісеріальний коефіцієнт кореляції (10.33):

$$r_{BS} = \frac{180,3 - 165,4}{9,73} \sqrt{\frac{15 \cdot 20}{35(35-1)}} = 0,77.$$

Оцінімо вірогідність коефіцієнта r_{BS} за допомогою t -критерію (10.34):

$$t = r_{BS} \sqrt{\frac{N-2}{1-r_{BS}^2}} = 0,77 \sqrt{\frac{35-2}{1-0,77^2}} = 6,93;$$

$$df = N - 2 = 35 - 2 = 33.$$

$t_{\text{факт.}} > t_{\text{табл.}}$ ($p = 0,001$). Коефіцієнт кореляції вірогідний.

Нульова гіпотеза про відсутність у генеральній сукупності зв'язку між статтю і зростом серед студентів ($H_0: \rho_{rs} = 0$) відхиляється на рівні значущості $p < 0,001$.

Висновок

Між зростом студентів і їхньою статтю існує значний зв'язок, який вимірюється бісеріальним коефіцієнтом кореляції $r_{BS} = 0,77$.

7. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

- Коефіцієнт кореляції Пірсона складається із двох частин – знака й числа. У яких межах розташовані значення r ? Як знак коефіцієнта характеризує співвідношення ознак? Яку інформацію ви одержуєте від числового значення r ?
- При яких умовах застосовується коефіцієнт кореляції Пірсона? Коефіцієнт кореляції Спірмена?
- Якими засобами встановлюються зв'язки між якісними ознаками? Між кількісними та якісними?
- Ви одержали значення коефіцієнта кореляції Пірсона $r = -1,04$. Що це свідчить про зв'язок між ознаками?
- Значення коефіцієнта кореляції Пірсона $r = 0,45$. Скільки пар даних необхідно, щоб ця кореляція розглядалася як достовірна при $p = 0,05$?
- Який з даних коефіцієнтів характеризує найсильніший зв'язок? Найслабкіший?
а) $-0,71$; б) $0,08$; в) $0,62$; г) $-0,12$.
- Згідно зі спостереженнями, які проводилися на протязі 20 років, коефіцієнт кореляції Пірсона між врожаєм пшениці і кількістю осінніх опадів дорівнює $-0,629$. Чи можна вважати зв'язок доведеним?

- Коефіцієнт кореляції Пірсона між показником інтелекту IQ і швидкістю читання, що одержаний на 160 чоловіках, дорівнює $0,61$. Чи існує зв'язок між цими показниками?
- Коефіцієнт кореляції Пірсона між масою і зростом, одержаний на 16 особинах, дорівнює $-0,08$. Що можна сказати про зв'язок між цими ознаками?
- Коефіцієнт кореляції Пірсона між розміром кладки у птахів і масою пташенят, одержаний на 73 спостереженнях, дорівнює $-0,38$. Чи існує зв'язок між цими показниками?
- Для пацієнтів клініки визначали вміст глюкози і гемоглобіну у сироватці крові (мг%) та систолічний кров'яний тиск (мм. рт. ст.):

Вміст глюкози, мг%	Вміст холестеролу, мг%	Систолічний кров'яний тиск, мм.рт.ст.
107	199	102
145	267	138
237	272	190
91	166	122
185	239	128
106	189	112
177	238	128
120	223	116
116	279	134
105	190	104
109	240	116
186	209	152
257	210	134
218	171	132
164	255	130
158	232	118
117	147	136
130	268	108
132	231	108
138	199	128

- а) Визначте коефіцієнти кореляції Пірсона та коефіцієнти часткової кореляції між: вмістом глюкози і вмістом холестеролу; вмістом глюкози і кров'яним тиском; кров'яним тиском і вмістом холестеролу.

- б) Визначте коефіцієнти часткової кореляції між тими ж парами ознак, що й в завданні а). Порівняйте отримані значення.
в) Визначте коефіцієнти множинної кореляції між даними ознаками.

2. В аналізах крові визначали число еритроцитів x (млн/мл) і вміст гемоглобіну y (мг%). Визначте коефіцієнт кореляції r_{xy} , оцініть його вірогідність, зробіть висновок про наявність зв'язку між ознаками.

x	4,2	4,5	3,7	4,2	3,9	4,4	3,1	2,8	3,7	3,6	3,4
y	87	90	97	96	92	94	71	70	72	76	71
x	3,3	3,6	3,3	4,1	3,3	3,5	3,3	3,1	3,3	3,7	3,9
y	82	78	82	81	82	77	80	82	79	84	75
x	3,5	3,3	3,1	3,3	3,7	3,9	4,3	3,8	3,8	3,8	4,2
y	77	80	82	79	84	75	82	79	87	87	87
x	3,9	4,3	3,8	3,8	3,8	4,2	4,5	3,7	4,2	3,9	4,4
y	75	82	79	87	87	87	90	97	96	92	94

3. Для встановлення зв'язку між змістом фосфору в ґрунті x і змістом фосфору в злакових рослинах y проведено 9 аналізів:

x	1	4	5	9	13	11	23	23	28
y	64	71	54	81	93	76	77	95	109

Визначте ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена, оцініть його вірогідність, зробіть висновок про наявність зв'язку між ознаками.

14. Наукове дослідження виявило такі дані про рак легенів і паління:

Відношення до паління	Рак легенів		Усього
	Діагностовано	Не діагностовано	
Не палять	1	6700	6701
Палять	20	3279	3299
Усього	21	9979	10000

Визначте ступінь асоціації між палінням і розвитком раку легенів.

15. Встановіть, чи існує зв'язок між фізичною активністю і рівнем холестеролу в крові (див. п. 2.6, завдання 16).

11

РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

11.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Регресійний аналіз – це метод оцінки зв'язку між ознаками, що варіюють, який дозволяє визначити, як кількісно міняється одна величина в міру зміни іншої. Якщо дві ознаки пов'язані між собою, то за значенням однієї ознаки можна передбачити значення іншої. Наприклад, якщо ми знаємо, що зріст і маса тварини корелюють, то, знаючи зріст, можна скласти уявлення про масу.

Будь-яку залежність можна подати у вигляді $y = f(x)$, де y – залежна змінна, або *функція*; x – незалежна змінна, або *аргумент*. У біології за допомогою функціональних залежностей визначаються співвідношення між різними показниками біосистем.

При статистичному зв'язку певному значенню однієї змінної відповідає розподіл значень іншої змінної, який характеризується частковою середньою. Тому статистичний зв'язок описується як залежність часткових середніх \bar{y}_x від значень x .

Зміна функції (y) при зміні одного чи декількох аргументів (x) називається *регресією*. Регресія виражається за допомогою *рівнянь регресії*, *ліній регресії*, *коефіцієнтів регресії*. Показники регресії вказують на характер і напрямок залежності між ознаками, а також дають уявлення про те, як зміна однієї з них залежить від зміни іншої.

2. ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Регресія називається *лінійною*, якщо при рівномірній зміні x відбувається рівномірна зміна y . Якщо значення однієї ознаки лінійно залежать від значень іншої ознаки, лінія регресії являє собою пряму лінію. Рівняння лінійної регресії:

$$y = a + bx, \quad (11.1)$$

a – ордината в точці перетинання лінії регресії з віссю ординат, b – тангенс кута нахилу лінії регресії до осі абсцис.

Коефіцієнт b називається *коефіцієнтом лінійної регресії*.

Лінія регресії

На *скатер-діаграмі* (діаграмі розсіювання) кожна точка має координати, що відповідають значенням двох ознак – x та y . Через діаграму розсіювання можна провести багато ліній, що збігаються з напрямком розсіювання точок, як, наприклад, на рис. 11.1.

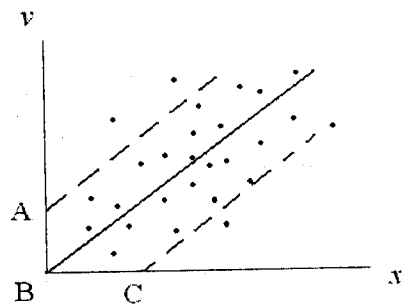


Рис. 11.1. Лінія регресії на скатер-діаграмі

Лінія A розташована поблизу точок верхньої частини діаграми, але віддалена від нижніх точок. Лінія C проходить поблизу нижніх точок, але віддалена від верхніх. Обидві ці лінії є неоднаково віддаленими від різних точок розсіювання. Лінія B проходить так, що точки зверху і знизу є рівновіддаленими від неї. Ця лінія називається *лінією регресії*. Це єдина лінія,

яка лежить так, що перебуває на найближчій відстані від усіх точок розсіювання. Лінія регресії повинна проходити через діаграму розсіювання так, щоб *сума квадратів відстаней* від неї до кожної точки була *мінімальною*.

Лінія регресії використовується для прогнозування значень y за значеннями x . Чим тісніше на діаграмі розсіювання точки зібрані навколо лінії регресії, тим тісніше зв'язані ознаки x та y , тим точніший прогноз. На діаграмі розсіювання, що на рис. 11.2 а, між x та y існує більш тісний зв'язок, ніж на діаграмі 11.2 б.

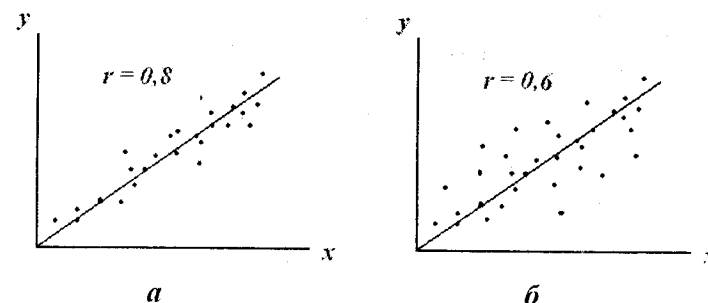


Рис. 11.2. Чим вираженіше є кореляція, тим тісніше навколо лінії регресії зосереджені точки

При позитивному зв'язку між ознаками лінія регресії утворює гострий кут з віссю абсцис (рис. 11.3 а), коефіцієнт регресії $b > 0$. У цьому випадку при більш високих значеннях x прогноуються більш високі значення y . При негативному зв'язку лінія регресії утворює тупий кут з віссю абсцис (рис. 11.3 б), коефіцієнт регресії $b < 0$. У цьому випадку більш високим значенням x відповідають нижчі значення y .

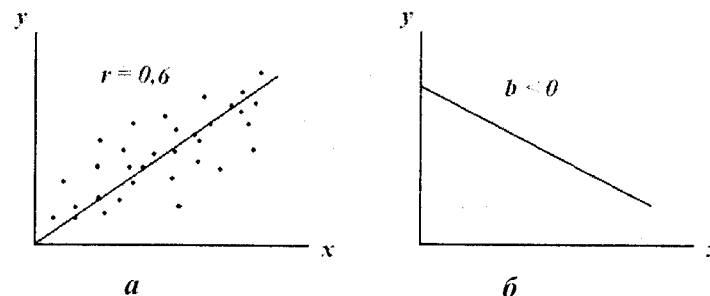


Рис. 11.3. Напрямок нахилу лінії регресії

На рис. 11.4 подано дві лінії регресії з позитивним нахилом. Ці лінії мають різний прогноз. Кут нахилу визначається тим, наскільки змінюється одна ознака при зміні іншої ознаки на одиницю виміру. Лінія регресії на рис. 11.4 а має такий нахил, що при зміні ознаки x на одиницю виміру ознака y змінюється на 0,5 одиниці виміру. Лінія на рис. 11.4 б значно крутіша: при зміні ознаки x на одиницю ознака y збільшується на 2 одиниці.

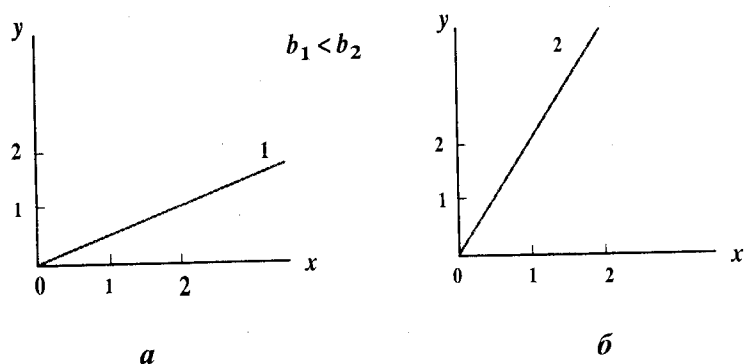


Рис. 11.4. Нахил ліній регресії

На рис. 11.5 усі лінії регресії мають однаковий кут нахилу, але перша перетинає вісь ординат у нульовій точці ($a = 0$), друга – у точці + 3 ($a = 3$), третя – у точці - 2 ($a = -2$).

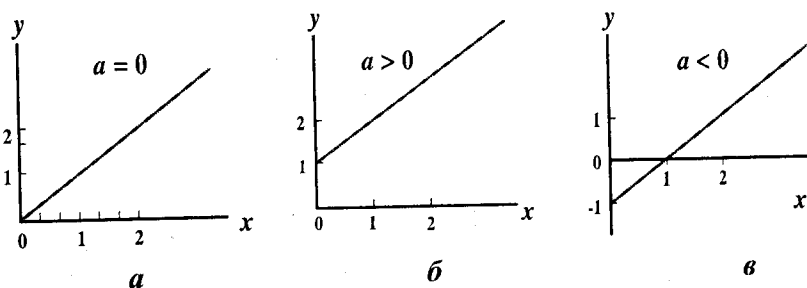


Рис. 11.5. Точки перетинання ліній регресії та осі ординат

Складання рівняння лінійної регресії

Рівняння регресії показує, яких значень буде набувати одна ознака при конкретних значеннях іншої. Значення коефіцієнта лінійної регресії b обчислюється за формулою:

$$b_{yx} = r \frac{s_y}{s_x}, \quad (11.2)$$

де r – коефіцієнт кореляції, s_y і s_x – стандартні відхилення ознак y та x .

Значення a обчислюється за формулою:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad (11.3)$$

де \bar{y} та \bar{x} – середні арифметичні значення ознак y та x .

Приклад 11.1

У результаті вибіркового дослідження встановлено, що коефіцієнт кореляції між кількістю годин на тиждень (x), що студент присвячує самостійним заняттям, і середнім балом в сесію (y) складає $r = +0,98$. У середньому студенти займаються по 22,86 години на тиждень, стандартне відхилення цієї величини – 12,20 години. Середня оцінка – 2,71 бала, її стандартне відхилення – 0,69 бала. Скільки балів одержать студенти, що займаються по 37, 22 і 8 годин на тиждень?

Розв'язання

Обчислимо коефіцієнт регресії (11.2):

$$b_{yx} = r \frac{s_y}{s_x} = 0,98 \frac{0,69}{12,20} = 0,06.$$

Обчислимо значення a (11.3):

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 2,71 - 0,06 \cdot 22,86 = 1,34.$$

Складемо рівняння лінійної регресії (11.1):

$$y = 0,06x + 1,34.$$

Це рівняння можна використовувати для прогнозу значень y за значеннями x . Вирішивши це рівняння для x , що дорівнює 37, 22 і 8 годин, одержимо відповідні оцінки: перший студент одержить 3,56 бала, другий студент – 2,66, третій – 1,82.

Вірогідність регресії. Стандартна похибка. Довірчий інтервал

Використовувати рівняння регресії для достовірного прогнозу можна тільки в тому випадку, якщо коефіцієнт кореляції статистично вірогідний.

Стандартна похибка прогнозу дорівнює:

$$s_{yx} = s_y \sqrt{1 - r^2}, \quad (11.4)$$

s_{yx} – стандартна похибка прогнозу, r – коефіцієнт кореляції.

Якщо $r = 1$, прогноз безпомилковий:

$$s_{yx} = s_y \sqrt{1 - 1^2} = s_y \cdot 0 = 0. \quad (11.5)$$

Якщо $r = 0$, то можна сказати, що значення y варіює в межах s_y :

$$s_{yx} = s_y \sqrt{1 - 0^2} = s_y \cdot 1 = s_y. \quad (11.6)$$

Установлення довірчого інтервалу (рис. 11.6) відбувається за відомою формулою: крайні прогнозовані значення розташовані у межах $y \pm t s_{yx}$.

Для 95%-го довірчого інтервалу – $y \pm 1,96 s_{yx}$, для 99%-го – $y \pm 2,58 s_{yx}$.

Для 99,9%-го – $y \pm 3,29 s_{yx}$.

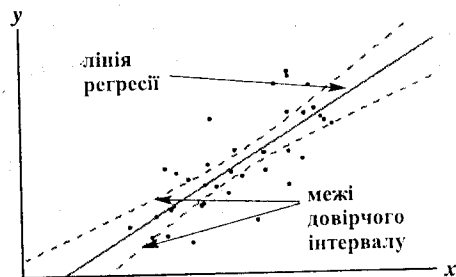


Рис. 11.6. Лінія регресії та довірчий інтервал

Повернімося до прикладу 11.1. Наскільки ми впевнені, що оцінка студента, який присвячує навчанню 37 годин на тиждень, складе 3,56 бала? Абсолютної впевненості, що він одержить саме такий бал, звичайно, немає. Оскільки зв'язок між ознаками не повний, прогноз певною мірою є помилковим. Використовуючи значення коефіцієнта кореляції $r = 0,98$, а також значення $s_y = 0,69$, ми можемо обчислити стандартну похибку прогнозу (11.4):

$$s_{yx} = s_y \sqrt{1 - r^2} = 0,69 \sqrt{1 - 0,98^2} = 0,14.$$

Використовуючи стандартну похибку прогнозу, визначимо розмах можливих значень, у якому з певною ймовірністю може опинитися оцінка y . Студент з імовірністю 95 % одержить від 3,29 до 3,83 бала, з імовірністю 99 % – від 3,20 до 3,92 бала і з імовірністю 99,9 % – від 3,1 до 4,02 бала.

* * *

Прийоми, що тут наведені, є коректними, якщо дотримуються умови:

1. Обидві ознаки перебувають у *лінійній залежності* одна від одної. Лінія регресії в цьому випадку є прямою.
2. Обидві ознаки розподіляються *нормально*. Якщо розподіл однієї або обох ознак різко відхиляється від нормального закону, прогноз буде неправильним.
3. Розподіл обох ознак є *однорідним*. Це означає, що вибіркові дані на осі ординат діаграми розсіювання мають однаковий ступінь варіювання по всій осі. При цьому похибки прогнозу матимуть однакове значення впродовж лінії регресії.

11.3. НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Регресія називається *нелінійною*, якщо при рівномірній зміні x відбувається нерівномірна зміна y . Нелінійні залежності можуть бути описані відповідними рівняннями та зображені у вигляді ліній регресії.

ЗАГАЛЬНА СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Степеневою називається функція, яка має вигляд:

$$y = x^a, \quad (11.7)$$

де a – дійсне число.

Область визначення, графік і способи обчислення степеневих функцій залежать від природи числа a . При $a = 1$ формула виражає лінійну залежність, при $a = 2$ графік є квадратичною параболою, при $a = 3$ – кубічною параболою, при $a = -1$ – рівнобічною гіперболою, при $a < -1$ – степеневою гіперболою (рис. 11.7).

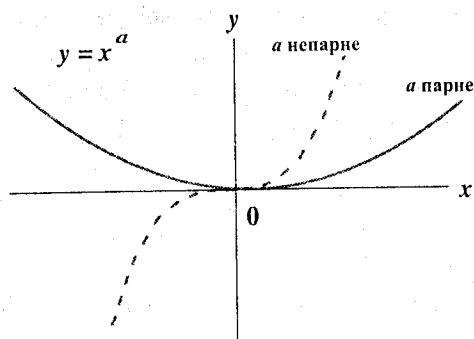


Рис. 11.7. Степенева функція

Наприклад, степеневу функцією визначається залежність між середньою тривалістю життя тварин і дозою шкідливої речовини, що впливає на організм:

$$dT^n = C, \quad (11.8)$$

d – доза шкідливої речовини, T – середня тривалість життя, n і C – експериментально встановлені константи.

ПОКАЗОВА ФУНКЦІЯ

Показовою називається функція, яка має вигляд:

$$y = a^x, \quad (11.9)$$

a – позитивне число.

Область визначення функції – вся числова вісь, область значень – безліч позитивних чисел. При $0 < a < 1$ показова функція убыває, при $a > 1$ зростає (рис. 11.8 а).

У біології часто використовується показова функція, у якій число a дорівнює основі натурального логарифма $e \approx 2,718$:

$$y = e^x. \quad (11.10)$$

Крива, що описує цю залежність, називається експонентою (рис. 11.8 б).

Наприклад, у бактерій, поміщених в оптимальне живильне середовище, спостерігається експонентний ріст чисельності, який не залежить від щільності популяції.

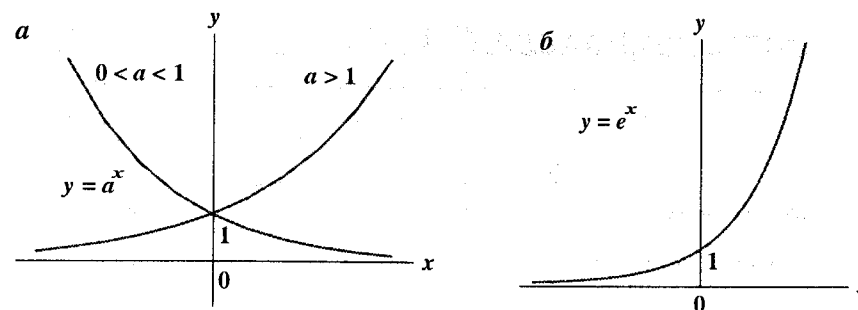


Рис. 11.8. Показова функція

ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ

Логарифмічна функція є зворотною відносно показової:

$$y = \log_a x. \quad (11.11)$$

Основа логарифма a – позитивне число. При $a = 10$ логарифм десятковий (\lg), при $a = e$ – натуральний (\ln). Область визначення логарифмічної функції – безліч позитивних чисел, область значень – уся числова вісь (рис. 10.9).

Наприклад, інтенсивність чутливості в аналізаторних системах організму в залежності від сили подразнення описується законом Вебера–Фехнера:

$$E = k \lg I + C, \quad (11.12)$$

де E – інтенсивність чутливості; I – інтенсивність подразнення; k , C – константи.

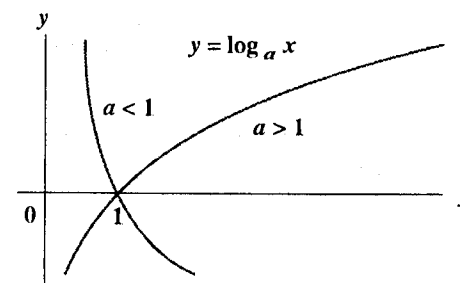


Рис. 11.9. Логарифмічна функція

4. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Поясніть особливості ліній регресії при прямому та зворотному зв'язку.
2. Для чого використовується лінія регресії?
3. У чому полягає різниця між лінійною та нелінійною регресією?
4. У таблиці представлено дані щодо споживання солі і систолічного тиску крові. Дослідник вивчає, наскільки пов'язані ці ознаки і чи можна точно передбачити тиск крові, спираючись на рівень споживання солі.

Особа	Денне споживання солі	Систолічний тиск крові
1	6,8	154
2	7,0	167
3	6,9	162
4	7,2	175
5	7,3	190
6	7,0	158
7	7,0	166
8	7,5	195
9	7,3	189
10	7,1	186
11	6,5	148
12	6,4	140

- а) Відобразіть скаттер-діаграму. Складіть рівняння лінійної регресії. Перевірте нульову гіпотезу $H_0: \beta = 0$ ($p = 0,01$).
- б) Який кров'яний тиск очікується, якщо споживання солі буде дорівнювати 6,3? 7,6?

12 ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

12.1 ТЕОРІЯ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Дисперсійний аналіз – статистичний метод, що дає можливість порівнювати кілька груп. Метод одержав таку назву тому, що в його основі лежить аналіз різноманітності ознак, показником якої є дисперсія (в англійській мовній науковій літературі цей метод називається ANOVA – *analysis of variance*). Методологію дисперсійного аналізу розробив Р. Фішер. За допомогою дисперсійного аналізу розв'язують різні наукові задачі. Найчастіше дисперсійний аналіз застосовується в тих випадках, коли необхідно оцінити силу впливу фактора на ознаку. Загальним методичним прийомом усіх видів дисперсійного аналізу є порівняння декількох груп за різноманітністю об'єктів, що їх складають.

У дисперсійному аналізі вживається ряд понять. Характеристика об'єкта, що досліджується, називається *результативною ознакою*. Вважається, що причиною різноманітності ознаки є певний фактор (фактори), який організують у дослідженні відповідно до прийнятих методів. *Фактор* – це будь-який вплив (температура, час, хімічна речовина, екологічна ситуація та ін.) чи стан організму (стать, вік та ін.), різноманітність якого може впливати на різноманітність результативної ознаки. Ступені дії фактора називаються *градаціями фактора* (різний час дослідження, різні дози речовини, різна температура, різні генотипи тощо). Наявність декількох градацій фактора – необхідна умова щодо проведення дисперсійного аналізу. Вивчаючи вплив хімічної речовини на організм, розглядаються її різні концентрації.

досліджуючи вплив радіації, на об'єкти діють різними дозами випромінювання. Якщо фактором є різна екологічна ситуація, за її градації приймають різні ступені забруднення навколишнього середовища. Вважається, що різні градації фактора неоднаково впливають на ознаку.

За допомогою *однофакторного дисперсійного аналізу* вивчають вплив одного фактора, за допомогою *двофакторного* аналізують вплив двох факторів тощо. Знайдений вплив існує тільки в тих умовах, у яких був організований фактор.

СТАТИСТИЧНИЙ ВПЛИВ ФАКТОРА

За допомогою дисперсійного аналізу вивчають *статистичний вплив* факторів на ознаки. У біології статистичний вплив слід відрізнити від фізіологічного. Якщо фактор узагалі змінює ознаку живого об'єкта, говорять, що він чинить фізіологічну дію. Про статистичний вплив фактора говорять в тих випадках, коли виявляється, що різні його градації неоднаково впливають на ознаку. Про відсутність статистичного впливу фактора свідчить однакова дія на ознаку різних градацій. Статистичний вплив виявляється різноманітності дат, середніх чи різниць. Наприклад, температури 9, 25, 37, 48 °C виявляють сильний статистичний вплив на виживаність личинок розофілі – відсоток особин, що вижили, у цих умовах розрізняється: температури 109, 125, 137 і 148 °C, хоча й виявляють сильний фізіологічний вплив, ніякого статистичного впливу не чинять: при всіх температурах гине однаковий відсоток личинок – 100 %.

У дисперсійному аналізі вивчають три види статистичних впливів: факторіальний, випадковий і загальний. *Факторіальний вплив* – це вплив фактора, що організований і контролюється в дослідженні. На ознаку діють не тільки організовані фактори, але й безліч інших, які не враховуються в дослідженні. Ці фактори називаються *випадковими*, а їхній вплив – *випадковим впливом*. Вони створюють загальний фон, на якому відбувається дослідження. Чим більше факторіальний вплив відрізняється від випадкового впливу, тим статистично більш достовірним вважається дія фактора. Сумарний вплив усіх організованих і неорганізованих факторів називається *загальним впливом*.

ДИСПЕРСІЙНИЙ КОМПЛЕКС

Дисперсійний комплекс являє собою таблицю, у якій окремі спостереження (дати) розподілені за групами відповідно до градацій факторів. Комплекс також включає середні арифметичні дат за кожною градацією – *часткові середні*, і в усьому комплексі – *загальні середні*.

У залежності від числа прийнятих до уваги факторів, дисперсійні комплекси можуть бути *однофакторними*, *двофакторними* тощо. Якщо в усіх градаціях фактора міститься однакова кількість дат, комплекс називається *рівномірним*, якщо неоднакова – *нерівномірним*. Рівномірний комплекс на практиці буває складно організувати, тому що в процесі роботи окремі особини внаслідок випадкових причин (хвороба, загибель) вилучаються з аналізу, і комплекс, що спочатку задуманий як рівномірний, перетворюється на нерівномірний.

При формуванні дисперсійних комплексів необхідно дотримуватися наступних умов: фактори, що діють на ознаку, мають бути незалежні один від одного, а вибірки, що згруповані в статистичний комплекс, повинні формуватися у випадковому порядку. Для складання дисперсійного комплексу потрібно розподілити дати за градаціями. При вивченні *кількісних ознак* у градації заносяться результати виміру – *дати*. При вивченні *якісних ознак* у градації комплексу заносять *загальне число об'єктів*, а також *число об'єктів з досліджуваною ознакою*.

ВАРІАЦІЯ ВСЕРЕДИНІ ДИСПЕРСІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

Розглянемо простий дисперсійний комплекс. Існують три генетично різні лінії пацюків: L, M і N. З кожної лінії у випадковому порядку взято по три пацюки однієї статі та віку. Для кожної тварини фіксувався час проходження лабіринту. Було поставлено задачу визначити вплив спадковості на швидкість виконання цього завдання. Фактором у цьому випадку є спадковість, градаціями фактора – три генетичні лінії, датами – по три проміри в кожній градації. Дисперсійний комплекс – однофакторний рівномірний (табл. 12.1).

Таблиця 12.1. Зразок дисперсійного комплексу

Градация фактора	Дати			Групові середні	Загальна середня
L	7	7	4	$\bar{x}_L = 6$	$\bar{x} = 7$
M	9	10	14	$\bar{x}_M = 11$	
N	6	4	2	$\bar{x}_N = 4$	

Проаналізуємо дати всередині кожної градації (групи) і побачимо, що вони розрізняються. Внутрішньогрупові розходження не пов'язані з породами розходженнями, тому що в межах однієї градації всі паціюки мають одну ж саму спадковість. Середні за кожною групою також розрізняються. Вони відображують міжгрупові розходження. Всі дати групуються навколо загальної середньої з комплексу. Таким чином, усередині дисперсійного комплексу можна виділити три типи варіації:

1. *Внутрішньогрупова варіація.* Всередині кожної вибіркової групи розмі спостереження варіюють навколо вибіркової середньої.
2. *Міжгрупова варіація.* Вибіркові середні варіюють навколо загальної середньої.
3. *Загальна варіація.* Окремі спостереження варіюють навколо загальної середньої.

Якщо міжгрупова різноманітність перевищує внутрішньогрупову, можна говорити про розходження між групами. Якщо міжгрупова різноманітність перевищує внутрішньогрупову, то міжгрупові розходження відсутні.

НУЛЬОВА ГІПОТЕЗА ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Нульова гіпотеза дисперсійного аналізу формулюється таким чином: *фактор не чинить статистичного впливу на ознаку.* Це означає, що різні градації фактора не впливають на *варіацію* ознаки. При цьому фактор може впливати, наприклад, на фізіологічні процеси організму, але при *різних* градаціях фактора відбуваються *однакові* зміни ознаки. Про статистичний вплив фактора говорять у тих випадках, коли виявляється, що різні його градації неоднаково впливають на ознаку.

12. Дисперсійний аналіз

Якщо позначити групи (вибірки) символами А, Б, В, ..., то відповідні генеральні середні будуть позначатися $\mu_A, \mu_B, \mu_C, \dots$. Для виявлення розходжень між вибірками тестується нульова гіпотеза про рівність генеральних середніх: $H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \dots$.

Припустімо, що в нас є три вибірки з десятьма спостереженнями в кожній. Якщо між вибірками немає статистично достовірних розходжень, то нульова гіпотеза $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ є правильною, і розподіл дат у цих трьох групах може виглядати, як на рис. 12.1. Якщо вибірки розрізняються, дані можуть виглядати, як на рис. 12.2, при цьому $\mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C$ – нульова гіпотеза є неправильною.

А	×	×	xxx	μ_A	xx	×	×	×
Б	xx	xx	×	μ_B	xxx	xx		
В	×	xxx	×	μ_B	xx	×	×	×

Рис. 12.1. Розподіл спостережень у трьох групах у разі відсутності розходжень між групами, нульова гіпотеза є правильною, $\mu_A = \mu_B = \mu_C$

А	×	xxx	×	μ_A	xxx	×	×	
Б			×	xx	μ_B	xxxx	xx	×
В		×	xx		xxx	μ_B	xx	×

Рис. 12.2. Розподіл спостережень у трьох групах у разі розходження між групами, нульова гіпотеза є неправильною, $\mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C$

Якщо нульова гіпотеза правильна, $\mu_A = \mu_B = \mu_C$, як у випадку на рис. 12.1, міжгрупова варіація незначно відрізняється від внутрішньогрупової, вірогідних розходжень між групами немає. Коли нульова гіпотеза неправильно, $\mu_A \neq \mu_B \neq \mu_C$ (рис. 12.2), міжгрупова варіація може значно перевищувати внутрішньогрупову.

У ході дисперсійного аналізу обчислюють показники між- та внутрішньогрупового різноманіття. При значному перевищенні міжгрупової варіації над внутрішньогруповою нульова гіпотеза відхиляється.

СТАТИСТИЧНІ КРИТЕРІЇ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

При проведенні дисперсійного аналізу, як і при будь-яких інших видах статистичного аналізу, потрібно з'ясувати, як розподіляється ознака в генеральній сукупності – відповідно до нормального закону чи інакше. Залежності від характеру розподілу застосовуються відповідні методи дисперсійного аналізу та статистичні критерії. Якщо в генеральній сукупності досліджувана ознака розподіляється нормально, адекватним є *параметричний дисперсійний аналіз* (див. п. 12.2). Якщо розподіл аналізованої ознаки в генеральній сукупності відхиляється від нормального закону або характер розподілу не з'ясований, застосовується *непараметричний дисперсійний аналіз* (див. п. 12.4). У параметричному дисперсійному аналізі перевірку статистичної гіпотези проводять за допомогою критерію Фіше-*F*. Якщо використовується непараметричний аналіз, то вибір статистичного критерію залежить від характеру комплексу. Якщо комплекс рівномірний, використовують критерій Фрідмана. У випадку нерівномірного комплексу застосовують критерій Краскла–Уолліса.

ПРИНЦИПИ ПАРАМЕТРИЧНОГО ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Сума квадратів

Сума квадратів SS (від англ. *sums of squares*) дорівнює сумі всіх квадратів відхилень даних від середньої арифметичної: $SS = \sum (x - \bar{x})^2$. У ході дисперсійного аналізу розраховуються такі суми квадратів:

1. *Загальна сума квадратів SS_o* . Характеризує загальну варіацію, враховує відхилення кожної індивідуальної дати від загальної середньої.
2. *Міжгрупова сума квадратів SS_M* . Характеризує варіацію між групами, враховує розходження між кожною груповою середньою і загальною середньою.
3. *Внутрішньогрупова сума квадратів SS_B* . Характеризує внутрішньогрупову варіацію, враховує розходження між кожною індивідуальною датою та її груповою середньою.

На рис. 12.3 бачимо співвідношення між цими величинами: $SS_o = SS_M + SS_B$.

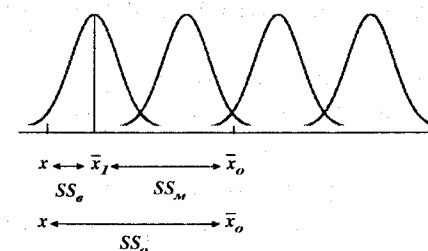


Рис. 12.3. Співвідношення загальної, середньогрупової та міжгрупової сум квадратів (для одного випадку з чотирьох вибірових груп)

Міжгрупова сума квадратів SS_M показує, наскільки далеко відстоїть кожна групова середня від загальної середньої, а також наскільки далеко відстоїть одна від одної групові середні. Рис. 12.4 а показує ситуацію, коли SS_M перевищує відстань між вибірками (між вибірковими середніми), а розкид даних є таким великим, що вибіркові розподіли не перекриваються. На рис. 12.4 б значення SS_M менше. Меншим є й розкид даних серед вибірок, що помітно перекриваються, – інтуїтивно вони видаються більш схожими, ніж на рис. 12.4 а. При цьому обидві частини рис. 12.4 мають однакову внутрішньогрупову суму квадратів SS_B .

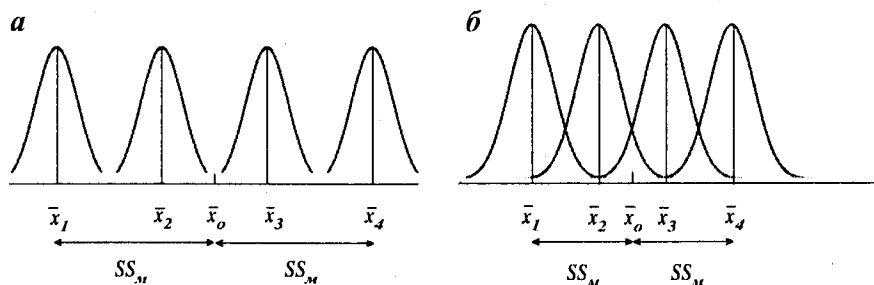


Рис. 12.4. Міжгрупова сума квадратів чотирьох вибірок

Внутрішньогрупова сума квадратів SS_B показує, наскільки далеко відстоїть кожна індивідуальна дата від групової середньої своєї групи. Чим більш гостровершинним є вибірковий розподіл, тим менше SS_B , чим більш плосковершинним є розподіл, тим більше SS_B . Рис. 12.5 ілюструє розходження значень SS_B при постійній SS_M . Вибіркові розподіли на рис. 12.5 а являють собою дуже гостровершинні криві, значення SS_B мале. На рис. 12.5 б

Значення SS_B більше, що відповідає плосковершинній формі розподілів. Чим більше перекриваються гостровершинні розподіли, тим менше SS_B , тим більш імовірно, що вибірки представляють різні генеральні сукупності.

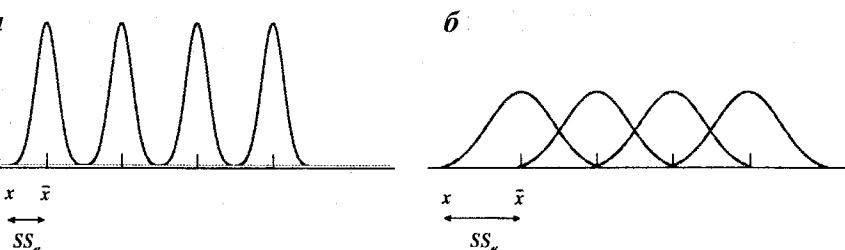


Рис. 12.5. Внутрішньогрупова сума квадратів чотирьох вибірок

Таким чином, вибіркові групи з більшою імовірністю представляють різні генеральні сукупності, коли SS_M відносно велика, а SS_B відносно мала.

Рис. 12.6 демонструє ці відносини. На рис. 12.6 а вибіркові середні відходять далеко, значення SS_M велике.

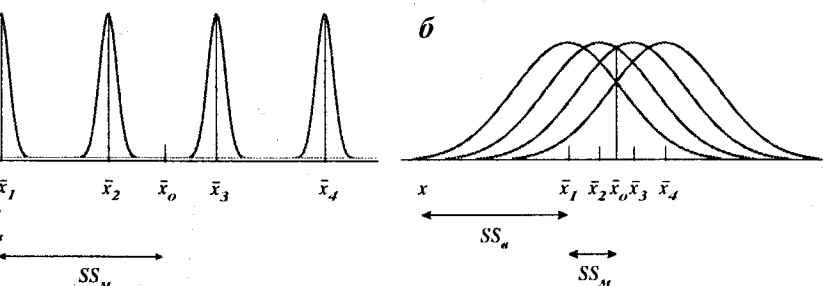


Рис. 12.6. Співвідношення внутрішньогрупової і міжгрупової сум квадратів чотирьох вибірок

Кожний вибірковий розподіл гостровершинний, з маленьким значенням SS_B . Аналіз цих даних, безсумнівно, приведе до відхилення нульової гіпотези й висновку про те, що вибірки належать до різних генеральних сукупностей. На рис. 12.6 б середні вибірових груп близькі, значення SS_M маленьке. Розподіли плосковершинні, з великим значенням SS_B . Аналіз цих даних приведе до висновку, що вибірки належать до однієї генеральної сукупності.

Середній квадрат

Сума квадратів залежить від розміру вибірки: вона збільшується з додаванням дат. Щоб зробити метод нечутливим до розміру вибірки, сума квадратів «усереднюється» – поділяється на значення, що відображає розмір вибірки. Отримана величина називається *середнім квадратом MS* (від англ. *mean square*), або *дисперсією* (s^2), і відображає різноманітність, що припадає на один елемент статистичної свободи. При роботі з вибірками *середній квадрат* розраховують, розподіляючи суму квадратів на число ступенів свободи (df). Якщо *середній квадрат* розраховується для генеральної сукупності, суму квадратів поділяють на загальне число вивчених об'єктів (N). Загальна, міжгрупова та внутрішньогрупова суми квадратів переводяться, відповідно, в загальний, міжгруповий та внутрішньогруповий середні квадрати.

Критерій Фішера

Після розрахунку середніх квадратів розраховується F -критерій, що дорівнює відношенню міжгрупового середнього квадрата до внутрішньогрупового. Чим більше значення F -критерію, тим з більшою ймовірністю може бути відхилена нульова гіпотеза.

12.2. ОДНОФАКТОРНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ КІЛЬКІСНИХ ОЗНАК

НЕЗАЛЕЖНІ ГРУПИ. НЕРІВНОМІРНІ КОМПЛЕКСИ

1. Якщо в градаціях фактора міститься неоднакова кількість дат, виходить нерівномірний дисперсійний комплекс (табл. 12.2).

2. Для кожної градації розраховуємо такі величини:

n_A, \dots – число дат; $\sum x_A, \dots$ – сума дат;

$(\sum x_A)^2, \dots$ – сума дат, що зведена у квадрат;

$\sum x_A^2, \dots$ – сума квадратів дат.

3. Для всього дисперсійного комплексу розраховуємо:

a – число градацій фактора;

N – загальне число дат (обсяг дисперсійного комплексу);

$\sum x$ – загальна сума дат;

$\sum x^2$ – загальна сума квадратів дат.

Таблиця 12.2. Однофакторний нерівномірний дисперсійний комплекс (незалежні вибірки)

	Градації фактора				Загальні суми
	А	Б	...	К	
	x_1	x_1	...	x_1	a = число градацій фактора (від А до К)
	x_2	x_2		x_2	
	x_3	x_3		x_3	
	
	...	x_{n_B}		...	
	
	x_{n_A}			...	
				x_{n_K}	
	n_A	n_B		n_K	$N = n_A + n_B + \dots + n_K$
	$\sum x_A =$ $= x_1 + x_2 + \dots +$ $+ x_{n_A}$	$\sum x_B =$ $= x_1 + x_2 + \dots +$ $+ x_{n_B}$...	$\sum x_K =$ $= x_1 + x_2 + \dots +$ $+ x_{n_K}$	$\sum x = \sum x_A +$ $+ \sum x_B + \dots + \sum x_K$
	$(\sum x_A)^2 =$ $= (x_1 + x_2 +$ $+ \dots + x_{n_A})^2$	$(\sum x_B)^2 =$ $= (x_1 + x_2 +$ $+ \dots + x_{n_B})^2$...	$(\sum x_K)^2 =$ $= (x_1 + x_2 +$ $+ \dots + x_{n_K})^2$	
	$\sum x_A^2 = x_1^2 +$ $+ x_2^2 + \dots + x_{n_A}^2$	$\sum x_B^2 = x_1^2 +$ $+ x_2^2 + \dots + x_{n_B}^2$...	$\sum x_K^2 = x_1^2 +$ $+ x_2^2 + \dots + x_{n_K}^2$	$\sum x^2 = \sum x_A^2 + \sum x_B^2 +$ $+ \dots + \sum x_K^2$

4. Розраховуємо суми квадратів.

Загальна сума квадратів SS_o – показник загальної варіації:

$$SS_o = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}. \quad (12.1)$$

Міжгрупова сума квадратів SS_M – показник міжгрупової, або факторіальної, варіації:

$$SS_M = \left[\frac{(\sum x_A)^2}{n_A} + \frac{(\sum x_B)^2}{n_B} + \dots + \frac{(\sum x_K)^2}{n_K} \right] - \frac{(\sum x)^2}{N}. \quad (12.2)$$

Внутрішньогрупова сума квадратів SS_g – показник внутрішньогрупової, або випадкової, варіації:

$$SS_g = \sum x^2 - \left[\frac{(\sum x_A)^2}{n_A} + \frac{(\sum x_B)^2}{n_B} + \dots + \frac{(\sum x_K)^2}{n_K} \right]. \quad (12.3)$$

Перевірку правильності розрахунків проводимо підсумовуванням:

$$SS_o = SS_M + SS_g. \quad (12.4)$$

5. Визначаємо число ступенів свободи:

$$df_o = N - 1; df_M = a - 1; df_g = N - a. \quad (12.5-12.7)$$

6. Розраховуємо середні квадрати (дисперсії):

$$MS_o = \frac{SS_o}{df_o}; MS_M = \frac{SS_M}{df_M}; MS_g = \frac{SS_g}{df_g}. \quad (12.8-12.10)$$

7. Перевіряємо нульову гіпотезу. Розраховуємо F -критерій (табл. 12.3):

$$F = \frac{MS_M}{MS_g}. \quad (12.11)$$

Таблиця 12.3. Розрахунки вірогідності впливу фактора

Варіювання	SS	df	MS	F	$F_{\text{табл.}}$ ($df_1 = df_M, df_2 = df_g$)
Загальне	SS_o	df_o			
Міжгрупове (факторіальне)	SS_M	df_M	MS_M	$\frac{MS_M}{MS_g}$	$F(p = 0,05)$
Внутрішньогрупове (випадкове)	SS_g	df_g	MS_g		$F(p = 0,01)$

Обчислене значення F -критерію порівнюємо з табличним (табл. 13 Додатка) при $df_1 = df_M = a - 1$, $df_2 = df_g = N - a$. Якщо $F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза відхиляється на відповідному рівні значущості. Якщо $F_{\text{факт.}} < F_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза залишається чинною.

8. Робимо висновок. Якщо нульова гіпотеза відхиляється, робиться висновок, що фактор статистично вірогідно впливає на ознаку. Якщо нульова гіпотеза приймається, вважаємо, що дію фактора не доведено.

Приклад 12.1

Дітей навчали математики трьома різними методами. Для розв'язання завдань про те, який метод ефективніше, у випадковому порядку відібрали декілька учнів із трьох класів з різними методами навчання. Учнім було запропоновано тест, що містить 20 завдань, на виконання якого була відведена одна година. Дані про результати кожного учня наведені в таблиці 12.4. Чи впливає метод навчання на успішність розв'язання задач?

Таблиця 12.4. Ефективність різних методів навчання

Спосіб навчання	Число учнів, що проходили тестування	Число правильних відповідей, що дали учні в кожному тесті
А	4	12, 14, 12, 15
Б	5	5, 7, 3, 8, 4
В	3	7, 9, 9

Розв'язання

Висуваємо нульову гіпотезу: різні методики приводять до однакових результатів тестування, розходження за кількістю балів між учнями з груп А, Б та В – випадкові.

Ознака, що вивчається у цій задачі, – кількість правильно виконаних завдань. Фактор, що діє на ознаку, – метод навчання. Маємо три градації фактора – три методики: А, Б та В. Формуємо дисперсійний комплекс.

1. Дані розподіляємо за градаціями (табл. 12.5). Отриманий дисперсійний комплекс нерівномірний: у різних градаціях неоднакове число дат.

2. Для кожної градації розраховуємо величини:

n_A, \dots – число дат;
 $\sum x_A, \dots$ – сума дат;

$(\sum x_A)^2, \dots$ – сума дат, що зведена у квадрат;
 $\sum x_A^2, \dots$ – сума квадратів дат.

3. Для всього дисперсійного комплексу розраховуємо:

a – число градацій фактора;

N – загальне число дат (обсяг дисперсійного комплексу);

$\sum x$ – загальна сума дат;

$\sum x^2$ – загальна сума квадратів дат.

Таблиця 12.5. Дисперсійний комплекс до прикладу 12.1

№	Градації фактора			Загальні суми
	А	Б	В	
1	12	5	7	$a = 3 (A, B \text{ і } B)$
2	14	7	9	
3	12	3	9	
4	15	8		
5		4		
n	$n_A = 4$	$n_B = 5$	$n_B = 3$	$N = n_A + n_B + n_B = 4 + 5 + 3 = 12$
$\sum x$	$\sum x_A = 12 + 14 + 12 + 15 = 53$	$\sum x_B = 5 + 7 + 3 + 8 + 4 = 27$	$\sum x_B = 7 + 9 + 9 = 25$	$\sum x = \sum x_A + \sum x_B + \sum x_B = 53 + 27 + 25 = 105$
$(\sum x)^2$	$(\sum x_A)^2 = 53^2 = 2809$	$(\sum x_B)^2 = 27^2 = 729$	$(\sum x_B)^2 = 25^2 = 625$	
$\sum x^2$	$\sum x_A^2 = 12^2 + 14^2 + 12^2 + 15^2 = 709$	$\sum x_B^2 = 5^2 + 7^2 + 3^2 + 8^2 + 4^2 = 163$	$\sum x_B^2 = 7^2 + 9^2 + 9^2 = 211$	$\sum x^2 = \sum x_A^2 + \sum x_B^2 + \sum x_B^2 = 709 + 163 + 211 = 1083$

4. Розраховуємо суми квадратів.

Загальна сума квадратів:

$$SS_o = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N} = 1083 - \frac{105^2}{12} = 164,25.$$

Міжгрупова сума квадратів:

$$SS_M = \left[\frac{(\sum x_A)^2}{n_A} + \frac{(\sum x_B)^2}{n_B} + \frac{(\sum x_C)^2}{n_C} \right] - \frac{(\sum x)^2}{N} =$$

$$= \left[\frac{2809}{4} + \frac{729}{5} + \frac{625}{3} \right] - \frac{105^2}{12} = 137,63.$$

Внутрішньогрупова сума квадратів:

$$SS_g = \sum x^2 - \left[\frac{(\sum x_A)^2}{n_A} + \frac{(\sum x_B)^2}{n_B} + \frac{(\sum x_C)^2}{n_C} \right] =$$

$$= 1083 - \left[\frac{2809}{4} + \frac{729}{5} + \frac{625}{3} \right] = 26,62.$$

5. Визначаємо ступені свободи:

$$df_o = N - 1 = 12 - 1 = 11; \quad df_M = a - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$df_g = N - a = 12 - 3 = 9.$$

6. Розраховуємо середні квадрати:

$$MS_o = \frac{SS_o}{df_o} = \frac{164 \cdot 25}{11} = 14,93; \quad MS_M = \frac{SS_M}{df_M} = \frac{137,63}{2} = 68,82;$$

$$MS_g = \frac{SS_g}{df_g} = \frac{26 \cdot 62}{9} = 2,69.$$

7. Перевіряємо нульову гіпотезу. Розраховуємо F -критерій (табл. 12.6):

$$F = \frac{MS_M}{MS_g} = \frac{68,82}{2,69} = 23,25.$$

Таблиця 12.6. Розрахунки вірогідності впливу фактора до прикладу 11.1

Варіювання	SS	df	MS	F	$F_{\text{табл.}} (df_1 = 2, df_2 = 9)$
Загальне	164,25	11			
міжгрупове (факторіальне)	137,63	2	68,82	23,25	4,26 ($p = 0,05$)
внутрішньогрупове (випадкове)	26,62	9	2,69		8,02 ($p = 0,01$)

Розрахований F -критерій порівнюємо з табличним значенням (табл. 13 додатка) при $df_1 = a - 1 = 2$, $df_2 = N - a = 9$.

$$F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}} (p = 0,01).$$

Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Висновок

Використання розглянутих методик навчання приводить до різних результатів тестування.

НЕЗАЛЕЖНІ ГРУПИ. РІВНОМІРНІ КОМПЛЕКСИ

Розрахунки, що виконуються при аналізі рівномірних комплексів, простіші, ніж при аналізі нерівномірних комплексів.

1. Дані, що розподілені за градаціями фактора (табл. 12.7), утворюють рівномірний комплекс – у градаціях міститься однакова кількість дат (n).

Таблиця 12.7. Однофакторний рівномірний дисперсійний комплекс для незалежних груп

№	Градації фактора				Загальні суми
	A	Б	...	К	
1	x_1	x_1	...	x_1	$a = \text{число градацій фактора (від A до K)}$
2	x_2	x_2		x_2	
3	x_3	x_3		x_3	
...	
n	x_n	x_n		x_n	
N	n	n		n	$N = na$
$\sum x$	$\sum x_A = x_1 + \dots + x_n$	$\sum x_B = x_1 + \dots + x_n$		$\sum x_K = x_1 + \dots + x_n$	$\sum x = \sum x_A + \dots + \sum x_K$
$(\sum x)^2$	$(\sum x_A)^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2$	$(\sum x_B)^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2$		$(\sum x_K)^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2$	$\sum (\sum x)^2 = (\sum x_A)^2 + \dots + (\sum x_K)^2$
$\sum x^2$	$\sum x_A^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$\sum x_B^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$		$\sum x_K^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$\sum x^2 = \sum x_A^2 + \dots + \sum x_K^2$

2. Для кожної градації розраховуємо величини:

$\sum x_A, \dots$ – сума дат;

$(\sum x_A)^2, \dots$ – сума дат, що зведена в квадрат;

$\sum x_A^2, \dots$ – сума квадратів дат.

3. Для всього дисперсійного комплексу розраховуємо:

a – число градацій фактора;

N – загальне число дат (обсяг дисперсійного комплексу);

$\sum x$ – загальна сума дат;

$\sum (\sum x)^2$ – сума зведених у квадрат сум дат за градаціями;

$\sum x^2$ – загальна сума квадратів дат.

4. Розраховуємо суми квадратів SS .

Загальна сума квадратів SS_o , показник загальної варіації (12.1):

$$SS_o = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}.$$

Міжгрупова сума квадратів SS_m , показник міжгрупової, або факторіальної, варіації:

$$SS_m = \frac{\sum (\sum x)^2}{n} - \frac{(\sum x)^2}{N}. \quad (12.12)$$

Внутрішньогрупова сума квадратів SS_e , показник внутрішньогрупової, або випадкової, варіації:

$$SS_e = \sum x^2 - \frac{\sum (\sum x)^2}{n}. \quad (12.13)$$

Для перевірки правильності розрахунків можна застосувати співвідношення (12.4):

$$SS_o = SS_m + SS_e.$$

5. Ступені свободи визначаємо за формулами (12.5–12.7):

$$df_o = N - 1; df_m = a - 1; df_e = N - a.$$

6. Розраховуємо середні квадрати (12.8–12.10):

$$MS_o = \frac{SS_o}{df_o}; MS_m = \frac{SS_m}{df_m}; MS_e = \frac{SS_e}{df_e}.$$

7. Перевіряємо нульову гіпотезу. Розраховуємо F -критерій (12.11):

$$F = \frac{MS_m}{MS_e}.$$

Розрахований F -критерій порівнюємо з табличним (табл. 13 Додатка) при $df_1 = df_m = a - 1$, $df_2 = df_e = N - a$. Якщо $F_{\text{факт.}} \geq F_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза відхиляється на відповідному рівні значущості. Якщо $F_{\text{факт.}} < F_{\text{табл.}}$, нульова гіпотеза залишається чинною.

Таблиця 12.8. Оцінка вірогідності впливу фактора

Варіювання	SS	df	MS	F	$F_{\text{табл.}} (df_1 = df_m, df_2 = df_e)$
Загальне	SS_o	df_o			
Міжгрупове (факторіальне)	SS_m	df_m	MS_m	$\frac{MS_m}{MS_e}$	$F (p = 0,05)$
Внутрішньогрупове (випадкове)	SS_e	df_e	MS_e		$F (p = 0,01)$

8. Робимо висновок. Якщо нульова гіпотеза відкинута, то фактор впливає на ознаку. Якщо нульова гіпотеза приймається, вважаємо, що дія фактора не доведена.

Приклад 12.2

Лабораторні пацюки однієї й тієї ж лінії А розрізняються швидкістю виходу з лабіринту. За часом, який кожна особина витрачає на виконання цього завдання, генетики умовно розділили їх на «розумних» та «нерозумних» і проводили добір, схрещуючи найбільш «розумних» та найбільш «нерозумних» між собою. Після декількох поколінь добору були створені ще дві лінії – Р («розумні») та Н («нерозумні»).

Для того щоб з'ясувати, чи була селекція на швидкість виходу з лабіринту ефективною, з кожної лінії у випадковому порядку відібрали по три 6-місячних самці. Самці лінії А знайшли вихід з лабіринту за 7, 7 і 4 хвилини, лінії Н – за 9, 10 і 14 хвилин, лінії Р – за 6, 4 і 2 хвилини. Чи є проведений добір ефективним?

Розв'язання

Висуваємо нульову гіпотезу: добір виявився неефективним, розходження між вибірками з ліній А, Н та Р є випадковими. Проведемо однофакторний дисперсійний аналіз.

$$\text{Загальна сума квадратів: } SS_o = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N} = 547 - \frac{63^2}{9} = 106.$$

Міжгрупова сума квадратів:

$$SS_m = \frac{\sum (\sum x)^2}{n} - \frac{(\sum x)^2}{N} = \frac{1557}{3} - \frac{63^2}{9} = 78.$$

Внутрішньогрупова сума квадратів:

$$SS_e = \sum x^2 - \frac{\sum (\sum x)^2}{n} = 547 - \frac{1557}{3} = 28.$$

Число ступенів свободи:

$$df_o = N - 1 = 9 - 1 = 8;$$

$$df_m = a - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$df_e = N - a = 9 - 3 = 6.$$

Таблиця 12.9. Дисперсійний комплекс до прикладу 12.2

№	Лінії			Загальні суми
	А	Н	Р	
1	7	9	6	$a = 3$
2	4	10	4	
3	7	14	2	
n	3	3	3	$N = 9$
$\sum x$	18	33	12	$\sum x = 63$
$(\sum x)^2$	324	1089	144	$\sum (\sum x)^2 = 1557$
$\sum x^2$	114	377	56	$\sum x^2 = 547$

Середні квадрати:

$$MS_m = \frac{SS_m}{df_m} = \frac{78}{2} = 39;$$

$$MS_e = \frac{SS_e}{df_e} = \frac{28}{6} = 4,67.$$

$$F\text{-критерій: } F = \frac{MS_m}{MS_e} = \frac{39}{4,67} = 8,357.$$

$$F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}} (p = 0,05).$$

Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,05$.

Висновок

Добір виявився ефективним.

ОЦІНКА СИЛИ ВПЛИВУ ФАКТОРА

Якщо вплив фактора доведений, можна оцінити силу його дії. Для цього існує кілька методів.

Метод Плохинського

Сила впливу фактора визначається як частка міжгрупової варіації в загальній варіації ознаки:

$$h^2 = \frac{SS_m}{SS_o}. \quad (12.14)$$

Статистична похибка цього показника визначається за формулою:

$$s_{h^2} = (1 - h^2) \frac{a - 1}{N - a}. \quad (12.15)$$

Критерієм вірогідності показника сили впливу фактора служить його відношення до своєї похибки:

$$F = \frac{h^2}{s_{h^2}}. \quad (12.16)$$

Нульова гіпотеза ($H_0: h^2 = 0$) відхиляється, якщо $F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}}$ при значеннях $df_1 = a - 1$, $df_2 = N - a$.

Метод Снедекора

Сила впливу фактора розраховується за формулою:

$$h^2 = \frac{MS_M - MS_n}{MS_M - MS_n + nMS_n}, \quad (12.17)$$

де n – число членів у градаціях комплексу. У нерівномірних комплексах n визначається за формулою:

$$n = \frac{1}{a-1} \left(N - \frac{n_1^2 + n_2^2 + \dots}{N} \right), \quad (12.18)$$

де n_1, n_2, \dots – число дат в окремих градаціях комплексу.

Вірогідність показника h^2 встановлюється за допомогою F -критерію:

$$F = \frac{MS_M}{MS_n}. \quad (12.19)$$

Нульова гіпотеза ($H_0: h^2 = 0$) відхиляється, якщо $F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}}$ при значеннях $df_1 = a - 1, df_2 = N - a$.

Приклад 12.3

У результаті селекції було створено три лінії пацюків, що розрізняються середньою швидкістю виходу з лабіринту (див. приклад 12.2). У складі кожної лінії особини фенотипово розрізняються. Наскільки розходження швидкості розв'язання задачі визначаються добром?

Розв'язання

Нульова гіпотеза: в генеральній сукупності сила впливу фактора нульова, вибіркова відмінність від нуля є випадковою.

$$df_M = 2;$$

$$df_n = 6.$$

$$MS_M = 39;$$

$$MS_n = 4,67.$$

$$h^2 = \frac{MS_M - MS_n}{MS_M - MS_n + nMS_n} = \frac{39 - 4,67}{39 - 4,67 + 3 \cdot 4,67} = 0,710.$$

$$F = \frac{MS_M}{MS_n} = \frac{39}{4,67} = 8,357.$$

$F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}}$ ($p = 0,05$). Нульова гіпотеза ($H_0: h^2 = 0$) відхиляється на рівні значущості ($p < 0,05$).

Висновок

Сила впливу фактора за Снедекором – 0,71. Розходження у швидкості виходу з лабіринту визначаються добром на 71 %.

ПОРІВНЯННЯ ГРУПОВИХ СЕРЕДНІХ ДИСПЕРСІЙНОГО КОМПЛЕКСУ

Припустімо, за допомогою дисперсійного аналізу доведено статистичний вплив фактора. Фактор уплинув на середній рівень ознаки. При цьому ситуація може складатися по-різному:

$$\mu_A \neq \mu_B \neq \mu_V,$$

$$\text{чи } \mu_A = \mu_B \neq \mu_V,$$

$$\text{чи } \mu_A \neq \mu_B = \mu_V.$$

Для того щоб з'ясувати, середні яких груп дисперсійного комплексу розрізняються, а які – ні, їх попарно порівнюють одна з одною. Для рівновеликих груп використовується метод Тьюкі, для груп рівного або різного обсягу – метод Шеффе.

Метод Тьюкі (для рівновеликих груп)

При порівнянні групових середніх дисперсійного комплексу обчислюється величина *HSD* (*Honestly Significant Difference*):

$$HSD = q \sqrt{\frac{MS_n}{n}}, \quad (12.20)$$

де q – величина, взята з табл. 24 Додатка для обраного рівня значущості p , внутрішньогрупового числа ступенів свободи $df_n = N - a$ і числа груп a (дорівнює числу градацій фактора), MS_n – внутрішньогрупова дисперсія (внутрішньогруповий середній квадрат), n – кількість спостережень у кожній групі.

Обчисливши групові середні, знаходять різницю між ними. Різниця, що перевищує значення *HSD*, вважається вірогідною.

Приклад 12.4

Вивчався вплив тренувань на розмір м'язів у людини. Шістнадцять 20-річних чоловіків були розподілені за чотирма групами: нетреновані,

абко, середньо та інтенсивно треновані. Розміри їхніх біцепсів (у дюймах) введени у табл. 12.10. Необхідно з'ясувати, чи впливає тренування на розмір м'язів, і якщо впливає, то яким чином.

Таблиця 12.10. Розмір біцепсів (у дюймах) 20-річних чоловіків

нетреновані	Слабко треновані	Середньо треновані	Інтенсивно треновані
11	13	16	17
12	13	16	21
11	14	15	19
10	12	17	19

Розв'язання

Для розв'язання цієї проблеми проводимо однофакторний дисперсійний аналіз, у результаті якого перевіряємо нульову гіпотезу про те, що розмір м'язів не залежить від інтенсивності тренувань. Знаходимо показники дисперсійного комплексу: внутрішньогрупова дисперсія $MS_{\text{г}} = 1,17$, число груп $a = 4$, загальне число спостережень $N = 16$, внутрішньогрупове число ступенів свободи $df_{\text{г}} = N - a = 16 - 4 = 12$.

Для порівняння групових середніх за методом Тьюкі визначаємо величину q . Для цього звертаємося до табл. 24 Додатка. Для ступенів свободи $a = 4$, $df_{\text{г}} = 12$ і рівня значущості $p = 0,05$ знаходимо, що $q = 4,20$. Розраховуємо значення HSD :

$$HSD = q \sqrt{\frac{MS_{\text{г}}}{n}} = 4,20 \sqrt{\frac{1,17}{4}} = 2,27.$$

Знаходимо групові середні:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\sum x_1}{n_1} = \frac{44}{4} = 11; & \bar{x}_3 &= \frac{\sum x_3}{n_3} = \frac{64}{4} = 16; \\ \bar{x}_2 &= \frac{\sum x_2}{n_2} = \frac{52}{4} = 13; & \bar{x}_4 &= \frac{\sum x_4}{n_4} = \frac{76}{4} = 19. \end{aligned}$$

Будуємо таблицю, у клітинках якої розміщуємо значення розходжень між середніми. Розходження між груповими середніми вважаються вірогідними, якщо вони перевищують HSD . Такі розходження відзначені зірочками.

Таблиця 12.11. Розходження між груповими середніми

	$\bar{x}_1 = 11$	$\bar{x}_2 = 13$	$\bar{x}_3 = 16$	$\bar{x}_4 = 19$
$\bar{x}_1 = 11$	—	2	5*	8*
$\bar{x}_2 = 13$	2	—	3*	6*
$\bar{x}_3 = 16$	5*	3*	—	3*
$\bar{x}_4 = 19$	8*	6*	3*	—

Висновок

Із розрахунків випливає висновок, що у 20-річних чоловіків зростаючі тренування збільшують розмір біцепсів. Середні розміри біцепсів у нетренованих і слабко тренованих чоловіків не розрізняються.

Метод Шеффе (для груп рівного або різного обсягу)

Критеріями вірогідності розходжень є співвідношення:

$$F = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{MS_{\text{г}}}} \sqrt{\frac{n}{2}} \quad (\text{при } n_1 = n_2); \quad (12.21)$$

$$F = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{MS_{\text{г}}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \quad (\text{при } n_1 \neq n_2). \quad (12.22)$$

Нульова гіпотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$ відхиляється і розходження вважаються вірогідними, якщо $F \geq \sqrt{(a-1) F_{\text{табл.}}}$, де a – число градацій фактора А; $F_{\text{табл.}}$ визначається за табл. 13 Додатка для $df_1 = a - 1$, $df_2 = N - a$. Якщо $F < \sqrt{(a-1) F_{\text{табл.}}}$, нульова гіпотеза приймається і розходження вважаються невірогідними.

12.3. ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ЯКІСНИХ ОЗНАК

Дисперсійний аналіз можна проводити для часток. При побудові дисперсійного комплексу в градації заносять загальне число об'єктів і число об'єктів з досліджуваною ознакою. Сума квадратів частки обчислюється за формулою:

$$SS = np(1 - p), \quad (12.23)$$

$p = \frac{m}{n}$ – частка об'єктів з досліджуваною ознакою, m – число об'єктів із ознакою, n – загальне число об'єктів у градації.

Із цієї формули випливає, що:

$$SS = m - \frac{m^2}{n}. \quad (12.24)$$

Формули для обчислення сум квадратів для часток:

$$\text{міжгрупова: } SS_M = \left(\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2} + \dots \right) - \frac{m^2}{N}, \quad (12.25)$$

$$\text{внутрішньогрупова: } SS_n = m - \left(\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2} + \dots \right), \quad (12.26)$$

N – загальна кількість об'єктів у дисперсійному комплексі, n_1, n_2, \dots – кількість об'єктів у першій, другій і наступних градаціях, m – загальна кількість об'єктів з певною ознакою, m_1, m_2, \dots – кількість об'єктів із цією ознакою в першій, другій і наступних градаціях.

З обчисленими сумами квадратів (SS) роблять ті ж дії, що й при дисперсійному аналізі кількісних ознак. Розрахувавши ступені свободи, знаходять факторіальні, випадкові та загальні середні квадрати, обчислюють статистичний критерій, показник сили впливу.

Приклад 12.5

Дослідники з'ясовували, чи впливає на схожість насіння тривалість його зберігання. Для цього партію насіння помістили у сховище і протягом п'яти років пророщували по кілька десятків. Дані про схожість подані в таблиці 12.12. Чи позначається тривалість зберігання насіння на їхній схожості?

Таблиця 12.12. Схожість насіння в залежності від тривалості зберігання

Рік	1	2	3	4	5
Посаджено	120	150	145	119	125
Проросло	117	145	129	97	86

Розв'язання

Нульова гіпотеза: схожість насіння не залежить від тривалості їхнього зберігання. Перевіримо нульову гіпотезу за допомогою дисперсійного аналізу. Виконуємо розрахунки.

$$m = 117 + 145 + 129 + 97 + 86 = 574.$$

$$N = 120 + 150 + 145 + 119 + 125 = 659.$$

$$SS_M = \left(\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2} + \dots \right) - \frac{m^2}{N} = \left(\frac{117^2}{120} + \frac{145^2}{150} + \frac{129^2}{145} + \frac{97^2}{119} + \frac{86^2}{125} \right) - \frac{574^2}{659} = 7,279;$$

$$SS_n = m - \left(\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2} + \dots \right) = 574 - \left(\frac{117^2}{120} + \frac{145^2}{150} + \frac{129^2}{145} + \frac{97^2}{119} + \frac{86^2}{125} \right) = 66,758;$$

$$df_M = a - 1 = 5 - 1 = 4; \quad df_n = N - a = 659 - 5 = 654;$$

$$MS_M = \frac{SS_M}{df_M} = \frac{7,279}{4} = 1,820; \quad MS_n = \frac{SS_n}{df_n} = \frac{66,758}{654} = 0,102;$$

$$F = \frac{MS_M}{MS_n} = \frac{1,820}{0,102} = 17,843.$$

$F_{\text{факт.}} > F_{\text{табл.}}$ ($p = 0,001$). Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,001$.

Висновок

Тривалість зберігання змінює схожість не тільки дослідженої партії насіння, але й усього насіння вивченого виду рослин.

2.4. НЕПАРАМЕТРИЧНИЙ ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Для вивчення ознак з невідомим характером розподілу чи розподілом, що не відповідає нормальному закону, застосовують непараметричні методи дисперсійного аналізу, при цьому фактичні дати замінюють на ранги. Звичайно непараметричний дисперсійний аналіз використовують за наявності численних вибірок.

НЕЗАЛЕЖНІ ГРУПИ. РІВНОМІРНІ Й НЕРІВНОМІРНІ КОМПЛЕКСИ

Критерій Краскла–Уолліса H

Непараметричний критерій Краскла–Уолліса H застосовується для порівняння декількох незалежних груп. Тест із використанням цього критерію є непараметричною альтернативою до однофакторного дисперсійного аналізу. Він являє собою розширення тесту U Уїлкоксона (Манна–Уїтні) (див. п. 9.3) більше, ніж на дві незалежні групи. Критерій оцінює загальну площу перехресних зон при зіставленні вибірок. Якщо спільна зона мала, відхилення вірогідні. Якщо велика – розходжень немає.

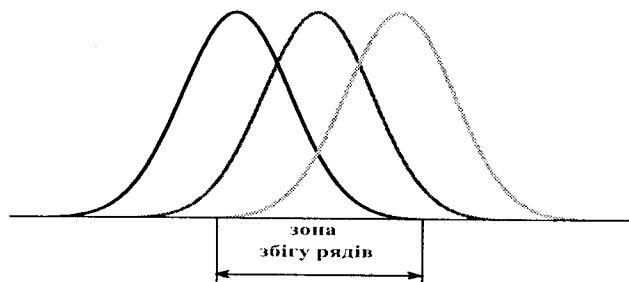


Рис. 12.7 Критерій Краскла–Уолліса оцінює зону збігу рядів

Порівнювані групи можуть містити як однакове, так і неоднакове число дат – складати рівномірний чи нерівномірний комплекс. У кожній групі має бути не менше трьох спостережень ($n \geq 3$).

Нульова гіпотеза формулюється так: вибірки належать до однієї генеральної сукупності.

Зіставлення груп з використанням критерію Краскла–Уолліса виконується таким чином:

1. Усі дати з a груп ранжуються в загальний ряд, після чого ранги, що відповідають певним значенням ознаки, повертаються у вихідні групи.

2. Розраховується критерій Краскла–Уолліса H :

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{(\sum R_i)^2}{n_i} - 3(N+1), \quad (12.27)$$

де $\sum R_i$ – сума рангів у i -ї вибірці, n_i – кількість дат у i -ї вибірці, N – загальна кількість дат (обсяг комплексу): $N = n_1 + n_2 + \dots + n_a$.

3. Фактичний H -критерій порівнюють з табличним (табл. 25 Додатка). Нульову гіпотезу відхиляють, якщо $H_{\text{факт.}} \geq H_{\text{табл.}}$, і залишають як чинну, якщо $H_{\text{факт.}} < H_{\text{табл.}}$.

Якщо $a > 3$ і $n > 4$, значення критерію Краскла–Уолліса H наближається до значення критерію χ^2 , тому значення $H_{\text{факт.}}$ можна порівнювати з табличним значенням χ^2 при числі ступенів свободи $df = a - 1$, де a – число градацій у дисперсійному комплексі. Нульову гіпотезу про рівність розподілів відхиляють при $H_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{табл.}}$.

Приклад 12.6

У дослідженнях на лабораторних гризунах з'ясовували, чи залежить ставлення до алкоголю від спадковості. З трьох ліній пацюків – L, S і R – було відібрано по п'ять шестимісячних самців. У клітки було поміщено по чотири поїлки, що містили різні концентрації етилового спирту (табл. 12.13). Оцінювали, яким поїлкам віддають перевагу тварини в умовах вільного вибору (табл. 12.14). Чи залежить вибір поїлки від приналежності тварини до тієї чи іншої генетичної лінії?

Таблиця 12.13. Вміст етилового спирту в поїлках

№ поїлки	Концентрація етилового спирту, %
1	0,0
2	1,0
3	2,5
4	5,0

Таблиця 12.14. Вибір поїлок пацоками різних ліній

Лінія	Поїлки
L	4, 4, 4, 3, 4
S	1, 1, 2, 3, 2
R	3, 3, 4, 2, 2

Розв'язання

Для розв'язання задачі застосуємо критерій Краскла–Уолліса. Впорядкуємо вибірки за зростанням і ранжуємо їх у загальний ряд (правила ранжування див. у п. 2.3). Ранги, що відносяться до кожної вибірки, підсумовуємо (д. 12.15).

Таблиця 12.15. Розрахунки до прикладу 12.6

x_L	x_S	x_R	R_L	R_S	R_R
	1			1,5	
	1			1,5	
	2			4,5	
	2			4,5	
		2			4,5
		2			4,5
3			8,5		
	3			8,5	
		3			8,5
		3			8,5
4			13		
4			13		
4			13		
4			13		
		4			13
$\sum R_L = 60,5$			$\sum R_S = 20,5$	$\sum R_R = 39$	

Розраховуємо критерій Краскла–Уолліса (12.27):

$$H = \frac{12}{15(15+1)} \left(\frac{60,5^2}{5} + \frac{20,5^2}{5} + \frac{39^2}{5} \right) - 3(15+1) = 8,015.$$

$H_{\text{факт.}} > H_{\text{табл.}}$ при $p = 0,01$ (табл. 25 Додатка). Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Висновок

Ставлення пацюків до алкоголю залежить від генетичної лінії.

ЗАЛЕЖНІ ГРУПИ. РІВНОМІРНІ КОМПЛЕКСИ

Критерій Фрідмана χ_r^2

Непараметричний критерій Фрідмана χ_r^2 застосовується для порівняння декількох залежних груп. Така ситуація складатиметься при зіставленні показників, що отримані на одній і тій самій групі об'єктів у більш ніж двох умовах спостереження. Метод із використанням критерію χ_r^2 називається ранговим дисперсійним аналізом Фрідмана. Цей тест – розширення тесту Уїлкоксона T (див. п. 9.3) на більше ніж дві групи. Порівнювані групи повинні містити однакову кількість дат. Для проведення тесту необхідно не менше трьох груп ($a \geq 3$), у кожній групі має бути не менше двох дат ($n \geq 2$).

Нульова гіпотеза: розходження в розподілах дат у генеральних сукупностях, що відповідають умовам спостереження, відсутні. Групи зіставляються з використанням критерію Фрідмана у такому порядку:

1. Дати, що отримані при вимірюванні одного об'єкта в різних умовах (1, 2, ..., a градації), послідовно ранжують окремо від дат, що отримані при вимірюванні інших об'єктів.

2. Ранги підсумовують у межах кожної градації і знаходять значення критерію Фрідмана:

$$\chi_r^2 = \left[\frac{12}{na(a+1)} \cdot \sum (\sum R_i)^2 \right] - 3n(a+1), \quad (12.28)$$

де a – число градацій комплексу, n – кількість дат у кожній градації, $\sum R_i$ – сума рангів у кожній градації.

3. Обчислений $\chi^2_{\text{факт.}}$ порівнюється з табличним. Критичні значення $\chi^2_{\text{крит.}}$ беруться з табл. 26 Додатка. При $\chi^2_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{крит.}}$ нульова гіпотеза відхиляється. При більшій кількості даних ($n \geq 10$ при $a = 3$ і $n \geq 5$ при $a = 4$) обчислене $\chi^2_{\text{факт.}}$ наближається до χ^2 , тому $\chi^2_{\text{факт.}}$ можна порівнювати з критичними значеннями критерію χ^2 (табл. 19 Додатка) для ступенів свободи $df = a - 1$, де a – число градацій у дисперсійному комплексі. Нульова гіпотеза про відсутність розходжень відхиляється при $\chi^2_{\text{факт.}} \geq \chi^2_{\text{крит.}}$.

Приклад 12.7

Для контрольної роботи необхідно відібрати три задачі однакового ступеня складності. Критерієм складності був час, що витрачається на розв'язання. Декілька задач було запропоновано групі з 10 осіб. Вимірювався час, що витрачається на розв'язання кожної задачі (табл. 12.16). Чи однакові ці задачі за складністю?

Таблиця 12.16. Час розв'язання задач

№ задачі	Випробувані									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	25	15	19	20	19	20	20	21	57
2	17	16	18	17	18	18	14	21	35	11
3	15	14	16	15	15	16	12	14	16	31

Розв'язання

Нульова гіпотеза: на розв'язання кожної задачі в середньому витрачається однаковий час – задачі однаково складні.

Перевіримо нульову гіпотезу за допомогою критерію Фрідмана. Ранжимо показники часу виконання завдання для кожного з випробуваних. Для кожного з рядків (21, 17, 15) надаємо ранги R (3, 2, 1). Потім порівнюємо ці ранги з датами інших рядків (табл. 12.17).

$$\chi^2_r = \left[\frac{12}{10 \cdot 3(3+1)} \cdot (26^2 + 22^2 + 12^2) \right] - 3 \cdot 10(3+1) = 10,4.$$

Таблиця 12.17. Розрахунки до прикладу 12.7

x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3
21	17	15	3	2	1
25	16	14	3	2	1
15	18	16	1	3	2
19	17	15	3	2	1
20	18	15	3	2	1
19	18	16	3	2	1
20	14	12	3	2	1
20	21	14	2	3	1
21	35	16	2	3	1
57	11	31	3	1	2
			$\sum R_1 = 26$	$\sum R_2 = 22$	$\sum R_3 = 12$

$$\chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{крит.}} \text{ при } p = 0,01.$$

$$df = a - 1 = 3 - 1 = 2, \chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{крит.}} \text{ при } p = 0,01.$$

Нульова гіпотеза відхиляється на рівні значущості $p < 0,01$.

Висновок

Задачі статистично вірогідно розрізняються за складністю.

НЕПАРАМЕТРИЧНИЙ ПОКАЗНИК СИЛИ ВПЛИВУ ФАКТОРА

Для обчислення непараметричного показника сили впливу фактора дати ранжують. Непараметричний показник сили впливу η^2 розраховується за формулою:

$$\eta^2 = \frac{C_{\phi}}{C_o}, \quad (12.29)$$

де C_{ϕ} – факторіальна дисперсія, C_o – загальна дисперсія.

Загальна дисперсія:

$$C_o = \frac{(N-1)N(N+1)}{12}, \quad (12.30)$$

де N – загальне число дат у комплексі.

Факторіальна дисперсія:

$$C_{\phi} = \sum H_i - H_{\Sigma}, \quad (12.31)$$

$H_i = \frac{(\sum R)^2}{n}$ – часткові поправки за градаціями, $H_{\Sigma} = \frac{N(N+1)^2}{4}$ – загальна поправка, R – ранги,

Статистична похибка показника сили впливу фактора S_{η^2} розраховується за формулою:

$$s_{\eta^2} = \frac{(1-\eta^2)(a-1)}{N-a}, \quad (12.32)$$

a – число градацій комплексу, N – загальне число дат у комплексі.

Вірогідність показника сили впливу фактора оцінюють за допомогою критерію F при значеннях числа ступенів свободи $df_1 = a - 1$, $df_2 = N - a$:

$$F = \frac{\eta^2}{s_{\eta^2}}. \quad (12.33)$$

Вірогідність показника сили впливу фактора можна також оцінити за допомогою критерію χ^2 при $df = a - 1$:

$$\chi^2 = (N-1)\eta^2, \quad (12.34)$$

$$\text{або } \chi^2 = \frac{12 \sum H_i}{N(N+1)} - 3(N+1). \quad (12.35)$$

Приклад 12.8

Користуючись даними з прикладу 12.7, необхідно оцінити силу впливу метричної лінії пацюка на вибір поїлки.

Розв'язання

Загальна дисперсія (12.30):

$$C_o = \frac{(N-1)N(N+1)}{12} = \frac{(15-1)15(15+1)}{12} = 280.$$

Факторіальна дисперсія (12.31):

$$C_{\phi} = \left(\frac{60,5^2}{5} + \frac{20,5^2}{5} + \frac{39^2}{5} \right) - \frac{15(15+1)^2}{4} = 160,3.$$

Показник сили впливу (12.29):

$$\eta^2 = \frac{C_{\phi}}{C_o} = \frac{160,3}{280} = 0,573.$$

Оцінимо вірогідність показника η^2 за допомогою критерію χ^2 (12.34):

$$\chi^2 = (N-1)\eta^2 = 0,573(15-1) = 8,022;$$

$$df = a - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$\chi^2_{\text{факт.}} > \chi^2_{\text{табл.}}$ при $p = 0,05$. Вплив фактора вірогідний.

Висновок

Показник сили впливу фактора спадковості дорівнює 0,573.

12.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Поясніть принципи параметричного дисперсійного аналізу.
2. Сформулюйте та поясніть нульову гіпотезу дисперсійного аналізу.
3. У яких випадках застосовуються критерії Краскла–Уолліса та Фрідмана?
4. Порівнювали ефективність чотирьох методів навчання арифметики школярів молодших класів. Клас з 40 школярів поділили на 4 групи по 10 дітей. В кожній групі викладання вели одним з методів. Результати перевірного тесту наведені в таблиці.

Метод навчання			
А	Б	В	Г
$n_A = 10$	$n_B = 10$	$n_B = 10$	$n_{\Gamma} = 10$
$\sum x_A = 242$	$\sum x_B = 295$	$\sum x_B = 331$	$\sum x_{\Gamma} = 264$
$\sum x^2_A = 6384$	$\sum x^2_B = 9064$	$\sum x^2_B = 11395$	$\sum x^2_{\Gamma} = 7270$

Порівняйте методи. Сформулюйте нульову гіпотезу. Розрахуйте суми квадратів, виконайте F -тест ($p = 0,05$). Наведіть результати в загальній таблиці. Зробіть висновок. Якщо одержите достовірні результати, використайте тест Тьюкі.

5. Випадковим чином були взяті 5 зразків крові кожної групи системи АВ0. Вміст лейкоцитів (тис.) був таким:

Групи крові			
А	В	АВ	О
5,0	7,0	7,0	5,3
5,5	8,0	7,1	8,0
8,0	5,0	9,0	6,7
7,7	9,9	9,2	9,3
10,0	6,3	7,7	6,7

Чи впливає група крові на вміст лейкоцитів?

Сформулюйте нульову гіпотезу. Побудуйте дисперсійний комплекс. Визначте достовірність дії фактора. Зробіть висновок.

Спостерігачі в трьох суспільствах запитали жителів, чи необхідно регулювати розмір родини та планувати народжуваність (наприклад, застосовувати засоби контрацепції, практикувати аборти). Результати опитувань наведені у таблиці.

	Відношення респондентів до планування розміру родини		
	Необхідно	Можна за обставинами	Не можна
Число дітей в родині	0, 1, 3, 4, 2, 1,	10, 5, 7, 3, 9, 8, 7,	17, 10, 9, 3, 15,
Відсоток респондентів	3, 0, 1, 2	9, 10, 9	10, 11, 10, 9, 8

Визначте, чи вірогідні розходження за числом дітей в групах з різним відношенням до планування родини. Сформулюйте нульову гіпотезу. Побудуйте дисперсійний комплекс. Визначте вірогідність дії фактору. Порівняйте групові середні. Зробіть висновок.

7. У таблиці наведено результати тестування з математики учнів чотирьох шкіл. Чи залежить успішність навчання математики від школи? Застосовуйте критерій Краскла–Уолліса.

Школа	Бали з математики
1	56, 77, 49, 84, 69, 70, 44, 91, 66
2	33, 86, 74, 21, 88, 69
3	77, 86, 59, 96, 98, 86, 79, 94
4	32, 48, 54, 43, 29, 33

8. У таблиці наведено бали з різних навчальних предметів, які були одержані п'ятьма учнями. Чи залежить шкільна успішність від виду предмета? Застосовуйте критерій Фрідмана.

Учень	Предмет		
	Історія	Географія	Біологія
А	96	68	115
Б	128	124	149
В	83	132	166
Г	61	135	147
Д	101	109	120

Статистика є міцним інструментом наукового аналізу, однак не варто перебільшувати її можливості. Статистика не може замінити логіку і здозирний глузд, вона не розв'язує конкретних наукових проблем, а тільки допомагає це робити. Наукові висновки повинні спиратися на результати статистичного аналізу, але не обмежуватися ними. Розгляньмо це на конкретних прикладах.

Приклад 13.1

Чи належить до групи даних про масу новонароджених дітей дата в'їзду в країну? Статистика покаже, що належить, хоча насправді зважений об'єкт може бути не новонародженою дитиною, а п'ятирічною кішкою.

Приклад 13.2

Відомство охорони порядку наводить таку статистику: 30 % правопорушень здійснюються представниками конкретної етнічної групи, що проживають в регіоні. Ця цифра після оголошення засобами масової інформації певним чином орієнтує свідомість населення. Якби при цьому було встановлено, що етнічна група складає 35 % населення, то перша цифра приймалася б зовсім інакше.

Приклад 13.3

В 11 % дітей, що проживають в екологічно неблагополучній зоні, збільшена щитоподібна залоза, у 8 % відзначені порушення в розвитку кістяка, 5 % діагностовані різні нервові хвороби. Ці дані вражають і змушують

населення емігрувати, однак фахівець поставить питання про аналогічні показники в екологічно благополучному районі. Виникає проблема порівнянності контрольного дослідження. Населенню екологічно неблагополучного району приділяють особливу увагу, тому для його медичного обстеження направляють найбільш кваліфікованих фахівців і краще діагностичне устаткування. Якщо як контроль використовують результати раніше проведених досліджень цього ж регіону ще до того, як він став екологічно неблагополучним і не привертав особливої уваги, то висновки не будуть відповідати реальності. Неадекватним контролем можуть виявитися дані по інших районах, а також дані за інші роки. Правильною буде така контрольна група, яку зібрали ті ж дослідники такими ж методами.

Приклад 13.4

Після техногенної катастрофи з'явилася інформація про те, що в забрудненій зоні в сільськогосподарських тварин підвищилася частота вроджених вад розвитку. У рік, що передус катастрофі, вона складала 0,12 %, а через рік після катастрофи підвищилася до 0,41 %. Аналіз племінних книг за попередні 20 років показав, що частота аномалій серед новонароджених тварин міняється щорічно, і на графіку (рис. 13.1) являє собою ламану лінію. Виявляється, що висновок залежить від того, який рік взяти за контрольний.

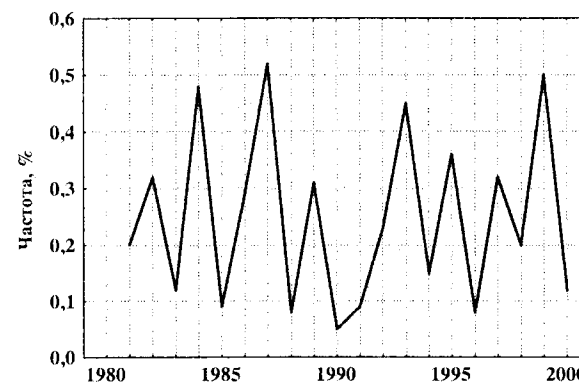


Рис. 13.1. Динаміка частоти вроджених аномалій у сільськогосподарських тварин

Приклад 13.5

У газетній статті повідомлялося, що учасниками дорожньо-транспортних пригод найчастіше стають люди – Тельці за гороскопом. Цей висновок зроблений при аналізі даних автоінспекції. Інформація наводилася як доказ того, що знаки зодіаку впливають на долю людини.

Однак відомо, що народжуваність у людини має сезонні коливання (рис. 2.11). Один з піків народжуваності припадає на кінець весни, а цей період відповідає знаку Тельця. Таким чином, серед інших знаків зодіаку Тельці – найбільш численні. Серед постраждалих в аваріях вони виявляються частіше, тому що їх узагалі більше.

Приклад 13.6

З'явилося повідомлення про те, що люди, які п'ють багато кави, рідше хворіють на цукровий діабет. Автори повідомлення посилаються на те, що дослідження проведене на великій групі людей і результат статистично достовірний. На основі цього факту дається порада: для профілактики цукрового діабету треба пити більше кави.

Однак, у дійсності, виявлена лише статистична асоціація, а не причинно-наслідковий зв'язок. Можливо, люди, які мають спадково обумовлену потребу в каві, через генетичні же причини стійкі до захворювання на цукровий діабет.

Приклад 13.7

Факультетська комісія з боротьби з палінням відзначила: студенти, які курять, статистично вірогідно гірше вчаться, ніж ті, що не палять. Комісія дійшла висновку, що паління погано впливає на успішність.

Однак, можливо, не паління є причиною поганої успішності. Студент може погано вчитися з інших причин, а провали на іспитах викликають додаткову напругу, яку студент намагається послабити палінням.

Приклад 13.8

Чи потрібно проводити постійний контроль знань, щоб підвищити успішність студентів? Цим питанням зацікавилася методична комісія

факультету. Одні викладачі вважають, що щотижневі контрольні роботи – корисні. Вони вважають, що при такому контролі студенти постійно повторюють предмет, і це поліпшує знання. Інші викладачі вважають, що часте тестування шкідливе, тому що постійне очікування контролю викликає у студентів стрес, і вони гірше засвоюють навчальний матеріал.

Студентам надали можливість самостійно вибрати режим занять протягом семестру. Аналіз результатів сесії показав, що студенти, які щотижня здавали тести, краще здали іспити. Різниця виявилася статистично вірогідною. На перший погляд здається, що постійний контроль підвищує успішність, тому що стимулює студентів.

Згадаємо, однак, що студенти самі вирішували, проходити тестування чи ні. Можливо, більш здатні студенти вибрали постійний контроль, тому що взагалі люблять учитися. А, може, викладач, виставляючи оцінку на іспиті, прихильніше поставився до студентів, з якими він спілкувався протягом семестру?

Приклад 13.9

Вивчали вплив деякого фактора на ознаку. Виявилось, що середні арифметичні в контрольній та експериментальній групах майже не відрізняються (табл. 13.1).

Таблиця 13.1. Розрахунки до прикладу 13.9

Група	Дати	n	\bar{x}	s	$s_{\bar{x}}$
Контроль	18, 16, 20, 17, 15	5	17,2	1,9	0,9
Дослід	29, 9, 8, 32, 16	5	18,8	11,2	5,0

Із цього можна дійти висновку, що фактор не вплинув на ознаку. Середні арифметичні приховують сутність явища. В експериментальній групі показник різноманіття вищий, ніж у контрольній. Можна дійти висновку, що особини з різними генотипами неоднаково відреагували на діючий фактор: в одних значення ознаки збільшилися, в інших – зменшилися.

Приклад 13.10

Аналіз деяких ознак пов'язаний із втратою об'єкта. Вивчали вплив нішнього фактора на вагу залози внутрішньої секреції в гризунів. випадковому порядку в експериментальну та контрольну групи відібрали п'ять тварин однієї породи, статі та віку. Після забивання тварин жили залози (табл. 13.2). Чи впливає фактор на вагу залози?

Таблиця 13.2. Розрахунки до прикладу 13.10

	Дати	n	\bar{x}	s	$s_{\bar{x}}$
Контроль	10, 35, 15, 48, 60	5	33,6	21,3	9,5
Експеримент	64, 18, 39, 9, 48	5	35,6	22,3	10,0

Формально, статистичні розрахунки показують, що вплив фактора на вагу залози відсутній – середні арифметичні та показники різноманітності груп не відрізняються. Чи означає це, що досліджуваний фактор не мав фізіологічної дії на вагу залози? Можливо, що у тварин з низькою вагою залози вона під впливом досліджуваного фактора збільшилася. У інших, з великою вагою – зменшилася. При цьому середнє арифметичне не змінилося, зберігся також і рівень різноманітності об'єкта в групі. Цей приклад свідчить про недоліки роботи на незалежних вибірках. Для одержання відповіді можна одержати при роботі на залежних вибірках.

Приклад 13.11

Вивчали працездатність школярів вранці та ввечері. Дітям пропонувалися однотипні завдання, і враховувався час, який вони витрачали на виконання роботи (табл. 13.3). Аналіз показав, що ввечері на виконання завдання діти в середньому витрачають більше часу (49,6 с), ніж вранці (42,4 с). Результат цілком зрозумілий: діти до вечора втомлюються. Показники різноманітності в групах розрізняються незначно. Якби вибірки були незалежними, ніякої іншої інформації не можна було б одержати. Кількі дослідження проведене на одній групі дітей, для кожної дитини зроблено два проміри.

Таблиця 13.3. Працездатність школярів

Об'єкт	Швидкість виконання завдання, с	
	Уранці	Увечері
1	62	30
2	29	71
3	45	52
4	58	26
5	18	69
Показник		
n	5	5
\bar{x}	42,4	49,6
s	18,8	21,1
$s_{\bar{x}}$	8,4	9,4

Індивідуальний аналіз швидкості виконання тесту в кожній дитині виявив таке. У першого і четвертого школярів продуктивність увечері підвищилася, а в інших – знизилася. Доходимо висновку, що група дітей неоднорідна: одні краще працюють вранці, інші – ввечері. Людей з високою активністю зранку називають «жайворонами», а з підвищеною активністю ввечері – «совами». За цією ознакою розподілимо випробуваних на групи і проведемо повторний аналіз (табл. 13.4).

Таблиця 13.4. Розрахунки до прикладу 13.11

Показник	«Сови»		«Жайворони»	
	Уранці	Увечері	Уранці	Увечері
n	2	2	3	3
\bar{x}	60,0	28,0	30,7	64,0
s	2,8	2,8	13,6	10,4
$s_{\bar{x}}$	2,0	2,0	7,9	6,0

Бачимо, що діти, які виконують тест вранці приблизно за 60 с, увечері виконують ту ж роботу в два рази швидше. Діти, які виконують завдання вранці у середньому за 30 с, увечері працюють повільніше. Показник різниці свідчить про те, що група «жайворонів» більш гетерогенна, ніж група «сов». Розглянувши її уважніше, виявляємо, що третій школяр за швидкістю виконання завдання вранці займає проміжне положення між першими й «жайворонами», а ввечері його активність змінюється приблизно на 15 %, але не у 2–3 рази, як в інших дітей. Якщо вилучити цього школяра з групи «жайворонів», до якої його було віднесено за типом зміни активності, то вона стане більш однорідною (вранці: $\bar{x} = 23,5$, $s_{\bar{x}} = 7,8$; увечері: $\bar{x} = 70,0$, $s_{\bar{x}} = 1,4$).

Приклад 13.12

Повернімося до прикладу 11.1 (див. п. 11.2). Зрозуміло, що чим більше часу працює, тим вищою є його оцінка. Оскільки кількість годин занять прямо корелює з балами, може бути запропонований простий адміністративний шлях розв'язати проблему успішності – збільшити кількість годин занять. За допомогою рівняння регресії, яке отримане в прикладі 11.1, можна розрахувати, скільки годин на тиждень необхідно займатися, щоб отримати бажану оцінку. Розрахунок, виконаний у дослідженій зоні знавства, називається *інтерполяцією*. Ми можемо продовжити лінію регресії за межі вивченої зони (пунктир на рис. 13.2 а). Розрахунок, виконаний за межами дослідженої зони, називається *екстраполяцією*.

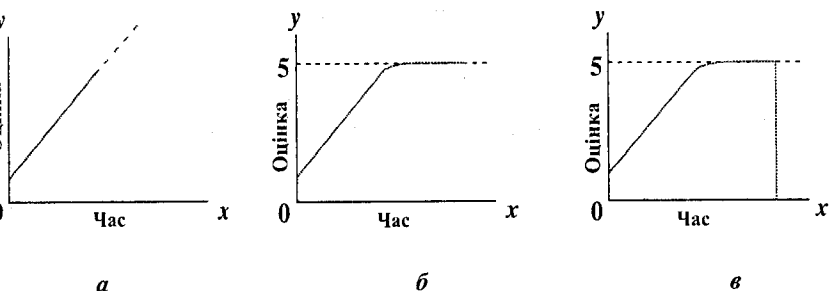


Рис. 13.2. Лінія регресії «Залежність оцінки від тривалості занять»
(до прикладів 11.1, 13.12)

До оцінок, які отримані в результаті екстраполяції, слід ставитися обережно, тому що поза вивченими межами форма графіка може змінюватися. Так, якщо довести час занять до 100 годин на тиждень, то теоретично студент може одержати 7,34 бала. Але якщо атестація проводиться за п'ятибальною системою, то вивчена в прикладі 11.1 залежність буде виглядати як на рис.13.2 б. З якогось моменту збільшення часу занять не буде позначатися на оцінці – вона буде максимальною: дорівнювати 5 балам. Але й ця залежність не може продовжуватися до нескінченності через обмеження по шкалі часу – в тиждні не може бути більше 168 годин. Також виникає питання: а чи не трапиться так, що студенти, які працюють цілодобово, взагалі не одержать ніяких балів (рис.13.2 в), тому що опиняться в неврологічній клініці? Чи не буде ця ситуація нагадувати відомий софізм: «Чим більше ми вчимося, тим більше ми знаємо; чим більше знаємо, тим більше забуваємо; чим більше забуваємо, тим менше знаємо; чим менше знаємо, тим менше забуваємо; чим менше забуваємо, тим більше знаємо. Тож навіщо вчитися?»

* * *

Ці приклади свідчать про те, що очевидні, на перший погляд, відповіді на питання – не завжди правильні. Для того щоб розв'язати ці проблеми, необхідно організувати й провести спеціальні дослідження.

ПІСЛЯМОВА

Розділи цього підручника присвячені класичним методам біологічної статистики. Вони стосуються ситуацій, за якими аналізується мінливість окремих ознак. Більш складні види статистичного аналізу дозволяють аналізувати мінливість не однієї ознаки, а цілих комплексів ознак. Такими методами багатомірної статистики, що виникли внаслідок подальшого розвитку кореляційного аналізу.

Один із цих методів – *множинна регресія* – стисло розглянуто в цьому підручнику. Його завдання – аналіз кореляції однієї ознаки з набором інших ознак.

Для виявлення кореляцій серед набору ознак використовують *компонентний* і *факторний аналізи*. Ці методи застосовуються, коли необхідно зменшити число ознак або класифікувати їх. Наприклад, виділити головні типи факторів навколишнього середовища, що визначають розселення біологічного виду.

Дискримінантний аналіз дозволяє оптимально визначити приналежність спостереження або групи спостережень до однієї з декількох сукупностей. Наприклад, на підставі ряду промірів віднести викопні кісткові залишки до одного з антропологічних варіантів, або встановити, які особливості анамнезу точніше визначають шанси пацієнта на повне одужання, часткове поліпшення фізичного стану або повну несприйнятливості до терапії.

Кластерний аналіз вирішує завдання класифікації спостережень. У ході аналізу виділяються групи близьких за властивостями об'єктів – *кластери*. На підставі міри подібності кластери можна організувати в ієрархічні структури – *класифікаційні дерева*. Кластерний аналіз може використовуватися, наприклад, у систематиці й таксономії – для побудови класифікаційних філогенетичних схем.

Задачі дискримінації й класифікації вирішує *множинний дискримінантний*, або *канонічний, аналіз*. З його використанням вивчається взаємо-

зв'язок між двома наборами ознак. Наприклад, можна вивчити залежність між різними факторами ризику захворювання й проявом у пацієнта групи симптомів, між критеріями кваліфікації викладачів і показниками шкільної успішності.

Метод *багатомірного шкалювання* є своєрідною альтернативою кластерному аналізу. Його метою є побудова графіка, на якому взаєморозташування досліджуваних об'єктів відповідає оцінкам їхньої подібності за сукупністю ознак. У такий спосіб можна подати, наприклад, окремі народності на підставі метричних характеристик їхніх представників.

Перелічені методи виходять за межі цього підручника. Він містить тільки базові принципи й методи статистики, розуміння яких допоможе вам засвоїти більш складні види статистичного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

КОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- Бейли Н. Статистические методы в биологии. – М., 1960.
Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М., 1970.
Ван-дер-Варден Б. П. Математическая статистика. – М., 1960.
Гланц С. Медико-биологическая статистика. – М., 1999.
Глотов Н. В., Животовский Л. А., Хованов Н. В., Хромов-Борисов Н. Н. Биометрия. – Л., 1982.
Гублер Е. В., Генкин А. А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. – Л., 1973.
Лакин Г. Ф. Биометрия. – М., 1990.
Меркурьева Е. К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных. – М., 1970.
Меркурьева Е. К. Основы биометрии. – М., 1963.
Наследов А. Д., Тарасов С. Г. Применение математических методов в психологии: учебное пособие. – СПб., 2001.
Плохинский Н. А. Биометрия. – М., 1970.
Плохинский Н. А. Алгоритмы биометрии. – М., 1980.
Рокицкий П. Ф. Биологическая статистика. – Минск, 1973.
Рокицкий П. Ф. Основы вариационной статистики для биологов. – Минск, 1961.
Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. – СПб., 2001.
Терентьев П. В., Ростова Н. С. Практикум по биометрии. – Л., 1977.
Тихонова Н. А. Основы биометрии (вариационная статистика). Методические указания. – М., 1968.
Урбах В. Ю. Математическая статистика для биологов и медиков. – М., 1963.
Урбах В. Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях. – М., 1975.

20. Minium E. W., Clarke R. B. Elements of Statistical Reasoning. – John Wiley & Sons, Inc. 1982.
21. Rees D. G. Essential Statistics. – London, Chapman Hall, 1995.
22. Sprinthall R. C. Basic Statistical Analysis. – USA, Addison-Wesley Publishing comp., Inc, 1982.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – 2-е изд., перераб. и доп. – М., 1985.
2. Алгоритмы обработки экспериментальных данных. – М., 1986.
3. Борель Э. Вероятность и достоверность. – М., 1961.
4. Ван дер Верден Б. Л. Математическая статистика. – М., 1960.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М., 1962.
6. Вентцель К. А. Теория вероятностей. – М., 1999.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М., 1961.
8. Герчук Я. П. Графические методы в статистике. – М., 1968.
9. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М., 1961.
10. Джини К. Средние величины. – М., 1970.
11. Закс Л. Статистическое оценивание. – М., 1976.
12. Кимбл Г. Как правильно пользоваться статистикой. – М., 1982.
13. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы. Построение и анализ. – М., 2000.
14. Кохрен У. Методы выборочного исследования. – М.: Статистика, 1976.
15. Кудрин А. Н. Пономарева Г. Т. Применение математики в экспериментальной и клинической медицине. – М., 1967.
16. Ликеш И., Ляга Й. Основные таблицы математической статистики. – М., 1985.
17. Мисюк Н. С., Мاستыркин А. С., Кузнецов Г. П. Корреляционно-регрессионный анализ в клинической медицине. – М., 1975.
18. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. – М., 1969.
19. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике. – М., 1982.
20. Перегудов В. Н. Метод наименьших квадратов и его применение в исследованиях. – М., 1965.
21. Перегудов В. Н. Теоретические вопросы индексного анализа. – М., 1960.
22. Плохинский Н. А. Дисперсионный анализ. – Новосибирск, 1960.

Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. – М., 1982.

Поморский Ю. Л. Новейшие методы вариационной статистики. – Л., 1939.

Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике: Современный подход / Пер. с англ. Е. З. Демиденко. Предисл. Ю. Н. Тюрина. – М., 1982.

Секей Т. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М., 1990.

Септилиев Д. Статистические методы в научных медицинских исследованиях. – М., 1968.

Снедекор Дж. У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. – М., 1961.

Сошникова Л. А., Тамашевич В. Н., Уебе Г., Шефер М. Многомерный статистический анализ в экономике. – М., 1999.

Спрент П. Как обращаться с цифрами, или Статистика в действии / Пер. с англ. А. Ф. Якубова. – М., 1983.

Статистический словарь / Гл. ред. М. А. Королев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М., 1989.

Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М., 1976.

Тюрин Ю. П., Макаров А. А. Статистический анализ данных на компьютере. – М., 1998.

Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. – М., 1958.

Хеттманспертер Т. Статистические выводы, основанные на рангах. – М., 1987.

Хилл А. Основы медицинской статистики. – М., 1958.

Холлендер М., Вульф Д. А. Непараметрические методы статистики. – М., 1983.

Хургин Я. И. Да, нет или может быть ... – М., 1983.

Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений. – М., 1962.

Шварц Г. Выборочный метод. – М., 1978.

Эльясберг П. Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как её обрабатывать? – М., 1983.

Юл Дж. Э., Кэндэл М. Дж. Теория статистики. – М., 1960.

Glantz S. A., Slinker B. K. Primer of Applied Regression and Analysis of Variance. – New York: McGraw-Hill, 1990.

Broun B. W., Hollander Jr. M. Statistics: a biomedical introduction. – Wiley, New York, 1977.

Siegel S., Castellar N. J. Non-parametric statistics for behavioral sciences. – 2d ed. – New York: McGraw-Hill, 1988.

Pearson E. S., Hartley H. O. Charts for the power function for analysis of variance tests, derived from the non-central F distribution // Biometrika. – 38:112-130. – 1951.

ДОДАТОК

Таблиці статистичних критеріїв

Таблиця 1. Випадкові числа

3393	6270	4228	6069	9407	1865	8549	3217	2351	8410
9108	2330	2157	7416	0398	6173	1703	8132	9065	6717
7891	3590	2502	5945	3402	0491	4328	2365	6175	7695
9085	6307	6910	9174	1753	1797	9229	3422	9861	8357
2638	2908	6368	0398	5495	3283	0031	5955	6544	3883
1313	8338	0623	8600	4950	5414	7131	0134	7241	0651
3897	4202	3814	3505	1599	1649	2784	1994	5775	1406
4380	9543	1640	2850	8415	9120	8062	2421	6161	4634
1618	6309	7909	0874	0401	4301	4517	9197	3350	0434
4858	4676	7363	9141	6133	0549	1972	3461	7116	1496
5354	9142	0847	5393	5416	6505	7156	5634	9703	6221
0905	6986	9396	3975	9255	0537	2479	4589	0562	5345
1420	0470	8679	2328	3939	1292	0406	5428	3789	2882
3218	9080	6604	1813	8209	7039	2086	3369	4437	3798
9697	8431	4387	0622	6893	8788	2320	9358	5904	9539
0912	4964	0502	9683	4636	2861	2876	1273	7870	2030
4636	7072	4868	0601	3894	7182	8417	2367	7032	1003
2515	4734	9878	6761	5636	2949	3979	8650	3430	0635
5964	0412	5012	2369	6461	0678	3693	2928	3740	8047
7848	1523	7904	1521	1455	7089	8094	9872	0898	7174
5192	2571	3643	0707	3434	6818	5729	8615	4298	4129
8438	8325	9886	1805	1226	2310	3675	5058	2515	2388
8106	6349	0319	5436	6838	2460	6433	0644	7428	8556
9158	8263	6504	2562	1160	1526	1816	9690	1215	9590
6061	3525	4048	0382	4224	7148	8259	6526	5340	4064

Лакін, с. 322, табл. IV

Таблиця 2. Біноміальні ймовірності

m	P		n	m	P		n	m	P											
	0,25	0,50			0,25	0,50			0,25	0,50										
1	0	0,7500	9	0	0,0751	0,0020	13	0	0,0238	0,0001										
	1	0,2500		1	0,2253	0,0176		1	0,1029	0,0016										
2	0	0,5625	10	2	0,3003	0,0703	14	2	0,2059	0,0095										
	1	0,3750		3	0,2336	0,1641		3	0,2517	0,0349										
	2	0,0625		4	0,1168	0,2461		4	0,2097	0,0873										
				5	0,0389	0,2461		5	0,1258	0,1571										
3	0	0,4219	11	6	0,0087	0,1641	15	6	0,0559	0,2095										
	1	0,4219		7	0,0012	0,0703		7	0,0186	0,2095										
	2	0,1406		8	0,0001	0,0176		8	0,0047	0,1571										
	3	0,0156		9	0,0000	0,0020		9	0,0009	0,0873										
4	0	0,3164	12	10	0,0563	0,0010	16	10	0,0001	0,0349										
	1	0,4219		11	0,1877	0,0098		11	0,0000	0,0095										
	2	0,2109		12	0,2816	0,0439		12	0,0000	0,0016										
	3	0,0469		13	0,2503	0,1172		13	0,0000	0,0001										
	4	0,0039		14	0,1460	0,2051		14	0,0178	0,0001										
5	0	0,2373	13	15	0,0584	0,2461	17	1	0,0832	0,0009										
	1	0,3955		16	0,0162	0,2051		2	0,1802	0,0056										
	2	0,2637		17	0,0031	0,1172		3	0,2402	0,0222										
	3	0,0879		18	0,0004	0,0439		4	0,2202	0,0611										
	4	0,0146		19	0,0000	0,0098		5	0,1468	0,1222										
6	5	0,0010	14	20	0,0000	0,0010	18	6	0,0734	0,1833										
	0	0,1780		15	0	0,0422		0,0005	7	0,0280	0,2095									
	1	0,3560			1	0,1549		0,0054	8	0,0082	0,1833									
	2	0,2966			2	0,2581		0,0269	9	0,0018	0,1222									
	3	0,1318			3	0,2581		0,0806	10	0,0003	0,0611									
	4	0,0330			4	0,1721		0,1611	11	0,0000	0,0222									
5	0,0044	5	0,0803		0,2256	12	0,0000	0,0056												
7	6	0,0002	15	6	0,0268	0,2256	19	13	0,0000	0,0009										
	0	0,1335		7	0,0064	0,1611		14	0,0000	0,0001										
	1	0,3115		8	0,0011	0,0806		20	0	0,0134	0,0000									
	2	0,3315		9	0,0001	0,0269			1	0,0668	0,0005									
	3	0,1730		10	0,0000	0,0054			2	0,1559	0,0032									
	4	0,0577		11	0,0000	0,0005			3	0,2252	0,0139									
	5	0,0115		16	0	0,0317			0,0002	4	0,2252	0,0417								
6	0,0013	1	0,1267		0,0029	5	0,1651		0,0916											
7	0,0001	2	0,2323		0,0161	6	0,0917		0,1527											
8	0	0,1001	17		3	0,2581	0,0537	7	0,0393	0,1964										
	1	0,2670			4	0,1936	0,1208	8	0,0131	0,1964										
	3	0,2076			5	0,1032	0,1934	9	0,0034	0,1527										
	4	0,0865			6	0,0401	0,2253	10	0,0007	0,0916										
	5	0,0231		7	0,0115	0,1934	11	0,0001	0,0417											
	6	0,0038		8	0,0004	0,0537	12	0,0000	0,0139											
	7	0,0004		9	0,0000	0,0161	14	0,0000	0,0005											
	8	0,0000		10	0,0000	0,0029	15	0,0000	0,0000											
9	0	0,7500	18	11	0,0000	0,0002	21	0	0,1335	0,0078										
	1	0,2500		19	0	0,0422		0,0005	1	0,3115	0,0547									
	0	0,5625			20	1		0,1549	0,0054	2	0,3315	0,1641								
	1	0,3750				21		2	0,2581	0,0269	3	0,1730	0,2734							
	2	0,0625						22	3	0,2581	0,0806	4	0,0577	0,2734						
	0	0,4219							23	4	0,1721	0,1611	5	0,0115	0,1641					
	1	0,4219								24	5	0,0803	0,2256	6	0,0013	0,0547				
	2	0,1406									25	6	0,0268	0,2256	7	0,0001	0,0078			
	3	0,0156										26	7	0,0064	0,1611	0	0,1001	0,0039		
	0	0,3164											27	8	0,0011	0,0806	1	0,2670	0,0312	
	1	0,4219												28	9	0,0001	0,0269	3	0,2076	0,2188
	2	0,2109													29	10	0,0000	0,0054	4	0,0865
3	0,0469	30	11				0,0000									0,0005	5	0,0231	0,2188	
4	0,0039		31	12			0,0000									0,0002	6	0,0038	0,1094	
0	0,2373			32	0		0,0317									0,0002	7	0,0004	0,0312	
1	0,3955				33	1	0,1267									0,0029	8	0,0000	0,0039	
2	0,2637					34	2	0,2323								0,0161				
3	0,0879						35	3	0,2581							0,0537				
4	0,0146							36	4	0,1936						0,1208				
5	0,0010								37	5	0,1032					0,1934				
0	0,1780									38	6	0,0401				0,2253				
1	0,3560										39	7	0,0115			0,1934				
2	0,2966											40	8	0,0004		0,0537				
3	0,1318												41	9	0,0000	0,0161				
4	0,0330	42												10	0,0000	0,0029				
5	0,0044		43											11	0,0000	0,0002				
6	0,0002			44										12	0,0000	0,0002				
0	0,1780				45									0	0,0422	0,0005				
1	0,3560					46								1	0,1549	0,0054				
2	0,2966						47							2	0,2581	0,0269				
3	0,1318							48						3	0,2581	0,0806				
4	0,0330								49					4	0,1721	0,1611				
5	0,0044									50				5	0,0803	0,2256				
6	0,0002										51			6	0,0268	0,2256				
0	0,2373											52		7	0,0064	0,1611				
1	0,3955												53	8	0,0011	0,0806				
2	0,2637	54												9	0,0001	0,0269				
3	0,0879		55											10	0,0000	0,0054				
4	0,0146			56										11	0,0000	0,0005				
5	0,0010				57									12	0,0000	0,0002				
0	0,1780					58								0	0,0317	0,0002				
1	0,3560						59							1	0,1267	0,0029				
2	0,2966							60						2	0,2323	0,0161				
3	0,1318								61					3	0,2581	0,0537				
4	0,0330									62				4	0,1936	0,1208				
5	0,0044										63			5	0,1032	0,1934				
6	0,0002											64		6	0,0401	0,2253				
0	0,2373												65	7	0,0115	0,1934				
1	0,3955	66												8	0,0004	0,0537				
2	0,2637		67											9	0,0000	0,0161				
3	0,0879			68										10	0,0000	0,0029				
4	0,0146				69									11	0,0000	0,0002				
5	0,0010					70								12	0,0000	0,0002				
0	0,1780						71							0	0,0422	0,0005				
1	0,3560							72						1	0,1549	0,0054				
2	0,2966								73					2	0,2581	0,0269				
3	0,1318									74				3	0,2581	0,0806				
4	0,0330										75			4	0,1721	0,1611				
5	0,0044											76		5	0,0803	0,2256				
6	0,0002												77	6	0,0268	0,2256				
0	0,2373	78												7	0,0064	0,1611				
1	0,3955		79											8	0,0011	0,0806				
2	0,2637			80										9	0,0001	0,0269				
3	0,0879				81									10	0,0000	0,0054				
4	0,0146					82								11	0,0000	0,0005				
5	0,0010						83							12	0,0000	0,0002				
0	0,1780							84						0	0,0317	0,0002				
1	0,3560								85					1	0,1267	0,0029				
2	0,2966									86				2	0,2323	0,0161				
3	0,1318										87			3	0,2581	0,0537				
4	0,0330											88		4	0,1936	0,1208				
5	0,0044												89	5	0,1032	0,1934				
6	0,0002	90												6	0,0401	0,2253				
0	0,2373		91											7	0,0115	0,1934				
1	0,3955			92										8	0,0004	0,0537				
2	0,2637				93									9	0,0000	0,0161				
3	0,0879					94								10	0,0000	0,0029				
4	0,0146						95							11	0,0000	0,0002				
5	0,0010							96						12	0,0000	0,0002				
0	0,1780								97					0	0,0422	0,0005				
1	0,3560									98				1	0,1549	0,0054				
2	0,2966										99			2	0,2581	0,0269				
3	0,1318											100		3	0,2581	0,0806				
4	0,0330												101	4	0,1721	0,1611				
5	0,0044	102												5	0,0803	0,2256				
6	0,0002		103											6	0,0268	0,2256				
0	0,2373			104										7	0,0064	0,1611				
1	0,3955				105									8	0,0011	0,0806				
2	0,2637					106								9	0,0001	0,0269				
3	0,0879						107							10	0,0000	0,0054				
4	0,0146							108						11	0,0000	0,0005				
5	0,0010								109					12	0,0000	0,0002				
0	0,1780									110				0	0,0317	0,0002				
1	0,3560										111			1	0,1267	0,0029				
2	0,2966											112		2	0,2323	0,0161				
3	0,1318												113	3	0,2581	0,0537				
4	0,0330	114												4	0,1936	0,1208				
5	0,0044		115											5	0,1032	0,1934				
6	0,0002			116										6	0,0401	0,2253				
0	0,2373				117									7	0,0115	0,1934				
1	0,3955					118								8	0,0004	0,0537				
2	0,2637						119							9	0,0000	0,0161				
3	0,0879							120						10	0,0000	0,0029				
4	0,0146								121					11	0,0000	0,0002				
5	0,0010									122				12	0,0000	0,0002				
0	0,1780										123			0	0,0422	0,0005				
1	0,3560											124		1	0,1549	0,0054				
2	0,2966												125	2	0,2581	0,0269				
3	0,1318	126												3	0,2581	0,0806				
4	0,0330		127											4	0,1721	0,1611				
5	0,0044			128										5	0,0803	0,2256				
6	0,0002				129									6	0,0268	0,2256				
0	0,2373					130								7	0,0064	0,1611				
1	0,3955						131							8	0,0011	0,0806				
2	0,2637							132						9	0,0001					

Таблиця 4. Значення $\varphi = 2 \frac{\pi}{180} \arcsin \sqrt{p}$

%	Соті й десяти частки p									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	0,148	0,150	0,151	0,153	0,154
6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,165	0,166
7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
8	0,179	0,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
	0,348	0,354	0,360	0,363	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,448
	0,451	0,458	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532
	0,535	0,539	0,543	0,546	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,045
	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,184	1,196	1,198	1,200

Таблиця 4 (продовження)

p%	Соті й десяти частки p									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980

Таблиця 4 (закінчення)

Соті й десяті частки p									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212
2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,233	2,237
2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,402
2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
2,691	2,695	2,700	2,706	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,969	2,971	2,972	2,973
2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030
3,032	3,034	0,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
3,052	3,054	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
3,142									

н, с. 331-333, табл. VIII

Таблиця 5. Критичні значення коефіцієнта асиметрії As при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

n	$As_{0,05}$	$As_{0,01}$	n	$As_{0,05}$	$As_{0,01}$
25	0,711	1,061	250	0,251	0,360
30	0,661	0,982	300	0,230	0,329
35	0,621	0,921	350	0,213	0,305
40	0,587	0,869	400	0,200	0,285
45	0,558	0,825	450	0,188	0,269
50	0,533	0,787	500	0,179	0,255
60	0,492	0,723	550	0,171	0,243
70	0,459	0,673	600	0,163	0,233
80	0,432	0,631	650	0,157	0,224
90	0,409	0,596	700	0,151	0,215
100	0,389	0,567	750	0,146	0,208
125	0,350	0,508	800	0,142	0,202
150	0,321	0,464	850	0,138	0,196
175	0,298	0,430	900	0,134	0,190
200	0,280	0,403	950	0,130	0,185
			1000	0,127	0,180

Лакін, с. 340, табл. XIV

Таблиця 6. Критичні значення коефіцієнта ексцесу Ex при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

n	$Ex_{0,05}$	$Ex_{0,01}$	n	$Ex_{0,05}$	$Ex_{0,01}$
11	0,907	0,936	61	0,843	0,859
16	0,888	0,914	71	0,840	0,855
21	0,877	0,900	81	0,838	0,852
26	0,869	0,890	91	0,835	0,848
31	0,863	0,883	101	0,834	0,846
36	0,858	0,877	201	0,823	0,832
41	0,854	0,872	301	0,818	0,826
46	0,851	0,868	401	0,816	0,822
51	0,848	0,865	501	0,814	0,820

Лакін, с. 340, табл. XV

Таблиця 1. Коефіцієнти a для критерію Шапиро-Уїлка на нормальність (n – обсяг вибірки).

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	0.7071														
3	0.7071	0.0000													
4	0.6872	0.1677													
5	0.6646	0.2413	0.0000												
6	0.6431	0.2806	0.0875												
7	0.6233	0.3031	0.1401	0.0000											
8	0.6052	0.3164	0.1743	0.0561											
9	0.5888	0.3244	0.1976	0.0947	0.0000										
10	0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399										
11	0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695	0.0000									
12	0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303									
13	0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539	0.0000								
14	0.5251	0.3318	0.2460	0.1802	0.1240	0.0727	0.0240								
15	0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0880	0.0433								
16	0.5056	0.3290	0.2521	0.1939	0.1447	0.1005	0.0593	0.0000							
17	0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359	0.0000						
18	0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163						
19	0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303	0.0000					
20	0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.0140					
21	0.4663	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1399	0.1092	0.0804	0.0530	0.0263	0.0000				
22	0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0122				
23	0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228	0.0000			
24	0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0539	0.0321	0.0107	0.0000		
25	0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403	0.0200	0.0094		
26	0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476	0.0284	0.0178	0.0000	
27	0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540	0.0358	0.0244	0.0084	
28	0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598	0.0424	0.0253	0.0059	0.0000
29	0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650	0.0483	0.0320	0.0159	0.0000
30	0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697	0.0537	0.0381	0.0227	0.0076

Rees, p. 249, Appendix D, Table D.12

Таблиця 8. Критичні значення критерію Шапиро-Уїлка W для перевірки нормальності розподілу в нечисленних вибірках ($n \leq 30$) при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

n	$W_{0,01}$	$W_{0,05}$	n	$W_{0,01}$	$W_{0,05}$	n	$W_{0,01}$	$W_{0,05}$
3	0,753	0,767	11	0,792	0,850	21	0,873	0,908
4	0,687	0,748	12	0,805	0,859	22	0,878	0,911
5	0,686	0,762	13	0,814	0,866	23	0,881	0,914
6	0,713	0,788	14	0,825	0,874	24	0,884	0,916
7	0,730	0,803	15	0,835	0,881	25	0,888	0,918
8	0,749	0,818	16	0,844	0,887	26	0,891	0,920
9	0,764	0,829	17	0,851	0,892	27	0,894	0,923
10	0,781	0,842	18	0,858	0,897	28	0,896	0,924
			19	0,863	0,901	29	0,898	0,926
			20	0,868	0,905	30	0,900	0,927

Rees, p. 251, Appendix D, Table D.12

Таблиця 9. Критичні значення t для оцінки сумнівних дат при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

n	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$	n	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$	n	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$
4	1,71	1,73	21	2,80	3,11	90	3,37	3,74
5	1,92	1,97	22	2,82	3,14	100	3,40	3,77
6	2,07	2,16	23	2,84	3,16	120	3,46	3,83
7	2,18	2,31	24	2,86	3,18	150	3,53	3,90
8	2,27	2,43	25	2,88	3,20	200	3,61	3,98
9	2,35	2,53	26	2,90	3,22	300	3,73	4,09
10	2,41	2,62	27	2,91	3,24	400	3,80	4,17
11	2,47	2,69	28	2,93	3,26	500	3,87	4,24
12	2,52	2,75	29	2,94	3,28	600	3,92	4,28
13	2,56	2,81	30	2,96	3,29	700	3,96	4,32
14	2,60	2,86	35	3,02	3,36	800	3,99	4,35
15	2,64	2,90	40	3,08	3,42	900	4,02	4,38
16	2,67	2,95	45	3,12	3,48	1000	4,05	4,41
17	2,70	2,98	50	3,16	3,52	1500	4,14	4,50
18	2,73	3,02	60	3,22	3,58	2000	4,21	4,56
19	2,75	3,05	70	3,28	3,64			
20	2,78	3,08	80	3,33	3,70			

Лакін, с. 341, табл. XVI.; Терентьев, XI, с. 133

Таблиця 10. Критичні значення τ_1 -критерію для оцінки сумнівних дат при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$
0,941	0,988	8	0,468	0,590	15	0,338	0,348
0,765	0,889	9	0,437	0,555	20	0,300	0,391
0,642	0,780	10	0,412	0,527	25	0,281	0,367
0,560	0,698	11	0,392	0,502	30	0,260	0,341
0,507	0,637	12	0,376	0,482			

ентсьв, IX, с. 133

Таблиця 11. Критичні значення τ_2 -критерію для оцінки сумнівних дат при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$
1,000	1,000	8	0,607	0,710	15	0,430	0,522
0,967	0,992	9	0,565	0,667	20	0,372	0,464
0,845	0,929	10	0,531	0,632	25	0,347	0,434
0,736	0,836	11	0,504	0,603	30	0,322	0,402
0,661	0,778	12	0,481	0,579			

ентсьв, IX, с. 133

Таблиця 12. Критичні значення $\tau_{(1-1)}$ -критерію для оцінки сумнівних дат при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – обсяг вибірки)

$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$	n	$\tau_{0,05}$	$\tau_{0,01}$
		11	0,450	0,566	21	0,327	0,421
		12	0,428	0,541	22	0,320	0,414
		13	0,410	0,520	23	0,314	0,407
0,955	0,991	14	0,395	0,502	24	0,309	0,400
0,807	0,916	15	0,381	0,486	25	0,304	0,394
0,689	0,805	16	0,369	0,472	26	0,299	0,389
0,610	0,740	17	0,359	0,460	27	0,295	0,383
0,554	0,683	18	0,349	0,449	28	0,291	0,378
0,512	0,635	19	0,341	0,439	29	0,287	0,374
0,477	0,597	20	0,334	0,430	30	0,283	0,369

ентсьв, X, с. 133

Таблиця 13. Критичні значення критерію F Фішера, df_1 – число ступенів свободи для більшої дисперсії, df_2 – для меншої дисперсії

Примітка: курсив (перий ряд) – критичні значення F для $p = 0,001$;

звичайний шрифт (другий ряд) – $p = 0,01$;

жирний шрифт (третій ряд) – $p = 0,05$

df_2	df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
3	167,5	148,5	141,5	137,5	134,5	132,9	131,8	130,6	129,5	128,9	128,3	127,1	126,5	125,9	125,6	125,0	124,4	124,5	124,5
4	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,4	27,2	27,1	26,8	26,7	26,6	26,5	26,4	26,2	26,1	26,1
5	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,8	8,8	8,8	8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,6	8,5	8,5
6	7,7	7,4	7,1	6,9	6,8	6,7	6,6	6,6	6,6	6,6	6,5	6,5	6,5	6,4	6,4	6,4	6,4	6,3	6,3
7	6,6	6,3	6,1	5,9	5,8	5,7	5,6	5,6	5,6	5,5	5,5	5,5	5,4	5,4	5,4	5,4	5,3	5,3	5,3
8	5,8	5,5	5,3	5,1	5,0	4,9	4,8	4,8	4,8	4,7	4,7	4,7	4,6	4,6	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4
9	5,2	4,9	4,7	4,5	4,4	4,3	4,3	4,2	4,2	4,1	4,1	4,1	4,0	4,0	4,0	3,9	3,9	3,8	3,8
10	4,7	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,8	3,7	3,7	3,6	3,6	3,6	3,5	3,5	3,5	3,4	3,4	3,3	3,3
12	4,2	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,2	3,1	3,1	3,1	3,0	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8
16	3,6	3,3	3,1	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2
20	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9
30	2,9	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,7	1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5
50	2,5	2,2	2,0	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1
100	2,2	1,9	1,7	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8
∞	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7

df_1	df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
10	21,0	14,9	12,3	11,3	10,5	9,9	9,6	9,2	9,0	8,9	8,5	8,1	7,8	7,6	7,5	7,3	7,1	6,8	
	10,0	7,9	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,7	4,5	4,4	4,3	4,3	4,1	4,0	3,9	
	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	
11	19,7	13,8	11,6	10,4	9,6	9,1	8,8	8,4	8,2	8,0	7,6	7,3	7,1	6,9	6,8	6,6	6,3	6,0	
	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5	4,4	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	
	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	
12	18,6	12,3	10,8	9,6	8,9	8,4	8,1	7,7	7,5	7,4	7,0	6,7	6,5	6,3	6,2	6,0	5,7	5,4	
	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	
	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	
13	17,8	12,3	10,2	9,1	8,4	7,9	7,6	7,2	7,0	6,9	6,6	6,2	6,0	5,8	5,7	5,5	5,3	5,0	
	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	
	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	
14	17,1	11,7	9,7	8,6	7,9	7,4	7,1	6,8	6,6	6,5	6,1	5,8	5,5	5,4	5,3	5,1	4,9	4,6	
	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,4	4,3	4,1	4,0	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	
	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	
15	16,6	11,3	9,3	8,3	7,6	7,1	6,8	6,5	6,3	6,2	5,8	5,5	5,3	5,1	5,0	4,8	4,6	4,3	
	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,1	4,0	3,9	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,2	3,0	2,9	2,8	
	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	
16	16,1	11,0	9,0	7,9	7,3	6,8	6,5	6,2	6,1	5,9	5,6	5,3	5,1	4,9	4,8	4,6	4,4	4,1	
	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,2	3,0	2,9	2,8	
	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	
17	15,7	10,7	8,7	7,7	7,0	6,6	6,3	6,0	5,8	5,7	5,3	5,0	4,8	4,6	4,5	4,3	4,2	3,9	
	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	
	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	
18	15,4	10,4	8,5	7,5	6,8	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,2	4,0	3,7	
	8,3	6,0	5,1	4,6	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	
	4,4	3,5	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	
19	15,1	10,2	8,3	7,3	6,6	6,2	5,9	5,6	5,5	5,3	5,0	4,7	4,5	4,4	4,2	4,0	3,9	3,5	
	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,1	3,0	2,9	2,9	2,7	2,6	2,5	
	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9	1,9	

Таблиця 13 (продовження)

df_1	df_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
20	14,8	10,0	8,1	7,1	6,5	6,0	5,7	5,4	5,3	5,1	4,8	4,5	4,4	4,4	4,2	4,1	3,9	3,8	3,4
	8,1	5,8	4,9	4,4	4,1	3,9	3,7	3,6	3,4	3,4	3,2	3,0	2,9	2,9	2,8	2,8	2,6	2,5	2,4
	4,3	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8
21	14,6	9,8	7,9	7,0	6,3	5,9	5,6	5,3	5,2	5,0	4,7	4,4	4,2	4,2	4,0	3,9	3,7	3,6	3,3
	8,0	5,8	4,9	4,4	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4
	4,3	3,5	3,1	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8
22	14,4	9,6	7,8	6,8	6,2	5,8	5,5	5,2	5,1	4,9	4,6	4,3	4,1	4,1	3,9	3,8	3,6	3,5	3,2
	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,6	3,4	3,3	3,3	3,1	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,5	2,4	2,3
	4,3	3,4	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8
23	14,2	9,5	7,7	6,7	6,1	5,6	5,4	5,1	5,0	4,8	4,5	4,2	4,0	4,0	3,8	3,7	3,5	3,4	3,1
	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,0	2,8	2,7	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3
	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8
24	14,0	9,3	7,6	6,6	6,0	5,6	5,3	5,0	4,9	4,7	4,4	4,1	3,9	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3	3,0
	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,5	3,4	3,2	3,2	3,0	2,8	2,7	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2
	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7
25	13,9	9,2	7,5	6,5	5,9	5,5	5,2	4,9	4,8	4,6	4,3	4,0	3,9	3,9	3,7	3,6	3,4	3,2	2,9
	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,6	3,5	3,3	3,2	3,2	3,0	2,8	2,7	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2
	4,2	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7
26	13,7	9,1	7,4	6,4	5,8	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,2	3,9	3,8	3,8	3,6	3,5	3,3	3,1	2,8
	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,8	2,7	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2
	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7
27	13,6	9,0	7,3	6,3	5,7	5,3	5,1	4,8	4,7	4,5	4,2	3,9	3,7	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	2,8
	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,1	2,9	2,7	2,6	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1
	4,2	3,3	3,0	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7
28	13,5	8,9	7,2	6,3	5,7	5,2	5,0	4,7	4,6	4,4	4,1	3,8	3,7	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	2,8
	7,6	5,4	4,6	4,1	3,8	3,5	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1
	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6
29	13,4	8,9	7,1	6,2	5,6	5,2	5,0	4,7	4,6	4,4	4,1	3,8	3,6	3,6	3,4	3,3	3,1	2,9	2,6
	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1
	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
30	13.3	8.8	7.1	6.1	5.5	5.1	4.9	4.6	4.5	4.3	4.0	3.7	3.6	3.4	3.3	3.1	2.9	2.6
	7.6	5.4	4.5	3.7	3.5	3.3	3.2	3.2	3.1	3.0	2.8	2.7	2.5	2.5	2.4	2.2	2.1	2.0
32	4.2	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5
	13.2	8.7	7.0	6.0	5.4	5.0	4.8	4.5	4.4	4.2	3.9	3.6	3.5	3.3	3.2	3.0	2.8	2.5
	7.5	5.3	4.5	4.0	3.7	3.4	3.2	3.1	3.0	2.9	2.8	2.6	2.4	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0
34	4.1	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5
	13.1	8.6	7.0	6.0	5.4	5.0	4.8	4.5	4.4	4.2	3.9	3.6	3.5	3.3	3.2	3.0	2.8	2.5
	7.4	5.3	4.4	3.9	3.6	3.4	3.2	3.1	3.0	2.9	2.8	2.6	2.4	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0
36	4.1	3.3	2.9	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5
	13.0	8.6	6.9	5.9	5.3	4.9	4.7	4.4	4.3	4.1	3.8	3.6	3.4	3.3	3.1	3.0	2.7	2.4
	7.4	5.2	4.4	3.9	3.6	3.3	3.2	3.0	2.9	2.8	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8
38	4.1	3.3	2.9	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.9	8.5	6.8	5.8	5.3	4.9	4.7	4.4	4.3	4.1	3.8	3.5	3.4	3.2	3.1	2.9	2.6	2.4
	7.3	5.2	4.3	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	1.9	1.8
40	4.1	3.2	2.8	2.6	2.5	2.3	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.8	8.4	6.7	5.8	5.2	4.8	4.6	4.3	4.2	4.0	3.7	3.5	3.3	3.2	3.0	2.6	2.5	2.3
	7.3	5.2	4.3	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.5	2.4	2.2	2.1	1.9	1.9	1.8
42	4.1	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.7	8.3	6.7	5.7	5.2	4.8	4.6	4.3	4.2	4.0	3.7	3.4	3.3	3.1	3.0	2.8	2.6	2.3
	7.3	5.1	4.3	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.6	2.5	2.3	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8
44	4.1	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.5	8.2	6.6	5.6	5.1	4.7	4.5	4.2	4.1	3.9	3.6	3.4	3.2	3.1	2.9	2.8	2.5	2.2
	7.2	5.1	4.3	3.8	3.5	3.2	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.7
46	4.1	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.4	8.1	6.5	5.6	5.0	4.6	4.4	4.1	4.0	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0	2.8	2.7	2.4	2.1
	7.2	5.1	4.2	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.7
48	4.0	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
	12.3	8.1	6.4	5.5	5.0	4.6	4.4	4.1	4.0	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0	2.8	2.7	2.4	2.1
	7.2	5.1	4.2	3.8	3.4	3.2	3.0	2.8	2.8	2.7	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	1.9	1.8	1.7
	4.0	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3

Таблиця 13 (продовження)

df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
50	12.2	8.0	6.4	5.4	4.9	4.5	4.3	4.0	3.9	3.7	3.4	3.2	3.0	2.9	2.7	2.6	2.3	2.0
	7.2	5.1	4.2	3.7	3.4	3.2	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	1.9	1.8	1.7
	4.0	3.2	2.8	2.6	2.4	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4
55	12.1	7.9	6.3	5.4	4.9	4.5	4.3	4.0	3.9	3.7	3.4	3.2	3.0	2.9	2.7	2.6	2.3	2.0
	7.1	5.0	4.1	3.7	3.4	3.1	3.0	2.8	2.7	2.6	2.5	2.3	2.2	2.1	2.1	1.9	1.8	1.6
	4.0	3.2	2.8	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4
60	12.0	7.8	6.2	5.3	4.8	4.4	4.2	3.9	3.8	3.6	3.3	3.1	2.9	2.8	2.6	2.5	2.2	1.9
	7.1	5.0	4.1	3.6	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.7	1.6
	4.0	3.1	2.8	2.5	2.4	2.2	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
65	11.9	7.7	6.1	5.2	4.7	4.3	4.1	3.8	3.7	3.5	3.2	3.0	2.8	2.7	2.5	2.4	2.1	1.8
	7.0	5.0	4.1	3.6	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.3	2.2	2.1	2.0	1.8	1.7	1.6
	4.0	3.1	2.7	2.5	2.4	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
70	11.6	7.6	6.0	5.2	4.7	4.3	4.1	3.8	3.7	3.5	3.2	3.0	2.8	2.7	2.5	2.3	2.1	1.7
	7.0	4.9	4.1	3.6	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.4	2.3	2.1	2.1	2.0	1.8	1.7	1.6
	4.0	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3
80	11.6	7.5	6.0	5.1	4.6	4.2	4.0	3.7	3.6	3.4	3.1	2.9	2.7	2.6	2.4	2.3	2.0	1.7
	7.0	4.9	4.0	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.6	2.5	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.6	1.5
	4.0	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.3
100	11.5	7.4	5.9	5.0	4.5	4.1	3.9	3.7	3.6	3.4	3.1	2.8	2.7	2.5	2.4	2.2	1.9	1.6
	6.9	4.8	4.0	3.5	3.2	3.0	2.8	2.7	2.6	2.5	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.7	1.6	1.4
	3.9	3.1	2.7	2.5	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.3
125	11.4	7.4	5.8	5.0	4.5	4.1	3.9	3.6	3.5	3.3	3.0	2.8	2.6	2.5	2.3	2.1	1.9	1.5
	6.8	4.8	3.9	3.5	3.2	2.9	2.8	2.6	2.5	2.3	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.7	1.5	1.4
	3.9	3.1	2.7	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.4	1.2
150	11.3	7.3	5.7	4.9	4.4	4.0	3.8	3.5	3.4	3.2	2.9	2.7	2.5	2.4	2.2	2.0	1.8	1.4
	6.8	4.7	3.9	3.4	3.1	2.9	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.5	1.3
	3.9	3.1	2.7	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2
200	11.2	7.2	5.6	4.8	4.3	3.9	3.7	3.5	3.4	3.2	2.9	2.6	2.5	2.3	2.2	2.0	1.7	1.3
	6.8	4.7	3.9	3.4	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.1	2.0	1.9	1.8	1.6	1.5	1.3
	3.9	3.0	2.6	2.4	2.3	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2

Таблиця 13 (закінчення)

df ₂	df ₁																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
400	11.0	7.1	5.6	4.7	4.2	3.8	3.6	3.4	3.3	3.1	2.8	2.5	2.4	2.2	2.1	1.9	1.6	1.3
1000	6.7	4.7	3.8	3.4	3.1	2.9	2.7	2.5	2.5	2.4	2.2	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.4	1.2
	3.9	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.4	1.3	1.1
	10.9	7.0	5.5	4.7	4.2	3.8	3.6	3.4	3.3	3.1	2.8	2.5	2.4	2.2	2.1	1.8	1.6	1.2
∞	6.7	4.6	3.8	3.4	3.0	2.8	2.7	2.5	2.4	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8	1.7	1.5	1.4	1.1
	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4	1.3	1.1
	10.8	6.9	5.4	4.6	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	3.0	2.7	2.4	2.3	2.1	2.0	1.7	1.5	1.1
∞	6.6	4.6	3.8	3.3	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8	1.7	1.5	1.4	1.0
	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.3	1.2	1.0

Лакін, с. 323–328, табл. VI.

Таблиця 14. Критичні значення U-критерію Уїлкоксона (Манна-Уїтні).

Двосторонній критерій

$p = 0,05$

n ₂	n ₁																		
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
5	2																		
6	3	5																	
7	5	6	8																
8	6	8	10	13															
9	7	10	12	15	17														
10	8	11	14	17	20	23													
11	9	13	16	19	23	26	30												
12	11	14	18	22	26	29	33	37											
13	12	16	20	24	28	33	37	41	45										
14	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55									
15	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64								
16	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75							
17	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87						
18	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99					
19	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113				
20	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127			

$p = 0,01$

n ₂	n ₁																		
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
5	0																		
6	1	2																	
7	1	3	4																
8	2	4	6	7															
9	3	5	7	9	11														
10	4	6	9	11	13	16													
11	5	7	10	13	16	18	21												
12	6	9	12	15	18	21	24	27											
13	7	10	13	17	20	24	27	31	34										
14	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42									
15	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51								
16	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60							
17	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70						
18	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81					
19	12	17	22	28	33	39	45	51	56	63	69	74	81	87	93				
20	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105			

Сидоренко, с. 316, Додаток 1, Табл. II

Таблиця 15. Значення функції $\psi\left(\frac{R}{n+1}\right)$

$\frac{R}{n+1}$	0	1	2	3	3	5	6	7	8	9
0,00	-∞	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,51	-2,46	-2,41	-2,37
0,01	-2,53	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,17	-2,14	-2,12	-2,10	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,01	-2,00	-1,98	-1,96	-1,94	-1,93	-1,91	-1,90
0,03	-1,88	-1,87	-1,85	-1,84	-1,83	-1,81	-1,80	-1,79	-1,77	-1,76
0,04	-1,75	-1,74	-1,73	-1,72	-1,71	-1,70	-1,68	-1,67	-1,66	-1,65
0,05	-1,64	-1,64	-1,63	-1,62	-1,61	-1,60	-1,59	-1,58	-1,57	-1,57
0,06	-1,55	-1,55	-1,54	-1,53	-1,52	-1,51	-1,51	-1,50	-1,49	-1,48
0,07	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,45	-1,44	-1,43	-1,43	-1,42	-1,41
0,08	-1,41	-1,40	-1,39	-1,39	-1,38	-1,37	-1,37	-1,36	-1,35	-1,35
0,09	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,31	-1,30	-1,30	-1,29	-1,29
0,10	-1,28	-1,28	-1,27	-1,26	-1,26	-1,25	-1,25	-1,24	-1,24	-1,23
0,11	-1,23	-1,22	-1,22	-1,21	-1,21	-1,20	-1,20	-1,19	-1,19	-1,18
0,12	-1,18	-1,17	-1,17	-1,16	-1,16	-1,15	-1,15	-1,14	-1,14	-1,13
0,13	-1,13	-1,12	-1,12	-1,11	-1,11	-1,10	-1,10	-1,09	-1,09	-1,09
0,14	-1,08	-1,08	-1,07	-1,07	-1,06	-1,06	-1,05	-1,05	-1,05	-1,04
0,15	-1,04	-1,03	-1,03	-1,02	-1,02	-1,02	-1,01	-1,01	-1,01	-1,00
0,16	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,17	-0,95	-0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,18	-0,92	-0,91	-0,91	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,88	-0,88
0,19	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
0,20	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,82	-0,81	-0,81
0,21	-0,81	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,71	-0,71
0,24	-0,71	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,68	-0,68	-0,68
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,61	-0,61	-0,61	-0,60	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
0,30	-0,53	-0,52	-0,52	-0,52	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,50	-0,50
0,31	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47	-0,47
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,31	-0,31	-0,31
0,38	-0,31	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28
0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
0,40	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,41	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,18	-0,18
0,43	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15
0,44	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,13	-0,13	-0,13
0,45	-0,13	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11	-0,10
0,46	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,05
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00

Таблиця 15 (закінчення)

$\left(\frac{R}{n+1}\right)$	0	1	2	3	3	5	6	7	8	9
0,50	+0,00	+0,00	+0,01	+0,01	+0,01	+0,01	+0,01	+0,02	+0,02	+0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,38	1,37	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Лакін, с. 333-335, табл. IX

Таблиця 16. Критичні значення критерію Х Ван дер Вардена при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$

$n_1 - n_2 = 0$ або 1		$n_1 - n_2 = 2$ або 3		$n_1 - n_2 = 4$ або 5	
$X_{0,05}$	$X_{0,01}$	$X_{0,05}$	$X_{0,01}$	$X_{0,05}$	$X_{0,01}$
2,40	-	2,30	-	-	-
2,48	-	2,40	-	-	-
2,60	3,20	2,49	3,10	2,30	-
2,72	3,40	2,58	3,40	2,40	-
2,86	3,60	2,79	3,58	2,68	3,40
2,96	3,71	2,91	3,64	2,78	3,50
3,11	3,94	3,06	3,88	3,00	3,76
3,24	4,07	3,19	4,05	3,06	3,88
3,39	4,26	3,36	4,25	3,28	4,12
3,49	4,44	3,44	4,37	3,36	4,23
3,63	4,60	3,60	4,58	3,53	4,50
3,73	4,77	3,69	4,71	3,61	4,62
3,86	4,94	3,84	4,92	3,78	4,85
3,96	5,10	3,92	5,05	3,85	4,96
4,08	5,26	4,06	5,24	4,01	5,17
4,18	5,40	4,15	5,36	4,08	5,27
4,29	5,55	4,27	5,53	4,23	5,48
4,39	5,68	4,36	5,65	4,30	5,58
4,50	5,83	4,48	5,81	4,44	5,76
4,59	5,95	4,56	5,92	4,51	5,85
4,68	6,09	4,68	6,07	4,64	6,03
4,78	6,22	4,76	6,19	4,72	6,13
4,88	6,35	4,87	6,34	7,84	6,30
4,97	6,47	4,95	6,44	4,91	6,39
5,07	6,60	5,06	6,58	5,03	6,55
5,15	6,71	5,13	6,69	5,10	6,64
5,25	6,84	5,24	6,82	5,21	6,79
5,33	6,95	5,31	6,92	5,28	6,88
5,42	7,06	5,41	7,05	5,38	7,02
5,50	7,17	5,48	7,15	5,45	7,11
5,59	7,28	5,58	7,27	5,55	7,25
5,67	7,39	5,65	7,37	5,62	7,33
5,75	7,50	5,74	7,49	5,72	7,47
5,83	7,62	5,81	7,60	5,79	7,56
5,91	7,72	5,90	7,71	5,88	7,69
5,99	7,82	5,97	7,81	5,95	7,77
6,04	7,93	6,06	7,92	6,04	7,90
6,14	8,02	6,12	8,01	6,10	7,98
6,21	8,13	6,21	8,12	6,19	8,10
6,29	8,22	6,27	8,21	6,25	8,18
6,36	8,32	6,35	8,31	6,34	8,29
6,43	8,41	6,42	8,40	6,39	8,37
6,50	8,51	6,51	8,50	6,48	8,48

н, с. 335-336, табл. X

Таблиця 17. Критичні значення критерію знаків z при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$
(n – число парних значень за винятком нульових різниць)

n	$Z_{0,05}$	$Z_{0,01}$	n	$Z_{0,05}$	$Z_{0,01}$	n	$Z_{0,05}$	$Z_{0,01}$	n	$Z_{0,05}$	$Z_{0,01}$
5	0	-	27	8	7	49	18	15	92	37	34
6	0	-	28	8	7	50	18	16	94	38	35
7	0	0	29	9	7	52	19	17	96	39	36
8	1	0	30	10	8	54	20	18	98	40	37
9	1	0	31	10	8	56	21	18	100	41	37
10	1	0	32	10	8	58	22	19	110	45	42
11	2	1	33	11	9	60	23	20	120	50	46
12	2	1	34	11	9	62	24	21	130	55	51
13	3	1	35	12	10	64	24	22	140	59	55
14	3	2	36	12	10	66	25	23	150	64	60
15	3	2	37	13	10	68	26	23	160	69	64
16	4	2	38	13	11	70	27	24	170	73	69
17	4	3	39	13	11	72	28	25	180	78	73
18	5	3	40	14	12	74	29	26	190	83	78
19	5	4	41	14	12	76	30	27	200	87	83
20	5	4	42	15	13	78	31	28	220	97	92
21	6	4	43	15	13	80	32	29	240	106	101
22	6	5	44	16	13	82	33	30	260	116	110
23	7	5	45	16	14	84	33	30	280	125	120
24	7	5	46	16	14	86	34	31	300	135	129
25	7	6	47	17	15	88	35	32			
26	8	6	48	17	15	90	36	33			

Гублер, с. 88, табл. I

Таблиця 18. Критичні значення T -критерію Уїлкоксона для залежних вибірок (n – число парних спостережень за винятком нульових різниць)

n	$T_{0,05}$	$T_{0,01}$	n	$T_{0,05}$	$T_{0,01}$
6	0	-	16	30	20
7	2	-	17	35	23
8	4	0	18	40	28
9	6	2	19	46	32
10	8	3	20	52	38
11	11	5	21	59	43
12	14	7	22	66	49
13	17	10	23	73	55
14	21	13	24	81	61
15	25	16	25	89	68

Sprinthall, p. 408, Table I

Таблиця 19. Критичні значення критерію χ^2 при рівнях значущості $p = 0,05$, $p = 0,01$ та $p = 0,001$ (df – число ступенів свободи)

df	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,001}$	df	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,001}$
1	3,84	6,64	10,83	51	68,67	77,39	87,97
2	5,99	9,21	13,82	52	69,83	78,62	89,27
3	7,82	11,34	16,27	53	70,99	79,84	90,57
4	9,49	13,28	18,47	54	72,15	81,07	91,87
5	11,07	15,09	20,52	55	73,31	82,29	93,17
6	12,59	16,81	22,46	56	74,47	83,51	94,46
7	14,07	18,48	24,32	57	75,62	84,73	95,75
8	15,51	20,09	26,12	58	76,78	85,95	97,04
9	16,92	21,67	27,88	59	77,93	87,17	98,32
10	18,31	23,21	29,59	60	79,08	88,38	99,61
11	19,68	24,72	31,26	61	80,23	89,59	100,89
12	21,03	26,22	32,91	62	81,38	90,80	102,17
13	22,36	27,69	34,53	63	82,53	92,01	103,44
14	23,68	29,14	36,12	64	83,68	93,22	104,72
15	25,00	30,58	37,70	65	84,82	94,42	105,99
16	26,30	32,00	39,25	66	85,97	95,63	107,26
17	27,59	33,41	40,79	67	87,11	96,83	108,53
18	28,87	34,80	42,31	68	88,25	98,03	109,79
19	30,14	36,19	43,82	69	89,39	99,23	111,06
20	31,41	37,57	45,32	70	90,53	100,40	112,32
21	32,67	38,93	46,80	71	91,67	101,60	113,58
22	33,92	40,29	48,27	72	92,81	102,80	114,84
23	35,17	41,64	49,73	73	93,94	104,00	116,09
24	36,42	42,98	51,18	74	95,08	105,20	117,35
25	37,65	44,31	52,62	75	96,22	106,40	118,60
26	38,88	45,64	54,05	76	97,35	107,58	119,85
27	40,11	46,96	55,48	77	98,48	108,77	121,10
28	41,34	48,28	56,89	78	99,62	109,96	122,35
29	42,56	49,59	58,30	79	100,75	111,14	123,59
30	43,77	50,89	59,70	80	101,88	112,33	124,84
31	44,93	52,19	61,10	81	103,01	113,51	126,08
32	46,19	53,49	62,49	82	104,14	114,70	127,32
33	47,40	54,78	63,87	83	105,27	115,88	128,56
34	48,60	56,06	65,25	84	106,40	117,06	129,80
35	49,80	57,34	66,62	85	107,52	118,24	131,04
36	51,00	58,62	67,98	86	108,65	119,41	132,28
37	52,19	59,89	69,35	87	109,77	120,59	133,51
38	53,38	61,18	70,70	88	110,90	121,77	134,74
39	54,57	62,43	72,06	89	112,02	122,94	135,98
40	55,76	63,69	73,40	90	113,14	124,12	137,21
41	56,94	64,95	74,74	91	114,27	125,29	138,44
42	58,12	66,21	76,08	92	115,39	126,46	139,67
43	59,30	67,46	77,42	93	116,51	127,63	140,89
44	60,48	68,71	78,75	94	117,63	128,80	142,12
45	61,66	69,96	80,08	95	118,75	129,97	143,34
46	62,83	71,20	81,40	96	119,87	131,14	144,57
47	64,00	72,44	82,72	97	120,99	132,31	145,79
48	65,17	73,68	84,04	98	122,11	133,48	147,01
49	66,34	74,92	85,35	99	123,22	134,64	148,23
50	67,51	76,15	86,66	100	124,34	135,81	149,45

кін, с. 329, табл. VII; Рокицький, с. 306, табл. X

Таблиця 20. Критичні значення коефіцієнта кореляції Пірсона r (двосторонній критерій) при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ ($df = n - 2$, n – число парних значень)

df	$r_{0,05}$	$r_{0,01}$	df	$r_{0,05}$	$r_{0,01}$	df	$r_{0,05}$	$r_{0,01}$
1	0,997	0,999	15	0,482	0,606	50	0,273	0,354
2	0,950	0,990	16	0,468	0,590	55	0,261	0,339
3	0,878	0,959	17	0,456	0,575	60	0,250	0,325
4	0,811	0,917	18	0,444	0,561	70	0,232	0,302
5	0,755	0,875	19	0,433	0,549	80	0,217	0,283
6	0,707	0,834	20	0,423	0,537	90	0,205	0,267
7	0,666	0,798	22	0,404	0,515	100	0,195	0,254
8	0,632	0,765	24	0,388	0,496	120	0,178	0,232
9	0,602	0,735	26	0,374	0,479	150	0,159	0,208
10	0,576	0,708	28	0,361	0,463	200	0,138	0,181
11	0,553	0,684	30	0,349	0,449	300	0,113	0,148
12	0,532	0,661	35	0,325	0,418	400	0,098	0,128
13	0,514	0,641	40	0,304	0,393	500	0,088	0,115
14	0,497	0,623	45	0,288	0,372	1000	0,062	0,081

Minium, A-54, Appendix H

Таблиця 21. Значення z , що відповідають значенням коефіцієнта кореляції Пірсона r

r_{xy}	Соті частки коефіцієнта кореляції									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
0,2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,310	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,951	0,973	0,996	1,020	1,045	1,071
0,8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
0,9	1,472	1,528	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,995	3,106	3,250	3,453	3,800

Лакін, табл. XXII, с. 344

Таблиця 22. Значення $\frac{6}{n^3 - n}$
для рангового коефіцієнта кореляції Спірмена r_s

n	$\frac{6}{n^3 - n}$	n	$\frac{6}{n^3 - n}$	n	$\frac{6}{n^3 - n}$
		11	0,00454	21	0,00065
		12	0,00350	22	0,00056
3	0,25000	13	0,00275	23	0,00049
4	0,10000	14	0,00220	24	0,00044
5	0,05000	15	0,00179	25	0,00038
6	0,02857	16	0,00147	26	0,000342
7	0,01786	17	0,00122	27	0,000305
8	0,01190	18	0,00103	28	0,000274
9	0,00833	19	0,00088	29	0,000246
10	0,00606	20	0,00075	30	0,000222

Герентьев, XXXII, с. 149

Таблиця 23. Критичні значення коефіцієнта кореляції рангів Спірмена r_s при
рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$ (n – число парних значень)

n	$r_{s,0.05}$	$r_{s,0.01}$	n	$r_{s,0.05}$	$r_{s,0.01}$	n	$r_{s,0.05}$	$r_{s,0.01}$
5	0,94	-	17	0,48	0,62	29	0,37	0,48
6	0,85	-	18	0,47	0,60	30	0,36	0,47
7	0,78	0,94	19	0,46	0,58	31	0,36	0,46
8	0,72	0,88	20	0,45	0,57	32	0,36	0,45
9	0,68	0,83	21	0,44	0,56	33	0,34	0,45
10	0,64	0,79	22	0,43	0,54	34	0,34	0,44
11	0,61	0,76	23	0,42	0,53	35	0,33	0,43
12	0,58	0,73	24	0,41	0,52	36	0,33	0,43
13	0,56	0,70	25	0,40	0,51	37	0,33	0,42
14	0,54	0,68	26	0,39	0,50	38	0,32	0,41
15	0,52	0,66	27	0,38	0,49	39	0,32	0,41
16	0,50	0,64	28	0,38	0,48	40	0,31	0,40

кін, XXIII, с. 344; Герентьев, XXXIII, с. 149

Таблиця 24. Значення величини q для рівня значущості p ,
внутрішньогрупового числа ступенів свободи $df_s = N - a$
і кількості груп a (дорівнює числу градацій фактора)

df_s	p	a – кількість груп									
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	0,05	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99	7,17
	0,01	5,70	6,98	7,80	8,42	8,91	9,32	9,67	9,97	10,24	10,48
6	0,05	3,46	4,34	4,90	5,30	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65
	0,01	5,24	6,33	7,03	7,56	7,97	8,32	8,61	8,87	9,10	9,30
7	0,05	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,30
	0,01	4,95	5,92	6,54	7,01	7,37	7,68	7,94	8,17	8,37	8,55
8	0,05	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05
	0,01	4,75	5,64	6,20	6,62	6,96	7,24	7,47	7,68	7,86	8,03
9	0,05	3,20	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74	5,87
	0,01	4,60	5,43	5,96	6,35	6,66	6,91	7,13	7,33	7,49	7,65
10	0,05	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60	5,72
	0,01	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36
11	0,05	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61
	0,01	4,39	5,15	5,62	5,97	6,25	6,48	6,67	6,84	6,99	7,13
12	0,05	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39	5,51
	0,01	4,32	5,05	5,50	5,84	6,10	6,32	6,51	6,67	6,81	6,94
13	0,05	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,43
	0,01	4,26	4,96	5,40	5,73	5,98	6,19	6,37	6,53	6,67	6,79
14	0,05	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36
	0,01	4,21	4,89	5,32	5,63	5,88	6,08	6,26	6,41	6,54	6,66
15	0,05	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31
	0,01	4,17	4,84	5,25	5,56	5,80	5,99	6,16	6,31	6,44	6,55

Sprinthall, Table G, p. 405

Таблиця 25. Критичні значення критерію H Краскла–Уолліса при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$

n_1	n_2	n_3	$H_{0,05}$	$H_{0,01}$	n_1	n_2	n_3	$H_{0,05}$	$H_{0,01}$
1	2	4	4,80	-	3	3	3	5,60	7,20
1	2	5	5,00	-	3	3	4	5,73	6,75
1	3	3	5,14	-	3	3	5	5,65	7,08
1	3	4	5,21	-	3	3	6	5,62	7,41
1	3	5	4,96	-	3	4	4	5,62	7,14
1	4	4	4,97	6,67	3	4	5	5,63	7,45
1	4	5	4,98	6,95	3	4	6	5,61	7,41
1	5	5	5,12	7,31	3	5	5	5,71	7,54
2	2	3	4,71	-	3	5	6	5,60	7,59
2	2	4	5,33	-	3	6	6	5,63	7,45
2	2	5	5,16	6,53	4	4	4	5,69	7,65
2	2	6	5,35	6,65	4	4	5	5,62	7,76
2	3	3	5,36	-	4	4	6	5,68	7,94
2	3	4	5,44	6,44	4	5	5	5,64	7,77
2	3	5	5,25	6,82	4	5	6	5,66	7,94
2	3	6	5,35	6,97	4	6	6	5,72	8,00
2	4	4	5,45	7,04	5	5	5	5,78	8,00
2	4	5	5,27	7,12	5	5	6	5,73	8,03
2	4	6	5,34	7,34	5	6	6	5,76	8,12
2	5	5	5,34	7,27	6	6	6	5,80	8,22
2	5	6	5,34	7,38					

акін, с. 343, табл. XX; Терентьев, с. 150, табл. XXXVII

Таблиця 26. Критичні значення критерію χ^2_R Фрідмана при рівнях значущості $p = 0,05$ та $p = 0,01$
(n – число дат у кожній градації, a – число градацій)

n	$a = 3$		$a = 4$		n	$a = 3$	
	$\chi^2_{R0,05}$	$\chi^2_{R0,01}$	$\chi^2_{R0,05}$	$\chi^2_{R0,01}$		$\chi^2_{R0,05}$	$\chi^2_{R0,01}$
2			6,00		9	6,22	8,67
3	6,00		7,40	9,00	10	6,20	9,60
4	6,50	8,00	7,80	9,60	11	6,54	9,46
5	6,40	8,40	7,80	9,96	12	6,17	9,50
6	7,00	9,00	7,60	10,20	13	6,00	9,38
7	7,14	8,86	7,80	10,37	14	6,14	9,00
8	6,25	9,00	7,65	70,35	15	6,40	8,93

акін, с. 342, табл. XIX; Терентьев, с. 150, табл. XXXVI

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

a	Число градацій дисперсійного комплексу
As	Показник асиметрії
b	Коефіцієнт лінійної регресії
Cs	Показник точності дослідження
Cv	Коефіцієнт варіації
d	Нормована різниця, лінійне відхилення
df	Число ступенів свободи
Ex	Показник експесу
F	Критерій Фішера
f	Частота
H	Критерій Краскла–Уолліса
HSD	Величина для порівняння групових середніх дисперсійного комплексу
H_A	Альтернативна гіпотеза
H_0	Нульова гіпотеза
h_{xy}	Коефіцієнт кореляційного відношення X за Y
p	Імовірність події, рівень значущості
z	Нормоване відхилення
K	Число класів варіаційного ряду, поліхоричний показник зв'язку
k	Число обмежень варіації в статистичній сукупності
m	Число сприятливих випробувань, число дат із певною ознакою, число об'єктів, що належать до однієї категорії
Me	Медіана
Mo	Мода
MS	Середній квадрат
N	Обсяг генеральної сукупності
n	Обсяг вибірки, число всіх можливих випробувань
p	Імовірність події, рівень значущості
R	Розмах варіації, ранг дати

r	Коефіцієнт кореляції Пірсона
r^2	Коефіцієнт детермінації
r_A	Тетрахоричний показник зв'язку
r_{BS}	Бісеріальний коефіцієнт кореляції
r_s	Коефіцієнт кореляції рангів Спірмена
$r_{x(yz)}$	Коефіцієнт множинної кореляції ознаки X з ознаками Y і Z
$r_{xy(z)}$	Коефіцієнт часткової кореляції між ознаками X та Y при постійному Z
s	Стандартне відхилення
s^2	Дисперсія
SS	Сума квадратів
S_{r_A}	Статистична похибка тетрахоричного показника зв'язку
S_{A_s}	Статистична похибка показника асиметрії
S_{C_v}	Статистична похибка коефіцієнта варіації
S_d	Похибка різниці
S_{Ex}	Статистична похибка показника ексцесу
s_h	Статистична похибка кореляційного відношення
S_m	Статистична похибка абсолютної частоти
S_{Me}	Статистична похибка медіани
$S_p, S_{p\%}$	Статистична похибка частки
s_r	Статистична похибка коефіцієнта кореляції
S_s	Статистична похибка стандартного відхилення
S_{s^2}	Статистична похибка дисперсії
\bar{s}	Статистична похибка середньої арифметичної
$\bar{\bar{s}}$	Статистична похибка загальної середньої для декількох вибірок
S_{η^2}	Статистична похибка непараметричного показника сили впливу фактора
S_{Π}	Статистична похибка добутку середніх
S_{Σ}	Статистична похибка суми середніх
S_q	Статистична похибка частки середніх
\bar{S}^2	Зважена дисперсія
T	Критерій Уїлкоксона

t	Критерій Стюдента, нормоване відхилення
\bar{x}	Середня арифметична
$\bar{\bar{x}}$	Зважена середня арифметична
\bar{x}_g	Середня геометрична
\bar{x}_h	Середня гармонійна
\bar{x}_s	Середня квадратична
\bar{x}_q	Середня кубічна
U	Критерій Уїлкоксона (Манна-Уїтні)
W	Критерій Шаліро-Уїлка
X	Критерій Ван-дер-Вардена
z	Критерій знаків, z -перетворення Фішера
α	Похибка першого роду
β	Похибка другого роду
γ	Критерій криволінійності
η^2	Непараметричний показник сили впливу фактора
λ	Класовий інтервал
μ	Генеральна середня арифметична
ρ	Генеральний показник зв'язку
σ	Генеральна дисперсія
τ	Критерій випадіння
Φ	Переведений у радіани генеральний відсоток
ϕ	Переведений у радіани вибіркового відсоток
χ^2	Критерій Пірсона
χ_r^2	Критерій Фрідмана

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

Артефакт I: 40, 41; II: 5
Асиметрія I: 119, 166, 167, 170, 171; II: 149
Бернуллі формула I: 111
Бонферроні поправка II: 40–44
Варіаційний ряд I: 48, 56, 57
 безінтервальний I: 56, 57
 інтервальний I: 56, 57
Варіація
 внутрішньогрупова II: 98, 99
 загальна II: 98, 99
 кількісна I: 56
 міжгрупова II: 98, 99
 якісна I: 65
Вибірка
 зміщена I: 25
 репрезентативна I: 25
Вибірки
 залежні I: 31; II: 26
 незалежні I: 31; II: 21
 порівнянні I: 27
Вірогідність I: 147, 148; II: 53, 54, 67, 90
Гаусса крива I: 115, 117
Генеральний параметр I: 19, 126, 137, 138
Гістограма I: 59, 60
Градації фактора II: 95

Група
 експериментальна (основна, дослідна) I: 20, 21, 28–30
 контрольна I: 20, 21, 28–30
Групи
 залежні II: 12, 17, 123
 незалежні II: 12, 103, 109, 120
Дати
 випадні I: 40, 41; II: 5–9
 попарно зв'язані I: 50
Дисперсійний аналіз II: 95
 двофакторний II: 96
 непараметричний II: 100, 117, 120
 однофакторний II: 44, 96, 103
 параметричний II: 100
Дисперсійний комплекс II: 97
 двофакторний II: 97
 нерівномірний II: 97, 103, 120
 однофакторний II: 97
 рівномірний II: 97, 109, 120, 123
Дисперсія I: 80, 100; II: 15–17, 103, 110
Діаграма
 кругова I: 70, 71
 стовпчаста I: 66, 67
Добір об'єктів у вибірку I: 23, 24
Довірчий інтервал I: 136–139; II: 53, 90
Довірчі ймовірності I: 136–137

Експеримент I: 20, 32
 двічі сліпий I: 35
 «до й після» I: 21; II: 12
 «контроль–дослід» I: 21, 35; II: 12, 13
 сліпий I: 32
Експес I: 119, 166, 167, 170, 171; II: 149
Закон
 великих чисел I: 106
 плюс–мінус трьох сигм I: 118
Імовірність I: 104, 105
Клас I: 56–58
Класовий інтервал I: 56–58
Класові межі I: 56–58
Коефіцієнт
 асоціації
 варіації I: 80, 100, 101
 детермінації II: 69
 кореляції бісеріальний II: 79, 80
 кореляції Пірсона I: 19; II: 51, 71, 89, 165
 кореляції рангів Спірмена II: 70, 166
 лінійної регресії II: 86–89
 множинної кореляції II: 61–63
 часткової кореляції II: 63, 64
Кореляційне відношення II: 66, 67
Кореляційний аналіз II: 50
Кореляційний зв'язок II: 50
 зворотний II: 50
 криволінійний (нелінійний) II: 66
 прямий II: 50
 прямолінійний (лінійний) II: 50
Корреляція II: 54
 множинна II: 61–63
 часткова II: 63, 64
Критерій
 Ван дер Вардена II: 13, 24–25, 162
 знаків I: 150; II: 11, 26–28, 163
 Краскла–Уолліса I: 150; II: 100, 120, 121
 криволінійності II: 70

Пірсона (χ^2) I: 150, 172; II: 11, 35–38, 75, 77, 78, 164
Стюдента I: 149, 152, 165, 167; II: 16–18, 44, 53, 58–61, 64, 67, 71, 76, 80, 145
Уїлкоксона I: 150; II: 11, 26, 27, 30, 31, 163
Уїлкоксона (Манна–Уїтні) I: 152; II: 11, 12, 21, 22, 163
Фішера I: 149, 165; II: 11, 15, 33, 100, 102, 105, 111, 113, 114, 153–158
Фрідмана II: 100, 123, 124
Шапиро–Уїлка I: 172, 173; II: 150, 151
Кумулята I: 61
Лінійне відхилення I: 97
Лінія регресії II: 85–88
Медіана I: 80, 81, 93–95; II: 11
Межі варіації I: 96
Метод
 вибірковий I: 22
 кутового перетворення (кутової трансформації, арксинус–перетворення) I: 139, 140; II: 11, 12
 Плохінського II: 113
 Снедекора II: 114
 Тьюкі II: 44, 115
 Шеффе II: 44, 117
Мода I: 80, 81, 92, 93; II: 11
Модальний клас I: 92, 93
Наближені числа I: 37
Нормальна крива I: 115, 117
Нормована різниця I: 159
Нормоване відхилення I: 117
Ньютона біном I: 112
Огіва I: 61
Ознаки
 альтернативні I: 49
 безперервні I: 48
 дискретні I: 48

кількісні I: 48, 56; II: 11, 13, 20, 51, 66, 70, 79, 103
 прості I: 48
 рангові (порядкові) I: 48; II: 11, 20, 70
 з множинною характеристикою (складові) I: 48
 якісні I: 48; II: 11, 33, 75, 79, 118
 Оцінка генерального параметра I: 125, 136
 Перевірка на нормальність I: 165, 166
 Події
 випадкові I: 105
 достовірні I: 105
 неможливі I: 105
 несумісні I: 106
 сумісні I: 106, 107
 Поліхоричний показник зв'язку II: 77
 Потужність статистичного критерію I: 158, 159
 Похибки
 другого роду I: 126, 148, 158
 методичні I: 38, 39
 першого роду I: 126, 148
 стандартні (статистичні, репрезентативності, вибіркової) I: 38, 125–131
 Принцип випадковості I: 22, 23
 Ранг I: 54, 55
 Рандомізація I: 25
 Ранжування I: 54, 55
 Регресійний аналіз II: 85
 Регресія II: 85
 лінійна II: 86
 нелінійна II: 91
 Рівень значущості I: 147, 148, 160, 161
 Рівняння регресії II: 85, 86, 89,
 Розмах мінливості (варіації, варіювання) I: 56, 80
 Розподіл
 біноміальний I: 111–113
 нормальний I: 115–119, 128, 165; II: 6, 51
 Пуассона I: 120–122
 стандартний нормальний I: 117
 Середній квадрат II: 103
 Середня
 арифметична I: 19, 80–82; II: 11, 16
 зважена I: 82
 гармонійна I: 90, 91
 геометрична I: 83–86
 групова II: 115
 квадратична I: 86–88
 кубічна I: 89, 90
 Сила впливу фактора II: 113, 114, 125, 126
 Скаттер-діаграма (діаграма розсіювання) II: 52, 86, 87
 Спостереження I: 20
 Стандартне (середньоквадратичне) відхилення I: 19, 26, 80, 97–99, 126, 127
 для якісних дат I: 99
 сумарної групи I: 99
 Старджеса формула I: 56
 Статистична похибка I: 26, 38, 125–131, 159
 абсолютної частоти
 вибіркової частки I: 133, 134
 дисперсії I: 133
 добутку середніх I: 132

загальної (незваженої) середньої I: 131
 зваженої середньої I: 131
 коефіцієнта асиметрії I: 167
 коефіцієнта варіації I: 133
 коефіцієнта ексцесу I: 167
 коефіцієнта кореляції II: 52, 53
 коефіцієнта регресії II: 90
 кореляційного відношення II: 67
 медіани I: 133
 показника сили впливу фактора різниці
 середньої арифметичної I: 130, 135, 136
 стандартного відхилення I: 132
 суми середніх I: 132
 тетрахоричного показника зв'язку II: 75
 частки
 частки середніх I: 132
 Статистичний вплив фактора
 Статистичні гіпотези I: 125, 145
 альтернативна I: 145, 146
 нульова I: 125, 145–147, II: 98
 Статистичні критерії I: 149–151
 двосторонні I: 153, 154, 157, 162
 непараметричні I: 150
 односторонні I: 153–155, 157, 162
 параметричні I: 149
 Сукупність I: 16–19
 вибіркова (вибірка) I: 16, 18, 19, 22, 125, 165
 генеральна I: 16–19, 22, 125–127, 165
 Сума квадратів II: 100, 101–105, 110, 118
 Таблиці I: 65
 багатопільні II: 77
 кореляційні II: 75, 77
 статистичних критеріїв I: 151, 152; II: 143
 чотирипільні II: 75
 Тетрахоричний показник зв'язку II: 75
 Точність
 дослідження I: 36, 37, 128
 вимірів I: 36
 обчислень I: 36
 статистична 36, 37
 Фактор II: 95, 96, 113
 Функція
 логарифмічна II: 93
 показова II: 92, 93
 степенева II: 91, 92
 Часовий тренд I: 28, 29
 Частка I: 50, 65
 Частки вибіркової
 Частоти I: 51, 52,
 абсолютні I: 51, 52
 відносні I: 52
 кумулятивні (накопичені) I: 52
 Частотний полігон I: 60, 61
 Частотний розподіл I: 50
 абсолютний I: 50
 відносний I: 50, 52
 кумулятивний I: 50, 53
 Число ступенів свободи I: 152
 z-перетворення Фішера II: 58

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Атраментова Любов Олексіївна

(Доктор біологічних наук, професор кафедри генетики і цитології
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна)

Утєвська Ольга Михайлівна

(Кандидат біологічних наук, доцент кафедри генетики і цитології
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна)

БІОМЕТРІЯ **II. ПОРІВНЯННЯ ГРУП** **I АНАЛІЗ ЗВ'ЯЗКУ**

НБ ПНУС



733514

Підписано до друку 16.09.07. Формат 60x90^{1/16}.

Папір офсетний. Друк офсетний.

Умов. друк. арк. 9,3. Обл. вид. арк. 11,0.

Зам. № 15603-08

Наклад 2600 прим.

Надруковано у друкарні «Тріада+» м. Харків, вул. Киргизька, 19.
Тел.: (057) 757-98-16, 703-12-21.

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 279 від 13.12.2000.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 7194865, тел./факс (057) 7195867.

Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. Email: office@ranok.kharkov.ua