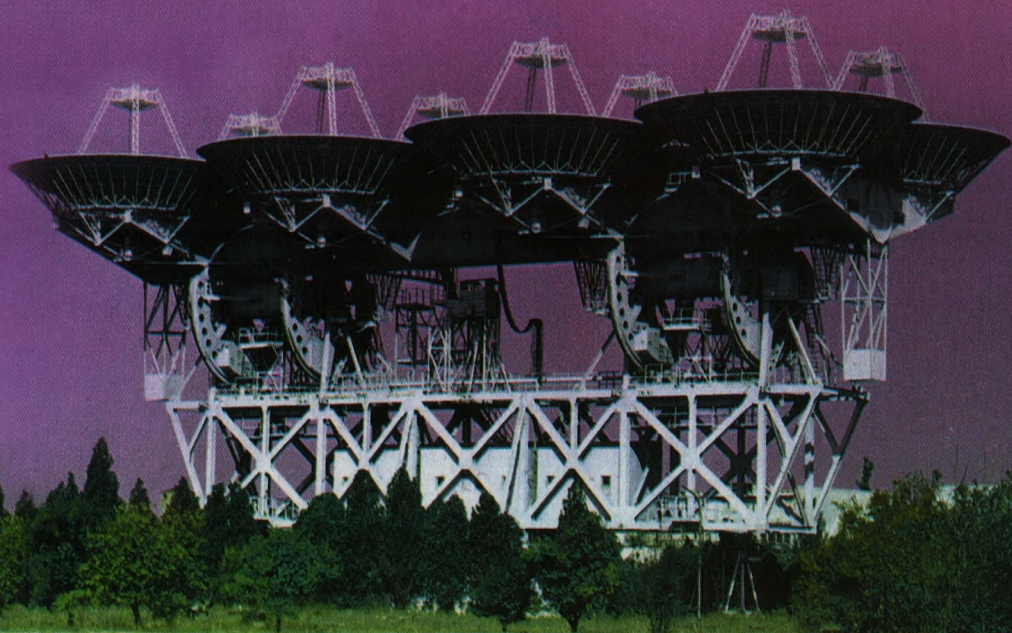


32.84273

М 62

**А. О. Мінаков  
О. Ф. Тирнов**



# СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Частина II

За основу підручника, який складається з трьох частин, став курс лекцій зі статистичної радіофізики, що викладається у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна. Уперше цей курс було прочитано понад тридцять років тому професором кафедри космічної радіофізики П.В. Бліхом. У 1980-ті роки професор цієї ж кафедри І.М. Фукс доповнив лекційний курс розділами з розсіювання електромагнітних хвиль на випадкових поверхнях. Починаючи з 1998 р. суттєво перероблений і доповнений курс читається авторами підручника.

Без сумніву, охопити широке коло питань, що належать до статистичної радіофізики, неможливо. Головна мета авторів — стисло, строго і логічно викласти матеріал відповідно до сучасних стандартів освіти. Книги написано у самодостатній формі таким чином, щоб під час вивчення курсу у студента не виникало необхідності звертатися до додаткових літературних джерел. Окрім цього, на прикладах простих фізичних моделей отримано формули і виведено закони, що мають загальний характер і широкий спектр застосування.

У частині II розглянуто флуктуаційні явища в радіотехніці, а також основи статистичної теорії поширення хвиль.

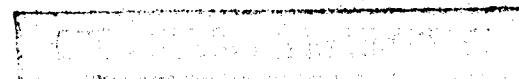
За редакцією редактору — акад.  
цензен-  
иву ка-  
ального  
ківський  
О.О. Зе-  
корисні  
опомогу,

**А. О. Мінаков    О. Ф. Тирнов**

# **СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА**

**Частина II.    Флуктуаційні явища в радіотехніці  
та основи статистичної теорії  
поширення хвиль**

*Затверджено Міністерством освіти і науки України  
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*



НБ ПНУС



733524

Харків  
«Веста»  
2007

УДК 538.56  
ББК 32.84я73  
М62

Затверджено Міністерством освіти і науки України  
(Лист № 1.4/18-Г-1476.1 від 06.09.2007)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено.

Редактор за спеціальністю — В. М. Шульга, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, лауреат Державної премії України, завідувач відділу Радіоастрономічного інституту НАН України

**Рецензенти:**

Кафедра прийому, передачі та обробки сигналів Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» (завідувач — доктор технічних наук, професор О. О. Зеленський); В. Б. Рассказовський, доктор технічних наук, професор, лауреат премії АН України ім. акад. К. Д. Синельникова, завідувач відділу Інституту радіофізики і електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України

*Statistical Radio Physics* provides a rigorous, condensed and logical treatment of the subject and meets high education standards. The textbook is written in a self-consistent manner, and no additional literature is required to have the subject studied. Simple physical models are used to derive the formulae and laws that are general in nature and of much practical use. There are problems that illustrate the theory and others that apply the theory to issues of current interest in order to facilitate the assimilation of the material.

The book has been planned for MS and Ph.D. students and as a reference book for researchers.

Мінаков А. О., Тирнов О. Ф.

М62 Статистична радіофізика: Підруч. для студ. вищ. навч. закл.: У 3 ч. — Х.: Веста, 2007. — Ч. 2: Флуктуаційні явища в радіотехніці та основ статистичної теорії поширення хвиль. — 2007. — 176 с.

ISBN 978-966-08-3051-6

ISBN 978-966-08-3053-0 (ч. 2)

У частині II підручника розглянуті флуктуаційні явища в радіотехніці, а також основи статистичної теорії поширення хвиль. Книгу написано в самодостатній формі, що не потребує використання додаткової літератури. Теоретичний матеріал супроводжується типовими прикладами, які полегшують розуміння та засвоєння матеріалу.

Призначається для студентів старших курсів, аспірантів і наукових співробітників радіофізичних і радіотехнічних спеціальностей університетів.

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

УДК 538.56  
ББК 32.84я73

ISBN 978-966-08-3051-6

ISBN 978-966-08-3053-0 (ч. 2)

© Мінаков А. О., Тирнов О. Ф., 2007

© Видавництво «Веста», 2007

## Зміст

### Розділ III. ФЛУКТУАЦІЙНІ ЯВИЩА В РАДІОТЕХНІЦІ

§ 9. Броунівський рух .....	5
9.1. Оцінки швидкості руху броунівської частинки .....	6
9.2. Аналогія між рухом броунівської частинки і флуктуаціями струму в електричному колі .....	8
9.3. Аналіз рівняння руху броунівської частинки .....	11
9.4. Визначення статистичних моментів флуктуацій швидкості .....	12
9.5. Статистичні характеристики зміщення частинки .....	15
9.6. Густина розподілу ймовірностей швидкості і зміщення частинки .....	18
9.7. Енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки .....	20
Задачі .....	24
§ 10. Теплові флуктуації у радіотехнічних колах .....	27
10.1. Формула Найквіста .....	28
10.2. Спектральний аналіз процесів зі стаціонарним прирошенням .....	33
10.3. Аналіз теплових флуктуацій у коливальному контурі .....	37
10.4. Еквівалентна шумова температура .....	40
10.5. Область застосування формули Найквіста .....	41
10.6. Флуктуаційно-дисипаційна теорема .....	43
Задачі .....	49
§ 11. Дробовий шум .....	51
11.1. Визначення статистичних характеристик сили струму .....	54
11.2. Енергетичний спектр дробового шуму .....	57
11.3. Еквівалентний шумовий опір .....	61
Задачі .....	62

§ 12. Флуктуації в автоколивальних системах .....	66
12.1. Побудова замкнутого рівняння для сили струму .....	66
12.2. Укорочені рівняння Ван-дер-Поля .....	71
12.3. Аналіз розв'язання укорочених рівнянь Ван-дер-Поля .....	76
12.4. Урахування випадкових факторів .....	79

#### **Розділ IV. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ**

§ 13. Випадкові поля і хвилі .....	87
13.1. Статистичний опис випадкових полів .....	88
13.2. Моменти випадкового поля .....	88
13.3. Статистично однорідні поля .....	90
13.4. Спектральні зображення для однорідних випадкових полів .....	93
13.5. Випадкові хвильові поля .....	99
Задачі .....	102
§ 14. Метод малих збурень .....	104
14.1. Побудова розв'язку Борнівського наближення .....	105
14.2. Середнє поле і середня інтенсивність .....	117
14.3. Індикатриса розсіювання .....	122
14.4. Межі застосування борнівського наближення .....	127
14.5. Спектр розсіяного сигналу .....	130
Задачі .....	140
§ 15. Методи геометричної оптики і плавних збурень .....	143
15.1. Метод геометричної оптики .....	144
15.2. Наближення малих збурень у методі геометричної оптики .....	149
15.3. Метод плавних збурень (метод Ритова) .....	154
15.4. Наближення малих збурень у методі Ритова .....	156
15.5. Визначення статистичних характеристик .....	162
15.6. Область застосування методу геометричної оптики .....	169
Задачі .....	172
Література .....	176

### **Розділ III ФЛУКТУАЦІЙНІ ЯВИЩА В РАДІОТЕХНІЦІ**

#### **§ 9. Броунівський рух**

Застосовуючи методи теорії випадкових величин для дослідження флуктуаційних явищ в електричних колах, ми досі не цікавилися фізичною природою цих флуктуацій. Головним чином мова йшла тільки про способи опису флуктуаційних струмів і напруг за допомогою абстрактних випадкових процесів і про закони їх перетворення при проходженні через найпростіші радіотехнічні кола. Виникнення ж цих флуктуацій може бути зумовлене різноманітними фізичними явищами. Однією з найпоширеніших причин флуктуацій в електричних колах є хаотичний тепловий рух мікроскопічних носіїв електричного заряду. Цей тепловий рух призводить до флуктуацій макроскопічних параметрів – струмів і напруг у різноманітних елементах кола так само, як зіткнення з нейтральними атомами і молекулами є причиною броунівського руху у завислих у рідині або газі макроскопічних частинок. Далі ми побачимо: вказана аналогія є настільки глибокою, що ці фізичні процеси описуються тими самими математичними рівняннями. Дослідження ж броунівського руху з точки зору методології є значно простішим, оскільки ґрунтується тільки на простих рівняннях механіки, а не електродинаміки. Крім цього опис броунівського руху є значно наочнішим і очевиднішим у буквальному розумінні – цей рух справді можна побачити за допомогою найпростішого мікроскопа. Вперше цей рух спостерігав у 1828 р. Роберт Браун, розглядаючи у мікроскоп завислий у воді пилок рослин. Окремі пилинки пересувалися у воді без жодної видимої причини, і виникало враження, ніби вони живі. Виявилось, що так само поведуться частинки буквально всіх речовин, якщо вони достатньо малих розмірів.



## 9.1. Оцінки швидкості руху броунівської частинки

Спробуємо оцінити характерну швидкість руху  $V$ , що набуває броунівська частинка з масою  $M$  після зіткнення з мікроскопічними частинками (молекулами) з масою  $m$  (рис.9.1).

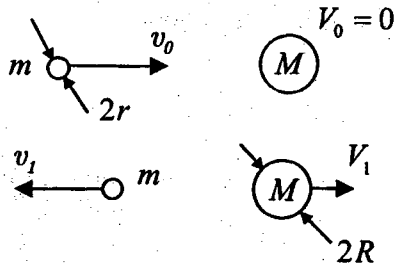


Рис. 9.1

Запишемо закон збереження імпульсу для системи мікро- і макрочастинки, розглядаючи для простоти лобове зіткнення:

$$mv_0 + MV_0 = mv_1 + MV_1,$$

де  $v_0, V_0$  і  $v_1, V_1$  — значення швидкостей мікро- і макрочастинки до і після зіткнення відповідно. Якщо перед зіткненням макрочастинка  $M$  перебувала у спокої ( $V_0 = 0$ ), то легка мікроскопічна частинка  $m$  ( $m \ll M$ ), що налетіла на макрочастинку зі швидкістю  $v_0$ , відскочить у протилежному напрямку приблизно з тою самою швидкістю  $v_1 \approx -v_0$ , як від нескінченно важкої стінки. При цьому імпульс частинки  $m$  дорівнюватиме  $mv_1 \approx -mv_0$  і, отже, броунівська частинка  $M$  набуває в результаті зіткнення імпульсу

$$MV_1 \approx 2mv_0. \quad (9.1)$$

Для спрощення записів далі будемо опускати індекси для швидкостей, що розглядаються, ( $v_0 \equiv v$ ,  $V_1 \equiv V$ ). Згідно з (9.1) в результаті лобового зіткнення макроскопічна частинка набуває швидкості

$$V \approx 2v \frac{m}{M}. \quad (9.2)$$

Характерна швидкість руху  $v$  мікроскопічних частин (молекул) визначається температурою  $T$ , при якій вони перебувають. Величину  $v$  можна оцінити за середньою кінетичною енергією молекул

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

де  $k = 11,38 \cdot 10^{-16}$  ерг/град — стала Больцмана. Вважаючи для оцінок  $m \approx 10^{-22}$  г,  $T \approx 300$  К, отримуємо

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 3 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.3)$$

Для оцінки відношення мас  $m/M$  будемо вважати, що характерний лінійний розмір броунівської частинки приблизно дорівнює  $R \approx 10^{-3}$  см, розмір молекул  $r \approx 10^{-7}$  см, а середня "густина" макро- і мікроскопічних частин приблизно однакова, так що

$$\frac{m}{M} \approx \left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 10^{-12}. \quad (9.4)$$

Підставляючи (9.3) і (9.4) у (9.2), отримуємо „механічну” оцінку:

$$V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (9.5)$$

яка виявляється на чотири порядки меншою за експериментально (візуально) отриману величину  $V_{\text{експ}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Зрозуміло, що причина цієї розбіжності у тому, що ми врахували зіткнення тільки з однією молекулою, а насправді вони безперервно бомбардують велику частинку, внаслідок чого вона набуває кінетичної енергії, дорівняної середній тепловій енергії кожної молекули (макрочастинку можна розглядати як дуже велику молекулу, що перебуває у термодинамічній рівновазі з оточуючим середовищем:

$$M \frac{V^2}{2} = m \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Звідси впливає „термодинамічна” оцінка:

$$V_{\text{терм}} = v \sqrt{\frac{m}{M}} \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (9.6)$$

Результат цього розрахунку також не задовольняє — він на два порядки перевищує експериментальне значення  $V_{\text{експ}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  (рис. 9.2).

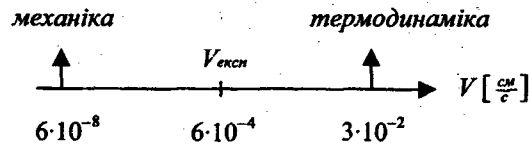


Рис. 9.2

У чому ж причина цих розбіжностей? Вичерпну відповідь дає кінетична теорія броунівського руху, розроблена на початку XX-го століття Ейнштейном та Смолуховським (1905), і Ланжевеном (1908). Деякі питання цієї теорії ми розглянемо у наступних розділах цього параграфа.

## 9.2. Аналогія між рухом броунівської частинки і флуктуаціями струму в електричному колі

Для встановлення аналогії між рухом броунівської частинки і флуктуаціями в електричних колах нам достатньо розглянути тільки одновимірний рух частинки, наприклад, уздовж осі  $OX$ . Нехай

$x(t)$  — координата частинки в момент часу  $t$ . Рух частинки описується другим законом Ньютона:

$$M \frac{dV}{dt} = f(t), \quad (9.7)$$

де  $V = dx/dt$ , а  $f(t)$  — випадкова сила, що діє на частинку з боку всіх молекул. Зрозуміло, що середнє значення цієї сили, взагалі кажучи, відмінне від нуля. Справді, відомо, що на макроскопічний об'єкт, що рухається у середовищі зі швидкістю  $V$ , діє регулярна сила тертя  $f_{\text{тер}}$ , пропорційна до швидкості  $V$  і спрямована протилежно до неї

$$f_{\text{тер}} = -\gamma V. \quad (9.8)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\gamma$  між силою тертя і швидкістю називають **коефіцієнтом в'язкого тертя**. Наприклад, для твердої сферичної частинки радіусом  $R$  при ламінарному обтіканні її рідиною з коефіцієнтом в'язкості  $\mu$  має місце формула Стокса

$$\gamma = 6\pi\mu R. \quad (9.9)$$

Позначимо через  $F(t)$  флуктуючу частину випадкової сили  $f(t)$ :

$$F(t) = f(t) - f_{\text{тер}}(t), \quad \langle F(t) \rangle = 0. \quad (9.10)$$

Скориставшись (9.8), формулу (9.7) можна переписати у вигляді

$$M \frac{dV}{dt} + \gamma V = F(t). \quad (9.11)$$

Зауважимо тепер, що точно таким самим рівнянням описуються флуктуації сили струму  $I(t)$  в найпростішому електричному колі, зображеному на рис. 9.3:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t). \quad (9.12)$$

Тут у ролі випадкової сили  $F(t)$ , що викликає флуктуації швидкості  $V$  броунівської частинки, виступає **випадкова ЕРС** —  $E(t)$ , яка зобов'язана своїм виникненням випадковому переміщенню носіїв заряду (електронів, іонів та ін.).

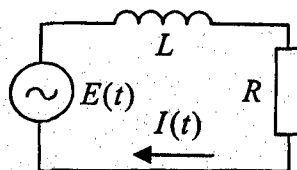


Рис. 9.3

Порівнюючи два рівняння (9.11) і (9.12), легко помітити взаємно однозначну відповідність між величинами, що належать до броунівського руху і до флуктуацій в електричному колі (на рис. 9.3). Цю відповідність подано у вигляді таблиці (табл. 9.1). Виходячи зі знайденої аналогії, будь-які результати, отримані при теоретичному аналізі броунівського руху, можуть бути перенесені в область теплових флуктуацій в електричних колах відповідною заміною позначень. Якщо, наприклад, ми зможемо розрахувати дисперсію швидкості  $\sigma_V^2$ , то відразу отримаємо вираз для дисперсії струму  $\sigma_I^2$  тощо.

Таблиця 9.1

Броунівський рух	Електричне коло
Маса частинки $M$	Індуктивність кола $L$
Коефіцієнт тертя $\gamma$	Активний опір $R$
Швидкість частинки $V(t)$	Сила струму $I(t)$
Зміщення частинки за час $t$ $x(t) = \int_0^t V(t') dt'$	Перенесений заряд за час $t$ $q(t) = \int_0^t I(t') dt'$
Випадкова сила $F(t)$	Випадкова ЕРС $-E(t)$

### 9.3. Аналіз рівняння руху броунівської частинки

Звернемося тепер до розв'язання рівняння (9.11). Розділимо ліву і праву частини на  $M$  і введемо позначення:  $\tau_M = M/\gamma$  – час релаксації,  $a(t) = F(t)/M$  – випадкове прискорення, яке набуває макрочастинка внаслідок зіткнення з мікрочастинками. Після цього рівняння (9.11) набуває вигляду:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau_M} = a(t). \quad (9.13)$$

Згідно з методом варіації довільної сталої спочатку розв'язуємо однорідне рівняння з  $a(t) = 0$ :

$$V(t) = Ce^{-t/\tau_M}.$$

Після цього припускаємо, що стала інтегрування є функцією часу  $t$ :  $C = C(t)$ . І, нарешті, після підстановки шуканого вигляду розв'язку

$$V(t) = C(t)e^{-t/\tau_M} \quad (9.14)$$

у (9.13) отримуємо рівняння для невідомої функції  $C(t)$ :

$$e^{-t/\tau_M} \frac{dC}{dt} = a(t). \quad (9.15)$$

Із (9.15) випливає, що

$$C(t) = \int_0^t a(t') e^{t'/\tau_M} dt' + Const, \quad (9.16)$$

де  $Const$  — стала інтегрування. Підставляючи (9.16) в (9.14) з урахуванням початкових умов  $V(t)|_{t=0} = V_0$ , отримуємо остаточно:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.17)$$

Формула (9.17) розв'язує так звану динамічну частину поставленої задачі, встановлюючи зв'язок між швидкістю

частинки, що нас цікавить, і випадковою силою, яка на цю частинку діє. Функціональний вигляд прискорення  $a(t)$ , яке отримує броунівська частинка внаслідок зіткнень з молекулами, нам, звичайно, невідомий. Тому ми не маємо можливості обчислити в явному вигляді інтеграл від  $a(t)$ , що входить до (9.17). Поки що ми можемо тільки сказати, що  $V(t)$ , так само, як і  $a(t)$ , є випадковою функцією часу і може бути описана тільки статистично. Таким чином, ми доходимо до необхідності розв'язання статистичної задачі.

#### 9.4. Визначення статистичних моментів флуктуацій швидкості

Для обчислення моментів і спектра флуктуацій функції  $V(t)$  необхідно мати деяку апіорну інформацію про статистичні параметри прискорення  $a(t) = F(t)/M$  (випадкової сили, яка діє на частинку з одиничною масою).

*По-перше*, є очевидним (із визначення  $F(t)$  за формулою (9.10)), що середнє значення прискорення  $a(t)$  дорівнює нулю, молекули з рівною ймовірністю „штовхають” броунівську частинку як ліворуч, так і праворуч:

$$\langle a(t) \rangle = 0. \quad (9.18 \text{ а})$$

*По-друге*, якщо зовнішні макроскопічні умови (тиск, температура, густина та ін.) залишаються сталими, то випадковий процес  $a(t)$  є стаціонарним, і, отже, автокореляційна функція прискорення залежить тільки від різниці часів  $t'' - t'$ :

$$\langle a(t')a(t'') \rangle = B_a(t'' - t'). \quad (9.18 \text{ б})$$

Усереднюючи (9.17) за ансамблем реалізацій випадкової функції  $a(t)$ , отримуємо:

$$\langle V(t) \rangle = V_0 e^{-t/\tau_M} + \int_0^t \exp\left\{-\frac{t'-t}{\tau_M}\right\} \langle a(t') \rangle dt' = V_0 e^{-t/\tau_M}. \quad (9.19)$$

Звідси випливає, що при будь-якій початковій швидкості частинки  $V_0$  середнє значення  $\langle V(t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$  прямує до нуля, причому характерний час цього процесу збігається з часом релаксації  $\tau_M$ . Віднявши від (9.17) (9.19), отримуємо формулу для флуктуацій швидкості  $\delta V$ :

$$\delta V(t) = V(t) - \langle V(t) \rangle = \int_0^t \exp\left\{-\frac{t'-t}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \quad (9.20)$$

Піднісши (9.20) до квадрата й усереднюючи, отримуємо вираз для дисперсії флуктуацій швидкості:

$$\sigma_V^2(t) = \langle [\delta V(t)]^2 \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{t'-t}{\tau_M} - \frac{t''-t}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t'). \quad (9.21)$$

Швидкість зміни експоненціальних функцій під знаком інтеграла (9.21) за змінними  $t'$  і  $t''$  визначається часом релаксації  $\tau_M$ . Це макроскопічний час: він характеризує, як ми побачили із (9.19), інерцію важкої частинки у в'язкому середовищі і є тим більшим, чим більша маса  $M$  броунівської частинки. Характерний час, за який змінюється випадкове прискорення  $a(t)$ , визначається за часом  $\tau_m$  зіткнень окремих молекул з макрочастинкою. Цей час значно менший за  $\tau_M$  ( $\tau_m \ll \tau_M$ ) і є по суті „мікроскопічним”. Звідси випливає, що час кореляції випадкового процесу  $a(t)$  можна вважати нехтовно малим порівняно з  $\tau_M$ , і в результаті цього кореляційну функцію  $B_a(t'' - t')$  під інтегралом (9.21) можна замінити на  $\delta$ -функцію:

$$B_a(t'' - t') = A \delta(t'' - t'). \quad (9.22)$$



Тут  $A$  – невідома поки що константа. Підставимо (9.22) у (9.21) і виконаємо інтегрування:

$$\sigma_V^2(t) = A e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{2t'/\tau_M} dt' = \frac{A\tau_M}{2} (1 - e^{-2t/\tau_M}). \quad (9.23)$$

Із (9.19) і (9.23) випливає, що при  $t \gg \tau_M$  середня швидкість макрочастинки  $\bar{V} \rightarrow 0$ , а дисперсія флуктуацій швидкості  $\sigma_V^2$  не залежить від часу і збігається із середнім квадратом швидкості:

$$\sigma_V^2 = \langle (V - \bar{V})^2 \rangle = \overline{V^2} - \bar{V}^2 \approx \overline{V^2} = \frac{1}{2} A \tau_M. \quad (9.24)$$

З іншого боку, у стані термодинамічної рівноваги середня кінетична енергія  $\varepsilon_T$  частинки дорівнює  $kT/2$  (в одновимірному випадку ми маємо справу з поступальним рухом з одним ступенем вільності, на який і припадає енергія  $kT/2$ ):

$$\varepsilon_T = \frac{M \overline{V^2}}{2} = \frac{M \sigma_V^2}{2} = \frac{1}{2} kT. \quad (9.25)$$

Порівнюючи (9.24) і (9.25), отримуємо для сталої  $A$  вираз:

$$A = \frac{2kT}{M\tau_M} = \frac{2kT}{M^2} \gamma. \quad (9.26)$$

З'ясуємо тепер, як зміниться з часом середня кінетична енергія частинки. Враховуючи, що згідно з (9.24)  $\overline{V^2} = \bar{V}^2 + \sigma_V^2$  і, користуючись формулами (9.19) і (9.23), отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{M}{2} (\bar{V}^2 + \sigma_V^2) = \frac{M}{2} \left[ V_0^2 e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{M} (1 - e^{-2t/\tau_M}) \right] = \\ &= \left( \frac{MV_0^2}{2} - \frac{kT}{2} \right) e^{-2t/\tau_M} + \frac{kT}{2} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) e^{-2t/\tau_M} + \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Поведінка  $\varepsilon(t)$  для двох випадків, коли початкова кінетична енергія частинки  $\varepsilon_0 = MV_0^2/2$  більша або менша за середню теплову енергію  $\varepsilon_T = kT/2$ , наведено на рис. 9.4.

Видно, що час встановлення термодинамічної рівноваги між броунівською частинкою і оточуючим середовищем і є часом релаксації  $\tau_M$ . Інакше кажучи, за час  $\tau_M$  частинка або віддає молекулам надлишок своєї початкової енергії  $\varepsilon_0$  відносно середньої теплової  $\varepsilon_T$  (верхня крива на рис. 9.4) або отримує від них енергію, якої бракує до теплової (нижня крива на рис. 9.4).

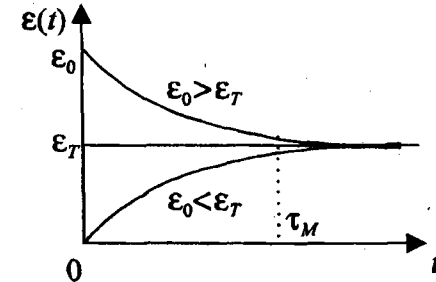


Рис. 9.4

Можна ще сказати, що за час  $\tau_M$  частинка „забуває” про свою початкову швидкість завдяки численним зіткненням з молекулами.

### 9.5. Статистичні характеристики зміщення частинки

Маючи розв'язок динамічної задачі (9.17) для швидкості  $V(t)$ , легко отримати формулу і для зміщення  $x(t)$ . Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  частинка перебувала у точці  $x = 0$  і мала швидкість  $V_0$ . Тоді з визначення  $V = dx/dt$  випливає:

$$x(t) = \int_0^t V(t') dt'. \quad (9.28)$$

Середнє значення зміщення  $\langle x(t) \rangle$  отримується звідси за допомогою (9.19):

$$\langle x(t) \rangle = \int_0^t \langle V(t') \rangle dt' = V_0 \int_0^t e^{-t'/\tau_M} dt' = V_0 \tau_M (1 - e^{-t/\tau_M}). \quad (9.29)$$

Згідно з (9.29) при  $t \ll \tau_M$  зіткнення з молекулами практично не впливають на рух макрочастинки. Вона пересувається вільно і проходить у середньому шлях

$$\langle x(t) \rangle \approx V_0 t \quad (t \ll \tau_M). \quad (9.30)$$

При  $t \gg \tau_M$  це регулярне зміщення сповільнюється (подібно до (9.19) і у границі  $t \rightarrow \infty$  взагалі припиняється, тому за нескінченний час частинка в середньому зміщується на скінченну відстань:

$$\langle x(t) \rangle = V_0 \tau_M \quad (t \gg \tau_M). \quad (9.31)$$

Проте завдяки флуктуації швидкості відбуваються хаотичні зміщення частинки із „положення рівноваги”, так звані випадкові блукання. Флуктуації зміщення частинки  $\delta x$  із положення рівноваги  $\langle x \rangle$  визначаємо за формулою, що випливає з (9.28) з урахуванням (9.20):

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= x(t) - \langle x(t) \rangle = \int_0^t [V(t_1) - \bar{V}(t_1)] dt_1 = \\ &= \int_0^t \delta V(t_1) dt_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \exp\left\{-\frac{t' - t_1}{\tau_M}\right\} a(t') dt'. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Інтеграл за  $dt_1$  легко обчислюється інтегруванням по частинах:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \int_0^t e^{-t_1/\tau_M} dt_1 \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' = -\tau_M e^{-t_1/\tau_M} \int_0^{t_1} e^{t'/\tau_M} a(t') dt' \Big|_{t_1=0}^{t_1=t} + \\ &+ \tau_M \int_0^t a(t_1) dt_1 = \tau_M \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right] a(t') dt'. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Після цього для дисперсії зміщень з урахуванням (9.22) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \langle [\delta x(t)]^2 \rangle = \\ &= \tau_M^2 \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right] \left[1 - \exp\left\{-\frac{t'' - t}{\tau_M}\right\}\right] B_a(t'' - t') = \\ &= A \tau_M^2 \int_0^t \left[1 - \exp\left\{-\frac{t' - t}{\tau_M}\right\}\right]^2 dt'. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Вводячи нову змінну інтегрування  $z = (t' - t)/\tau_M$ , отримуємо:

$$\sigma_x^2(t) = A \tau_M^3 \int_{-t/\tau_M}^0 [1 - e^z]^2 dz = A \tau_M^3 \left[ \frac{t}{\tau_M} - \frac{3}{2} + 2e^{-t/\tau_M} - \frac{1}{2}e^{-2t/\tau_M} \right]. \quad (9.35)$$

Для малих інтервалів часу, коли  $t \ll \tau_M$ , можна розкласти експоненціальні функції у (9.35) в ряд Тейлора (аж до членів третього порядку мализни за параметром  $t/\tau_M \ll 1$ ). У результаті цього отримуємо

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{3} A t^3. \quad (9.36)$$

У протилежному граничному випадку  $t \gg \tau_M$  у формулі (9.35) достатньо залишити тільки перший доданок:

Протилежний національний університет  
імені Василя Стефаника  
17 код 02125266  
НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

$$\sigma_x^2(t) = A\tau_M^2 t = \frac{2kT}{\gamma} t. \quad (9.37)$$

Ми скористалися виразом (9.26) для  $A$  і визначенням  $\tau_M = M/\gamma$ . З отриманих формул видно, що випадковий процес  $x(t)$  завідомо є нестационарним, оскільки його дисперсія  $\sigma_x^2$  зростає з часом: спочатку за кубічним законом  $\sim t^3$ , а згодом за лінійним  $\sim t$  (рис. 9.5).

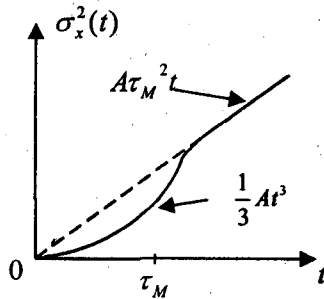


Рис. 9.5

### 9.6. Густини розподілу ймовірностей швидкості і зміщення частинки

Диференціальним рівнянням (9.13) і формулою (9.28) визначаються дві випадкові функції  $V(t)$  і  $x(t)$ . Наведені обчислення дали змогу нам визначити тільки перші два моменти цих випадкових функцій, тоді як питання про вигляд густин розподілу ймовірностей  $W(V, t)$  і  $W(x, t)$  поки що залишається відкритим. Звернемося до формули (9.20), з якої видно, що в кожен момент часу  $t$  флуктуація швидкості  $\delta V(t)$  може подаватися як сума (в границі – інтеграл) більшої кількості незалежних доданків – поштовхів, яких завдають броунівській частинці молекули за час  $t$ . Оскільки  $\tau_M$  – макроскопічний час, то кількість таких поштовхів

дуже велика, а сила кожного з них у середньому однакова: ми припустили, що прискорення  $a(t)$  є стаціонарним процесом. Це дає змогу скористатися центральною граничною теоремою і стверджувати, що функція  $\delta V(t)$  розподілена за нормальним законом, який при  $t \gg \tau_M$  (коли  $\langle V(t) \rangle = 0$  і  $\delta V \approx V$ ) має вигляд

$$W(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_V} e^{-V^2/2\sigma_V^2}.$$

Якщо врахувати тепер, що згідно з (9.24)  $\sigma_V^2 = A\tau_M/2 = kT/M$ , то ми доходимо до розподілу

$$W(V) = \sqrt{\frac{M}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{MV^2}{2kT}\right\}, \quad (9.38)$$

який є не що інше, як розподіл Максвелла для швидкостей частинок у системі при одновимірному русі.

Випадковий процес  $x(t)$  пов'язаний з нормальним випадковим процесом  $V(t)$  лінійним перетворенням (9.28) і, отже, також має нормальний розподіл

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (9.39)$$

При  $t \gg \tau_M$  з (9.37) випливає, що  $\sigma_x^2 = Dt$ , де  $D = 2kT/\gamma$  має зміст коефіцієнта дифузії. Справді, легко впевнитися, що (9.39) є розв'язком одновимірного рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (9.40)$$

яке називають рівнянням дифузії. Звичайне виведення (9.40) ґрунтується на феноменологічних міркуваннях і за своєю суттю є макроскопічним. Застосований нами мікроскопічний підхід, побудований на розв'язанні рівнянь руху (9.13), створює можливість пов'язати коефіцієнт дифузії  $D$  з фізичними параметрами середовища – її температурою і в'язкістю.

### 9.7. Енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки

Для пояснення спостережуваної величини  $V_{\text{експ}}$ , обчислимо енергетичний спектр флуктуацій швидкості броунівської частинки. Як було показано, при  $t \gg \tau_M$  середня швидкість макрочастинки прямує до нуля ( $\bar{V} \rightarrow 0$ ), а дисперсія перестає залежати від часу ( $\sigma_V^2 = \text{Const}$ ). Це свідчить про те, що випадковий процес  $V(t)$  для таких інтервалів часу можна вважати стаціонарним (принаймні, у широкому розумінні) і до нього можна застосувати спектральний аналіз, розглянутий у §6. Із рівняння (9.11) для Фур'є-компонент отримаємо таке співвідношення:

$$(i\omega M + \gamma)C_V(\omega) = C_F(\omega), \quad (9.41)$$

звідки

$$C_V(\omega) = \frac{C_F(\omega)}{i\omega M + \gamma}.$$

Побудуємо тепер корелятор Фур'є-компонент

$$\langle C_V(\omega')C_V^*(\omega'') \rangle = \frac{\langle C_F(\omega')C_F^*(\omega'') \rangle}{(i\omega' M + \gamma)(-i\omega'' M + \gamma)}. \quad (9.42)$$

Для стаціонарного процесу

$$\langle C_F(\omega')C_F^*(\omega'') \rangle = S_F(\omega')\delta(\omega' - \omega''),$$

де  $S_F(\omega)$  — енергетичний спектр сили. З  $\delta$ -корельованості правої частини (9.42) випливає, що і в лівій частині також має стояти  $\delta$ -корелятор вигляду  $\langle C_V(\omega')C_V^*(\omega'') \rangle = S_V(\omega')\delta(\omega' - \omega'')$ . Звідси знаходимо енергетичний спектр швидкості  $S_V(\omega)$  броунівської частинки:

$$S_V(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{(\omega^2 M^2 + \gamma^2)}. \quad (9.43)$$

Енергетичний спектр сили  $S_F(\omega)$  за допомогою формули Вінера-Хінчіна визначається через автокореляційну функцію  $B_F(\tau) = \langle F(t)F(t+\tau) \rangle$ :

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (9.44)$$

У свою чергу, з урахуванням зв'язку між силою і прискоренням  $a(t) = F(t)/M$  згідно з (9.22) маємо

$$B_F(\tau) = M^2 B_a(\tau) = AM^2 \delta(\tau) = 2kT\gamma \delta(\tau). \quad (9.45)$$

Отже,

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma, \quad (9.46)$$

й енергетичний спектр швидкості (9.43) визначається як

$$S_V(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_M^2}, \quad (9.47)$$

де  $\tau_M = M/\gamma$ .

Тепер ми спроможні відповісти на запитання: чому при оцінці швидкості броунівської частинки, проведений на початку параграфа на основі термодинамічного підходу, що привела до формули (9.6), отримано значення, що на два порядки перевищують

експериментальні дані. Аналіз знайденого нами енергетичного спектра  $S_V(\omega)$  свідчить, що він простягається до дуже великих частот  $\omega = \omega_M \approx 1/\tau_M \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$ . З іншого боку, як реєструючий пристрій в експерименті виступає людське око, котре характеризується досить великою інерційністю. Воно фіксує тільки повільні переміщення броунівської частинки і не фіксує швидких. Характерний час фіксації оком переміщення можна оцінити як  $\tau_{ока} \approx 1/16 \text{ с}$  (при частоті 16 і більше кадрів на секунду ми вже не розрізняємо окремих кадрів – рух на екрані здається нам неперервним). У цьому розумінні наше око як прилад, що реєструє зміщення броунівської частинки, можна уподібнити до деякої лінійної системи (фільтра нижніх частот) з передавальною функцією  $K(i\omega)$ . Для лінійних систем енергетичний спектр на виході  $S_{V_{спост}}(\omega)$  (спектр флуктуацій швидкості  $V_{спост} \equiv V_{експ}$ , що спостерігаються) пов'язаний зі спектром вхідного сигналу  $S_V(\omega)$  співвідношенням (7.25):

$$S_{V_{спост}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_V(\omega). \quad (9.48)$$

Для простоти покладемо, що

$$|K(i\omega)| = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{ока}; \\ 0, & \text{при } \omega > \omega_{ока}; \end{cases}$$

де  $\omega_{ока} \approx 1/\tau_{ока} \approx 10 \text{ с}^{-1}$  – верхня частота фіксації оком руху. В результаті для дисперсії флуктуації швидкості, що спостерігається, доходимо такого виразу:

$$\sigma_{V_{спост}}^2 = 2 \int_0^{\omega_{ока}} S_{V_{спост}}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_{ока}} S_V(\omega) d\omega = \frac{2kT}{\pi\gamma} \int_0^{\omega_{ока}} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (9.49)$$

Оскільки  $\omega_{ока} \tau_M \sim 10^{-4} \ll 1$ , підінтегральну функцію у (9.49) можна замінити на одиницю, і ми отримаємо оцінку

$$\sigma_{V_{спост}}^2 = \frac{2kT}{\pi\gamma} \omega_{ока} = \frac{2}{\pi} \sigma_V^2 \omega_{ока} \tau_M \quad (9.50)$$

(ми врахували, що  $\gamma = M/\tau_M$  і  $\sigma_V^2 = kT/M$ ).

Таким чином, характерні значення швидкості  $V_{спост} \approx \sigma_{V_{спост}}$ , що спостерігаються, відрізняються від теплової (термодинамічної) оцінки  $V_{терм} = \sqrt{\sigma_V^2} = \sqrt{kT/M}$ :

$$V_{спост} \approx V_{терм} \sqrt{\omega_{ока} \tau_M} \approx 10^{-2} V_{терм} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}. \quad (9.51)$$

Цей результат добре узгоджується з експериментом, як видно з рис. 9.2.

Отриману з рівнянь механіки оцінку (9.5) для швидкості  $V_{мех} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  також можна поправити, якщо врахувати, що в кожен момент з броунівською частинкою зіштовхується не одна, а багато ( $N$ ) молекул, тому результуюча швидкість буде

$$V = \sum_{i=1}^N V_i, \quad (9.52)$$

де  $V_i$  – зміна швидкості броунівської частинки за рахунок зіткнення з однією молекулою, що визначається за формулою (9.2). Оскільки зіткнення молекул можна вважати незалежними і середні значення швидкостей  $V_i$  – дорівнюваними нулю ( $\langle V_i \rangle = 0$ ), то для дисперсії суми (9.52) маємо:

$$\sigma_V^2 = N \sigma_{V_i}^2, \quad \text{де } \sigma_{V_i} \approx V_{мех} \approx 2v \frac{m}{M} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}. \quad (9.53)$$

Отже, швидкість, що спостерігається  $V_{спост} \approx V_{мех} \sqrt{N}$ . Кількість молекул  $N$ , що одночасно зіштовхуються з частинкою, можна грубо оцінити як відношення їх площ поперечного перерізу:

$$N \approx \left(\frac{R}{r}\right)^2 \approx 10^8 \quad (9.54)$$

(для оцінок так само, як і у (9.4) ми обирали значення  $R \approx 10^{-3} \text{ см}$  і  $r \approx 10^{-7} \text{ см}$ ). Таким чином,  $V_{\text{спост}} \approx 10^4 V_{\text{мех}} \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}$ , що також добре узгоджується з експериментальними даними.

### ЗАДАЧІ

1. Використовуючи закони збереження імпульсу й енергії, довести, що формула (9.1) справджується тільки при  $m/M \ll 1$ .

**Розв'язок.** Із закону збереження імпульсу при початковій швидкості макрочастинки  $V_0 = 0$  випливає

$$mv_0 = mv_1 + MV_1. \quad (1)$$

Тут  $v_0$  і  $v_1$  – швидкості мікроскопічної частинки до і після удару відповідно. Із (1) визначаємо квадрат швидкості макрочастинки після удару:

$$V_1^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2. \quad (2)$$

Запишемо тепер закон збереження енергії для цієї системи:

$$mv_0^2 = mv_1^2 + MV_1^2. \quad (3)$$

Із (3) знаходимо

$$V_1^2 = \frac{m}{M} (v_0^2 - v_1^2) = \frac{m}{M} (v_0 + v_1)(v_0 - v_1). \quad (4)$$

Прирівнявши праві частини (2) і (4), маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{M}\right)^2 (v_0 - v_1)^2 &= \frac{m}{M} (v_0 + v_1)(v_0 - v_1), \\ \frac{m}{M} v_0 - \frac{m}{M} v_1 &= v_0 + v_1, \\ -v_0 \left(1 - \frac{m}{M}\right) &= v_1 \left(1 + \frac{m}{M}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

При  $m/M \ll 1$  із виразу (5) отримуємо  $v_1 \approx -v_0$ .

2. Обчислити дисперсію флуктуацій швидкості частинки для одновимірного броунівського руху, вважаючи, що автокореляційна функція (АКФ) випадкового прискорення є гауссовою:

$$B_a(\tau) = \overline{a(t'')a(t')} = \sigma_a^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_a^2}\right), \quad (1)$$

де  $\sigma_a^2 = \overline{a^2}$  – дисперсія,  $T_a$  – характерний масштаб спадання АКФ випадкового прискорення  $a(t)$ , а  $\tau = t'' - t'$ .

**Розв'язок.** Скористаємося формулою (9.21) для дисперсії флуктуації швидкості броунівської частинки

$$\sigma_V^2(t) = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \exp\left\{-\frac{2t}{\tau_M} + \frac{t' + t''}{\tau_M}\right\} B_a(t'' - t') \quad (2)$$

і перейдемо в ній до нових сумарних  $q = t' + t''$  і різницевих  $\tau = t'' - t'$  змінних. При цьому, як легко показати, якобіан переходу  $I$

дорівнює  $I = \frac{\partial(t', t'')}{\partial(q, \tau)} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ . Звідси у нових змінних вираз (2) записується так:



$$\begin{aligned}
\sigma_V^2(t) &= \frac{e^{-2t/\tau_M}}{2} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) d\tau \int_{-\tau}^{\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq + \int_0^t B_a(\tau) d\tau \int_{\tau}^{-\tau+2t} e^{q/\tau_M} dq \right\} = \\
&= \frac{\tau_M}{2} e^{-2t/\tau_M} \left\{ \int_{-t}^0 B_a(\tau) \left[ e^{(\tau+2t)/\tau_M} - e^{-\tau/\tau_M} \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t B_a(\tau) \left[ e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau \right\} = \\
&= \tau_M e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) \left[ e^{(-\tau+2t)/\tau_M} - e^{\tau/\tau_M} \right] d\tau = \\
&= \tau_M \left\{ \int_0^t B_a(\tau) e^{-\tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t B_a(\tau) e^{\tau/\tau_M} d\tau \right\}.
\end{aligned} \quad (3)$$

Підставивши у (3) заданий вид АКФ (1) випадкового прискорення, отримаємо

$$\sigma_V^2(t) = \sigma_a^2 \tau_M \left\{ \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 - \tau/\tau_M} d\tau - e^{-2t/\tau_M} \int_0^t e^{-\tau^2/T_a^2 + \tau/\tau_M} d\tau \right\}. \quad (4)$$

За визначенням  $T_a$  — характерний час зміни АКФ  $B_a(\tau)$ . Він визначається часом зіткнення окремих молекул із броунівською макрочастинкою. Час же  $\tau_M$  — характерний час релаксації швидкості макрочастинки. Тому завжди можна вважати виконаною умову  $\tau_M \gg T_a$ . При цьому в інтегралах (4) можна у показниках експонент знехтувати доданками  $\pm \tau/\tau_M$ :  $e^{-\tau^2/T_a^2 \pm \tau/\tau_M} \approx e^{-\tau^2/T_a^2}$ . Якщо до того ж ми будемо розглядати час  $t \gg \tau_M$  ( $T_a \ll \tau_M \ll t$ ), то обчислення інтегралів можна проводити у нескінченних межах. В результаті отримуємо

$$\sigma_V^2(t) \approx \sigma_a^2 \tau_M (1 - e^{-2t/\tau_M}) \int_0^\infty e^{-\rho^2/T_a^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M (1 - e^{-2t/\tau_M}). \quad (5)$$

Враховуючи далі, що  $t \gg \tau_M$ , остаточно отримаємо

$$\sigma_V^2 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a^2 T_a \tau_M.$$

## § 10. Теплові флуктуації у радіотехнічних колах

Зазначена у попередньому параграфі аналогія між тепловими флуктуаціями в електричних колах і випадковими зміщеннями броунівських частинок (див. таблицю 9.1) дає змогу скориставшись формулами  $\sigma_V^2 = kT/M$  і  $\sigma_x^2 = 2kTt/\gamma$ , відразу написати формули для дисперсії флуктуацій струму  $I(t)$  і перенесеного електричного заряду  $q(t)$  у колі, зображеному на рис. 9.3:

$$\sigma_I^2 = \frac{kT}{L}, \quad (10.1)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{2kT}{R} t. \quad (10.2)$$

Ці та наведені далі формули стосуються достатньо великих значень часу  $t$ , що набагато перевищують час релаксації  $\tau_0 = L/R$  (сталу часу кола), коли всіма перехідними процесами можна знехтувати не обмежуючи загальності отриманих результатів, вважати, що

$$\bar{I}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = 0.$$

### 10.1. Формула Найквіста

Середня потужність теплових флуктуацій струму, що виділяється на опорі  $R$ , дорівнює

$$P = R \langle I^2 \rangle = R \sigma_I^2 = \frac{kTR}{L}. \quad (10.4)$$

Оскільки всі реальні радіотехнічні пристрої мають скінченну ширину смуги частот, що пропускаються, то природно виникає запитання про те, в якій смузі частот виділяється потужність  $P$ , що визначається за формулою (10.4). Для відповіді на поставлене питання необхідно розрахувати енергетичний спектр флуктуацій струму

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle I(t)I(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (10.5)$$

через який повна потужність  $P$  виражається формулою

$$P = R \sigma_I^2 = R \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = R \int_0^{\infty} S_I^{(+)}(\omega) d\omega, \quad (10.6)$$

де ми ввели енергетичний спектр додатних частот:

$$S_I^{(+)} = \begin{cases} 2S_I, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Потужність, що виділяється у смузі частот від  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , дорівнює

$$S_P(\omega) d\omega = R S_I^{(+)}(\omega) d\omega. \quad (10.7)$$

Таким чином, повну потужність, що виділяється на опорі  $R$ , можна визначити у вигляді інтеграла

$$P = \int_0^{\infty} S_P(\omega) d\omega. \quad (10.8)$$

Для визначення енергетичного спектра  $S_I(\omega)$  флуктуацій струму у колі скористаємося законом Кірхгофа (див. (9.12) і рис. 9.3):

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t), \quad (10.9)$$

який для Фур'є-компонент має вигляд

$$(i\omega L + R)C_I(\omega) = C_E(\omega). \quad (10.10)$$

Тут  $C_I(\omega)$  і  $C_E(\omega)$  – відповідно Фур'є-трансформанти струму  $I(t)$  і ЕРС у колі  $E(t)$ . Введемо у розгляд комплексний опір (імпеданс) кола:

$$Z(i\omega) = i\omega L + R. \quad (10.11)$$

Тоді з (10.10) випливає:

$$C_I(\omega) = \frac{C_E(\omega)}{Z(i\omega)}. \quad (10.12)$$

Формула (10.12), випливаючи з закону Ома у комплексній формі, справджується не тільки для найпростішого електричного кола, зображеного на рис. 9.3, а й у найбільш загальному випадку квазістаціонарних електричних кіл, для яких  $Z(i\omega)$  може мати значно складніший вигляд, ніж (10.11). Формула (10.12) збігається з виразом (7.22), яким описуються перетворення сигналів у довільних лінійних системах, причому роль передавальної функції  $K(i\omega)$  відіграє відношення  $1/Z(i\omega)$ . Скориставшись (7.25), отримуємо зв'язок між енергетичним спектром флуктуацій струму  $S_I(\omega)$  і випадковою ЕРС  $S_E(\omega)$ :

$$S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.13)$$

Для визначення спектра  $S_E(\omega)$  згадаємо, що  $E(t)$  у випадку броунівського руху відповідала випадкова сила  $F(t) = Ma(t)$ , кореляційна функція якої мала вигляд (див. формули (9.22) і (9.45)):

$$\langle F(t')F(t'') \rangle = M^2 \langle a(t')a(t'') \rangle = AM^2 \delta(t'' - t') = AM^2 \delta(\tau),$$

а енергетичний спектр  $S_F(\omega)$  визначався за формулою (9.46):

$$S_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t)F(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{AM^2}{2\pi} = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.14)$$

Враховуючи, що коефіцієнту тертя  $\gamma$  відповідає активний опір  $R$  у найпростішому колі, зображеному на рисунку 9.3, а в загальному випадку під  $R$  слід розуміти  $\text{Re } Z(i\omega)$ , з (10.14) отримуємо **формулу Найквіста** для енергетичного спектра теплових флуктуацій випадкових ЕРС в електричних колах:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \text{Re } Z(i\omega). \quad (10.15)$$

Підставивши цю формулу в (10.13), отримуємо

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{\text{Re } Z(i\omega)}{|Z(i\omega)|^2}. \quad (10.16)$$

Для найпростішого кола, зображеного на рис. 9.3, ці формули набувають вигляду:

$$S_E = \frac{kT}{\pi} R, \quad (10.17 \text{ а})$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2}. \quad (10.17 \text{ б})$$

Тут  $\tau_0 = L/R$  — стала часу кола. Таким чином, спектр  $S_E(\omega)$  виявляється сталим на всіх частотах (і, отже,  $E(t)$  є білим шумом), а спектр флуктуації струму  $S_I(\omega)$  зосереджений у смузі частот  $|\omega| \leq 1/\tau_0$ . На рис. 10.1 схематично зображений спектр  $S_I(\omega)$  в області  $\omega > 0$ .

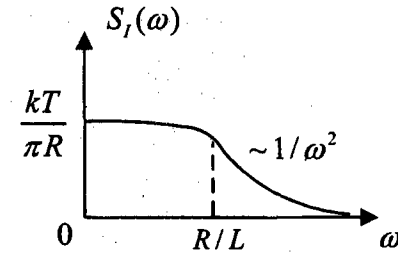


Рис. 10.1

Видно, що на високих частотах ( $\omega\tau_0 \gg 1$ ) спектр  $S_I(\omega)$  достатньо швидко спадає як  $S_I(\omega) \sim \omega^{-2}$ .

Визначимо тепер дисперсію флуктуацій струму, обчисливши площу під спектральною кривою  $S_I(\omega)$ :

$$\sigma_I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau_0^2} = \frac{kT}{L}. \quad (10.18)$$

Цей результат, як і слід було сподіватися, збігається з (10.1).

Формула (10.17 а) для  $S_E(\omega)$  при уважному розгляді може викликати здивування: з неї випливає, що при  $R \rightarrow \infty$  спектральна густина  $S_E(\omega)$  також прямує у нескінченність, тобто у розімкненому

колі ( $R \rightarrow \infty$ ) мають виникати нескінченно великі флуктуації ЕРС. Для розв'язку цього парадокса слід урахувати, що будь-який опір  $R$  має власну індуктивність  $L$  і власну ємність  $C$ , причому власна ємність шунтує активний опір, як показано на рис. 10.2.

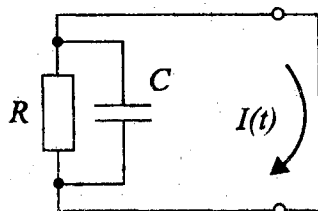


Рис. 10.2

Імпеданс такого кола розраховується як повний опір при паралельному з'єднанні елементів:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C. \quad (10.19)$$

Звідси отримуємо

$$Z(i\omega) = \frac{R}{1 + i\omega RC},$$

$$\operatorname{Re} Z(i\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}. \quad (10.20)$$

Отже, для кола, зображеного на рис. 10.2, маємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2},$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi R}. \quad (10.21)$$

Таким чином, при  $R \rightarrow \infty$   $S_E(\omega)$  і  $S_I(\omega)$  перетворюються на нуль, як це й має бути для розімкнутого кола.

## 10.2. Спектральний аналіз процесів зі стаціонарним припущенням

Статистичні характеристики флуктуацій заряду  $q(t)$ , що переноситься через  $RL$ -коло, можна знайти, якщо врахувати, що струм і заряд пов'язані між собою таким співвідношенням:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad q(t) = \int_0^t I(t_1) dt_1. \quad (10.22)$$

Для простоти припустимо, що в початковий момент ( $t = 0$ ) заряд  $q(t) = 0$ . Ми вже показували, що в режимі, який встановився, процес  $I(t)$  можна розглядати як стаціонарний з нульовим середнім значенням ( $\langle I(t) \rangle = 0$ ). У цьому разі заряд  $q(t)$  визначається як інтеграл від стаціонарного процесу  $I(t)$ ; при статистичному аналізі  $q(t)$  можна скористатися результатами, отриманими раніше у §7. Так, насамперед дослідимо процес  $q(t)$  щодо його стаціонарності. Усереднюючи (10.22) за ансамблем реалізацій, отримуємо  $\langle q(t) \rangle = 0$ , тобто перша умова стаціонарності виконується. Для перевірки другої умови скористаємося отриманим виразом для енергетичного спектра флуктуацій струму. Із (10.17 б) випливає, що на нульовій частоті ( $\omega = 0$ ) енергетичний спектр має скінченне значення, яке не дорівнює нулю.

$$S_I(0) = \frac{kT}{\pi R} \neq 0. \quad (10.23)$$

Це означає, що процес накопичення  $q(t)$  є нестаціонарним і його дисперсія матиме вигляд дифузно зростаючого процесу (див. (7.42)):

$$\sigma_q^2(t) = 2\pi S_I(0) \cdot t = \frac{2kT}{R} \cdot t. \quad (10.24)$$

Ця обставина не повинна нас дивувати, оскільки аналогом  $q(t)$  в задачі про броунівський рух є нестационарний процес — зміщення  $x(t)$ , дисперсія якого також зростає з часом як  $\sigma_x^2 \approx 2kTt/\gamma$ .

Щоб використати розглядуваний в попередніх розділах спектральний аналіз стосовно нестационарного процесу  $q(t)$ , спочатку подамо  $q(t)$  на деякому фіксованому часовому інтервалі  $(t_1, t_2)$  у такому вигляді:

$$\Delta q(t_1, t_2) = q(t_2) - q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_I(\omega)}{i\omega} (e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_1}) d\omega. \quad (10.25)$$

Обчислимо тепер структурну функцію приросту

$$\begin{aligned} D_q(t_2, t_1) &= \langle [\Delta q(t_2, t_1)]^2 \rangle = \left\langle \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_I(\omega)}{i\omega} (e^{i\omega t_2} - e^{i\omega t_1}) d\omega \right\}^2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \langle C_I(\omega') C_I^*(\omega'') \rangle \frac{e^{i\omega' t_2} - e^{i\omega' t_1}}{i\omega'} \cdot \frac{e^{-i\omega'' t_2} - e^{-i\omega'' t_1}}{-i\omega''} = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega^2} \{1 - \cos[\omega(t_2 - t_1)]\} d\omega = D_q(\tau). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Виявилось, що структурна функція  $D_q(t_2, t_1)$  не залежить від часів  $t_1, t_2$  окремо, а залежить тільки від їхньої різниці  $\tau = t_2 - t_1$ . Процеси з такою залежністю, як ми знаємо з §5, називаються процесами зі стаціонарними прирощеннями.

Враховуючи парність енергетичного спектра  $S_I(\omega)$ : подаючи  $1 - \cos \omega\tau = 2 \sin^2(\omega\tau/2)$ , перепишемо (10.26) у вигляді

$$D_q(\tau) = 8 \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \frac{S_I(\omega)}{\omega^2} d\omega. \quad (10.27)$$

Таким чином, за заданою залежністю енергетичного спектра  $S_I(\omega)$  “вхідного” стаціонарного процесу  $I(t)$  ми можемо побудувати структурну функцію  $D_q(\tau)$  „вихідного” нестационарного процесу  $q(t)$ .

Встановимо тепер зворотний зв'язок між структурною функцією  $D_q(\tau)$  й енергетичним спектром  $S_I(\omega)$ . Для цього продиференціюємо ліву і праву частини виразу (10.26) за  $\tau$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dD_q(\tau)}{d\tau} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} \sin \omega\tau d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) d\omega = \frac{2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_I(\omega)}{\omega} e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (10.28)$$

(ми врахували парність функції  $S_I(\omega)$  і виконали у другому доданку заміну змінних  $\omega \rightarrow -\omega$ ).

Застосовуючи тепер у (10.28) зворотне обернення Фур'є, отримаємо подання енергетичного спектра  $S_I(\omega)$  через похідну від

структурної функції  $\frac{dD_q}{d\tau}$ :

$$\frac{2 S_I(\omega)}{i \omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dD_q(\tau)}{d\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Враховуючи, що  $D_q(\tau)$  є функція парна й, отже, її похідна  $\frac{dD_q(\tau)}{d\tau}$  — непарна, отриманий вираз можна довести до такого вигляду

$$S_I(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dD_q}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau. \quad (10.29)$$

Якщо ми формально введемо за формулою інтегрального перетворення (7.44) енергетичний спектр заряду  $S_q(\omega) = \frac{S_I(\omega)}{\omega^2}$ , то формули (10.27), (10.29) будуть такими:

$$D_q(\tau) = 8 \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) S_q(\omega) d\omega, \quad (10.30)$$

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} \frac{dD_q}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau.$$

Виявляється, що введена формально функція  $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$  має цілком визначений фізичний зміст: вона визначає енергетичний спектр процесу з першим стаціонарним прирошенням  $q(t)$ . При цьому формули (10.30) визначають зв'язок між структурними функціями й енергетичними спектрами процесів з першими стаціонарними прирошеннями.

#### Коментарі

Оскільки стаціонарні процеси — це окремий випадок процесів з першим стаціонарним прирошенням (але не навпаки), то формули (10.30) дійсні і для стаціонарних процесів. Зручність

користування зв'язку (10.30) між структурною функцією  $D_\xi(\tau)$  і відповідним енергетичним спектром  $S_\xi(\omega)$  полягає в тому, що можна не перейматися тим, чи є випадковий процес  $\xi(t)$  стаціонарним або процесом із першим стаціонарним прирошенням. В обох випадках функція  $S_\xi(\omega)$  існує і має той самий фізичний зміст спектральної густини енергії. Для стаціонарних процесів інтеграли просто обчислюються, і за знайденою залежністю  $D_\xi(\tau)$  легко визначається автокореляційна функція  $B_\xi(\tau)$  (див. (5.29)):

$$B_\xi(\tau) = \frac{1}{2} [D_\xi(\infty) - D_\xi(\tau)].$$

Особливості ж в енергетичних спектрах процесів із першими стаціонарними прирошеннями, типу  $S_\xi(\omega) \sim \omega^{-2}$  при  $\omega \rightarrow 0$ , компенсуються оберненням на нуль множника  $\sin^2(\omega\tau/2)$ , і розбіжності в першому інтегралі (10.30) також не відбувається.

#### 10.3. Аналіз теплових флуктуацій у коливальному контурі

Проаналізуємо зображений на рис. 10.3 коливальний контур за викладеною вище схемою. Спочатку визначимо імпеданс кола:

$$Z(i\omega) = i\omega L + \frac{1}{iC\omega} + R \quad (10.31)$$

і квадрат його модуля

$$|Z(i\omega)|^2 = R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad (10.32)$$



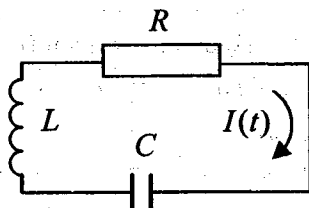


Рис. 10.3

Підставляючи цю формулу в (10.16) і враховуючи, що  $\text{Re } Z(i\omega) = R$ , отримуємо для енергетичного спектра флуктуацій струму в контурі наступний вираз:

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \cdot \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} = \frac{kT}{\pi R} \cdot \frac{\omega^2}{\tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2} \quad (10.33)$$

Схематичний графік функції  $S_I(\omega)$  зображено на рис. 10.4. Видно, що максимум теплових шумів припадає на власну резонансну частоту контуру  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , значення  $S_I(\omega)$  в максимумі дорівнює  $kT/\pi R$ , а ширина кривої поблизу максимуму  $\Delta\omega \approx 1/\tau_0$ , де  $\tau_0 = L/R$  — стала часу контуру.

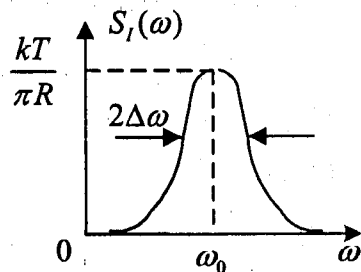


Рис. 10.4

Таким чином, спектр власних теплових шумів виявляється зосередженим саме у тій області частот  $\omega \approx \omega_0$ , де цей контур і має працювати, наприклад, як смуговий фільтр. Інтегруючи формулу (10.33) за всіма частотами  $\omega$ , отримаємо дисперсію флуктуацій  $\sigma_I^2 = kT/L$ . Звідси знаходимо, що середня енергія магнітного поля, яка запасена у контурі (точніше – в індуктивності  $L$ ), дорівнює

$$W_L = \frac{L}{2} \langle I^2 \rangle = \frac{L}{2} \sigma_I^2 = \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) d\omega = \frac{kT}{2} \quad (10.34)$$

Цей результат узгоджується з тим, що середнє значення кінетичної енергії у системі з одним ступенем вільності у стані термодинамічної рівноваги дорівнює  $kT/2$ . Шляхом аналогічних обчислень можна переконатися в тому, що середня енергія електричного поля  $W_C$ , яка запасена у ємності  $C$ , також дорівнює  $kT/2$ :

$$W_C = \frac{\langle q^2 \rangle}{2C} = \frac{kT}{2} \quad (10.35)$$

При цьому дисперсія флуктуацій заряду  $\sigma_q^2 = \langle q^2 \rangle$  на відміну від розглянутого прикладу  $LR$ -кола виявляється скінченною за рахунок того, що на низьких частотах  $S_I(\omega) \sim \omega^2$ , та інтеграл від  $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$  вже не має розбіжності:

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} = kTC \quad (10.36)$$

Фізична причина цієї відмінності у порівнянні з  $LR$ -колом також цілком очевидна: розходження інтеграла від  $S_q(\omega) = S_I(\omega)/\omega^2$  для залежності виду (10.17 б) було пов'язане з особливістю спектра

флуктуацій  $S_q(\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ , тобто з проходженням постійного струму, а в контурі (див. рис. 10.3) за рахунок послідовного включення в коло ємності  $C$  постійний струм взагалі текти не може. Тому  $S_q(\omega) \sim \omega^2 \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow 0$ .

Оскільки різниця потенціалів  $U$  між обкладками конденсатора дорівнює  $q/C$ , то дисперсія її флуктуацій визначається простою формулою, що випливає з (10.36):

$$\sigma_U^2 = \frac{\sigma_q^2}{C^2} = \frac{kT}{C}.$$

#### 10.4. Еквівалентна шумова температура

Отримані формули для спектра теплових флуктуацій дають змогу описувати потужність будь-якого джерела (не обов'язково теплового) за допомогою поняття еквівалентної шумової температури. Вводиться воно так. Позначимо через  $S_p(\omega)d\omega$  потужність, що віддається джерелом у смузі частот  $d\omega$  навантаженню з опором  $R$  (рис. 10.5 а). Замінімо тепер джерело узгодженим з навантаженням опором  $R$  (рис. 10.5 б), що перебуває при температурі  $T$ , і вимагатимемо, щоб потужність теплових флуктуацій, що віддається цим опором у навантаження в смузі  $d\omega$ , збігалася з  $S_p(\omega)d\omega$ , тобто (див. формулу (10.7)):

$$S_p(\omega) = RS_I^{(+)}(\omega). \quad (10.37)$$

При розрахунку  $S_I^{(+)}(\omega)$  зазначимо наступне: оскільки джерелом теплової ЕРС у колі служить тільки один опір (лівий на рис. 10.5 б, той, що замінив джерело), то енергетичний спектр флуктуацій ЕРС дорівнює

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R. \text{ Повний же опір кола } Z \text{ дорівнює } 2R, \text{ так що}$$

$$S_I^{(+)}(\omega) = \frac{S_E^{(+)}(\omega)}{|Z|^2} = \frac{2S_E(\omega)}{4R^2} = \frac{kT}{2\pi R}. \quad (10.38)$$

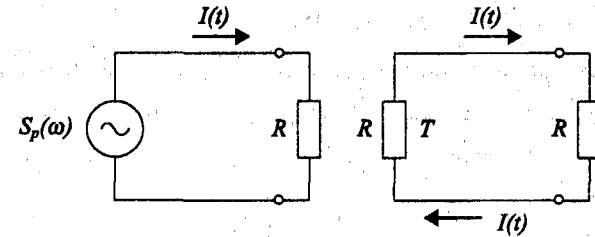


Рис. 10.5

Підставляючи (10.38) у (10.37), отримуємо

$$S_p(\omega) = \frac{kT}{2\pi}. \quad (10.39)$$

Температуру  $T$ , при якій виконується це співвідношення, називають **еквівалентною шумовою температурою** джерела на частоті  $\omega$ .

#### 10.5. Область застосування формули Найквіста

Перерахуємо тепер усі умови та обмеження, при яких була отримана формула Найквіста (10.15):

1. Електричне коло вважалось квазістаціонарним, випромінювання електромагнітних хвиль з нього не враховувалось, тобто довжина хвилі  $\lambda$  випромінювання на всіх частотах  $\omega$ , що розглядаються, вважалась значно більшою за лінійні розміри системи  $a$  ( $\lambda \gg a$ ). Переходячи за формулою  $\lambda = 2\pi c/\omega$  від  $\lambda$  до  $\omega$ , отримуємо обмеження згори на частоти, при яких наявна квазістаціонарність:  $\omega \ll \frac{2\pi c}{a}$ .

2. Випадкові ЕРС у колі вважалися  $\delta$ -корельованими, як і сили, що діють з боку молекул на макроскопічну частинку у теорії броунівського руху.

3. Розглядалися тільки термодинамічні рівноважні флуктуації, тобто припускалося, що всі перехідні процеси в електричному колі вже закінчилися.

4. При знаходженні спектра флуктуацій теплової ЕРС у колі ми припускали, що на кожен поступальний степінь вільності у стані термодинамічної рівноваги припадає енергія  $kT/2$  (див. формулу (9.25)), тобто користувалися результатом класичної статистичної фізики, а не квантової. Це припустимо тільки тоді, коли енергія кванта  $\hbar\omega$  значно менша за теплову енергію:

$$\hbar\omega \ll kT. \quad (10.40)$$

5. Розглядалися тільки кола із сталими параметрами  $R$ ,  $C$ ,  $L$  при відсутності дисперсії (тобто припускалося, що ці параметри не залежать від частоти  $\omega$ ).

6. Не враховувалася дискретність електричного заряду — 15 на відміну від зміщення броунівської частинки  $x(t)$ , електричний заряд  $q(t)$  не може змінюватися неперервно, а тільки порціями, кратними до заряду електрона.

#### Узагальнення отриманих результатів

• Скасування умови п. 4 і нерівності (10.40) можна легко провести, якщо врахувати, що на квантовому рівні на кожен коливальний степінь вільності із власною частотою  $\omega$  припадає не енергія  $kT$ , як у класичній теорії, а середня енергія осцилятора:

$$kT \rightarrow \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} = \Theta(\omega, T). \quad (10.41)$$

Якщо у формулі Найквіста (10.15) (і (10.16), що впливає з неї, тощо), ми зробимо заміну (10.41), то її можна буде застосовувати й у квантовому випадку  $\hbar\omega \geq kT$ .

• Частотна дисперсія параметрів кола (умова п. 5) також легко враховується, якщо у формулі Найквіста вважати  $R=R(\omega)$ ,  $L=L(\omega)$ ,  $C=C(\omega)$ . При цьому ми не маємо виходити за межі умови квазістаціонарності ( $\omega \ll 2\pi c/a$ ).

• Нарешті, дискретність електричного заряду призводить до специфічних флуктуацій струму, не пов'язаних із тепловим рухом. Це так званий **дробовий шум**, йому присвячено наступний параграф.

#### 10.6. Флуктуаційно-дисипаційна теорема (ФДТ)

Насамкінець необхідно зазначити, що формула Найквіста, як у класичному вигляді (10.15), так і у квантовому (з урахуванням заміни (10.41)), є окремим випадком однієї дуже важливої теореми із надзвичайно високим ступенем загальності — так званої флуктуаційно-дисипаційної теореми (Г.Каллен, Т.Вельтон, 1951р.). Із самої назви теореми вбачаємо, що вона пов'язує флуктуаційні явища з дисипативними властивостями системи. Під дисипацією слід розуміти перетворення будь-яких нетеплових видів енергії і руху у теплову. Швидкість цього перетворення визначається дисипативними параметрами. Наприклад, при броунівському русі у ролі такого параметра виступає коефіцієнт тертя  $\gamma$  і формула (10.14) встановлює зв'язок між енергетичним спектром  $S_F(\omega)$  флуктуацій випадкової сили  $F$ , що викликає випадкові зміни зміщення  $x(t)$  і швидкості  $V(t)$  броунівської частинки, з дисипативним параметром  $\gamma$ :

$$S_F(\omega) = \frac{kT}{\pi} \gamma. \quad (10.42)$$

Аналогічний вигляд має і формула Найквіста (10.15), яка описує перетворення електричної енергії у теплову. Процес дисипації у цьому випадку визначається активним опором кола  $\text{Re} Z(i\omega)$ , а

роль сил, що викликають, наприклад, флуктуації струму, відіграють випадкові ЕРС  $E(t)$ . Таким чином, за своєю фізичною суттю теплові флуктуації і в механічній системі (броунівський рух) і в електричних колах виявляються настільки близькими, що описуються, по суті, однаковими формулами. Зрозуміло, що ця обставина не може бути випадковим збігом, а має впливати з якогось спільного фізичного закону. Саме про цей спільний закон, що „керує” флуктуаціями, й іде мова у флуктуаційно-дисипаційній теоремі (ФДТ), суть якої зводиться до наступного.

Розглянемо довільну фізичну систему, що перебуває у стані термодинамічної рівноваги. Нехай  $x(t)$  – якийсь макроскопічний фізичний параметр, що описує стан системи і відіграє роль узагальненої координати. У випадку броунівської частинки як  $x(t)$  можна вибрати координату її зміщення  $x(t)$  або будь-який інший параметр, наприклад, швидкість  $V(t)$ , прискорення  $a(t)$  тощо. Так само і для електричного кола як  $x(t)$  можна обрати і перенесений через коло заряд  $q(t)$ , і силу струму у колі  $I(t)$  і, наприклад, різницю потенціалів  $U(t)$  на обкладках конденсатора (див. рис. 10.3) тощо.

Теорема, яку ми розглядаємо, дає змогу пов'язати енергетичний спектр  $S_x(\omega)$  флуктуацій узагальненої координати  $x(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau$$

зі швидкістю дисипації енергії у системі (в механічній системі – з коефіцієнтом тертя, в електричній – з потужністю джоулевих втрат тощо). Тут ми не будемо строго доводити цю теорему, а наведемо тільки хід думок і остаточну формулу Каллена—Вельтона для  $S_x(\omega)$ , яку можна розглядати як формулювання ФДТ.

Окрім узагальненої координати  $x(t)$  введемо спряжену з нею узагальнену силу:

$$F(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (10.43)$$

де  $U$  — енергія системи. Якщо  $x(t)$  — дійсна координата, то  $F(t)$  — сила у звичайному значенні цього слова. Формально розглядатимемо флуктуації  $x(t)$  як результат дії на систему зовнішніх сил  $F(t)$ . Відгук системи  $x(t)$  пов'язаний із  $F(t)$  у загальному випадку нелінійними рівняннями типу

$$x(t) = \Phi\{F(t)\}, \quad (10.44)$$

але при достатньо малих  $F$  цей зв'язок можна вважати лінійним, причому, не обмежуючи загальності, покласти  $x=0$ , якщо  $F=0$ . Загальна форма лінійного зв'язку з урахуваннями принципу причинності й у припущенні про стаціонарність системи (система перебуває у тепловій рівновазі, й усі моменти часу є фізично еквівалентними і саме у цьому значенні тут вживається термін „стаціонарність”) описується формулою (7.7). Це призводить до того, що Фур'є-компоненти  $C_x(\omega)$  і  $C_F(\omega)$  виявляються пропорційними:

$$C_x(\omega) = \alpha(\omega) C_F(\omega). \quad (10.45)$$

Порівнявши (10.45) з (7.22), бачимо, що  $\alpha(\omega)$  – не що інше, як передавальна функція системи  $K(i\omega)$  у радіотехніці, а у фізиці її називають узагальненою сприйнятливістю.

З урахуванням стаціонарності процесу з (10.45) впливає зв'язок між енергетичними спектрами:

$$S_x(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 S_F(\omega). \quad (10.46)$$

Скористаємося тим, що ми вже вивели формулу Найквіста, і розглянемо заряд  $q(t)$ , який переноситься, як узагальнену координату  $x(t)$ . Тоді узагальненою силою  $F(t)$  буде виступати ЕРС  $E(t)$ , енергетичний спектр флуктуацій якої відомий:

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(i\omega). \quad (10.47)$$

З'ясуємо тепер, що відіграє роль узагальненої сприйнятливості  $\alpha(\omega)$  у цьому конкретному випадку. Оскільки  $I(t) = dq/dt$ , то  $C_q(\omega) = C_I(\omega)/i\omega$ . З іншого боку, згідно з законом Кірхгофа маємо  $C_I(\omega) = C_E(\omega)/Z(i\omega)$ . Отже,

$$C_q(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)} C_E(\omega). \quad (10.48)$$

Порівнюючи цей зв'язок із (10.45), визначаємо  $\alpha(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega Z(i\omega)}. \quad (10.49)$$

Перейдемо тепер у формулі Найквіста (10.47) від  $Z(i\omega)$  до  $\alpha(\omega)$ , ввівши попередньо позначення  $\alpha'$  і  $\alpha''$  для дійсної і уявної частин  $\alpha$  відповідно:  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ . Тоді

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{i\omega \alpha(\omega)} = -\frac{kT}{\pi\omega} \frac{\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2}. \quad (10.50)$$

Підставляючи (10.50) у праву частину (10.46), отримуємо

$$S_x(\omega) = -\frac{kT\alpha'(\omega)}{\pi\omega}. \quad (10.51)$$

Слід зазначити, що знак „-“ у (10.51) пов'язаний з тим, що залежність від часу у „прямому” перетворенні Фур'є ми розглядали у вигляді  $e^{i\omega t}$ . Якби ми вибрали  $e^{-i\omega t}$ , то у (10.51) було б необхідно писати знак „+”.

Формула (10.51) і є, по суті, формулюванням флуктуаційно-дисипаційної теореми, що стверджує, що спектр флуктуацій  $S_x(\omega)$  довільної узагальненої координати  $x(t)$  (а не тільки заряду  $q(t)$  в електричному колі) пов'язаний з уявною частиною  $\alpha''$  узагальненої сприйнятливості і температурою системи  $T$ . Із (10.45) видно, що наявність у  $\alpha$  уявної частини —  $\alpha''$  якраз і означає присутність дисипації в системі. У випадку квантових флуктуацій, як зазначалося, достатньо замінити  $kT \rightarrow \Theta(\omega, T)$  за формулою (10.41).

Продемонструємо застосування формули (10.51) до флуктуацій координати  $x(t)$  зміщення броунівської частинки. Роль рівняння (10.44) у цьому випадку відіграє рівняння руху

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = F(t). \quad (10.52)$$

Перейшовши до Фур'є-компонент, маємо:

$$(-M\omega^2 + i\omega\gamma) C_x(\omega) = C_F(\omega). \quad (10.53)$$

Звідси знаходимо узагальнену сприйнятливість:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\omega\gamma - M\omega^2} \quad (10.54)$$

і її уявну (відповідальну за дисипацію) частину:

$$\alpha'' = -\frac{1}{\omega\gamma(1 + \omega^2\tau_M^2)}, \quad \tau_M = \frac{M}{\gamma}. \quad (10.55)$$

Користуючись (10.51), отримуємо

$$S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.56)$$

Спектр флуктуацій швидкості  $V(t)$  можна визначити за допомогою (10.56), якщо врахувати, що  $C_V(\omega) = i\omega C_x(\omega)$  і, отже,

$$S_V(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{kT}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau_M^2}. \quad (10.57)$$

Цей результат збігається з отриманою раніше формулою (9.47).

Узагальнення формул Каллена—Вельтона для випадку кількох флуктуючих величин  $x_m(t)$  ( $m=1,2,\dots$ ) полягає у встановленні зв'язку взаємного спектра флуктуацій

$$S_{x_{mk}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_m(t) \cdot x_k(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (10.58)$$

з антиермітовою частиною матриці узагальненої сприйнятливості  $\alpha_{mk}$ , яка вводиться наступним чином.

Спочатку визначають узагальнені сили

$$F_m(t) = -\frac{\partial U}{\partial x_m}, \quad (10.59)$$

а після цього у лінійному наближенні пов'язують Фур'є-компоненти  $C_{xm}(\omega)$  і  $C_{Fk}(\omega)$ :

$$C_{xm}(\omega) = \sum_k \alpha_{mk}(\omega) C_{Fk}(\omega). \quad (10.60)$$

В результаті виявляється, що має місце наступна загальна формула:

$$S_{x_{mk}}(\omega) = \frac{ikT}{2\pi\omega} [\alpha_{mk}(\omega) - \alpha_{km}^*(\omega)], \quad (10.61)$$

яка, як легко переконатися, в одновимірному випадку ( $m=k=1$ ,  $\alpha_{mk} = \alpha\delta_{mk}$ ) переходить в (10.51).

### ЗАДАЧІ

1. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для кола, що складається з опору  $R$  з незамкнутими виведеннями (рис. 10.6).

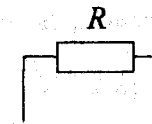


Рис.10.6

**Розв'язок.** Користуючись формулами Найквіста (10.15) і (10.16), отримуємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} Z(\omega) = \frac{kT}{\pi} R,$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{\operatorname{Re} Z(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + \infty)^2} = 0.$$

При обчисленні  $S_I(\omega) = \frac{S_E(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$  за  $Z(\omega)$  слід брати повний

комплексний опір кола, в якому тече шумовий струм. У цьому випадку  $|Z(\omega)| = R + \infty$ . Фізична рівність  $S_I(\omega) = 0$  визначається відсутністю у колі струму, оскільки коло розімкнуте.

2. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для короткозамкнутого опору  $R$  (рис. 10.7).

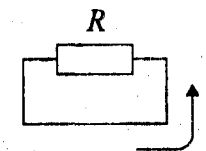


Рис. 10.7



**Розв'язок.** Користуючись (10.15) і (10.16), знаходимо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R, \quad S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{(R + 0)^2} = \frac{kT}{\pi} \frac{1}{R}.$$

3. Визначити спектральні густини ЕРС і струму для контуру, що складається із паралельно поєднаних опору  $R$  і ємності  $C$  (рис. 10.8).

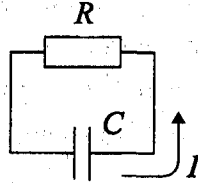


Рис. 10.8

**Розв'язок.** Послідовність розв'язку цієї задачі така сама, як і в попередньої.

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C};$$

$$\operatorname{Re} Z(\omega) = R;$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2}};$$

$$|Z(\omega)|^2 = \frac{1 + (\omega CR)^2}{\omega^2 C^2}.$$

Тепер згідно з формулами Найквіста маємо

$$S_E(\omega) = \frac{kT}{\pi} R;$$

$$S_I(\omega) = \frac{kT}{\pi} \frac{R\omega^2 C^2}{1 + (\omega CR)^2}.$$

## § 11. Дробовий шум

Однією з найважливіших причин флуктуацій в електричних колах є дробовий шум – флуктуації струму у колі, що викликаються дискретністю заряду, який переноситься. У звичайних електровакуумних приладах час прольоту одного електрона має порядок  $\tau_{np} \approx 10^{-9}$  с. Це й є тривалість елементарного імпульсу струму, що переносить заряд, який дорівнює заряду  $e$  одного електрона. При середньому струмі  $\bar{I} \approx 5$  мА за одну секунду пролітає величезна кількість електронів  $N \approx 3 \cdot 10^{16}$ , а за час тривалості одного імпульсу  $\tau_{np}$  —  $N\tau_{np} \approx 3 \cdot 10^7$  електронів. Таким чином, імпульси струму, викликані прольотом кожного електрона, густо перекриваються. На рис. 11.1 товстою лінією зображено імпульс струму  $i_v(t)$  за рахунок прольоту одного електрона, що вилетів з катода (якщо мова йде про електронну лампу) у момент  $t_v$ . Імпульси струму за рахунок електронів, що вилітають у наступні моменти від  $t_v$  до  $t_v + \tau_{np}$ , зображені тонкими лініями.

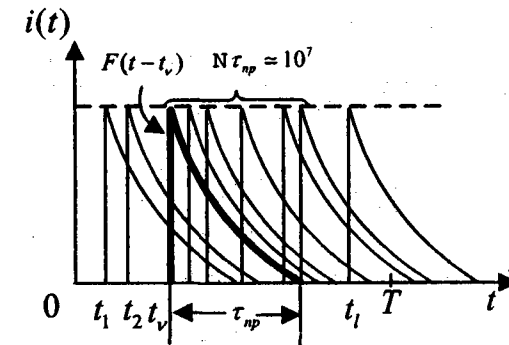


Рис. 11.1

Через те, що імпульси струму дуже сильно перекриваються, сумарний струм буде слабо флуктувати навколо середнього

значення  $\bar{I}$  (рис. 11.2). Ці флуктуації струму називають дробовим шумом або дробовим струмом.

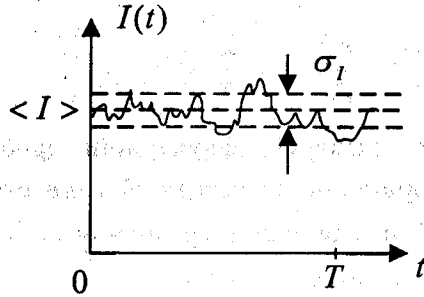


Рис. 11.2

Позначимо, як і в § 3, через  $n$  число електронів, що вилітають з катода за час  $T$ . Перенесений ними заряд є  $q_T = ne$ , а значення струму за цей час дорівнює

$$I_T = \frac{q_T}{T} = \frac{ne}{T}. \quad (11.1)$$

Як ми з'ясували у § 3, випадкова величина  $n$  розподілена за законом Пуассона:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (11.2)$$

де  $\bar{n} = n_1 T$ , а  $n_1$  – середнє число електронів, що вилітають з катода за одиницю часу – величина, що визначає середній струм у колі:

$$\langle I_T \rangle = \frac{e}{T} \bar{n} = n_1 e. \quad (11.3)$$

Для обчислення дисперсії флуктуацій дробового струму  $I_{dp} = I_T - \langle I_T \rangle$

$$\sigma_{I_T}^2 = \langle (I_T - \langle I_T \rangle)^2 \rangle = \langle I_{dp}^2 \rangle = \frac{e^2}{T^2} \langle (n - \bar{n})^2 \rangle, \quad (11.4)$$

скористаємося формулою (3.28), що визначає дисперсію флуктуацій випадкової величини  $n$ :  $\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \bar{n}$ . В результаті отримуємо

$$\sigma_{I_T}^2 = \frac{e^2}{T^2} \bar{n} = \frac{e}{T} \langle I_T \rangle. \quad (11.5)$$

Таким чином, дисперсія флуктуацій дробового струму виявляється пропорційною до середньої сили струму  $\langle I_T \rangle$  і обернено пропорційною до часу усереднення  $T$ . Далі індекс  $T$  для величини струму  $I$  опускатимемо ( $I \equiv I_T$ ).

Звернемося тепер до обчислення автокореляційної функції і спектра флуктуацій дробового шуму. Миттєве значення повного струму  $I$  у момент часу  $t$ , що створюється всіма електронами, які вилетіли за час  $T$  у моменти  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , очевидно, є сумою всіх елементарних струмів:

$$I(t) = \sum_{v=1}^n i_v(t) = e \sum_{v=1}^n F(t - t_v). \quad (11.6)$$

Тут  $e$  – заряд електрона, а  $F(t - t_v) = i_v(t)/e$  – форма елементарного імпульсу струму  $i_v(t)$ , яка описується детермінованою (невипадковою) функцією. Враховуючи, що за весь час проходження імпульсу  $i_v(t)$  переноситься елементарний заряд  $e$ , отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_v(t) dt = e, \quad (11.7)$$

звідки випливає, що  $F(t - t_v)$  нормована умовою:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_v) dt = 1. \quad (11.8)$$

Формулою (11.6) визначається деяка випадкова функція  $I(t)$ .

Випадковими величинами є як моменти вильоту  $t_v$  кожного електрона, так і повна кількість  $n$  електронів, що вилетіли за час  $T$ . Оскільки всі моменти часу в інтервалі  $0 \leq t \leq T$  фізично еквівалентні, кожна з випадкових величин  $t_v$  розподілена рівномірно з густиною ймовірностей:

$$W_1(t_v) = \frac{1}{T}, \quad 0 \leq t_v \leq T. \quad (11.9)$$

Із незалежності актів вилітання окремих електронів випливає, що і випадкові величини  $t_v$  незалежні, тобто їх спільна густина розподілу ймовірностей розпадається на добуток

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_v, \dots, t_n) = \prod_{v=1}^n W_1(t_v) = \frac{1}{T^n}. \quad (11.10)$$

Оскільки випадкова величина  $n$  розподілена за законом Пуассона, функцію  $I(t)$  називають пуассонівським випадковим процесом, а сукупність незалежних випадкових подій, що полягають у вильоті окремих електронів у моменти часу  $t_v$ , — пуассонівським потоком подій.

### 11.1. Визначення статистичних характеристик сили струму

При визначенні статистичних характеристик випадкового процесу (11.6) усереднення зручно проводити двома етапами: спочатку провести усереднення за всіма  $t_v$  (позначимо його  $\langle \dots \rangle_{t_v}$ ) а після цього — за випадковим параметром  $n$ . Таким чином, наприклад, обчислення першого моменту  $\langle I(t) \rangle_{t_v}$  зводиться до обчислення середнього від суми:

$$\langle I(t) \rangle_{t_v} = \langle e \sum_{v=1}^n F(t-t_v) \rangle_{t_v} = \quad (11.11)$$

$$= e \sum_{v=1}^n \langle F(t-t_v) \rangle_{t_v} = e \sum_{v=1}^n \int_0^T dt_v W_1(t_v) F(t-t_v).$$

Якщо час спостереження  $T$  значно перевищує тривалість елементарного імпульсу струму —  $\tau_{np}$ , то інтеграл за  $dt_v$  в (11.11) можна замінити на інтеграл у нескінченних межах. Враховуючи далі формулу (11.8), отримаємо:

$$\langle I(t) \rangle_{t_v} \approx \frac{e}{T} \sum_{v=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_v) dt = \frac{e}{T} n. \quad (11.12)$$

Таким чином, ми приходимо до формули (11.1), остаточне усереднення якої за  $n$  із розподілом виду (11.2), дає вираз (11.3).

Для визначення автокореляційної функції

$$B_I(t, t') = \langle I(t)I(t') \rangle - \langle I(t) \rangle^2 \quad (11.13)$$

необхідно обчислити другий двоточковий момент  $\langle I(t)I(t') \rangle$ . Для цього проведемо спочатку усереднення за моментами вильоту електронів  $t_v$  при їх сталій загальній кількості  $n$ :

$$\begin{aligned} \langle I(t)I(t') \rangle_{t_v, \mu} &= e^2 \left\langle \sum_{v=1}^n F(t-t_v) \sum_{\mu=1}^n F(t'-t_\mu) \right\rangle_{t_v, \mu} = \\ &= e^2 \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \langle F(t-t_v) F(t'-t_\mu) \rangle_{t_v, \mu}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Виділимо в (11.14) доданки з  $v = \mu$  і врахуємо незалежність  $t_v$  і  $t_\mu$  при  $v \neq \mu$ :

$$\begin{aligned}
 \langle I(t)I(t') \rangle_{t_v, \mu} &= e^2 \sum_{v=1}^n \langle F(t-t_v)F(t'-t_v) \rangle_{t_v} + \\
 &+ e^2 \sum_{v \neq \mu}^n \langle F(t-t_v) \rangle_{t_v} \langle F(t'-t_\mu) \rangle_{t_\mu} = \\
 &= e^2 \sum_{v=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T F(t-t_v)F(t'-t_v) dt_v + \\
 &+ e^2 \sum_{v \neq \mu}^n \sum_{\mu} \frac{1}{T^2} \int_0^T dt_v F(t-t_v) \int_0^T dt_\mu F(t'-t_\mu). \quad (11.15)
 \end{aligned}$$

Вважаючи, як і раніше, що  $T \gg \tau_{np}$ , границі інтегрування в (11.15) можна розтягнути до нескінченності. Враховуючи далі, що подвійна сума в (11.15) складається з  $n(n-1)$  однакових доданків, і проводячи остаточне усереднення за  $n$ , отримуємо:

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \frac{e^2 \bar{n}}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_1)F(t'-t_1) dt_1 + \frac{e^2}{T^2} (\bar{n}^2 - \bar{n}). \quad (11.16)$$

Проте, з (3.28) випливає, що  $\bar{n}^2 - \bar{n} = \bar{n}$ , тобто другий доданок (11.16) перетворюється до вигляду  $e^2 \bar{n}^2 / T^2 = \langle I \rangle^2$ . Підставляючи (11.16) у (11.13), після заміни змінної інтегрування  $t-t_1 = \theta$  приходимо до формули:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(t'-t+\theta) d\theta. \quad (11.17)$$

Звідси видно, що  $B_I$  залежить тільки від різниці  $t-t'$ , тобто процес  $I(t)$  є стаціонарним у широкому розумінні. Зокрема, якщо вважати тривалість  $\tau_{np}$  елементарних імпульсів нехтовно малою, тобто

покласти  $F(t) = \delta(t)$ , то інтеграл (11.17) обчислюється і процес  $I(t)$  виявляється  $\delta$ -корельованим, тобто білим шумом:

$$B_I(t, t') = e \langle I \rangle \delta(t-t'). \quad (11.18)$$

## 11.2. Енергетичний спектр дробового шуму

Перетворення Фур'є від формули (11.17) за різницевою змінною  $\tau = t' - t$  приводить до наступного виразу для енергетичного спектра дробового шуму:

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\tau+\theta) d\theta. \quad (11.19)$$

Змінимо в (11.19) порядок інтегрування і введемо амплітудний спектр  $C_F(\omega)$  імпульсу струму  $F(t)$ :

$$C_F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (11.20)$$

Тоді  $S_I(\omega)$  перетворюється так:

$$\begin{aligned}
 S_I(\omega) &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau+\theta) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
 &= \frac{e \langle I \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta') e^{-i\omega\theta'} d\theta' = 2\pi e \langle I \rangle |C_F(\omega)|^2.
 \end{aligned} \quad (11.21)$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла ми скористалися заміною змінної  $\theta' = \tau + \theta$ .

Для гранично низьких частот, коли  $\omega\tau_{np} \ll 1$ , множник  $e^{-i\omega t}$  в (11.20) можна замінити на одиницю. В результаті отримуємо

$$C_F(\omega) \approx \frac{1}{2\pi}, \quad |\omega| \ll \frac{1}{\tau_{np}}. \quad (11.22)$$

Підставляючи цю оцінку в (11.21), приходимо до формули Шоттки

$$S_I(\omega) = \frac{e \langle I \rangle}{2\pi}. \quad (11.23)$$

Таким чином, спектр низькочастотних флуктуацій ( $\omega \tau_{np} \ll 1$ ) дробового шуму визначається тільки величиною середнього струму  $\langle I \rangle$  і не залежить від частоти.

#### Приклад

Поведінка спектра  $S_I(\omega)$  на більш високих частотах згідно з (11.21) повністю визначається формою елементарного імпульсу струму  $F(t)$ , характерного для електровакуумного приладу, що розглядається. Як найпростіший приклад визначимо вигляд  $F(t)$  під час руху електрона від катода до анода в плоскому діоді (рис.11.3).

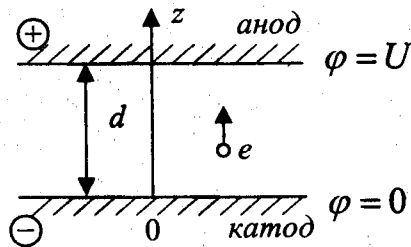


Рис. 11.3

Позначимо через  $d$  відстань, а через  $U$  — різницю потенціалів між катодом і анодом. Для визначення сили, що діє на електрон у просторі між катодом і анодом необхідно спочатку обчислити

напруженість електростатичного поля  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ , де  $\varphi$  — електростатичний потенціал усередині конденсатора. Розподіл  $\varphi$  знаходиться із розв'язку рівняння Пуассона із заданими умовами на границях (обкладках конденсатора):

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, \\ \varphi_{z=0} = 0, \\ \varphi_{z=d} = U. \end{cases} \quad (11.24)$$

За умови, що лінійні розміри  $L$  плоского конденсатора набагато перевищують відстань між його обкладками ( $L \gg d$ ), можна вважати, що потенціал  $\varphi$  залежить тільки від  $z$ -ї координати. При

цьому  $\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$  і розв'язок рівняння Пуассона (11.24) має

простий вигляд  $\varphi(z) = \frac{U}{d} z$ . У результаті для напруженості

електростатичного поля і сили, що діє на електрон ( $\vec{F} = -e\vec{E}$ ), отримуємо наступні вирази:

$$\vec{E} = -E\vec{e}_z, \quad E = \frac{U}{d}; \quad \vec{F} = F\vec{e}_z, \quad F = eE = e\frac{U}{d}. \quad (11.25)$$

З (11.25) видно, що сила, яка діє на електрон, всюди спрямована вздовж додатного напрямку осі  $z$ , стала і дорівнює  $eE$ . Електрон, пересуваючись уздовж осі  $z$ , на інтервалі шляху  $dz$  отримує енергію  $dW = Fdz = eEdz$  і потужність

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = eE \left( \frac{dz}{dt} \right) = eEV(t), \quad (11.26)$$

де  $V(t) = \frac{dz}{dt}$  — швидкість руху електрона.

З іншого боку, під час руху електрон наводить на обкладках конденсатора (діода) індукований заряд  $q$ , зміни якого у часі призводять до появи в електричному колі імпульсу струму  $i(t)$ .

При цьому потужність в електричному колі дорівнює добутку струму  $i(t)$  на різницю потенціалів  $U$ :

$$P(t) = i(t)U. \quad (11.27)$$

З порівняння (11.26) і (11.27) отримаємо, що

$$i(t) = \frac{e}{d} V(t). \quad (11.28)$$

Швидкість електрона  $V(t)$  можна знайти з одновимірного рівняння руху:  $m \frac{dV}{dt} = F = eE$ . З припущення, що у момент вильоту електрон мав нульову швидкість ( $V(t)|_{t=0} = 0$ ), отримуємо

$$V(t) = \frac{eE}{m} t. \quad (11.29)$$

Видно, що залежність  $i(t)$  виявляється лінійною:

$$i(t) = \frac{e^2 E}{md} t. \quad (11.30)$$

З очевидного співвідношення

$$\int_0^{\tau_{np}} V(t) dt = d, \quad (11.31)$$

визначимо час прольоту  $\tau_{np}$  електрона від катода до анода. Підставляючи у (11.31) знайдену залежність (11.29) та інтегруючи за  $t$ , знаходимо

$$d = \frac{eE}{2m} \tau_{np}^2. \quad (11.32)$$

Замінивши  $d$  в (11.30) на вираз (11.32) й увівши функцію форми  $F(t) = i(t)/e$ , приходимо до такого:

$$F(t) = \frac{2t}{\tau_{np}}, \quad (0 \leq t \leq \tau_{np}). \quad (11.33)$$

Визначимо тепер  $C_F(\omega)$  за формулою (11.20), враховуючи, що  $F(t) = 0$  поза інтервалом  $[0, \tau_{np}]$

$$C_F(\omega) = \frac{1}{\pi \tau_{np}^2} \int_0^{\tau_{np}} t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\pi \theta^2} [e^{-i\theta} (1 + i\theta) - 1] \quad (11.34)$$

Тут  $C_F(\omega)$  подано у вигляді функції кута прольоту  $\theta = \omega \tau_{np}$ . В результаті для енергетичного спектра  $S_I(\omega)$  флуктуацій струму (11.21) отримуємо

$$S_I(\omega) = \frac{2e \langle I \rangle}{\pi \theta^4} \{2 + \theta^2 - 2 \cos \theta - 2\theta \sin \theta\}. \quad (11.35)$$

Легко переконатися, що при малих кутах прольоту ( $\theta \ll 1$ ) (низькі частоти) з (11.35) ми приходимо до формули Шоттки (11.23).

### 11.3. Еквівалентний шумовий опір

Дробовий шум в анодному колі (рис. 11.4) іноді зручно розглядати як результат теплових флуктуацій ЕРС у колі сітки, котрі виникають в еквівалентному шумовому опорі  $R_c$ , що перебуває при температурі  $T$ . Флуктуації  $E(t)$  у сітковому колі викликають в анодному колі флуктуації струму  $I(t) = SE(t)$ , де  $S$  — крутизна анодної характеристики лампи.

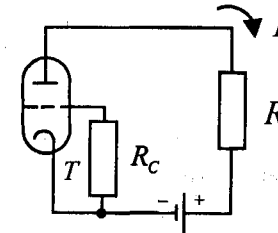


Рис. 11.4



Оскільки згідно з формулою Найквіста спектр флуктуацій ЕРС у колі сітки дорівнює  $S_E = \frac{kT}{\pi} R_c$ , то спектр флуктуацій струму  $S_I(\omega)$  в анодному колі має вигляд

$$S_I(\omega) = S^2 S_E = \frac{kT}{\pi} R_c S^2. \quad (11.36)$$

Прирівнюючи цю величину до виразу для  $S_I(\omega)$ , визначеного формулою Шоттки (11.23), отримуємо

$$R_c = \frac{e \langle I \rangle}{2kTS^2}. \quad (11.37)$$

Формула (11.37) і визначає величину еквівалентного шумового опору.

### ЗАДАЧІ

1. Знайти кореляційну функцію і проаналізувати енергетичний спектр дробового струму при заданій функції форми поодинокого імпульсу:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\tau_{np}^2}, & 0 \leq t \leq \tau_{np} \\ t < 0, & t > \tau_{np} \end{cases} \quad (1)$$

**Розв'язок** За умовою задачі  $F(t)$  має вигляд, зображений на рис. 11.5.

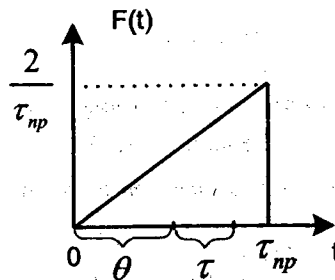


Рис. 11.5

Згідно з (11.17) кореляційна функція струму  $B_I(\tau)$ , записана у змінних  $\theta$  і  $\tau$ , подається як

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2)$$

де  $\bar{I}$  — середнє значення струму. Границі інтегрування у (2) вибираються, виходячи із заданого вигляду (1) функції  $F(t)$ . Поточна точка визначається координатою  $\theta$ ,  $\tau$  — часовий зсув для визначення кореляції (див. рис. 11.5). Цей зсув може бути як додатним, так і від'ємним.

Розглянемо спочатку випадок  $\tau > 0$ . За умовою задачі  $F(t) = 0$  при  $t < 0$  і  $t > \tau_{np}$ . Отже,  $B_I(\tau)$  буде відмінною від нуля за умови виконання наступних нерівностей (див. (2)):

$$0 < \theta < \tau_{np} \quad \text{і} \quad 0 < (\theta + \tau) < \tau_{np}.$$

Перетворимо ці нерівності до вигляду:  $0 < \theta < \tau_{np}$  і  $-\tau < \theta < \tau_{np} - \tau$ . Зобразимо крайні точки цих нерівностей на осі (рис. 11.6).

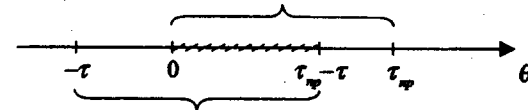


Рис. 11.6

Видно, що обидві нерівності одночасно виконуватимуться тільки за умови перебування  $\theta$  в інтервалі  $0 < \theta < \tau_{np} - \tau$  (заштрихована ділянка). Таким чином, ми приходимо до наступного визначення:

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_0^{\tau_{np}-\tau} \frac{2\theta}{\tau_{np}^2} \frac{2(\theta + \tau)}{\tau_{np}^2} d\theta = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - \tau)^2 (\tau + 2\tau_{np}), \quad (3)$$

яке справджується для  $0 \leq \tau \leq \tau_{np}$ . Аналогічним чином отримується і вираз для  $B_I(\tau)$  при від'ємних значеннях  $\tau$ :  $-\tau_{np} \leq \tau \leq 0$ . У цьому випадку, проте, зручніше продовжити парним способом (3) в область від'ємних  $\tau$  ( $\tau < 0$ ). У результаті отримуємо наступний остаточний вираз:

$$B_I(\tau) = \frac{2e\bar{I}}{3\tau_{np}^4} (\tau_{np} - |\tau|)^2 (|\tau| + 2\tau_{np}). \quad (4)$$

Графік залежності  $B_I(\tau)$  подано на рис. 11.7.

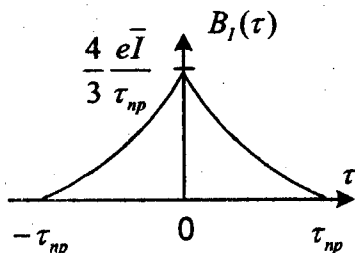


Рис.11.7

Видно, що  $B_I(\tau)$  має максимальне значення при  $\tau = 0$ , а при  $\tau = \pm\tau_{np}$  набуває мінімальних значень, дорівнюваних нулю.

Енергетичний спектр  $S_I(\omega)$  для  $F(t)$  функції, що розглядається, визначається згідно з (11.35):

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^4} (2 + \theta^2 - 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta), \quad (5)$$

де  $\theta = \omega\tau_{np}$  – безрозмірний кут прольоту. Проаналізуємо цей вираз при різних значеннях  $\theta$  (частоти  $\omega$ ). При  $\theta \ll 1$  (низькі частоти) подавши  $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$  і  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$  отримаємо

$$S_I(\theta) \approx \frac{e\bar{I}}{2\pi}. \quad (6)$$

При великих  $\theta \gg 1$  (високі частоти) у формулі (5) можна залишити в дужках тільки доданок  $\theta^2$ , в результаті чого знаходимо

$$S_I(\theta) = \frac{2e\bar{I}}{\pi\theta^2}. \quad (7)$$

Звідси випливає, що на високих частотах  $S_I(\omega) \sim 1/\omega^2$ . Графік  $S_I(\omega)$  показано на рис. 11.8.

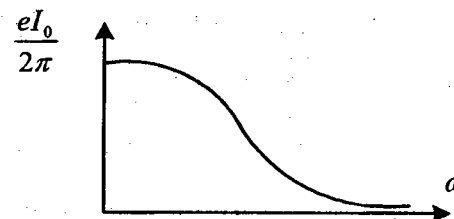


Рис. 11.8

2. Знайти кореляційну функцію й енергетичний спектр дробового струму імпульсного пуассонівського випадкового процесу

$$I(t) = e \sum_v F_v(t),$$

де  $F_v(t) = \delta(t - t_v)$ ,  $t_v$  — пуассонівський потік подій, причому середня кількість імпульсів за одиницю часу дорівнює  $n_1$ .

**Розв'язок.** Проводячи обчислення, аналогічні до таких у попередній задачі і використовуючи властивість  $\delta$ -функції, отримуємо

$$B_I(\tau) = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta) \delta(\theta + \tau) d\theta = e\bar{I} \delta(\tau),$$

$$S_I(\omega) = \frac{e\bar{I}}{2\pi},$$

де  $\bar{I} = en_1$ .

## § 12. Флуктуації в автоколивальних системах

Розглянуті у попередніх параграфах теплові і дробові флуктуації є причиною появи шумів і в складніших радіотехнічних схемах, зокрема в генераторах коливальних. Розрізняють генератори із самозбудженням і з зовнішнім збудженням. Генератори з самозбудженням називають також автогенераторами. Для збудження коливальних у них використовується позитивний зворотний зв'язок або активний прилад, що має ділянку характеристики з від'ємним нахилом. Характерні схеми автогенераторів з індуктивним зворотним зв'язком, у яких використовуються різні активні елементи, показано на рис. 12.1 (а — на біполярному транзисторі, б — на польовому транзисторі, в — на електронній лампі). Для дослідження статистичних характеристик флуктуацій в автоколивальних системах ми розглянемо вже класичний нині приклад найпростішого генератора на триелектродній електронній лампі з індуктивним зворотним зв'язком і коливальним контуром у анодному колі (рис. 12.1 в).

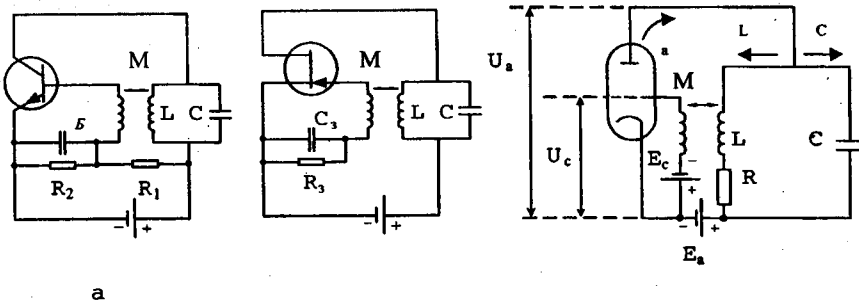


Рис. 12.1

## 12.1. Побудова замкнутого рівняння для сили струму

Нехай у коливальному контурі в анодному колі (рис. 12.1 в) з якоїсь причини виникли коливання. Тоді вони матимуть місце у всіх колах генератора, що розглядається. Позначимо через  $I_L$  і  $I_C$  відповідно струми через індуктивний і ємнісний ланцюжки

контурі. Враховуючи, що активний опір  $R$  у контурі є джерелом теплової флуктуації ЕРС  $E(t)$  за законом, Кірхгофа, маємо

$$L \frac{dI_L}{dt} + RI_L - \frac{1}{C} \int I_C(t') dt' = E(t). \quad (12.1)$$

З іншого боку умова рівності струмів у вузлі дає

$$I_L + I_C = I_a. \quad (12.2)$$

Після диференціювання (12.1) за  $t$  з урахуванням (12.2), отримаємо

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{C} I_L - \frac{1}{C} I_a = \frac{dE(t)}{dt}. \quad (12.3)$$

Врахуємо тепер, що анодний струм  $I_a$  підлягає флуктуаціям за рахунок дробового шуму. Позначимо через  $J_a$  складову анодного струму без урахування дробових флуктуацій. Тоді сумарний анодний струм  $I_a$  подається як

$$I_a = J_a + I_{dp}. \quad (12.4)$$

Складову  $J_a$  залежить від різниці потенціалів між сіткою і катодом  $U_c$ , а також між анодом і катодом  $U_a$ . З теорії електровакуумних пристроїв відомо, що  $J_a$  є функція так званої керуючої напруги:

$$U_y = U_c + D U_a, \quad (12.5)$$

де  $D$  ( $D < 1$ ) – параметр, який називають проникністю. Величина  $D$  залежить від екрануючої дії сітки і визначається головним чином її густиною: чим гущіша сітка, тим більшу кількість силових ліній поля анода вона перехопить, і тим меншою є проникність лампи. Залежність  $J_a(U_y)$  звичайно нелінійна і має характерний

вигляд, показаний на рис. 12.2. Відповідним підбором сталого зміщення  $U_y = U_0$  вибираємо потрібний режим роботи лампи. Точка  $P$  на характеристиці лампи, що відповідає режимові відсутності коливань, називається „точкою спокою”.

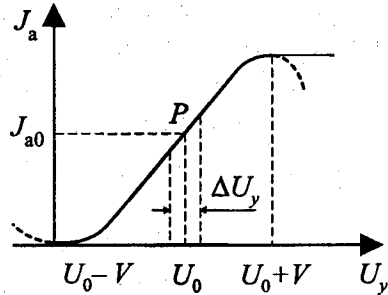


Рис. 12.2

Нехай точка спокою суміщена з точкою перегинання кривої  $J_a(U_y)$   $\left( \frac{d^2 J_a(U_0)}{dU_y^2} = 0 \right)$ . У цьому випадку для незначних відхилень  $\Delta U_y = U_y - U_0$  керуючого сигналу  $U_y$  від значення  $U_0$ , зміни анодного струму  $J_a(U_y)$  можна приблизно визначити, якщо представити характеристику лампи поліномом третього степеня.

$$J_a(U_y) \approx J_{a0} + S \left[ \Delta U_y - \frac{(\Delta U_y)^3}{3V^2} \right]. \quad (12.6)$$

Тут  $J_{a0} = J_a(U_0)$  – постійний анодний струм, що відповідає робочій точці;  $S = dJ_a(U_0)/dU_y$  – крутизна характеристики у точці  $P$ ; а

$$V = \left[ -\frac{2S}{d^3 J_a(U_0)/d^3 U_y} \right]^{\frac{1}{2}} -$$

параметр, що має розмірність напруги і характеризує нелінійність кривої у точці спокою. Заміна істинної кривої  $J_a(U_y)$  (її показано суцільною лінією на рис. 12.2) на приблизну залежність (12.6) (штрихова лінія) з одного боку достатньо добре описує перетворення невеликих коливань у лампі, а з іншого – дає змогу враховувати нелінійні процеси.

Якщо омичним опором контуру можна знехтувати, то керуюча напруга у робочій точці  $U_0$  пов'язана з ЕРС у колах сітки  $E_c$  і анода  $E_a$  наступним співвідношенням:

$$U_0 = E_c + DE_a. \quad (12.7)$$

Згідно з рис. 12.1а анодна напруга  $U_a$  дорівнює ЕРС в анодному колі  $E_a$ , без спада напруги на індуктивному колі контуру:

$$U_a = E_a - \left( L \frac{dI_L}{dt} + RI_L \right). \quad (12.8)$$

Напруга на сітці  $U_c$  в свою чергу за рахунок зворотного зв'язку  $M$  визначається ЕРС у колі сітки  $E_c$  і швидкістю зміни струму  $I_L$  в контурі:

$$U_c = E_c + M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.9)$$

Підставляючи (12.8, 12.9) в формулу для керуючої напруги (12.5), отримаємо

$$\begin{aligned} U_y = U_c + DU_a &= E_c + DE_a + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L = \\ &= U_0 + (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \end{aligned}$$

Звідси, згідно з визначенням  $\Delta U_y = U_y - U_0$  знаходимо змінну складову керуючої напруги:

$$\Delta U_y = (M - DL) \frac{dI_L}{dt} - DRI_L. \quad (12.10)$$

Якщо знехтувати реакцією анодного навантаження, тобто покласти  $D = 0$ , то останній вираз спрощується і набуває вигляду

$$\Delta U_y = M \frac{dI_L}{dt}. \quad (12.11)$$

Для спрощення подальшого аналізу ми будемо користуватися наближеною формулою (12.11). Зауважимо тільки, що врахування реакції анодного навантаження зводиться в основному до формальної заміни  $M$  на  $M' = M - DL$ .

Введемо тепер у розгляд змінну складову струму  $I = I_L - J_{a0}$  і перепишемо вихідне рівняння (12.3) з урахуванням визначень (12.4), (12.6), а також зв'язку між  $\Delta U_y$  і  $I_L$  (12.11):

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \left\{ I - SM \frac{dI}{dt} \left[ 1 - \frac{M^2}{3V^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \frac{dE(t)}{dt} + \frac{1}{C} I_{op}. \quad (12.12)$$

Розділимо обидві частини рівняння (12.12) на  $L$  і введемо власну частоту контуру  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Після цього, перенісши у праву частину нелінійні за  $I$  доданки, поява яких пов'язана з нелінійністю анодної характеристики лампи (12.6), і неконсервативний доданок  $R \frac{dI}{dt}$ , завдяки якому враховуються теплові втрати у системі, приходимо до такого рівняння:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 SM \frac{dI}{dt} \left\{ 1 - \frac{RC}{SM} - \frac{M^2}{3V^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} + \omega_0^2 I_{op}. \quad (12.13)$$

Введемо у розгляд безрозмірний час  $t' = \omega_0 t$ , диференціювання за яким будемо позначати крапкою вгорі:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \omega_0 \dot{I}. \quad (12.14)$$

З урахуванням (12.14) рівняння (12.13) набуває вигляду

$$\ddot{I} + I = \mu \dot{I} \left\{ p - \frac{4}{3} \frac{\dot{I}^2}{I_0^2} \right\} + \frac{1}{L\omega_0} \dot{E} + I_{op}, \quad (12.15)$$

де використано наступні позначення:

$$\mu = \omega_0 SM; \quad p = 1 - \frac{RC}{SM}; \quad I_0 = \frac{2V}{\omega_0 M}. \quad (12.16)$$

Нарешті розділимо обидві частини рівняння (12.15) на  $I_0$  і введемо безрозмірний струм  $x = I/I_0$ :

$$\ddot{x} + x = \mu \dot{x} \left\{ p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right\} + \mu F(t'). \quad (12.17)$$

Через  $\mu F(t')$  ми позначили „зовнішні сили”, що викликають флуктуації у цій коливальній системі – теплові і дробові шуми:

$$\mu F(t') = \frac{1}{I_0} \left\{ \frac{1}{L\omega_0} \dot{E}(t') + I_{op}(t') \right\}. \quad (12.18)$$

## 12.2. Укорочені рівняння Ван-дер-Поля

При  $\mu = 0$  рівняння (12.17) переходить у рівняння для ідеального гармонійного осцилятора

$$\ddot{x} + x = 0, \quad (12.19)$$

яке описує незатухаючі гармонійні коливання струму в контурі з нескінченно високою добротністю:

$$x(t') = r \cos(t' + \varphi). \quad (12.20 \text{ а})$$

Сталі інтегрування  $r$  і  $\varphi$  мають зміст амплітуди і фази коливань відповідно. Якщо зовнішні сили  $\mu F(t')$ , нелінійні і дисипативні доданки є достатньо малими ( $\mu \ll 1$ ), то коливання, що описуються рівнянням (12.17), будуть мало відрізнятися від гармонійних коливань (12.20 а). У цьому випадку розв'язок рівняння (12.17) можна шукати у вигляді

$$x(t') = r(\theta) \cos[t' + \varphi(\theta)], \quad (12.20 \text{ б})$$

де амплітуда  $r$  і фаза  $\varphi$  є функціями „повільного часу”  $\theta = \mu t'$ .

Перед тим, як проводити аналіз розв'язку, зробимо деякі зауваження стосовно вихідного рівняння (12.17), яке ми перепишемо у загальнішій формі:

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \mu F(t'), \quad (12.21)$$

де  $\mu \ll 1$ , а  $f(x, \dot{x})$  – деяка детермінована нелінійна функція  $x$  і  $\dot{x}$ , що визначається типом автоколивальної системи. Для найпростішого генератора, який розглядається,

$$f\left(x, \dot{x}\right) = \dot{x} \left( p - \frac{4}{3} \dot{x}^2 \right). \quad (12.22)$$

До вигляду (12.21) зводяться рівняння, що описують коливання у широкому класі автоколивальних „майже гармонійних” пристроїв (лампові генератори, генератори на напівпровідникових елементах, квантові й оптичні генератори тощо). Системи, в яких під дією малих нелінійних і дисипативних членів ( $\mu \ll 1$ ) відбуваються майже гармонійні коливання, називаються **томсонівськими**. Розв'язок диференціальних рівнянь,

якими вони описуються, можна проводити у межах наближеного (асимптотичного) методу Ван-дер-Поля, або, як його інакше називають, методу повільних збурень.

Для вибраного виду розв'язку (12.20б) обчислимо другу похідну  $\ddot{x}$  із точністю до лінійних за  $\mu \ll 1$  членів:

$$\dot{x} = -r \sin(t' + \varphi) + \mu \frac{dr}{d\theta} \cos(t' + \varphi) - \mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \sin(t' + \varphi), \quad (12.23)$$

$$\ddot{x} \approx -r \cos(t' + \varphi) - 2\mu \frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) - 2\mu r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi). \quad (12.24)$$

Підставимо (12.24) у рівняння (12.21). Доданки нульового порядку за  $\mu$ , як і слід було очікувати, скорочуються, а лінійні члени приводять до рівняння

$$-2 \left[ \frac{dr}{d\theta} \sin(t' + \varphi) + r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos(t' + \varphi) \right] = f(x, \dot{x}) + F(t'), \quad (12.25)$$

причому у правій частині цієї формули в аргументах функції  $f$  слід урахувувати тільки головні за малим параметром  $\mu$  доданки:

$$x = r \cos(t' + \varphi); \quad \dot{x} = -r \sin(t' + \varphi). \quad (12.26)$$

Функція  $f(x, \dot{x})$  є періодичною функцією від змінної  $\Theta = t' + \varphi$  з періодом  $2\pi$ , оскільки її аргументи  $x$  і  $\dot{x}$  є тригонометричними функціями (12.26) від  $\Theta$ . Тому  $f(x, \dot{x})$  можна розкласти у ряд Фур'є на інтервалі  $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ :

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\Theta + b_n(r) \sin n\Theta]. \end{aligned} \quad (12.27)$$

Тут  $a_n(r)$  і  $b_n(r)$  — коефіцієнти розкладання:

$$\begin{Bmatrix} a_n(r) \\ b_n(r) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \Theta, -r \sin \Theta) \begin{Bmatrix} \cos n \Theta \\ \sin n \Theta \end{Bmatrix} d \Theta. \quad (12.28)$$

Для систем із достатньо високою добротністю коливання відбуваються тільки у невеликій області навколо резонансної частоти  $\omega = \omega_0$ . Дійсно, амплітуда  $r$  і фаза  $\varphi$  коливань є функціями повільного часу  $\theta = \mu t'$ . Останнє означає, що резонансна крива коливального контуру, що розглядається, має ширину смуги  $\Delta_{\text{рез}} = |\omega/\omega_0| \approx 2\mu \ll 1$  (див. рис. 12.3). Ця обставина дає змогу нам здійснити ще кілька спрощень. По-перше, у правій частині рівняння (12.25) достатньо врахувати тільки резонансні доданки функції  $f(x, x)$  — члени з  $n=1$  у формулі (12.27). По-друге, зі всього широкого енергетичного спектра  $S_F(\omega)$  випадкової зовнішньої сили  $F(t')$  у рівнянні (12.25) можна залишити тільки ділянку спектра, що прилягає до частоти власних коливань системи  $\omega = \omega_0$  (див. рис. 12.3).

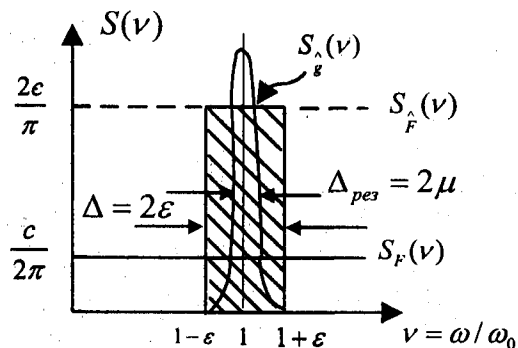


Рис. 12.3

Згідно з визначенням (12.18), випадкова сила  $F(t')$ , будучи суперпозицією теплових і дробових флуктуацій, близька до білого шуму. Виріжемо з її енергетичного спектра  $S_F(\omega)$  деяку смугу частот шириною  $\Delta = |\omega/\omega_0| = 2\varepsilon$ , що задовольняє умові:

$$\mu \ll \varepsilon \ll 1. \quad (12.29)$$

З урахуванням малого значення  $\varepsilon$  істинний випадковий процес  $F(t')$  можна замінити на вузькосмуговий —  $g(t')$ , який, як нам відомо з §6, може бути поданий у вигляді двох квадратурних компонент:

$$g(t') \approx F_{\parallel}(\theta) \cos(t' + \varphi) + F_{\perp}(\theta) \sin(t' + \varphi). \quad (12.30)$$

Підставляючи (12.30) в (12.25) і прирівнюючи коефіцієнти при кожній з двох лінійно незалежних функцій  $\cos(t' + \varphi)$  і  $\sin(t' + \varphi)$ , приходимо до системи рівнянь Ван-дер-Поля для визначення повільних змін амплітуд  $r(\theta)$  і фази  $\varphi(\theta)$ :

$$-2 \frac{dr}{d\theta} = b_1(r) + F_{\perp}(\theta), \quad (12.31 \text{ а})$$

$$-2r \frac{d\varphi}{d\theta} = a_1(r) + F_{\parallel}(\theta). \quad (12.31 \text{ б})$$

Рівняння (12.31) ще називають **укороченими рівняннями** — вони справді простіші і „коротші” за вихідне рівняння (12.21).

Повернемося до нашого конкретного прикладу — найпростішої автоколивальної системи, для якої  $f(x, x)$  має вигляд

$$f(x, x) = -r \sin \Theta \left[ p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right]. \quad (12.32)$$

Із цього виразу випливає, що  $f$  — непарна функція від  $\Theta$ , тому інтеграл (12.28) для  $a_1(r)$  перетворюється на нуль, а для  $b_1(r)$  маємо:

$$b_1(r) = -\frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta \left( p - \frac{4}{3} r^2 \sin^2 \Theta \right) d\Theta. \quad (12.33)$$

Знаходження  $b_1(r)$  зводиться до обчислення двох інтегралів:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = 1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \Theta d\Theta = \frac{3}{4},$$

в результаті чого отримуємо:

$$b_1(r) = -r(p - r^2). \quad (12.34)$$

З урахуванням (12.34) рівняння Ван-дер-Поля (12.31) набувають вигляду

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2) - \frac{1}{2}F_{\perp}(\theta), \quad (12.35 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r}F_{\parallel}(\theta). \quad (12.35 \text{ б})$$

Таким чином, дослідження флуктуацій в автоколивальній системі звелось до розв'язку системи двох диференціальних рівнянь для амплітуди і фази коливань, які можна розглядати як рівняння руху динамічної системи, що описується двома параметрами  $r$  і  $\varphi$ , під дією випадкових зовнішніх сил  $F_{\parallel}$  і  $F_{\perp}$ . Легко бачити досить близьку аналогію між рівняннями (12.35) і рівнянням руху броунівської частинки (9.11).

### 12.3. Аналіз розв'язання укорочених рівнянь Ван-дер-Поля

Звернемося спочатку до аналізу розв'язань рівнянь (12.35) у випадку відсутності зовнішніх сил  $F_{\perp} = F_{\parallel} = 0$ , тобто дослідимо характер коливань в автономній системі (але, як і раніше, нелінійній і неконсервативній):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{2}(p - r^2), \quad (12.36 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 0. \quad (12.36 \text{ б})$$

Із (12.36 б) випливає, що  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , а стосовно розв'язку нелінійного рівняння (12.36 а), то ми дамо його тільки на якісному рівні. Для наочності стан розглянутої динамічної системи будемо зображати точкою на площині з полярними координатами  $r$  (відстань до початку координат) і  $\varphi$  (азимутальний кут) — площини Ван-дер-Поля. З (12.36 б) випливає, що кут  $\varphi$  залишається сталим, тому точка, що зображує стан системи, може пересуватися тільки за променем  $\varphi = \varphi_0$ . Характер еволюції системи суттєво залежить від знака параметра  $p$ , який було введено у (12.16):

$$p = 1 - \frac{RC}{SM}. \quad (12.37)$$

Величина  $SM$  є добутком крутизни характеристики лампи  $S$  і коефіцієнта зворотного зв'язку  $M$ . Чим більша  $SM$ , тим легше самозбуджується система. Параметр  $RC$  враховує дисипативні втрати у системі (аналог механічного тертя).

При  $p < 0$  (дисипація переважає над зворотним зв'язком) права частина (12.36 а) — від'ємна при будь-яких  $r$ , оскільки завжди  $r > 0$ . Отже, у цьому випадку  $dr/d\theta < 0$ , тобто точка на площині Ван-дер-Поля пересувається за променем  $\varphi = \varphi_0$  до початку координат, доки не сягне стану рівноваги  $r = 0$ , де  $dr/d\theta = 0$  (див. рис.12.4). Для переходу від площини Ван-дер-Поля до фазової площини, на якій стан системи задається значенням

„координати”  $x$  і „швидкості”  $\dot{x}$  згідно з формулами (12.26), необхідно площину Ван-дер-Поля обернути навколо початку координат з одиничною кутовою швидкістю проти годинникової



стрілки. При цьому фазова точка буде пересуватися за годинниковою стрілкою спіралью до початку координат (рис.12.5) — амплітуда коливань у системі буде зменшуватися доти, доки коливання не згаснуть повністю ( $r = 0$ ).

У протилежному граничному випадку  $p > 0$  (зворотний зв'язок переважає над дисипацією) знак похідної  $dr/d\theta$ , як випливає з (12.36 а), залежить від амплітуди коливань  $r$ : при  $r > r_0 = \sqrt{p}$  права частина (12.36 а) буде як і раніше від'ємною ( $dr/d\theta < 0$ ) і точка  $A$  на площині Ван-дер-Поля буде пересуватися за променем  $\varphi = \varphi_0$  до початку координат (див. рис 12.6); при  $r < r_0$ , навпаки,  $dr/d\theta > 0$  і точка  $B$  на рис. 12.6 пересувається за радіусом від початку координат. Очевидно, що при  $p > 0$  є два положення рівноваги:  $dr/d\theta = 0$  при  $r = 0$  і  $r = r_0$ . Найпростіше дослідження на стійкість показує, що тільки  $r = r_0$  відповідає стійкій рівновазі. На фазовій площині траєкторії, що описують точки  $A$  і  $B$ , мають вигляд спіралей, які наближаються до кола  $r = r_0$ , котре називають **граничним циклом** (див. рис. 12.7).

Таким чином, при  $p > 0$  система з будь-якого початкового стану виходить на стаціонарний режим гармонійних коливань зі сталими амплітудою  $r_0$  і фазою  $\varphi_0$ :

$$x_0(t') = r_0 \cos(t' + \varphi_0).$$

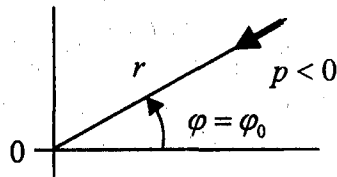


Рис. 12.4

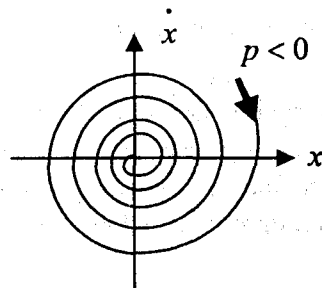


Рис. 12.5

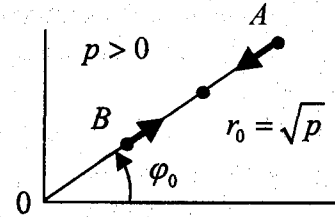


Рис. 12.6

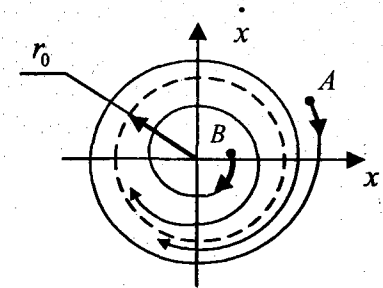


Рис. 12.7

#### 12.4. Урахування випадкових факторів

Звернемося тепер до головного питання, яке нас цікавить: як змінюються коливання у системі при наявності теплового і дробового шуму? Для відповіді на це питання потрібно розв'язати рівняння (12.35) за наявності зовнішніх випадкових сил  $F_{\perp}(\theta)$  і  $F_{\parallel}(\theta)$ . Найцікавішим при цьому є автоколивальний режим  $p > 0$ , що встановився, коли система вже вийшла на граничний цикл  $r = r_0$ . З якісної точки зору роль зовнішньої сили  $F_{\perp}$  в (12.35) зводиться до „зіштовхування” фазової точки циклу з граничного циклу (рис. 12. 8), тобто до збільшення або зменшення амплітуди  $r$  коливань — сила  $F_{\perp}$  діє ніби „перпендикулярно” до фазової траєкторії системи (ми не даремно ввели значок  $\perp$ , що означає перпендикулярність). Друга ж частина „проекції” сили —  $F_{\parallel}(\theta)$  діє по дотичній до траєкторії, сповільнюючи або прискорюючи обертання фазової точки навколо початку координат, так що за рівні проміжки часу  $t'$  фазова точка описує не рівні кути (на рис. 12.8 радіуси з початку координат проведені до фазової точки через рівні проміжки часу).

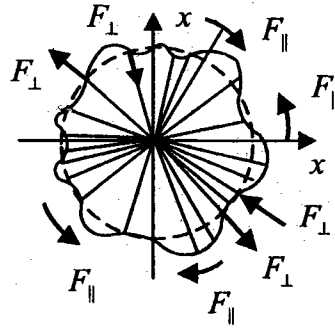


Рис. 12.8

Таким чином, наявність випадкових сил має призводити до флуктуацій як амплітуди коливальності  $r$ , так і їх фази  $\varphi$  і, отже, частоти  $d\varphi/d\theta$ . Вважатимемо, що внаслідок дії „слабких” сил ( $|F_{\parallel}(\theta)| \ll 1$ ,  $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$ ) в автоколивальній системі виникають малі флуктуації. Це означає, що амплітуду коливальності можна шукати за формулою  $r(\theta) = r_0 + \rho(\theta)$ , причому  $|\rho| \ll r_0$ . Підставивши такий розв’язок у (12.35 а) і, враховуючи тільки лінійні за  $|\rho|/r_0 \ll 1$  і  $|F_{\perp}(\theta)| \ll 1$  доданки, отримаємо

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \approx -p\rho - \frac{1}{2}F_{\perp}(\theta). \quad (12.38)$$

У правій частині рівняння (12.35 б), враховуючи мале значення зовнішніх сил ( $|F_{\parallel}(\theta)| \ll 1$ ), можна  $r$  замінити на  $r_0$ . Як результат, у лінійному наближенні приходимо до рівнянь:

$$\frac{d\rho}{d\theta} + p\rho = -\frac{1}{2}F_{\perp}(\theta), \quad (12.39 \text{ а})$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{2r_0}F_{\parallel}(\theta). \quad (12.39 \text{ б})$$

Як початкові умови до цієї системи рівнянь зручно вибрати наступні: а)  $\rho = 0$  при  $\theta = -\infty$  (адіабатичне включення збурень у нескінченно далекому минулому); б)  $\varphi = 0$  при  $\theta = 0$  (фазу коливальності можна відлічувати від довільного значення і, зокрема, від її значення при  $\theta = 0$ ). Із рівняннями (12.39 а) ми вже стикалися у теорії броунівського руху (див. формулу (9.13)), так що ми можемо скористатися готовим розв’язком (9.17):

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 - \theta)} F_{\perp}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40 \text{ а})$$

Рівняння (12.39 б) також елементарно інтегрується:

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2r_0} \int_0^{\theta} F_{\parallel}(\theta_1) d\theta_1. \quad (12.40 \text{ б})$$

Отримані формули (12.40) дають змогу розв’язати динамічну частину поставленого завдання – виражають флуктуації амплітуди  $r$  і фази  $\varphi$ , які нас цікавлять, через випадкові сили  $F_{\perp}$  і  $F_{\parallel}$ . Очевидно, що для розв’язання статистичної задачі потрібно задатися статистичними параметрами цих випадкових сил. Зокрема, вважаючи, що  $\langle F_{\perp} \rangle = \langle F_{\parallel} \rangle = 0$ , отримуємо  $\langle \rho \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$ .

Для визначення дисперсій флуктуацій амплітуди і фази:

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4} e^{-2p\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1 + \theta_2)} \langle F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2, \quad (12.41 \text{ а})$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{1}{4r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \langle F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2 \quad (12.41 \text{ б})$$

нам знадобляться автокореляційні функції  $\langle F_{\perp}(\theta_1)F_{\perp}(\theta_2) \rangle$  і  $\langle F_{\parallel}(\theta_1)F_{\parallel}(\theta_2) \rangle$ . Для їх знаходження попередньо побудуємо автокореляційну функцію сили  $F(t')$ , введenu формулою (12.18). Вважаючи, що флуктуації теплової ЕРС  $E(t')$  і дробового струму  $I_{dp}(t')$  між собою не корелюють, згідно з (12.18) отримаємо

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = \frac{1}{\mu^2 I_0^2} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 L^2} \langle \dot{E}(t'_1)\dot{E}(t'_2) \rangle + \langle I_{dp}(t'_1)I_{dp}(t'_2) \rangle \right\}. \quad (12.42)$$

Якщо обмежитися не надто великими частотами флуктуацій, для яких справджується формула Шоттки (11.23), то для автокореляційної функції дробового струму маємо:

$$\langle I_{dp}(t_1)I_{dp}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_I(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx eJ_a \delta(t_2-t_1). \quad (12.43)$$

Тут ми врахували, що середнє значення  $\langle I \rangle$ , що входить у формулу Шоттки, згідно з визначенням (12.4) дорівнює  $J_a$ . Переходячи тепер до безрозмірного часу  $t' = \omega_0 t$  і враховуючи, що  $\delta(\omega_0 t) = \frac{1}{\omega_0} \delta(t)$ , отримуємо:

$$\langle I_{dp}(t'_1)I_{dp}(t'_2) \rangle = eJ_a \omega_0 \delta(t'_2-t'_1). \quad (12.44)$$

Для корелятора похідних від флуктуацій теплової ЕРС  $\dot{E}(t')$ , користуючись формулою Найквіста, маємо

$$\langle \dot{E}(t'_1)\dot{E}(t'_2) \rangle = \frac{1}{\omega_0^2} \left\langle \frac{dE(t_1)}{dt_1} \cdot \frac{dE(t_2)}{dt_2} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{d\tau^2} R_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cdot S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega) e^{i\omega(t_2-t_1)} d\omega = \langle E(t_1)E(t_2) \rangle = \\ &= 2kTR\delta(t_2-t_1) = 2kTR\omega_0\delta(t'_2-t'_1). \end{aligned} \quad (12.45)$$

Ми врахували, що через високу добротність коливальної системи, що розглядається, під знаком інтеграла в (12.45) можна наближено покласти  $\omega/\omega_0 \approx 1$  (див. рис.12.3).

Підставляючи (12.44) і (12.45) в (12.42), доходимо висновку, що випадкова сила  $F(t')$  наближено дельта-корельована, тобто є білим шумом:

$$\langle F(t'_1)F(t'_2) \rangle = C\delta(t'_2-t'_1), \quad (12.46)$$

де  $C = C_{dp} + C_{тепл}$ , причому

$$C_{dp} = \frac{eJ_a \omega_0}{\mu^2 I_0^2}, \quad C_{тепл} = \frac{2kTR}{\mu^2 I_0^2 \omega_0 L^2}. \quad (12.47)$$

З (12.46) випливає, що енергетичний спектр  $S_F(\nu)$  сили  $F(t')$  є сталим на всіх частотах  $(-\infty < \nu < \infty)$ :

$$S_F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F(t')F(t'+\tau') \rangle e^{-i\nu\tau'} d\tau' = \frac{C}{2\pi}. \quad (12.48)$$

Тут  $\nu = \omega/\omega_0$  — безрозмірна частота, що відповідає безрозмірному часові  $t' = \omega_0 t$ .

Поставимо у відповідність до  $F(t')$  аналітичний сигнал  $\hat{F}(t')$ . Його енергетичний спектр  $S_{\hat{F}}(\nu)$  згідно з (6.51) дорівнює

$$S_{\hat{F}}(\nu) = \begin{cases} 4S_F(\nu) = \frac{2C}{\pi}, & \nu \geq 0; \\ 0, & \nu < 0. \end{cases} \quad (12.49)$$

З іншого боку, вузькосмуговий випадковий процес  $g(t')$  (12.30) також можна розглядати як дійсну частину  $g = \text{Re } \hat{g}$  аналітичного сигналу  $\hat{g}(t')$ :

$$\hat{g}(t') = [F_{\parallel}(t') - iF_{\perp}(t')] e^{i(t'+\varphi)}, \quad (12.50)$$

енергетичний спектр якого  $S_{\hat{g}}(\nu)$  відмінний від нуля тільки у вузькій смузі частот  $1-\varepsilon < \nu < 1+\varepsilon$ , де він збігається зі спектром  $S_{\hat{F}}(\nu)$  (див. рис. 12.3). Незважаючи на те, що ширина  $2\varepsilon$  енергетичного спектра  $S_{\hat{g}}(\nu)$  припускається достатньо малою ( $\varepsilon \ll 1$ ) для того, щоб  $\hat{g}(t')$  можна було вважати вузькосмуговим процесом, тим не менше, вона має бути вибрана суттєво більшою за ширину енергетичного спектра флуктуацій струму в контурі  $x(t')$ , яка приблизно дорівнює  $2\mu$  (див. нерівність (12.29) і рис. 12.3). Тому при  $\varepsilon \gg \mu$  випадковий процес  $\hat{g}(t')$  діє на струм у коливальному контурі так само, як і білий шум зі спектральною густиною  $S_{\hat{g}}(\nu) = 2C/\pi$ .

За відомим спектром  $S_{\hat{F}}(\nu)$  можна визначити кореляційну функцію

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} S_{\hat{F}}(\nu) e^{i\nu(t'_1-t'_2)} d\nu.$$

Враховуючи знову нерівність (12.29), границі інтегрування можна розтягнути від  $-\infty$  до  $+\infty$ , після чого отримаємо

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}^*(t'_2) \rangle = 4C\delta(t'_2 - t'_1), \quad (12.51a)$$

тобто аналітичний сигнал  $\hat{g}(t')$  так само, як і  $F(t')$  наближено дельта-корельований (пор. з (12.46)). Із теорії аналітичного сигналу має місце також рівність (див. (6.52) і (6.53))

$$\langle \hat{g}(t'_1) \hat{g}(t'_2) \rangle = 0. \quad (12.51 б)$$

Стосовно квадратурних складових  $F_{\parallel}$  і  $F_{\perp}$ , то їхні автокореляційні функції знаходяться з (12.51) з урахуванням подання  $\hat{g}$  у вигляді (12.50):

$$\begin{aligned} \langle F_{\parallel}(\theta_1) F_{\parallel}(\theta_2) \rangle &= \langle F_{\perp}(\theta_1) F_{\perp}(\theta_2) \rangle = \\ &= 2C\delta(t'_1 - t'_2) = 2C\mu\delta(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned} \quad (12.52)$$

де  $\theta_1 = \mu t'_1$  і  $\theta_2 = \mu t'_2$ . Використаємо тепер (12.52) для обчислення дисперсій флуктуацій амплітуди і фази за формулами (12.41):

$$\langle \rho^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2} e^{-2p\theta} \int_{-\infty}^{\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{p(\theta_1+\theta_2)} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{4p}, \quad (12.53 а)$$

$$\langle \varphi^2(\theta) \rangle = \frac{C\mu}{2r_0^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta} \delta(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{C\mu}{2p} \theta. \quad (12.53 б)$$

### Висновки

1. Слід звернути увагу на той факт, що дисперсія флуктуацій амплітуди виявилася незалежною від часу. Якби крім  $\langle \rho^2 \rangle$  ми таким самим чином розраховали б автокореляційну функцію  $\langle \rho(\theta_1) \rho(\theta_2) \rangle$ , то переконалися б, що вона залежить тільки від різниці часів  $\theta_1 - \theta_2$ , тобто  $\rho(\theta)$  є стаціонарним випадковим процесом (принаймні, у широкому значенні).

2. Випадковий процес  $\varphi(\theta)$  – не є стаціонарним, оскільки величина  $\langle \varphi^2(\theta) \rangle$  зростає лінійно при збільшенні часу  $\theta$ . Це, як ми бачили при дослідженні броунівського руху, є характерною

ознакою випадкових процесів дифузійного типу (див. §9), причому роль коефіцієнта дифузії  $D$  відіграє відношення:

$$D = \frac{\langle \varphi^2(\theta) \rangle}{2t} = \frac{C\mu^2\omega_0}{4p} \quad (12.54)$$

(ми врахували, що  $\theta = \mu t' = \mu\omega_0 t$ ).

3. Із (12.53) видно також, що флуктуації амплітуди і фази зростають при зменшенні параметра  $p$ , тобто при наближенні до критичного значення  $p = 0$ , яке відділяє автоколивальний режим ( $p > 0$  — режим генерації) від релаксаційного ( $p < 0$ , режим згасаючих коливань). Поблизу  $p = 0$  стан системи є нестійким, і з цієї причини флуктуації можуть виявитися настільки великими, що формули (12.53) отримані за умови  $|\rho| \ll r_0 = \sqrt{p}$ , вже не зможуть застосовуватися.

4. Нарешті зазначимо, що теплові функції і дробовий шум дають адитивний вклад у величину флуктуацій амплітуди і фази. Їх відносна роль визначається співвідношенням:

$$\frac{C_{dp}}{C_{тепл}} = \frac{e}{2kT} U_C, \quad (12.55)$$

де  $U_C$  — амплітуда коливань різниці потенціалів на обкладках конденсатора  $C$  у коливальному контурі:

$$U_C = \frac{J_a L}{RC}. \quad (12.56)$$

При  $T = 300K$  з (12.55) випливає:

$$\frac{C_{dp}}{C_{тепл}} \approx 17 U_C, \quad [U_C] = B. \quad (12.57)$$

Таким чином, якщо  $U_C > 1/17 B$ , то переважає дробовий шум, а у протилежному випадку — теплові флуктуації.

## Розділ IV ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

### § 13. Випадкові поля і хвилі

У попередніх параграфах ми мали справу з однопараметричними випадковими функціями  $\xi(\alpha)$ , де як параметр  $\alpha$ , як правило, виступав час  $t$ . Залежності  $\xi(\alpha)$  називаються **випадковими процесами**. Якщо ж йдеться про випадкову функцію більш ніж одного параметра  $\xi(\alpha, \beta, \dots)$ , то її називають **випадковим полем** (у просторі параметрів  $\alpha, \beta, \dots$ ). У задачах поширення хвиль, як правило, достатньо розглянути тільки чотири параметри: час  $t$  і три просторові координати, наприклад,  $\vec{R} = (x, y, z)$ . Поле  $\xi(t, \vec{R})$  можна розглядати як поле у чотиривимірному просторі, але в нерелятивістських задачах переважно говорять про змінне (залежне від  $t$ ) поле у тривимірному просторі  $(x, y, z)$ .

Випадкове поле може описуватися не однією, а  $N$  функціями  $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ . У цьому випадку  $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$  називається  **$N$ -вимірним випадковим полем у просторі (чотирьох) параметрів  $t, \vec{R}$** . Наприклад, три компоненти напруженості електричного поля  $\vec{E}\{E_x(t, \vec{R}), E_y(t, \vec{R}), E_z(t, \vec{R})\}$  утворюють тривимірне випадкове поле. З іншого боку, з чисто математичного погляду компоненти  $\xi^{(m)}(t, \vec{R})$  можуть бути чим завгодно і навіть не повинні мати однакові розмірності.

## 13.1. Статистичний опис випадкових полів

Для скорочення через  $Q = (t, \bar{R})$  позначатимемо точку у чотиривимірному просторі. Повне задання одновимірного випадкового поля  $\xi(Q)$  означає, що відомі всі його  $n$ -вимірні (або, як часто говорять,  $n$ -точкові ( $n = 1, 2, \dots$ )) густини ймовірностей, тобто для будь-якого числа  $n$  довільно обраних точок  $Q_v$  відомі функції

$$W_n\{x_1, Q_1; \dots, x_n, Q_n\} dx_1 \dots dx_n = P\left\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)\right\}, \quad (13.1)$$

де  $P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v\}$  – ймовірність того, що випадкова величина  $\xi(Q)$  у точці  $Q = Q_v$  набуває значення, що лежить в інтервалі  $(x_v, x_v + dx_v]$ .

Аналогічно, повне статистичне задання (опис)  $N$ -вимірного поля  $\xi^{(m)}(Q)$  дається сукупністю  $nN$ -вимірних густин ймовірностей

$$W_{nN}\{x_1^{(1)}, Q_1; \dots, x_n^{(1)}, Q_n; x_1^{(2)}, Q_1; \dots, x_n^{(2)}, Q_n; \dots, x_1^{(N)}, Q_1; \dots, x_n^{(N)}, Q_n\} dx_1^{(1)} dx_1^{(2)} \dots dx_n^{(N)} = \\ = P\left\{x_v^{(m)} < \xi^{(m)}(Q_v) \leq x_v^{(m)} + dx_v^{(m)} \quad (v = 1, 2, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots, N)\right\}. \quad (13.2)$$

Аналогічно до розглянутих раніше випадкових процесів, можна показати, що густини ймовірностей повинні підкорятися умовам невід'ємності, симетрії, узгодженості й нормування.

## 13.2. Моменти випадкового поля

Знаючи багатовимірні густини ймовірностей, можна обчислити моменти випадкового поля  $\xi$  будь-якого порядку.

У загальному випадку ці моменти будуть функціями координат:  $Q_v = (t_v, \bar{R}_v)$ . У багатьох випадках найбільш цікавими є найнижчі моменти (першого і другого порядку), якими оперує кореляційна теорія випадкових полів.

**Середнє значення** випадкового поля  $\xi(Q)$  (момент першого порядку) обчислюється за допомогою одновимірної густини ймовірностей  $W_1(x, Q)$ :

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x W_1(x, Q) dx. \quad (13.3)$$

**Флуктуаційну частину** випадкового поля  $\xi$  позначатимемо як

$$\delta\xi \equiv \xi - \langle \xi \rangle \equiv \xi - \bar{\xi}. \quad (13.4)$$

**Змішаний момент другого порядку**  $R_\xi$  обчислюється за допомогою двовимірної густини ймовірностей  $W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2)$ :

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = \langle \xi(Q_1) \xi(Q_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2. \quad (13.5)$$

**Функція кореляції** (точніше, **функція автокореляції**)  $B_\xi$  виражається через  $R_\xi$ :

$$B_\xi(Q_1, Q_2) = \langle \delta\xi(Q_1) \delta\xi(Q_2) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \langle \xi(Q_1) \rangle] [x_2 - \langle \xi(Q_2) \rangle] W_2(x_1, Q_1; x_2, Q_2) dx_1 dx_2 = \\ = R_\xi(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle. \quad (13.6)$$

Для випадкових полів з нульовим середнім значенням функції

$B_\xi(Q_1, Q_2)$  і  $R_\xi(Q_1, Q_2)$  збігаються:

$$R_\xi(Q_1, Q_2) = B_\xi(Q_1, Q_2). \quad (13.7)$$

**Дисперсія** випадкового поля, тобто середній квадрат флуктуацій, дорівнює

$$\sigma_\xi^2(Q) = \langle \delta\xi^2(Q) \rangle = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = B_\xi(Q, Q). \quad (13.8)$$

Багатовимірне поле  $\xi^{(m)}(Q)$  характеризується сукупністю середніх значень  $\langle \xi^{(m)}(Q) \rangle$  і **матрицею моментів другого порядку** з елементами

$$R_{ik}(Q_1, Q_2) = \langle \xi^{(i)}(Q_1) \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \quad (13.9)$$

З матрицею  $R_{ik}$  пов'язана і **кореляційна матриця**  $B_{ik}$ , елементи якої дорівнюють

$$\begin{aligned} B_{ik}(Q_1, Q_2) &= \langle \delta\xi^{(i)}(Q_1) \delta\xi^{(k)}(Q_2) \rangle = \\ &= R_{ik}(Q_1, Q_2) - \langle \xi^{(i)}(Q_1) \rangle \langle \xi^{(k)}(Q_2) \rangle. \end{aligned} \quad (13.10)$$

### 13.3. Статистично однорідні поля

Аналогічно до випадкових процесів, на випадкові поля поширюється і поняття статистичної однорідності. Однодимірне випадкове поле  $\xi$  називається **однорідним** (у вузькому розумінні), тобто **стаціонарним** за  $t$  і **однорідним** за  $\vec{R}$ , якщо всі  $n$ -вимірні густини ймовірностей  $W_n$  інваріантні відносно перетворення трансляції  $Q_v \rightarrow Q_v + \delta Q$ :

$$\begin{aligned} P\{x_v < \xi(Q_v + \delta Q) \leq x_v + dx_v, \quad v = 1, 2, \dots, n\} = \\ = P\{x_v < \xi(Q_v) \leq x_v + dx_v, \quad v = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Аналогічне поняття статистичної однорідності можна ввести і для  $N$ -вимірного випадкового поля.

Поняття просторової однорідності для випадкових полів (інваріантність густин  $W_n$  відносно просторового зсуву  $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}$ ) є природним узагальненням поняття стаціонарності для випадкових функцій часу. Але багатовимірність простору параметрів (наприклад,  $t, \vec{R}$ ) відкриває нові можливості, а саме: випадкове поле може бути однорідним за одними параметрами, а за іншими – неоднорідним. Наприклад, поле стаціонарне за часом, але неоднорідне за простором, або поле однорідне за поверхнею сфери, але неоднорідне за радіусом та ін.

Поняття **статистичної однорідності у широкому розумінні** передбачає виконання умови трансляції тільки для одноточкової  $W_1$  та двоточкової  $W_2$  густин ймовірностей.

#### Наслідки

Розглянемо спочатку поля, що залежать тільки від просторових координат, тобто не залежать від часу  $t$ :  $Q = (\vec{R})$ . Для статистично однорідного (у широкому розумінні) поля  $\xi(\vec{R})$  інваріантність відносно зсуву  $\vec{R} \rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}$  повинна виконуватися тільки для середнього значення і для моментів другого порядку:

$$\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(\vec{R} + \delta\vec{R}) \rangle, \quad (13.12)$$

$$B_\xi(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = B_\xi(\vec{R}_1 + \delta\vec{R}, \vec{R}_2 + \delta\vec{R}). \quad (13.13)$$

Умова (13.12) означає, що  $\langle \xi \rangle = \text{Const}$ , тобто середнє значення є сталою величиною. Справді, обравши  $\delta \vec{R} = -\vec{R}$ , отримаємо  $\langle \xi(\vec{R}) \rangle = \langle \xi(0) \rangle = \text{Const}$ .

Поклавши у (13.13)  $\delta \vec{R} = -\vec{R}_2$  (або  $\delta \vec{R} = -\vec{R}_1$ ), знаходимо, що

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) &= B_{\xi}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2, 0) = B_{\xi}(0, \vec{R}_2 - \vec{R}_1) = \\ &= B_{\xi}(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) = B_{\xi}(\vec{R}_2 - \vec{R}_1). \end{aligned} \quad (13.14)$$

З (13.14) випливає, що для статистично однорідних полів автокореляційна функція  $B_{\xi}$  залежить тільки від різниці  $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$  (але не від  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$  окремо), причому  $B_{\xi}(\vec{\rho}) = B_{\xi}(-\vec{\rho})$ . Крім цього, для дисперсії випадкового поля маємо

$$\sigma_{\xi}^2(\vec{R}) = B_{\xi}(\vec{R}, \vec{R}) = B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2(0) = \text{Const}. \quad (13.15)$$

Статистично однорідні поля, у яких  $B_{\xi}(\vec{\rho})$  залежить тільки від модуля (але не від напрямку) вектора  $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ , що з'єднує точки  $\vec{R}_1$  і  $\vec{R}_2$ ,

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = B_{\xi}(\rho), \quad (13.16)$$

де  $\rho = |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ , називаються статистично ізотропними. Прикладом кореляційної функції однорідного й ізотропного поля може слугувати кореляційна функція у вигляді гауссової залежності:

$$B_{\xi}(\rho) = \sigma_{\xi}^2 e^{-\rho^2/2l^2}, \quad (13.17)$$

де  $l$  – радіус кореляції поля.

У статистично однорідних, але **анізотропних** полів функції  $B_{\xi}(\vec{\rho})$  залежать не тільки від модуля, але й від напрямку вектора  $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ . Приклад:

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \sigma_{\xi}^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_x^2}{2a^2} - \frac{\rho_y^2}{2b^2} - \frac{\rho_z^2}{2c^2} \right\}. \quad (13.18)$$

Величини  $a, b, c$  характеризують масштаби просторової кореляції у напрямках  $x, y$  і  $z$ . Якщо  $a = b = c = l$ , то анізотропний розподіл (13.18) переходить в ізотропний (13.17).

#### 13.4. Спектральні зображення для однорідних випадкових полів

Запишемо формальний розклад флуктуаційної компоненти  $\delta \xi(\vec{R})$  однорідного випадкового поля у трикратний інтеграл Фур'є:

$$\delta \xi(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.19)$$

Тут  $C_{\xi}(\vec{\chi})$  – просторова спектральна амплітуда поля  $\delta \xi(\vec{R})$ . Запишемо і обернене перетворення Фур'є:

$$C_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \xi(\vec{R}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{R}. \quad (13.20)$$

Так само, як і у §6, перетворення (13.19) ми назвали формальним тому, що однорідне випадкове поле  $\delta \xi(\vec{R})$  у загальному випадку не відповідає вимозі спадання на нескінченності і, отже, трансформанти Фур'є  $C_{\xi}(\vec{\chi})$  не існує. Для



того, щоб надати спектральним розкладам випадкових полів коректного математичного смислу, необхідно було б спочатку припустити, що поле  $\delta\xi(\vec{R})$  однорідне всередині якогось великого, але скінченного об'єму  $V$  і швидко спадає до нуля за його межами:

$$\delta\xi_V(\vec{R}) = \begin{cases} \delta\xi(\vec{R}), & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V. \end{cases}$$

Тоді, побудувавши квадратичні корелятори  $\langle \delta\xi_V(\vec{R}_1) \delta\xi_V(\vec{R}_2) \rangle$  і  $\langle C_{V\xi}(\vec{\chi}_1) C_{V\xi}(\vec{\chi}_2) \rangle$ , слід переходити до нескінченних розмірів області  $V$  і встановлювати зв'язок між кореляторами через перетворення Фур'є. Ми, однак, не використовуватимемо таких прийомів, а вважатимемо, що інтеграли (13.19) і (13.20) існують у розумінні ймовірнісної збіжності, а саме — у середньому квадратичному.

#### Властивості спектральних перетворень однорідних полів

Згідно з (13.19), побудуємо перетворення Фур'є від комплексно спряженої величини:

$$\delta\xi^*(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\vec{\chi}) e^{-i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(-\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{R}} d\vec{\chi}. \quad (13.21)$$

Враховуючи, що для дійсного поля  $\delta\xi^* = \delta\xi$ , а також прирівнюючи (13.21) і (13.19), отримаємо так звану **властивість ермітовості**:

$$\begin{aligned} C_{\xi}^*(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}(\vec{\chi}), \\ C_{\xi}(-\vec{\chi}) &= C_{\xi}^*(\vec{\chi}). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Функція автокореляції випадкового поля  $\delta\xi(\vec{R})$  може бути подана так:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2) &= \langle \delta\xi(\vec{R}_1) \delta\xi(\vec{R}_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}(\vec{\chi}'') \rangle e^{i(\vec{\chi}'\vec{R}_1 + \vec{\chi}''\vec{R}_2)}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Виконаємо деякі перетворення у (13.23). По-перше, проведемо заміну змінних  $\vec{\chi}'' = -\vec{\chi}''$ , і, по-друге, введемо позначення  $\vec{R}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}$ ,  $\vec{R}_2 = \vec{R}$ . З урахуванням властивості ермітовості (13.22), у результаті отримаємо

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\vec{R}, \vec{\rho}) &= \langle \delta\xi(\vec{R} + \vec{\rho}) \delta\xi(\vec{R}) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}' \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi}'' \langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle e^{i[(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'')\vec{R} + \vec{\chi}'\vec{\rho}]}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Для однорідного випадкового поля функція кореляції  $B_{\xi}$  має залежати тільки від різницевої змінної  $\vec{\rho}$  і не повинна залежати від сумарної  $\vec{R}$ . Це можливо, якщо корелятор  $\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle$  відповідає такій умові:

$$\langle C_{\xi}(\vec{\chi}') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'') \rangle = S_{\xi}(\vec{\chi}') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}''). \quad (13.25)$$

Функція  $S_{\xi}(\vec{\chi})$  називається **просторовою спектральною густиною** (або, коротше, — **просторовим спектром**) випадкового однорідного поля  $\delta\xi(\vec{R})$ . З точністю до нормування  $S_{\xi}(\vec{\chi})$  збігається із середнім квадратом амплітуди Фур'є —  $\langle |C_{\xi}(\vec{\chi})|^2 \rangle$

просторової гармоніки з „хвильовим вектором”  $\vec{\chi}$  у розкладанні  $\delta\xi(\vec{R})$  за плоскими хвилями.

З урахуванням (13.25), остаточно отримаємо

$$B_{\xi}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\vec{\chi}) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi}. \quad (13.26)$$

Напишемо відразу і зворотний зв'язок між  $S_{\xi}(\vec{\chi})$  і  $B_{\xi}(\vec{\rho})$ :

$$S_{\xi}(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (13.27)$$

Формули (13.26) і (13.27) є узагальненням теорему Вінера-Хінчіна на випадкові поля.

У більш загальному випадку, коли флуктуації полів залежать не тільки від просторових координат  $\vec{R}$ , але й від часу  $t$ :  $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$ , використання чотиривимірних (просторово-часових) гармонічних розкладів здійснюється шляхом узагальнення формул, що використовуються при розгляді випадкових процесів і випадкових полів. Так, для флуктуацій одновимірного випадкового поля  $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$  чотиривимірне спектральне розкладання має вигляд

$$\delta\xi(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) e^{i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)}, \quad (13.28)$$

де  $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$  – спектральна амплітуда поля  $\delta\xi = \delta\xi(\vec{R}, t)$ . На відміну від розділів, присвячених статистичній радіотехніці, де залежність від часу описувалась множником  $\sim e^{i\omega t}$  у задачах поширення хвиль, залежність від часу обирається у вигляді  $\sim e^{-i\omega t}$ . Це пов'язано з тим, що під час розгляду хвильових явищ

зручніше оперувати множником  $e^{i\vec{\chi}\vec{R}}$ , а не  $e^{-i\vec{\chi}\vec{R}}$ . При цьому формула (13.28) є розкладанням випадкового поля за плоскими монохроматичними біжучими хвилями  $\sim \exp\{i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)\}$ .

Зворотний зв'язок між  $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$  і  $\delta\xi(\vec{R}, t)$  має вигляд

$$C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\xi(\vec{R}, t) e^{-i(\vec{\chi}\vec{R} - \omega t)}. \quad (13.29)$$

Для стаціонарного у часі й однорідного у просторі поля, коли  $B_{\xi}(\vec{R}_1, \vec{R}_2; t_1, t_2) = B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau)$ , де  $\vec{\rho} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$  і  $\tau = t_1 - t_2$ , аналогічно до (13.26) і (13.27), можна записати такі співвідношення:

$$B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) e^{i(\vec{\chi}\vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\chi} d\omega, \quad (13.30)$$

$$S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau) e^{-i(\vec{\chi}\vec{\rho} - \omega\tau)} d\vec{\rho} d\tau. \quad (13.31)$$

Тут  $S_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$  – просторово-часовий енергетичний спектр випадкових флуктуацій, пропорційний до середнього квадрату модуля спектральної компоненти  $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$ :

$$\langle C_{\xi}(\vec{\chi}', \omega') C_{\xi}^*(\vec{\chi}'', \omega'') \rangle = S_{\xi}(\vec{\chi}', \omega') \delta(\vec{\chi}' - \vec{\chi}'') \delta(\omega' - \omega''). \quad (13.32)$$

Таким чином, для стаціонарного у часі й однорідного за простором випадкового поля спектральні компоненти  $C_{\xi}(\vec{\chi}, \omega)$  є  $\delta$ -корельованими.

Для статистично однорідних полів так само, як і для стаціонарних у часі процесів (див. §6), між характерними ширинами  $\Delta\rho$  і  $\Delta\tau$  автокореляційної функції  $B_{\xi}(\vec{\rho}, \tau)$  і відповідними

ширинами  $\Delta\chi$  і  $\Delta\omega$  енергетичного спектра  $S_\xi(\vec{\chi}, \omega)$  існує зв'язок, який називається „співвідношенням невизначеностей”. Продемонструємо це співвідношення на прикладі просторово однорідних полів з гауссовими автокореляційними функціями (13.17) і (13.18). Для ізотропного статистично однорідного поля (13.17), виконавши, згідно з (13.27), перетворення Фур'є, отримаємо такий вираз для просторового енергетичного спектра:

$$S_\xi(\vec{\chi}) = S_\xi(\chi) = \frac{\sigma_\xi^2 l^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} l^2 \chi^2}. \quad (13.33)$$

Оцінюючи характерні ширини  $\Delta\rho$  і  $\Delta\chi$  за рівнем  $1/\sqrt{e}$  від максимальних значень відповідних розподілів (13.17) і (13.33), отримаємо  $\Delta\rho = l$ ,  $\Delta\chi = 1/l$  і

$$\Delta\rho \cdot \Delta\chi = 1. \quad (13.34)$$

Провівши аналогічні обчислення для анізотропного розподілу (13.18), знайдемо просторовий енергетичний спектр

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{\sigma_\xi^2 abc}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(a^2 \chi_x^2 + b^2 \chi_y^2 + c^2 \chi_z^2)\right\}. \quad (13.35)$$

З (13.18) і (13.35) видно, що характерні ширини автокореляційної функції й відповідного їй просторово-енергетичного спектра, у загальному випадку відрізняються за різними напрямками. У результаті, для анізотропного поля співвідношення невизначеностей розпадається відразу на три, і, замість (13.34), отримуємо

$$\Delta\rho_x \cdot \Delta\chi_x = 1, \quad \Delta\rho_y \cdot \Delta\chi_y = 1, \quad \Delta\rho_z \cdot \Delta\chi_z = 1. \quad (13.36)$$

Незважаючи на те, що строгі рівності одиниці співвідношень невизначеностей справедливі тільки для гауссових автокореляційних функцій, ми використовуватимемо їх надалі для наближених оцінок ширин відповідних розподілів енергетичних спектрів.

### 13.5. Випадкові хвильові поля

Серед різноманітних випадкових полів, з якими має справу статистична радіофізика, хвильові поля посідають центральне місце. У загальному випадку хвилею називається збурення  $U(\vec{R}, t)$ , яке поширюється зі скінченною швидкістю  $v$  у просторі і несе із собою енергію. Наприклад, простішим видом збурення, яке задовольняє це визначення, є плоска хвиля, у якої залежність від просторових координат  $\vec{R}$  і часу  $t$  має вигляд:

$$U(\vec{R}, t) = U(\vec{n}\vec{R} - vt). \quad (13.37)$$

Дійсно, з (13.37) видно, що  $U$  описує хвилю, яка рухається зі швидкістю  $v$  у напрямку одиничного вектора  $\vec{n}$ .

Надалі розглядатимемо лише лінійні й неквантові задачі. З математичного погляду, поширення хвиль тієї чи іншої фізичної природи (електромагнітних, пружних, поверхневих тощо) описується лінійним просторово-часовим оператором  $\hat{L}$ . Як  $\hat{L}$  звичайно виступають диференціальні, зрідка — інтегродиференціальні оператори. Хвильове поле  $U(\vec{R}, t)$  при цьому задовольняє неоднорідне рівняння

$$\hat{L}U(\vec{R}, t) = q(\vec{R}, t), \quad (13.38)$$

де  $q(\vec{R}, t)$  описує джерела хвиль, задані всередині певного обмеженого об'єму  $V$ . Поля  $U$  і  $q$  можуть бути і багатокomпонентними (наприклад, векторними). У цьому разі як оператор  $\hat{L}$  виступає операторна матриця.

Для лінійного рівняння (13.38) є справедливим принцип суперпозиції. Тому при аналізі можна обмежуватися розглядом лише гармонійної зміни у часі поля джерел  $q(\vec{R}, t) = q(\vec{R})e^{-i\omega t}$ .

Якщо ж параметри, які входять у задачу (діелектрична і магнітна

проникності середовища, форма розсіюючої поверхні та ін.) не змінюються в часі, то шукане поле також змінюватиметься у часі за аналогічним законом  $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R})e^{-i\omega t}$ . При цьому початкове рівняння (13.38) для просторових компонентів набуває вигляду

$$\hat{L}U(\vec{R}) = q(\vec{R}). \quad (13.39)$$

У багатьох задачах просторова область, у межах якої розглядається поле  $U(\vec{R})$ , обмежена якоюсь поверхнею  $\Sigma$  (вона може бути зімкнута й розімкнута). На цій поверхні необхідно задавати граничні умови:

$$U|_{\vec{R} \in \Sigma} = f_1(\vec{R}), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_{\vec{R} \in \Sigma} = f_2(\vec{R}), \quad (13.40)$$

де  $N$  — нормаль до поверхні, а  $f_i(\vec{R})$  — задані функції координат. Часто замість (13.40) використовують однорідні граничні умови типу

$$\left[ \alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial N} \right]_{\vec{R} \in \Sigma} = 0. \quad (13.41)$$

Тут  $\alpha$  і  $\beta$  — певні постійні числа або задані функції координат.

Якщо в задачі необхідно враховувати випромінювання з області  $V$  у зовнішній простір (вакуум або однорідне середовище), то на нескінченності ( $R \rightarrow \infty$ ) мають виконуватися наступні умови. По-перше, поле  $U$  має спадати так, щоб величина  $RU(\vec{R})$  залишалася скінченою при  $R \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RU(\vec{R}) \neq \infty. \quad (13.42)$$

Ця умова називається умовою регулярності поля на нескінченності. По-друге, окрім (13.42), має також виконуватися умова випромінювання

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial U}{\partial R} - ikU \right) = 0, \quad (13.43)$$

де  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — довжина хвилі, що поширюється (у вакуумі або однорідному середовищі). Умова (13.43) означає, що на великих відстанях від випромінюючого об'єму поле уявляє собою біжучу хвилю, що розходиться.

Статистичні хвильові задачі ставляться тими самими рівняннями й умовами, що й динамічні, але тепер це будуть стохастичні рівняння, стохастичні початкові й граничні умови (рівняння й умови для окремих реалізацій випадкового поля  $U$ ). Параметри, функції й оператори, що фігурують у задачах, тепер випадкові (всі або їх частина). Для розв'язання статистичної задачі випадкові фактори мають бути задані своїми розподілами ймовірностей. Випадковими можуть бути:

- 1) джерела полів (необхідно задати „статистику джерел”);
- 2) властивості середовища (необхідно задати „статистику середовища”, а отже, оператора  $\hat{L}$ );
- 3) форма і розташування меж поділу  $\Sigma$  (необхідно задати „статистику меж”);
- 4) умови прийому і реєстрації хвиль (необхідно задати „статистику приймача, завад”).

Існує два основних способи розв'язання статистичних задач.

1. Спочатку знаходять розв'язок (як правило, наближений) динамічної задачі, а після цього визначають моменти шуканого поля (середнє поле, середня інтенсивність та ін.).

2. Зі стохастичних рівнянь будуються детерміновані рівняння для моментів і граничних умов, а після цього розв'язують „усереднену” задачу.

У наступних розділах ми зупинимось, головним чином, на розв'язанні статистичних задач у рамках першої схеми.

## ЗАДАЧІ

Показати, що для статистично однорідного й ізотропного поля  $\delta \xi(\vec{R})$  просторово-спектральна густина  $S_\xi(\vec{\chi})$  залежить тільки від модуля хвильового вектора  $\vec{\chi}$ . Отримати зв'язок між  $B_\xi(\rho)$  і  $S_\xi(\chi)$ .

**Розв'язок.** За визначенням, кореляційна функція однорідного та ізотропного поля залежить тільки від модуля  $\rho = |\vec{\rho}|$  різницевого вектора  $\vec{\rho}$ . З урахуванням цього запишемо формулу (13.27):

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\xi(\rho) e^{-i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\rho}. \quad (1)$$

Цей інтеграл зручно обчислювати у сферичних координатах  $\vec{\rho} = (\rho, \theta_\rho, \varphi_\rho)$ , де  $\theta_\rho$  відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора  $\vec{\chi}$  (рис. 13.1).

Враховуючи, що в обраній системі координат елементарний об'єм записується у вигляді  $d\vec{\rho} = \rho^2 \sin \theta_\rho d\rho d\theta_\rho d\varphi_\rho$ , а  $\vec{\chi} \vec{\rho} = \chi \rho \cos \theta_\rho$ , отримаємо

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty B_\xi(\rho) \rho^2 d\rho \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \sin \theta_\rho d\theta_\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_\rho. \quad (2)$$

Інтеграл за  $d\varphi_\rho$  дорівнює  $2\pi$ , а інтегрування за  $d\theta_\rho$  легко проводиться за допомогою заміни змінних  $\xi = \cos \theta_\rho$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-i\chi\rho \cos \theta_\rho} \sin \theta_\rho d\theta_\rho &= \int_{-1}^1 e^{-i\chi\rho t} dt = \\ &= -\frac{1}{i\chi\rho} e^{-i\chi\rho t} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\chi\rho} \sin(\chi\rho). \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи (3) у (2), отримаємо

$$S_\xi(\vec{\chi}) = \frac{1}{2\pi^2 \chi} \int_0^\infty B_\xi(\rho) \sin(\chi\rho) \rho d\rho = S_\xi(\chi). \quad (4)$$

Отже, для статистично однорідного й ізотропного поля  $\delta \xi(\vec{R})$  просторовий енергетичний спектр залежить тільки від модуля хвильового вектора  $\vec{\chi}$ :  $S_\xi(\vec{\chi}) = S_\xi(\chi)$ .

В аналогічний спосіб, враховуючи, що для ізотропного поля флуктуацій  $S_\xi(\vec{\chi}) = S_\xi(\chi)$ , можна переписати й формулу (13.26):

$$\begin{aligned} B_\xi(\vec{\rho}) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\chi) e^{i\vec{\chi}\vec{\rho}} d\vec{\chi} = \int_0^\infty \chi^2 S_\xi(\chi) d\chi \int_0^\pi e^{i\chi\rho \cos \theta_\chi} \sin \theta_\chi d\theta_\chi \int_0^{2\pi} d\varphi_\chi = \\ &= \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty S_\xi(\chi) \sin(\chi\rho) \chi d\chi = B_\xi(\rho). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут інтегрування виконувалося у сферичних координатах  $\vec{\chi} = (\chi, \theta_\chi, \varphi_\chi)$ , де  $\theta_\chi$  відлічується від полярної осі, спрямованої уздовж вектора  $\vec{\rho}$  (рис. 13.2).

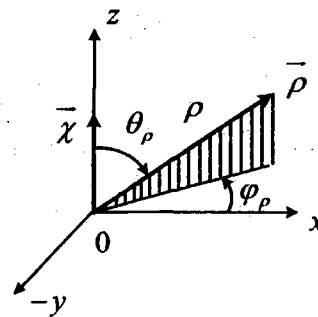


Рис. 13.1

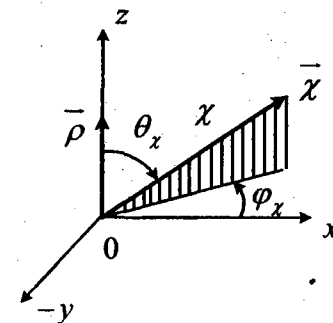


Рис. 13.2

## § 14. Метод малих збурень

Флуктуації параметрів сигналів, з якими доводиться мати справу в радіотехнічних системах, можуть бути викликані не тільки тепловими й дробовими шумами, про які йшлося вище. Часто основною причиною флуктуацій є спотворення сигналів у каналах зв'язку і, зокрема, розсіювання радіохвиль на флуктуаціях показника заломлення середовища, у якому відбувається їх поширення. Під час поширення радіохвиль у земних умовах основну роль відіграють флуктуації показника заломлення тропосфери та іоносфери. У космічних лініях зв'язку й у радіоастрономії слід враховувати розсіювання радіохвиль на флуктуаціях щільності космічної плазми. Навіть при передачі сигналів через хвилеводи (для сигналів оптичного діапазону хвиль — через світловоди) доводиться враховувати неоднорідності середовища, яке заповнює хвилевід (світловід).

Неоднорідності середовища поширення і викликане ними розсіювання радіохвиль не завжди є шкідливими факторами, що викликають спотворення сигналу і вносять завади, з якими необхідно боротися. У ряді випадків явище розсіювання радіохвиль може приносити й користь. Наприклад, завдяки розсіюванню ультракоротких радіохвиль на турбулентних пульсаціях показника заломлення атмосфери виявляється можливим їх проникнення далеко за горизонт у ділянку геометричної тіні. З іншого боку, розсіяні на неоднорідностях плазми короткі радіохвилі можуть бути захоплені у міжшаровий хвилевідний канал, у якому вони можуть поширюватися на великі відстані з малим згасанням та ін. Оскільки розсіяний сигнал несе інформацію про флуктуації параметрів середовища (щільність, тиск, степінь іонізації та ін.), то, в принципі, можна ставити і розв'язувати "обернену" задачу: за флуктуаціями розсіяного сигналу визначати параметри середовища розсіювання.

Ця можливість широко використовується в системах дистанційного зондування оточуючого середовища.

Задача про поширення хвиль в середовищі зі змінним у часі й просторі показником заломлення  $n(\vec{R}, t)$  у деяких випадках може бути зведена до розв'язання скалярного хвильового рівняння

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0, \\ & + \text{граничні умови} \end{aligned} \right. \quad (14.1)$$

де  $\Delta_{\vec{R}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа («лапласіан»),  $c$  — швидкість поширення електромагнітних хвиль при  $n=1$ , (швидкість світла у вакуумі), а  $U(\vec{R}, t)$  — хвильове поле, наприклад, звуковий тиск. Під  $U(\vec{R}, t)$  ми можемо мати на увазі також будь-яку компоненту напруженості електричного або магнітного поля. При цьому рівняння (14.1) впливає з рівнянь Максвелла за деяких додаткових умов, виконання яких забезпечує відсутність перетворення хвиль однієї поляризації у хвилі іншої поляризації в процесі поширення їх у неоднорідному середовищі. Оскільки точні аналітичні методи розв'язання рівняння (14.1) при довільному вигляді функції  $n(\vec{R}, t)$  відсутні, доводиться застосовувати наближені методи. У цьому параграфі ми вивчимо один з них — метод малих збурень (ММЗ).

## 14.1. Побудова розв'язку. Борнівське наближення

Розглядатимемо  $n^2(\vec{R}, t)$  як випадкову функцію чотирьох змінних — трьох просторових координат  $\vec{R} = (x, y, z)$ , а також

часу  $t$ . Введемо діелектричну проникність середовища  $\varepsilon(\vec{R}, t) = n^2(\vec{R}, t)$  і подамо її у вигляді суми регулярної  $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$  (тут, як і раніше, косі дужки  $\langle \dots \rangle$  або риска вгорі  $\overline{\dots}$  позначають статистичне усереднення за ансамблем реалізацій) і флюктууючої  $\varepsilon_1(\vec{R}, t)$  складових:

$$n^2(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R}, t) = \langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}, t), \quad \langle \varepsilon_1(\vec{R}, t) \rangle = 0. \quad (14.2)$$

З урахуванням (14.2) перепишемо хвильове рівняння (14.1) у такому вигляді:

$$\left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{R}, t). \quad (14.3)$$

+граничні умови

Таким чином, вихідне однорідне хвильове рівняння (14.1) подамо у вигляді неоднорідного, записаного для регулярного середовища, у правій частині якого стоять випадкові „джерела”, пов’язані з флюктууючою складовою діелектричної проникності середовища  $\varepsilon_1$ . Відомо, що розв’язок неоднорідного рівняння

$$\left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = f(\vec{R}, t) \quad (14.4)$$

можна подати у вигляді суми  $U(\vec{R}, t) = U_0(\vec{R}, t) + U_{sc}(\vec{R}, t)$ ,

де  $U_0(\vec{R}, t)$  – розв’язання однорідного рівняння:

$$\left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U_0(\vec{R}, t) = 0, \quad (14.5)$$

+граничні умови

а  $U_{sc}(\vec{R}, t)$  – частинний розв’язок неоднорідного (14.4) рівняння.

Поле  $U_0(\vec{R}, t)$  є полем первинної (падаючої) хвилі. Його визначення для заданих  $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$ , граничних і початкових умов є завданням математичної фізики. Для знаходження частинного розв’язку  $U_{sc}(\vec{R}, t)$  неоднорідного рівняння (14.4) введемо до розгляду функцію Гріна  $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$ :

$$\left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') = \delta(\vec{R} - \vec{R}') \delta(t - t'), \quad (14.6)$$

+граничні умови

яка має таке розуміння. Це хвильове поле у точці  $\vec{R}$  у момент часу  $t$ , що створюється точковим джерелом, розташованим у точці  $\vec{R}'$ , яке випромінює  $\delta$ -подібний одиничний імпульс у момент часу  $t'$ .

Явний вигляд функції Гріна  $G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t')$  залежить як від виду

функціональної залежності  $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle$ , так і від граничних умов, які на неї накладаються. Якщо розглядати поширення хвиль у безмежному статистично однорідному у просторі й стаціонарному у часі середовищі ( $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$ ), то як граничні умови природно вимагати виконання умови випромінювання при  $|\vec{R} - \vec{R}'| \rightarrow \infty$ , яка з двох лінійно незалежних розв’язків рівняння

(14.6) вибирає тільки той, який описує сферичну хвилю, що розходиться (з точки  $\bar{R}'$ ):

$$G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t') = -\frac{1}{4\pi|\bar{R} - \bar{R}'|} \delta\left[t - t' - \frac{|\bar{R} - \bar{R}'|}{v_\varepsilon}\right]. \quad (14.7)$$

Тут  $v_\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon} = \text{Const}$  – швидкість поширення хвилі в однорідному середовищі. У свою чергу, будь-який просторово-часовий розподіл  $f(\bar{R}, t)$  можна подати у вигляді сукупності точкових імпульсних джерел:

$$f(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(\bar{R}', t') \delta(\bar{R} - \bar{R}') \delta(t - t'). \quad (14.8)$$

Підставимо цей розклад у праву частину (14.4) і скористаємося принципом суперпозиції, що є справедливим для будь-яких лінійних рівнянь і, зокрема, для хвильового рівняння (14.4). Суть цього принципу полягає у тому, що хвильове поле  $U_{sc}(\bar{R}, t)$ , що створюється „сумою” (або „суперпозицією”)  $\delta$ -джерел (14.8) є суперпозицією полів  $G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t')$ , що створюються кожним із цих джерел окремо:

$$U_{sc}(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t') f(\bar{R}', t'). \quad (14.9)$$

З урахуванням того, що у розглядуваній задачі

$$f(\bar{R}', t') = \frac{\varepsilon_1(\bar{R}', t')}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\bar{R}', t'),$$

розв'язання рівняння (14.3), в решті-решт, можна подати у вигляді

$$U(\bar{R}, t) = U_0(\bar{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t') \varepsilon_1(\bar{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U(\bar{R}', t'). \quad (14.10)$$

У результаті виконаних перетворень ми отримали інтегральне рівняння, яке повністю еквівалентне вихідному диференціальному рівнянню (14.3). Перевагою (14.10) перед (14.3) є те, що (14.10) вже враховує всі граничні умови.

#### Розв'язок інтегрального рівняння

Розв'язок інтегрального рівняння (14.10) можна знайти у вигляді ряду теорії збурень, який будується шляхом ітерацій. При побудові першої ітерації, згідно з (14.10), запишемо поле  $U$  для точки з координатами  $\bar{R} = \bar{R}'$  і в момент часу  $t = t'$ :

$$U(\bar{R}', t') = U_0(\bar{R}', t') + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' G(\bar{R}', \bar{R}''; t', t'') \varepsilon_1(\bar{R}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(\bar{R}'', t''). \quad (14.11)$$

Підставимо тепер (14.11) під знак інтеграла вихідного рівняння (14.10). У результаті, отримаємо

$$\begin{aligned} U(\bar{R}, t) = & U_0(\bar{R}, t) + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t') \varepsilon_1(\bar{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\bar{R}', t') + \\ & + \frac{1}{c^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\bar{R}, \bar{R}'; t, t') \varepsilon_1(\bar{R}', t') \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{\partial^2}{\partial t''^2} G(\bar{R}', \bar{R}''; t', t'') \varepsilon_1(\bar{R}'', t'') \frac{\partial^2}{\partial t''^2} U(\bar{R}'', t'') \right\}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Друга ітерація будується за аналогічною схемою. Згідно з рівнянням (14.10), записується поле  $U$  в точці з координатами  $\bar{R} = \bar{R}''$  у момент часу  $t = t''$  і підставляється під знак інтеграла для першої ітерації (14.12). Продовжуючи процес ітерування, ми отримуємо ряд:



$$U_{SC} = U - U_0 = U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (14.13)$$

де  $U_n \sim \varepsilon_1^n$ . Такий ряд у математиці називається **рядом Неймана**, а у фізиці – **борнівським розкладанням** (на честь фізика М. Борна, відомого своїми працями у галузі квантової механіки).

Як вже відзначалося раніше, знаходження поля  $U_0(\vec{R}, t)$  є завданням математичної фізики і зводиться до розв'язання стандартними методами хвильового рівняння (14.5) з початковими і граничними умовами. Вважатимемо цей розв'язок відомим. Перший член борнівського ряду

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{R}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\vec{R}, \vec{R}'; t, t') \varepsilon_1(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t') \quad (14.14)$$

описує одноразове розсіювання і називається „борнівським наближенням”. Член ряду  $U_n$  описує  $n$ -кратне розсіювання. З побудови борнівського ряду видно, що середні поля  $\langle U_n \rangle$ , а також моменти другого порядку міститимуть корелятори вигляду  $\langle \varepsilon_1(\vec{R}') \dots \varepsilon_1(\vec{R}^{(n)}) \rangle$ , знаходження яких при довільній статистиці випадкової величини  $\varepsilon_1$  – досить складна задача. Проте для малих флуктуацій  $\varepsilon_1$  можна обмежитися тільки першим членом розкладання – борнівським наближенням.

Як **приклад** розглянемо задачу про розсіювання плоскої монохроматичної хвилі на флуктуаціях показника заломлення  $n(\vec{R}, t)$ , припускаючи, що середовище у середньому статистично однорідне у безмежному просторі й стаціонарне в часі ( $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$ ), а флуктуації  $n$  відбуваються тільки

всередині обмеженого об'єму  $V$ . Ввівши до розгляду відносні флуктуації діелектричної проникності:

$$\mu(\vec{R}, t) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1(\vec{R}, t)}{\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle} = \frac{n^2(\vec{R}, t) - \langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}{\langle n^2(\vec{R}, t) \rangle}, & \vec{R} \in V; \\ 0, & \vec{R} \notin V, \end{cases} \quad (14.15)$$

з урахуванням визначення функції Гріна (14.7) і згідно з формулою (14.14), отримаємо

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi v_\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta\left[t - t' - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right] \mu(\vec{R}', t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} U_0(\vec{R}', t'). \quad (14.16)$$

Поле первинної (падаючої) хвилі  $U_0(\vec{R}, t)$  визначається, як вже було зазначено вище, з однорідного хвильового рівняння (14.5), яке для безмежного середовища з  $\langle \varepsilon(\vec{R}, t) \rangle = \text{Const}$  має відомий розв'язок у вигляді плоскої монохроматичної хвилі. Для спрощення задачі ми розглядатимемо плоску хвилю одиничної амплітуди:

$$U_0(\vec{R}, t) = e^{i(\vec{k}_\varepsilon \vec{R} - \omega_0 t)}, \quad (14.17 \text{ а})$$

де  $\omega_0$  — кругова частота вихідного випромінювання і модуль хвильового вектора  $\vec{k}_\varepsilon$  пов'язані співвідношенням

$$k_\varepsilon = |\vec{k}_\varepsilon| = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{v_\varepsilon}. \quad (14.17 \text{ б})$$

З іншого боку, модуль хвильового вектора можна ще виразити і через довжину хвилі  $\lambda_\varepsilon$  у статистично однорідному середовищі

$$k_\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda_\varepsilon}. \quad (14.17 \text{ в})$$

Врахуємо тепер, що флуктуації показника заломлення  $\mu(\vec{R}, t)$  зосереджені у скінченному об'ємі  $V$ , і розглядатимемо найцікавіший випадок розсіювання „коротких” хвиль, коли  $\lambda_\varepsilon \ll L$ , де  $L \sim (V)^{1/3}$  – характерний лінійний розмір об'єму розсіювання. Підставимо (14.17 а) в (14.16) і виконаємо за допомогою  $\delta$ -функції інтегрування за  $dt'$ , зробивши попередньо

$$\text{заміну змінної } t'' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon} - t':$$

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right) \times \exp\left\{i\left[\vec{k}_\varepsilon \vec{R}' - \omega_0\left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right)\right]\right\}. \quad (14.18)$$

Розташуємо початок декартової системи координат XYZ у центрі об'єму розсіювання  $V$  а вісь  $OZ$  спрямуємо вздовж хвильового вектора падаючої хвилі  $\vec{k}_\varepsilon$  (див. рис. 14.1)

Вважатимемо, що точка спостереження  $P$  з радіус-вектором  $\vec{R}$ , де розташовано приймач розсіяного поля, знаходиться достатньо далеко від об'єму розсіювання  $V$ . У цьому випадку відстань  $|\vec{R} - \vec{R}'|$  ( $\vec{R}' \in V$ ) можна розкласти у степеневий ряд за малим параметром  $R'/R \leq L/R \ll 1$ :

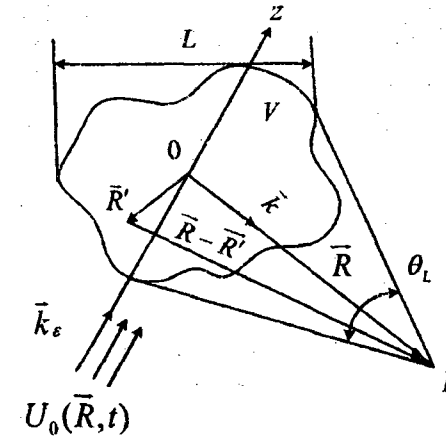


Рис. 14.1

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(\vec{R} - \vec{R}')^2} = \sqrt{R^2 - 2\vec{R}\vec{R}' + R'^2} \approx R \left[1 - \frac{\vec{R}\vec{R}'}{R^2} + O\left(\frac{R'^2}{R^2}\right)\right]. \quad (14.19)$$

Підставимо розклад (14.19) у (14.18) і обмежимося тільки лінійними за  $R'/R \ll 1$  доданками у показнику степеню експоненти:

$$\exp\left\{-i\omega_0\left(t - \frac{|\vec{R} - \vec{R}'|}{v_\varepsilon}\right)\right\} \approx \exp\left\{i\left[k_\varepsilon\left(R - \frac{\vec{R}\vec{R}'}{R}\right) - \omega_0 t + O\left(\frac{k_\varepsilon R'^2}{R}\right)\right]\right\}. \quad (14.20)$$

Для того, щоб у (14.20) можна було знехтувати квадратичними доданками  $\sim \frac{k_\varepsilon R'^2}{R}$ , необхідно вимагати виконання нерівності

$$\frac{k_\varepsilon R'^2}{R} \leq \frac{k_\varepsilon L^2}{R} \ll 1, \quad (14.21)$$

яка визначає так звану „дальню зону” (або зону Фраунгофера) відносно об'єму розсіювання  $V$  (що має лінійний розмір  $L$ ). Для

точок спостереження, що знаходяться у „хвильовій зоні”  $R \gg \lambda_\epsilon$  ( $k_\epsilon R \gg 1$ ), умова дальньої зони (14.21) виявляється більш жорсткою, ніж введена раніше умова  $L \ll R$ , оскільки нерівність (14.21) можна переписати у вигляді

$$\frac{k_\epsilon L^2}{R} = (k_\epsilon L) \frac{L}{R} = k_\epsilon R \left( \frac{L}{R} \right)^2 \ll 1. \quad (14.22 \text{ а})$$

Умові (14.21) можна надати простий фізичний смисл, якщо ввести поняття характерного кута дифракції  $\theta_d$  на геометричному тілі з лінійним розміром  $L$ :  $\theta_d \approx \lambda_\epsilon / L \sim 1/k_\epsilon L \ll 1$ , а також характерного кута  $\theta_L = L/R \ll 1$ , під яким видно об'єм розсіювання з точки спостереження (рис. 14. 1):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} = k_\epsilon L \cdot \frac{L}{R} \sim \frac{\theta_L}{\theta_d} \ll 1. \quad (14.22 \text{ б})$$

Видно, що умова знаходження точки спостереження у дальній зоні відносно об'єму  $V$  означає, що „геометричний” кутовий розмір  $\theta_L$  об'єму має бути значно меншим, ніж кут дифракції  $\theta_d$ .

У курсах теорії дифракції й поширення радіохвиль загальноприйнятим є інше (також, взагалі-то, достатньо фізичне) трактування нерівності (14.21). Вираз у лівій частині (14.21) можна записати як відношення площі поперечного перерізу об'єму розсіювання ( $\sim L^2$ ) до площі першої зони Френеля ( $\sim a_F^2$ , де  $a_F = \sqrt{\lambda_\epsilon R} \sim \sqrt{R/k_\epsilon}$  — лінійний розмір першої зони Френеля на відстані  $R$ ):

$$k_\epsilon \frac{L^2}{R} \sim \frac{L^2}{a_F^2} \ll 1. \quad (14.22 \text{ в})$$

Таким чином, для спостерігача  $P$ , який перебуває у дальній зоні, лінійний розмір  $a_F$  зони Френеля виявляється значно більшим, ніж геометричний розмір  $L$  об'єму розсіювання  $V$ . Беручи до уваги, що зона Френеля визначається як область простору, кожна точка якої дає синфазний з іншими внесок до повного поля у точці спостереження (різниця фаз хвилі між точками у межах першої зони Френеля не перевищує  $\pi/2$ ), поле у дальній зоні з достатнім наближенням можна вважати сферичною хвилею, що розходить. Кривизна фазового фронту хвилі визначається тільки відстанню  $R$  від початку координат, розташованого всередині об'єму розсіювання  $V$ , і не залежить від його лінійного розміру  $L$ .

У дальній зоні з урахуванням спрощень (14.19) і (14.20) підінтегральні функції у вихідній формулі (14.18) можуть наближено бути подані так:

$$\frac{1}{|\bar{R} - \bar{R}'|} \exp \left\{ i \left[ \bar{k}_\epsilon \bar{R}' - \omega_0 \left( t - \frac{|\bar{R} - \bar{R}'|}{v_\epsilon} \right) \right] \right\} \approx \frac{e^{i(k_\epsilon R - \omega_0 t)}}{R} \cdot e^{-i(\bar{k} - \bar{k}_\epsilon) \bar{R}'},$$

$$\mu \left( \bar{R}', t - \frac{|\bar{R} - \bar{R}'|}{v_\epsilon} \right) \approx \mu \left( \bar{R}', t - \frac{R}{v_\epsilon} + \frac{\bar{k} \bar{R}'}{\omega_0} \right).$$

Тут ми ввели  $\bar{k} = k_\epsilon \frac{\bar{R}}{R}$  — хвильовий вектор розсіяного поля.

Зауважимо, що введений вектор  $\bar{k}$  спрямований у точку спостереження (див. рис. 14.1), а його модуль збігається з  $k_\epsilon$  ( $k = k_\epsilon$ ). Після зроблених спрощень у першому порядку теорії збурень для розсіяного поля  $U$ , отримуємо такий вираз:

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\vec{R}' \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon)\vec{R}'} \quad (14.23)$$

Якщо флуктуації показника заломлення не залежать від часу, а є тільки функцією просторових координат, тобто  $\mu(\vec{R}', t) \equiv \mu(\vec{R}')$ , то формулу (14.23) можна переписати у більш простому вигляді

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{2\pi^2 k_\varepsilon^2}{R} C_\mu(\vec{q}) e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)}, \quad (14.24)$$

де введено так званий **вектор розсіювання**  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\varepsilon$ , а  $C_\mu(\vec{q})$  – Фур'є-компонента випадкового поля флуктуацій  $\mu(\vec{R})$ , взята для однієї єдиної просторової гармоніки  $\vec{\chi} = \vec{q}$ :

$$C_\mu(\vec{q}) = C_\mu(\vec{\chi})|_{\vec{\chi}=\vec{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \mu(\vec{R}') e^{-i\vec{\chi}\vec{R}'} d\vec{R}' \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}} \quad (14.25)$$

Оскільки  $\mu(\vec{R}') \equiv 0$  при  $\vec{R}' \notin V$ , то інтегрування у (14.25) за  $d\vec{R}'$  можна поширити на весь тривимірний простір:

$$C_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\vec{R}') e^{-i\vec{\chi}\vec{R}'} d\vec{R}' \Big|_{\vec{\chi}=\vec{q}} \quad (14.26)$$

#### Висновки

1. З формули (14.24) випливає, що при розсіюванні хвилі, яка падає на нерухомі неоднорідності, **частота хвильового поля не**

**змінюється** (залежність від часу має той самий вигляд  $\sim e^{-i\omega_0 t}$ , що й у падаючій хвилі  $U_0$ ).

2. Величина (напруженість)  $U_1$  розсіяного поля з напрямку  $\vec{k}_\varepsilon$  у напрям  $\vec{k}$  визначається тільки однією просторовою гармонікою Фур'є (14.25) з „хвильовим” вектором  $\vec{\chi}$ , що дорівнює векторові розсіювання  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\varepsilon$ . Таке розсіювання називають „резонансним”.

#### 14.2. Середнє поле і середня інтенсивність

У першому наближенні методу малих збурень (борнівське наближення) поле  $U_1(\vec{R}, t)$  у дальній зоні, розсіяне на флуктуючих просторових неоднорідностях  $\mu(\vec{R}, t)$  показника заломлення, визначається формулою (14.23), з якої випливає, що зв'язок між  $U_1(\vec{R}, t)$  і  $\mu(\vec{R}, t)$  є лінійним. Якщо розглядати  $\mu$  як одну з можливих реалізацій випадкової функції  $\mu(\vec{R}, t)$ , то  $U_1$  також буде випадковою реалізацією розсіяного хвильового поля  $U_1(\vec{R}, t)$ , і для його опису потрібно застосувати методи теорії випадкових функцій, і, зокрема, метод моментів.

Усереднимо (14.23) за ансамблем реалізацій  $\mu(\vec{R}, t)$ . За рахунок лінійності зв'язку між  $U_1$  і  $\mu$  операції інтегрування за  $d\vec{R}'$  і усереднення за ансамблем реалізацій  $\langle \rangle$  можна поміняти місцями. У результаті, з урахуванням того, що  $\langle \mu(\vec{R}, t) \rangle = 0$ , для **середнього поля** отримаємо

$$\langle U_1(\vec{R}, t) \rangle \sim \int_V d\vec{R}' \langle \mu(\vec{R}', t) \rangle e^{-i\vec{q}\vec{R}} = 0. \quad (14.27)$$

Факт перетворення на нуль першого статистичного моменту поля  $U_1(\vec{R}, t)$  дає змогу говорити про відсутність у полі  $U_1$  когерентної складової, а саме розсіювання у цьому наближенні вважати **некогерентним**.

Величина потужності розсіяного поля  $W$  у точці спостереження, а також густина потоку енергії  $\vec{S}$  є величинами, квадратичними за полем  $U$ : наприклад, якщо величина  $U$  є напруженість електричного (або магнітного) поля у розсіяній електромагнітній хвилі, то щільність енергії  $W = |U|^2 / 4\pi$ , а вектор Умова-Пойнтінга  $\vec{S} = \frac{\vec{k}}{k} c W$ , де  $c$  – швидкість поширення електромагнітної хвилі при  $n=1$  (швидкість світла у вакуумі). Для простоти далі розглядатимемо величину  $I = |U|^2$ , яку назвемо „інтенсивністю”. За визначенням, ця величина з точністю до сталих множників збігається зі щільністю потоку енергії у розсіяній хвилі і пропорційна потужності, що реєструється будь-яким приймачем у точці спостереження.

**Середня інтенсивність поля**, розсіяного на нерухомих неоднорідностях ( $\mu(\vec{R}, t) = \mu(\vec{R})$ ), у борнівському наближенні, як впливає з (14.23), дорівнює

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \langle |U_1(\vec{R})|^2 \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \left\langle \left| \int_V d\vec{R}' \mu(\vec{R}') e^{-i\vec{q}\vec{R}} \right|^2 \right\rangle. \quad (14.28)$$

Подаючи квадрат модуля інтеграла за  $d\vec{R}'$  у вигляді добутку двох інтегралів і змінюючи порядок усереднення  $\langle \rangle$  та інтегрування, отримуємо

$$\langle I_1(\vec{R}) \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\vec{R}' \int_V d\vec{R}'' \langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle e^{-i\vec{q}(\vec{R}' - \vec{R}'')}. \quad (14.29)$$

Для просторово однорідного поля випадкових флуктуацій показника заломлення корелятор  $\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle$  є функцією тільки різниці аргументів  $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$ :

$$\langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'') = B_\mu(\vec{\rho}). \quad (14.30)$$

Просторова однорідність випадкових полів повністю аналогічна властивості стаціонарності випадкових процесів (у широкому розумінні), що дає змогу ввести поняття довжини кореляції  $l_\mu$  як відстані, на якій автокореляційна функція  $B_\mu(\vec{\rho})$  суттєво спадає. Під словами „суттєво спадає” можна розуміти той самий смисл, що й при введенні поняття „час кореляції” (див. формули (5.31), (5.33)). Довжина кореляції  $l_\mu$  може відрізнятися у різних напрямках, тобто залежати від напрямку вектора  $\vec{\rho}$  (див. § 13), у цьому випадку ми маємо справу з „анізотропним” полем флуктуацій показника заломлення  $\mu(\vec{R})$ . Якщо ж довжина кореляції  $l_\mu$  не залежить від напрямку  $\vec{\rho}$ , то поле флуктуацій  $\mu(\vec{R})$  є статистично ізотропним, а довжину кореляції  $l_\mu$  називають у цьому випадку **радіусом кореляції**. За порядком величини  $l_\mu$

збігаються з характерним лінійним розміром неоднорідностей показника заломлення.

Замість  $\bar{R}', \bar{R}''$  перейдемо у (14.29) до нових (сумарних і різницевих) змінних інтегрування:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2}(\bar{R}' + \bar{R}''), \quad \bar{\rho} = \bar{R}' - \bar{R}''.$$

Якщо лінійні розміри  $L$  об'єму розсіювання  $V$  достатньо великі:  $L \gg l_\mu$  (тобто розсіювання відбувається на великій кількості  $N \sim L^3/l_\mu^3 \gg 1$  неоднорідностей), то на границях області інтегрування за змінною  $\bar{\rho}$  значення  $B_\mu(\bar{\rho})$  буде настільки малим, що інтеграл за  $d\bar{\rho}$  можна поширити на весь простір (від  $-\infty$  до  $\infty$ ), а область інтегрування за сумарною змінною  $\bar{R}_1$  практично не відрізнятиметься від старої  $V$ . У результаті отримаємо

$$\langle I_1(\bar{R}) \rangle = \frac{k_\varepsilon^4}{(4\pi R)^2} \int_V d\bar{R}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} B_\mu(\bar{\rho}) e^{-i\bar{q}\bar{\rho}} = \frac{\pi k_\varepsilon^4}{2 R^2} V S_\mu(\bar{q}), \quad (14.31)$$

де введена величина  $S_\mu(\bar{q})$  має смисл просторово-енергетичного спектра  $S_\mu(\bar{\chi})$ , взятого для однієї-єдиної просторової гармоніки з „хвильовим вектором”  $\bar{\chi} = \bar{q}$ :

$$S_\mu(\bar{q}) = S_\mu(\bar{\chi}) \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} B_\mu(\bar{\rho}) e^{-i\bar{\chi}\bar{\rho}} \Big|_{\bar{\chi}=\bar{q}} \quad (14.32)$$

### Висновки

Зі знайденого виразу (14.31) випливає, що

1. Середня інтенсивність  $\langle I_1(\bar{R}) \rangle$  спадає з відстанню  $R$  за законом  $\sim R^{-2}$ , як це і має бути у сферичній хвилі, що розходить.

2. Факт, що  $\langle I_1 \rangle \sim V$ , свідчить про некогерентний характер розсіювання. Дійсно, враховуючи, що середню кількість неоднорідностей в об'ємі  $V$  можна оцінити за порядком величини як  $N \sim V/l_\mu^3$  ( $l_\mu^3$  — пропорційне до об'єму, що припадає на одну неоднорідність з характерним лінійним розміром  $l_\mu$ ), доходимо висновку, що  $\langle I_1 \rangle \sim V \sim N$ . Зауважимо, що при когерентному додаванні полів, розсіяних на  $N$  неоднорідностях, амплітуда сумарного поля була б  $U_1 \sim N$ , а його інтенсивність, пропорційна квадрату амплітуди, має бути  $\sim N^2 \sim V^2$ . При некогерентному ж додаванні полів додаються не їх амплітуди, а інтенсивності (квадрати амплітуд), тому сумарна інтенсивність  $I_1$  виявляється пропорційною  $N \sim V$ .

3. Розсіювання має вибірковий (резонансний) характер у тому розумінні, що при розсіюванні з напрямку  $\bar{k}_\varepsilon$  у напрямку  $\bar{k}$  бере участь тільки одна-єдина просторова гармоніка з хвильовим вектором  $\bar{\chi} = \bar{q} = \bar{k} - \bar{k}_\varepsilon$ .

4. Середня інтенсивність  $\langle I_1 \rangle \sim k_\varepsilon^4$ . Множник  $k_\varepsilon^4$  характерний для „релєєвської” частотної залежності ( $\sim \omega_0^4$ ) інтенсивності поля, розсіяного на „дрібних” неоднорідностях ( $l_\mu$  набагато менша за довжину хвилі випромінювання  $\lambda_\varepsilon$ ). Дійсно, якщо радіус

кореляції  $l_\mu$  настільки малий, що виконується нерівність  $l_\mu q \leq 2k_\epsilon l_\mu \ll 1$ , то  $S_\mu(\vec{q})$ , як випливає з (14.32), виявляється взагалі не залежним від  $\vec{q}$  (і, отже, від хвильового вектора  $\vec{k}_\epsilon$  і довжини хвилі випромінювання  $\lambda_\epsilon$ ):

$$S_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\rho \leq l_\mu} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} B_\mu(\vec{\rho}) = S_\mu(0) \approx \frac{l_\mu^3}{(2\pi)^3} B_\mu(0) = \frac{\sigma_\mu^2 l_\mu^3}{(2\pi)^3}. \quad (14.33)$$

При отриманні цієї оцінки ми врахували, що  $\sigma_\mu^2 = B_\mu(0) = \langle \mu^2 \rangle$  — дисперсія флуктуації квадрату показника заломлення  $n^2(\vec{R})$  (див. визначення  $\mu$  за формулою (14.15)), а  $l_\mu^3$  — характерний об'єм, зайнятий однією неоднорідністю з лінійним розміром  $l_\mu$ , що дорівнює радіусові кореляції. З урахуванням (14.33), згідно з вихідною формулою (14.31), отримуємо, що для „дрібних” неоднорідностей  $l_\mu q \ll 1$  середня інтенсивність розсіяного поля у точці спостереження пропорційна  $\omega_0^4$ .

### 14.3. Індикатриса розсіювання

З формули (14.31) випливає, що середня інтенсивність у точці спостереження залежить від відстані  $R = |\vec{R}|$  до об'єму розсіювання і вектора розсіювання  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\epsilon$ :  $\langle I_1 \rangle = \langle I_1(R, \vec{q}) \rangle$ . Для визначення конкретної залежності  $\langle I_1 \rangle$  від напрямку вектора

$\vec{k} = k_\epsilon \frac{\vec{R}}{R}$  розпишемо його проєкції в декартовій системі координат  $XYZ$  з початком  $O$  в центрі об'єму розсіювання і віссю  $OZ$ , спрямованою вздовж хвильового вектора падаючої хвилі  $\vec{k}_\epsilon$  (див. рис. 14.1 і 14.2).

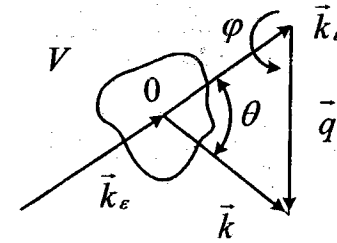


Рис. 14.2

Орієнтація осі  $OX$  в ортогональній до вектора  $\vec{k}_\epsilon$  площині  $XOY$  у загальному випадку довільна. Проєкції вектора  $\vec{k}$  задаватимемо у сферичних координатах  $\vec{k} = (k_\epsilon, \theta, \varphi)$ , де  $\theta$  — полярний кут (кут між векторами  $\vec{k}_\epsilon$  і  $\vec{k}$ ), а  $\varphi$  — азимутальний кут (кут між проєкцією вектора  $\vec{k}$  на площину  $XOY$  і віссю  $OX$ ).

Введемо поняття **індикатриса розсіювання**  $F(\theta, \varphi)$ , яку визначимо як відношення середньої інтенсивності  $\langle I_1 \rangle$ , розсіяної у напрямку  $\theta, \varphi$ , до середньої інтенсивності, розсіяної у напрямку поширення падаючої хвилі ( $\vec{k} = \vec{k}_\epsilon$ ). При  $\vec{k} = \vec{k}_\epsilon$  хвильовий вектор розсіювання  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_\epsilon = 0$ . Для цього напрямку полярний кут  $\theta = 0$ , а величина азимутального кута  $\varphi$  довільна (для визначеності нехай вона дорівнює нулю). З урахуванням вищевикладеного,

згідно зі знайденою раніше формулою для середньої інтенсивності (14.31), отримаємо

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\langle I_1(R, \vec{q}) \rangle}{\langle I_1(R, 0) \rangle} = \frac{\langle I_1(R, \theta, \varphi) \rangle}{\langle I_1(R, 0, 0) \rangle} = \frac{S_\mu(\vec{q})}{S_\mu(0)}. \quad (14.34)$$

При цьому, як легко переконалися, всі множники перед  $S_\mu$  у формулі (14.31) для  $\langle I_1 \rangle$  скорочуються, тому в напрямку  $\vec{k} = \vec{k}_\varepsilon$ , що задається хвильовим вектором падаючої хвилі  $F(0, 0) = 1$ . Залежність  $F(\theta, \varphi)$  прийнято зображати у сферичній системі координат, відкладаючи значення  $F$  за напрямком променя, заданого кутами  $\theta, \varphi$ , що відлічуються від напрямку вектора  $\vec{k}_\varepsilon$  (див. рис. 14.3).

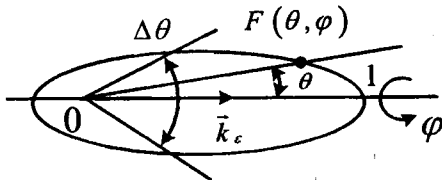


Рис. 14.3

Як **приклад** розглянемо статистично однорідне й ізотропне поле неоднорідностей, коли  $B_\mu(\vec{\rho}) = B_\mu(\rho)$ . У цьому випадку, як було показано у задачі §13, енергетичний спектр  $S_\mu(\vec{\chi})$  залежить тільки від модуля хвильового вектора  $\vec{\chi}$ . Отже, і  $S_\mu(\vec{q})$  також залежатиме тільки від  $q = |\vec{q}|$ . Причому зв'язок між  $S_\mu(q)$  і  $B_\mu(\rho)$  визначається як

$$S_\mu(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\rho) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{\rho} = \frac{1}{2\pi^2 q} \int_0^{\infty} B_\mu(\rho) \sin(q\rho) d\rho = S_\mu(q). \quad (14.35)$$

З рис. 14.2 (з урахуванням того, що  $k = k_\varepsilon$ ) випливає

$$q = \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon)^2} = \sqrt{k^2 + k_\varepsilon^2 - 2\vec{k}\vec{k}_\varepsilon} = k_\varepsilon \sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2}. \quad (14.36)$$

Таким чином, для ізотропних неоднорідностей індикатриса розсіювання виявляється функцією тільки полярного кута  $\theta$ :

$$F(\theta) = \frac{S_\mu\left(2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2}\right)}{S_\mu(0)}. \quad (14.37)$$

Кутову ширину  $\Delta\theta$  індикатриса розсіювання  $F(\theta)$  (див. рис. 14.3) можна оцінити за заданим характерним лінійним масштабом неоднорідностей  $l_\mu$  (радіусом кореляції), скориставшись співвідношенням невизначеностей (див. (13.34)). Інтервал  $\Delta\chi$  хвильових чисел  $\chi$ , де спектр  $S_\mu(\chi)$  відмінний від нуля, пов'язаний з  $l_\mu$  співвідношенням

$$\Delta\chi \cdot l_\mu \approx 1. \quad (14.38)$$

З (14.37) і (14.38) випливає, що кутова ширина  $\Delta\theta$  індикатриса розсіювання  $F(\theta)$  визначається „шириною” за  $\theta$  функції



$S_\mu \left( 2k_\varepsilon \sin \frac{\theta}{2} \right)$ . З урахуванням того, що  $\Delta\chi = \Delta q = 2k_\varepsilon \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ , співвідношення (14.38) набуває вигляду

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\varepsilon l_\mu}. \quad (14.39)$$

Розглянемо два граничні випадки.

1. Якщо розмір неоднорідностей  $l_\mu$  набагато перевищує довжину хвилі випромінювання  $\lambda_\varepsilon$  (великі неоднорідності,  $k_\varepsilon l_\mu \gg 1$ ) і виконується нерівність  $1/k_\varepsilon l_\mu \ll 1$ , то індикатриса розсіювання  $F(\theta)$  виявляється відмінною від нуля тільки у вузькому інтервалі кутів  $\Delta\theta \ll 1$  (поблизу напрямку  $\theta = 0$ ), який визначається зі співвідношення невизначеностей (14.39) як

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{1}{2k_\varepsilon l_\mu}. \quad (14.40)$$

Звідси впливає оцінка ширини

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{k_\varepsilon l_\mu} \sim \frac{\lambda_\varepsilon}{l_\mu} \ll 1. \quad (14.41)$$

2. У протилежному граничному випадку, коли розміри неоднорідностей  $l_\mu$  набагато менші за довжину хвилі  $\lambda_\varepsilon$  (дрібні неоднорідності,  $k_\varepsilon l_\mu \ll 1$ ), при будь-яких значеннях кута  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) величина  $ql_\mu = 2k_\varepsilon l_\mu \sin \frac{\theta}{2} \ll 1$ , і, згідно з (14.33), можна скористатися наближенням  $S_\mu(q) \approx S_\mu(0)$ . У цьому випадку індикатриса розсіювання (14.34) не залежить від  $\theta$  і всюди дорівнює одиниці: розсіювання є ізотропним,  $\langle I_1 \rangle$  не залежить

від напрямку. Це так званий випадок релєвського розсіювання на дрібних неоднорідностях, коли  $\langle I_1 \rangle \sim \omega_0^4 \sim \lambda_\varepsilon^{-4}$ .

#### 14.4. Межі застосування борнівського наближення

Оскільки формула (14.31) для  $\langle I_1 \rangle$  є наближеною (вона отримана у „борнівському” наближенні), для того, щоб нею можна було скористатися, необхідно зазначити межі її застосування. Основною нерівністю, виконання якої припускалося при виведенні формули (14.31), виступала вимога малого значення розсіяного поля  $U_1$  порівняно з первинним полем  $U_0$ :

$$|U_1| \ll |U_0| \text{ або } \langle I_1 \rangle = |U_1|^2 \ll |U_0|^2 = 1.$$

Проте, у зв'язку з тим, що  $\langle I_1 \rangle$  залежить від напрямку розсіювання, зазначені нерівності можуть добре виконуватися, наприклад, при розсіюванні на великі кути  $\theta \gg \lambda_\varepsilon/l_\mu$  (за рахунок малого значення  $\langle I_1 \rangle$ , розсіяного у цих напрямках), але не виконуватися при розсіюванні на малі кути. Тому навіть при великих флуктуаціях  $\mu$  як критерій застосування (14.31) слід вимагати малого значення розсіяного поля в „інтегральному” розумінні: необхідно, щоб повний потік енергії  $P_1$ , розсіяного об'ємом  $V$  поля  $U_1$ , був значно меншим, ніж потік енергії  $P_0$  випромінювання  $U_0$ , що падає на об'єм  $V$ :

$$P_1 \ll P_0.$$

Оточимо об'єм розсіювання  $V$  сферою  $C_R$  із центром в точці  $O$  і достатньо великим радіусом  $R$  — таким, щоб точки на поверхні сфери знаходилися у дальній зоні відносно  $V$  (рис. 14.4).

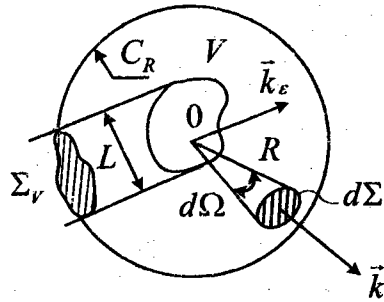


Рис. 14.4

У цьому випадку  $\langle I_1 \rangle$  для всіх точок поверхні визначається формулою (14.31). Середній потік розсіяної енергії  $\langle |U_1|^2 \rangle = \langle I_1 \rangle$  через сферу  $C_R$  можна записати у вигляді інтеграла за поверхнею:

$$P_1 = a \oint_{C_R} \langle I_1 \rangle d\Sigma, \quad (14.42)$$

де  $a$  – несуттєвий для подальшого розгляду сталий множник (який, наприклад, дорівнює  $v_\varepsilon/4\pi$ , якщо йдеться про розсіювання електромагнітних хвиль, причому у цьому випадку  $U_1$  є напруженість розсіяного електричного або магнітного поля,  $v_\varepsilon$  – швидкість хвилі в однорідному середовищі, так що  $\frac{v_\varepsilon}{4\pi} \langle |U_1|^2 \rangle$  – середнє значення модуля вектора Умова-Пойтінга). Потік енергії  $P_0$  у падаючому полі  $U_0$  можна записати у вигляді

$$P_0 = a |U_0|^2 \Sigma_V, \quad (14.43)$$

де  $\Sigma_V$  – площа поперечного перерізу об'єму  $V$  площиною, перпендикулярною до хвильового вектора  $\vec{k}_\varepsilon$ . Підставимо у (14.42)

вираз для  $\langle I_1 \rangle$  (14.31) і перейдемо від інтегрування за  $d\Sigma = R^2 d\Omega$  до інтегрування за тілесним кутом  $d\Omega$

$$P_1 = a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V \oint_{4\pi} d\Omega S_\mu(\vec{q}) \approx a \frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 V S_\mu(0) \Delta\Omega. \quad (14.44)$$

Тут ми скористалися оцінкою інтеграла, замінивши його добутком підінтегральної функції при  $\vec{q} = 0$  на величину тілесного кута  $\Delta\Omega$ , у якому відбувається розсіювання основної частини енергії.

Нерівність  $P_1 \ll P_0$ , виконання якої необхідне для застосування теорії збурень, за допомогою формул (14.43) і (14.44) тепер можна записати у вигляді

$$\frac{\pi}{2} k_\varepsilon^4 L S_\mu(0) \Delta\Omega \ll 1. \quad (14.45)$$

При отриманні цієї нерівності ми врахували, що  $|U_0| = 1$  (див. (14.17)), і скористалися оцінками  $\Sigma_V \sim L^2$ ,  $V \sim L^3$ .

Розглянемо знову два граничні випадки.

I. **Розсіювання коротких хвиль на великомасштабних неоднорідностях** ( $k_\varepsilon l_\mu \gg 1$ ,  $\lambda_\varepsilon \ll l_\mu$ ). З урахуванням оцінки кутової ширини індикатриса розсіювання  $\Delta\theta$  (14.41) отримаємо характерну величину тілесного кута

$$\Delta\Omega \approx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\Delta\theta} \sin\theta d\theta \approx 2\pi \frac{(\Delta\theta)^2}{2} \approx \frac{\pi}{k_\varepsilon^2 l_\mu^2} \sim \frac{\lambda_\varepsilon^2}{l_\mu^2} \ll 1. \quad (14.46)$$

Підставимо тепер знайдену величину  $\Delta\Omega$  у (14.45) і, враховуючи оцінку (14.33) для  $S_\mu(0)$ , отримуємо

$$\frac{1}{16\pi} \sigma_\mu^2 (k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu) \ll 1. \quad (14.47)$$

2. Розсіювання на дрібних неоднорідностях ( $k_\varepsilon l_\mu \ll 1$ ,  $\lambda_\varepsilon \gg l_\mu$ ) є, як зазначено вище, дифузним – енергія рівномірно розсіюється у всіх напрямках, тобто  $\Delta\Omega = 4\pi$ , і (14.45) призводить до нерівності

$$\frac{1}{4\pi} \sigma_\mu^2 (k_\varepsilon L) (k_\varepsilon l_\mu)^3 \ll 1, \quad (14.48)$$

яка, як легко переконатися, накладає слабші обмеження на величину  $\sigma_\mu^2$ , ніж (14.47).

Таким чином, першим наближенням теорії збурень можна користуватися, якщо лінійні розміри неоднорідностей  $l_\mu$  не надто великі, а дисперсія флуктуації  $\sigma_\mu^2$  і розміри  $L$  об'єму розсіювання достатньо малі. Крім цього, нагадаємо, що під час виведення формули (14.31) припускалося, що виконується нерівність  $L \gg l_\mu$ , яка забезпечує наявність великої кількості неоднорідностей у об'ємі розсіювання  $V$ .

#### 14.5. Спектр розсіяного сигналу

Звернемося тепер до більш загального випадку рухомих (змінних у часі) неоднорідностей показника заломлення, коли  $\mu = \mu(\vec{R}, t)$ , а розсіяне у першому наближенні теорії збурень хвильове поле  $U_1(\vec{R}, t)$  визначається за формулою (14.23):

$$U_1(\vec{R}, t) \approx \frac{k_\varepsilon^2}{4\pi R} e^{i(k_\varepsilon R - \omega_0 t)} \int_V d\vec{R}' \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_\varepsilon)\vec{R}'}$$

Припустимо, що швидкість зміни відносних флуктуацій показника заломлення  $\mu = \mu(\vec{R}, t)$  у підінтегральному виразі достатньо мала. У цьому випадку у часовому аргументі функції  $\mu = \mu(\vec{R}, t)$  можна знехтувати доданками, залежними від  $\vec{R}'$ :

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right). \quad (14.49)$$

Для обґрунтування можливості проведення такого спрощення введемо до розгляду характерний час  $\tau_\mu$  зміни  $\mu(\vec{R}, t)$ :

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \approx \frac{1}{\tau_\mu}$$

і розкладемо у ряд Тейлора  $\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right)$  за малою добавкою  $\Delta t' = \vec{k}\vec{R}'/\omega_0$ :

$$\mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon} + \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}\right) \approx \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \mu\left(\vec{R}', t - \frac{R}{v_\varepsilon}\right) \cdot \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0}. \quad (14.50)$$

Другим доданком у (14.50) можна знехтувати, якщо він малий порівняно з першим. Для цього необхідно, щоб виконувалася така нерівність:

$$\left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \left| \frac{\vec{k}\vec{R}'}{\omega_0} \right| \leq \frac{k_\varepsilon L}{\omega_0 \tau_\mu} \ll 1. \quad (14.51)$$

Якщо зміна  $\mu(\vec{R}, t)$  у часі пов'язана тільки з перенесенням поля  $\mu(\vec{R})$  як цілого зі швидкістю  $v$  (так зване перенесення „заморожених” неоднорідностей), то  $\tau_\mu \approx l_\mu/v$ , і нерівність (14.51) набуває вигляду

$$\frac{L}{l_\mu} \cdot \frac{v}{v_\epsilon} \ll 1. \quad (14.52)$$

Останні дві нерівності означають, що ми перейшли до квазістатистичного наближення: час  $\Delta t' \sim L/v_\epsilon$  відносного запізнення хвиль, що приходять у точку спостереження з різних точок об'єму розсіювання, має бути значно меншим, ніж час  $\tau_\mu$ , за який суттєво змінюються неоднорідності.

За рахунок змін  $\mu$  у часі поле  $U_1$  вже не є монохроматичним з частотою  $\omega_0$ , а носить випадковий часовий характер, тобто є випадковим процесом. Знайдемо енергетичний спектр випадкового процесу  $U_1(\vec{R}, t)$ , вважаючи випадкове поле флуктуацій  $\mu(\vec{R}, t)$  статистично однорідним за просторовими змінними  $\vec{R}$  і стаціонарним за часом  $t$ . Автокореляційна функція  $B_\mu$  у цьому випадку має вигляд

$$\langle \mu(\vec{R}', t') \mu(\vec{R}'', t'') \rangle = B_\mu(\vec{R}' - \vec{R}'', t' - t''). \quad (14.53)$$

Енергетичний спектр  $S_{U_1}(\vec{R}, \omega)$  випадкового процесу  $U_1(\vec{R}, t)$  (радіус-вектор  $\vec{R}$  точки спостереження відіграє тут роль фіксованого параметра) визначимо за формулою Вінера-Хінчина, маючи на увазі, що  $U_1(\vec{R}, t)$  є аналітичним сигналом:

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle U_1(\vec{R}, t) U_1^*(\vec{R}, t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (14.54)$$

Підставляючи сюди  $U_1(\vec{R}, t)$  у вигляді (14.23) з урахуванням (14.49), отримаємо

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{k_\epsilon^4}{32\pi^3 R^2} \int_V d\vec{R}' \int_V d\vec{R}'' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \omega_0)\tau - i\vec{q}(\vec{R}' - \vec{R}'')} \times \\ \times \langle \mu\left(\vec{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \mu\left(\vec{R}'', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \rangle. \quad (14.55)$$

Згідно з (14.53), кореляційна функція під знаком інтеграла дорівнює

$$\langle \mu\left(\vec{R}', t + \tau - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \mu\left(\vec{R}'', t - \frac{R}{v_\epsilon}\right) \rangle = B_\mu(\vec{\rho}, \tau),$$

де  $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$ . Перейшовши далі у (14.55) до нових змінних інтегрування  $\vec{R}_1 = (\vec{R}' + \vec{R}'')/2$ ,  $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$  для випадку великої кількості неоднорідностей всередині об'єму розсіювання ( $l_\mu \ll L$ ), приходимо до такої формули:

$$S_{U_1}(\vec{R}, \omega) = \frac{k_\epsilon^4 V}{32\pi^3 R^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\vec{\rho}, \tau) e^{-[i\vec{q}\vec{\rho} - (\omega - \omega_0)\tau]} = \\ = \frac{\pi k_\epsilon^4 V}{2 R^2} S_\mu(\vec{q}, \omega - \omega_0). \quad (14.56)$$

Тут введено просторово-часовий енергетичний спектр  $S_\mu(\vec{q}, \nu)$  випадкового поля  $\mu(\vec{R}, t)$ , що узагальнює формулу Вінера-

Хінчіна на випадок залежності автокореляційної функції  $B_\mu$  від часу і просторових координат (див. § 13) і взятий для фіксованих значень просторової і часової частот:  $\bar{\chi} = \bar{q}$ ,  $\nu = \omega - \omega_0$ :

$$\begin{aligned} S_\mu(\bar{q}, \omega - \omega_0) &= S_\mu(\bar{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\bar{\chi}=\bar{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_\mu(\bar{\rho}, \tau) e^{-i(\bar{\chi}\bar{\rho} - \nu\tau)} \Big|_{\substack{\bar{\chi}=\bar{q}, \\ \nu=\omega-\omega_0}} \end{aligned} \quad (14.57)$$

У реальних умовах флуктуації показника заломлення  $n(\bar{R}, t)$  визначаються просторово-часовими змінами фізичних параметрів, що описують стан середовища, в якому відбувається поширення хвиль: температурою, тиском, концентрацією домішок (зокрема, для атмосфери – водяної пари, тобто вологості), густиною заряджених частинок (електронів та іонів – в іоносферній і космічній плазмі) та ін. Ці фізичні параметри, у свою чергу, описуються рівняннями, які пов'язують між собою їх просторові і часові зміни. Якщо рівняння, що описують стан середовища, лінійні, то амплітуда кожної просторової гармоніки  $C_\mu(\bar{\chi}, t)$  у розкладанні Фур'є  $\mu(\bar{R}, t)$  за плоскими хвилями

$$\mu(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_\mu(\bar{\chi}, t) e^{i\bar{\chi}\bar{R}} d\bar{\chi} \quad (14.58)$$

може мінятися з часом тільки у певний спосіб, за гармонійним законом з фіксованою частотою  $\Omega = \Omega(\bar{\chi})$ :

$$C_\mu(\bar{\chi}, t) = C_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) e^{-i\Omega(\bar{\chi})t} + C_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) e^{i\Omega(\bar{\chi})t} \quad (14.59)$$

Просторово-часові флуктуації  $\mu(\bar{R}, t)$  (14.58) при цьому можуть бути подані у вигляді інтеграла Фур'є за плоскими хвилями:

$$\mu(\bar{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) e^{i[\bar{\chi}\bar{R} - \Omega(\bar{\chi})t]} + C_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) e^{i[\bar{\chi}\bar{R} + \Omega(\bar{\chi})t]} \right\} d\bar{\chi} \quad (14.60)$$

Рівняння  $\Omega = \Omega(\bar{\chi})$  визначає так званий закон дисперсії відповідних хвиль (тиску, температури, густини електричного заряду та ін). Для кожної просторової гармоніки  $\bar{\chi}$  два доданки під знаком інтеграла у (14.60) відповідають хвилям, що біжать у взаємно протилежних напрямках і мають однакову кругову частоту  $\Omega(\bar{\chi})$  і довжину хвилі  $\Lambda = 2\pi/\chi$ . Це легко показати, якщо прослідкувати за швидкістю перенесення фіксованого значення фази хвилі. Справді, припустивши  $\Phi^{(\pm)} = \bar{\chi}\bar{R} \mp \Omega(\bar{\chi})t = \text{Const}$ , швидкість  $\bar{v}_\Phi$  переміщення сталої фази (фазової швидкості), визначимо шляхом диференціювання  $\Phi^{(\pm)}$  за часом:

$$\frac{\partial \Phi^{(\pm)}}{\partial t} = \bar{\chi}\bar{v}_\Phi \mp \Omega(\bar{\chi}) = 0.$$

Тут  $\bar{v}_\Phi = d\bar{R}/dt$ . Звідси видно, що введені нами знаки  $\pm$  відповідають хвилям, для яких зв'язок між частотою  $\Omega(\bar{\chi})$  і фазовою швидкістю  $\bar{v}_\Phi$  має вигляд  $\Omega(\bar{\chi}) = \pm \bar{\chi}\bar{v}_\Phi$ , що характерно для хвиль, що біжать у протилежних напрямках відносно вектора  $\bar{\chi}$ .

Скориставшись представленням  $\mu(\bar{R}, t)$  у вигляді (14.60), побудуємо тепер просторово-часову автокореляційну функцію  $B_\mu(\bar{\rho}, \tau)$ :

$$B_\mu(\bar{\rho}, \tau) = \langle \mu(\bar{R} + \bar{\rho}, t + \tau) \mu(\bar{R}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\chi}\bar{\rho}} \left[ S_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) e^{-i\Omega(\bar{\chi})\tau} + S_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) e^{i\Omega(\bar{\chi})\tau} \right] d\bar{\chi}, \quad (14.61)$$

де з урахуванням просторової однорідності поля флуктуацій  $\mu(\bar{R}, t)$  введено просторові енергетичні спектри  $S_\mu^{(+)}(\bar{\chi})$  і  $S_\mu^{(-)}(\bar{\chi})$  хвиль, що поширюються у взаємно протилежних напрямках:

$$\begin{aligned} \langle C_\mu^{(\pm)}(\bar{\chi}) C_\mu^{(\pm)*}(\bar{\chi}') \rangle &= S_\mu^{(\pm)}(\bar{\chi}) \delta(\bar{\chi} - \bar{\chi}'), \\ \langle C_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) C_\mu^{(-)*}(\bar{\chi}') \rangle &= \langle C_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) C_\mu^{(+)*}(\bar{\chi}') \rangle = 0. \end{aligned} \quad (14.62)$$

Просторово-часовий енергетичний спектр  $S_\mu(\bar{\chi}, \nu)$  після цього можна отримати, обчисливши інтеграл (14.57) з  $B_\mu(\bar{\rho}, \tau)$  у вигляді (14.61):

$$S_\mu(\bar{\chi}, \nu) = S_\mu^{(+)}(\bar{\chi}) \delta[\nu - \Omega(\bar{\chi})] + S_\mu^{(-)}(\bar{\chi}) \delta[\nu + \Omega(\bar{\chi})]. \quad (14.63)$$

Після виконаних обчислень енергетичний спектр розсіяного випромінювання  $S_{U_1}(\bar{R}, \omega)$ , згідно з формулою (14.56), подається так:

$$S_{U_1}(\bar{R}, \omega) = \frac{\pi k_\epsilon^4 V}{2R^2} \sum_{\pm} S_\mu^{(\pm)}(\bar{q}) \delta[\omega - \omega_0 \mp \Omega(\bar{q})]. \quad (14.64)$$

Видно, що енергетичний спектр  $S_{U_1}(\bar{R}, \omega)$  складається з двох ліній на частотах  $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\bar{q})$ , інтенсивності яких

визначаються енергіями  $S^{(\pm)}(\bar{q})$ , пропорційними до квадратів амплітуд просторових гармонік поля  $\mu(\bar{R}, t)$ , причому знак "плюс" відповідає хвилям, що поширюються вздовж напрямку вектора  $\bar{q}$ , а знак "мінус" — в протилежному напрямку.

### Коментарі

Ефект зміни частоти сигналу при розсіюванні на флуктуючих неоднорідностях показника заломлення на величину  $\pm \Omega(\bar{q})$ , що відповідає частоті власних хвиль у середовищі з хвильовим вектором  $\bar{q}$ , отримав назву **комбінаційного розсіювання** (частота розсіяного сигналу отримується з частоти падаючого сигналу  $\omega_0$  шляхом простої комбінації збільшення (або зменшення) її на величину  $\Omega(\bar{q})$ ).

Вимірювання спектра розсіяного сигналу є чутливим методом дистанційного зондування — визначення параметрів середовища за розташуванням та інтенсивністю спектральних ліній у відбитому сигналі. При цьому для різних середовищ можуть спостерігатися різні ситуації.

### Приклади

1. Одному й тому самому значенню вектора розсіювання  $\bar{q}$  можуть відповідати кілька гілок коливань з різними частотами  $\Omega_m(\bar{q})$  ( $m=1, 2, \dots$ ). У цьому випадку у спектрі розсіяного сигналу буде спостерігатися серія спектральних ліній на частотах  $\omega = \omega_0 \pm \Omega_m(\bar{q})$ .

2. При розсіюванні радіохвиль на неоднорідностях нейтральної атмосфери частота  $\Omega(\bar{q})$  визначається швидкістю звуку  $v_{зв}$   $\{\Omega(\bar{q}) = qv_{зв}\}$ , яка, у свою чергу, залежить від температури та

інших термодинамічних параметрів атмосфери. Цей факт лежить в основі методів радіоакустичного зондування нижньої атмосфери.

3. Радіохвилі, відбиті від іоносфери за рахунок розсіювання на плазмових неоднорідностях, мають у своєму спектрі максимуми,

що відповідають плазмовій частоті  $\Omega_p = \left[ \frac{4\pi N_e e^2}{m_e} \right]^{1/2}$  ( $e$  —

заряд,  $m_e$  — маса електрона,  $N_e$  — просторова густина електронів), що дає змогу визначити, наприклад, профіль електронної концентрації, залежність  $N_e$  від висоти ділянки розсіювання.

4. Рухові неоднорідностей як цілого зі швидкістю  $\vec{v}$  («заморожене» перенесення) формально відповідає закон дисперсії  $\Omega(\vec{q}) = \vec{q}\vec{v}$ , зміщення частоти розсіяного сигналу в цьому випадку викликане ефектом Доплера:  $\omega = \omega_0 + \vec{q}\vec{v}$  (у формулі (14.64) при цьому наявний тільки один доданок —  $S_\mu^{(+)}(\vec{q})$ ).

#### Урахування дисипації енергії

Механізми дисипації енергії, обов'язково наявні у будь-якій фізичній системі, призводять до згасання її власних коливань, тому (14.59) слід записувати у вигляді

$$C_\mu(\vec{\chi}, t) = [C_\mu^{(+)}(\vec{\chi})e^{-i\Omega(\vec{\chi})t} + C_\mu^{(-)}(\vec{\chi})e^{i\Omega(\vec{\chi})t}]e^{-\Gamma(\vec{\chi})t}, \quad t \geq 0; \quad (14.65)$$

де  $\Gamma(\vec{\chi})$  — декремент згасання. Відповідним чином змінюється й автокореляційна функція (14.61): замість гармонійної залежності від часу у ній з'являються експоненціально згасаючі множники  $\exp\{-\Gamma(\vec{\chi})|\tau|\}$ :

$$B_\mu(\vec{\rho}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\chi}\vec{\rho} - \Gamma(\vec{\chi})|\tau|} \left[ S_\mu^{(+)}(\vec{\chi})e^{-i\Omega(\vec{\chi})\tau} + S_\mu^{(-)}(\vec{\chi})e^{i\Omega(\vec{\chi})\tau} \right] d\vec{\chi}, \quad (14.66)$$

а просторово-часовий енергетичний спектр  $S_\mu(\vec{\chi}, \nu)$  "розмивається" за частотою  $\nu$ . Кожній просторовій гармоніці з хвильовим вектором  $\vec{\chi}$  відповідають вже не дві частоти  $\pm\Omega(\vec{\chi})$  (див. (14.63)), а дві смуги частот з шириною  $\sim \Gamma(\vec{\chi})$ :

$$S_\mu(\vec{\chi}, \nu) = \frac{1}{\pi} \sum_{\pm} S_\mu^{(\pm)}(\vec{\chi}) \frac{\Gamma(\vec{\chi})}{[\nu \mp \Omega(\vec{\chi})]^2 + \Gamma^2(\vec{\chi})}. \quad (14.67)$$

Формально цей вираз можна отримати з (14.64), якщо  $\delta$ -функції, що входять сюди, замінити „передграничними” значеннями (див. (2.19 а)):

$$\delta(\nu \pm \Omega) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\nu \mp \Omega)^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (14.68)$$

У результаті, спектр розсіяного сигналу

$$S_\mu(\vec{q}, \omega - \omega_0) = S_\mu(\vec{\chi}, \nu) \Big|_{\substack{\vec{\chi}=\vec{q} \\ \nu=\omega-\omega_0}} \quad \text{з дискретного (14.64) (відмінного}$$

від нуля тільки на двох частотах  $\omega = \omega_0 \pm \Omega(\vec{q})$ ) стає неперервним, з двома максимумами, ширина яких пропорційна декременту згасання „власних” хвиль у середовищі (рис. 14.5). Таким чином, за видом спектра розсіяного сигналу можна визначити не тільки власні частоти коливань у середовищі (для плазми, наприклад, це дає змогу з'ясувати густину заряджених частинок в об'ємі розсіювання), а й оцінити декремент згасання цих коливань (для плазми він визначається частотою зіткнень електронів з нейтральними атомами й молекулами).

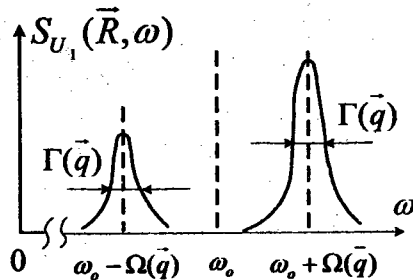


Рис. 14.5

### ЗАДАЧІ

1. У результаті розсіювання плоскої хвилі на випадкових неоднорідностях середовища виникло випромінювання, інтенсивність якого спадає за законом  $\sim \exp(-\theta^2/\theta_0^2)$  зі зростанням кута розсіювання  $\theta$ . Визначити за цими даними коефіцієнт кореляції показника заломлення, вважаючи кут  $\theta_0$  малим ( $\theta_0 \ll 1$ ).

**Розв'язок.** Розглядаємо розсіювання у борнівському наближенні (одноразове розсіювання). Згідно з умовою,

$$\bar{I}_1 \sim e^{-\theta^2/\theta_0^2}.$$

Оскільки  $\bar{I}_1 \sim S_\mu(\vec{q})$ , то

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-\theta^2/\theta_0^2}. \quad (1)$$

Перейдемо від  $\theta$  до  $q$  з використанням співвідношення  $q = 2k_\epsilon \sin \theta/2$  (див. рис. 14.6).

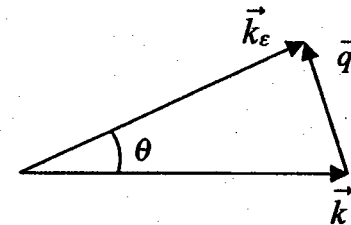


Рис. 14.6

Врахуємо також, що, згідно з умовою, кут  $\theta_0$  малий. Відповідно до (1), енергетичний спектр  $S_\mu(\vec{q})$  відмінний від нуля тільки для кутів  $\theta \leq \theta_0 \ll 1$ . Тому можна обмежитися розглядом тільки малих значень  $\theta$  (у яких зосереджена основна енергія розсіяного випромінювання). У цьому випадку  $q \approx k_\epsilon \theta$ . Отже, (1) можна подати таким чином:

$$S_\mu(\vec{q}) \sim e^{-q^2/\theta_0^2 k_\epsilon^2}. \quad (2)$$

Тепер з формул Вінера-Хінчіна випливає

$$\begin{aligned} B_\mu(\rho) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2}} e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d\vec{q} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2}} e^{i(q_x \rho_x + q_y \rho_y + q_z \rho_z)} dq_x dq_y dq_z = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_y^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_y \rho_y} dq_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_z^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_z \rho_z} dq_z. \end{aligned} \quad (3)$$



Кожен з трьох однакових за виглядом інтегралів у (3) зводиться до інтеграла Пуассона. Розглянемо один із цих інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q_x^2}{\theta_0^2 k_\epsilon^2} + i q_x \rho_x} dq_x = \theta_0 k_\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi^2 - \frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}} d\psi = \theta_0 k_\epsilon \sqrt{\pi} e^{-\frac{\rho_x^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}}. \quad (4)$$

Тут

$$\psi = \frac{q_x}{\theta_0 k_\epsilon} - \frac{i \rho_x \theta_0 k_\epsilon}{2}.$$

З (3) і (4) для  $B_\mu(\vec{\rho})$  можна остаточно записати

$$B_\mu(\vec{\rho}) \sim \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\epsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\epsilon^2}{4} (\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2)} = \pi \sqrt{\pi} (\theta_0 k_\epsilon)^3 e^{-\frac{\theta_0^2 k_\epsilon^2}{4} \rho^2}.$$

Отже, коефіцієнт кореляції показника заломлення має вигляд

$$K_\mu(\rho) = \frac{B_\mu(\rho)}{B_\mu(0)} = e^{-\frac{\rho^2 \theta_0^2 k_\epsilon^2}{4}} = e^{-\frac{\rho^2}{l_\mu^2}},$$

де  $l_\mu = 2 / \theta_0 k_\epsilon$ .

2. Хвиля поширюється у статистично однорідному та ізотропному середовищі з гауссовою функцією кореляції

$B_\mu(\vec{\rho}) = \overline{\mu^2} e^{-\rho^2 / l_\mu^2}$ . Визначити у борнівському наближенні індикатрису розсіювання і повну потужність, розсіяну об'ємом  $V$  за всіма напрямками.

**Відповідь:**

$$F(\theta) = \exp\left(-l_\mu^2 k_\epsilon^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\bar{I}_{\text{повн}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} k_\epsilon^2 V l_\mu \overline{\mu^2} [1 - \exp(-k_\epsilon^2 l_\mu^2)].$$

## § 15. Методи геометричної оптики і плавних збурень

Нерівності (14.47) і (14.48), що обмежують область застосування методу малих збурень, унеможливають використання його для розрахунку полів, розсіяних на дуже великих неоднорідностях, у разі великих розмірів об'єму розсіювання  $L$  або для дуже коротких довжин хвиль, коли  $k_\epsilon l_\mu \gg 1$  і  $k_\epsilon L \gg 1$ . Альтернативою методу малих збурень у певному сенсі є методи геометричної оптики (МГО) і плавних збурень (МПЗ), які із самого початку припускають, що лінійні розміри неоднорідностей  $l_\mu$  великі порівняно з довжиною хвилі  $\lambda_\epsilon$  ( $k_\epsilon l_\mu \gg 1$ ), тобто неоднорідності є достатньо „плавними”. Як ми бачили, індикатриса розсіювання на таких неоднорідностях сильно витягнута „вперед” (у напрямку поширення первинного поля), що дає змогу під час розрахунків знехтувати хвилями, розсіяними назад.

Для спрощення обмежимося випадком нерухомих неоднорідностей, коли флуктуації показника заломлення  $n$  не залежать від часу  $n(\vec{R}, t) = n(\vec{R})$  і хвильове рівняння для поля  $U$  має вигляд (див. (14.1))

$$\left[ \Delta_{\vec{R}} - \frac{n^2(\vec{R})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(\vec{R}, t) = 0. \quad (15.1)$$

При цьому, як було показано у попередньому параграфі, для монохроматичного первинного поля  $U_0 \sim e^{-i\omega t}$  залежність від часу  $t$  розсіяного поля зберігається, що дає змогу шукати розв'язок для  $U(\vec{R}, t)$  у вигляді  $U(\vec{R}, t) = U(\vec{R}) e^{-i\omega t}$  (тут і далі ми опускаємо індекс “0” у частоті  $\omega_0$ ). Після підставлення цього виду

розв'язку у хвильове рівняння (15.1) воно переходить у рівняння Гельмгольца:

$$[\Delta_{\vec{R}} + k^2 \varepsilon(\vec{R})] U(\vec{R}) = 0, \quad (15.2)$$

де  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  — хвильове число,  $\lambda$  — довжина хвилі у вакуумі ( $n=1$ ), а  $\varepsilon(\vec{R}) = n^2(\vec{R})$  — діелектрична проникність середовища.

### 15.1. Метод геометричної оптики

Якби середовище було однорідним  $\{\varepsilon(\vec{R}) = \text{Const}\}$ , то рівняння Гельмгольца (15.2) мало б розв'язок у вигляді плоскої хвилі:

$$U(\vec{R}) = A \exp\{ik\sqrt{\varepsilon} \cdot \vec{t} \cdot \vec{R}\}, \quad (15.3)$$

де  $\vec{t}$  — одиничний вектор у напрямку поширення хвилі. Зауважимо, що у попередніх позначеннях (див. (14.17)) ми мали б  $k_\varepsilon = k\sqrt{\varepsilon}$  і  $k\sqrt{\varepsilon} \vec{t} = k_\varepsilon \vec{t} = \vec{k}_\varepsilon$ . Для  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{R})$  введемо у розгляд характерний масштаб  $l_\varepsilon$  зміни діелектричної проникності:

$$\left| \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right| \approx \frac{1}{l_\varepsilon}.$$

Якщо середовище плавно неоднорідне, тобто  $\lambda \ll l_\varepsilon$ , то розв'язок вихідного рівняння (15.2) можна шукати у вигляді квазіплоских хвиль:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R}) e^{iS(\vec{R})}, \quad (15.4)$$

де амплітуда  $A(\vec{R})$  і фаза  $S(\vec{R})$  — повільно змінні (у масштабі  $\lambda$ ) функції координат. Скориставшись малою швидкістю зміни  $A(\vec{R})$  і  $S(\vec{R})$ , нескладно отримати рівняння для  $A$  і  $S$  або для величини

$\varphi(\vec{R}) = S(\vec{R})/k$ , яка є фазовим шляхом хвилі і називається ейконалом.

Запропонований для цього Дебаєм спосіб виведення рівнянь полягає у наступному. Розкладемо амплітуду  $A(\vec{R})$  у ряд за оберненими степенями хвильового числа  $k$ :

$$U(\vec{R}) = \left( A_0 + \frac{A_1}{ik} + \frac{A_2}{(ik)^2} + \dots \right) e^{ik\varphi}. \quad (15.5)$$

Фактично, розклад  $A(\vec{R})$  у ряд проводиться за безрозмірним малим параметром  $1/kl_\varepsilon \ll 1$ . Коефіцієнти  $A_m$  у розкладанні (15.5) у загальному випадку комплексні і тому роблять внесок й у фазу результуючого поля.

Підставивши ряд (15.5) у рівняння Гельмгольца і прирівнявши до нуля коефіцієнти при однакових степенях  $k$ , отримуємо систему рекурентних рівнянь для  $\varphi, A_0, A_1, \dots$ :

$$\begin{aligned} (k^2) \quad (\vec{\nabla} \varphi)^2 &= \varepsilon, \\ (k^1) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} A_0) + A_0 \Delta \varphi &= 0, \\ (k^0) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} A_1) + A_1 \Delta \varphi &= -\Delta A_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ (k^{1-n}) \quad 2(\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} A_n) + A_n \Delta \varphi &= -\Delta A_{n-1}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Перше рівняння у системі (15.6) називається рівнянням ейконалу, а наступні рівняння для  $A_m$  ( $m=0,1,2,\dots$ ) називають рівняннями переносу для амплітуд, відповідно, нульового, першого і  $m$ -го наближень. Звичайно у МГО обмежуються нульовим наближенням, залишаючи у розкладанні (15.5) тільки член  $A_0$ . Наступні члени у (15.5) відкидаються не тільки через складність їх обчислення, а, головним чином, тому, що ряд (15.5)

є асимптотичним, а для асимптотичних рядів, як відомо, збільшення кількості членів, що враховуються, не завжди призводить до покращення апроксимації.

### Побудова розв'язків рівнянь ейконалу і переносу випромінювання

Рівняння ейконалу

$$(\vec{\nabla} \varphi)^2 = \varepsilon(\vec{R}) \quad (15.7)$$

це рівняння типу Гамільтона-Якобі. Йому відповідають характеристики (промені), на яких функціонал  $\int \sqrt{\varepsilon} ds$  екстремальний (принцип Ферма). Розв'язок (рівняння променів) можна записати у різних формах. Для наших цілей зручно його подати у вигляді залежності  $\vec{R} = \vec{R}(s)$ , де  $s$  – геометрична довжина, що обчислюється вздовж променя від якої-небудь початкової точки (див. рис. 15.1).

За відомою залежністю  $\vec{R}(s)$  легко визначити і рівняння дотичної до променя у кожній точці  $\vec{t}(s)$ :

$$\vec{t}(s) = d\vec{R}(s)/ds. \quad (15.8)$$

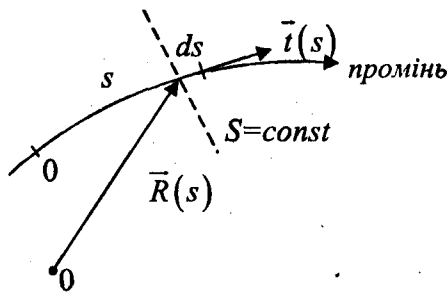


Рис. 15.1

Тут  $ds$  – елемент довжини на промені. З іншого боку, вектор  $\vec{t}(s)$  одночасно є і нормаллю до фазового фронту  $S = k\varphi = \text{Const}$ :  $\vec{t} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S| = \vec{\nabla} \varphi / |\vec{\nabla} \varphi|$ . Оскільки, згідно з рівнянням ейконалу (15.7),  $|\vec{\nabla} \varphi| = \sqrt{\varepsilon}$ , звідси випливає, що

$$\vec{t}(s) = \vec{\nabla} \varphi / \sqrt{\varepsilon}. \quad (15.9)$$

Якщо у той чи інший спосіб розв'язання  $\vec{R}(s)$  і, отже,  $\vec{t}(s)$  променевих рівнянь знайдене, то рівняння ейконалу (15.7) і перенесення нульового наближення

$$2(\vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla} A_0) + A_0 \Delta \varphi = 0 \quad (15.10)$$

можуть бути проінтегровані вздовж променевих траєкторій. Дійсно, помноживши обидві частини рівності (15.9) скалярно на  $\vec{t}$  і враховуючи, що  $\vec{t} \vec{t} = 1$ , а  $\vec{t} \vec{\nabla} \varphi = d\varphi/ds$  (похідна вздовж заданого напрямку  $\vec{t}$ ), отримаємо  $d\varphi/ds = \sqrt{\varepsilon}$ . Звідси ейконал  $\varphi$  на відстані  $s$  від обраного початку відліку ( $s=0$ ) знаходиться шляхом інтегрування вздовж криволінійного променя:

$$\varphi(s) = \int_0^s \sqrt{\varepsilon} ds' = \int_0^s \sqrt{\varepsilon[\vec{R}(s')]} ds'. \quad (15.11)$$

З іншого боку, вважаючи, що  $A_0 \neq 0$ , рівняння перенесення (15.10) можна переписати у такому вигляді:

$$\text{div}(A_0^2 \nabla \varphi) = \text{div}(\vec{t} \sqrt{\varepsilon} A_0^2) = \text{div}(\vec{t} I) = 0, \quad (15.12)$$

де введена величина  $I = \sqrt{\varepsilon} A_0^2$  пропорційна інтенсивності. Згідно з відомою геометрією променів  $\vec{R}(s)$ , тепер побудуємо

„нескінченно тонку” променеву трубку і проінтегруємо (15.12) за об’ємом, вміщеним між двома перерізами:  $d\Sigma_0$  — “на вході” і  $d\Sigma$  — “на виході” з трубки (див. рис.15.2).

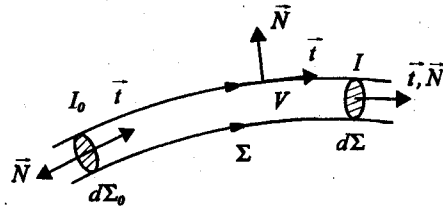


Рис. 15.2

Скориставшись при цьому теоремою Остроградського-Гаусса, отримаємо

$$\int_V \text{div}(\vec{I}t) dv = \oint_{\Sigma} \vec{I}t \vec{N} d\Sigma. \quad (15.13)$$

Тут  $\vec{N}$  — зовнішня нормаль до поверхні променевої трубки. Враховуючи, що на бічній поверхні трубки вектори  $\vec{t}$  і  $\vec{N}$  ортогональні, а на торцях напрямки  $\vec{t}$  і  $\vec{N}$  або збігаються, або протилежні (див. рис. 15.2), з (15.13) отримуємо закон збереження інтенсивності всередині променевої трубки:

$$I_0 d\Sigma_0 = I d\Sigma. \quad (15.14 \text{ а})$$

Тут  $I_0$  і  $I$  — відповідно інтенсивності на вході й виході трубки.

Звідси знаходимо шукану інтенсивність  $I$ :

$$I = I_0 \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma}. \quad (15.14 \text{ б})$$

## 15.2. Наближення малих збурень у методі геометричної оптики

Тепер розглянемо випадково-неоднорідне середовище. Отримати аналітичний розв’язок рівняння ейконалу (рівняння променів) при довільній залежності  $\varepsilon$  від координат неможливо. Тому під час розв’язання статистичних задач застосовують різні наближені методи і, в першу чергу, — метод збурень.

### Флуктуації ейконалу

Так само, як і в ММЗ, подамо діелектричну проникність  $\varepsilon(\vec{R})$  у вигляді суми регулярної і випадкової складових:

$$\varepsilon(\vec{R}) = \langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle + \varepsilon_1(\vec{R}). \quad (15.15)$$

Припустивши, що флуктуаційна компонента  $\varepsilon_1$  є малою порівняно з регулярною  $\bar{\varepsilon}$ :  $\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$ , подамо ейконал у вигляді ряду

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (15.16)$$

Вважаємо, що  $\varphi_0$  відповідає „незбуреному” рівнянню ейконалу

$$(\vec{\nabla} \varphi_0)^2 = \bar{\varepsilon}(\vec{R}), \quad (15.17)$$

а  $|\nabla \varphi_m| \sim \sigma_{\varepsilon}^m$ . Підставимо (15.16) у рівняння ейконалу (15.7)

$$[\vec{\nabla}(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots)]^2 = \bar{\varepsilon} + \varepsilon_1$$

і вимагатимемо, щоб отримане рівняння задовольнялося для кожного доданка за малою величиною  $\sigma_{\varepsilon}^m$  незалежно від інших

доданків. Тоді, з урахуванням (15.17), отримуємо для поправок  $\varphi_m$  таку систему рекурентних лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_1) &= \varepsilon_1, \\ 2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_2) &= -(\bar{\nabla}\varphi_1)^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (15.18)$$

Розв'язок системи рівнянь (15.18) можна виразити у квадратурах, якщо відомі незбурені характеристики  $\bar{R}_0(s)$  і  $\bar{t}_0(s)$  регулярного рівняння ейконалу (15.17). Дійсно, припустимо, що розв'язання  $\bar{R}_0(s)$  і  $\bar{t}_0(s)$  відомі. Тоді, згідно з (15.17), маємо  $\bar{\nabla}\varphi_0 = \bar{t}_0\sqrt{\varepsilon}$ . З урахуванням цього рівняння для поправки першого порядку  $\varphi_1$ , згідно з (15.18), набуває вигляду

$$2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}(\bar{t}_0\bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}\frac{d\varphi_1}{ds} = \varepsilon_1. \quad (15.19)$$

Звідси випливає, що поправка  $\varphi_1$  до незбуреного ейконалу  $\varphi_0$  на відрізка променя довжиною  $s$  дорівнює

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon}} ds'. \quad (15.20)$$

Інтегрування тут ведеться вздовж незбуреного променя  $\bar{R}_0(s)$ .

#### Флуктуації кутів приходу

Кути приходу хвилі визначаються напрямком нормалі до фазового фронту, який в ізотропному середовищі збігається з напрямком одиничного вектора  $\bar{t} = \bar{\nabla}\varphi/\sqrt{\varepsilon}$ . Визначимо

відхилення цього вектора від незбуреного значення  $\bar{t}_0 = \bar{\nabla}\varphi_0/\sqrt{\varepsilon}$ . Згідно з формулами (15.15) і (15.16), з точністю до лінійних за  $\varepsilon_1/\varepsilon \ll 1$  доданків, отримаємо

$$\bar{t} = \frac{\bar{\nabla}\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\bar{\nabla}(\varphi_0 + \varphi_1 + \dots)}{\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_1}} = \frac{\bar{\nabla}\varphi_0}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \bar{\nabla}\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1\bar{\nabla}\varphi_0}{2\varepsilon} + \dots \right]. \quad (15.21)$$

Враховуючи далі, що  $\bar{\nabla}\varphi_0 = \bar{t}_0\sqrt{\varepsilon}$  і  $\varepsilon_1 = 2(\bar{\nabla}\varphi_0\bar{\nabla}\varphi_1) = 2\sqrt{\varepsilon}(\bar{t}_0\bar{\nabla}\varphi_1)$  (див. (15.19)), отримуємо

$$\bar{t} \approx \bar{t}_0 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \bar{\nabla}\varphi_1 - \bar{t}_0(\bar{t}_0\bar{\nabla}\varphi_1) \right].$$

Звідси знаходимо вираз для поправки першого порядку до напрямку незбуреного променя  $\bar{t}_0$ :

$$\bar{t}_1 \approx \bar{t} - \bar{t}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \bar{\nabla}\varphi_1 - \bar{t}_0(\bar{t}_0\bar{\nabla}\varphi_1) \right] = \frac{\bar{\nabla}_\perp\varphi_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (15.22)$$

де  $\bar{\nabla}_\perp$  – вектор-оператор поперечного (відносно незбуреного променя) диференціювання.

#### Флуктуації рівня

Введемо поняття рівня амплітуди або просто рівня, яким називають величину

$$\chi = \ln \frac{A_0}{\hat{A}}, \quad (15.23)$$

де  $\hat{A}$  – певна стала величина тієї самої розмірності, що й амплітуда  $A_0$ . З урахуванням визначення (15.23), рівняння перенесення нульового наближення (15.10) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} 2(\bar{\nabla} A_0 \bar{\nabla} \varphi) + A_0 \Delta \varphi &= A_0 \left[ 2 \left( \frac{1}{A_0} \bar{\nabla} A_0 \bar{\nabla} \varphi \right) + \Delta \varphi \right] = \\ &= A_0 \left[ 2 \left( \bar{\nabla} \ln \frac{A_0}{A} \bar{\nabla} \varphi \right) + \Delta \varphi \right] = A_0 [2 \bar{\nabla} \chi \bar{\nabla} \varphi + \Delta \varphi] = 0. \end{aligned}$$

Вважаючи, що  $A_0 \neq 0$ , остаточно отримаємо

$$2 \bar{\nabla} \chi \bar{\nabla} \varphi + \Delta \varphi = 0. \quad (15.24)$$

Розв'язання цього рівняння знову шукатимемо у вигляді розкладів у ряди теорії збурень:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \end{aligned} \quad (15.25)$$

де  $\varphi_m \sim \sigma_\varepsilon^m$  і  $\chi_m \sim \sigma_\varepsilon^m$ . Підставивши (15.25) у (15.24) та прирівнявши доданки одного порядку малості за малою величиною  $\sigma_\varepsilon$ , отримаємо систему рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2 \bar{\nabla} \chi_0 \bar{\nabla} \varphi_0 + \Delta \varphi_0 &= 0, \\ 2 \bar{\nabla} \chi_1 \bar{\nabla} \varphi_0 + \Delta \varphi_1 + 2 \bar{\nabla} \chi_0 \bar{\nabla} \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (15.26)$$

Значення ейконалу  $\varphi_0$  і рівня  $\chi_0$  знаходяться з незбуреної задачі із заданою регулярною діелектричною проникністю  $\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle$ . За знайденими  $\varphi_0$  і  $\chi_0$  з другого рівняння (15.26) знаходиться величина флуктуацій рівня у першому наближенні  $\chi_1$  та ін.

Як найпростіший *приклад* розглянемо задачу поширення плоскої хвилі у статистично однорідному середовищі, коли  $\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle = \text{Const}$ . З регулярної частини задачі випливає, що при

поширенні в однорідному середовищі вихідна плоска хвиля не змінюється. Це означає, що сім'я незбурених (регулярних) променів є системою плоско-паралельних ліній, тобто  $\vec{t}_0 = \text{Const}$ . З рівняння ейконалу нульового наближення  $\bar{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{t}_0$  отримаємо, що  $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \cdot s$ , де  $s$  відлічується від обраного початку відліку ( $s = 0$ ) вздовж прямолінійного променя, заданого напрямком  $\vec{t}_0$ . Для зручності подання ми можемо, наприклад, спрямувати вздовж  $\vec{t}_0$  вісь  $OZ$  декартової системи координат  $XYZ$ . У цьому випадку  $s \equiv z$ ,  $\vec{t}_0 = \vec{e}_z$ ,  $\bar{\nabla} \varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} \vec{e}_z$ ,  $\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon} z$  і  $\Delta \varphi_0 = 0$ . З іншого боку, для сім'ї плоско-паралельних променів перерізи незбурених променевих трубок не змінюються за дистанцією, і, згідно із законом збереження інтенсивності всередині променевої трубки, отримуємо, що  $\chi_0 = \text{Const}$ . Отже,  $\bar{\nabla} \chi_0 = 0$ . З урахуванням вищевикладеного, перше рівняння у системі (15.26) задовольняється автоматично, а друге (для  $\chi_1$ ) приводиться до такого вигляду:

$$2 \bar{\nabla} \varphi_0 \bar{\nabla} \chi_1 + \Delta \varphi_1 = 2 \sqrt{\varepsilon} \frac{d\chi_1}{dz} + \Delta \varphi_1 = 0. \quad (15.27)$$

Знайдене рівняння легко інтегрується, і ми отримуємо вираз для флуктуаційного додатку до рівня:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta \varphi_1 dz'. \quad (15.28)$$

Інтегрування тут ведеться вздовж прямолінійного променя, паралельного до осі  $OZ$ , а  $\varphi_1$ , згідно з (15.20), визначається як

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz'. \quad (15.29)$$

### 15.3. Метод плавних збурень (метод Ритова)

У цьому розділі ми розглянемо ще один широко застосовуваний наближений метод розв'язання рівнянь електродинаміки — так званий метод плавних збурень (МПЗ). Уперше цей метод було використано у 1937 році С. М. Ритовим для розв'язання детермінованої задачі про дифракцію світла на ультразвуковій хвилі і пізніше було застосовано для вирішення статистичних задач О. М. Обуховим.

Для простоти знову обмежимося випадком нерухомих неоднорідностей, коли флуктуації діелектричної проникності не залежать від часу:  $\varepsilon(\vec{R}, t) = \varepsilon(\vec{R})$ . На відміну від ММЗ у МГО і МПЗ об'єм розсіювання  $V$ , всередині якого знаходяться випадкові неоднорідності  $\varepsilon_1$ , достатньо великий, і спостерігач може перебувати навіть всередині  $V$  (принаймні, неоднорідності  $\varepsilon_1$  займають якщо й не всю, то значну частину траси поширення хвиль).

Припустимо, що нам необхідно визначити розсіяне поле у точці спостереження  $P$ , що знаходиться безпосередньо всередині об'єму розсіювання  $V$ . У поставленій задачі цікавим є не стільки розсіяне поле, що виникає в неоднорідному середовищі під дією поля первинної хвилі  $U_0(\vec{R})$ , скільки зміна параметрів  $U_0(\vec{R})$ . Як такі параметри звичайно розглядають амплітуду  $A(\vec{R})$  і фазу  $S(\vec{R})$  хвилі. Так само, як і в МГО, подамо шукане поле  $U(\vec{R})$  у комплексній формі:

$$U(\vec{R}) = A(\vec{R})e^{iS(\vec{R})} = \hat{A}\frac{A(\vec{R})}{\hat{A}}e^{iS(\vec{R})} = \hat{A}e^{\psi(\vec{R})}, \quad (15.30)$$

де введено нову функцію

$$\psi(\vec{R}) = iS(\vec{R}) + \ln \frac{A(\vec{R})}{\hat{A}} = iS(\vec{R}) + \chi(\vec{R}), \quad (15.31)$$

так звану „комплексну фазу” поля  $U(\vec{R})$ . Уявна частина  $\psi$  збігається із, власне, фазою  $S$  ( $\text{Im} \psi = S$ ), а дійсна частина  $\chi = \ln \frac{A}{\hat{A}} = \text{Re} \psi$  є рівнем амплітуди або просто рівнем. Фізичний смисл у поданні (15.30) має тільки  $\text{Re} U$ , тому комплексне поле  $U(\vec{R})$  можна розглядати як узагальнення поняття "аналітичний сигнал" на функції не часу  $t$ , а просторових змінних  $\vec{R}$ .

Підставивши шуканий вигляд розв'язку (15.30) у рівняння Гельмгольца (15.2), перейдемо до нового рівняння для комплексної фази  $\psi(\vec{R})$ . При цьому скористаємося відомими правилами диференціально-векторного аналізу:

$$\begin{aligned} \text{grad} U &= \vec{\nabla} U = \hat{A} \vec{\nabla} e^{\psi} = \hat{A} e^{\psi} \vec{\nabla} \psi = U \vec{\nabla} \psi, \\ \Delta U &= \text{div}(\text{grad} U) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} U) = \vec{\nabla} \cdot U \vec{\nabla} \psi = \\ &= \vec{\nabla} U \vec{\nabla} \psi + U \Delta \psi = U(\vec{\nabla} \psi)^2 + U \Delta \psi. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Ще раз нагадаємо визначення операторів  $\vec{\nabla}$  (набла) і  $\Delta$  (лапласіан):  $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — орти декартової системи координат. Підставляючи тепер  $\Delta U$  у (15.2) і скорочуючи на функцію  $U$ , яка припускається відмінною від нуля, приходимо до рівняння для комплексної фази  $\psi$ :

$$(\bar{\nabla} \psi)^2 + \Delta \psi + k^2 [\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})] = 0. \quad (15.33)$$

На відміну від (15.2), ми отримали рівняння зі сталими коефіцієнтами, і в цьому розумінні воно є „кращим” за (15.2), де перед невідомою функцією  $U(\vec{R})$  стоїть змінний множник  $k^2 \varepsilon(\vec{R}) = k^2 [\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})]$ . Але за це спрощення доводиться „платити” тим, що рівняння (15.33) нелінійне відносно  $\bar{\nabla} \psi$ .

#### 15.4. Наближення малих збурень у методі Ритова

Так само, як і в МГО, розглянемо випадок, коли флуктуююча компонента  $\varepsilon_1$  мала порівняно з регулярною складовою  $\bar{\varepsilon}$ :  $\sigma_\varepsilon = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll \bar{\varepsilon}$ . Розв’язок рівняння (15.33) шукатимемо у вигляді ряду теорії збурень:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (15.34)$$

за степенями малого параметра  $\mu = \varepsilon_1 / \bar{\varepsilon}$  ( $\sigma_\mu = \sigma_\varepsilon / \bar{\varepsilon} \ll 1$ ), вважаючи, що  $\psi_m \sim \sigma_\mu^m$ . Оскільки у рівнянні (15.33) є тільки похідні від функції  $\psi$ , а сама функція  $\psi$  не входить у рівняння, природно припустити, що фактичним параметром розкладу (15.33) є не сама величина  $\mu$ , а її похідні  $\nabla \mu \sim \mu / l_\mu$ , де  $l_\mu$  — характерний лінійний розмір неоднорідностей  $\mu(\vec{R})$ . Звідси випливає, що чим більший розмір неоднорідностей  $l_\mu$ , тобто чим вони більш „плавні”, тим краще має сходиться ряд (15.34) для  $\psi$ .

Підставимо ряд (15.34) у (15.33):

$$[\bar{\nabla}(\psi_0 + \psi_1 + \dots)]^2 + \Delta(\psi_0 + \psi_1 + \dots) = -k^2 [\bar{\varepsilon}(\vec{R}) + \varepsilon_1(\vec{R})]. \quad (15.35)$$

Вважатимемо, що  $\psi_0$  задовольняє „незбурене” рівняння (15.33) з  $\varepsilon_1 \equiv 0$ , а для решти доданків вимагатимемо, щоб рівність (15.35) виконувалась у кожному порядку за  $\varepsilon_1$ . У результаті, отримаємо таку систему рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^0) \quad & (\bar{\nabla} \psi_0)^2 + \Delta \psi_0 = -k^2 \bar{\varepsilon}(\vec{R}), \\ (\varepsilon_1^1) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_1 + \Delta \psi_1 = -k^2 \varepsilon_1(\vec{R}), \\ (\varepsilon_1^2) \quad & 2\bar{\nabla} \psi_0 \bar{\nabla} \psi_2 + \Delta \psi_2 = -(\bar{\nabla} \psi_1)^2, \end{aligned} \quad (15.36)$$

Розв’язок  $\psi_0$  першого рівняння (15.36) визначає просторову залежність незбуреного хвильового поля  $U_0 = e^{\psi_0}$ , яка мала б місце, якби флуктуації показника заломлення  $\varepsilon_1(\vec{R})$  були відсутніми ( $\varepsilon_1 \equiv 0$ ). Цей розв’язок ми вважаємо відомим. Друге рівняння у (15.36) відносно  $\psi_1$  є лінійним із заданою правою частиною і відомим коефіцієнтом  $\bar{\nabla} \psi_0$  перед похідною  $\bar{\nabla} \psi_1$ . Наступні рівняння для  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  тощо утворюють ланцюжок „зацеплених” одне за одне рівнянь: знаючи  $\psi_m$ , можна визначити коефіцієнти  $\bar{\nabla} \psi_m$  і праві частини рівнянь для  $\psi_{m+1}$ .

Як *ілюстрацію* методу плавних збурень застосуємо його для розв’язання найпростішої задачі. Нехай нескінченне статистично однорідне середовище ( $\langle \varepsilon(\vec{R}) \rangle = \text{Const}$ ) поділене на два півпростори ( $z > 0$  і  $z < 0$  на рис. 15.3).



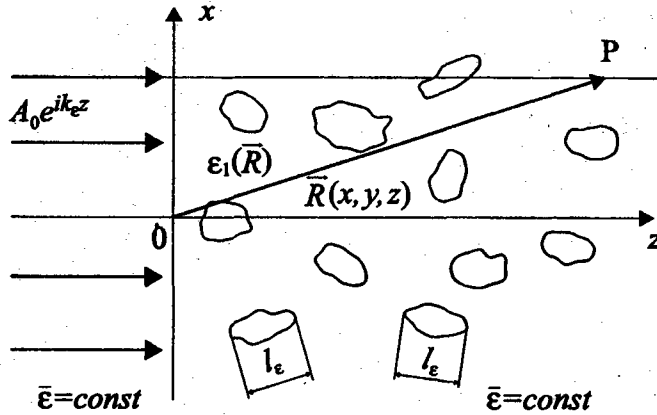


Рис. 15.3

На півпростір  $z > 0$ , у якому знаходяться випадкові неоднорідності  $\epsilon_1(\vec{R})$ , з лівого півпростору ( $z < 0$ ), де неоднорідності відсутні ( $\epsilon_1 \equiv 0$ ), падає нормально до границі поділу ( $z = 0$ ) плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди

$$U_0(\vec{R}, t) = e^{i(k_\epsilon z - \omega t)}, \quad (15.37)$$

де  $k_\epsilon = k\sqrt{\bar{\epsilon}}$  — модуль хвильового вектора в статистично однорідному середовищі (див. (14.17)). Вимагається у довільній точці  $P$  з координатами  $\vec{R} = (z, y, z)$ , що знаходиться всередині неоднорідного середовища ( $z > 0$ ), знайти поправки до амплітуди і фази хвилі, що виникають за рахунок неоднорідностей діелектричної проникності  $\epsilon_1(\vec{R})$ .

Згідно з (15.37), комплексна фаза незбуреного поля дорівнює  $\psi_0 = iS_0 + \chi_0$ , де  $S_0 = k_\epsilon z$  і  $\chi_0 = \text{Const}$ . Обчисливши

$\vec{\nabla} \psi_0 = ik_\epsilon \vec{e}_z$ ,  $\Delta \psi_0 = 0$ , переконуємося у тому, що перше рівняння для  $\psi_0$  у системі (15.36) перетворюється у тотожність:  $-k_\epsilon^2 = -k_\epsilon^2$ .

Рівняння для поправки  $\psi_1$  (друге рівняння у (15.36)) набуває вигляду

$$2ik\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \Delta \psi_1 = -k^2 \epsilon_1(\vec{R}). \quad (15.38)$$

Подавши  $\psi_1$  у вигляді  $\psi_1 = iS_1 + \chi_1$  і вимагаючи виконання рівняння (15.38) для дійсної й уявної частин окремо, приходимо до системи двох рівнянь для двох невідомих функцій  $S_1$  і  $\chi_1$ :

$$-2k\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial S_1}{\partial z} + \Delta \chi_1 = -k^2 \epsilon_1, \quad (15.39)$$

$$2k\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta S_1 = 0.$$

Тепер перейдемо від фази  $S_1$  до відповідного їй ейконалу  $\phi_1 = S_1/k$ . Розділивши після цього перше рівняння у системі (15.39) на  $k^2$ , а друге на  $k$ , отримаємо

$$2\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \Delta \chi_1 = \epsilon_1(\vec{R}), \quad (15.40)$$

$$2\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta \phi_1 = 0.$$

Для достатньо коротких довжин хвиль ( $k \rightarrow \infty$ ) другим доданком у лівій частині першого рівняння в (15.40) можна знехтувати, після чого приходимо до рівнянь

$$2\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \epsilon_1(\vec{R}), \quad (15.41)$$

$$2\sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \chi_1}{\partial z} + \Delta \phi_1 = 0,$$

які точно збігаються з отриманими раніше у наближенні МГО (див. (15.19) і (15.27)).

Граничні умови для рівнянь (15.41) можна задати на площині  $z = 0$ , якщо знехтувати хвилями, відбитими від границі поділу двох середовищ і розсіяними неоднорідностями у зворотному порядку, тобто вважати, що

$$U(\vec{R})|_{z=0} = U_0(\vec{R})|_{z=0}. \quad (15.42)$$

Звідси випливає, що  $S = S_0$ ,  $\chi = \chi_0$  при  $z = 0$  або  $S_1 = 0$ ,  $\chi_1 = 0$  при  $z = 0$ . Інтегруючи перше рівняння у (15.41), за умови, що  $\phi_1(x, y, 0) = 0$ , отримуємо

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \varepsilon_1(x, y, z') dz' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz', \quad (15.43)$$

звідки поправка першого порядку малості  $S_1$  до фази  $S_0$  дорівнює

$$S_1(x, y, z) = k\phi_1 = \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz'. \quad (15.44)$$

Ввівши позначення  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\perp}$ , де  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – поперечна складова лапласіана, згідно з правилом диференціювання інтеграла за верхньою границею (за  $z$ ), знаходимо  $\Delta\phi_1$ :

$$\Delta\phi_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \mu(x, y, z) + \int_0^z \Delta_{\perp} \mu(x, y, z') dz' \right].$$

При цьому друге рівняння для  $\chi_1$  (15.41), якщо  $\chi_1(x, y, 0) = 0$ , має розв'язок:

$$\begin{aligned} \chi_1(x, y, z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^z \Delta\phi_1(x, y, z') dz' = \\ &= -\frac{1}{4} \mu(x, y, z) - \frac{1}{4} \int_0^z dz' \int_0^{z'} \Delta_{\perp} \mu(x, y, z'') dz''. \end{aligned} \quad (15.45)$$

Позначимо через  $dV(z') = dz'$  і  $U(z') = \int_0^{z'} \Delta_{\perp} \mu(x, y, z'') dz''$ ,

після чого обчислимо інтеграл у (15.45) за частинами:

$$\int_0^z dV(z') \cdot U(z') = V(z') \cdot U(z')|_0^z - \int_0^z dU(z') \cdot V(z').$$

Після цього (15.45) набуває остаточного вигляду:

$$\chi_1(x, y, z) = -\frac{1}{4} \mu(x, y, z) - \frac{1}{4} \int_0^z (z - z') \Delta_{\perp} \mu(x, y, z') dz'. \quad (15.46)$$

Формули (15.43) і (15.46) для  $\phi_1$  і  $\chi_1$ , відповідно, не залежать від довжини хвилі випромінювання, оскільки отримані з розв'язку системи рівнянь (15.41) при  $k \rightarrow \infty$ , тобто у наближенні геометричної оптики. Як було показано у попередньому розділі, в рамках МГО фаза хвилі  $S = k\phi$  визначалась шляхом інтегрування показника заломлення  $n$  вздовж криволінійного променя  $\vec{R}(s)$  (15.11):

$$S(s) = k \int_0^s \sqrt{\varepsilon(s')} ds' = k \int_0^s n(s') ds' \quad (15.47)$$

(для знаходження фази  $S$  у заданій точці спостереження  $P$  з

координатами  $\vec{R} = (x, y, z)$  інтегрування необхідно проводити за променем, що проходить через цю точку). Подамо  $n(s)$  у вигляді

$$n(s) = \sqrt{\varepsilon(s)} = \sqrt{\bar{\varepsilon}(s) + \varepsilon_1(s)} = \sqrt{\bar{\varepsilon}} \sqrt{1 + \mu(s)}.$$

Для відносно слабких флуктуацій, коли  $|\mu| \ll 1$ ,  $n(s)$  можна розкласти у ряд за степенями  $\mu$  і обмежитися тільки лінійним за  $\mu$  доданком. У межах цієї точності інтегрування за дійсним променем  $\vec{R}(s)$  у (15.47) можна замінити на інтегрування за „спрямленим” променем (відрізком прямої), паралельним до осі  $OZ$ , що проходить через точку спостереження  $\vec{R} = (x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\approx k\sqrt{\bar{\varepsilon}} \int_0^z \left[ 1 + \frac{1}{2} \mu(x, y, z') \right] dz' = \\ &= k_{\varepsilon} z + \frac{k_{\varepsilon}}{2} \int_0^z \mu(x, y, z') dz'. \end{aligned} \quad (15.48)$$

Видно, що перший доданок у правій частині (15.48) збігається з  $S_0$ , а другий – з виразом (15.44) для  $S_1$ .

### 15.5. Визначення статистичних характеристик

Формули (15.44) і (15.46) вирішують так звану динамічну частину задачі, вони дають змогу обчислити поправки до фази, рівня і кута приходу, якщо відомий явний вигляд функції  $\mu(\vec{R})$ . Якщо ж  $\mu(\vec{R})$  є тільки реалізацією випадкового поля, то  $S_1$  і  $\chi_1$  у кожній точці  $\vec{R}$  також є випадковими величинами. Усереднюючи (15.44) і (15.46) за ансамблем реалізацій  $\mu(\vec{R})$ , отримуємо

$$\langle S_1 \rangle = \langle \chi_1 \rangle = 0, \quad (15.49)$$

і, отже, середнє значення фази  $S_0$  у цьому наближенні збігається з її незбуреним значенням  $S_0$ , а флуктуації фази наближено збігаються з поправкою  $S_1$ :

$$\delta S = S - \langle S \rangle = S - S_0 \approx S_1. \quad (15.50)$$

Знайдені розв'язки (15.44) (15.46) також дають змогу обчислити і моменти другого порядку для флуктуацій фази, рівня і кутів приходу. Для прикладу ми розглянемо тільки дисперсію флуктуацій фази  $\sigma_S^2$ , яку можна обчислити, усереднюючи квадрат інтеграла (15.44):

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 = \langle S_1^2 \rangle &= \frac{k_{\varepsilon}^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \langle \mu(x, y, z') \mu(x, y, z'') \rangle = \\ &= \frac{k_{\varepsilon}^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' B_{\mu}(z' - z''). \end{aligned} \quad (15.51)$$

При цьому, як і раніше, ми припустили, що поле  $\mu(\vec{R})$  статистично однорідне, і ввели автокореляційну функцію флуктуацій  $\mu(\vec{R})$  на промені:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{R}') \mu(\vec{R}'') \rangle &= B_{\mu}(\vec{R}' - \vec{R}'') = \\ &= B_{\mu}(0, 0, z' - z'') = B_{\mu}(z' - z''). \end{aligned} \quad (15.52)$$

Для розглядуваної задачі  $\vec{R}' = (x, y, z')$ , а  $\vec{R}'' = (x, y, z'')$  — тому різницевий вектор має компоненти  $\vec{R}' - \vec{R}'' = (0, 0, z' - z'')$ .

Введемо у формулі (15.51) замість  $z''$  нову змінну інтегрування  $\xi = z'' - z'$ , а до інтеграла за  $dz'$  застосуємо операцію інтегрування за частинами (див. (15.46)):

$$\sigma_S^2 = \frac{k_\varepsilon^2}{4} \int_0^z dz' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) = \frac{k_\varepsilon^4}{4} \left\{ z' \int_{-z'}^{z-z'} d\xi B_\mu(\xi) \right\}_{z'=0}^{z'=z} - \int_0^z dz' z' [-B_\mu(z-z')' + B_\mu(-z')] = \frac{k_\varepsilon^2}{2} \int_0^z (z-\xi) B_\mu(\xi) d\xi. \quad (15.53)$$

При цьому ми врахували, що  $B_\mu(\xi)$  – парна функція. У формулі (15.53) винесемо  $z$  з-під знака інтеграла і введемо замість  $B_\mu(\xi)$  коефіцієнт кореляції  $K_\mu(\xi) = B_\mu(\xi) / \sigma_\mu^2$ :

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) K_\mu(\xi) d\xi. \quad (15.54)$$

Підінтегральна функція  $K_\mu(\xi)$  при  $\xi=0$  дорівнює 1 ( $K_\mu(0)=1$ ) і швидко спадає до 0 при  $\xi \geq l_\mu$ , де  $l_\mu$  — характерний масштаб спадання  $K_\mu(\xi)$ . З урахуванням цього оцінимо інтеграл (15.54) у двох граничних випадках.

1. **Короткі траси або великі неоднорідності** ( $z \ll l_\mu$ ). Оскільки змінна  $\xi$  змінюється у межах від 0 до  $z$ , виконується нерівність  $\xi \leq z \ll l_\mu$ , і під знаком інтеграла (15.54) можна покласти  $K_\mu(\xi) \approx K_\mu(0) = 1$ . Після цього інтеграл легко обчислюється і дорівнює  $z/2$ :

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{4} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 z^2. \quad (15.55)$$

2. **Довгі траси або дрібні неоднорідності** ( $z \gg l_\mu$ , але, як і раніше, неоднорідності великі порівняно з довжиною хвилі —  $k_\varepsilon l_\mu \gg 1$ ). З урахуванням того, що  $K_\mu(\xi)$  перетворюється на нуль при  $\xi > l_\mu$ , ефективна область інтегрування у (15.54) лежить у межах  $0 \leq \xi < l_\mu \ll z$ . При цьому інтеграл від другого члена у дужках малий — відповідно до малого параметра  $\xi/z \leq l_\mu/z \ll 1$ , а для першого доданка, що залишився, область інтегрування можна розширити до  $\infty$ . Ввівши, за визначенням,

$$\int_0^\infty K_\mu(\xi) d\xi = l_\mu \quad (15.56)$$

радіус кореляції неоднорідностей  $l_\mu$ , отримаємо

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{2} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.57)$$

Схематично залежність дисперсії флуктуацій фази  $\sigma_S^2$  від довжини шляху  $z$ , який хвиля проходить у неоднорідному середовищі, наведено на рис. 15.4.

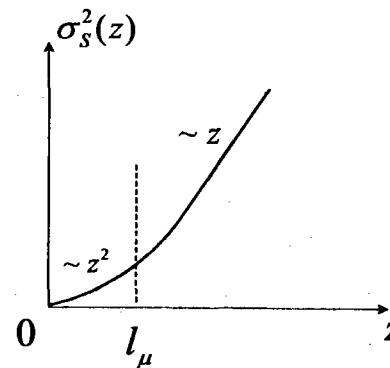


Рис. 15.4

### Якісні оцінки

Наприкінці цього розділу отримаємо деякі зі знайдених вище формул за допомогою простих міркувань якісного характеру.

З наближення геометричної оптики випливає, що фаза хвилі, яка прийшла у точку спостереження, дорівнює добутку модуля хвильового вектора  $k$  на оптичну довжину променя (ейконал)  $\varphi$ :  $S = k\varphi$ , де  $\varphi$  визначається шляхом інтегрування показника заломлення  $n$  вздовж променя  $\vec{R}(s)$ , що проходить через точку спостереження  $\vec{R} = (x, y, z)$ . Для малих флуктуацій показника заломлення інтегрування можна наближено проводити вздовж спрямленого променя (див. формулу (15.48) та рис. 15.5). Припустимо, що довжина  $z$  спрямленого променя набагато перевищує характерні розміри неоднорідностей  $l_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).

Це означає, що на промені вкладається достатньо велика кількість неоднорідностей ( $N \approx z/l_m \gg 1$ ).

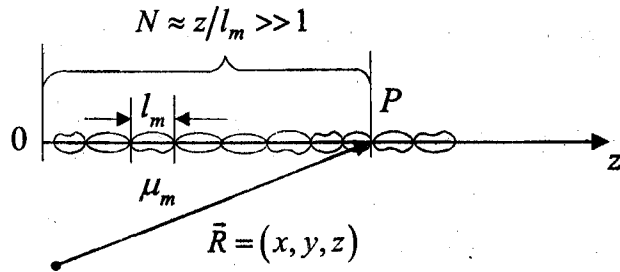


Рис. 15.5

Після проходження  $m$ -ї неоднорідності відбувається набігання фази хвилі, що дорівнює

$$S_m \approx k\sqrt{\varepsilon} l_m \approx k\sqrt{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon_{1m}}{2\varepsilon}\right) l_m = k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m, \text{ де } k_\varepsilon = k\sqrt{\varepsilon},$$

а  $\mu_m = \varepsilon_{1m}/\varepsilon$  – випадкове значення відносної флуктуації. Повна фаза хвилі  $S$  після проходження всієї траси довжиною  $z$  є сумою всіх локальних складових:

$$S = \sum_{m=1}^N S_m = \sum_{m=1}^N \left( k_\varepsilon l_m + \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \right). \quad (15.58)$$

З одного боку, сума  $\sum k_\varepsilon l_m = k_\varepsilon \sum l_m \approx k_\varepsilon N l_m \approx k_\varepsilon z$  — не що інше, як регулярне набігання фази хвилі  $\bar{S}$  вздовж всієї траси, а з іншого — доданки

$$\delta S_m = \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \quad (15.59)$$

є випадковими набіганнями фаз на окремих неоднорідностях середовища. Величину  $S_1 = \sum \delta S_m$  можна розглядати як суму (в граничному випадку — інтеграл) великої кількості  $N \approx z/l_m \gg 1$  некорельованих доданків  $\delta S_m$ . Тепер вважаємо, що всі неоднорідності приблизно однакові:  $\mu_m \approx \mu$  і  $l_m \approx 2l_\mu$  (тут  $l_\mu$ , як і раніше, — характерний масштаб спадання автокореляційної функції  $B_\mu(z)$ ) і, отже, величину  $\delta S_m$  можна оцінити як

$$\delta S_m \approx \frac{k_\varepsilon}{2} \mu_m l_m \approx k_\varepsilon \mu l_\mu. \quad (15.60)$$

З урахуванням того, що  $\langle \mu \rangle = 0$ , середнє набігання фази на одній неоднорідності  $\langle \delta S_m \rangle = 0$ . Дисперсія флуктуацій фази на одній неоднорідності приблизно дорівнює

$$\sigma_{S_m}^2 = \langle (\delta S_m)^2 \rangle \approx k_\varepsilon^2 \langle \mu^2 \rangle l_\mu^2 = k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2. \quad (15.61)$$

Між собою випадкові набігання фази не корелюють, тому сумарна дисперсія фази хвилі після проходження всієї траси дорівнює сумі дисперсій на окремих неоднорідностях:

$$\sigma_S^2 = \sum_{m=1}^N \sigma_{S_m}^2 \approx k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu^2 N \approx \frac{k_\varepsilon^2}{2} \sigma_\mu^2 l_\mu z. \quad (15.62)$$

У (15.62) ми врахували, що  $N \approx z/l_m = z/2l_\mu$ . Видно, що внаслідок якісних міркувань і оцінок ми отримали результат, що точно збігається зі строгим розрахунком (15.57). На підставі центральної граничної теореми можна стверджувати, що  $S_1 = \sum \delta S_m$  має нормальний розподіл.

Ще одну якісну оцінку проведемо для дисперсії флуктуацій кутів приходу променів у результаті багаторазових заломлень на неоднорідностях. У малокутовому наближенні вектор нормалі  $\vec{t} = \vec{\nabla} S / |\vec{\nabla} S| = \vec{\nabla} \varphi / |\vec{\nabla} \varphi|$  до фазового фронту хвилі наближено дорівнює  $\vec{t} \approx \vec{t}_0 + \vec{t}_1$ , де  $\vec{t}_0 = \vec{\nabla} \bar{S} / |\vec{\nabla} \bar{S}|$  — регулярний вектор, а  $\vec{t}_1 = \vec{\nabla}_\perp S_1 / k_\varepsilon$  — випадковий малий доданок, ортогональний до незбуреного напрямку променя  $\vec{t}_0$  (див. (15.22)). З урахуванням подання  $S_1 = \sum \delta S_m$ , де  $\delta S_m$  визначається формулою (15.59), випадкове результуюче відхилення променя  $\vec{t}_1$  також можна подати у вигляді суми:

$$\vec{t}_1 = \sum_{m=1}^N \delta \vec{t}_m, \quad (15.63)$$

де  $\delta \vec{t}_m \approx \frac{\vec{\nabla}_\perp (\delta S_m)}{k_\varepsilon} \approx \frac{l_m}{2} \vec{\nabla}_\perp \mu_m \approx l_\mu \vec{\nabla}_\perp \mu$  — характерна величина випадкового кута відхилення на  $m$ -й неоднорідності. З урахуванням того, що  $\langle \mu \rangle = 0$ , отримуємо  $\langle \delta \vec{t}_m \rangle = 0$  і, отже,  $\langle \vec{t}_1 \rangle = 0$ . Окремі акти заломлення некорельовані, звідси сумарна дисперсія кута відхилення променя  $\sigma_t^2 = \langle \vec{t}_1^2 \rangle$  від його початкового напрямку  $\vec{t}_0$  дорівнює сумі дисперсій  $\sigma_{t_m}^2$ :  $\sigma_t^2 = \sum \sigma_{t_m}^2 \approx \sigma_{t_m}^2 N$ , де

$$\sigma_{t_m}^2 = \langle \delta \vec{t}_{1m}^2 \rangle \approx \frac{l_m^2}{4} \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu_m)^2 \rangle = l_\mu^2 \langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle. \quad (15.64)$$

Скориставшись оцінкою, що є справедливою тільки для ізотропного поля флуктуацій, —

$\langle (\vec{\nabla}_\perp \mu)^2 \rangle \approx \langle \mu^2 \rangle / l_\mu^2 = \sigma_\mu^2 / l_\mu^2$  і враховуючи, що  $N \approx z/2l_\mu$ , остаточно отримаємо

$$\sigma_t^2 \approx \frac{\sigma_\mu^2}{2l_\mu} z. \quad (15.65)$$

## 15.6. Область застосування методу геометричної оптики

1. Одна з умов застосування МГО полягає у вимозі плавного характеру зміни параметрів середовища:

$$l_\mu \gg \lambda. \quad (15.66)$$

2. Формули МГО не враховують дифракційних ефектів. Можливість такого нехтування покажемо на прикладі наступного якісного міркування. Якщо неоднорідність середовища  $\mu$  з

характерним розміром  $l_\mu$  освітлюється плоскою хвилею, то розмір її геометричної тіні не залежить від відстані і дорівнює  $l_\mu$  (див. рис. 15.6.).

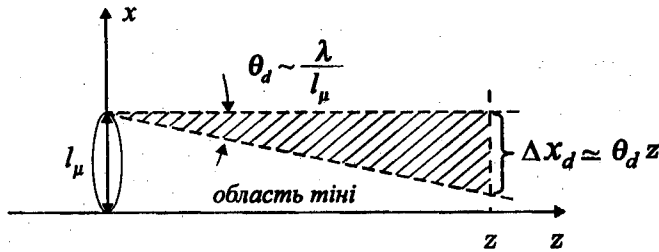


Рис. 15.6

Дифракція ж хвилі призводить до „розпливання” різких меж тіні. Розмір  $\Delta x_d$  перехідної області світло-тінь на віддалі  $z$  від неоднорідності можна наближено оцінити як  $\Delta x_d \approx \theta_d z$ , де  $\theta_d \sim \lambda/l_\mu$  — кут дифракції хвилі. Нехтування дифракцією можливе тільки якщо розмір дифракційної області  $\Delta x_d$  значно менший порівняно з розміром області геометричної тіні  $l_\mu$ . У результаті, отримаємо умову  $\Delta x_d \ll l_\mu$ , яка приводиться до вигляду  $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$ . Таким чином, розмір першої зони Френеля ( $\sqrt{\lambda z}$ ) має бути набагато меншим за характерний розмір неоднорідності  $l_\mu$ :

$$\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu. \quad (15.67)$$

3. Застосовуючи метод збурень для розрахунку флуктуацій фази й амплітуди хвилі, ми скористалися тим, що флуктуації показника заломлення середовища малі:  $\sigma_\epsilon \ll \bar{\epsilon}$ , ( $\sigma_\mu \ll 1$ ) і обмежилися тільки лінійним наближенням, відкидаючи доданки другого порядку малості відносно  $\sigma_\epsilon$ . Умови, за яких

можна знехтувати членами другого порядку малості, зводяться до вимоги малості дисперсії рівня амплітуди  $\chi = \ln(A/\hat{A})$ :

$$\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \bar{\chi})^2 \rangle \ll 1, \quad (15.68)$$

що еквівалентно (за малих  $\sigma_\chi$ ) умові  $\sigma_A \ll \bar{A}$ . Помітні флуктуації рівня  $\chi$  настають вочевидь там, де промені починають перетинатися й утворюються випадкові фокуси та каустики. Таким чином, МГО не працює поблизу фокальних утворень.

4. Наступна умова пов'язана з вимогою однопроменевості (ми, по суті, знехтували викривленням променів і можливістю приходу в точку спостереження не одного, а кількох променів). Крім цього, в результаті багаторазових заломлень на неоднорідностях можливі відхилення променя на великі кути  $\bar{i}$  відносно початкового напрямку  $\bar{i}_0$  і навіть поява променів, що поширюються у протилежному напрямку. Вимогу малості характерних кутів розсіювання (до якої зводиться й умова однопроменевості, і можливість нехтування зворотним розсіюванням) з урахуванням отриманої раніше оцінки (15.65) можна записати у вигляді нерівності

$$\sigma_i^2 \approx \sigma_\mu^2 \frac{z}{2l_\mu} \ll 1. \quad (15.69)$$

Під час розв'язання конкретної задачі у наближеннях МГО або МПВ необхідно слідкувати за тим, щоб ми не виходили за межі області застосування цих методів. Залежно від виду  $\epsilon(\vec{R})$  і геометрії задачі, превалюючою серед чотирьох зазначених вище вимог може бути та чи інша. Наприклад, в оптичному діапазоні ( $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$  см) для атмосфери Землі найбільш критичною є вимога 2. Умова  $\sqrt{\lambda z} \ll l_\mu$  виконується тільки для дистанцій  $z \leq 200$  м.

**Коментарі**

Лінійна залежність  $\sigma_S^2$  від  $z$  у розглядуваному випадку  $z \gg l_\mu$  є результатом додавання великої кількості некорельованих між собою набігань фази  $\delta S_m$  на кожній неоднорідності. Якщо формально розглядати  $z$  не як просторову координату, а як час  $t$ , то характер залежності  $\sigma_S^2 \sim t$ , як ми бачили у попередніх параграфах, є ознакою дифузійних процесів. Згідно із цим же законом, від часу залежить дисперсія флуктуації координати  $x$  броунівської частинки  $\sigma_x^2 \sim t$  (9.37), а також дисперсія  $\sigma_\varphi^2$  флуктуацій фази в автогенераторі як функція „повільного” часу  $\theta$  (12.53 б). Хоча ці процеси мають зовсім різну фізичну природу, всі вони описуються дуже схожими динамічними рівняннями.

**ЗАДАЧІ**

1. Коефіцієнт кореляції флуктуацій показника заломлення має гауссову форму

$$K_\mu(\rho) = e^{-\rho^2/l_\mu^2}, \quad (1)$$

де  $\vec{\rho} = \vec{R}' - \vec{R}''$  — тривимірний різницевий вектор. Розрахувати дисперсію флуктуацій фази  $\sigma_S^2$  і показати, що на малих трасах  $\sigma_S^2 \sim z^2$ , а на великих —  $\sigma_S^2 \sim z$ .

**Розв'язок.** Скористаємося формулою (15.54) для дисперсії флуктуацій фази, у якій  $K_\mu(\xi) = K_\mu(\rho_x = 0, \rho_y = 0, \rho_z = \xi) = K_\mu(0, 0, \xi)$  — коефіцієнт кореляції (нормована кореляційна функція), що розглядається у суміщених точках ( $x' = x''$ ,  $y' = y''$ ) у

поперечному до променя напрямку і в рознесених ( $\xi = \rho_z = z' - z''$ ) — у поздовжньому (вздовж променя). Згідно з визначенням (1), маємо

$$K_\mu(\xi) = \exp\left\{-\frac{\xi^2}{l_\mu^2}\right\}. \quad (2)$$

З урахуванням (2), формула (15.54) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(z) &= \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \int_0^z \left(1 - \frac{\xi}{z}\right) e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = \\ &= \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left[ \int_0^z e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi - \int_0^z \frac{\xi}{z} e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Перший інтеграл у (3) після заміни змінних  $x = \xi/l_\mu$  приводиться до стандартного вигляду інтеграла ймовірностей:

$$\int_0^z e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = l_\mu \int_0^{z/l_\mu} e^{-x^2} dx = l_\mu \Phi(z/l_\mu). \quad (4)$$

Другий інтеграл легко обчислюється

$$\frac{1}{z} \int_0^z \xi e^{-\xi^2/l_\mu^2} d\xi = \frac{l_\mu^2}{z} \int_0^{z/l_\mu} x e^{-x^2} dx = \frac{l_\mu^2}{2z} \int_0^{z/l_\mu} e^{-t} dt = \frac{l_\mu^2}{2z} \left(1 - e^{-z^2/l_\mu^2}\right). \quad (5)$$

Отже,

$$\sigma_S^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \mu^2 z}{2} l_\mu \left[ \Phi(z/l_\mu) - \frac{l_\mu}{2z} \left(1 - e^{-z^2/l_\mu^2}\right) \right]. \quad (6)$$



Проаналізуємо цей вираз для двох граничних випадків.

**I. Короткі траси** ( $z/l_\mu \ll 1$ ).

Згідно з (4), для малих значень аргументу інтеграл ймовірностей можна наближено записати як

$$\Phi(z/l_\mu) \approx \int_0^{z/l_\mu} (1-x^2)dx = \frac{z}{l_\mu} - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{l_\mu} \right)^3 \approx z/l_\mu. \quad (7)$$

Другий доданок (5) також можна спростити і привести до вигляду

$$\frac{l_\mu}{2z} \left( 1 - e^{-z^2/l_\mu^2} \right) \approx \frac{l_\mu}{2z} \left( 1 - 1 + z^2/l_\mu^2 \right) = z/2l_\mu. \quad (8)$$

З урахуванням (7) і (8), для коротких трас отримаємо таке значення дисперсії:

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 z \sigma_\mu^2}{2} \left( z - \frac{z}{2} \right) = \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2, \quad (9)$$

тобто  $\sigma_s^2 \sim z^2$ .

**II. Довгі траси** ( $z \gg l_\mu$ ).

При  $z \gg l_\mu$  інтеграл ймовірностей  $\Phi(z/l_\mu)$  в (6) можна замінити його граничним значенням, коли  $z/l_\mu \rightarrow \infty$ . При цьому  $\Phi(z/l_\mu)$  переходить в інтеграл Пуассона, який дорівнює  $\sqrt{\pi}/2$ . З іншого боку, в (6) можна знехтувати експонентою  $\left( e^{-z^2/l_\mu^2} \approx 0 \right)$ . У результаті, вираз (6) для дисперсії флуктуацій фази набуває вигляду

$$\sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{l_\mu}{2z} \right) z \approx \frac{\sqrt{\pi} k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z.$$

**2. Визначити залежність від довжини траси  $z$  дисперсії флуктуацій фази  $\sigma_s^2(z)$  плоскої хвилі, що поширюється в неоднорідному статистично ізотропному середовищі з коефіцієнтом кореляції флуктуацій показника заломлення вигляду**

$$K_\mu(\vec{\rho}) = \left( 1 + \frac{\rho^2}{l_\mu^2} \right)^{-1}.$$

Дослідити граничні випадки при

а)  $z \ll l_\mu$  (короткі траси);

б)  $z \gg l_\mu$  (довгі траси).

**Відповідь:**

$$\sigma_s^2(z) = \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu z}{2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{z}{l_\mu} - \frac{l_\mu}{2z} \ln \left( 1 + \frac{z^2}{l_\mu^2} \right) \right]$$

$$\text{а) } \sigma_s^2(z) \approx \frac{k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2}{4} z^2, \quad z \ll l_\mu,$$

$$\text{б) } \sigma_s^2(z) \approx \frac{\pi k_\varepsilon^2 \sigma_\mu^2 l_\mu}{4} z, \quad z \gg l_\mu.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Блиох П.В.* Статистическая радиофизика. — Х.: Рукопись. Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, 1976. — 126 с.
2. *Фукс И.М.* Статистическая радиофизика и теория информации. Препринт. — Х.: ХГУ. — Ч. 1. — 1985. — 60 с.; Ч. 2. — 1986. — 88 с.; Ч. 3. — 1992. — 91 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — 550 с.
4. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
5. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1. Случайные процессы. — 494 с.
6. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2. Случайные поля. — 463 с.
7. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
8. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970. — 384 с.
9. *Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.

### Додаткові джерела

1. *Татарский В.И.* Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
2. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
3. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
5. *Ванштейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960. — 447 с.
6. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 276 с.
7. *Гуткин Л.С.* Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Сов. радио, 1972. — 448 с.
8. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.



*Навчальне видання*

**Мінаков Анатолій Олексійович**  
**Тирнов Олег Федорович**

## СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Частина II Основні поняття теорії ймовірностей.  
Елементи теорії випадкових функцій

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*  
*як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

Редактор *А.М. Цимбал*  
Коректори *Н.А. Балабуха, О.О. Шапошникова*  
Комп'ютерна верстка *В.А. Паланський*

Підписано до друку 05.12.2007. Формат 60х90/16. Папір офсетний.  
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Ум. друк: арк. 11,0. Обл.-вид. арк. 14,3.  
Тираж 3500 прим. Зам. №1897/088.

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006  
6164, м. Харків, вул. Бакуніна, 8а

Адреса редакції: 61145, м. Харків, вул. Космічна, 21а.  
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Віддруковано у ТОВ «Навчальний друк»  
Україна, 62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.  
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК №58 від 10.06.2002 р.