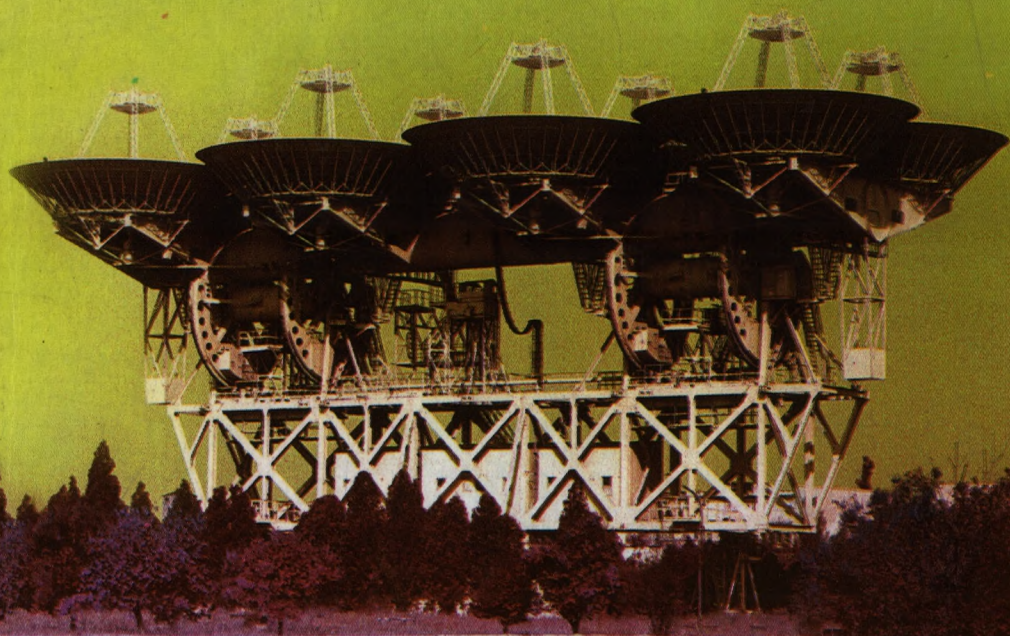


32.84.2 73

М 62

**А. О. Мінаков
О. Ф. Тирнов**



СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Частина I

За основу підручника, який складається з трьох частин, став курс лекцій зі статистичної радіофізики, що викладається у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна. Уперше цей курс було прочитано понад тридцять років тому професором кафедри космічної радіофізики П.В. Бліохом. У 1980-ті роки професор цієї ж кафедри І.М. Фукс доповнив лекційний курс розділами з розсіювання електромагнітних хвиль на випадкових поверхнях. Починаючи з 1998 р. суттєво перероблений і доповнений курс читається авторами підручника.

Без сумніву, охопити широке коло питань, що належать до статистичної радіофізики, неможливо. Головна мета авторів — стисло, строго і логічно викласти матеріал відповідно до сучасних стандартів освіти. Книги написано у самодостатній формі таким чином, щоб під час вивчення курсу у студента не виникало необхідності звертатися до додаткових літературних джерел. Окрім цього, на прикладах простих фізичних моделей отримано формули і виведено закони, що мають загальний характер і широкий спектр застосування.

У частині I викладено основні поняття теорії ймовірностей та елементів теорії випадкових функцій.

Автори висловлюють подяку фаховому редактору — акад.

НА [REDACTED] проф. В.М. Шутьзі; рецензен-

там [REDACTED] а-

фе [REDACTED] го

аер [REDACTED] й

ав [REDACTED] е-

ле [REDACTED] ні

за [REDACTED] у,

на [REDACTED]

А. О. Мінаков О. Ф. Тирнов

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Частина I. Основні поняття теорії ймовірностей.
Елементи теорії випадкових функцій

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

НБ ПНУС



733523

Харків
«Веста»
2007

УДК 538.56
ББК 32.84я73
М62

1.4/18- -1476.1 06.09.2007)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено.

Редактор за спеціальністю — В. М. Шульга, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, лауреат Державної премії України, завідувач відділу Радіоастрономічного інституту НАН України

Рецензенти:

Кафедра прийому, передачі та обробки сигналів Національного аерокосмічного університету ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» (завідувач — доктор технічних наук, професор О. О. Зеленський);
В. Б. Рассказовський, доктор технічних наук, професор, лауреат премії АН України ім. акад. К. Д. Синельникова, завідувач відділу Інституту радіофізики і електроніки ім. О. Я. Усикова НАН України

Statistical Radio Physics provides a rigorous, condensed and logical treatment of the subject and meets high education standards. The textbook is written in a self-consistent manner, and no additional literature is required to have the subject studied. Simple physical models are used to derive the formulae and laws that are general in nature and of much practical use. There are problems that illustrate the theory and others that apply the theory to issues of current interest in order to facilitate the assimilation of the material.

The book has been planned for MS and Ph.D. students and as a reference book for researchers.

Мінаков А. О., Тирнов О. Ф.

М62 Статистична радіофізика: Підруч. для студ. вищ. навч. закл.: У 3 ч. — Х.: Веста, 2007. — Ч. 1: Основні поняття теорії ймовірностей. Елементи теорії випадкових функцій. — 2007. — 192 с.
ISBN 978-966-08-3051-6
ISBN 978-966-08-3052-3 (ч. 1)

Частина I підручника є викладом основних понять теорії ймовірностей та елементів теорії випадкових функцій. Книгу написано в самодостатній формі, що не потребує використання додаткової літератури. Теоретичний матеріал супроводжуються типовими прикладами, які полегшують розуміння та засвоєння матеріалу.

Призначається для студентів старших курсів, аспірантів і наукових співробітників радіофізичних та радіотехнічних спеціальностей університетів.

Харківський національний університет
імені Василя Стефаника
код 02125266

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

ISBN 978-966-08-3051-6 5 3523
ISBN 978-966-08-3052-3 (ч. 1)

УДК 538.56
ББК 32.84я73

© Мінаков А. О., Тирнов О. Ф., 2007
© Видавництво «Веста», 2007

Зміст

Вступ 5

Розділ I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Випадкові події 7
 Задачі 14

§ 2. Випадкові величини 15
 2.1. Неперервні випадкові величини 16
 2.2. Дискретні випадкові величини 18
 2.3. Моменти випадкових величин 22
 2.4. Характеристична функція 26
 Задачі 27

§ 3. Закони розподілу випадкових величин 31
 3.1. Рівномірний розподіл 31
 3.2. Біномний розподіл. Схема Бернуллі 33
 3.3. Розподіли Пуассона і Лапласа 38
 Задачі 42

§ 4. Сукупність випадкових величин і функції випадкових аргументів 44
 4.1. Властивості інтегральної функції і густини розподілу ймовірностей 45
 4.2. Умовні функції розподілу 48
 4.3. Початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин 51
 4.4. Функціональні перетворення випадкових величин 53
 4.5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей 60
 4.6. Нормальний розподіл 65
 Задачі 70

Розділ II. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

§ 5. Випадкові функції	74
5.1. Інтегральна функція і густина розподілу ймовірностей	75
5.2. Моменти випадкового процесу	78
5.3. Стаціонарні випадкові процеси	80
5.4. Процеси зі стаціонарними прирощеннями	85
5.5. Ергодічні процеси	88
Задачі	91
§ 6. Спектральний аналіз випадкових процесів	94
6.1. Енергетичний спектр стаціонарного процесу. Формула Вінера—Хінчина	95
6.2. Аналітичний сигнал	105
6.3. Кореляційні функції та енергетичні спектри аналітичного сигналу	110
6.4. Приклади спектральних розподілів	114
6.5. Комплексна обвідна аналітичного сигналу	121
Задачі	124
§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів	126
7.1. Математичний опис лінійних систем	127
7.2. Зв'язок між моментами у лінійних системах	130
7.3. Спектральний аналіз лінійних систем з постійними параметрами	132
7.4. Приклади найпростіших лінійних перетворень	135
7.5. Перетворення випадкових процесів у радіотехнічних колах	141
Задачі	154
§ 8. Сумісна дія сигналу і шуму на лінійну систему	167
8.1. Узагальнений гармонійний аналіз детермінованих процесів	167
8.2. Проходження гармонійного сигналу і шуму через лінійну систему зі сталими параметрами	170
8.3. Оптимальний лінійний фільтр для сигналів скінченної тривалості	176
8.4. Виділення сигналу з шуму. Рівняння Вінера—Хопфа	180
8.5. Оптимальні фільтри і корелятори	187
Задачі	189
Література	192

Вступ

Останнім часом відзначається бурхливий розвиток радіофізики і широке упровадження її методів в астрофізику, біофізику, техніку тощо. При розв'язанні багатьох технічних задач генерації, випромінювання, поширення і прийому радіохвиль, виникає необхідність створення джерел електромагнітних коливань великої потужності і високої стабільності у широкому діапазоні довжин хвиль (від часток мікрона до десятків кілометрів), антен із гранично вузькими діаграмами спрямованості, високочутливих приймачів. Створення таких пристроїв неможливе без переходу до принципово нових методів генерації, прийому, реєстрації і обробки сигналів. Проте поліпшення характеристик радіотехнічних пристроїв не завжди веде до бажаного ефекту: на певному етапі кількісні зміни досягають тієї межі, за якою виникають якісно нові явища, і починають відігравати свою роль якісно нові чинники і закономірності — статистичні.

Загальною вимогою до будь-якої радіотехнічної системи є достовірне і своєчасне отримання великого об'єму інформації з випромінювання із обмеженою енергетикою. Цьому протидіють, по-перше, спотворення сигналів при їх поширенні у реальних середовищах, по-друге, власні шуми радіотехнічних пристроїв, і, нарешті, технічна недосконалість пристроїв. Якщо спотворення сигналу за рахунок недосконалості пристрою можна знизити, то вплив випадкових завад повністю виключити неможливо, оскільки завади, зумовлені фізичними процесами, невіддільні від них. У результаті виявляється, що найкраще відновлення корисної інформації за спотвореним сигналом неможливе без застосування методів статистичної радіофізики.

Точніше визначення кутових координат джерела випромінювання відбувається за допомогою антени з більш вузькою діаграмою спрямованості. Як правило, звуження діаграми досягається збільшенням лінійних розмірів антени. Проте ця залежність справджується доти, доки не починають виявлятися різноманітні випадкові чинники: неточності у виготовленні самої антени, її температурні та вітрові деформації, просторові неоднорідності показника заломлення оточуючого середовища і підстилаючої поверхні. Внаслідок цього ми знову повертаємося до ситуації, коли подальше збільшення кутової роздільної здатності антени неможливе без застосування статистичної теорії.

Особливо наочно виявляється вплив випадкових факторів на поширення радіохвиль у реальних умовах. Тут ми практично ніколи не стикаємося з тими простими закономірностями, які впливають із суворих розв'язань задач дифракції методами математичної фізики у традиційних курсах теорії поля або класичної електродинаміки (поширення хвиль над імпедансною площиною або сферою, дифракція на клині або циліндрі, заломлення у плоскошаруватих або сферичношаруватих середовищах та ін.). Реальні середовища, в яких поширюються радіохвилі, непомірно складніші. Просторові й часові варіації їхнього показника заломлення і форми меж поділу мають випадковий характер. Це призводить до того, що випадковим чином змінюється у просторі і в часі напрямок поширення й поляризація радіохвиль, виникають випадкові зміни амплітуди і фази радіосигналів, що приймаються. Аналіз впливу на корисний сигнал перелічених факторів неможливий без застосування методів статистичної радіофізики.

Після зазначеного може скластися враження, що застосування статистичних методів у радіофізиці виправдане лише в деяких екстремальних, екзотичних ситуаціях (надспрямовані антени, сильно неоднорідні середовища, надчутливі приймачі тощо), а в решті випадків, не ризикуючи припуститися серйозної помилки, можна користуватися методами і результатами класичної радіофізики (нестатистичної, детермінованої). Насправді ж ця межа досить розмита і значною мірою умовна: елемент випадковості або статистичної невизначеності присутній у всіх без винятку явищах і законах фізики взагалі і радіофізики зокрема. Питання тільки в тому, з якого рівня цю невизначеність слід брати до уваги і враховувати при розв'язанні конкретних задач.

Широке коло задач, для розв'язання яких застосовуються методи статистичної радіофізики, потребує правильного уявлення про самий характер їх. По-перше, мова завжди йде про поведінку макроскопічних систем, тобто систем із великою кількістю ступенів вільності, по-друге, метою дослідження є не точне передбачення значень певної макроскопічної величини (сили струму в колі або кута надходження радіохвиль), а розрахунок лише тих параметрів флуктуацій цих величин, які є стійкими (повторюваними) при заданих зовнішніх умовах.

РОЗДІЛ I ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Випадкові події

Об'єктом вивчення теорії ймовірностей є випадкові події. Як найпростішу модель випадкової події можна розглядати, наприклад, випадання „орла” або „решки” при киданні монети (випадання заданої кількості очок при киданні гральних костей, утворення певних комбінацій гральних карт тощо).

Вивчення закономірностей, пов'язаних навіть із цими найпростішими моделями, дає змогу розв'язувати досить складні задачі радіофізики і радіотехніки, де як випадкові події можна розглядати, наприклад такі: перевищення шумовим сигналом $I(t)$ заданого порогового значення I_0 ; проходження $I(t)$ через нуль (випадкова подія полягає у зміні знака I); входження значення $I(t)$ в заданий інтервал dI (рис. 1.1);

На відміну від не випадкової (детермінованої) події, яка в результаті проведеного дослідження обов'язково відбувається або обов'язково не відбувається, випадкова подія A (події далі позначатимемо великими літерами латинського алфавіту) у цьому досліді може відбутися, а може й не відбутися. Це означає, що коли в однакових умовах проводиться серія з N дослідів, то кількість дослідів N_A , в яких подія A відбулася, може набувати, загалом, будь-якого значення з інтервалу

$$0 \leq N_A \leq N. \quad (1.1)$$

Для детермінованої події A при будь-якій великій кількості дослідів N обов'язково реалізується одна з двох можливостей: або

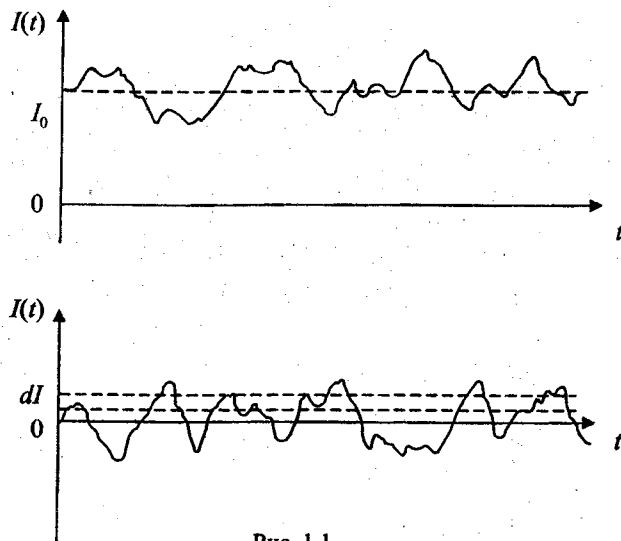


Рис. 1.1

$N_A = 0$ (неможлива подія), або $N_A = N$ (достовірна подія).

Відношення

$$N_A/N = \nu_A \quad (1.2)$$

називається **частотою** появи події A , а досліди, що послідовно проводяться, називають випробуваннями. Для випадкових подій частота ν_A при великій кількості дослідів ($N \gg 1$) виявляється стійкою величиною: чим більше дослідів ми проводимо (чим довша серія випробувань), тим щільніше виміряні значення ν_A групуються навколо якогось цілком визначеного значення, яке позначається $P\{A\}$ і називається **ймовірністю** події A . Слід підкреслити, що $P\{A\}$ — не є границею ν_A при $N \rightarrow \infty$: адже ν_A — емпірично визначена (виміряна в досліді) величина, тоді як поняття „границя” належить тільки до об’єктів математичного аналізу, тобто до абстрактних понять. Тому вимірювання частоти ν_A можна розглядати тільки як емпіричний спосіб визначення деякої

абстрактної математичної величини $P\{A\}$. Стійкість ν_A при $N \gg 1$ свідчить про те, що ми дійсно маємо справу із випадковою подією A , частота ν_A появи якої визначається її ймовірністю $P\{A\}$ тим точніше, чим довша серія випробувань N . Тут можна говорити про випадкові події як про передбачувані на відміну від непередбачуваних подій, частота появи яких при великих N не є стійкою і для яких, відповідно, не можна ввести поняття ймовірності.

Звернемося до прикладу з вимірюванням струму в найпростішому колі, що демонструє справедливості закону Ома. Грубий прилад дає цілком визначені значення струму $I = \bar{I} = U/R$ при заданих напруги U та опору R — жодних випадковостей немає, всі події детерміновані. Дуже точний прилад, що характеризується високою чутливістю, фіксує відхилення струму від того середнього значення, яке показує грубий прилад, — ці відхилення можна розглядати як випадкові події (флуктуації). Покази несправного приладу (з поганим контактом в електричному колі гальванометра або з механічними несправностями — значним тертям у підвісці, стрілкою, що „заїдає” тощо) є непередбачуваними — вони жодним чином не пов’язані зі справжніми флуктуаціями струму в колі (що мають, як ми побачимо, цілком певну фізичну природу), а визначаються тільки несправностями приладу.

Із формули (1.2) випливає, що $0 \leq \nu_A \leq 1$, і, отже, ймовірність $P\{A\}$ — є невід’ємною (дійсною) величиною, що не перевищує одиницю:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1. \quad (1.3)$$

Ймовірність неможливої події $P\{A\} = 0$ (оскільки $N_A = 0$ при будь-якому N , отже, $\nu_A = 0$); ймовірність достовірної події $P\{A\} = 1$ (оскільки $N_A = N$ і $\nu_A = 1$). Зворотні твердження, загалом, хибні: якщо $P\{A\} = 0$, то це ще не означає, що $N_A = 0$! Тобто подія A , ймовірність $P\{A\}$ якої дорівнює нулю, може іноді

відбуватися, проте так рідко, що при $N \rightarrow \infty$ $\nu_A \rightarrow 0$. Про такі події говорять як про події з “ймовірнісною мірою нуль” на відміну від подій, які справді ніколи не відбуваються.

Якщо в результаті досліду може відбутися не одна, а декілька подій A_1, A_2, \dots, A_k , то говорять про **сукупність** або **групу випадкових подій** (випадання певних комбінацій очок при одночасному киданні кількох гральних костей; колір і старшинство гральної карти, навмання взятої з колоди тощо). У радіофізиці такою сукупністю подій може виступати, наприклад, прийом сигналу фіксованої амплітуди A_1 певної поляризації A_2 із заданого напрямку A_3 тощо. Це приклади сукупності **спільних** (або **сумісних**) подій – внаслідок досліду вони можуть відбуватися одночасно на відміну від **несумісних** (взаємно виключених) подій, які одночасно відбуватися не можуть. Прикладами несумісних подій можуть бути випадання „орла” або „решки” в одному кидку, влучення або промах під час одного пострілу, вилітання і невилітання електрона за малий проміжок часу та ін.

Визначення

1. Сумою двох подій A_1 і A_2 називають подію $S = A_1 + A_2$, яка полягає в тому, що в результаті досліду відбувається хоча б одна (незалежно яка) з подій A_1 або A_2 або A_1 і A_2 . Якщо події A_1 і A_2 несумісні, то $S = A_1 + A_2$ — подія, що полягає в появі однієї з подій A_1 або A_2 (незалежно якої). Звідси випливає, що ймовірність появи однієї з двох несумісних подій A_1 і A_2 дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ або } A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}.$$

Узагальнивши цю формулу для випадку k попарно несумісних подій A_i ($i = 1, 2, \dots, k$), отримаємо

$$P\{S\} = P\{A_1 \text{ або } A_2 \dots \text{ або } A_k\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.4)$$

Сукупність несумісних подій A_i ($i = 1 \div k$) утворює **повну групу**, якщо внаслідок досліду обов'язково відбувається одна з них, тобто якщо сума S є достовірною подією:

$$P\{S\} = \sum_{i=1}^k P\{A_i\} = 1. \quad (1.5)$$

Якщо дві події A_1 і A_2 утворюють повну групу, вони називаються **доповнювальними** (або **протилежними**) подіями. Подія, доповнювальна до A_1 , позначається як $A_2 = \bar{A}_1$. Отже, $S = A_1 + \bar{A}_1$ — достовірна подія, тобто

$$P\{S\} = P\{A_1\} + P\{\bar{A}_1\} = 1. \quad (1.6)$$

Розглянемо тепер дві сумісні події A і B , нехай нам дано ймовірності самих подій $P\{A\}$ і $P\{B\}$, а також ймовірність їх сумісної появи $P\{AB\}$. Ставиться питання: як знайти ймовірність суми подій $S = A + B$?

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P\{S\} = P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.7)$$

Доведення. Подія $A + B$ відбудеться, якщо відбудеться одна із наступних трьох несумісних подій: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ або AB . За правилом додавання ймовірностей несумісних подій (1.4) можна записати:

$$P\{A + B\} = P\{A\bar{B}\} + P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}. \quad (1.8)$$

З іншого боку, подія A настане, якщо настане одна з двох несумісних подій: $A\bar{B}$ або AB . За правилом додавання ймовірностей несумісних подій (1.4) маємо:

$$P\{A\} = P\{A\bar{B}\} + P\{AB\}. \quad (1.9)$$

Звідси знаходимо

$$P\{A\bar{B}\} = P\{A\} - P\{AB\}. \quad (1.10)$$

Аналогічні міркування дають змогу визначити також ймовірність появи події B :

$$P\{B\} = P\{\bar{A}B\} + P\{AB\}, \quad (1.11)$$

звідки отримуємо

$$P\{\bar{A}B\} = P\{B\} - P\{AB\}. \quad (1.12)$$

Підставивши (1.10) і (1.12) у (1.8), отримаємо шукану формулу (1.7).

2. Добутком подій A і B називають подію $M = AB$, яка полягає в тому, що в результаті досліду відбуваються як подія A , так і подія B . Очевидно, що якщо A і B є несумісними, то M — неможлива подія.

Нехай при N випробуваннях подія A відбулася N_A разів, подія B — N_B разів, а у N_{AB} випадках із N мали місце відразу обидві події A і B . Тоді при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ можна записати вирази для ймовірностей:

$$v_A = \frac{N_A}{N} \rightarrow P\{A\}, v_B = \frac{N_B}{N} \rightarrow P\{B\}, v_{AB} = \frac{N_{AB}}{N} \rightarrow P\{AB\}. \quad (1.13)$$

Останній вираз (1.13) визначає ймовірність сумісної реалізації подій A і B .

Відношення N_{AB}/N_A при $N, N_A, N_B, N_{AB} \rightarrow \infty$ буде групуватися навколо деякого числа, яке також можна трактувати як

ймовірність, а саме як умовну ймовірність здійснення події B за умови, що подія A обов'язково мала місце:

$$\frac{N_{AB}}{N_A} \rightarrow P\{B|A\} \text{ або } P_A\{B\}. \quad (1.14)$$

Аналогічно можна записати й умовну ймовірність здійснення події A за умови, що подія B обов'язково має місце:

$$\frac{N_{AB}}{N_B} \rightarrow P\{A|B\} \text{ або } P_B\{A\}. \quad (1.15)$$

Оскільки

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то між умовними і звичайними (або безумовними) ймовірностями має місце наступне співвідношення:

$$P\{M\} = P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\} = P\{B|A\}P\{A\}. \quad (1.16)$$

Умовну ймовірність $P\{A|B\}$ називають ще апостеріорною (або „післядослідною” ймовірністю), а $P\{A\}$ — апіорною („переддослідною”). З (1.16) отримаємо

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \text{ або } P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}. \quad (1.17)$$

Дві події A і B називаються незалежними, якщо умовна ймовірність події $P\{A|B\}$ збігається з „безумовною” $P\{A\}$, тобто ймовірність появи події A не залежить від того, чи відбулася подія B (або, навпаки, ймовірність появи події B не залежить від того, чи відбулася подія A). При цьому з (1.16) випливає, що ймовірність добутку незалежних подій є добутком ймовірностей цих подій

$$P\{M\} = P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}. \quad (1.18)$$

У загальному випадку для довільного числа незалежних подій маємо формулу множення ймовірностей:

$$P\{M\} = P\{A_1 A_2 \dots A_k\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} \dots P\{A_k\} = \prod_{i=1}^k P\{A_i\}. \quad (1.19)$$

ЗАДАЧІ

1. Проводиться прийом кодових комбінацій, що складаються з п'яток цифр від 1 до 5, причому кожна з цифр у окремій комбінації з'являється один єдиний раз, наприклад: 1, 2, 3, 4, 5 або 5, 4, 3, 2, 1 та ін. Яка ймовірність $P\{A\}$ того, що у прийнятій комбінації цифри утворять послідовність 1, 2, 3, 4, 5?

Розв'язок. Із п'яток елементів (цифр 1, 2, 3, 4, 5) шляхом перестановок можна скласти $N = 5!$ різних комбінацій з рівною ймовірністю. Нас цікавить тільки один результат $n=1$: комбінація 1, 2, 3, 4, 5. Його ймовірність дорівнює

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{120}.$$

2. Лінією зв'язку у випадковому порядку з рівною ймовірністю передаються 30 знаків української абетки. Знайти ймовірність $P\{A\}$ того, що з'явиться послідовність букв, яка утворить слово „радіо”.

Розв'язок. Кількість всіх випадків N (кількість вибірок із 30 літер абетки по 5) дорівнює кількості розміщень із 30 по 5, тобто

$$N = A_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26.$$

Із цих випадків сприятливим для події A є тільки один результат, тобто $n = 1$. Отже,

$$P\{A\} = \frac{n}{N} = \frac{1}{A_{30}^5} \approx 5,9 \cdot 10^{-8}.$$

3. Виявлення повітряної цілі виконується незалежно двома радіолокаційними станціями. Ймовірність виявлення цілі першою станцією дорівнює 0,7. Ймовірність виявлення цілі другою станцією дорівнює 0,8. Визначити ймовірність $P\{S\}$ того, що цілі буде виявлена хоча б однією станцією.

Розв'язок. Подія S , що полягає у виявленні цілі, відбудеться, якщо цілі буде виявлена першим локатором (подія A), або другим (подія B), або одночасно двома локаторами (подія AB). Видно, що S є сумою сумісних подій $S = A + B$ і ймовірність її появи визначається формулою (1.7)

$$P\{S\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}.$$

Оскільки події A і B незалежні, $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$. Отже,

$$P\{S\} = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94.$$

§ 2. Випадкові величини

Випадкова подія може розглядатися тільки як якісний результат експерименту, що проводиться за певних умов. Наприклад, якщо струм у колі має вигляд імпульсів, що йдуть один за одним із випадковими інтервалами, то факти наявності або відсутності струму в цей момент є випадковими подіями. Для кількісної характеристики результату експерименту вводиться поняття **випадкової величини**. Для вказаної послідовності імпульсів такою характеристикою може слугувати, наприклад, кількість імпульсів у певному інтервалі часу або кількість перевищень струмом заданого порога за рахунок флуктуацій, зокрема кількість переходів через нульовий рівень (кількість змін знака) тощо. Це приклади **дискретних** випадкових величин – вони набувають лічильної множини значень (їх буквально можна перелічити); ця множина може бути і нескінченною. З іншого боку, результати вимірювань фізичної величини можуть належати

континууму значень, тобто неперервно заповнювати скінчений або нескінчений інтервали дійсної осі. До класу **неперервних** випадкових величин належать, наприклад, тривалість інтервалів часу між імпульсами, миттєві значення флюктуючих струмів і напруг у радіотехнічному колі, швидкості електронів у плазмі, швидкість і координати броунівської частинки (аналогію з пересуванням якої ми використовуватимемо далі для наочності) тощо.

2.1. Неперервні випадкові величини

Нехай неперервна випадкова величина ξ може набувати значення в інтервалі $(a, b]$. Імовірність того, що випадкова величина ξ не перевищує будь-якого заданого задалегідь значення x , називається **функцією розподілу ймовірностей** (або **інтегральною функцією розподілу ймовірностей**) $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}. \quad (2.1)$$

З рис. 2.1 видно, що $F_\xi(x)$ — імовірність випадкової події, що полягає у потраплянні вимірної величини ξ в заштриховану подвійним штрихом область.

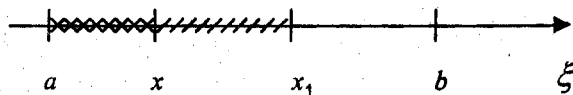


Рис. 2.1

Властивості $F_\xi(x)$

1. Подія $\xi \leq a$ є неможливою подією, а подія $\xi \leq b$ — достовірною. Отже,

$$\begin{aligned} P\{\xi \leq a\} &= F_\xi(a) = 0, \\ P\{\xi \leq b\} &= F_\xi(b) = 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. Доведемо, що в інтервалі $a < x \leq b$ функція $F_\xi(x)$ є монотонною неспадною функцією. Оберемо на осі ξ значення $x_1 > x$ (див. рис. 2.1). Випадкову подію $\xi \leq x_1$ можна розглядати як суму двох несумісних подій $\xi \leq x$ (подвійних штрих) і $x < \xi \leq x_1$ (одинарний штрих). Ця обставина дає змогу застосувати формулу додавання ймовірностей (1.4):

$$P\{\xi \leq x_1\} = P\{\xi \leq x\} + P\{x < \xi \leq x_1\}. \quad (2.3)$$

Враховуючи визначення (2.1) і той факт, що ймовірність P будь-якої події є невід'ємною, маємо

$$F_\xi(x_1) - F_\xi(x) = P\{x < \xi \leq x_1\} \geq 0. \quad (2.4)$$

Таким чином, зі збільшенням x функція розподілу $F_\xi(x)$, у будь-якому разі не спадає. З (2.2) і (2.4) випливає: $F_\xi(x) = 0$ при $-\infty < x \leq a$, $F_\xi(x) = 1$ при $b < x \leq \infty$, а в області $a < x \leq b$ монотонно зростає від нуля (при $x = a$) до одиниці (при $x = b$).

3. Нехай x_1 відрізняється від x на нескінченно малу величину dx ($x_1 = x + dx$). Тоді з (2.4) випливає:

$$P\{x < \xi \leq x + dx\} = F_\xi(x + dx) - F_\xi(x) \equiv W_\xi(x) dx, \quad (2.5)$$

де ми ввели **густину розподілу ймовірності** $W_\xi(x)$ випадкової величини ξ :

$$W_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \quad (2.6)$$

4. З визначення (2.5) видно, що $W_\xi(x) dx$ є ймовірність того, що випадкова величина ξ набуває значення на інтервалі $x < \xi \leq x + dx$. Інтегруючи (2.6) з урахуванням умови $F_\xi(-\infty) = 0$, маємо

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x W_{\xi}(x') dx'. \quad (2.7)$$

5. Імовірність потрапляння ξ у кінцевий інтервал $x_1 < \xi \leq x_2$, згідно з (2.4) і (2.7) дорівнює

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W_{\xi}(x) dx. \quad (2.8)$$

Властивості $W_{\xi}(x)$

Із наведених властивостей $F_{\xi}(x)$ і формул (2.6) і (2.7) випливає, що

- 1) $W_{\xi}(x)$ — **фінітна функція**, що тотожно перетворюється у нуль поза інтервалом $a < x \leq b$;
- 2) невід'ємна функція всередині вказаного інтервалу ($W_{\xi}(x) \geq 0$);
- 3) площа під нею дорівнює одиниці (умова **нормування**):

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = F_{\xi}(\infty) = 1. \quad (2.9)$$

На рис. 2.2 схематично зображені можливі графіки функцій $F_{\xi}(x)$ і $W_{\xi}(x)$. Імовірність того, що випадкова величина ξ набуває значення з інтервалу $x_1 < \xi \leq x_2$, дорівнює заштрихованій площині.

2.2. Дискретні випадкові величини

Нехай тепер випадкова величина ξ може набувати тільки дискретних значень $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ з імовірностями $P\{\xi = x_i\} = p_i$. Нехай події $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) несумісні.

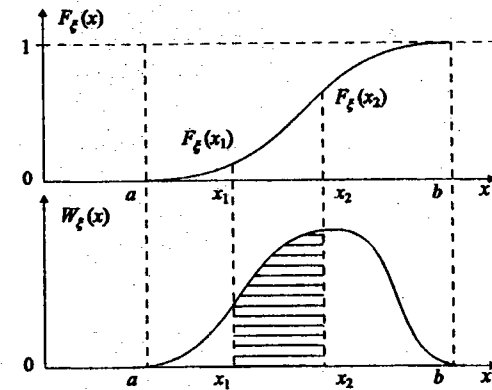


Рис. 2.2

Для будь-якого наперед заданого значення x складна подія $\xi \leq x$ настає тоді і тільки тоді, коли ξ набуває одного зі значень $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), де значення k визначається із наступної нерівності:

$$x_k \leq x < x_{k+1}. \quad (2.10)$$

Скориставшись правилом підсумовування ймовірностей для несумісних подій, отримуємо для функції розподілу ймовірностей наступну формулу:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi = x_1 \text{ або } \xi = x_2 \text{ або } \dots \text{ або } \xi = x_k\} = \sum_{i=1}^k p_i. \quad (2.11)$$

Введемо у розгляд одиничну східчасту функцію (функцію Хевісайда):

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Тоді формулу (2.11) можна переписати у вигляді

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i h(x - x_i). \quad (2.13)$$

Доданки з $i > k$ випадають із суми (2.13) у зв'язку з умовами (2.10) і (2.12).

Визначивши густину розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$ як похідну від $F_{\xi}(x)$ (див. (2.6)), з (2.13), отримуємо

$$W_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i), \quad (2.14)$$

де введено $\delta(x - a)$ — дельта-функція Дірака

$$\delta(x - a) = \frac{d}{dx} h(x - a). \quad (2.15)$$

Основні властивості δ -функції:

1. Вона дорівнює нулю всюди, крім точки $x = a$ (де її аргумент дорівнює нулю), а у точці $x = a$ набуває нескінченного значення:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq a; \\ \infty, & \text{якщо } x = a. \end{cases} \quad (2.16)$$

2. Функція парна $\delta(-x) = \delta(x)$.

3. „Площа” під δ -функцією скінченна і дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (2.17)$$

4. Правило інтегрування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (2.18)$$

Формула (2.17) є випадком (2.18) при $f(x) = 1$.

Наведемо декілька найуживаніших граничних подань для δ -функції:

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x - a)^2}; \quad (2.19 \text{ а})$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\varepsilon^2}}, \quad (2.19 \text{ б})$$

$$\delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \sin[\varepsilon(x - a)]}{\pi \varepsilon(x - a)}. \quad (2.19 \text{ в})$$

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-a)} d\omega. \quad (2.19 \text{ г})$$

З останнього співвідношення і умови парності легко довести, що

$$\delta[b(x - a)] = \frac{1}{|b|} \delta(x - a) \quad \text{або} \quad \delta(bx - a) = \frac{1}{|b|} \delta\left(x - \frac{a}{b}\right). \quad (2.20)$$

Оскільки події $\xi = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) утворюють повну групу (в результаті досліду обов'язково відбувається одна і тільки одна з них), то сума подій (2.11) при $k = N$ є достовірною подією, і має виконуватись умова нормування

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.21)$$

Використовуючи формулу для $W_{\xi}(x)$, перепишемо (2.21) у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = \sum_{i=1}^N p_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (2.22)$$

Схематично графіки функцій $W_{\xi}(x)$ і $F_{\xi}(x)$ наведені на рис. 2.3.

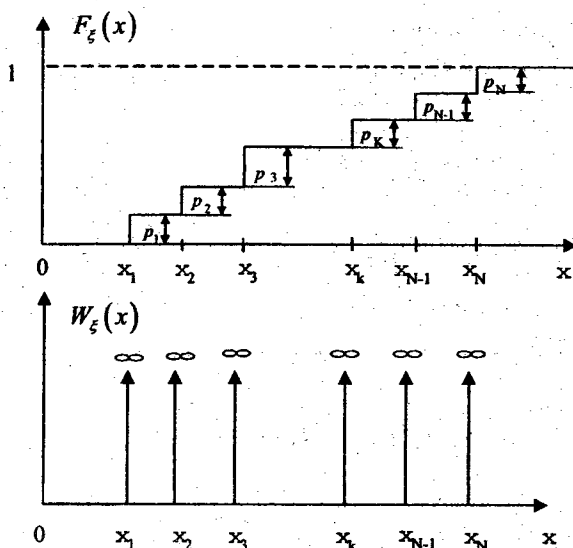


Рис. 2.3

2.3. Моменти випадкових величин

Функція розподілу $F_\xi(x)$ або густина розподілу ймовірності $W_\xi(x)$ дають повний статистичний опис випадкової величини ξ . Знаючи їх, можна розрахувати за формулою (2.8) ймовірність того, чи потрапить (або не потрапить) випадкова величина ξ у будь-який інтервал $(x_1, x_2]$. Проте, іноді така повна інформація буває або непотрібною, або недоступною, і ми вимушені обмежуватися грубішим описом ймовірнісних властивостей випадкової величини ξ , користуючись не функціями $F_\xi(x)$ і $W_\xi(x)$, а деякою сукупністю числових параметрів, які називаються моментами випадкової величини.

Як найпростіший приклад виступає середнє значення (або математичне сподівання) випадкової величини ξ , яке далі ми будемо позначати ризиком $\bar{\xi}$, або косими дужками $\langle \xi \rangle$. Якщо в результаті проведених M випробувань дискретна величина ξ набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів значення x_2 і n_N разів значення

x_N , то емпірична оцінка середнього значення ξ проводиться за очевидною формулою (що узагальнює звичайне поняття середнього арифметичного):

$$\bar{\xi} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_N n_N}{M} = \sum_{i=1}^N x_i v_i, \quad (2.23)$$

де $v_i = n_i/M$ — частота появи події $\xi = x_i$. При достатньо великій кількості випробувань ($M \gg 1$) частоти v_i у (2.23) можна замінити на ймовірності p_i , і ми отримаємо

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^N x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x W_\xi(x) dx, \quad (2.24)$$

де $W_\xi(x)$ визначається за формулою (2.14). Для неперервної випадкової величини ξ можна провести аналогічні обчислення, і ми прийдемо до цієї ж формули. Провівши аналогію з механікою, можна сказати, що $\bar{\xi}$ — координата „центру ваги” функції $W_\xi(x)$. Справді, якщо розглянути стержень з лінійною густиною маси (маса на одиницю довжини), що залежить від координати x за законом $W_\xi(x)$, то $\bar{\xi}$ — координата «центру мас» цього стержня. До речі, звідси і походить назва $W_\xi(x)$ — густина ймовірності (аналог густини маси). Знання середнього значення $\bar{\xi}$ дає змогу вказати величину, навколо якої групуються значення, яких набуває випадкова величина ξ , проте нічого не говорить про відхилення ξ відносно $\bar{\xi}$, тобто, про величину флуктуацій $\delta\xi = \xi - \bar{\xi}$.

Більш повну інформацію про випадкову величину ξ дають початкові і центральні моменти. Середні значення цілих степенів ξ^k носять назву початкових моментів k -го порядку:

$$m_k = \langle \xi^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) dx = \overline{\xi^k}. \quad (2.25)$$

Аналогічно, середні значення цілих степенів флуктуацій $(\delta\xi)^k$ носять назву центральних моментів k -го порядку:

$$M_k = \langle \delta\xi^k \rangle = \langle (\xi - \bar{\xi})^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^k W_{\xi}(x) dx = \overline{\delta\xi^k}. \quad (2.26)$$

Центральний момент 2-го порядку M_2 називається дисперсією флуктуації і звичайно позначається як σ_{ξ}^2 . Величину $\sigma_{\xi} = \sqrt{\sigma_{\xi}^2}$ називають ще середньоквадратичним відхиленням або стандартом величини ξ .

Із визначень m_k (2.25) і M_k (2.26), а також умови нормування (2.9) випливає, що

$$m_0 = M_0 = 1, \quad m_1 = \bar{\xi}, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = \sigma_{\xi}^2 = m_2 - m_1^2. \quad (2.27)$$

Повертаючись до аналогії з неоднорідним стержнем із розподілом густини мас $W_{\xi}(x)$, можна показати, що дисперсія $\sigma_{\xi}^2 = \langle (\xi - \bar{\xi})^2 \rangle$ — є моментом інерції стержня відносно центру мас. З іншого боку, величина σ_{ξ} може слугувати для грубої оцінки ширини функції $W_{\xi}(x)$, “центр ваги” якої зосереджено навколо $x = \bar{\xi}$ (рис. 2. 4).

Моменти більш високих порядків містять детальнішу інформацію про форму функції $W_{\xi}(x)$ — ступінь її асиметрії, гостроту максимуму та ін.

Розглянемо тепер детерміновану функцію $\eta = \varphi(\xi)$ дискретної випадкової величини ξ . Якщо внаслідок проведених M випробувань дискретна величина ξ набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів значення x_2 і n_N разів значення x_N , то аналогічно (2.23)

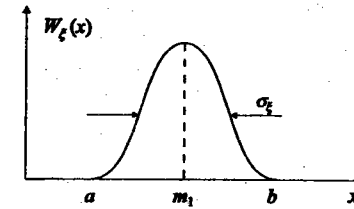


Рис. 2. 4

емпірична оцінка середнього значення $\eta = \varphi(\xi)$ проводиться як

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle = \langle \varphi(\xi) \rangle &= \frac{\varphi(x_1)n_1 + \varphi(x_2)n_2 + \dots + \varphi(x_N)n_N}{M} = \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) \nu_i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тут $\nu_i = n_i/M$ — частота появи події $\xi = x_i$. При достатньо великій кількості випробувань ($M \gg 1$) частоти ν_i у (2.28) можна замінити на ймовірності p_i , і ми отримаємо наступний вираз:

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) p_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_{\xi}(x) dx, \quad (2.29)$$

де густина ймовірності $W_{\xi}(x)$ визначається за формулою (2.14). Нескладно показати, що середнє значення детермінованої функції $\eta = \varphi(\xi)$ неперервної випадкової величини ξ визначається так само, як і в (2.29):

$$\langle \varphi(\xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W_{\xi}(x) dx. \quad (2.30)$$

2.4. Характеристична функція

Характеристичною функцією $f(v)$ випадкової величини ξ називається середнє від функції $\varphi(\xi) = \exp(iv\xi)$, де v – довільний дійсний параметр:

$$f(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_{\xi}(x) dx. \quad (2.31)$$

Видно, що $f(v)$ — не що інше, як перетворення Фур'є від густини розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$. У свою чергу можна записати і зворотнє перетворення:

$$W_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} f(v) dv. \quad (2.32)$$

Таким чином, характеристична функція $f(v)$ і густина розподілу ймовірностей $W_{\xi}(x)$ є парою перетворень Фур'є.

Із визначення (2.31) випливають наступні властивості характеристичної функції. По-перше,

$$\begin{aligned} |f(v)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx} W_{\xi}(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx} W_{\xi}(x)| dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ivx}| W_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1, \end{aligned} \quad (2.33)$$

звідки випливає, що характеристична функція може бути визначена для кожної випадкової величини. По-друге,

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = 1. \quad (2.34)$$

Окрім того, для симетричних (парних) функцій $W_{\xi}(x)$ характеристична функція $f(v)$ дійсна.

Одним із корисних застосувань характеристичної функції є спрощене обчислення моментів m_k випадкової величини ξ . Якщо існує k -ий початковий момент m_k випадкової величини ξ , то її характеристична функція має похідну k -го порядку, причому

$$\frac{d^k f(v)}{dv^k} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) e^{ivx} dx. \quad (2.35)$$

З (2.35) випливає, що

$$\left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_{\xi}(x) dx = i^k m_k. \quad (2.36)$$

Отже, початкові моменти m_k випадкової величини ξ відрізняються від значення похідної характеристичної функції при $v=0$ тільки множителем i^k :

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k f(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (2.37)$$

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина ξ може набувати тільки два значення $x : x_1 = A$ з імовірністю $p_1 = 3/4$ і $x_2 = -A$ з імовірністю $p_2 = 1/4$. Знайти $W_{\xi}(x)$, $\bar{\xi}$ і σ_{ξ}^2 .

Розв'язок. Випадкова величина ξ дискретна, тому густина розподілу ймовірностей для неї визначається за формулою (2.14):

$$\begin{aligned} W_{\xi}(x) &= \sum_{i=1}^2 p_i \delta(x - x_i) = p_1 \delta(x - x_1) + p_2 \delta(x - x_2) = \\ &= p_1 \delta(x - A) + p_2 \delta(x + A). \end{aligned}$$

Скориставшись цим поданням, згідно з формулами (2.25) і (2.26) знаходимо математичне очікування $\bar{\xi}$ і дисперсію σ_{ξ}^2 випадкової величини ξ .

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = x_1 p_1 + x_2 p_2 = \frac{3}{4} A - \frac{1}{4} A = \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = (x_1 - \bar{\xi})^2 p_1 + (x_2 - \bar{\xi})^2 p_2 = \\ &= \left(A - \frac{A}{2}\right)^2 p_1 + \left(-A - \frac{A}{2}\right)^2 p_2 = \frac{A^2}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{4} A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} A^2. \end{aligned}$$

2. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_{\xi}(x) = c + b \cdot \arctg \frac{x}{a}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Необхідно:

- визначити коефіцієнти b і c ;
- знайти вираз для $W_{\xi}(x)$;
- визначити ймовірність $P\{\alpha < \xi \leq \beta\}$ потрапляння величини ξ в інтервал $(\alpha, \beta]$.

Розв'язок. а) Скористаємося властивостями функції $F_{\xi}(x)$:

$$F_{\xi}(-\infty) = 0, \quad c + b \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$F_{\xi}(\infty) = 1, \quad c + b \frac{\pi}{2} = 1.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти b і c : $b = \frac{1}{\pi}$, $c = \frac{1}{2}$.

б) Зі зв'язку між $W_{\xi}(x)$ і $F_{\xi}(x)$ отримаємо наступне співвідношення:

$$W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(c + b \arctg \frac{x}{a} \right) = b \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

в) За відомою густиною розподілу ймовірності $W_{\xi}(x)$ знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал.

$$\begin{aligned} P\{\alpha < \xi \leq \beta\} &= F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} W_{\xi}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arctg y \Big|_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} = \frac{1}{\pi} \left(\arctg \frac{\beta}{a} - \arctg \frac{\alpha}{a} \right). \end{aligned}$$

3. Випадкова величина ξ розподіляється за законом, поданим на рис. 2.5. Необхідно записати вираз для $F_{\xi}(x)$ і визначити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(a/2, a]$. Обчислити значення $\bar{\xi}$ і σ_{ξ}^2 .

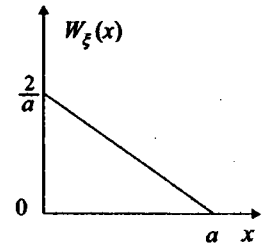


Рис. 2.5

Розв'язок. Із рис. 2.5 видно, що $W_{\xi}(x)$ — це пряма лінія, рівняння якої має вигляд

$$W_{\xi}(x) = -k(x - a) = k(a - x).$$

Значення коефіцієнта k знаходимо з умови, що при $x = 0$ $W_{\xi}(x) = 2/a = ka$. Отже, $k = 2/a^2$. Таким чином, маємо

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 0, & x \leq 0; \quad x > a. \end{cases}$$

На інтервалі $0 < x \leq a$ вираз для $0 < x \leq a$ має вигляд (див. (2.8)):

$$F_{\xi}(x) = \int_0^x W_{\xi}(x') dx' = \int_0^x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) dx' = \frac{2}{a}x - \frac{x^2}{a^2} = \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right).$$

Отже,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Імовірність потрапляння величини ξ в інтервал $(a/2, a]$ знаходиться як

$$P\left\{\frac{a}{2} < \xi \leq a\right\} = F_{\xi}(a) - F_{\xi}\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Середнє значення ξ і середній квадрат ξ^2 випадкової величини ξ рівні

$$m_1 = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \int_0^a x \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a}{3}.$$

$$m_2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \frac{2}{a} \left(\int_0^a x^2 dx - \int_0^a \frac{x^3}{a} dx\right) = \frac{2}{a} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^3}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

За отриманими першим і другим початковими моментами за формулою (2.27) знайдемо дисперсію

$$\sigma_{\xi}^2 = M_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}.$$

§ 3. Закони розподілу випадкових величин

Будь-яка функція $W_{\xi}(x)$, що задовольняє сформульовані у §2 умови, може виступати в ролі густини розподілу ймовірностей якої-небудь випадкової величини. Проте у фізичних задачах ми, як правило, стикаємося з досить обмеженим набором функцій $W_{\xi}(x)$. Розглянемо деякі з них.

3.1. Рівномірний розподіл

Для неперервної випадкової величини ξ , що змінюється в інтервалі $(a, b]$, найпростішим розподілом є **рівномірний**:

$$W_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \quad x > b; \\ W_0, & a < x \leq b. \end{cases} \quad (3.1)$$

Значення сталої $W_0 = \text{Const}$ визначається з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) dx = W_0 \int_a^b dx = W_0(b-a) = 1, \quad (3.2)$$

тобто $W_0 = 1/(b-a)$. Імовірність P того, що випадкова величина ξ потрапить в інтервал значень $(x, x+l]$, де $a < x < x+l \leq b$, не залежить від x , а визначається тільки довжиною інтервалу l :

$$P = \{x < \xi \leq x+l\} = \int_x^{x+l} W_{\xi}(x') dx' = W_0 l = \frac{l}{b-a}. \quad (3.3)$$

Графік густини ймовірностей $W_{\xi}(x)$ і функції розподілу $F_{\xi}(x)$, що їй відповідає, наведено на рис. 3.1.

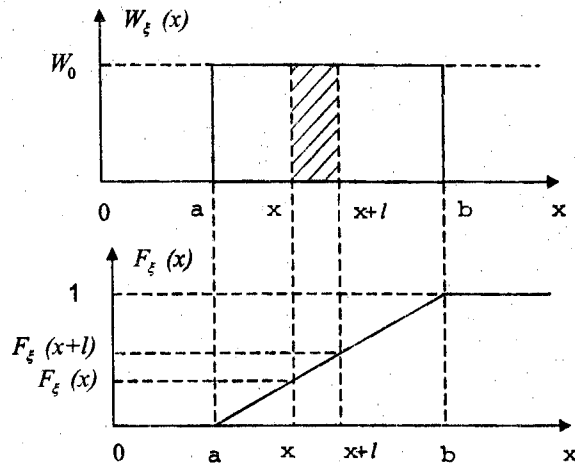


Рис. 3.1

Для дискретної випадкової величини, що набуває з однаковою ймовірністю $p_i = p = \text{Const}$ одне з N можливих значень x_i ($i=1, 2, \dots, N$), відповідний розподіл називається **рівноймовірним**. Для цього розподілу, згідно з (2.14), маємо

$$W_\xi(x) = p \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (3.4)$$

З умови нормування випливає:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = p \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = pN = 1, \text{ тобто } p = \frac{1}{N}. \quad (3.5)$$

Наприклад, при киданні гральної кості випадання будь-якого числа очок від $x_1 = 1$ до $x_6 = 6$ відбувається з рівною ймовірністю $p = 1/6$.

3.2. Біномний розподіл.

Схема Бернуллі (1713 р.)

Серед багатьох можливих законів розподілу ймовірностей особливу роль відіграють розподіли, що виникають в результаті розв'язання найпростіших імовірнісних задач, і внаслідок цього є достатньо загальними і мають досить широку область застосування. Найважливішим із них є **біномний розподіл**, що виникає в задачах, які зводяться до схеми незалежних послідовних випробувань.

Нехай проводиться N незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може виникнути або не виникнути. Домовимося вважати, що ймовірність появи події A у кожному випробуванні є однаковою, а саме — дорівнює p . Отже, ймовірність не виникнення події A (доповнювальна подія \bar{A}) також стала і дорівнює $q = 1 - p$. Таким чином, подія \bar{A} має ймовірність $q = 1 - p$. Поставимо перед собою задачу обчислити ймовірність того, що при N випробуваннях подія A здійсниться рівно n разів. Результат серії з N випробувань можна записати, наприклад, у вигляді

$$\underbrace{A \bar{A} \bar{A} A \bar{A} \bar{A} \dots A \bar{A}}_N. \quad (3.6)$$

Цей запис означає, що у першому і другому досліді A відбулася, в третьому — не відбулася, у четвертому — відбулася, у п'ятому — ні і т.ін. Нас цікавить подія M , яка полягає в тому, що A в ланцюжку (3.6) відбудеться рівно n разів. Подію M можна розглядати як складну подію, рівну добутку незалежних указаних елементарних подій A і \bar{A} . У цьому випадку ймовірність події M є добутком ймовірностей появи подій A і \bar{A} відповідно (див. формулу множення ймовірностей (1.19)):

$$P\{M\} = \overbrace{p p q p q q \dots p q}^N = p^n q^{N-n}. \quad (3.7 \text{ а})$$

Подія M , яка нас цікавить, відбувається щоразу, коли в ланцюжку типу (3.6) A повторюється n разів незалежно від послідовності A і \bar{A} :

$$\left. \begin{aligned} P\{M\} &= prqrqq\dots pq = p^n q^{N-n}, \\ P\{M\} &= pqqrqq\dots qp = p^n q^{N-n}, \\ &\dots\dots\dots \\ P\{M\} &= qrrqrr\dots qq = p^n q^{N-n}. \end{aligned} \right\} C_N^n. \quad (3.7 \text{ б})$$

При цьому складні події типу (3.7 б), що відрізняються тільки перестановками A і \bar{A} , несумісні, тому ймовірність їхньої суми є сумою ймовірностей кожної з них. Видно, що ці події мають рівну ймовірність, а їх кількість дорівнює кількості способів вибору n елементів з N , тобто кількості поєднань C_N^n . Отже, сума ймовірностей (3.7 б) всіх подій типу (3.6), у яких подія A відбулася n разів, дорівнює

$$P\{S\} = P_N(n) = \sum_{\substack{\text{за всіма} \\ \text{окремими} \\ \text{випадками } M}} p^n q^{N-n} = C_N^n p^n q^{N-n}, \quad (3.8)$$

де $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ — біноміальні коефіцієнти (кількість поєднань).

Формулою (3.8) виражається біномний закон розподілу ймовірностей. Згідно з (2.14) для густини розподілу ймовірностей $W_\xi(x)$ дискретної величини ξ , що набуває значень $\xi = n$, отримаємо наступний вираз:

$$W_\xi(x) = \sum_{n=0}^N P_N(n) \delta(x-n).$$

Перевіримо, чи задовольняє цей розподіл умові нормування. Повна група подій полягає, очевидно, в тому, що n може набувати всіх значень від $n=0$ до $n=N$. Отже, має виконуватися наступна рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^N P_N(n) \delta(x-n) = \sum_{n=0}^N P_N(n) = 1. \quad (3.9)$$

Підставимо у (3.9) знайдений розподіл (3.8) і скористаємося формулою бінома Ньютона (звідси і назва розподілу):

$$\sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1. \quad (3.10)$$

Ми врахували, що ймовірність доповнювальної події \bar{A} дорівнює $q = 1 - p$.

Моменти біномного розподілу

Легко показати, що початковий момент k -го порядку:

$$m_k = \langle n^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_\xi(x) dx = \sum_{n=0}^N n^k P_N(n) \quad (3.11)$$

зручно обчислювати, користуючись формулою

$$\langle n^k \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^k (p+q)^N \Big|_{p+q=1}. \quad (3.12)$$

Зокрема, перші два моменти дорівнюють:

$$\langle n \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p+q)^N \Big|_{p+q=1} = Np(p+q)^{N-1} \Big|_{p+q=1} = Np, \quad (3.13)$$

$$\langle n^2 \rangle = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right] \Big|_{p+q=1} = Np[1 + p(N-1)] = Np[q + Np]. \quad (3.14)$$

Дисперсія випадкової величини при цьому має наступний вигляд:

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = Npq. \quad (3.15)$$

Приклади

Наведемо ряд конкретних прикладів, у яких задача зводиться безпосередньо до схеми Бернуллі.

1. **Урнова задача.** В урні лежать білі і чорні кулі. Ймовірність того, що взята навмання куля буде білою (подія A) дорівнює p . Яка ймовірність того, що з узятих N куль білими виявляться n (для того, щоб забезпечити незалежність випробувань, узяту кулю потрібно обов'язково класти назад до урни і перемішувати її вміст)?

2. **Кидання монети.** Яка ймовірність того, що при N киданнях n разів випаде "орел", якщо при одному киданні $p = 1/2$?

3. **Флуктуації густини.** В об'ємі V міститься N молекул газу. Ймовірність потрапляння молекули до виділеного із V об'єму ν (подія A) дорівнює p . Яка ймовірність того, що у V міститься n яких-небудь молекул?

4. **Випадкові блукання** (броунівської частинки, людини й т.ін.). Яка ймовірність того, що за N „кроків” частинка (людина) відійде на n кроків вліво (або вправо), якщо ймовірність кроку вліво дорівнює p ?

5. **Телефонні виклики.** Телефоністка чергує протягом часу T . Ймовірність того, що за дуже малий інтервал τ відбудеться виклик, який дорівнює p . Яка ймовірність того, що за час чергування відбудеться n викликів?

Розглянемо детальніше дві задачі.

6. **Задача про надійність складної системи,** що складається з великої кількості N однакових елементів (опорів, реле та ін.). Нехай ймовірність виходу з ладу або відмови (подія A) кожного з них протягом заданого інтервалу часу T дорівнює p .

Яка ймовірність того, що за час T система відмовить?

Складна подія, ймовірність P якої нас цікавить, відбувається, якщо відмовляє один елемент, два елементи або всі N елементів. Ці події несумісні й, отже, ймовірність P їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей:

$$P = \sum_{n=1}^N P_N(n). \quad (3.16)$$

Додамо і віднімемо в (3.16) $P_N(0)$ і скористаємося умовою нормування (3.9):

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^N P_N(n) + P_N(0) - P_N(0) = \\ &= \sum_{n=0}^N P_N(n) - P_N(0) = 1 - C_N^0 p^0 q^N = 1 - (1-p)^N. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Цей результат, звичайно, можна було б отримати значно простішим способом, розглянувши ймовірність \bar{P} доповнювальної події, яка полягає в тому, що жоден елемент не вийде з ладу (тобто A не відбудеться жодного разу, а \bar{A} — всі N разів):

$$\bar{P} = P_N(0) = q^N. \quad (3.18)$$

Звідси, зі співвідношення $P + \bar{P} = 1$ випливає формула (3.17).

7. Ще один приклад, який корисно розглянути, — **дробовий шум** у електровакуумних приладах. Розглянемо струм, що протікає через двоелектродну лампу. Нехай за час T з катода вилетіло n електронів, які перенесли заряд $q_T = ne$ й, отже, утворили у колі струм:

$$I = q_T / T = ne / T. \quad (3.19)$$

Кількість n електронів, що вилетіли, звичайно, є випадковою величиною. Тому і струм I — випадкова величина, що флукує навколо якогось середнього значення:

$$\bar{I} = \bar{n}e / T = n_1 e, \quad (3.20)$$

де $n_1 = \bar{n} / T$ — середня кількість електронів, що вилітають з катода за одиницю часу. Із (3.19) і (3.20) видно, що розподіл ймовірностей для флуктуацій струму $\delta I = I - \bar{I}$ (ці флуктуації струму, викликані

дискретним характером перенесення заряду, і носять назву дробового шуму) визначається розподілом числа n . Для того, щоб застосувати біноміальний розподіл, ми маємо звести цю задачу до схеми Бернуллі — послідовності незалежних випробувань. Для цього розіб'ємо весь інтервал T на N інтервалів тривалістю $\tau = T/N$. Вважатимемо, що вилітання кожного електрона з катода протягом проміжку часу $0 < t \leq T$ є рівномірною подією. У цьому випадку ймовірність p вилітання одного електрона за час τ пропорційна $p \sim \tau/T$ (див. формулу (3.3)). Вилітання окремих електронів можна вважати незалежною подією (якщо, звичайно, не враховувати просторовий заряд). Тому ймовірність вилітання двох електронів за той же час $\sim (\tau/T)^2, \dots$ « k » електронів $\sim (\tau/T)^k$. Припустимо, що τ/T — настільки мале (тобто N — настільки велике), що ймовірністю вилітання за час τ більше, ніж одного електрона можна знехтувати. Таким чином, за час τ може відбутися тільки дві події: вилітання одного електрона (подія A з імовірністю p) і відсутність вилітання (подія \bar{A} з імовірністю $q = 1 - p$). Задачу зведено до схеми Бернуллі й, отже, розподіл n — біномний:

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (3.21)$$

3.3. Розподіли Пуассона і Лапласа

Знайдений розподіл (3.21) не може повністю нас задовольнити: до нього входить невідома ймовірність p і невизначене число N , про яке припускається, що воно дуже велике. Для визначення p , з одного боку, скористаємося визначенням $\bar{n} = Np$, звідки випливає

$$p = \bar{n}/N. \quad (3.22)$$

З іншого боку, з визначення середнього струму \bar{I} за формулою (3.20) знаходимо

$$\bar{n} = T\bar{I}/e. \quad (3.23)$$

Враховуючи, що для фіксованого проміжку часу T величина визначається тільки конструктивними особливостями ла температурою катода, різницею потенціалів між катодом і ано тощо, можна вважати $\bar{I} = \text{Const}$. Звідси отримуємо, що $\bar{n} = \text{Const}$ не залежить від кількості розбивань N .

Тепер збільшуватимемо кількість розбивань ($N \rightarrow \infty$). зростанням N середня кількість електронів, що вилетіли з катод за фіксований час T не змінюється ($\bar{n} = \text{Const}$), отже, $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Таким чином, нам потрібно відшукати границю розподілу (3.21) за умови, що $N \rightarrow \infty$ і $p = \bar{n}/N \rightarrow 0$. Для цього підставимо $p = \bar{n}/N$ і $q = 1 - p = 1 - \bar{n}/N$ у (3.21), запишемо у явному вигляді вираз для C_N^n і перейдемо до границі $\bar{n}/N \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)(N-n)!}{n!(N-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-n} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \equiv P(n). \end{aligned}$$

При цьому ми скористалися формулою

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N = e^{-\bar{n}}.$$

Розподіл

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (3.24)$$

називається розподілом Пуассона. Перевіримо тепер, що

$$W_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \delta(x-n)$$

задовольняє умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{-\bar{n}} \cdot e^{\bar{n}} = 1. \quad (3.25)$$

Переконаємося, що перший початковий момент m_1 збігається з середнім значенням \bar{n} :

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x W_{\xi}(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \bar{n}^n e^{-\bar{n}} = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1}}{(n-1)!} = \bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^k}{k!} = \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Другий початковий момент m_2 знайдемо за допомогою аналогічних обчислень:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx = \langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \bar{n}^n = \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \bar{n}^n = e^{-\bar{n}} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-1)!} \right\} = \bar{n}^2 + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отже,

$$\sigma_n^2 = \langle (n - \bar{n})^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \bar{n}^2 = \bar{n}. \quad (3.28)$$

Інший граничний випадок біномного закону при $N \rightarrow \infty$ з'являється, коли p не прямує до нуля, а має певне значення, відмінне від нуля й одиниці. Таким чином, зі зростанням N зростає також і \bar{n} . З формули (3.28) видно, що при $\bar{n} \gg 1$ середньоквадратичне відхилення $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}}$ значно менше за середнє значення \bar{n} : $\sigma_n / \bar{n} \sim 1/\sqrt{\bar{n}} \ll 1$, тобто розподіл $P(n)$ виявляється зосередженим головним чином навколо значень $n \approx \bar{n} \gg 1$. Ураховуючи цю обставину, введемо до розгляду $\delta n = n - \bar{n}$ і в формулі (3.24) у області значень $\bar{n} \gg 1$ и $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$, проведемо наступні спрощення:

1. Для великих значень n ($n \gg 1$) можна скористатися формулою Стірлінга для $n!$:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

і ми прийдемо до розподілу вигляду:

$$P(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{n-\bar{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} \left(\frac{\bar{n}}{n}\right)^n e^{\delta n}.$$

2. Увівши позначення $F(n) = (\bar{n}/n)^n$, з точністю до квадратичних доданків за малою величиною $|\delta n|/\bar{n} \ll 1$ обчислимо наближене значення $\ln F(n)$:

$$\begin{aligned} \ln F(n) &= n \ln \left(\frac{\bar{n}}{n}\right) = -(\bar{n} + \delta n) \ln \left(1 + \frac{\delta n}{\bar{n}}\right) \approx \\ &\approx -(\bar{n} + \delta n) \left(\frac{\delta n}{\bar{n}} - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}^2}\right) \approx -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$F(n) \approx \exp \left\{ -\delta n - \frac{1}{2} \frac{\delta n^2}{\bar{n}} \right\}.$$

З урахуванням усіх виконаних спрощень, розподіл (3.24) можна подати у наступному вигляді:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} e^{-\frac{\delta n^2}{2\bar{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_n}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma_n^2}}. \quad (3.29)$$

Цей вираз називається розподілом Лапласа або нормальним законом розподілу.

Таким чином, з біномного розподілу ми отримали ще два важливі закони розподілу Пуассона і Лапласа:

$$C_N^n p^n q^{N-n} \xrightarrow[\substack{N \rightarrow \infty, \\ \bar{n}/N \rightarrow 0}]{\substack{\bar{n} \\ n!}} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \xrightarrow[\bar{n} \gg 1]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}. \quad (3.30)$$

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина φ розподіляється за нормальним законом із середнім значенням $\bar{\varphi} = 0$ і дисперсією σ_{φ}^2 . Знайти середнє значення іншої випадкової величини $\xi = e^{-i\varphi}$.

Розв'язок. При нульовому середньому нормальний закон (3.29) має вигляд

$$W(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_{\varphi}^2}}.$$

Для визначення $\bar{\xi}$ скористаємося формулою (2.30):

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_{\varphi}^2}} d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{2\sigma_{\varphi}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}\right).\end{aligned}$$

2. На радіомаяк-відповідач надходить у середньому 15 запитів за годину. Вважаючи кількість запитів випадковою величиною, що розподіляється за законом Пуассона, визначити ймовірність того, що за $T = 4$ хв:

- а) надійде рівно 3 запити;
- б) не надійде жодного запиту;
- в) надійде хоча б один запит.

Розв'язок. У розподілі Пуассона (3.24), що описує ймовірність появи шуканої події A на інтервалі часу $(0, t]$, входить величина \bar{n} , яка є середньою кількістю появ події A на цьому інтервалі. Згідно з (3.20) величина \bar{n} легко визначається, якщо відома середня кількість подій за одиницю часу n_1 і тривалість

інтервалу t : $\bar{n} = n_1 t$. У нашому випадку $t = T = 4$ хв, а середня кількість запитів за одиницю часу дорівнює $n_1 = \frac{15}{60 \text{ хв}} = 1/4 \text{ хв}^{-1}$.

Звідси знаходимо $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$. Знаючи \bar{n} , за допомогою розподілу Пуассона (3.24) визначимо шукані ймовірності:

$$\text{а) } P(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,061;$$

$$\text{б) } P(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37;$$

$$\text{в) } P(n \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - 1/e \approx 0,63.$$

3. Відмова у роботі приладу відбувається в середньому 1 раз за 200 годин. Визначити ймовірність того, що за інтервал $T = 10$ год не відбудеться жодної відмови.

Розв'язок. Спочатку знайдемо середню кількість відмов за одиницю часу $n_1 = \frac{1}{200} \text{ год}^{-1}$. Звідси середня кількість відмов за

$T = 10$ год дорівнює $\bar{n} = n_1 T = \frac{1}{20}$. За відомим значенням \bar{n} ,

згідно з формулою (3.24), визначимо шукану ймовірність

$$P(0) = \frac{\bar{n}^0}{0!} e^{-\bar{n}} = e^{-1/20} \approx 1 - \frac{1}{20} \approx 0,95.$$

4. Знайти густину розподілу ймовірності для часу безвідмовної роботи приладу, згаданого у попередній задачі.

Розв'язок. Розглянемо два інтервали спостереження $(0, t_1]$ і $(0, t_2]$ і обчислимо ймовірності безвідмовної роботи для кожного з них:

$$P(t_{1,2}) = P_{1,2}(0) = \frac{\bar{n}_{1,2}^0}{0!} e^{-\bar{n}_{1,2}} = e^{-\bar{n}_{1,2}}. \quad (1)$$

Середні значення $\bar{n}_{1,2}$, що входять сюди, пропорційні до середньої кількості появ подій n_1 і до відповідних тривалостей інтервалів $t_{1,2}$: $\bar{n}_{1,2} = n_1 t_{1,2}$. Нехай тепер $t_1 = t$, а $t_2 = t + \Delta t$, де Δt — невеликий приріст часу. Згідно з формулою (1) запишемо різницю ймовірностей для двох близьких моментів часу

$$\begin{aligned} P(t_1) - P(t_2) &= e^{-n_1 t} - e^{-n_1(t+\Delta t)} = e^{-n_1 t} (1 - e^{-n_1 \Delta t}) = \\ &= e^{-n_1 t} (1 - 1 + n_1 \Delta t - \dots) \approx n_1 \Delta t e^{-n_1 t}. \end{aligned} \quad (2)$$

З іншого боку, різниця ймовірностей між двома близькими моментами часу за визначенням дорівнює $W(t) \Delta t$. Прирівнявши

$$P(t_1) - P(t_2) = n_1 \Delta t e^{-n_1 t} = W(t) \Delta t, \quad (3)$$

знаходимо

$$W(t) = n_1 e^{-n_1 t},$$

$$\text{де } n_1 = \frac{1}{200} \text{ год}^{-1}.$$

§ 4. Сукупність випадкових величин і функції випадкових аргументів

Розглянемо дві випадкові величини ξ і η , які можуть набувати дійсні значення x і y відповідно. Повний статистичний опис кожної з них, як ми знаємо з § 2, задається законом розподілу ймовірностей F або густиною розподілу W . Ці функції для ξ і η , взагалі кажучи,

відмінні, і для того, щоб їх відрізнити, слід писати внизу відповідний індекс:

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi \leq x\}; \quad W_{\xi}(x) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}; \quad (4.1)$$

$$F_{\eta}(y) = P\{\eta \leq y\}; \quad W_{\eta}(y) = \frac{dF_{\eta}(y)}{dy}. \quad (4.2)$$

Статистично повний опис сукупності двох випадкових величин, за аналогією з (2.1), задається сумісним законом розподілу ймовірностей (інтегральною функцією розподілу)

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}. \quad (4.3)$$

Густина сумісного розподілу ймовірностей ξ і η визначається за формулою

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y). \quad (4.4)$$

Функцію $W_{\xi\eta}(x, y)$ називають ще двовимірною густиною розподілу ймовірностей на відміну від одновимірних $W_{\xi}(x)$ і $W_{\eta}(y)$; ця термінологія застосовується і для інтегральних функцій розподілу: $F_{\xi\eta}(x, y)$ — двовимірна, а $F_{\xi}(x)$ і $F_{\eta}(y)$ — одновимірні функції.

4.1. Властивості інтегральної функції і густини розподілу ймовірностей

Із визначення (4.3) випливають фундаментальні властивості функції $F_{\xi\eta}(x, y)$:

1. Оскільки ймовірність $P\{\dots\}$ за визначенням є невід'ємною величиною, що не перевищує одиницю, то

$$0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1. \quad (4.5)$$

2. Властивість симетрії $F_{\xi\eta}(x, y)$ випливає з того факту, що ймовірність P суми двох подій ($\xi \leq x$ і $\eta \leq y$) не залежить від порядку, у якому вони перелічуються:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y, \xi \leq x\} = F_{\xi\eta}(y, x). \quad (4.6)$$

3. Умова узгодженості $F_{\xi\eta}(x, y)$ з одновимірними функціями $F_{\xi}(x)$ і $F_{\eta}(y)$ випливає з того, що події $\xi \leq \infty$ або $\eta \leq \infty$ є достовірними:

$$F_{\xi\eta}(\infty, y) = P\{\xi \leq \infty, \eta \leq y\} = P\{\eta \leq y\} = F_{\eta}(y), \quad (4.7)$$

$$F_{\xi\eta}(x, \infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq \infty\} = P\{\xi \leq x\} = F_{\xi}(x). \quad (4.8)$$

4. Оскільки події $\xi \leq -\infty$ і $\eta \leq -\infty$ є неможливими, то

$$F_{\xi\eta}(-\infty, y) = P\{\xi \leq -\infty, \eta \leq y\} = 0, \quad (4.9)$$

$$F_{\xi\eta}(x, -\infty) = P\{\xi \leq x, \eta \leq -\infty\} = 0. \quad (4.10)$$

5. Так само, як і в §2 (див. (2.4)), можна довести, що $F_{\xi\eta}(x, y)$ — неспадна функція кожного аргументу (при фіксованому значенні іншого):

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0. \quad (4.11)$$

Причому, як випливає з властивостей 4 і 5, вона зростає від нуля при $\xi = -\infty$ або $\eta = -\infty$ до одиниці при $\xi = \eta = \infty$.

Із визначення (4.4) і перелічених властивостей функції $F_{\xi\eta}(x, y)$ випливають наступні властивості $W_{\xi\eta}(x, y)$:

1. $W_{\xi\eta}(x, y)$ — невід'ємна функція на всій площині x, y :

$$W_{\xi\eta}(x, y) \geq 0. \quad (4.12)$$

2. Властивість симетрії:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{\xi\eta}(y, x) = W_{\xi\eta}(y, x). \quad (4.13)$$

3. Зв'язок з $F_{\xi\eta}(x, y)$. Інтегрування (4.4) з урахуванням умов (4.9) і (4.10) дає

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^y dy' W_{\xi\eta}(x', y'). \quad (4.14)$$

4. З (4.4), (4.7) і (4.8) випливає умова узгодженості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y') dy' = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' W_{\xi\eta}(x', y') = \frac{d}{dx} F_{\xi}(x) = W_{\xi}(x). \quad (4.15)$$

Аналогічно, для інтегралу по dx' :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x', y) dx' = W_{\eta}(y). \quad (4.16)$$

5. Поклавши у (4.14) $x, y = \infty$, отримуємо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = F_{\xi\eta}(\infty, \infty) = 1. \quad (4.17)$$

Якщо ξ і η розглядати як декартові проекції випадкового вектора $\vec{\zeta}$, то $F(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$ є ймовірністю потрапляння вектора у заштриховану ділянку на рис. 4.1 а.

Функцію $W_{\xi\eta}(x, y)$, у свою чергу, можна подати у вигляді деякої поверхні. Тоді ймовірність того, що кінець випадкового вектора $\vec{\zeta}$ (точка A) буде всередині деякої ділянки S ($A \in S$),

дорівнює об'єму всередині циліндричної поверхні, що спирається на ділянку S і обмеженому зверху поверхнею $W_{\xi\eta}(x, y)$ (рис. 4.1 б):

$$P\{A \in S\} = \iint_S W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \quad (4.18)$$

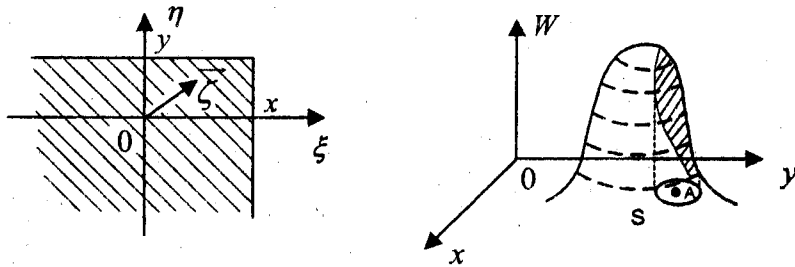


Рис. 4.1

7. Дві випадкові величини ξ і η називаються незалежними, якщо незалежні події $\xi \leq x$ і $\eta \leq y$. У цьому випадку двовимірні функції F і W розпадаються на добуток одновимірних, оскільки, згідно з формулою множення ймовірностей, маємо:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = P\{\xi \leq x\} \cdot P\{\eta \leq y\} = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y), \quad (4.19)$$

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx} \cdot \frac{dF_{\eta}(y)}{dy} = W_{\xi}(x) W_{\eta}(y). \quad (4.20)$$

4.2. Умовні функції розподілу

Якщо випадкові величини ξ і η залежні, то існує **умовна (апостеріорна) ймовірність** того, що одна з цих випадкових величин розташовується нижче певного рівня y , якщо інша міститься у межах $x < \xi \leq x_1$. Ця ймовірність $P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\}$ знаходиться за правилом множення (див. формули (1.16) і (1.17))

$$P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \frac{P\{x < \xi \leq x_1, \eta \leq y\}}{P\{x < \xi \leq x_1\}}. \quad (4.21)$$

При заданій двовимірній густині ймовірності $W_{\xi\eta}(x, y)$ згідно з (4.14) і (4.15), вираз (4.21) можна переписати у наступному вигляді:

$$P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \frac{\int_{x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x', y') dx' dy'}{\int_{x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x', y') dx' dy'}. \quad (4.22)$$

Здійснивши тепер у (4.22) граничний перехід $x_1 \rightarrow x$, отримаємо функцію, яка називається **умовною інтегральною функцією розподілу випадкової величини η за умови, що $\xi = x$** :

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(y|x) &= \lim_{x_1 \rightarrow x} P\{\eta \leq y | x < \xi \leq x_1\} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y') dy'}{\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y') dy'} = \frac{1}{W_{\xi}(x)} \int_{-\infty}^y W_{\xi\eta}(x, y') dy'. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Якщо $F_{\xi\eta}(y|x)$ має часткову похідну за y

$$\frac{\partial F_{\xi\eta}(y|x)}{\partial y} = W_{\xi\eta}(y|x), \quad (4.24)$$

то вона називається **умовною (апостеріорною) густиною ймовірності або умовною функцією розподілу випадкової величини η за умови, що $\xi = x$** .

Диференціюючи (4.23) за y , отримаємо

$$W_{\xi\eta}(y|x) = \frac{W_{\xi\eta}(x, y)}{W_{\xi}(x)}, \quad (4.25 \text{ а})$$

або

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_{\xi}(x) \cdot W_{\xi\eta}(y|x). \quad (4.25 \text{ б})$$

В умовних апостеріорних функціях розподілу наявні усі властивості, які мають безумовні одновимірні функції. Зокрема, проінтегрувавши (4.25 б) за всіма можливими значеннями y з урахуванням умови узгодженості (4.15), отримаємо „умову” нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi\eta}(y|x) dy = 1. \quad (4.26)$$

З іншого боку, після інтегрування (4.25 б) за всіма можливими значеннями x , отримаємо зв'язок між умовними і безумовними розподілами:

$$W_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\xi}(x) W_{\xi\eta}(y|x) dx. \quad (4.27)$$

Аналогічним чином можна отримати вирази і для умовних функцій розподілу $F_{\xi\eta}(x|y)$, $W_{\xi\eta}(x|y)$. Наприклад, для $W_{\xi\eta}(x|y)$ справджується вираз

$$W_{\xi\eta}(x|y) = \frac{W_{\xi\eta}(x, y)}{W_{\eta}(y)}, \quad (4.28)$$

з якого випливають відповідні „умова” нормування (4.26) і зв'язок між умовними і безумовними розподілами (4.27).

4.3. Початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин

Середні від добутку цілих додатних степенів випадкових величин ξ і η називаються початковими змішаними моментами і позначаються як

$$m_{ik} = \langle \xi^i \eta^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy, \quad (4.29)$$

причому сума $i + k$ називається порядком моменту.

За аналогією з (2.26) можна ввести центральні змішані моменти:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \langle (\xi - \bar{\xi})^i (\eta - \bar{\eta})^k \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{\xi})^i (y - \bar{\eta})^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Центральний змішаний момент другого порядку M_{11} називається коваріацією випадкових величин ξ і η .

$$M_{11} = \langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.31)$$

Тут ми врахували, що позначення $\langle \xi \rangle$ і $\bar{\xi}$ еквівалентні.

Якщо випадкові величини незалежні, змішані моменти m_{ik} виражаються через добуток початкових моментів кожної із випадкових величин:

$$\begin{aligned} m_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^i W_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^k W_{\eta}(y) dy = \langle \xi^i \rangle \langle \eta^k \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Зокрема, середнє від добутку $\xi\eta$ збігається з добутком середніх:

$$m_{11} = \langle \xi \eta \rangle = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle. \quad (4.33)$$

Із визначення (4.31) видно, що коваріація M_{11} двох незалежних величин дорівнює нулю. Отже, величина M_{11} може слугувати мірою залежності між двома випадковими величинами. Як таку міру звичайно приймають коваріацію нормованих на стандарт флуктуацій $\alpha = \delta\xi/\sigma_\xi$ і $\beta = \delta\eta/\sigma_\eta$:

$$K = \langle \alpha\beta \rangle = \frac{\langle (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{\langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad (4.34)$$

яку називають коефіцієнтом кореляції (або зв'язку) двох випадкових величин. Якщо $K=0$, то випадкові величини ξ і η називаються некорельованими. З (4.33) і (4.34) видно, що незалежні випадкові величини є некорельованими. Зворотнє твердження, взагалі кажучи, хибне: некорельовані величини можуть і не бути незалежними, оскільки з рівності інтегралів (див. (4.32))

$$\begin{aligned} \langle \xi \eta \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy W_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x W_\xi(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y W_\eta(y) dy = \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

не впливає рівність підінтегральних функцій $W_{\xi\eta}(x, y) = W_\xi(x) W_\eta(y)$, яка є умовою незалежності.

Отже, коефіцієнт кореляції K незалежних величин дорівнює нулю. А яка величина його максимального значення? Доведемо, що завжди виконується нерівність

$$|K| \leq 1. \quad (4.36)$$

Розглянемо другий момент випадкових величин $\alpha \pm \beta$:

$$\langle (\alpha \pm \beta)^2 \rangle = \langle \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta \rangle = 2(1 \pm K) \geq 0. \quad (4.37)$$

При цьому ми врахували визначення (4.34) і рівність одиниці дисперсій випадкових величин α і β :

$$\langle \alpha^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\delta\xi}{\sigma_\xi} \right)^2 \right\rangle = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = 1; \quad \langle \beta^2 \rangle = 1. \quad (4.38)$$

Але у лівій частині (4.37) стоїть середнє від невід'ємної величини $(\alpha \pm \beta)^2$, отже, $1 \pm K \geq 0$, звідки і випливає нерівність (4.36). Величини ξ і η , для яких $K=1$, називають повністю корельованими, а у випадку $K=-1$ — антикорельованими. Проміжні значення K між нулем і одиницею (мінус одиницею) відповідають частково корельованим величинам. Іноді просто говорять про те, що величини ξ і η корелюють, якщо $K \neq 0$.

4.4. Функціональні перетворення випадкових величин

Окремим, але дуже важливим прикладом двох випадкових величин є ситуація, коли одна з них є детермінованою (невипадковою) функцією іншої. Отже, нехай нам дано статистично повний опис випадкової величини ξ : наприклад, нам відома її густина розподілу ймовірностей $W_\xi(x)$. Розглянемо іншу випадкову величину η , яка отримується з ξ відомим перетворенням φ : $\eta = \varphi(\xi)$. Як отримати повний статистичний опис η ? Іншими словами, як знайти густину розподілу ймовірностей $W_\eta(y)$?

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли функція $\varphi(\xi)$ є монотонною і, отже, обернена функція $\xi = f(\eta)$ є однозначною (див. рис. 4.2).

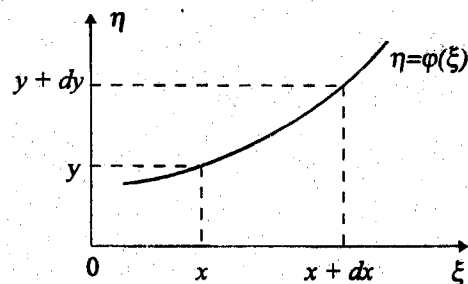


Рис. 4.2

Ймовірність того, що випадкова величина ξ потрапить в інтервал між x і $x + dx$, згідно з (2.5), дорівнює

$$dP = W_{\xi}(x)dx. \quad (4.39)$$

При цьому, як видно з рис. 4.2, випадкова величина η набуває якогось значення з інтервалу між y і $y + dy$, і, отже, ймовірність цієї події, з одного боку, збігається з (4.39), а з другого — дорівнює за визначенням $W_{\eta}(y)dy$, тобто

$$W_{\eta}(y)dy = W_{\xi}(x)dx. \quad (4.40)$$

Якщо у правій частині цієї формули виразити x через y за допомогою оберненої функції $x = f(y)$, то ми прийдемо до формули, що виражає $W_{\eta}(y)$ через задану густину ймовірності $W_{\xi}(x)$:

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x = f(y)] \cdot \left| \frac{df(y)}{dy} \right|. \quad (4.41)$$

Необхідність писати модуль від df/dy пов'язана з тим, що для монотонно спадаючої функції $\phi(x)$ додатним dx відповідають від'ємні dy , і, отже, у лівій частині формули (4.41) у цьому випадку потрібно поставити знак мінус.

Якщо функція $\phi(x)$ не є монотонною (рис. 4.3) то, події $y < \eta \leq y + dy$ відповідає одна з подій

$$x_1 < \xi \leq x_1 + dx_1, \dots, x_k < \xi \leq x_k + dx_k,$$

де x_1, \dots, x_k — корені рівняння $\phi(x) = y$: обернена функція $x = f(y)$ у цьому випадку є багатозначною і значення x_k належать різним її гілкам $x_k = f_k(y)$ (рис. 4.3).

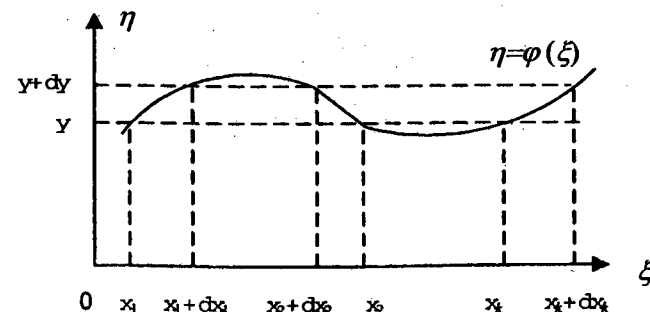


Рис. 4.3

Оскільки події ($x_k < \xi \leq x_k + dx_k, k = 1, 2, \dots$) є несумісними (випадкова величина ξ не може одночасно набувати кілька значень), то ймовірність $W_{\eta}(y)dy$ дорівнює сумі ймовірностей $W_{\xi}(x_k)dx_k$ за формулою додавання ймовірностей (1.4):

$$W_{\eta}(y)dy = \sum_k W_{\xi}(x_k)dx_k \quad (4.42)$$

Із формули (4.42) випливає, що

$$W_{\eta}(y) = \sum_k W_{\xi}[f_k(y)] \cdot \left| \frac{df_k(y)}{dy} \right|, \quad (4.43)$$

де підсумовування проводиться по всіх гілках f_k оберненої функції $f(y)$.

Як приклад розглянемо випадкову величину ξ , що рівномірно розподіляється в інтервалі $0 \leq \xi \leq \pi$ з густиною розподілу $W_\xi(x) = 1/\pi$. Знайдемо густину розподілу $W_\eta(y)$ випадкової величини $\eta = \sin \xi$. Обернена функція $x = f(y) = \arcsin y$ є двозначною в області $0 \leq x \leq \pi$, причому для кожної з двох гілок маємо $df/dy = 1/\sqrt{1-y^2}$, тому, користуючись формулою (4.43), отримуємо:

$$W_\eta(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (4.44)$$

Розглянемо тепер перетворення сукупності двох випадкових величин ξ_1 і ξ_2 у дві інші величини η_1 і η_2 . Нехай між величинами η_i і ξ_i задано функціональний зв'язок:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2). \quad (4.45)$$

Для спрощення припустимо, що існує обернене перетворення, і що воно однозначне:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2), \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2). \quad (4.46)$$

Тоді сумісна густина розподілу ймовірностей $W_\eta(y_1, y_2)$ пари випадкових величин η_1 і η_2 може бути виражена через сумісну густину розподілу $W_\xi(x_1, x_2)$ величин ξ_1 і ξ_2 за допомогою міркувань, аналогічних до вже наведених. Тут і далі для спрощення записів у багатовимірному випадку замість W_{η_1, η_2} , W_{ξ_1, ξ_2} ми писатимемо просто W_η , W_ξ , вважаючи, що нижні індекси набувають усі можливі значення $\eta = \eta_1, \eta_2$; $\xi = \xi_1, \xi_2$ тощо.

Розглядатимемо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 як декартові координати точки A на площині $\xi_1 O \xi_2$ (рис. 4.4 а). Імовірність того, що ця точка потрапить у заштрихований прямокутник зі сторонами dx_1 і dx_2 , дорівнює

$$dP = P\{x_1 < \xi_1 \leq x_1 + dx_1, x_2 < \xi_2 \leq x_2 + dx_2\} = W_\xi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (4.47)$$

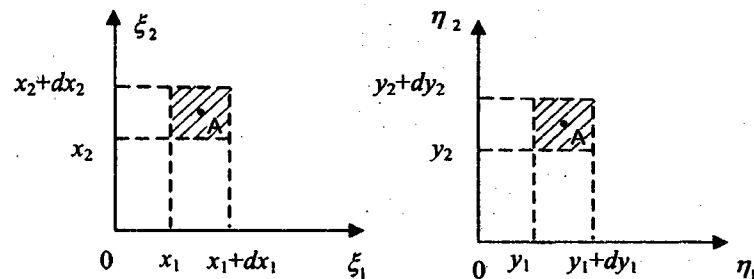


Рис. 4.4

При цьому випадкові величини η_1 і η_2 , що також розглядаються як декартові координати точки A на площині $\eta_1 O \eta_2$ потрапляють у заштрихований прямокутник (рис. 4.4 б) зі сторонами dy_1 і dy_2 . Імовірність цієї події з одного боку збігається з (4.47), а з іншого дорівнює

$$dP = P\{y_1 < \eta_1 \leq y_1 + dy_1; y_2 < \eta_2 \leq y_2 + dy_2\} = W_\eta(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad (4.48)$$

де $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$. Прирівнявши вирази (4.47) і (4.48), отримуємо

$$W_\eta(y_1, y_2) = W_\xi[x_1 = f_1(y_1, y_2), x_2 = f_2(y_1, y_2)] \cdot \left| \frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} \right|. \quad (4.49)$$

Другий співмножник у правій частині цієї формули є якобіаном переходу від змінних x_1, x_2 до змінних y_1, y_2 :

$$\frac{dx_1 dx_2}{dy_1 dy_2} = \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}. \quad (4.50)$$

Формула (4.50) має простий геометричний зміст — модуль якобіана перетворення дорівнює відношенню площі прямокутника зі сторонами dy_1 і dy_2 (рис. 4.4 б) до площі прямокутника зі сторонами dx_1 і dx_2 (рис. 4.4 а).

Користуючись формулою (4.49), знайдемо густину розподілу ймовірностей суми (різниці) $\xi_1 \pm \xi_2$ двох випадкових величин. Введемо дві нові величини:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \pm \xi_2, \quad \eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2. \quad (4.51)$$

Із (4.51) легко можна знайти обернені функції:

$$\xi_1 = f_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 \mp \eta_2, \quad \xi_2 = f_2(\eta_1, \eta_2) = \eta_2. \quad (4.52)$$

Після чого, обчисливши якобіан переходу, отримаємо:

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{array} \right| = 1. \quad (4.53)$$

В результаті формула (4.49) дає:

$$W_\eta(y_1, y_2) = W_\xi(x_1 = y_1 \mp y_2, x_2 = y_2). \quad (4.54)$$

Для того, щоб із двовимірної густини розподілу ймовірностей $W_\eta(y_1, y_2)$ отримати густину розподілу ймовірностей суми, тобто випадкової величини η_1 , яка нас і цікавить, достатньо про-

інтегрувати її за всіма значеннями y_2 другої змінної η_2 , як випливає із умов узгодженості (4.15) і (4.16):

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \mp y_2, y_2) dy_2. \quad (4.55)$$

Аналогічно до (4.55) можна отримати формули для густини розподілу ймовірностей добутку $\xi_1 \cdot \xi_2$ і частки ξ_1 / ξ_2 двох випадкових величин ξ_1, ξ_2 . Без доведення наведемо тільки остаточну відповідь.

Добуток двох випадкових величин. Увівши позначення $\eta_1 = \xi_1 \cdot \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, отримаємо

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \frac{dy_2}{|y_2|}. \quad (4.56)$$

Частка двох випадкових величин. Увівши позначення $\eta_1 = \xi_1 / \xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$, отримаємо

$$W_\eta(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\eta(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(y_1 \cdot y_2, y_2) |y_2| dy_2. \quad (4.57)$$

Розглянемо тепер загальніший випадок, коли нам задано N -вимірну густину розподілу ймовірності $W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ сукупності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ і необхідно знайти середнє значення від детермінованої функції $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ випадкових аргументів ξ_i . Аналогічно до (2.30) маємо

$$m_1(\eta) = \langle \eta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_N) W_\xi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \quad (4.58)$$

В окремому випадку, який розглядатиметься далі, формула (4.58) може бути використана для знаходження числових характеристик суми і добутку випадкових величин.

4.5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей

Розглянемо тепер статистичні характеристики суми η достатньо великої кількості N випадкових величин ξ_i :

$$\eta = \sum_{i=1}^N \xi_i. \quad (4.59)$$

Статистично повний опис сукупності випадкових величин ξ_i задається N -вимірною густиною розподілу ймовірностей $W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Згідно з (4.58) обчислимо середнє значення суми:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N \xi_i \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \right\} W_\xi(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x_i W_\xi(x_i) dx_i = \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_i. \end{aligned} \quad (4.60)$$

При знаходженні $\langle \eta \rangle$ ми скористалися властивістю узгодженості (4.15), (4.16) для W_ξ .

Припустимо тепер, що всі величини ξ_i взаємно незалежні. Це означає, що N -вимірна густина розподілу ймовірностей розпадається на добуток одновимірних:

$$W_\xi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N W_\xi(x_i). \quad (4.61)$$

З урахуванням (4.61) знайдемо дисперсію суми:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= \langle (\eta - \bar{\eta})^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{\xi}_i) \right]^2 \right\rangle = \sum_{i,k=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq k} \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

(нагадаємо, що риска вгорі і кутові дужки означають одне й те саме статистичне усереднення: $\langle \xi_i \rangle = \bar{\xi}_i$). Подвійна сума в (4.62) за різними індексами $i \neq k$ перетворюється на нуль, оскільки кожен доданок у ній є коваріацією двох незалежних величин:

$$\begin{aligned} \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)(\xi_k - \bar{\xi}_k) \rangle &= \langle \xi_i \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = \\ &= \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle - \langle \xi_i \rangle \langle \xi_k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Сума, що залишилася у (4.62) за збіжними індексами має вигляд

$$\sigma_\eta^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2, \quad (4.64)$$

де $\sigma_i^2 = \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle$ — дисперсія випадкової величини ξ_i .

Таким чином, ми отримали важливий результат: дисперсія суми незалежних величин дорівнює сумі дисперсій кожного доданка (зауважимо, що при виведенні (4.64) достатньо було б вимагати тільки взаємної некорельованості доданків, які при цьому не обов'язково мають бути незалежними).

Виявляється, що при $N \rightarrow \infty$ густина розподілу ймовірностей суми η випадкових величин ξ_i прямує до деякого універсального розподілу (який називається нормальним або розподілом Гаусса) незалежно від конкретного вигляду густини розподілу ймовірностей кожного доданка ξ_i , якщо тільки виконуються наступні умови:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_\eta^2} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_\eta^2} \sum_{k=1}^N \left| \xi_k - \bar{\xi}_k \right|^n = 0. \quad (4.65)$$

У цьому факті — зміст центральної граничної теореми теорії ймовірностей. Ми не даватимемо тут її строгого доведення, а тільки покажемо, як у окремому випадку однаково розподілених і взаємно незалежних випадкових величин ξ_i їх сума η при $N \rightarrow \infty$ стає нормально розподіленою. Позначимо через a середнє значення, а через σ^2 — дисперсію кожного доданка ξ_i у сумі (4.59):

$$\langle \xi_i \rangle = a; \quad \langle (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \rangle = \sigma^2. \quad (4.66)$$

Тоді згідно з (4.60) і (4.64), маємо:

$$\begin{aligned} \langle \eta \rangle &= Na, \\ \sigma_\eta^2 &= N\sigma^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Розглянемо нормовані флуктуації ζ_i кожного доданка ξ_i :

$$\zeta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma\sqrt{N}}$$

і всієї суми

$$z = \frac{\eta - \bar{\eta}}{\sigma_\eta} = \frac{\eta - Na}{\sigma\sqrt{N}} = \sum_{i=1}^N \zeta_i. \quad (4.68)$$

Із незалежності випадкових величин ξ_i випливає і незалежність нормованих величин ζ_i . Отже, багатовимірна густина розподілу ймовірності $W_\zeta(y_1, y_2, \dots, y_N)$ аналогічно до (4.61) розпадається на добуток одновимірних. Враховуючи це, знайдемо характеристичну функцію випадкової величини z :

$$f_z(v) = \langle e^{ivz} \rangle = \langle \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N \zeta_i \right\} \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{i=1}^N y_i \right\} W_\zeta(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ iv \sum_{k=1}^N y_k \right\} \prod_{k=1}^N W_\zeta(y_k) dy_1 dy_2 \dots dy_N = \\ &= \prod_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy_k} W_\zeta(y_k) dy_k = [f_\zeta(v)]^N, \end{aligned} \quad (4.69)$$

де $f_\zeta(v)$ — характеристична функція окремого доданка ζ_i (однакова для всіх ζ_i):

$$f_\zeta(v) = \langle e^{iv\zeta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivy} W_\zeta(y) dy. \quad (4.70)$$

Подавши експоненту під знаком інтеграла у вигляді

$$e^{ivy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} y^k,$$

після інтегрування (4.70) отримаємо

$$f_\zeta(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \langle \zeta^k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iv)^k}{k!} \frac{\langle (\xi - a)^k \rangle}{\sigma^k N^{k/2}} = 1 - \frac{v^2}{2N} + O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (4.71)$$

При $N \gg 1$ у цій формулі достатньо залишити тільки перші два відмінні від нуля доданки:

$$f_\zeta(v) \approx 1 - \frac{v^2}{2N}. \quad (4.72)$$

Підставимо (4.72) у (4.69) і перейдемо до границі $N \rightarrow \infty$:

$$f_z(v) \approx \left(1 - \frac{v^2}{2N} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-\frac{v^2}{2}}. \quad (4.73)$$

Знаючи характеристичну функцію $f_z(v)$, можна знайти густину розподілу ймовірностей $W(z)$ випадкової величини z , застосувавши зворотне перетворення Фур'є до $f_z(v)$:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz} f_z(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz - \frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (4.74)$$

Перейшовши від z за формулою (4.68) до вихідної величини η і користуючись отриманим правилом (4.41) перетворення густин розподілу ймовірностей, отримаємо остаточно:

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{-\frac{(\eta - \bar{\eta})^2}{2\sigma_\eta^2}}. \quad (4.75)$$

Це й є розподіл Гаусса або нормальний розподіл. Схематичний графік $W(\eta)$ наведено на рис. 4.5. З нього випливає, що це й є одномодальний розподіл з симетричним максимумом при $\eta = \bar{\eta}$, півширина якого на рівні $1/\sqrt{e}$ дорівнює стандарту σ_η .

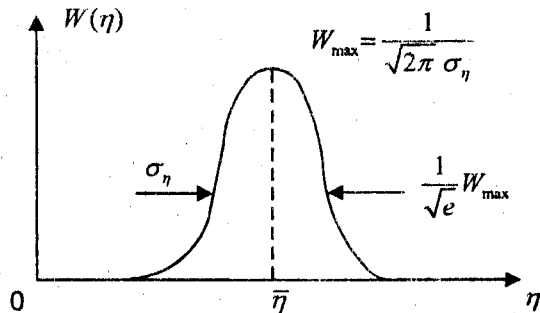


Рис. 4.5

4.6. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл відіграє надзвичайно велику роль у всій статистичній фізиці і, зокрема, у статистичній радіофізиці, оскільки флуктуації $\delta\eta = \eta - \bar{\eta}$ величин, за якими проводиться спостереження, як правило, є результатом дії великої кількості різноманітних факторів (ξ_i), які часто можна вважати незалежними й адитивними (тобто такими, що підсумовуються). Слід зазначити одну важливу властивість нормального розподілу: **будь-які лінійні перетворення нормальної випадкової величини приводять знову до нормального розподілу.**

Повернемося до задачі про розподіл двох випадкових величин ξ і η . Розглядатимемо ξ і η як декартові координати „випадкової точки” (кінця випадкового вектора $\vec{\zeta}$) на площині ξ, η (див. рис. 4.6). Окрім декартових координат положення точки можна описувати й у полярній системі — задаючи відстань ζ від початку координат і кута ν , або, іншими словами, модуля ζ і фази ν випадкового вектора $\vec{\zeta}$, що лежить у площині ξ, η :

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \nu = \arctg \frac{\eta}{\xi}. \quad (4.76)$$

Якщо як ξ і η виступають дві квадратурні компоненти якого-небудь коливального випадкового процесу, то ζ — амплітуда колювання, а ν — його фаза. З випадковими процесами ми познайомимося дещо пізніше, а зараз знайдемо вигляд густини розподілу ймовірностей $W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi)$ модуля і фази випадкового вектора, якщо відома сумісна густина розподілу ймовірностей його квадратурних складових $W_{\xi\eta}(x, y)$. Напишемо формули оберненого до (4.76) перетворення:

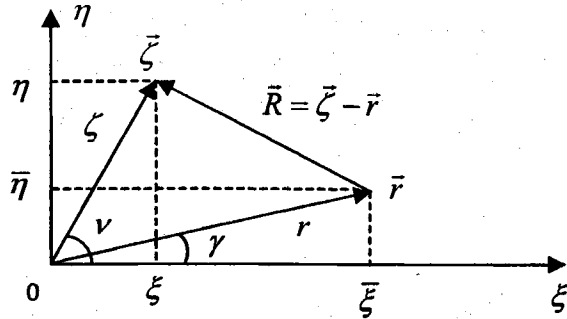


Рис. 4.6

$$\xi = \zeta \cos \nu; \quad \eta = \zeta \sin \nu \quad (4.77)$$

і скористаємося загальною формулою (4.49) перетворення W при переході від однієї сукупності змінних (ξ, η) до іншої — (ζ, ν) .

Якобіан переходу від (x, y) до (ρ, φ) обчислюється легко:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \quad (4.78)$$

Отже, згідно з (4.49) маємо:

$$W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) = \rho W_{\xi\eta}(x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi). \quad (4.79)$$

Нехай ξ і η — нормально розподілені і незалежні випадкові величини із заданими середніми значеннями $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ і однаковими дисперсіями $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$:

$$W_{\xi\eta}(x, y) = W_\xi(x)W_\eta(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(x - \bar{\xi})^2 + (y - \bar{\eta})^2 \right] \right\}. \quad (4.80)$$

Згідно з визначенням

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= r \cos \gamma, \\ \bar{\eta} &= r \sin \gamma, \end{aligned}$$

введемо у розгляд модуль r і фазу γ постійного вектора середнього зміщення $\bar{r} = \langle \bar{\zeta} \rangle$. Як видно з рис. 4.6, випадковий вектор $\bar{\zeta} = (\xi, \eta)$ у цьому випадку є сумою постійного вектора $\bar{r} = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$ і нормально розподіленого випадкового вектора $\bar{R} = \bar{\zeta} - \bar{r} = (\xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta})$, середнє значення, компонент якого дорівнює нулю. Скориставшись формулою (4.79), отримаємо

$$\begin{aligned} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\bar{\rho} - \bar{r})^2 \right\} = \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \gamma)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Проінтегрувавши (4.81) за всіма можливими значеннями кута φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), отримаємо так званий узагальнений розподіл Релея для модуля ζ :

$$W_\zeta(\rho) = \int_0^{2\pi} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{\rho r}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.82)$$

Тут $I_0(z)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку від уявного аргументу:

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi.$$

За відсутності сталого зміщення ($r=0$) функція Бесселя дорівнює 1 ($I_0(0)=1$), і узагальнений розподіл Релея (4.82) переходить у просто розподіл Релея:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.83)$$

Якщо ж ми проінтегруємо (4.81) за всіма можливими значеннями ρ , то отримаємо закон розподілу фази $W_{\nu}(\varphi)$. Зокрема, за відсутності сталого зміщення ($r=0$) отримуємо рівномірний розподіл:

$$W_{\nu}(\varphi) = \int_0^{\infty} W_{\zeta\nu}(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (4.84)$$

Сукупність графіків $W_{\zeta}(\rho)$ як функції аргументу ρ/σ за різних значень параметра r/σ наведено на рис. 4.7.

У граничному випадку $r \gg \sigma$, коли відбуваються тільки дрібні флуктуації вектора $\vec{\zeta}$ навколо постійного вектора \vec{r} , замість функції I_0 в (4.82) можна скористатися її асимптотичним поданням:

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \gg 1. \quad (4.85)$$

Унаслідок цього для не надто малих ζ , коли виконується нерівність $\zeta \gg \sigma^2/r$, з (4.82) впливає нормальний розподіл:

$$W_{\zeta}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\rho-r)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.86)$$

При цьому ми припустили, що відхилення ζ від r не надто великі: $|\zeta - r| \ll r$. У загальнішому випадку густина нормального

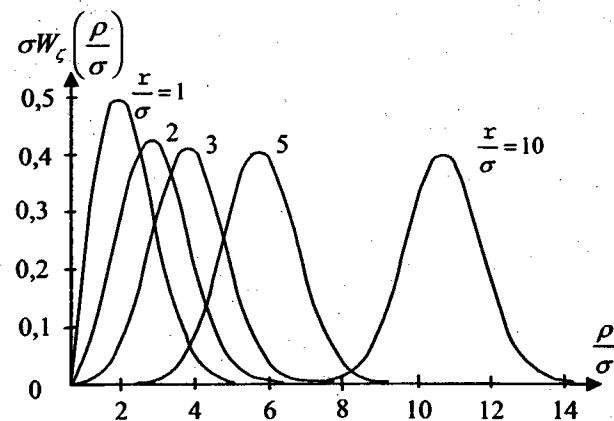


Рис. 4.7

розподілу ймовірностей сукупності двох величин ξ и η з різними середніми $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ і дисперсіями $(\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\eta}^2)$, а також відмінним від нуля коефіцієнтом кореляції (K) має вигляд

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}\sqrt{1-K^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-K^2)}\left[\frac{(x-\bar{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2} - 2K\frac{(x-\bar{\xi})(y-\bar{\eta})}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} + \frac{(y-\bar{\eta})^2}{\sigma_{\eta}^2}\right]\right\}. \quad (4.87)$$

Перехід у цьому виразі від декартових координат до полярних і подальше інтегрування за φ або ρ дає змогу отримати інші узагальнення формул (4.82), (4.84), які ми тут не наводитимемо. Детальні дослідження отримуваних при цьому функцій розподілу фази і модуля можна знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

ЗАДАЧІ

1. Випадкова величина η є лінійною функцією випадкової величини ξ : $\eta = \varphi(\xi) = a\xi + b$, де a і b – сталі величини. Знайти густину ймовірності $W_\eta(y)$ величини η при відомій густині ймовірності $W_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

Розв'язок. Спочатку визначимо обернену функцію $x = f(y) = \frac{y-b}{a}$. Оскільки $x = f(y)$ — однозначна функція, то для знаходження густини ймовірності $W_\eta(y)$ скористаємося формулою (4.41). Отримаємо

$$W_\eta(y) = W_\xi[f(y)] \left| \frac{df(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|} W_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Якщо величина ξ , наприклад, має рівномірну густину розподілу ймовірності в інтервалі $(x_1, x_2]$, то величина η буде розподілена рівномірно в інтервалі $(ax_1 + b, ax_2 + b]$.

2. Випадкова величина ξ з рівномірною густиною ймовірності

$$W_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{(b+a)}, & -a < x \leq b, a < b; \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (1)$$

підлягає квадратичному перетворенню $\eta = \xi^2$.

Визначити:

A – функцію розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ ;

B – функцію розподілу $F_\eta(y)$ і густину ймовірності $W_\eta(y)$ випадкової величини η .

Розв'язок.

A. З урахуванням визначення $W_\xi(x)$ за формулою (2.7) знаходимо $F_\xi(x)$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x W_\xi(x') dx' = \begin{cases} 0, & x \leq -a; \\ \frac{1}{b+a} x' \Big|_{-a}^x = \frac{x+a}{b+a}, & -a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (2)$$

B. При квадратичному перетворенні $y = x^2$ функція y ніколи не набуває від'ємних значень. Тому

$$F_\eta(y) = P\{\eta \leq y\} = 0 \text{ при } y \leq 0. \quad (3)$$

Для значень $x \in (-a, a]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (0, a^2]$), обернена функція $x = f(y)$ є двозначною: $x_1 = f_1(y) = +\sqrt{y}$, $x_2 = f_2(y) = -\sqrt{y}$. У цьому випадку необхідно користуватися правилом перетворення густини розподілу ймовірності (4.43) для багатозначних функцій. Отримуємо

$$W_\eta(y) = W_\xi[x = f_1(y)] \left| \frac{df_1}{dy} \right| + W_\xi[x = f_2(y)] \left| \frac{df_2}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{y}(b+a)}. \quad (4)$$

Звідси

$$F_\eta(y) = \int_0^y W_\eta(y') dy' = \frac{2\sqrt{y}}{b+a}. \quad (5)$$

На інтервалі $x \in (a, b]$ (відповідний інтервал значень y : $y \in (a^2, b^2]$) обернена функція має тільки одну гілку $x_2 = f_2(y) = \sqrt{y}$, отже, вона однозначна. Тому

$$W_{\eta}(y) = W_{\xi}[x_2(y)] \cdot \frac{dx_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y(b+a)}}, \quad (6)$$

$$F_{\eta}(y) = F_{\eta}(a^2) + \int_{a^2}^y W_{\eta}(y') dy' = \frac{1}{2(b+a)} \int_{a^2}^y \frac{dy'}{\sqrt{y'}} + \frac{2a}{b+a} = \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}. \quad (7)$$

Таким чином, підсумовуючи (3), (5) і (7), а також (4) і (6), остаточно отримуємо

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{2\sqrt{y}}{(b+a)}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{\sqrt{y}+a}{b+a}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 1, & y > b^2. \end{cases} \quad (8)$$

$$W_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{y(b+a)}}, & 0 < y \leq a^2; \\ \frac{1}{2\sqrt{y(b+a)}}, & a^2 < y \leq b^2; \\ 0, & y > b^2. \end{cases} \quad (9)$$

3. Сумісна густина ймовірності двовимірної випадкової величини (ξ, η) має вигляд

$$W_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & x \leq 0, y \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Визначити: математичні очікування $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ і дисперсію флуктуацій σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 випадкових величин ξ і η .

Розв'язок. Згідно з умовою узгодженості (4.15) і (4.16) визначимо спочатку одновимірні густини ймовірностей величин ξ і η :

$$W_{\xi}(x) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0; \quad (2)$$

$$W_{\eta}(y) = \int_0^{\infty} W_{\xi\eta}(x, y) dx = 2ye^{-y^2}, \quad y > 0.$$

За знайденими $W_{\xi}(x)$ і $W_{\eta}(y)$ знаходимо середні значення і дисперсії:

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} xW_{\xi}(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (3)$$

$$\bar{\eta} = 2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \int_0^{\infty} (x - \bar{\xi})^2 W_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 W_{\xi}(x) dx - \bar{\xi}^2 = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - \bar{\xi}^2 = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma_{\xi}^2 = 1 - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

При обчисленні формул (3÷6) ми використали наступне визначення:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \alpha > 0, \quad n > -1.$$

Тут $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера.

Розділ II

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

§ 5. Випадкові функції

Випадкові величини, з якими ми стикаємося у радіофізиці, як правило, або змінюються у часі, або набувають різних значень у різних точках простору, часто змінюються як у часі, так і в просторі, тобто є випадковими функціями часу і просторових координат. Випадкова функція часу (тобто часова розгортка випадкової величини) називається **випадковим процесом**. Очевидно, що не варто говорити про яке-небудь повністю визначене значення випадкової функції у певний момент часу: значення, яких набуває випадковий процес у кожен момент часу – випадкові величини. Осцилограма (часова розгортка) струму у найпростішому електричному колі, наведена на рис. 1.1, є однією з можливих реалізацій, яку може мати залежність струму від часу. Якщо ми зберемо багато повністю ідентичних кіл, то осцилограми струму у кожному з них, загалом, будуть цілком різними (рис. 5.1): у кожному колі (з номером k) залежність струму від часу $I_k(t)$ буде вигадливо флюктувати навколо середнього значення \bar{I} , яке є макроскопічним середнім значенням струму (наприклад тим, яке передбачається законом Ома). Кожна така осцилограма $I_k(t)$ і є k -ю реалізацією випадкової функції, а їх сукупність називається **ансамблем реалізацій**. Таким чином, будь-яка випадкова функція (у тому числі і випадковий процес) подається своїм ансамблем реалізацій. З рис. 5.1 видно, що у кожен певний момент часу t значення струму $I_k(t)$ у різних реалізаціях відмінні, тобто можна говорити тільки про ймовірність тих чи інших значень струму в момент t і оперувати з $I(t)$ як із випадковою величиною ξ .

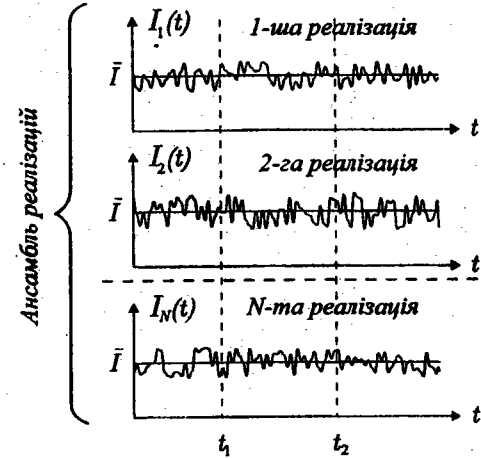


Рис. 5.1

5.1. Інтегральна функція і густина розподілу ймовірностей

Припустимо, що нам задано ансамбль з N реалізацій випадкової функції $\xi(t)$. Позначимо через $\xi_k(t)$ k -ту реалізацію з цього ансамблю. Обравши довільну величину x , для заданого значення часу t слід підрахувати кількість реалізацій n_1 з ансамблю, для яких випадкова величина $\xi(t)$ в момент часу t задовольняє умові $\xi(t) \leq x$. Побудуємо відношення $\nu_1 = n_1/N$, яке визначає частоту появи події, що розглядається. Для достатньо великих N ($N \rightarrow \infty$) величина ν_1 групуватиметься поблизу деякого числа, яке збігається з імовірністю появи події P , що розглядається, і позначається так:

$$F_1(x, t) = P\{\xi(t) \leq x\}. \quad (5.1)$$

Функція $F_1(x, t)$ називається **одноточковою** (або **одновимірною**) **інтегральною функцією розподілу ймовірностей**.

Опис випадкової функції $\xi(t)$ за допомогою (5.1) є далеко не повним: він дає змогу обчислити всі статистичні середні $\xi(t)$ у кожен момент часу t , але нічого не говорить про характер зміни з часом різних реалізацій $\xi_k(t)$. Значно багатша інформація міститься у двоточковій (або двовимірній) функції розподілу ймовірностей $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$, яку можна визначити аналогічно до $F_1(x, t)$. Для обраних моментів часу t_1 і t_2 і наперед заданих значень x_1 і x_2 підрахуємо кількість реалізацій n_2 в ансамблі N , для яких одночасно виконуються дві умови $\xi(t_1) \leq x_1$ і $\xi(t_2) \leq x_2$. Для достатньо великих N ($N \rightarrow \infty$) частота появи подій $\nu_2 = n_2/N$ групуватиметься поблизу певного значення, яке збігається з імовірністю P і позначається так:

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \xi(t_2) \leq x_2\}. \quad (5.2)$$

Якщо проміжок часу між моментами t_1 і t_2 достатньо малий, то значення $\xi(t_2)$ не можуть сильно відрізнятись від $\xi(t_1)$, тобто дві випадкові величини $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ будуть залежними й у границі $t_2 \rightarrow t_1$ збігатимуться:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_m, t_1); \quad x_m = \min(x_1, x_2). \quad (5.3)$$

Тут через $x_m = \min(x_1, x_2)$ позначено мінімальне значення з двох величин x_1 і x_2 .

Якщо ж $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$, то статистичний зв'язок між $\xi(t_1)$ і $\xi(t_2)$ має, як правило, послаблюватися, і ці величини стануть незалежними, тобто

$$\lim_{|t_2 - t_1| \rightarrow \infty} F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = F_1(x_1, t_1) F_1(x_2, t_2). \quad (5.4)$$

Аналогічно вводиться n -точкова (або n -вимірна) функція розподілу ймовірностей

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1; \dots; \xi(t_n) \leq x_n\}. \quad (5.5)$$

Повний статистичний опис випадкової функції міститься у F_n при $n \rightarrow \infty$, тобто коли наявний статистичний опис всієї сукупності випадкових величин $\xi(t_k)$ у всі моменти часу t_k .

Окрім (5.5) зручно ввести n -точкову густину розподілу ймовірностей:

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (5.6)$$

Властивості функції W_n легко з'ясувати очевидним узагальненням формул, наведених у першому розділі і попередньому параграфі, для сукупності тільки двох випадкових величин:

1. Додатна визначеність:

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \geq 0. \quad (5.7)$$

2. Симетрія відносно перестановок будь-яких пар аргументів x_i, t_i і x_k, t_k :

$$\begin{aligned} W_n(x_1, t_1; \dots; x_i, t_i; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) = \\ = W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_i, t_i; \dots; x_n, t_n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

3. Зв'язок між W_n і F_n .

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n W_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n). \quad (5.9)$$

4. Умова узгодженості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) dx_k = \\ = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{k-1}, t_{k-1}; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n). \quad (5.10)$$

Інтегрування W_n за будь-яким аргументом, наприклад, за x_k , призводить до зниження розмірності густини ймовірності на одиницю ($W_n \rightarrow W_{n-1}$). Діючи так і далі (інтегруючи за інших змінних x_i) ми, зрештою, приходимо до умови нормування.

5. Умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = 1. \quad (5.11)$$

5.2. Моменти випадкового процесу

За допомогою n -точкової густини розподілу ймовірності W_n ми можемо визначити різні статистичні характеристики (моменти) випадкового процесу $\xi(t)$. У попередньому параграфі було показано, що початкові і центральні моменти сукупності випадкових величин — це набір числових параметрів. Для випадкових процесів з урахуванням розглянутих властивостей W_n можна відразу зауважити, що моменти у загальному випадку є функціями часу. Серед усіх можливих моментів ми обмежимося розглядом тільки одноточкових і двоточкових.

1. Одноточкові початкові моменти k -го порядку:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x, t) dx. \quad (5.12)$$

2. Двоточкові початкові (або змішані початкові) моменти $i+k$ -го порядку:

$$m_{ik}(t_1, t_2) = \langle \xi^i(t_1) \xi^k(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^i x_2^k W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.13)$$

Момент $m_{11}(t_1, t_2)$ має власне позначення $R_{\xi}(t_1, t_2)$ і називається коваріаційною функцією:

$$m_{11}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.14)$$

3. Одноточкові центральні моменти k -го порядку:

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^k W_1(x, t) dx. \quad (5.15)$$

Одноточковий центральний момент другого порядку ($k=2$) називається дисперсією випадкового процесу

$$M_2(t) = \sigma_{\xi}^2(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}(t)]^2 W_1(x, t) dx. \quad (5.16)$$

4. Двоточкові центральні моменти $i+k$ порядку. Надалі нас цікавитиме головним чином двоточковий центральний момент другого порядку, який називається функцією кореляції (точніше, функцією автокореляції):

$$M_{11}(t_1, t_2) = B_{\xi}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\xi(t_2) - \bar{\xi}(t_2)] \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \bar{\xi}(t_1)][x_2 - \bar{\xi}(t_2)] W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (5.17 \text{ а})$$

Із порівняння цієї формули з (5.14) отримаємо зв'язок між функціями $B_{\xi}(t_1, t_2)$ і $R_{\xi}(t_1, t_2)$:

$$B_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2). \quad (5.17 \text{ б})$$

5. Іноді для кореляційного аналізу зручніше мати справу не з функціями $R_\xi(t_1, t_2)$ або $B_\xi(t_1, t_2)$, а з так званою **структурною функцією** $D_\xi(t_1, t_2)$, яка визначається так:

$$D_\xi(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = m_2(t_2) + m_2(t_1) - 2R_\xi(t_1, t_2). \quad (5.18)$$

Видно, що $D_\xi(t_1, t_2)$ — симетрична невід'ємна функція:

$$D_\xi(t_1, t_2) = D_\xi(t_2, t_1) \geq 0,$$

причому вона дорівнює нулю у збіжні моменти часу: $D_\xi(t_1, t_1) = 0$.

5.3. Стаціонарні випадкові процеси

Випадковий процес називається **стаціонарним**, якщо всі його статистичні характеристики не залежать від початку відліку часу, тобто якщо функція W_n не змінюється при зсуві всіх аргументів t_1, \dots, t_n на довільну величину Δt (є однорідною функцією часу):

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t). \quad (5.19)$$

Однорідність W_n відносно зсуву всіх її аргументів на довільну величину Δt викликає такі важливі наслідки.

1. Одноточкова густина розподілу ймовірності $W_1(x, t)$ для стаціонарного випадкового процесу взагалі не залежить від часу. Справді, припускаючи у (5.19) $n = 1$ і $\Delta t = -t$, отримаємо:

$$W_1(x, t) = W_1(x, t - t) = W_1(x, 0) \equiv W_1(x). \quad (5.20)$$

Із (5.20) випливає, що всі одноточкові моменти $m_k(t)$ і $M_k(t)$ стаціонарного процесу не залежать від часу:

$$m_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W_1(x) dx = \text{Const}, \quad (5.21)$$

$$M_k(t) = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{\xi}]^k W_1(x) dx = \text{Const}.$$

Зокрема, середнє значення $m_1(t) = \langle \xi(t) \rangle$ і дисперсія

$M_2(t) = \sigma_\xi^2 = \langle [\xi(t) - \bar{\xi}(t)]^2 \rangle$ стаціонарного процесу не змінюються в часі. Тут, як і раніше, косі дужки $\langle \rangle$ або риска вгорі ... означають повне статистичне усереднення, тобто усереднення за ансамблем реалізацій випадкової функції.

2. Двоточкова функція W_2 — функція тільки різниці $|t_2 - t_1|$.

Справді, припускаючи у (5.19) $n = 2$ і $\Delta t = -t_1$ (або $\Delta t = -t_2$), дійдемо висновку, що

$$\begin{aligned} W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) &= W_2(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) = \\ &= W_2(x_1, t_1 - t_2; x_2, 0) \equiv W_2(x_1, x_2; |t_2 - t_1|). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Зазначимо, що залежність від модуля різниці $|t_2 - t_1|$ є наслідком властивості симетрії (5.8). Із (5.22) випливає, що для стаціонарних випадкових процесів усі двоточкові моменти є функціями різниці $|t_2 - t_1|$. Зокрема, **коваріаційна функція** дорівнює

$$\begin{aligned} m_{11}(t_1, t_2) &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 W_2(x_1, x_2, |t_2 - t_1|) dx_1 dx_2 = R_\xi(|t_2 - t_1|). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогічно до (5.23) для центрального змішаного моменту другого порядку (автокореляційної функції) маємо

$$\begin{aligned} M_{11}(t_1, t_2) &= B_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2) = \\ &= R_\xi(|t_2 - t_1|) - \langle \xi \rangle^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Властивості кореляційних функцій стаціонарного процесу

1. Як впливає з (5.24), автокореляційна функція $B_\xi(t_1, t_2)$ є функцією тільки різниці $\tau = t_2 - t_1$. Справді, ввівши у (5.24) позначення $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, отримаємо

$$\begin{aligned} B_\xi(t_1, t_2) &= \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \\ &= R_\xi(\tau) - \langle \xi \rangle^2 = B_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.25)$$

2. Функція $B_\xi(\tau)$ є парною внаслідок (5.22):

$$B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau). \quad (5.26)$$

3. При $\tau \rightarrow \infty$ статистичний зв'язок між значенням випадкового процесу, як правило, зникає, випадкові величини $\xi(t)$ і $\xi(t + \tau)$ стають незалежними, й, отже:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_\xi(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \\ &= \langle \xi(t) \rangle \langle \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

4. При $\tau = 0$ значення $B_\xi(\tau)$ збігається з дисперсією:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} B_\xi(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} [\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - \langle \xi \rangle^2] = \\ &= \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \sigma_\xi^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5. Функція $B_\xi(\tau)$ має бути неперервною функцією τ , модуль якої $|B_\xi(\tau)|$ досягає абсолютного максимуму при $\tau \rightarrow 0$ (доведення цих важливих фактів можна знайти, наприклад, у

монографіях зі статистичної радіотехніки). Схематичний вигляд залежності $B_\xi(\tau)$ подано на рис. 5.2.

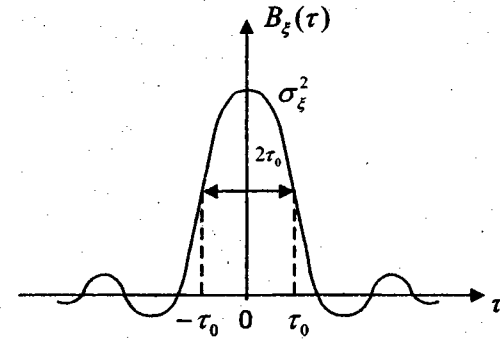


Рис. 5.2

6. Згідно з визначенням (5.18) для стаціонарного процесу легко простежується зв'язок між структурною й автокореляційною функціями:

$$\begin{aligned} D_\xi(t, \tau) &= \langle [\xi(t + \tau) - \xi(t)]^2 \rangle = \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi} - \xi(t) + \bar{\xi}]^2 \rangle = \\ &= \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi}]^2 \rangle + \langle [\xi(t) - \bar{\xi}]^2 \rangle - \\ &- 2 \langle [\xi(t + \tau) - \bar{\xi}][\xi(t) - \bar{\xi}] \rangle = 2[\sigma_\xi^2 - B_\xi(\tau)] = D_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.29)$$

З урахуванням уже зазначених властивостей $B_\xi(\tau)$ можна отримати і властивості структурної функції стаціонарного процесу. Зокрема,

$$D_\xi(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_\xi(\tau) = 2\sigma_\xi^2. \quad (5.30)$$

Схематичний вигляд $D_\xi(\tau)$ наведено на рис. 5.3.

7. Проміжок часу τ_0 , протягом якого кореляція між значеннями випадкового процесу суттєво послаблюється (наприклад, функ-

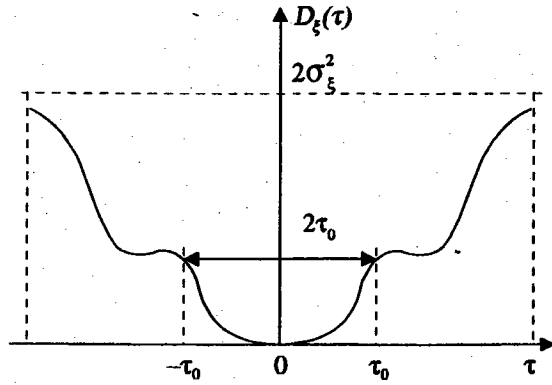


Рис. 5.3

ція автокореляції $B_\xi(\tau)$ спадає вдвічі, як показано на рис. 5.2, або в e разів — це питання домовленості), називається **часом кореляції** або **інтервалом кореляції**:

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{2} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \quad (5.31 \text{ а})$$

або

$$B_\xi(\tau_0) = \frac{1}{e} B_\xi(0) = \frac{\sigma_\xi^2}{e}. \quad (5.31 \text{ б})$$

Окрім $B_\xi(\tau)$ іноді зручно розглядати нормовану на σ_ξ^2 функцію автокореляції (або **коефіцієнт кореляції**):

$$K_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}, \quad |K_\xi(\tau)| \leq 1, \quad K_\xi(0) = 1. \quad (5.32)$$

За допомогою $K_\xi(\tau)$ час кореляції τ_0 можна формально ввести ще й так:

$$\tau_0 = \int_0^\infty K_\xi(\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \int_0^\infty B_\xi(\tau) d\tau \quad (5.33 \text{ а})$$

або

$$\left. \frac{d^2}{d\tau^2} K_\xi(\tau) \right|_{\tau=0} = -\frac{1}{\tau_0^2}. \quad (5.33 \text{ б})$$

Загалом, введені різними способами часи кореляції можуть відрізнятися між собою. Тому, користуючись поняттям „час кореляції”, кожен раз потрібно вказувати, про яке з визначень: (5.31 а, б) чи (5.33 а, б) йде мова.

Визначення

Випадкові процеси, кореляційні функції яких є функціями тільки різниці $|t_2 - t_1|$, а дисперсії σ_ξ^2 і середні значення $\langle \xi \rangle$ — не залежать від часу, називаються **стаціонарними у широкому розумінні**, на відміну від просто стаціонарних (або **стаціонарних у вузькому розумінні**), для яких виконується умова (5.19). Раніше ми показували, що зі стаціонарності у вузькому розумінні випливає стаціонарність у широкому розумінні. Зворотне твердження, взагалі кажучи, хибне: (5.17) може бути функцією тільки різниці $|t_2 - t_1|$, у той час як умова однорідності (5.19) не виконується.

5.4. Процеси зі стаціонарними прирощеннями

Існує досить великий клас нестаціонарних процесів, які як окремий випадок включають у себе і стаціонарні процеси. Ці процеси, що їх ще називають процесами зі стаціонарними прирощеннями, вперше були розглянуті А.М. Колмогоровим у 1940 р.

Розглянемо нестационарний випадковий процес $\xi(t)$ і побудуємо прирощення на інтервалі часу $(t, t+T)$ довільної, але фіксованої тривалості T :

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t). \quad (5.34)$$

Очевидно, що повільні зміни $\xi(t)$ мало впливають на значення $\eta_T(t)$ (зміни тим менші, чим більші значення характерного часу зміни $\xi(t)$). Унаслідок цього у $\eta_T(t)$ ліквідовуватимуться компоненти з великими періодами, і можливий варіант, коли процес $\eta_T(t)$ буде стаціонарним (за t , але не за T). У цьому випадку $\xi(t)$ називається випадковим процесом зі стаціонарним першим прирощенням. Припущення про стаціонарність $\eta_T(t)$ передбачає виконання умови

$$\langle \eta_T(t) \rangle = \langle \xi(t+T) \rangle - \langle \xi(t) \rangle = \text{Const}. \quad (5.35)$$

Звідси випливає, що середнє значення $\xi(t)$ може бути тільки лінійною функцією t :

$$\langle \xi(t) \rangle = at + b, \quad (5.36)$$

де a і b — деякі регулярні константи. Неважко зрозуміти, що для випадкового процесу зі стаціонарним другим прирощенням має бути стаціонарною різниця $\eta_T(t+T_1) - \eta_T(t)$, а середнє значення $\xi(t)$ буде поліномом не вище, ніж другого степеня:

$$\langle \xi(t) \rangle = at^2 + bt + c. \quad (5.37)$$

Далі ми обмежимося тільки процесами зі стаціонарними першими прирощеннями. Середнє значення вигляду (5.36) має, наприклад, процес

$$\xi(t) = \alpha t + \zeta(t), \quad (5.38)$$

де α — випадковий „коефіцієнт” із середнім значенням, що не дорівнює нулю ($\bar{\alpha} = a \neq 0$), а $\zeta(t)$ — стаціонарний випадковий процес ($\langle \zeta(t) \rangle = b$, $\langle \zeta(t+\tau)\zeta(t) \rangle = R_\zeta(\tau)$). Видно, що процес $\xi(t)$ — нестационарний, хоча б тому, що його перший момент лінійно змінюється з часом за законом (5.36). Проте перше прирощення $\eta_T(t)$

$$\eta_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t) = \alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t) \quad (5.39)$$

є стаціонарним процесом (за t , але не за T). Справді, з (5.39) видно, що середнє значення $\langle \eta_T(t) \rangle = \bar{\alpha}T = aT = \text{Const}$. Окрім того, неважко показати, що коваріаційна функція $R_{\eta_T}(t_1, t_2)$ залежить тільки від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$. Для доведення останнього твердження зробимо заміну $t_1 = t + \tau$ і $t_2 = t$, після чого отримаємо

$$\begin{aligned} R_{\eta_T}(t_1, t_2) &= \langle \eta_T(t_1)\eta_T(t_2) \rangle = \langle \eta_T(t+\tau)\eta_T(t) \rangle = \\ &= \langle [\alpha T + \zeta(t+T+\tau) - \zeta(t+\tau)][\alpha T + \zeta(t+T) - \zeta(t)] \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 T^2 + 2R_\zeta(\tau) - R_\zeta(T+\tau) - R_\zeta(T-\tau) \rangle = R_{\eta_T}(\tau). \end{aligned} \quad (5.40)$$

При виведенні формули (5.40) ми припускали, що випадкові величини α і ζ статистично незалежні ($\langle \alpha\zeta \rangle = \langle \alpha \rangle \langle \zeta \rangle$).

Для випадкового процесу зі стаціонарним першим прирощенням вигляду (5.38) обчислимо тепер структурну функцію

$$\begin{aligned} D_\xi(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_2) - \xi(t_1)]^2 \rangle = \langle [\alpha(t_2 - t_1) + \zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \\ &= \langle \alpha^2 \rangle (t_2 - t_1)^2 + \langle [\zeta(t_2) - \zeta(t_1)]^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle \tau^2 + D_\zeta(\tau) = D_\xi(\tau). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Тут $D_\zeta(\tau)$ — структурна функція стаціонарного процесу $\zeta(t)$ (див. (5.29)). Видно, що структурна функція $D_\xi(t_1, t_2)$ нестационарного процесу $\xi(t)$ також залежить тільки від різниці часу $\tau = t_2 - t_1$ і при $|\tau| \rightarrow \infty$ необмежено зростає.

Введемо у розгляд ще одну кореляційну функцію, яка називається **взаємною кореляційною функцією** двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\zeta(t)$ і визначається за формулою

$$B_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \bar{\xi}(t_1)][\zeta(t_2) - \bar{\zeta}(t_2)] \rangle. \quad (5.42)$$

Якщо ця функція є функцією тільки різниці $\tau = t_2 - t_1$, то такі процеси називаються **стаціонарно пов'язаними**.

5.5. Ергодичні процеси

У всіх наведених вище формулах припускалося, що статистичне усереднення проводиться за ансамблем реалізацій випадкової функції, тобто шляхом інтегрування виразів, які усереднюються, з густиною розподілу ймовірностей $W_n(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n)$. Проте, як правило, у нашому розпорядженні немає достатньо повного набору реалізацій, поданих на рис. 5.1. Справді, в експериментаторів звичайно є одна лабораторія і кілька ідентичних приладів, а часто — тільки один, тому доводиться робити статистичні оцінки і висновки про ймовірнісні властивості випадкового процесу тільки за однією, проте достатньо тривалою реалізацією $\xi(t)$. При цьому як характерні параметри процесу використовують середні за часом величини. Найчастіше визначають такі моменти:

1. Середнє часове реалізації

$$\bar{m}_1 = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt. \quad (5.43)$$

Цю величину можна трактувати як сталу складову реалізації.

2. Середній у часі квадрат

$$\bar{m}_2 = \overline{\xi^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt. \quad (5.44)$$

Якщо $\xi(t)$ описує флуктуації струму або напруги у колі, то момент $\overline{\xi^2(t)}$ пропорційний до середньої потужності.

3. Часова дисперсія

$$\bar{M}_2 = \overline{\sigma_\xi^2} = \overline{[\xi(t) - \bar{m}_1]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{m}_1]^2 dt. \quad (5.45)$$

Її можна трактувати як середню потужність флуктуацій

4. Нарешті, вкажемо на часову кореляційну функцію

$$\bar{m}_{11} = \overline{R_\xi(\tau)} = \overline{\xi(t)\xi(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau) dt \quad (5.46)$$

і **часову автокореляційну функцію**

$$\bar{M}_{11} = \overline{B_\xi(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \bar{m}_1][\xi(t+\tau) - \bar{m}_1] dt = \overline{R_\xi(\tau)} - \bar{m}_1^2. \quad (5.47)$$

Тут і надалі усереднені за часом характеристики ми позначатимемо хвилястою рисою вгорі.

Слід зазначити, що не для будь-якого випадкового процесу наведені часові середні існують. Проте, навіть, якщо вони існують, то для різних реалізацій вони можуть бути різними. Виникає питання — для яких процесів введені характеристики мають зміст, і який зв'язок існує між середніми за часом і за ансамблем реалізацій? Зокрема, для яких випадкових процесів усереднення за ансамблем реалізацій можна замінити на усереднення за часом?

Виявляється, що існує цілий клас випадкових процесів, у яких часові характеристики з як завгодно близькою до одиниці ймовірністю збігаються з відповідними характеристиками, отриманими шляхом усереднення за ансамблем реалізацій

($\widetilde{m}_1 = m_1, \widetilde{m}_2 = m_2, \widetilde{M}_2 = M_2, \widetilde{m}_{11} = m_{11}, \widetilde{M}_{11} = M_{11}$ та ін.). Такі процеси називаються **ергодичними**. Властивість ергодичності виявляється дуже корисною, оскільки за окремою реалізацією шляхом її усереднення за часом можна знаходити статистичні характеристики процесу, не застосовуючи усереднення за ансамблем.

Необхідною умовою ергодичності випадкового процесу є його стаціонарність. Ця умова легко пояснюється. Для стаціонарних процесів усі одноточкові моменти є сталими величинами, а двоточкові — функціями різниці часу τ . Точно така сама залежність буде і при часовому усередненні згідно з формулами (5.43 ÷ 5.46). З іншого боку, уявимо такий експеримент. Достатньо довгу реалізацію стаціонарного процесу $\xi(t)$ розіб'ємо на окремі „шматки” $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) приблизно рівної тривалості $T_i \approx T$. Якщо інтервал розбивання T набагато перевищує характерний радіус кореляції τ_0 автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ ($T \gg \tau_0$), то кожен з відрізків нестиме у собі повну інформацію про весь процес у цілому. При цьому часові характеристики (5.43 ÷ 5.46), обчислені для кожного відрізка $\xi_i(t)$ за кінцевим інтервалом $(0, T)$, будуть мало відрізнятися від своїх граничних значень для всього процесу. Розташуємо тепер усі відрізки $\xi_i(t)$ так, як це показано на рис. 5.1, і ми отримаємо відповідний „ансамбль реалізацій” з тими самими ймовірнісними характеристиками.

Потрібно, проте, зазначити, що стаціонарність процесу є необхідною, але не достатньою умовою ергодичності. Виявляється, що не в усіх часових характеристиках стаціонарний процес є ергодичним. Для одних характеристик властивість ергодичності може виконуватися, а для інших — ні. У зв'язку з цим

уводять поняття ергодичності відносно конкретних характеристик процесу. Наприклад, стаціонарний процес $\xi(t)$ буде ергодичний відносно математичного сподівання, тобто

$$\widetilde{m}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt = m_1, \quad (5.48)$$

якщо і тільки якщо виконується умова

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_\xi(\tau) d\tau = 0. \quad (5.49)$$

З іншого боку, гауссівський стаціонарний процес ергодичний відносно дисперсії флуктуацій, тобто

$$\widetilde{\sigma}_\xi^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - \widetilde{m}_1]^2 dt = \sigma_\xi^2, \quad (5.50)$$

якщо і тільки якщо виконується умова

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_\xi^2(\tau) d\tau = 0. \quad (5.51)$$

Детальне дослідження питання про достатні умови ергодичності інших характеристик стаціонарного процесу можна, наприклад, знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

ЗАДАЧІ

1. Визначити, чи має функція

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(ch(\omega_0 \tau) + \frac{\alpha}{\omega_0} sh(\omega_0 |\tau|) \right), \quad \alpha > 0, \omega_0 > 0 \quad (1)$$

властивості автокореляційної функції.

Розв'язок. Для відповіді на поставлене питання необхідно перевірити виконання наступних умов.

1. Автокореляційна функція при $\tau = 0$ збігається з дисперсією σ_ξ^2 , отже, має бути додатною величиною: $B_\xi(0) > 0$.

2. Автокореляційна функція повинна бути функцією парною: $B_\xi(\tau) = B_\xi(-\tau)$.

3. Модуль автокореляційної функції $|B_\xi(\tau)|$ має досягати абсолютного максимуму при $\tau \rightarrow 0$: $|B_\xi(\tau)| \leq B_\xi(0)$. З іншого боку, при $\tau \rightarrow \infty$ $B_\xi(\tau)$ повинна перетворюватися на 0: $B_\xi(\infty) = 0$.

З аналізу виразу (1) для $B_\xi(\tau)$ видно, що умови 1 і 2 виконуються. Для перевірки умови 3 зобразимо функцію $B_\xi(\tau)$ для додатних значень τ у вигляді

$$B_\xi(\tau) = \frac{\sigma_\xi^2}{2} \left[e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right], \tau \geq 0. \quad (2)$$

Оскільки $B_\xi(0) = \sigma_\xi^2$, то для виконання умови 3 необхідно, щоб вираз у квадратних дужках за модулем не перевищував 2:

$$\left| e^{-(\alpha - \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} + 1 \right) - e^{-(\alpha + \omega_0)\tau} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} - 1 \right) \right| \leq 2. \quad (3)$$

Неважко показати, що ця нерівність виконується тільки при $\alpha > \omega_0$. Справді, при $\alpha < \omega_0$ і $\tau \rightarrow \infty$ функція $\exp[-(\alpha - \omega_0)\tau]$ необмежено зростає. З іншого боку, випадок $\alpha = \omega_0$ має бути виключений з розгляду тому, що згідно з (3) не виконується умова $B_\xi(\infty) = 0$. До такого самого висновку веде й аналіз виразу $B_\xi(\tau)$ при $\tau < 0$.

Підсумовуючи все сказане, дійдемо висновку, що функція $B_\xi(\tau)$ задовольняє всі властивості автокореляційної функції тільки при $\alpha > \omega_0$.

2. Випадковий процес $\xi(t) = f(t, \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ є синусоїдою з випадковою фазою φ , яка рівномірно розподілена в інтервалі $[-\pi, \pi]$. Перевірити цей процес на ергодичність.

Розв'язок. Для перевірки на ергодичність заданого процесу $\xi(t)$ слід обчислити середнє значення $\bar{\xi}$, дисперсію σ_ξ^2 і автокореляційну функцію $B_\xi(t_1, t_2)$ двома способами (шляхом усереднень за ансамблем реалізацій і за часом), а після цього порівняти отримані результати.

А. Усереднення за ансамблем.

$$\bar{\xi}(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0. \quad (1)$$

$$\sigma_\xi^2 = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \overline{\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t, \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t, \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] d\varphi = \frac{A^2}{2}. \quad (2)$$

З урахуванням того, що $\bar{\xi} = 0$, обчислимо автокореляційну функцію $B_\xi(t_1, t_2) = \langle f(t_1, \varphi) f(t_2, \varphi) \rangle$. Поклавши $t_2 = t + \tau$, $t_1 = t$, отримаємо

$$B_\xi(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \varphi) \xi(t + \tau, \varphi) W(\varphi) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot A \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) \cdot d\varphi = \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = B_{\xi}(\tau).
\end{aligned} \quad (3)$$

Із формул (1 ÷ 3) видно, що процес $\xi(t)$ стаціонарний.

В. Усереднення за часом.

$$\bar{\xi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_0^T \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 0. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma_{\xi}^2} &= \widetilde{\xi^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \varphi) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] dt = \frac{A^2}{2} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} \sin 2(\omega_0 t + \varphi) \Big|_0^T = \frac{A^2}{2}. \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\widetilde{B_{\xi}(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \varphi) f(t + \tau, \varphi) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^T \left\{ \cos \omega_0 \tau - \cos [2(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0 \tau] \right\} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \quad (6)$$

Із порівняння формул (1 ÷ 3) і (4 ÷ 6) видно, що знайдені значення $\bar{\xi}$, σ_{ξ}^2 і $B_{\xi}(\tau)$ не залежать від способу усереднення. Отже, аналізований процес можна вважати ергодичним.

§ 6. Спектральний аналіз випадкових процесів

При вивченні детермінованих процесів часто застосовується гармонійний аналіз. Періодичні процеси подаються у вигляді рядів Фур'є, а аперіодичні — інтегралів Фур'є. При цьому розв'язок багатьох

фізичних задач, що зводяться до лінійних рівнянь, значно спрощується. Це пов'язано з тим, що лінійні перетворення (наприклад, інтегрування і диференціювання) не змінюють вигляду функції $e^{i\omega t}$, викликаючи тільки множення або ділення її на незалежні від t множники. Хотілося б мати настільки ж простий і ефективний математичний апарат і при аналізі випадкових процесів.

6.1. Енергетичний спектр стаціонарного процесу.

Формула Вінера-Хінчіна

Запишемо формально перетворення Фур'є для випадкового стаціонарного процесу $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.1)$$

Обернене перетворення має вигляд

$$C_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.2)$$

Величина $C_{\xi}(\omega)$ називається трансформантою Фур'є. Для спрощення подальшого аналізу вважатимемо, що випадкова функція $\xi(t)$ описує флуктуації якоїсь величини навколо її середнього значення, так що $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Урахування середньої величини ($\langle \xi(t) \rangle \neq 0$) зводиться до простої заміни $\xi(t) \rightarrow \delta \xi$. Перетворення (6.1) і (6.2) ми назвали формальним тому, що стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ у загальному випадку не задовольняє вимогу спадання на нескінченності й, отже, трансформанта Фур'є $C_{\xi}(\omega)$ як така не існує. Нагадаємо, що перетворення Фур'є можливе тільки для абсолютно інтегрованих функцій, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)| dt \leq M,$$

де M — деяка стала величина. Для того, щоб надати спектральним розкладам випадкових полів коректний математичний зміст, припускають, що процес $\xi(t)$ стаціонарний всередині якогось великого, але скінченного інтервалу $-T \leq t \leq T$ і швидко спадає до нуля за його межами:

$$\xi_T(t) = \begin{cases} \xi(t), & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Для побудованої таким чином випадкової функції $\xi_T(t)$ Фур'є-спектр існує і має вигляд

$$C_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \xi_T(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Далі на обраному інтервалі $-T \leq t \leq T$ будуються середньоквадратичні корелятори $\langle \xi_T(t_1) \xi_T(t_2) \rangle$, $\langle C_T(\omega_1) C_T^*(\omega_2) \rangle$ і встановлюється між ними зв'язок через перетворення Фур'є. Після цього переходять до границі $T \rightarrow \infty$, в результаті чого отримують математично коректний результат. Ми, проте, не використовуватимемо такого роду прийомів, а вважатимемо, що інтеграли (6.1) і (6.2) існують у розумінні ймовірнісної збіжності, а саме у середньому квадратичному.

Застосувавши операцію комплексного спряження до (6.1), отримуємо

$$\xi^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}^*(-\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

Праву частину (6.3) отримано внаслідок заміни змінної інтегрування $\omega \rightarrow -\omega$. Для дійсної функції $\xi(t) = \xi^*(t)$ і підінтегральний вираз у (6.3) має збігатися з аналогічним у (6.1). Звідси випливає важлива властивість „ермітовості” функції $C_{\xi}(\omega)$:

$$C_{\xi}^*(-\omega) = C_{\xi}(\omega), \quad C_{\xi}(-\omega) = C_{\xi}^*(\omega). \quad (6.4)$$

З урахуванням того, що $\xi(t)$ є випадковою функцією з нульовим середнім значенням ($\langle \xi \rangle = 0$), з (6.2) випливає, що $C_{\xi}(\omega)$ також є випадковою функцією, причому $\langle C_{\xi}(\omega) \rangle = 0$.

Виразимо тепер автокореляційну функцію стаціонарного процесу $\xi(t)$ через корелятор Фур'є-компоненти $C_{\xi}(\omega)$:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (6.5 \text{ а})$$

Виконавши під знаком інтегралу заміну змінної $\omega' \rightarrow -\omega'$ з урахуванням властивості ермітовості (6.4), формулу (6.5 а) можна переписати ще й так:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle e^{i(\omega-\omega')t+i\omega\tau} d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (6.5 \text{ б})$$

Для того, щоб інтеграли у (6.5 а, б) не залежали від t (а тільки від τ — за умовою стаціонарності), необхідно, щоб підінтегральні функції перетворювалися на нуль на всій площині (ω, ω') , окрім ліній: $\omega' + \omega = 0$ для виразу (6.5 а) і $\omega' - \omega = 0$ для виразу (6.5 б), де

залежні від t експоненти $\exp\{i(\omega \pm \omega')t\}$ тотожно дорівнюють одиниці. Для цього необхідно, щоб перетворювалися на нуль корелятори компонент Фур'є:

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega + \omega' \neq 0, \quad (6.6 \text{ а})$$

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle = 0, \quad \text{при } \omega - \omega' \neq 0. \quad (6.6 \text{ б})$$

При цьому інтеграли (6.5) мають зводитися, взагалі кажучи, до відмінної від нуля функції $B_{\xi}(\tau)$. Це можливо тільки у тому випадку, якщо корелятори $\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle$, $\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle$ мають особливості типу δ -функції:

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega), \quad (6.7)$$

$$\langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}^*(\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') S_{\xi}(\omega). \quad (6.8)$$

Уведену формулами (6.7) і (6.8) функцію $S_{\xi}(\omega)$ називають енергетичним спектром потужності стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

Підставляючи (6.7), (6.8) у (6.5 а, б) та інтегруючи за $d\omega'$ за допомогою δ -функції, отримуємо формулу Вінера-Хінчіна:

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.9)$$

Обернене Фур'є-перетворення дає:

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.10)$$

Із формул (6.9) і (6.10) можна отримати наступні корисні нам далі співвідношення.

Зокрема, при $\tau = 0$ з (6.9) випливає:

$$B_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (6.11 \text{ а})$$

З іншого боку, поклавши у (6.10) $\omega = 0$, отримаємо:

$$S_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau. \quad (6.11 \text{ б})$$

Необхідно коротко пояснити походження назви „енергетичний спектр” на прикладі з радіотехніки. Якщо $\xi(t)$ описує флуктуації струму у колі або напруги на якомусь опорі, то дисперсія $\sigma_{\xi}^2 = \langle \xi^2 \rangle$ з точністю до сталого множника має зміст середньої потужності процесу — енергії, що виділяється за одиницю часу. З формули (6.11 а) випливає, що ця енергія представляється у вигляді суми „енергій” окремих спектральних компонент — $S_{\xi}(\omega) d\omega$, які можна ототожнити з енергією процесу в інтервалі частот від ω до $\omega + d\omega$. Інакше кажучи, функція $S_{\xi}(\omega)$ описує густину розподілу енергії процесу за частотами ω , тобто за спектром (тому іноді енергетичний спектр називають ще спектральною густиною).

Властивості $S_{\xi}(\omega)$

1. Із визначення (6.8) видно, що $S_{\xi}(\omega)$ — додатна функція. Справді, переходячи у (6.8) до границі $\omega' \rightarrow \omega$, отримуємо, що $S_{\xi}(\omega)$ з точністю до нормувального множника збігається з $\langle |C_{\xi}(\omega)|^2 \rangle$ — середнім квадратом амплітуди однієї спектральної компоненти, тобто середньою потужністю — величиною в кожному разі невід'ємною.

2. Із (6.10) з урахуванням, того, що $B_{\xi}(\tau)$ дійсна і парна, випливає, що $S_{\xi}(\omega)$ — дійсна і парна функція:

$$S_{\xi}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}(\omega), \quad (6.12)$$

$$S_{\xi}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = S_{\xi}^*(\omega) = S_{\xi}(\omega). \quad (6.13)$$

Легко переконатися в тому, що парність і дійсність функцій $B_{\xi}(\tau)$ і $S_{\xi}(\omega)$, дає змогу у формулах (6.9) і (6.10) довільно змінювати знаки перед уявною одиницею i в показниках експонент.

3. Характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$ пов'язана з характерним часом $\Delta\tau$ зміни автокореляційної функції $B_{\xi}(\tau)$ деяким співвідношенням, яке часто називають „співвідношенням невизначеностей”.

$$\Delta\omega \Delta\tau = Const. \quad (6.14)$$

Із цієї формули зокрема випливає, що чим „ширший” спектр $S_{\xi}(\omega)$, тим „вужча” автокореляційна функція $B_{\xi}(\tau)$, і навпаки. Таке твердження легко пояснюється за допомогою рис. 6.1 і наступних простих міркувань. Аналогічно до формули (5.33 а) визначимо характерну ширину $B_{\xi}(\tau)$ як

$$\Delta\tau = \frac{1}{B_{\xi}(0)} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{\pi S_{\xi}(0)}{B_{\xi}(0)}. \quad (6.15 а)$$

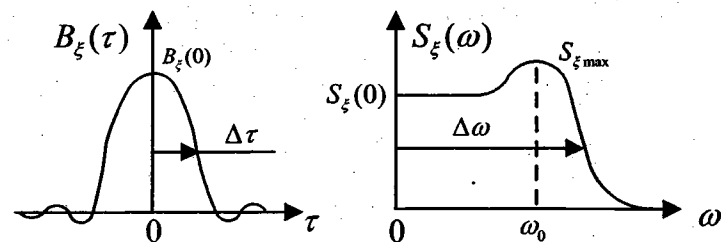


Рис. 6.1

Подібним чином можна ввести і поняття характерної ширини $\Delta\omega$ енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$:

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_{\xi \max}(\omega_0)} \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{B_{\xi}(0)}{2S_{\xi \max}(\omega_0)}. \quad (6.15 б)$$

Через $S_{\xi \max}(\omega_0)$ тут позначено максимальне значення енергетичного спектра $S_{\xi}(\omega)$, що досягається на деякій частоті ω_0 (див. рис. 6.1). При написанні формул (6.15) ми врахували співвідношення (6.11).

Помноживши тепер (6.15 а) і (6.15 б), отримаємо

$$\Delta\omega \Delta\tau = \frac{\pi}{2} \frac{S_{\xi}(0)}{S_{\xi \max}(\omega_0)} = Const. \quad (6.16)$$

Величина $Const$ у (6.16) залежить від виду спектра $S_{\xi}(\omega)$ і від способу визначення характерної ширини $\Delta\tau$ і $\Delta\omega$. Наприклад, для низькочастотних спектрів $S_{\xi \max}(\omega_0) \approx S_{\xi}(0)$ і $Const \approx \pi/2 \approx 1$. З іншого боку, як $\Delta\tau$ можна вважати раніше введений час кореляції процесу τ_0 тощо.

Підсумовуючи викладене, зазначимо, що „співвідношення невизначеностей” є наслідком загальної теорії перетворення Фур’є, а не якихось специфічних властивостей автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ або енергетичного спектра $S_\xi(\omega)$ випадкового процесу.

Як *приклад* розглянемо співвідношення невизначеностей для гауссової автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$:

$$B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\tau^2/2\tau_0^2}.$$

За допомогою формули Вінера-Хінчіна (6.10) знайдемо, що енергетичний спектр $S_\xi(\omega)$ також є гауссовою кривою:

$$S_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} - i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_\xi^2 \tau_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{2}}.$$

Для цих залежностей $B_\xi(\tau)$ і $S_\xi(\omega)$ згідно з формулами (6.15)

$$\text{отримаємо } \Delta\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \tau_0, \quad \Delta\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\tau_0} \quad \text{і} \quad \Delta\omega \cdot \Delta\tau = \pi/2 \approx 1.$$

З іншого боку, за $\Delta\tau$ ми можемо вибрати значення τ за рівнем $B_\xi(0)/\sqrt{e}$. У цьому випадку, як легко побачити, $\Delta\tau = \tau_0$. Таким самим способом, оцінивши характерну ширину енергетичного спектра $\Delta\omega$ за рівнем $S_\xi(0)/\sqrt{e}$, отримаємо $\Delta\omega = 1/\tau_0$. У результаті співвідношення невизначеностей має вигляд $\Delta\omega \cdot \Delta\tau = 1$.

Незважаючи на те, що строга рівність $\Delta\tau \cdot \Delta\omega = \pi/2$ справджується тільки для гауссових спектрів, співвідношенням $\Delta\tau \cdot \Delta\omega \approx 1$ часто користуються для оцінки ширини смуги процесу (ширини його енергетичного спектра $\Delta\omega$) за відомим часом

кореляції, вважаючи $\tau_0 \approx \Delta\tau$. Навпаки, знаючи ширину смуги випадкового процесу $\Delta\omega$, користуючись (6.16), можна оцінити його час кореляції τ_0 .

Записавши пару Фур’є-перетворень у вигляді (6.1), (6.2), ми неявно припустили, що спектр процесу – неперервний. У випадку **дискретного спектра** замість інтеграла (6.1) слід писати суму:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}, \quad (6.17)$$

де ω_n — зліченна множина частот (можливо, і нескінченна). Якщо процес періодичний (з періодом T), то $\omega_n = n\omega_0$, де $\omega_0 = 2\pi/T$, тобто спектр складається з еквідистантних (рівновіддалених одна від одної) дискретних частот. У загальному ж випадку, коли $\omega_n \neq n\omega_0$, розклад (6.17) є поданням майже періодичного процесу, для автокореляційної функції якого замість (6.5) має місце формула

$$B_\xi(t, \tau) = \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \langle C_n C_m^* \rangle e^{i(\omega_n - \omega_m)t + i\omega_n \tau}, \quad (6.18)$$

звідки випливає, що для стаціонарності процесу необхідно, щоб виконувалася умова, аналогічна до (6.8):

$$\langle C_n C_m^* \rangle = \delta_{nm} S_n, \quad (6.19)$$

де δ_{nm} — символ Кронекера ($\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$, $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$). Таким чином, автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ майже періодичного випадкового процесу подається у вигляді:

$$B_\xi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{i\omega_n \tau}. \quad (6.20)$$

Якщо ввести енергетичний спектр $S_{\xi}(\omega)$ співвідношенням

$$S_{\xi}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_n) S_n, \quad (6.21)$$

то (6.20) можна розглядати як окремий випадок формули (6.9).

У формулі (6.9) є суттєва хиба — в інтеграл за $d\omega$ входить ділянка від'ємних частот, яка не додає жодної нової інформації про процес у порівнянні з додатними частотами, оскільки $S_{\xi}(\omega)$ — парна функція за умовою (6.13). Для того, щоб у (6.9) позбутися від'ємних частот, розіб'ємо область інтегрування за $d\omega$ на дві півосі, зробимо в інтегралі за від'ємною півоссю ($\omega < 0$) заміну змінної інтегрування $\omega \rightarrow -\omega$ і скористаємося парністю $S_{\xi}(\omega)$:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^0 S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}] d\omega = \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} S_{\xi}^{(+)}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Енергетичний спектр потужності $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$, що належить тільки до додатних частот, має відповідно, вигляд:

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = 2S_{\xi}(\omega), \quad \omega \geq 0. \quad (6.23)$$

Аналогічні перетворення формули (6.10) з урахуванням парності $B_{\xi}(\tau)$ ведуть до виразу для $S_{\xi}^{(+)}(\omega)$ через значення $B_{\xi}(\tau)$ тільки при додатних τ :

$$S_{\xi}^{(+)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (6.24)$$

Коментарі

Як уже зазначалося на початку цього параграфа, перетворення Фур'є можливе тільки для абсолютно інтегрованих функцій. Це означає, що формули Вінера-Хінчіна (6.9) і (6.10) справджуються, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_{\xi}(\tau)| d\tau \leq N, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\xi}(\omega)| d\omega \leq P,$$

де P і N — деякі константи. Ця умова накладає суттєві обмеження на область застосування Фур'є-аналізу стосовно випадкових процесів. Формули справджуються тільки для стаціонарних процесів, середнє значення яких дорівнює нулю, й у яких немає також квазидетермінованих складових.

6.2. Аналітичний сигнал

Під час дослідження фізичних систем, що описуються лінійними рівняннями, особливу роль відіграють гармонійні коливання виду

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \Phi), \quad (6.25)$$

де A — амплітуда коливання, а Φ — його фаза. Значне спрощення математичних обчислень при розв'язуванні лінійних інтегродиференціальних рівнянь досягається, як відомо, шляхом переходу від дійсної функції (6.25) до комплексної

$$\zeta(t) = A e^{i(\omega t + \Phi)} \quad (6.26)$$

з причин, які вже обговорювалися на початку цього параграфа. А що робити у загальному випадку довільного, взагалі кажучи, негармонійного процесу $\xi(t)$? Зрозуміло, що існує незліченна множина комплексних функцій $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, таких, що

$\operatorname{Re} \zeta(t) = \xi(t)$, але як побудувати таку схему переходу від $\xi(t)$ до $\zeta(t)$, щоб можна було однозначно ставити кожному процесу $\xi(t)$ у відповідність комплексну функцію $\zeta(t)$, реальна частина якої збігається з $\xi(t)$? Шуканий метод побудови $\zeta(t)$, по-перше, не має потребувати додаткової порівняно з уже відомою $\xi(t)$ інформації, а по-друге, у випадку гармонійних процесів (6.25) повинен приводити $\zeta(t)$ до (6.26).

Найприродніший спосіб введення $\zeta(t)$ за заданою $\xi(t)$ ґрунтується на її спектральному поданні (6.1):

$$\zeta(t) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.27)$$

де $C_{\xi}(\omega)$ — перетворення Фур'є (6.2) функції $\xi(t)$. Уведену таким чином комплексну функцію $\zeta(t)$ називають аналітичним сигналом, що відповідає дійсному процесові $\xi(t)$. Беручи до уваги властивість ермітовості (6.4) Фур'є-компоненти $C_{\xi}(\omega)$, переконуємося у тому, що $\operatorname{Re} \zeta(t)$ справді збігається з $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \zeta(t) &= \frac{1}{2} [\zeta(t) + \zeta^*(t)] = \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} + C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \xi(t). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Для уявної частини $\operatorname{Im} \zeta(t) \equiv \eta(t)$, яку називають **квадратурною компонентою** або **спряженим процесом**, маємо наступний розклад Фур'є:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \zeta(t) &= \frac{1}{2i} [\zeta(t) - \zeta^*(t)] = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} [C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} - C_{\xi}^*(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega = \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega - \frac{1}{i} \int_{-\infty}^0 C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \eta(t), \end{aligned} \quad (6.29)$$

причому спектр $\tilde{C}_{\xi}(\omega)$ пов'язаний із $C_{\xi}(\omega)$ формулою

$$\tilde{C}_{\xi}(\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) C_{\xi}(\omega), \quad (6.30)$$

де

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0; \\ 0, & \omega = 0; \\ -1, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Легко перевірити, що з урахуванням визначень (6.28), (6.29) ми отримуємо вихідну формулу (6.27):

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \xi(t) + i\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [C_{\xi}(\omega) + i\tilde{C}_{\xi}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{\xi}(\omega) [1 + \operatorname{sgn}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Між $\xi(t)$ і $\eta(t)$ можна встановити і безпосередній зв'язок, не застосовуючи розкладу Фур'є, а використовуючи тільки властивість аналітичності функції

$$\zeta(z) = 2 \int_0^{\infty} C_{\xi}(\omega) e^{i\omega z} d\omega, \quad (6.32)$$

у верхній півплощині ($\alpha > 0$) комплексної змінної $z = t + i\alpha$. Справді, при $\alpha > 0$ інтеграл (6.32) збігається за рахунок

експоненціального множника $e^{-\alpha\omega}$ при будь-яких t , якщо вихідна функція $\xi(t)$ не має особливостей. Якби залежність від часу у (6.27) ми обрали у вигляді $e^{-i\omega t}$, то $\zeta(t)$ була б аналітичною у нижній півплощині ($\alpha < 0$). Оточимо точку $z = t + i\alpha$ на рис. 6.2

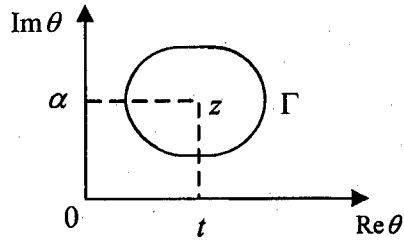


Рис. 6.2

довільним замкнутим контуром Γ , що цілком лежить у верхній півплощині, і скористаємося формулою Коші

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.33)$$

Оскільки $\zeta(\theta)$ не має особливостей у верхній півплощині, контур Γ можна розтягнути так, щоб він складався з дійсної осі і нескінченно віддаленого півкола, інтеграл за яким дорівнює нулю через швидке спадання $\zeta(t + i\alpha)$ при $\text{Im } \theta \rightarrow +\infty$. Таким чином, у (6.33) контур Γ можна трансформувати у дійсну вісь:

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - z} d\theta. \quad (6.34)$$

Спрямовуватимемо тепер точку $z = t + i\alpha$ до дійсної осі t ($\alpha \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - z} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\theta - t - i\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t + i\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta - t}{(\theta - t)^2 + \alpha^2} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{(\theta - t)^2 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Згідно з формулою (2.19 а), другий доданок у (6.35) при $\alpha \rightarrow 0$ переходить в $i\pi\delta(\theta - t)$, а інтеграл від першого – є інтегралом у розумінні головного значення. Підставляючи (6.35) в (6.34) і переходячи до границі $\alpha \rightarrow 0$, отримуємо:

$$\zeta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta) d\theta}{\theta - t} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\theta) \delta(\theta - t) d\theta. \quad (6.36)$$

Звідси випливає **формула Сохоцького**

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi i} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\theta)}{\theta - t} d\theta.$$

Тут уведено таке позначення: **V.p.** — перші літери від слів “**Valeur principale**”, що по-французьки означає “**головне значення**”.

Виділяючи тепер в останньому виразі дійсну й уявну частини, отримуємо, що $\text{Re } \zeta(t) = \xi(t)$ і $\text{Im } \zeta(t) = \eta(t)$ пов’язані між собою перетвореннями Гільберта:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\theta)}{\theta - t} d\theta, \quad (6.37 \text{ а})$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - t} d\theta. \quad (6.37 \text{ б})$$

Ці перетворення можна записати й інакше:

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta(t+\theta) - \eta(t-\theta)}{\theta} d\theta, \quad (6.37 \text{ в})$$

$$\eta(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi(t+\theta) - \xi(t-\theta)}{\theta} d\theta.$$

Таким чином, для побудови аналітичного сигналу $\xi(t)$ за заданим дійсним процесом $\xi(t)$ не потрібно спочатку знаходити перетворення Фур'є $C_{\xi}(\omega)$ від $\xi(t)$, а після цього будувати спряжений процес $\eta(t)$ за формулою (6.29) — функція $\eta(t)$ може бути побудована безпосередньо за $\xi(t)$ перетворенням Гільберта (6.37 б); $\eta(t)$ називають ще спряженим за Гільбертом процесом відносно $\xi(t)$. Легко переконатися в тому, що для гармонічного процесу (6.25) безпосереднє обчислення інтеграла (6.37 б) дає $\eta(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$ і, отже, аналітичний сигнал у цьому випадку дійсно має вигляд (6.26).

6.3. Кореляційні функції та енергетичні спектри аналітичного сигналу

Звернемося знову до випадку, коли $\xi(t)$ — стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім ($\langle \xi(t) \rangle = 0$), так що його автокореляційну функцію $B_{\xi}(\tau)$ можна подати у вигляді спектрального розкладу (6.9) або (6.22):

$$B_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (6.38)$$

Знайдемо автокореляційну функцію та енергетичний спектр спряженого за Гільбертом процесу $\eta(t)$, скориставшись розкладом $\eta(t)$ в інтеграл Фур'є (6.29):

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \tilde{C}_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega'\tau}. \quad (6.39)$$

Але згідно з (6.30) і (6.7) маємо

$$\begin{aligned} \langle \tilde{C}_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle &= -\text{sgn}(\omega) \text{sgn}(\omega') \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \\ &= -\text{sgn}(\omega) \text{sgn}(\omega') \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega) = \\ &= -\text{sgn}(\omega) \text{sgn}(-\omega) \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega) = \delta(\omega + \omega') S_{\xi}(\omega). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Підставляючи (6.40) в (6.39), отримуємо

$$\langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = B_{\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = B_{\xi}(\tau). \quad (6.41)$$

Таким чином, спряжений процес $\eta(t)$ так само, як і первинний $\xi(t)$, виявляється стаціонарним, причому їх автокореляційні функції та енергетичні спектри повністю збігаються.

Обчислимо тепер взаємну кореляційну функцію стаціонарних процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$:

$$\langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle e^{i(\omega+\omega')t+i\omega'\tau}. \quad (6.42)$$

Корелятор $\langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle$ обчислюємо так само, як і (6.40), за допомогою формул (6.30) і (6.7):

$$\begin{aligned} \langle C_{\xi}(\omega) \tilde{C}_{\xi}(\omega') \rangle &= -i \text{sgn}(\omega') \langle C_{\xi}(\omega) C_{\xi}(\omega') \rangle = \\ &= i \text{sgn}(\omega) S_{\xi}(\omega) \delta(\omega + \omega'). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Підставимо (6.43) в (6.42) і виконаємо інтегрування за $d\omega'$ з допомогою дельта-функції $\delta(\omega + \omega')$:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\eta(t+\tau) \rangle &= B_{\xi\eta}(\tau) = i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) S_{\xi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= i \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}] d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Таким чином, випадковий процес $\xi(t)$ і спряжений з ним $\eta(t)$ виявляються стаціонарно пов'язаними, їх функція взаємної кореляції $B_{\xi\eta}(\tau)$ є непарною, і в моменти часу, що збігаються ($\tau = 0$), ці два процеси некорельовані:

$$\langle \xi(t)\eta(t) \rangle = B_{\xi\eta}(0) = 0. \quad (6.45)$$

При обчисленні корелятора $\langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = B_{\eta\xi}(\tau)$ слід скористатися його незалежністю від t і ввести нову змінну $t' = t + \tau$ (тобто змістити початок відліку часу на $-\tau$):

$$B_{\eta\xi}(\tau) = \langle \eta(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle \xi(t')\eta(t'-\tau) \rangle = B_{\xi\eta}(-\tau) = -B_{\xi\eta}(\tau). \quad (6.46)$$

Формулу (6.45) можна розглядати як факт ортогональності процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$, вкладаючи у це поняття той самий зміст, що і в ортогональність функцій $A\cos(\omega t + \Phi)$ і $A\sin(\omega t + \Phi)$ (відмінність фаз цих процесів на $\pi/2$). Таким чином, перетворення Гільберта (6.37 б), по суті, є способом побудови процесу $\eta(t)$, ортогонального до $\xi(t)$. Звідси, до речі, і походить назва сукупності $\xi(t)$ і $\eta(t)$ — квадратурні складові (або компоненти) аналітичного сигналу: так само, як

$A\cos(\omega t + \Phi)$ і $A\sin(\omega t + \Phi)$ є квадратурними компонентами комплексної функції $A\exp\{i(\omega t + \Phi)\}$.

Побудуємо тепер автокореляційну функцію самого аналітичного сигналу $\zeta = \xi + i\eta$:

$$B_{\zeta}(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle. \quad (6.47)$$

Для скорочення записів опускатимемо аргумент t ($\xi(t) \equiv \xi$, $\eta(t) \equiv \eta$) і введемо позначення $\xi(t+\tau) \equiv \xi_{\tau}$ і $\eta(t+\tau) \equiv \eta_{\tau}$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle &= \langle [\xi - i\eta][\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}] \rangle = \\ &= \langle (\xi\xi_{\tau} + \eta\eta_{\tau} - i\eta\xi_{\tau} + i\eta_{\tau}\xi) \rangle = 2[B_{\xi}(\tau) + iB_{\xi\eta}(\tau)]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Скориставшись тепер спектральними розкладами (6.38) і (6.44), отримаємо

$$B_{\zeta}(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) [\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau] d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.49)$$

З іншого боку, за визначенням енергетичний спектр аналітичного сигналу $S_{\zeta}(\omega)$ пов'язаний з $B_{\zeta}(\tau)$ загальним співвідношенням (6.9):

$$B_{\zeta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.50)$$

Із порівняння (6.49) і (6.50) випливає, що:

$$S_{\zeta} = \begin{cases} 4S_{\xi}, & \omega \geq 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Окрім (6.47) можна було б розглянути ще одну автокореляційну функцію

$$\tilde{B}_\zeta(\tau) = \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle, \quad (6.52)$$

проте прості обчислення свідчать, що вона тотожно дорівнює нулю при будь-яких τ :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\zeta(\tau) &= \langle (\xi + i\eta)(\xi_\tau + i\eta_\tau) \rangle = \\ &= \langle \xi\xi_\tau - \eta\eta_\tau + i\xi\eta_\tau + i\eta\xi_\tau \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

При цьому ми скористалися формулами (6.41) і (6.46).

6.4. Приклади спектральних розподілів

Одна важлива властивість $S_\zeta(\omega)$ може бути отримана без конкретизації вигляду $B_\zeta(\tau)$ — мова йде про характер зміни $S_\zeta(\omega)$ на достатньо низьких частотах ω . Звернемося знову до формули (6.10). Характерні розміри області інтегрування за τ визначаються часом кореляції процесу τ_0 , оскільки при великому часі $B_\zeta(\tau)$ швидко спадає до нуля:

$$S_\zeta(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_\zeta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.54)$$

Розглянемо у $S_\zeta(\omega)$ область гранично низьких частот, коли $\omega\tau_0 \ll 1$. При цьому експоненту у (6.54) можна замінити на одиницю:

$$S_\zeta(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} B_\zeta(\tau) d\tau \approx \frac{B_\zeta(0)\tau_0}{\pi} = \frac{\sigma_\zeta^2 \tau_0}{\pi} = \frac{N}{2} = \text{Const}. \quad (6.55)$$

Таким чином, на низьких частотах спектральна густина $S_\zeta(\omega)$ — величина стала ($S_\zeta(\omega) \approx N/2$ і незалежна від ω). Схематично графік $S_\zeta(\omega)$ показано на рис. 6.3.

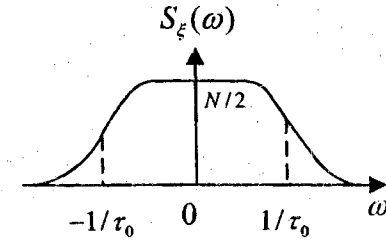


Рис. 6.3

Білий шум

З рис. 6.3 видно, що при зменшенні τ_0 область частот, де $S_\zeta(\omega) \approx N/2$, необмежено розширюється. Граничному випадку $\tau_0 \rightarrow 0$ відповідає сталий на всій осі частот ω енергетичний спектр $S_\zeta(\omega) = N/2$. Випадковий процес зі сталою спектральною густиною $S_\zeta(\omega)$ називається білим шумом за аналогією до білого кольору, який утворюється внаслідок змішування електромагнітних хвиль із приблизно однаковою енергією у широкому інтервалі частот. На відміну від білого шуму у „забарвлених” шумів вся енергія зосереджена в одній або кількох спектральних складових (лініях, смугах, вікнах та ін.). З визначення (6.9) випливає вираз для автокореляційної функції $B_\zeta(\tau)$ білого шуму:

$$B_\zeta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{2} e^{i\omega\tau} d\omega = \pi N \delta(\tau). \quad (6.56)$$

Таким чином, білий шум — дельта-корельований процес: значення, яких набуває цей випадковий процес у будь-які близькі моменти, розділені проміжком $\tau \neq 0$, не корелюють між собою.

Звичайно, білий шум не більше, ніж зручна абстракція, хоча б тому, що його дисперсія (тобто середня потужність процесу) дорівнює нескінченності ($\sigma_\xi^2 = B_\xi(0) \sim \delta(0) \rightarrow \infty$). Окрім того, зрозуміло, що неможливе існування часових процесів із нескінченно широкою смугою частот у будь-яких реальних фізичних системах і, зокрема, радіотехнічних колах. Формально можна ввести і коефіцієнт кореляції $K_\xi(\tau)$ білого шуму:

$$K_\xi(\tau) = \frac{B_\xi(\tau)}{B_\xi(0)} = \begin{cases} 1, & \tau = 0; \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (6.57)$$

Вузькосмуговий випадковий процес

Іншим граничним випадком, протилежним до білого шуму, є вузькосмуговий випадковий процес. Його енергетичний спектр відмінний від нуля у вузькій смузі частот навколо центральної (середньої або несучої) частоти ω_0 і внаслідок симетрії $S_\xi(\omega)$ навколо $-\omega_0$, причому виконується нерівність $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ (рис.6.4).

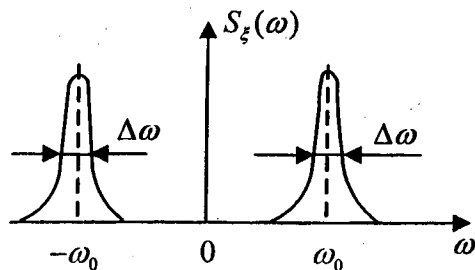


Рис. 6.4

Для обчислення автокореляційної функції $B_\xi(\tau)$ зручно виходити з формули (6.22). Перейдемо від частоти ω до частоти ν , що

відлічується від несучої ω_0 : $\nu = \omega - \omega_0$. Формула (6.22) при цьому набуває вигляду:

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) \cos[(\omega_0 + \nu)\tau] d\nu. \quad (6.58)$$

Враховуючи, що за визначенням вузькосмугового процесу функція $S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu)$ відмінна від нуля тільки при $|\nu| \approx |\Delta\omega| \ll \omega_0$, нижню границю $-\omega_0$ в інтегралі (6.58) можна замінити на $-\infty$:

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) [\cos \omega_0 \tau \cos \nu \tau - \sin \omega_0 \tau \sin \nu \tau] d\nu. \quad (6.59)$$

Введемо спектр низьких частот, так званий „повільний спектр” $\tilde{S}(\nu)$:

$$\tilde{S}(\nu) = S_\xi^{(+)}(\omega_0 + \nu) \quad (6.60)$$

і амплітуди синус-косинових складових

$$a_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \cos \nu \tau d\nu, \quad (6.61 \text{ а})$$

$$a_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) \sin \nu \tau d\nu. \quad (6.61 \text{ б})$$

З урахуванням зроблених визначень $B_\xi(\tau)$ набуває вигляду

$$B_\xi(\tau) = a_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - a_s(\tau) \sin \omega_0 \tau = A_B(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi_B(\tau)], \quad (6.62)$$

де

$$A_B(\tau) = \sqrt{a_c^2(\tau) + a_s^2(\tau)} \quad (6.63 \text{ а})$$

обвідна кореляційної функції, а

$$\Phi_B(\tau) = \arctg \left[\frac{a_s(\tau)}{a_c(\tau)} \right] — \quad (6.63 \text{ б})$$

повільна фаза автокореляційної функції.

Характерний час τ_0 зміни амплітуди $A_B(\tau)$ і фази $\Phi_B(\tau)$ визначається шириною $\Delta\omega$ повільного спектра ($\tau_0 \approx 1/|\Delta\omega|$) відповідно до співвідношення невизначеності (6.16) і Фур'є-перетворень (6.61), а швидкі осциляції косинуса у (6.62) відбуваються за значно коротші відрізки часу $T = 2\pi/\omega_0 \ll \tau_0$.

Таким чином, автокореляційна функція $B_\xi(\tau)$ вузькосмугового випадкового процесу має вигляд модульованого за амплітудою і фазою височастотного коливання типу зображеного на рис. 6.5 (схематичний графік поданий тільки для часу $\tau \geq 0$, цього достатньо, оскільки $B_\xi(\tau)$ — парна функція).

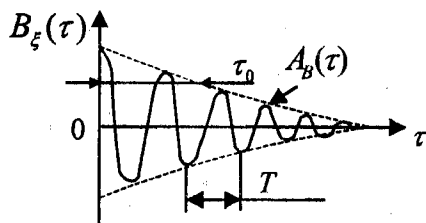


Рис. 6.5

Видно, що як характерний час кореляції τ_0 виступає час суттєвого зменшення амплітуди $A_B(\tau)$. Величина τ_0 обернено пропорційна до ширини смуги $\Delta\omega$, а не до несучої частоти ω_0 : на часах $T = 2\pi/\omega_0$ відбуваються тільки осциляції $B_\xi(\tau)$ без помітного спадання амплітуди коливань $A_B(\tau)$.

Амплітуда і фаза випадкового процесу

Для аналізу вузькосмугових випадкових процесів дуже зручними є поняття амплітуди і фази процесу $\xi(t)$. У загальному випадку (не обов'язково для вузькосмугових процесів) амплітуда $A(t)$ і фаза $\varphi(t)$ довільного дійсного процесу $\xi(t)$ можуть бути введені як модуль і аргумент аналітичного сигналу $\zeta(t)$, що відповідає $\xi(t)$:

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) \equiv A(t)e^{i\varphi(t)}. \quad (6.64)$$

Переконаємося в тому, що введені подібним чином амплітуди і фази узгоджуються з тими самими уявленнями, які вкладаються в них у курсі теорії коливань або теоретичних основ радіотехніки. Звичайно під вузькосмуговим процесом (не обов'язково випадковим) розуміють функцію виду:

$$\xi(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t), \quad (6.65)$$

де $A(t)$ і $\Phi(t)$ є повільнішими функціями часу, ніж осциляції косинуса з періодом $T = 2\pi/\omega_0$. Увівши до розгляду характерні часи $\tau_{A,\Phi}$ змін амплітуди $A(t)$ і фази $\Phi(t)$, умову їхньої повільності можна сформулювати як

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_A} \ll \omega_0; \quad \left| \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dt} \right| \approx \frac{1}{\tau_\Phi} \ll \omega_0. \quad (6.66)$$

Величину $\Phi(t)$ називають „повільною фазою” на відміну від швидкої або просто фази $\varphi(t)$.

Застосовуючи перетворення Гільберта (6.37 в), зіставимо (6.65) спряжений з ним процес $\eta(t)$. З урахуванням нерівностей (6.66) обчислення інтеграла (6.37 в) приводить до такого результату:

$$\eta(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \Phi(t)). \quad (6.67)$$

Видно, що для вузькосмугового процесу перетворення Гільберта еквівалентне до диференціювання (6.65) за t , наступного ділення отриманого результату на $-\omega_0$ і відкидання доданків, малих у міру виконання нерівностей (6.66).

Аналітичний сигнал $\zeta(t)$, відповідно, має вигляд

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t) = A(t)e^{i[\omega_0 t + \Phi(t)]}. \quad (6.68)$$

Таким чином,

$$A(t) = |\zeta(t)| = \sqrt{\xi(t)^2 + \eta(t)^2}, \quad (6.69)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \Phi(t) = \arg \zeta(t) = \arctg \frac{\eta(t)}{\xi(t)}. \quad (6.70)$$

Якщо $\xi(t)$ випадковий процес, то очевидно, що $A(t)$ і $\Phi(t)$ також є випадковими функціями часу. В реальних умовах, як правило, доводиться мати справу не з функціями $\xi(t)$, які швидко осцилюють, а з повільними — амплітудою $A(t)$ і фазою $\Phi(t)$. Виникає природне запитання: як пов'язані статистичні характеристики швидкого процесу $\xi(t)$ з параметрами флуктуацій $A(t)$ і $\Phi(t)$? Якщо апіорі відомо, що $\xi(t)$ — нормальний випадковий процес, то спряжений з ним $\eta(t)$, будучи пов'язаний із $\xi(t)$ лінійним перетворенням (6.37 в), також є нормальним, причому ці процеси мають однакові автокореляційні функції (6.41) і у збіжні моменти часу не корелюють (6.45). Як впливає з (6.69), $A(t)$ — довжина вектора, що має декартові компоненти $\xi(t)$ і $\eta(t)$ відповідно. Задачу про визначення функції розподілу ймовірності довжини випадкового вектора з нормальними некорельованими компонентами було розв'язано у § 4: якщо $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, то $W(A)$ є розподіл Релея (див. (4.82)), а фаза $\Phi(t)$ розподілена рівномірно (див. (4.84)).

6.5. Комплексна обвідна аналітичного сигналу

Амплітуду $A(t)$ часто називають обвідною процесу $\zeta(t)$.

Під комплексною обвідною розуміють функцію

$$E(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}. \quad (6.71)$$

Аналітичний сигнал (6.68) при цьому записується у вигляді

$$\zeta(t) = E(t)e^{i\omega_0 t}. \quad (6.72)$$

Для визначення характеру часових флуктуацій $A(t)$, $\Phi(t)$ і $E(t)$ необхідно, принаймні, виразити їх автокореляційні функції через автокореляційну функцію (або енергетичний спектр) процесу $\xi(t)$. Запишемо процес $\xi(t)$, заданий формулою (6.65), у вигляді суми двох квадратурних компонент:

$$\xi(t) = A_c(t) \cos \omega_0 t - A_s(t) \sin \omega_0 t, \quad (6.73)$$

де

$$\begin{aligned} A_c(t) &= A(t) \cos \Phi(t) = \operatorname{Re} E(t), \\ A_s(t) &= A(t) \sin \Phi(t) = \operatorname{Im} E(t). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Аналогічне подання має місце і для спряженого (за Гільбертом) процесу

$$\eta(t) = A_c(t) \sin \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t. \quad (6.75)$$

Виразимо спочатку автокореляційні функції квадратурних компонент через автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$ вихідного процесу $\xi(t)$ і взаємну кореляційну функцію $B_{\xi\eta}(\tau)$. Розв'яжемо рівняння (6.73) і (6.75) відносно A_c і A_s :

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t, \\ A_s(t) &= -\xi(t) \sin \omega_0 t + \eta(t) \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6.76)$$

звідки випливає

$$\begin{aligned} \langle A_c(t)A_c(t+\tau) \rangle &= \langle A_s(t)A_s(t+\tau) \rangle = \\ &= B_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau + B_{\xi\eta}(\tau) \sin \omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} \langle A_s(t)A_c(t+\tau) \rangle &= -\langle A_c(t)A_s(t+\tau) \rangle = \\ &= B_\xi(\tau) \sin \omega_0 \tau - B_{\xi\eta}(\tau) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Квадратурні компоненти $A_c(t)$ і $A_s(t)$ нормального випадкового процесу $\xi(t)$ також розподілені за нормальним законом, оскільки пов'язані з $\xi(t)$ і $\eta(t)$ лінійними співвідношеннями (6.76). З іншого боку, густина нормального розподілу повністю визначається тільки першими двома моментами, й, отже, у цьому випадку формули (6.77), (6.78) містять у собі всю інформацію про статистику сукупності двох функцій $A_c(t)$ і $A_s(t)$. Перехід же від $A_c(t)$ і $A_s(t)$ до обвідної $A(t)$ і фази процесу $\Phi(t)$ здійснюється за допомогою очевидних формул:

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}; \quad \Phi = \arctg \frac{A_s}{A_c}. \quad (6.79)$$

Використовуючи загальні формули перетворення для переходу від густин розподілів $A_c(t)$ і $A_s(t)$ до $A(t)$ і $\Phi(t)$ (див. § 4), можна обчислити будь-які корелятори амплітуди і фази у рознесені моменти часу. Це досить громіздкі обчислення, і їх можна, наприклад, знайти у монографіях зі статистичної радіотехніки.

Значно простішим виявляється визначення енергетичного спектра флуктуацій комплексної обвідної $E(t)$. Для цього, користуючись поданням (6.72), запишемо автокореляційну функцію аналітичного сигналу:

$$B_\zeta(\tau) = \langle \zeta^*(t)\zeta(t+\tau) \rangle = \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} = B_E(\tau) e^{i\omega_0\tau}. \quad (6.80)$$

Користуючись спектральним розкладом (6.50) і виразом для енергетичного спектра аналітичного сигналу (6.51), з (6.80) отримуємо:

$$\begin{aligned} B_E(\tau) &= \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle = B_\zeta(\tau) e^{-i\omega_0\tau} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega = 4 \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Зробимо у (6.81) заміну змінних $\nu = \omega - \omega_0$ і введемо повільний спектр $\tilde{S}(\nu)$ (6.60):

$$B_E(\tau) = 4 \int_{-\omega_0}^{\infty} S_\xi(\omega_0 + \nu) e^{i\nu\tau} d\nu \approx 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82 \text{ а})$$

Тут під час заміни нижньої границі $-\omega_0$ на $-\infty$ ми скористалися вузькосмуговістю процесу (подібно до переходу від (6.58) до (6.59)). З іншого боку, згідно з (6.9)

$$B_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu. \quad (6.82 \text{ б})$$

Із порівняння (6.82 б) і (6.82 а) отримуємо, що енергетичний спектр $S_E(\nu)$ флуктуацій комплексної обвідної збігається зі спектром аналітичного сигналу, зсунутим в область низьких частот на величину ω_0 і просто виражається через повільний спектр:

$$S_E(\nu) = S_\zeta(\omega_0 + \nu) = 4S_\xi(\omega_0 + \nu) = 2\tilde{S}(\nu). \quad (6.83)$$

ЗАДАЧІ

1. Стационарний випадковий процес $\xi(t)$ має рівномірну спектральну густину $S_\xi(\omega) = S_0$ в інтервалі частот $\left[-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}\right]$ і

$S_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > \frac{\Omega}{2}$, $\Omega > 0$. Знайти автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$, за допомогою якої перевірити співвідношення невизначеностей.

Розв'язок. Користуючись формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знаходимо

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{i\tau} e^{i\omega\tau} \bigg|_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} = \\ = \frac{S_0}{i\tau} \left[e^{\frac{i\Omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\Omega\tau}{2}} \right] = S_0 \Omega \frac{\sin(\Omega\tau/2)}{(\Omega\tau/2)}.$$

Згідно з визначенням, характерна ширина $\Delta\omega$ енергетичного спектра дорівнює $\Delta\omega = \Omega$. Характерну ж ширину $\Delta\tau$ автокореляційної функції визначимо за першим нулем $\sin(\Omega\tau/2)$: $\Delta\tau = 2\pi/\Omega$. Звідси співвідношення невизначеностей (6.14) записується таким чином:

$$\Delta\tau \Delta\omega = \Omega \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi > 1.$$

2. Знайти автокореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ з нульовим математичним сподіванням і спектральною густиною

$$S_\xi(\omega) = \begin{cases} N/2, & -\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1 \quad (\omega < 0); \\ N/2, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (\omega > 0); \\ 0, & \text{при всіх інших значеннях } \omega. \end{cases} \quad (1)$$

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ визначити величину інтервалу $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ і $\xi_k = \xi(t_k)$ некорельовані.

Розв'язок. За формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знаходимо

$$B_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega\tau d\omega = \frac{N}{\tau} (\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau) = \\ = N(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2}} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau = \sigma_{\xi_1}^2 \rho_1(\tau) \cos \omega_0\tau. \quad (2)$$

Тут $\sigma_{\xi_1}^2 = N\Delta\omega$; $\rho_1(\tau) = \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}$; $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

Для окремого випадку $\omega_1 = 0$ автокореляційна функція (2) набуває вигляду

$$B_\xi(\tau) = \frac{N}{\tau} \sin \omega_2\tau = N\omega_2 \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau} = \sigma_{\xi_1}^2 \rho_2(\tau), \quad (3)$$

де $\sigma_{\xi_2}^2 = N\omega_2$; $\rho_2(\tau) = \frac{\sin \omega_2\tau}{\omega_2\tau}$.

Інтервал $\Delta t = t_{k+1} - t_k$, при якому значення $\xi_k = \xi(t_k)$ і $\xi_{k+1} = \xi(t_{k+1})$ будуть некорельованими, можна визначити, прирівнявши у (3) до нуля значення нормованої кореляційної функції $\rho_2(\Delta t)$:

$$\frac{\sin \omega_2 \Delta t}{\omega_2 \Delta t} = 0; \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{1}{2f_2}.$$

Тут $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ — верхня гранична частота спектральної густини $S_\xi(\omega)$. За знайденою величиною Δt кількість некорельованих відліків N на інтервалі тривалістю T визначається як $N = T / \Delta t = 2f_2 T$.

§ 7. Лінійні перетворення випадкових процесів

Випадкові процеси, що описують флуктуації реальних сигналів, підлягають різним перетворенням як під час поширення каналами зв'язку, так і безпосередньо у радіотехнічних передавальних і приймальних пристроях. Унаслідок перетворення кожна реалізація $x(t)$ випадкового процесу $\xi(t)$ породжує реалізацію $y(t)$ процесу $\eta(t)$. При цьому властивості $y(t)$ можуть докорінним чином відрізнитися від властивостей вихідного процесу $x(t)$.

Із математичної точки зору будь-яку радіотехнічну систему можна подати формалізованим співвідношенням

$$y(t) = \hat{L}[x(t)], \quad (7.1)$$

де \hat{L} — деякий оператор, що перетворює за заданим законом сигнал на вході системи $x(t)$ у сигнал на виході $y(t)$. Вхідний і вихідний процеси можуть залежати не тільки від часу t , а й від інших параметрів (просторові координати, температура, густина газу та ін.).

За виглядом залежності вихідного процесу від вхідного розрізняють наступні види систем: **безінерційні та інерційні, фізично реалізовані та нереалізовані, лінійні та нелінійні, стаціонарні та нестаціонарні.**

Безінерційною називається система, в якій значення сигналу на виході $y(t)$ у будь-який момент часу t залежить тільки від значення вхідного сигналу $x(t)$ у той самий момент. В **інерційній** системі значення сигналу на виході $y(t)$ у момент t може залежати від значення вхідного сигналу $x(t)$ в попередній період часу $t' \leq t$.

Фізично реалізована система — система, що перетворює тільки попередні і поточні значення вхідного сигналу.

7.1. Математичний опис лінійних систем

Будь-яку радіотехнічну систему можна подати у вигляді сукупності **лінійних і нелінійних** пристроїв і ланок. Лінійні системи описуються лінійними операторами \hat{L} , якими можуть виступати лінійні інтегро-диференціальні рівняння, алгебраїчні тощо. Формально оператор \hat{L} називається лінійним, якщо для нього справджується **принцип суперпозиції**. Зміст цього принципу наступний. Якщо на вхід системи одночасно надходять кілька сигналів $x_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, N$), то на кожен сигнал система відгукується незалежно. Математично цей принцип записується так:

$$y(t) = \hat{L}\left[\sum_{k=1}^N c_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^N c_k \hat{L}[x_k(t)] = \sum_{k=1}^N c_k y_k(t). \quad (7.2)$$

Тут $y_k(t) = \hat{L}[x_k(t)]$ — відгук системи на вхідний сигнал $x_k(t)$, а c_k — довільні, незалежні від часу коефіцієнти.

Системи, для яких принцип суперпозиції не виконується, називаються **нелінійними**. До цієї групи можна зарахувати такі елементи і пристрої, як обмежувачі, випрямлячі, змішувачі, перетворювачі частоти, модулятори, детектори тощо.

Далі ми розглянемо найпростіший і разом з тим важливий випадок **лінійних інерційних систем**. Нехай на вхід лінійної системи в момент часу $t = \tau$ надходить дельтаподібний імпульс

$x(t) = \delta(t - \tau)$. При цьому згідно з (7.1) на виході системи спостерігатиметься відгук

$$y(t, \tau) = h(t, \tau) = \hat{L}[\delta(t - \tau)], \quad (7.3)$$

який називається імпульсною перехідною функцією. За допомогою визначень (7.1) і (7.3) для лінійних систем можна записати наступну фундаментальну формулу:

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{L}[x(t)] = \hat{L}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \hat{L}[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.4)$$

При написанні цього виразу ми скористалися відомою властивістю δ -функції:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

і поміняли порядок дії двох лінійних операторів \hat{L} і $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$.

Зауважимо, що якщо лінійна система описується за допомогою відповідних лінійних диференціальних рівнянь, то $h(t, \tau)$ є функцією Гріна, а формула (7.4) — розв'язком деякої крайової задачі.

Таким чином, функцію $y(t)$ можна розглядати як відгук лінійної системи, що характеризується функцією $h(t, \tau)$, на зовнішній вплив $x(\tau)$ (див. рис. 7.1).

Як уже зазначалося, у фізично реалізованій системі сигнал на виході $y(t)$ може залежати від значень вхідного сигналу $x(\tau)$ тільки у попередні моменти часу $\tau \leq t$, а поведінка $x(\tau)$ при $\tau > t$

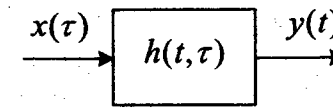


Рис. 7.1

не може вплинути на вихідний сигнал $y(t)$ у момент t . Це є наслідком загального фізичного принципу причинності, тому ядро $h(t, \tau)$ інтегрального перетворення (7.4) має володіти наступною властивістю:

$$h(t, \tau) \equiv 0 \text{ при } \tau > t, \quad (7.5)$$

і, отже, завжди лінійне перетворення має вигляд

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Серед усіх можливих лінійних систем особливе місце займають системи зі сталими параметрами, відгук яких $h(t, \tau)$ залежить тільки від проміжку часу між моментами впливу τ та спостереження t і не залежить від того, у який момент часу τ цей вплив відбувся. Таким чином, для систем зі сталими параметрами $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, а (7.6) набуває вигляду:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Після заміни змінної інтегрування $t' = t - \tau$ маємо

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') x(t - t') dt'. \quad (7.7)$$

До систем з незмінними в часі параметрами належать, наприклад, одинарні і зв'язані контури, багатоланкові фільтри, багатокаскадні підсилювачі, лінії затримки, диференціюючі та інтегруючі ланцюжки та ін.

У тих випадках, коли вивчаються перехідні процеси у лінійних системах, необхідно враховувати момент включення процесу на вході, тобто необхідно вважати $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Тоді вираз (7.6) набуває вигляду

$$y(t) = \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (7.8)$$

Для систем зі сталими параметрами аналогічно до (7.7) отримуємо

$$y(t) = \int_0^t h(t') x(t-t') dt'. \quad (7.9)$$

7.2. Зв'язок між моментами у лінійних системах

За допомогою вже наведених формул легко встановити зв'язок між першими моментами на вході і виході лінійної системи. Так, згідно з (7.6) обчислимо середнє значення сигналу на виході:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau \right\rangle = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) \langle x(\tau) \rangle d\tau. \quad (7.10)$$

При усередненні у (7.10) ми врахували, що лінійні операції інтегрування й усереднення за ансамблем реалізацій можна поміняти місцями. Видно, що у загальному випадку, коли параметри лінійної системи змінюються у часі, на виході спостерігатиметься нестационарний процес навіть у тому разі, коли на вхід подається стаціонарний процес. Справді, при $\langle x(\tau) \rangle = \text{Const}$ отримуємо

$$\langle y(t) \rangle = \bar{x} \int_{-\infty}^t h(t, \tau) d\tau = \bar{x} \cdot f(t), \quad (7.11)$$

де $f(t)$ — деяка детермінована функція часу.

Якщо ж параметри лінійної системи не змінюються у часі, то згідно з (7.7) математичні сподівання на вході і на виході пов'язані між собою наступним співвідношенням:

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^\infty h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^\infty h(t') dt' = \text{Const}. \quad (7.12)$$

Незмінність середнього відгуку на виході системи у випадку, що розглядається, є однією з ознак стаціонарності процесу $y(t)$. З іншого боку, якщо у (7.12) ми врахуємо момент увімкнення сигналу на вході, то згідно з (7.9) отримаємо залежність

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^t h(t') \langle x(t-t') \rangle dt' = \bar{x} \int_0^t h(t') dt' \neq \text{Const}, \quad (7.13)$$

яка так само, як і (7.11), свідчить про нестационарність процесу $y(t)$.

Із формули загального вигляду (7.6) безпосередньо випливає зв'язок між другими моментами на вході і виході лінійної системи.

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') \langle x(\tau') x(\tau'') \rangle d\tau'' = \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau', \tau'') d\tau''. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Для стаціонарного (у широкому розумінні) процесу на вході $\langle x(\tau') x(\tau'') \rangle = R_x(\tau' - \tau'')$ і формула (7.14) набуває вигляду

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} h(t_1, \tau') d\tau' \int_{-\infty}^{t_2} h(t_2, \tau'') R_x(\tau' - \tau'') d\tau''. \quad (7.15)$$

Знову видно, що у лінійних системах зі змінними у часі параметрами на виході спостерігатиметься нестационарний процес

навіть у тому випадку, коли на вхід подається стаціонарний процес. З іншого боку, при незмінних параметрах системи згідно з (7.7) легко показати, що при надходженні на вхід стаціонарного процесу другий момент на виході залежатиме тільки від різниці часу $t_1 - t_2$:

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \int_0^\infty h(t') dt' \int_0^\infty h(t'') < x(t_1 - t') x(t_2 - t'') > dt'' = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') R_x(t_1 - t_2 - t' + t'') = R_y(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Таким чином, сталість середнього значення ($\bar{y}(t) = \text{Const}$) і залежність другого моменту тільки від різниці часу $t_1 - t_2$ ($R_y(t_1, t_2) = R_y(t_1 - t_2)$) свідчить про те, що при подачі на вхід лінійної системи зі сталими параметрами стаціонарного процесу на виході спостерігатиметься стаціонарний процес. Зазначимо, що це твердження справджується тільки без урахування у системі перехідних процесів. Справді, на основі виразу (7.9) легко показати, що врахування моменту включення сигналу на вході системи призводить до його нестационарності на виході. Проте, як буде показано у §9, нестационарність $y(t)$, як правило, спостерігається тільки у межах часу, що не перевищує характерного часу τ_0 релаксації системи ($0 \leq t < \tau_0$). При $t \gg \tau_0$ момент увімкнення сигналу на вході системою „забувається”, і вихідний сигнал $y(t)$ перетворюється на стаціонарний.

7.3. Спектральний аналіз лінійних систем з постійними параметрами

Далі ми не зупинятимемося окремо на вивченні перехідних процесів, а розглядатимемо тільки фізично реалізовані системи зі сталими параметрами, для яких зв'язок між виходом і входом визначається за формулою (7.7). Простота опису і дослідження

систем зі сталими параметрами зумовлена тим, що вони дуже просто реагують на гармонійні зовнішні впливи. Так, поклавши у (7.7) $x(t) = e^{i\omega t}$, маємо

$$y(t) = \int_0^\infty h(t') e^{i\omega(t-t')} dt' = K(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (7.17)$$

де введено передавальну функцію $K(i\omega)$:

$$K(i\omega) = \int_{-\infty}^\infty h(t') e^{-i\omega t'} dt', \quad h(t') \equiv 0 \text{ при } t' < 0. \quad (7.18)$$

Таким чином, при проходженні гармонійного сигналу $x(t) = e^{i\omega t}$ через лінійну систему зі сталими параметрами на її виході спостерігається також гармонійне коливання $y(t) = K(i\omega) e^{i\omega t}$, амплітуда і фаза якого визначаються значенням модуля і аргументу передавальної функції системи $K(i\omega)$: $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. $|K(i\omega)|$ називають **амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)** системи, а $\arg K(i\omega)$ – **фазочастотною характеристикою (ФЧХ)**.

Перейдемо тепер від сигналів $x(t)$ і $y(t)$ до їх перетворень Фур'є:

$$x(t) = \int_{-\infty}^\infty C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.19)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^\infty C_y(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.20)$$

Підставляючи (7.19) у (7.7), отримуємо:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} h(t') e^{-i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} C_x(\omega) K(i\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Порівнюючи (7.21) з (7.20), отримаємо формулу

$$C_y(\omega) = K(i\omega) C_x(\omega), \quad (7.22)$$

з якої випливає, що передавальна функція $K(i\omega)$ лінійної системи зі сталими параметрами може бути визначена як відношення Фур'є-перетворень сигналу на виході і на вході системи:

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)}. \quad (7.23)$$

Нехай на вхід системи надходить стаціонарний випадковий процес $x(t)$ з відомим енергетичним спектром $S_x(\omega)$. Ставиться питання: який процес спостерігатиметься на виході системи? Користуючись (7.22), обчислимо корелятор Фур'є-компонент вихідного сигналу:

$$\begin{aligned} \langle C_y(\omega) C_y^*(\omega') \rangle &= K(i\omega) K^*(i\omega') \langle C_x(\omega) C_x^*(\omega') \rangle = \\ &= K(i\omega) K^*(i\omega') \delta(\omega - \omega') S_x(\omega) = \delta(\omega - \omega') S_y(\omega). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Дельта-кореляція Фур'є-компонент вихідного процесу $\delta(\omega - \omega')$ свідчить про його стаціонарність, а коефіцієнт при $\delta(\omega - \omega')$ у (7.24) — його енергетичний спектр (подібно до (6.8)):

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (7.25)$$

Таким чином, при дії стаціонарного випадкового процесу на лінійну систему зі сталими параметрами енергетичний спектр вихідного сигналу одержується зі спектра вхідного сигналу шляхом його множення на квадрат амплітудно-частотної характеристики. Слід ще раз нагадати, що це твердження справджується тільки для фізично реалізованих систем при нехтуванні перехідними процесами.

7.4. Приклади найпростіших лінійних перетворень

Як найпростіші лінійні перетворення докладно розглянемо диференціювання та інтегрування випадкового процесу.

Диференціювання випадкового процесу. Нехай $y(t)$ — результат проходження випадкового процесу $x(t)$ через диференціюючий пристрій:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.26)$$

Провівши усереднення обох частин рівності (7.26), отримуємо:

$$\langle y(t) \rangle = \left\langle \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle. \quad (7.27)$$

Для стаціонарних процесів $\langle x(t) \rangle = \text{Const}$, так що $\langle y(t) \rangle = 0$.

Визначимо автокореляційну функцію $B_y(t_1, t_2)$ вихідного процесу, припускаючи для простоти, що $\langle x(t) \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} B_y(t_1, t_2) &\equiv \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \left\langle \frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{dx(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \\ &= \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Враховуючи, що для стаціонарного процесу $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_1 - t_2)$, після введення нової змінної — $\tau = t_1 - t_2$, отримуємо

$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = \frac{d}{d\tau}$, $\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = -\frac{d}{d\tau}$. Унаслідок цього (7.28) набуває вигляду

$$B_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau) = B_y(\tau). \quad (7.29)$$

Знайдемо взаємну кореляційну функцію стаціонарного процесу і його похідної:

$$\begin{aligned} B_{xy}(t_1, t_2) &= \langle x(t_1)y(t_2) \rangle = \frac{\partial}{\partial t_2} \langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} B_x(t_1 - t_2) = -\frac{d}{d\tau} B_x(\tau) = B_{xy}(\tau). \end{aligned} \quad (7.30)$$

У §6 показано, що функція $B_x(\tau)$ — парна, і може бути подана у вигляді інтеграла за додатними частотами (див. (6.22)):

$$B_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Продиференціювавши цей вираз за τ , отримуємо спектральне подання взаємної кореляційної функції:

$$B_{xy}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \omega S_x(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (7.31)$$

Звідси випливає, що, по-перше, $B_{xy}(\tau)$ є непарною функцією, і, по-друге, при $t_1 = t_2 = t$ ($\tau = 0$) взаємна кореляційна функція завжди дорівнює 0, тобто у збіжні моменти часу $x(t)$ і $y(t)$ не корелюють між собою:

$$\langle x(t)y(t) \rangle = B_{xy}(0) = -\frac{d}{d\tau} B_x(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (7.32)$$

Підставляючи у (7.26) як $x(t)$ гармонійне коливання $x(t) = e^{i\omega t}$, легко визначити за (7.23) передавальну функцію $K(i\omega)$ диференціюючого пристрою:

$$K(i\omega) = i\omega. \quad (7.33)$$

Отже, енергетичні спектри процесу $S_x(\omega)$ і його похідної $S_y(\omega)$ пов'язані простим співвідношенням (див. (7.25)):

$$S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (7.34)$$

Цю формулу можна отримати і безпосередньо з (7.29), якщо перейти від кореляційних функцій до їх енергетичних спектрів за формулою Вінера-Хінчіна (6.9). З одного боку, згідно з формулою (7.29) маємо:

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

З іншого ж боку, безпосереднє подання $B_y(\tau)$ дає

$$B_y(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Порівнюючи між собою праві частини цих формул, приходимо знову до (7.34).

Інтегрування випадкового процесу. У прикладеннях досить часто доводиться вивчати статистичні характеристики інтеграла від стаціонарного процесу $x(t)$:

$$y(t) = \int_0^t x(t') dt'. \quad (7.35)$$

Видно, що загалом випадковий процес $y(t)$ нестационарний. Дійсно, обчисливши математичне сподівання на виході інтегруючого оператора, отримаємо

$$\langle y(t) \rangle = \int_0^t \langle x(t') \rangle dt' = \bar{x}t. \quad (7.36)$$

Проте в деяких випадках процес нагромадження $y(t)$ можна розглядати як стаціонарний. Сформулюємо наступну задачу. Які умови має задовольняти стаціонарний процес $x(t)$ на вході інтегруючого пристрою, щоб вихідний процес $y(t)$ можна було вважати стаціонарним (у крайньому разі, у широкому розумінні)?

Насамперед, згідно з (7.36) ми повинні вимагати виконання умови $\langle x(t) \rangle = 0$. З іншого боку, використавши спектральне подання вхідного сигналу (6.1), перепишемо формулу (7.35) у такому вигляді

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) e^{i\omega t'} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) d\omega \int_0^t e^{i\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (7.37)$$

За допомогою (7.37) обчислимо тепер середній квадрат вихідного сигналу:

$$\begin{aligned} \langle y^2(t) \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\omega) \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega} d\omega \right\rangle^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle C_x(\omega') C_x^*(\omega) \rangle \frac{e^{i\omega' t} - 1}{i\omega'} \cdot \frac{e^{-i\omega^* t} - 1}{-i\omega^*} d\omega' d\omega^* = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Для отримання цього виразу ми використали формулу (6.8) для корелятора $\langle C_x(\omega') C_x^*(\omega'') \rangle$ Фур'є-компонент стаціонарного процесу.

Із розглянутих у попередньому параграфі властивостей енергетичного спектра стаціонарного процесу випливає, що $S_x(\omega)$ —дійсна, додатна і парна функція. Отже, якщо ми подаватимемо $S_x(\omega)$ у вигляді ряду Тейлора в околі точки $\omega = 0$ то в розкладенні будуть наявні тільки члени з парними степенями ω^{2m} ($m = 0, 1, 2, \dots$):

$$S_x(\omega) = S_x(0) + S_x''(0) \frac{\omega^2}{2} + \dots = S_x(0) + \omega^2 \tilde{S}_x(\omega). \quad (7.39)$$

Тут уведено деяку нову, скінченну в нулі, парну функцію $\tilde{S}_x(\omega)$. Підставляючи тепер це подання у формулу (7.38), знаходимо:

$$\langle y^2(t) \rangle = 2S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) (1 - \cos \omega t) d\omega \quad (7.40)$$

перший інтеграл у (7.40) легко обчислюється, і дорівнює

$$2S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} d\omega = S_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} d\omega = 2\pi S_x(0)t.$$

Другий інтеграл є сумою двох складових, одна з яких дорівнює деякій константі

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) d\omega = \text{Const},$$

а при обчисленні другої, скориставшись поданням $\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ і замінюючи в інтегралі з $e^{-i\omega t}$ змінну $\omega \rightarrow -\omega$, отримаємо

$$-2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) \cos \omega t d\omega = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.41)$$

Інтеграл у цьому виразі можна розглядати як частину контурного інтеграла від комплексної функції

$$f(z) = \tilde{S}_x(z) e^{izt},$$

що обчислюється на комплексній площині $z = \omega + i\theta$ уздовж замкненого контуру C , який повністю лежить у верхній півплощині і складається з інтервалу $(-R, R)$ дійсної осі ($\text{Re } z = \omega$) і дуги кола C_R радіуса $|z| = R$:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(\omega) d\omega + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Потім, згідно з лемою Жордана, спрямовуємо радіус кола до нескінченності ($R \rightarrow \infty$). При цьому інтеграл за C_R обертається на ноль, а інтеграл, що залишився за дійсною віссю ($\text{Re } z = \omega$), дорівнює сумі лишків, котрі є у верхній напівплощині. Унаслідок цього ми доходимо висновку, що складова (7.41) приводиться до вигляду експоненціально затухаючих у часі t величин. Таким чином, середній квадрат вихідного процесу може подаватися так:

$$\langle y^2(t) \rangle = 2\pi S_x(0)t + \text{Const} + \text{експоненціально затухаючі члени.} \quad (7.42)$$

Зрозуміло, що другою умовою стаціонарності вихідного процесу має бути вимога (див. 6.11 б):

$$S_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) d\tau = 0. \quad (7.43)$$

Дійсно, при виконанні рівності (7.43) для досить великих часів спостереження, коли закінчуються всі перехідні процеси у лінійній

системі $\langle y^2(t) \rangle = \text{Const}$, і процес інтегрування $y(t)$ можна вважати стаціонарним (у крайньому випадку, в широкому розумінні). У протилежному випадку, коли $S_x(0) \neq 0$, на виході інтегруючого пристрою спостерігатиметься процес, який буде дифузно зростати $\langle y^2(t) \rangle \sim t$.

Розглянемо тепер питання про визначення енергетичного спектра на виході інтегруючого пристрою. Припустимо, що всі умови стаціонарності процесу $y(t)$ виконані. У цьому разі передаточну функцію розглядуваної лінійної системи легко визначати із таких формальних роздумів. Оскільки $dy/dx = x(t)$, то надаючи у наведених для диференціального оператора формулах перепозначення $y \leftrightarrow x$ отримаємо:

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega}; \quad S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\omega^2}. \quad (7.44)$$

Зазначимо, що при інтегуванні енергетичний спектр $S_y(\omega)$ збідається у області високих частот у порівнянні з $S_x(\omega)$, тоді як при диференціюванні навпаки, усуваються низькочастотні складові у спектрі за рахунок множника ω^2 в (7.34).

Формально формули (7.44) можна використовувати і для знаходження енергетичних спектрів нестаціонарних вихідних процесів, для яких $S_x(0) \neq 0$. З деякими особливостями спектрального аналізу таких процесів ми ознайомимося далі (див. §10).

7.5. Перетворення випадкових процесів у радіотехнічних колах

Перетворення випадкових процесів у електричних колах описується, як правило, лінійними інтегро-диференціальними

рівняннями, що очевидним способом узагальнюють закон Ома для постійних струмів. Для аналізу стаціонарних або нестаціонарних режимів роботи лінійних радіотехнічних систем часто використовують апарат диференціальних рівнянь. Так, для неперервної (аналогової) системи достатньо загальним є лінійне диференціальне рівняння n -го порядку:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} y(t) + a_0(t) y(t) = \\ = b_m(t) \frac{d^m}{dt^m} x(t) + \dots + b_1(t) \frac{d}{dt} x(t) + b_0(t) x(t), \end{aligned} \quad (7.45)$$

де $a_k(t)$ ($k=0,1,\dots,n$) і $b_i(t)$ ($i=0,1,\dots,m$) — відомі, неперервні на деякому часовому інтервалі, функції. Для цього рівняння мають вказуватися початкові умови

$$y(0), dy(0)/dt, \dots, dy^{n-1}(0)/dt^{n-1}.$$

Увівши оператор диференціювання $p = d/dt$ і поліноми-оператори

$$A_n(p,t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) p^k, \quad (7.46)$$

$$B_m(p,t) = \sum_{i=0}^m b_i(t) p^i,$$

степеня n і m відповідно, вихідне рівняння (7.45) можна записати у наступній компактній операторній формі:

$$A_n(p,t) y(t) = B_m(p,t) x(t). \quad (7.47)$$

Із (7.47) формально випливає рівність, що визначає сигнал на виході системи у явному вигляді

$$y(t) = \frac{B_m(p,t)}{A_n(p,t)} x(t) = \hat{L}x(t). \quad (7.48)$$

Уведена тут величина

$$\hat{L} = \frac{B_m(p,t)}{A_n(p,t)} \quad (7.49)$$

називається лінійним диференціальним оператором системи. Для доведення його лінійності розглянемо виконання умови (7.2).

Нехай на вхід системи, описаної рівнянням (7.47), надходять сигнали $x_1(t)$ або $x_2(t)$. Позначимо через $y_{1,2}(t)$ відповідні відгуки системи на кожен із сигналів окремо:

$$\begin{aligned} A_n(p,t) y_1(t) &= B_m(p,t) x_1(t), \\ A_n(p,t) y_2(t) &= B_m(p,t) x_2(t). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Покажемо тепер, що відгук системи на вхідний сигнал, який має вигляд

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad (7.51)$$

де $c_{1,2}$ — довільні константи, дорівнює

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad (7.52)$$

Дійсно, з одного боку, для вхідного сигналу (7.51) права частина рівняння (7.47) подається у вигляді суми двох складових:

$$B_m(p,t) x(t) = c_1 B_m(p,t) x_1(t) + c_2 B_m(p,t) x_2(t). \quad (7.53)$$

З іншого боку, диференціюючи k разів рівність (7.52) і помножуючи праві і ліві частини на коефіцієнти $a_k(t)$, отримуємо

$$a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k} = c_1 a_k(t) \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} + c_2 a_k(t) \frac{d^k y_2(t)}{dt^k}. \quad (7.54)$$

Підсумувавши (7.54) за всіма значеннями $k = 0, 1, 2, \dots, n$, приходимо до наступного співвідношення:

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 A_n(p, t) y_1(t) + c_2 A_n(p, t) y_2(t). \quad (7.55)$$

Враховуючи тепер визначення (7.50) і (7.51), отримуємо

$$A_n(p, t) y(t) = c_1 B_m(p, t) x_1(t) + c_2 B_m(p, t) x_2(t) = B_m(p, t) x(t). \quad (7.56)$$

Таким чином для системи, що описується рівнянням (7.47), виконується принцип суперпозиції

$$A_n(p, t) [c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] = B_m(p, t) [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)]$$

і, отже, система і відповідний диференціальний оператор \hat{L} лінійні.

Якщо оператор \hat{L} побудований, то математичні сподівання і кореляційні функції на вході і на виході пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} m_y(t) &= \langle y(t) \rangle = \hat{L}(p, t) \langle x(t) \rangle = \hat{L}(p, t) m_x(t), \\ B_y(t_1, t_2) &= \langle y(t_1) y(t_2) \rangle = \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = \\ &= \hat{L}(p, t_1) \hat{L}(p, t_2) B_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Як **приклад** розглянемо перетворення випадкової напруги $x(t)$ у деяких найпростіших радіотехнічних колах.

1. Проаналізуємо спочатку роботу **інтегруючого кола**, схема якого наведена на рис. 7.2.

Позначимо через $I(t)$ струм, що тече у колі під дією випадкової ЕРС $x(t)$.

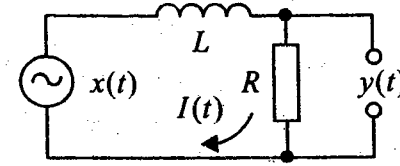


Рис. 7.2

Легко бачити, що процес $y(t)$, який нас цікавить, на виході системи пропорційний до струму: $y(t) = RI(t)$, для визначення якого маємо закон Кірхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI = x(t). \quad (7.58)$$

Перейшовши у (7.58) до Фур'є-компонент і ввівши позначення $\tau_0 = L/R$, отримуємо

$$i\omega L C_I(\omega) + R C_I(\omega) = (i\omega \tau_0 + 1) C_y(\omega) = C_x(\omega), \quad (7.59)$$

звідки випливає:

$$C_y(\omega) = \frac{1}{i\omega \tau_0 + 1} C_x(\omega). \quad (7.60)$$

Таким чином, передавальна функція кола, що розглядається, має вигляд

$$K(i\omega) = \frac{1}{i\omega \tau_0 + 1}, \quad (7.61)$$

і, отже, енергетичні спектри вхідного і вихідного процесів пов'язані між собою відношенням

$$S_y(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.62)$$

На достатньо високих частотах, коли $\omega \gg 1/\tau_0$, з (7.62) отримуємо

$$S_y(\omega) \approx \frac{1}{\omega^2 \tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.63)$$

Порівнюючи (7.63) з (7.44), бачимо, що дійсно, при $\omega \gg 1/\tau_0$ перетворення сигналу у колі, зображеному на рис. 7.2, відбувається так само, як і при його інтегруванні.

Якщо як $x(t)$ виступає білий шум – випадковий процес зі сталою спектральною густиною

$$S_x(\omega) = \frac{N}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty,$$

то згідно з (7.62) на виході кола, що розглядається, енергетичний спектр дорівнює

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2(1 + \omega^2 \tau_0^2)}. \quad (7.64)$$

Схематично поведінку $S_y(\omega)$ показано на рис. 7.3.

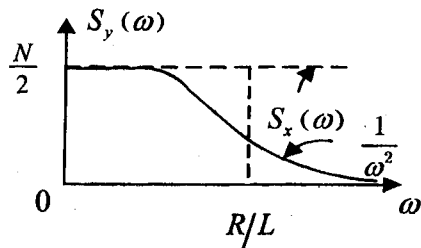


Рис. 7.3

Видно, що при проходженні білого шуму через інтегруюче коло спектр сигналу обрізається на частотах $|\omega| > 1/\tau_0$. Іншими словами, відбувається фільтрація високих частот, а низькі частоти $|\omega| < 1/\tau_0$, як видно з (7.64) і рис. 7.3, проходять через коло без спотворень:

$$S_y(\omega) \approx \frac{N}{2} = S_x(\omega) \text{ при } |\omega| \ll 1/\tau_0.$$

У §6 ми бачили, що білий шум — δ -корельований процес з автокореляційною функцією вигляду

$$B_x(\tau) = N\pi\delta(\tau). \quad (7.65)$$

Скориставшись формулою Вінера-Хінчіна (6.9), знайдемо за (7.64) вигляд автокореляційної функції вихідного процесу $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Отриманий інтеграл так само, як і в попередньому пункті цього параграфа, можна розглядати як частину контурного інтеграла від комплексної функції $f(z) = e^{i\tau z} / (1 + \tau_0^2 z^2)$, що обчислюється на комплексній площині $z = \omega + i\theta$ вздовж замкнутого контуру C , котрий складається з інтервалу $(-R, R)$ дійсної осі і дуги C_R кола $|z| = R$ у верхній півплощині, якщо $\tau > 0$, або в нижній, якщо $\tau < 0$.

Далі, згідно з лемою Жордана, спрямуємо радіус кола у нескінченність ($R \rightarrow \infty$). Інтеграл за C_R при цьому обертається на нуль, а інтеграл по дійсній осі, що залишився, дорівнює лишку в точці $z = 1/i\tau_0$ для $\tau > 0$ або $z = -1/i\tau_0$ для $\tau < 0$. У результаті отримаємо

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-|\tau|/\tau_0}. \quad (7.66)$$

Видно, що білий шум $x(t)$ після проходження інтегруючого кола перетворюється на випадковий процес зі скінченним часом кореляції $\tau_0 \approx L/R$, який збігається зі сталою часу кола. Цей результат можна було б передбачити заздалегідь, виходячи з того, що відповідно до рис. 7.3 спектр $S_y(\omega)$ має ширину $\Delta\omega \approx 1/\tau_0 = R/L$, а в силу співвідношення невизначеностей $\Delta\omega\tau_0 \approx 1$.

Дисперсія процесу $x(t)$ на виході кола виявляється скінченною величиною.

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \frac{\pi N}{2\tau_0}, \quad (7.67)$$

у той час, коли вихідний процес $x(t)$ як білий шум має нескінченну дисперсію.

Розглянемо тепер питання про перетворення сигналів найпростішим електричним колом, зображеним на рис. 7.2 в іншій постановці, що відповідає розв'язку **оберненої задачі**. Нехай нам відомі параметри кола (R і L) і автокореляційна функція $B_y(\tau)$ процесу $y(t)$ на виході кола, а вхідний процес $x(t)$ є невідомим. Як знайти його автокореляційну функцію — $B_x(\tau)$? Можна, звичайно, скористатися формулою (7.62) і виразити невідомий спектр $S_x(\omega)$ через $S_y(\omega)$:

$$S_x(\omega) = (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega), \quad (7.68)$$

а після цього перейти від енергетичних спектрів до кореляційних функцій:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2 \tau_0^2) S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= B_y(\tau) - \tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Проте цей самий результат можна отримати і простішим шляхом — безпосередньо з рівняння (7.58), яке з урахуванням того, що $I(t) = y(t)/R$ і $\tau_0 = L/R$, ми перепишемо у вигляді

$$\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \quad (7.70)$$

Складемо автокореляційну функцію $B_x(\tau)$:

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \left\langle \left[\tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \right] \left[\tau_0 \frac{dy(t+\tau)}{dt} + y(t+\tau) \right] \right\rangle = \\ &= \tau_0^2 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} \frac{dy(t+\tau)}{dt} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \frac{dy(t)}{dt} y(t+\tau) \right\rangle + \tau_0 \left\langle y(t) \frac{dy(t+\tau)}{dt} \right\rangle + \\ &\quad + \langle y(t)y(t+\tau) \rangle = -\tau_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} B_y(\tau) + B_y(\tau). \end{aligned} \quad (7.71)$$

При усередненні ми скористалися формулами (7.29) і (7.30) та врахували, що $\langle y'y_\tau \rangle = -\langle yy'_\tau \rangle$.

2. Розглянемо ще один простий приклад, пов'язаний з проходженням сигналу $x(t)$ через показане на рис. 7.4 диференціююче RC-коло,

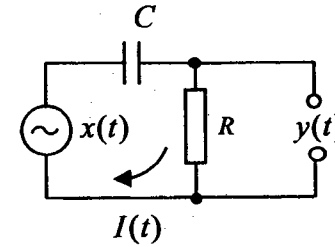


Рис. 7.4

для якого закон Кірхгофа має вигляд

$$RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t') dt' = x(t). \quad (7.72)$$

Увівши позначення $y(t) = RI(t)$ і $\tau_0 = RC$ (стала часу кола), перепишемо (7.72) у такому вигляді:

$$y(t) + \frac{1}{\tau_0} \int y(t') dt' = x(t). \quad (7.73)$$

Після переходу до Фур'є-компонент маємо

$$\left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right) C_y(\omega) = C_x(\omega), \quad (7.74)$$

звідки знаходимо передавальну функцію

$$K(i\omega) = \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau_0}\right)^{-1} = \frac{i\omega\tau_0}{1 + i\omega\tau_0}. \quad (7.75)$$

Видно, що на частотах, коли $\omega\tau_0 \ll 1$, передавальна функція з точністю до сталого множника збігається з передавальною функцією диференціюючого пристрою: $K(i\omega) \approx i\omega\tau_0$. Згідно з формулою (7.25) енергетичний спектр на виході системи рівний

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2} S_x(\omega). \quad (7.76)$$

Якщо на вхід подається білий шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на виході RC кола отримуємо

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2}. \quad (7.77)$$

Схематичний графік $S_y(\omega)$ показано на рис. 7.5.

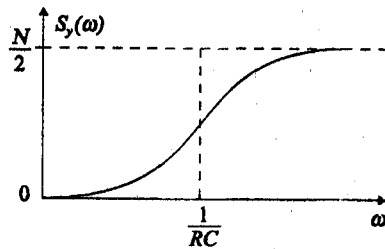


Рис. 7.5

Видно, що RC -коло є фільтром низьких частот при $|\omega| < 1/\tau_0$, а вищі частоти $|\omega| \gg 1/\tau_0$ проходять через коло без спотворень.

Аналогічно до (7.66), скориставшись формулою Вінера-Хінчіна (6.9) за (7.77), знайдемо автокореляційну функцію вихідного процесу $y(t)$:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\tau_0^2}{1 + \omega^2\tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2\tau_0^2 + 1 - 1}{1 + \omega^2\tau_0^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= N\pi\delta(\tau) - \frac{\pi N}{2\tau_0} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Під час виведення цієї формули ми скористалися визначенням δ -функції і отриманим раніше результатом (7.66).

3. Насамкінець розглянемо одинарний коливальний контур, утворений послідовним з'єднанням індуктивності L , опору R і ємності C (рис. 7.6).

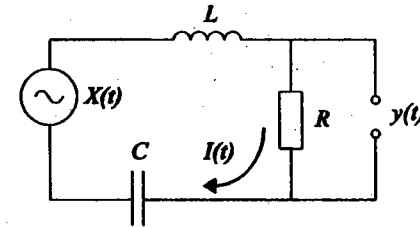


Рис. 7.6

Для визначення процесу $y(t) = RI(t)$ на виході системи знову запишемо закон Кірхгофа

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = x(t). \quad (7.79)$$

Переходячи до Фур'є-компонент, отримаємо

$$i\omega LC_I(\omega) + RC_I(\omega) + \frac{1}{i\omega C} C_I(\omega) =$$

$$= \left[1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] C_y(\omega) = C_x(\omega). \quad (7.80)$$

Тут уведено наступні позначення: $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, $\tau_0 = L/R$ – стала часу кола, що розглядається, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансна частота контуру. З (7.80) випливає:

$$K(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_0 \left(1 - \omega_0^2/\omega^2 \right)}, \quad (7.81)$$

$$|K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.82)$$

Отже, енергетичні спектри на вході і виході кола LRC , що розглядається, пов'язані між собою співвідношенням

$$S_y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} S_x(\omega). \quad (7.83)$$

Якщо на вхід системи подається білий шум ($S_x(\omega) = N/2$), то на виході маємо

$$S_y(\omega) = \frac{N}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (7.84)$$

На рисунках 7.7 і 7.8 подано графіки залежності $|K(i\omega)|^2$ і $S_y(\omega)$ для значень параметрів $\omega_0\tau_0 \gg 1$. Видно, що крива $|K(i\omega)|^2$ має різкий максимум на резонансній частоті контуру $\omega = \omega_0$ і характерну ширину $\Delta\omega_f$, яку наближено можна оцінити як $\Delta\omega_f \approx 1/\tau_0 \ll \omega_0$ (рис.7.7).

Скінченність ширини спектра коливального контуру призводить до того, що з усього неперервного спектра білого шуму на виході залишається тільки вузька смуга частот, що визначається смугою пропускання фільтра (рис. 7.8).

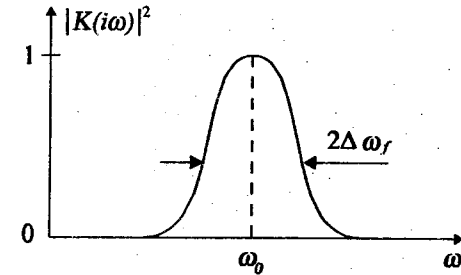


Рис. 7.7

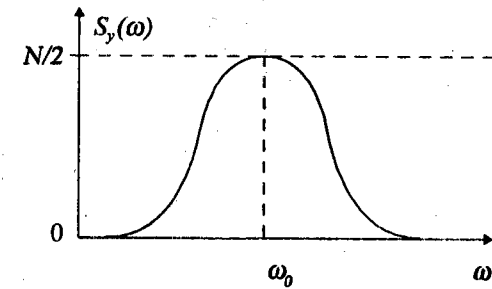


Рис. 7.8

Згідно з формулою Вінера-Хінчіна (6.9), за заданим спектром (7.84) обчислимо тепер автокореляційну функцію вихідного процесу $y(t)$:

$$B_y(\tau) = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} e^{i\omega\tau} d\omega = N \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 \cos \omega\tau}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} d\omega. \quad (7.85)$$

При $\omega_0\tau_0 \gg 1$ характерна ширина $\Delta\omega_f$ кривої на рис. 7.7 набагато менша за резонансну частоту ω_0 : $\Delta\omega_f \ll \omega_0$. У цьому випадку ми маємо справу з вузькосмуговим процесом, для якого обчислення

(7.85) можна виконати, провівши деякі спрощення. Так, згідно з визначенням $\omega = \omega_0 + \nu$ перейдемо до інтегрування за повільною частотою ν . При цьому спростимо підінтегральний вираз

$$\frac{\omega^2}{\omega^2 + \tau_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\omega_0^2 \tau_0^2 \nu^2} = \frac{1}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} \quad (7.86)$$

і виконаємо інтегрування за ν у нескінченних межах. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &\approx N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[\tau(\omega_0 + \nu)]}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \nu \tau}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \\ &= N \cos \omega_0 \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\nu \tau}}{1 + 4\tau_0^2 \nu^2} d\nu = \frac{\pi N}{2\tau_0} \cos \omega_0 \tau e^{-|\tau|/2\tau_0}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Під час обчислення інтегралу ми скористалися отриманим раніше результатом (7.66).

ЗАДАЧІ

1. На вхід ідеального диференціюючого кола діє стаціонарний гауссівський випадковий процес $x(t)$ з нульовим математичним сподіванням $m_x = 0$ і кореляційною функцією

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|).$$

Визначити кореляційну функцію процесу $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ на виході.

Розв'язок. Згідно з (7.29) для випадку, що розглядається, знаходимо

$$B_y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} B_x(\tau).$$

Автокореляційні функції $B_x(\tau)$ і $B_y(\tau)$ парні, тому достатньо розглянути тільки значення $\tau \geq 0$, а після цього у парний спосіб продовжити остаточно результат у ділянку $\tau < 0$. Так, для $\tau \geq 0$ маємо

$$B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha\tau),$$

$$\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} = -\alpha^2 \sigma_x^2 \tau e^{-\alpha\tau},$$

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= -\frac{d}{d\tau} \left[\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} \right] = \alpha^2 \sigma_x^2 \frac{d}{d\tau} (\tau e^{-\alpha\tau}) = \\ &= \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} (1 - \alpha\tau). \end{aligned}$$

Продовжуючи тепер отриманий вираз для $B_y(\tau)$ в область від'ємних значень τ , остаточно отримаємо

$$B_y(\tau) = \alpha^2 \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|).$$

2. Автокореляційна функція стаціонарного процесу $x(t)$ з нульовим середнім має вигляд $B_x(\tau) = e^{-\alpha^2 \tau^2}$. Знайти автокореляційну функцію процесу $y(t)$ на виході системи, що перетворює сигнал за законом

$$y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt}. \quad (1)$$

Розв'язок. Один із можливих шляхів розв'язку задач такого типу зводиться до алгоритму $B_x(\tau) \rightarrow S_x(\omega) \rightarrow S_y(\omega) \rightarrow B_y(\tau)$. Реалізація цього шляху розв'язку зводиться до наступного. Згідно з (6.10) спочатку знаходимо енергетичний спектр вхідного сигналу

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\tau^2 - i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha\tau + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} d\tau = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}}{2\alpha\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далі, переходячи у рівняння (1) до Фур'є-компонент

$$C_y(\omega) = C_x(\omega)(1 + i\omega), \quad (3)$$

знаходимо передавальну функцію лінійної системи: $K(i\omega) = 1 + i\omega$. Звідси, згідно з (7.25) енергетичний спектр на виході системи визначається як

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{(1 + \omega^2)}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (4)$$

За відомим спектром $S_y(\omega)$ за допомогою формули Вінера-Хінчіна знаходимо вихідну автокореляційну функцію:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2) e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega \right] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Перший інтеграл зводиться до інтеграла Пуассона

$$I_1 = 2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Під час обчислення другого інтеграла необхідно перейти до диференціювання за параметром τ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2} + i\omega\tau} d\omega = -\frac{d^2}{d\tau^2} I_1 = \\ &= -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d^2}{d\tau^2} e^{-\alpha^2\tau^2} = -2\alpha\sqrt{\pi} \frac{d}{d\tau} \left[(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = \\ &= 4\alpha^3\sqrt{\pi} \left[e^{-\alpha^2\tau^2} + \tau(-2\alpha^2\tau) e^{-\alpha^2\tau^2} \right] = 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \left[2\alpha\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} + 4\alpha^3\sqrt{\pi} e^{-\alpha^2\tau^2} (1 - 2\alpha^2\tau^2) \right] = \\ &= e^{-\alpha^2\tau^2} \left[1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Можливий і інший, простіший шлях розв'язку. Вхідний і вихідний сигнали у лінійній системі пов'язані за допомогою лінійного оператора \hat{L} .

$$y(t) = \hat{L}x(t), \quad (7)$$

де згідно з (1) $\hat{L} = 1 + \partial/\partial t$. Для заданого оператора зв'язок між математичними сподіваннями і автокореляційними функціями на вході і виході системи визначається згідно з формулами (7.57):

$$m_y(t) = \hat{L}m_x(t), \quad (8)$$

$$B_y(t_1, t_2) = \hat{L}_1 \hat{L}_2 B_x(t_1, t_2). \quad (9)$$

Тут $\hat{L}_{1,2} = 1 + \partial/\partial t_{1,2}$. Враховуючи, що для стаціонарного вхідного процесу, що розглядається, $m_x(t) = \text{Const} = 0$ і $B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1)$, отримуємо $m_y(t) \equiv 0$ і

$$B_y(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_1}\right) \left(1 + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) B_x(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Переходячи у цьому виразі до нової змінної $\tau = t_2 - t_1$, знаходимо $\frac{\partial B_x}{\partial t_1} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} = -\frac{dB_x}{d\tau}$; $\frac{\partial B_x}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_2} = \frac{dB_x}{d\tau}$. У результаті (10) набуває наступного вигляду:

$$B_y(\tau) = \left(1 - \frac{d}{d\tau}\right) \left(1 + \frac{d}{d\tau}\right) B_x(\tau) = \left(1 - \frac{d^2}{d\tau^2}\right) B_x(\tau). \quad (11)$$

Підставляючи в (11) заданий вигляд $B_x(\tau)$, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - \frac{d}{d\tau} \left[e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau \right] = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2\tau (-\alpha^2) \cdot 2\tau - e^{-\alpha^2 \tau^2} (-\alpha^2) \cdot 2 = \\ &= e^{-\alpha^2 \tau^2} [1 + 2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2)], \end{aligned}$$

який збігається зі знайденим раніше (6) іншим способом.

3. На вхід диференціюючого кола (рис. 7.9) діє випадкова напруга $x(t)$, що є обмеженим за частотою білим шумом, спектральна густина якого

$$S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (1)$$

Знайти дисперсію σ_y^2 сигналу на виході кола.

Розв'язок. Для визначення комплексної передавальної функції кола, що розглядається, запишемо закон Кірхгофа

$$C_x(\omega) = C_I(\omega) \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \frac{1 + i\omega CR}{i\omega C} C_I(\omega). \quad (2)$$

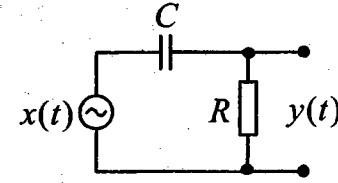


Рис. 7.9

Увівши у (2) позначення $C_y(\omega) = RC_I(\omega)$, отримаємо

$$K(i\omega) = \frac{C_y(\omega)}{C_x(\omega)} = \frac{i\omega CR}{1 + i\omega CR}; \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (3)$$

Тепер з урахуванням (7.25) для спектральної густини на виході системи маємо вираз

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)}(\omega) = \begin{cases} N \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_1, \\ 0, & \omega > \omega_1. \end{cases} \quad (4)$$

Скориставшись (6.22), отримуємо дисперсію сигналу на виході.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= B_y(0) = \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = N \int_0^{\omega_1} \frac{\omega^2 C^2 R^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} d\omega = \\ &= N \left(\int_0^{\omega_1} d\omega - \int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) = N \left(\omega_1 - \frac{1}{RC} \arctg \omega_1 RC \right). \end{aligned}$$

4. Стаціонарний випадковий процес $x(t)$ з кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ діє на фільтр нижніх частот, амплітудно-частотна характеристика якого наведена на рис. 7.10. Знайти дисперсію σ_y^2 вихідної напруги $y(t)$.

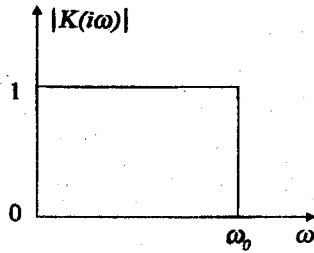


Рис. 7.10

Розв'язок. Спектральну густину на вході фільтра згідно з (6.10) запишемо як

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau-i\omega\tau} d\tau - \int_0^{\infty} e^{\alpha\tau-i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau-i\omega\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau+i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Останній інтеграл обчислено з використанням перетворення Лапласа. У випадку, що розглядається, оригіналу $f(\tau) = \cos \omega\tau$ відповідає зображення $F(\alpha) = \alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$.

За заданою передавальною функцією системи (рис. 7.10) і знайденим енергетичним спектром вхідного сигналу (1) згідно з формулою (7.25) визначаємо спектральну густину вихідного сигналу:

$$S_y^{(+)}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x^{(+)} = \begin{cases} 2 \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, & 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (2)$$

Дисперсія напруги на виході фільтра згідно з (6.22) дорівнює

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \int_0^{\infty} S_y^{(+)}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\omega_0} \frac{\sigma_x^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\sigma_x^2}{\pi} \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}.$$

Аналогічно розв'язуються всі задачі, пов'язані з дією на лінійні системи стаціонарних процесів і, зокрема, білого шуму (див., наприклад, наступну, складнішу задачу).

5. На вхід кола, зображеного на рис. 7.11, діє випадкова напруга $x(t)$, що є білим шумом, зі спектральною густиною $S_x(\omega) = N/2$, $-\infty < \omega < \infty$. Знайти спектральну густину, кореляційну функцію і дисперсію вихідної напруги $y(t)$.

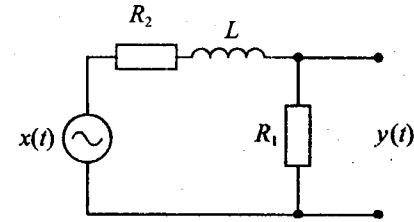


Рис. 7.11

Розв'язок. Із закону Кірхгофа, записаного для Фур'є-компонент кола, що розглядається, маємо

$$\begin{aligned} C_x(\omega) &= (R + i\omega L) C_l(\omega), \\ R &= R_1 + R_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Після введення позначення $C_y(\omega) = R_1 C_l(\omega)$ визначимо комплексну передавальну функцію лінійної системи

$$K(i\omega) = \frac{R_1}{R + i\omega L}. \quad (2)$$

Із (7.25) і цього виразу випливає співвідношення для шуканої спектральної густини на виході системи

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{R_1^2 N}{2(R^2 + L^2 \omega^2)}, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (3)$$

Згідно з формулою Вінера-Хінчина (6.10) знаходимо кореляційну функцію вхідного сигналу

$$B_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = R_1^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{R^2 + L^2 \omega^2} d\omega. \quad (4)$$

Інтеграл у (4) візьмемо за допомогою лишків. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і розглянемо допоміжний контурний інтеграл

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N}{L^2} \oint_C \frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} dz = \frac{R_1^2 N}{L^2} I(a, \tau). \quad (5)$$

Тут $a = \frac{R_1 + R_2}{L} > 0$ а $I(a, \tau)$ — інтеграл по замкнутому контуру

C , який для $\tau > 0$ розташований повністю у верхній півплощині. Особливі точки підінтегральної функції: $z_{1,2} = \pm ia$ — прості полюси, $z_3 = \infty$ — суттєво особлива точка.

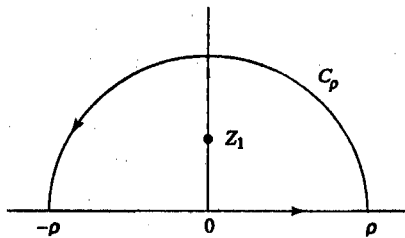


Рис. 7.12

Оскільки підінтегральна функція $\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2}$ при $\tau > 0$ є аналітичною у верхній півплощині, то контур інтегрування C можна довільно

деформувати. Оберемо його так, як показано на рис. 7.12: частина контуру — це відрізок дійсної осі $(-\rho < \omega < \rho)$, а решта — півколо C_ρ радіусом ρ . Після цього спрямуємо $\rho \rightarrow \infty$. При цьому згідно з лемою Жордана інтеграл за C_ρ перетворюється на 0 (через експоненціальне спадання підінтегральної функції $\sim e^{-\theta\tau}$), а інтеграл за дійсною віссю, що залишився, дорівнює сумі лишків, що потрапили всередину замкнутого контуру C :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = 2\pi i \left[\text{res}_{z=ia} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) + \text{res}_{z=\infty} \left(\frac{e^{iz\tau}}{z^2 + a^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Лишок у точці $z = ia$ легко обчислюється як

$$2\pi i \text{res}_{z=ia} \frac{e^{iz\tau}}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \frac{e^{iz_1\tau}}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{e^{-\tau a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\tau a}. \quad (7)$$

А лишок у точці $z \rightarrow \infty$ дорівнює нулю, оскільки $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + a^2} = 0$.

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{a} e^{-a\tau}. \quad (8)$$

З урахуванням (8) після продовження отриманого парним способом результату в область $\tau < 0$ вираз (5) можна записати в остаточному вигляді:

$$B_y(\tau) = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2)L} e^{-\frac{R}{L}|\tau|}. \quad (9)$$

Вираз для дисперсії отримаємо з (9), поклавши $\tau = 0$:

$$\sigma_y^2 = \frac{R_1^2 N \pi}{(R_1 + R_2)L}.$$

6. На вхід пропорційно-інтегруючого фільтра (рис. 7.13) надходить стаціонарна випадкова напруга $x(t)$ з нульовим середнім значенням і кореляційною функцією $B_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a|\tau|}$.

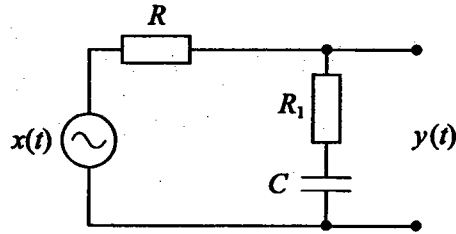


Рис. 7.13

Визначити спектральну густину $S_y(\omega)$, кореляційну функцію $B_y(\tau)$ і дисперсію σ_y^2 напруги $y(t)$ на виході фільтра.

Розв'язок. Передавальна функція знаходиться з закону Кірхгофа для Фур'є-компонент напруги і струму

$$C_x(\omega) = \left(R + R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega),$$

який дає змогу визначити зв'язок між $C_y(\omega)$ і $C_x(\omega)$. Увівши

позначення $C_y(\omega) = \left(R_1 + \frac{1}{i\omega C} \right) C_I(\omega)$, отримаємо

$$C_y(\omega) = \frac{R_1 + \frac{1}{i\omega C}}{R + R_1 + \frac{1}{i\omega C}} C_x(\omega). \quad (1)$$

Таким чином, з (1) маємо

$$K(i\omega) = \frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T}, \quad |K(i\omega)|^2 = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (2)$$

де $T = C(R + R_1)$; $T_1 = R_1 C$.

Енергетичний спектр $S_x(\omega)$ вхідного сигналу визначається за заданою автокореляційною функцією $B_x(\tau)$ за допомогою формули Вінера-Хінчіна (6.10):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(a-i\omega)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right] = \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(a^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Інтеграли у (3) легко обчислюються з використанням перетворення Лапласа, як це було показано у задачі 4. Таким чином, знаючи передавальну функцію лінійної системи (2) й енергетичний спектр (3) на вході, на виході системи згідно з (7.25), отримаємо

$$S_y(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 a}{\pi(a^2 + \omega^2)}. \quad (4)$$

Кореляційну функцію флуктуацій напруги на виході кола з урахуванням (6.9) і (4) можна записати у такому вигляді:

$$B_y(\tau) = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Тут $F(\omega) = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 T^2}$. Інтеграл у (5) візьмемо за допомогою лишків, як і в задачі 5. Перейдемо у комплексну площину $z = \omega + i\theta$ і оберемо допоміжний інтеграл від $F(z) = \frac{1}{\alpha^2 + z^2} \cdot \frac{1 + z^2 T_1^2}{1 + z^2 T^2}$ по замкнутому контуру C , розташованому у верхній півплощині, якщо $\tau > 0$ (або у нижній – якщо

$\tau < 0$). Підінтегральна функція у цьому інтегралі має наступні особливі точки: $z_{1,2} = \pm ia$, $z_{3,4} = \pm i/T$ – прості полюси при $\alpha \neq 1/T$ і $z_5 = \infty$ – суттєво особлива точка. При цьому для випадку $\tau > 0$ обчислення (5) приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned} B_y(\tau) &= \alpha \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot 2\pi i \left[\text{res}_{z=i/T} F(z) + \text{res}_{z=ia} F(z) \right] = \\ &= 2\alpha \sigma_x^2 i \left[\frac{1}{T^2} \cdot \frac{1+T_1^2(i/T)^2}{2(i/T)} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{(i/T)^2 + \alpha^2} + \frac{1+T_1^2(ia)^2}{1+T^2(ia)^2} \cdot \frac{e^{-\alpha\tau}}{2ia} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{1-T_1^2/T^2}{T} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau}{T}}}{\alpha^2 - 1/T^2} + \frac{1-\alpha^2 T_1^2}{\alpha(1-\alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 T \left[1 - \frac{T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{1-\alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1-\alpha^2 T^2)} e^{-\alpha\tau} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Узагальнюючи (6) для випадку всіх довільних значень, остаточно отримуємо

$$B_y(\tau) = \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1-T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} e^{-\frac{|\tau|}{T}} + \frac{1-\alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1-\alpha^2 T^2)} e^{-\alpha|\tau|} \right]. \quad (7)$$

Вираз для дисперсії σ_y^2 отримаємо з (7), поклавши $\tau=0$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \alpha \sigma_x^2 T \left[\frac{1-T_1^2/T^2}{\alpha^2 T^2 - 1} + \frac{1-\alpha^2 T_1^2}{\alpha T(1-\alpha^2 T^2)} \right] = \\ &= \alpha \sigma_x^2 \left[\frac{T_1^2/T - T}{1-\alpha^2 T^2} + \frac{1-\alpha^2 T_1^2}{\alpha(1-\alpha^2 T^2)} \right] = \alpha \sigma_x^2 \frac{1-\alpha^2 T_1^2 - \alpha T + \alpha T_1^2/T}{\alpha(1-\alpha^2 T^2)} = \\ &= \sigma_x^2 \frac{T - \alpha^2 T_1^2 T - \alpha T^2 + \alpha T_1^2}{T(1-\alpha^2 T^2)} = \sigma_x^2 \frac{T + \alpha T_1^2}{T(1+\alpha T)}. \end{aligned} \quad (8)$$

§ 8. Сумісна дія сигналу і шуму на лінійну систему

У цьому розділі, користуючись уже розглянутим апаратом перетворення сигналів у лінійних системах, ми розберемо деякі питання, пов'язані з прийомом і обробкою сигналів у присутності шуму. В експериментах часто доводиться мати справу з ситуацією, коли потужність корисного сигналу виявляється подібною або навіть меншою за потужність шуму (кажучи про шум, ми маємо на увазі не тільки шум, що приходить разом з сигналом, а й власний шум приймальної системи). Приймання та обробка сигналу у випадку, що розглядається, стає, по суті, тільки статистичною задачею. У статистичній теорії приймання сигналів на фоні шумів, як правило, виділяють дві основні групи задач. До першої належать задачі виявлення сигналів на фоні шумів, а до другої – задачі виділення сигналів із шумів.

Якщо спектральні криві сигналу і шуму відрізняються, то для розв'язання поставлених задач використовують лінійні вибіркові системи (лінійні фільтри). У цьому випадку задача оптимізації формулюється таким чином: необхідно підібрати частотну характеристику фільтра так, щоб він усував спектральні компоненти шуму й у той же час „підкреслював” спектральні компоненти корисного сигналу. В підсумку постає питання: як вибрати оптимальний фільтр, і як розрахувати його частотну характеристику $K(i\omega)$?

Для відповіді на поставлені питання нам доведеться спочатку провести деякі узагальнення гармонійного аналізу на випадок детермінованих процесів.

8.1. Узагальнений гармонійний аналіз детермінованих процесів

У попередніх розділах ми розглянули основні правила і прийоми гармонійного аналізу випадкових процесів, а також їх перетворення у лінійних системах. При цьому ми визначили

автокореляційну функцію $B_\xi(\tau)$, енергетичний спектр $S_\xi(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ і знайшли зв'язок між $B_\xi(\tau)$ і $S_\xi(\omega)$ на вході і на виході лінійної системи. Виявляється, що аналогічні поняття і прийоми можна з успіхом застосовувати і при дослідженні детермінованих процесів, якими є корисні сигнали.

Розглянемо детермінований дійсний процес (сигнал) $S(t)$. Аналогічно до того, як ми це робили для ергодичних процесів (див. §5), введемо поняття середнього значення $\langle S \rangle$:

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \quad (8.1)$$

середньої потужності:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt, \quad (8.2)$$

часової кореляційної функції:

$$B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t+\tau) dt \quad (8.3)$$

і енергетичного спектра:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.4)$$

Обернене до (8.4) перетворення має вигляд

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (8.5)$$

Так само, як і для випадкових процесів, надалі розглядатимемо тільки процеси з нульовим середнім значенням ($\langle S \rangle = 0$) і зі скінченною потужністю ($P_s \neq \infty$). Із формул (8.2), (8.3) і (8.5) випливає вже відомий нам із теорії випадкових процесів зв'язок між середньою потужністю, кореляційною функцією та енергетичним спектром:

$$P_s = \langle S^2(t) \rangle = B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) d\omega. \quad (8.6)$$

Окрім перелічених „статистичних” аналогів, для детермінованих процесів природно користуватися й звичайним поняттям амплітудного Фур'є-спектра сигналу $C_s(\omega)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt, \quad S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8.7)$$

За допомогою (8.7) легко визначити зв'язок між повною енергією E_s сигналу і його амплітудним спектром $C_s(\omega)$:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') e^{it(\omega' - \omega'')} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega' - \omega'')} = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' C_s(\omega') C_s^*(\omega'') \delta(\omega' - \omega'') = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Строго кажучи, формули (8.4) і (8.5) потребують, щоб часова кореляційна функція $B_s(\tau)$ і відповідний енергетичний спектр $S_s(\omega)$ були абсолютно інтегрованими функціями (див. коментарі до §6). Проте, використовуючи поняття дельта-функції, у деяких

випадках можна розширити область застосування даних формул. Як приклад розглянемо сигнал у вигляді поодинокого гармонійного коливання:

$$S(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (8.9)$$

де A_s — амплітуда, ω_s — частота і φ_s — початкова фаза детермінованого процесу. Згідно з формулами (8.1)÷(8.4) отримаємо наступні вирази для середнього значення, середньої потужності, кореляційної функції й енергетичного спектра:

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) dt = 0,$$

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_s t + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2},$$

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_s^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \cos(\omega_s t + \omega_s \tau + \varphi_s) dt = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau, \quad (8.10)$$

$$S_s(\omega) = \frac{A_s^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_s \tau e^{j\omega \tau} d\tau = \frac{A_s^2}{4} [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)].$$

8.2. Проходження гармонійного сигналу і шуму через лінійну систему зі сталими параметрами

Розглянемо таку задачу. Нехай на вхід лінійної системи (рис. 8.1) з незмінними у часі параметрами (стаціонарний фільтр) діє сума $x(t)$ корисного сигналу $S(t)$ і шуму $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t). \quad (8.11)$$

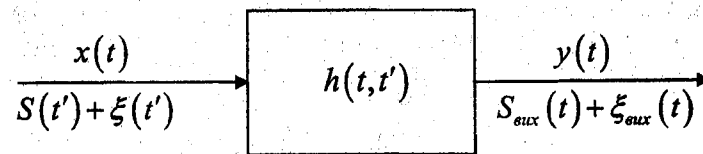


Рис. 8.1

Тут і далі припускається, що сигнал і завада є стаціонарними, мають нульові середні ($\langle S(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \rangle = 0$) і задаються своїми кореляційними функціями $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$ або відповідними енергетичними Фур'є-спектрами $S_s(\omega)$, $S_\xi(\omega)$. Оскільки фільтр за умовою є лінійною системою, то на виході ми також матимемо суму коливань:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^\infty h(t') x(t-t') dt' = \int_0^\infty h(t') [S(t-t') + \xi(t-t')] dt' = \\ &= S_{вих}(t) + \xi_{вих}(t), \end{aligned} \quad (8.12)$$

яка складається з перетворених корисного сигналу:

$$S_{вих}(t) = \int_0^\infty h(t') S(t-t') dt' \quad (8.13)$$

і шуму

$$\xi_{вих}(t) = \int_0^\infty h(t') \xi(t-t') dt'. \quad (8.14)$$

Ставиться наступна задача: які умови мають задовольняти характеристики фільтра, щоб на виході системи забезпечити максимальне відношення сигнал/шум?

Розглянемо спочатку випадок, коли вхідний сигнал є поодиноким гармонійним коливанням (8.9). Уявивши

$$\cos(\omega_s t + \varphi_s) = \frac{1}{2} \left[e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)} \right], \text{ згідно з формулою (8.13)}$$

отримаємо наступне значення корисного сигналу на виході:

$$\begin{aligned} S_{\text{вих}}(t) &= \int_0^\infty h(t') S(t-t') dt' = \frac{A_s}{2} \int_0^\infty h(t') \left\{ e^{i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} + e^{-i[\omega_s(t-t') + \varphi_s]} \right\} dt' = \\ &= \frac{A_s}{2} \left\{ e^{i(\omega_s t + \varphi_s)} K(i\omega_s) + e^{-i(\omega_s t + \varphi_s)} K^*(i\omega_s) \right\} = \\ &= A_s |K(i\omega_s)| \cos[\omega_s t + \varphi_s + \arg K(i\omega_s)]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Під час виведення (8.15) ми користувалися визначенням (7.18) комплексної передавальної функції $K(i\omega)$ і її поданням $K(i\omega) = |K(i\omega)| \exp\{i \arg K(i\omega)\}$. Видно, що після проходження через лінійну систему вигляд гармонійного сигналу не змінюється. Відбувається тільки зміна амплітуди у $|K(i\omega_s)|$ разів, і з'являється додаткове набігання фази $\arg K(i\omega_s)$.

Визначимо тепер середні потужності сигналів на вході і виході лінійної системи. Для детермінованих процесів $S(t)$ і $S_{\text{вих}}(t)$ згідно з (8.10) і (8.15) отримаємо

$$P_{s \text{ вх}} = \frac{A_s^2}{2}, \quad P_{s \text{ вих}} = \frac{A_s^2}{2} |K(i\omega_s)|^2. \quad (8.16)$$

Для випадкових процесів $\xi(t)$ і $\xi_{\text{вих}}(t)$ середні потужності визначимо через відповідні енергетичні спектри $S_\xi(\omega)$ — на вході і $S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega)$ — на виході лінійної системи. При цьому $S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega)$ згідно з (7.25) дорівнює

$$S_{\xi_{\text{вих}}}(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (8.17)$$

Вважаючи далі, що середня потужність шуму визначається дисперсією випадкового процесу згідно з формулою (6.11), отримаємо

$$P_{\xi \text{ вх}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega, \quad (8.18 \text{ а})$$

$$P_{\xi \text{ вих}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi \text{ вих}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega. \quad (8.18 \text{ б})$$

Під відношенням сигнал/шум розуміють відношення відповідних середніх потужностей. Користуючись формулами (8.16) і (8.18), запишемо наступні співвідношення:

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi} \right)_{\text{вх}} = \frac{A_s^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.19)$$

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi} \right)_{\text{вих}} = \frac{A_s^2 |K(i\omega_s)|^2}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}, \quad (8.20)$$

$$\frac{(P_s/P_\xi)_{\text{вих}}}{(P_s/P_\xi)_{\text{вх}}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega}. \quad (8.21)$$

Вираз (8.20) показує, які вимоги має задовольняти лінійна система (фільтр), щоб виконувалася умова $(P_s/P_\xi)_{\text{вих}} \gg 1$. По-перше, частота сигналу має бути близькою до резонансної частоти фільтра ω_0 ($\omega_s \approx \omega_0$). У цьому випадку $|K(i\omega_s)|^2$ досягає

максимальних значень (див. рис. 7.7). По-друге, частотна характеристика $|K(i\omega)|^2$ має бути значно вужчою за характерну ширину $\Delta\omega_\xi$ спектра шуму $S_\xi(\omega)$: чим з більшим запасом виконуватиметься нерівність

$$\Delta\omega_f \ll \Delta\omega_\xi, \quad (8.22)$$

тим меншим буде знаменник. Через $\Delta\omega_f$ ми позначили характерну ширину резонансної кривої фільтра. Це твердження легко пояснюється за допомогою рис. 7.7.

При виконанні умови (8.22) можна вважати, що спектральна густина шуму $S_\xi(\omega)$ у межах резонансної кривої є наближено сталою ($S_\xi(\omega) \approx S_\xi(\omega_0)$). У цьому випадку

$$P_{\xi \text{ вих}} = \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega \approx S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.23)$$

Зауважимо, що при надходженні на вхід системи білого шуму $S_\xi(\omega_0) = S_\xi(\omega) = N/2 = \text{Const}$ і у формулі (8.23) необхідно писати строгу рівність

$$P_{\xi \text{ вих}} = \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.24)$$

З урахуванням викладеного ми отримуємо наступне значення відношення сигнал/шум (8.20) на виході системи:

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi} \right)_{\text{вих}} \approx \frac{A_s^2 |K(i\omega_0)|^2}{2S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.25)$$

Визначимо характерну ширину $\Delta\omega_f$ спектральної кривої фільтра $|K(i\omega)|^2$ як

$$2\Delta\omega_f = \frac{1}{|K(i\omega_0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8.26)$$

Окрім цього, згідно з (8.18) і з урахуванням нерівності (8.22), обчислимо потужність шуму, що припадає на інтервал частот $\omega_0 - \Delta\omega_f \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega_f$:

$$\Delta P_{\xi \text{ вх}} = \int_{\omega_0 - \Delta\omega_f}^{\omega_0 + \Delta\omega_f} S_\xi(\omega) d\omega \approx 2S_\xi(\omega_0) \Delta\omega_f. \quad (8.27)$$

З допомогою введених визначень $\Delta\omega_f$ і $\Delta P_{\xi \text{ вх}}$ формула (8.25) набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{P_s}{P_\xi} \right)_{\text{вих}} \approx \frac{A_s^2/2}{\Delta P_{\xi \text{ вх}}}. \quad (8.28)$$

Таким чином, перерахунок відношення сигнал/шум зі входу на вихід лінійної системи зводиться просто до заміни повної потужності $P_{\xi \text{ вх}}$ на потужність $\Delta P_{\xi \text{ вх}}$.

Аналогічно до (8.26) для шуму зі скінченною смугою також можна ввести характерну ширину $\Delta\omega_\xi$ спектральної кривої $S_\xi(\omega)$:

$$2\Delta\omega_\xi = \frac{1}{S_\xi(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega. \quad (8.29)$$

З урахуванням визначень (8.26) і (8.29) формула (8.21) набуває остаточного і простого вигляду

$$\frac{(P_s/P_\xi)_{\text{вих}}}{(P_s/P_\xi)_{\text{вх}}} = \frac{|K(i\omega_s)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega} \approx \frac{|K(i\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega}{S_\xi(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega} = \frac{\Delta\omega_\xi}{\Delta\omega_f}. \quad (8.30)$$

Отримана оцінка дає змогу оптимальним чином вибрати смугу фільтра $\Delta\omega_f$ за величиною $(P_s/P_\xi)_{\text{вих}}$, що вимагається, за умови, що нам відомі значення $(P_s/P_\xi)_{\text{вх}}$ і смуга частот вхідного шуму $\Delta\omega_\xi$.

8.3. Оптимальний лінійний фільтр для сигналів скінченної тривалості

Розглянемо тепер більш реальний випадок, коли на вхід лінійної системи разом з шумом $\xi(t)$ подається сигнал $S(t)$ скінченної тривалості і з заданим амплітудним Фур'є-спектром $C_s(\omega)$. У процесі проходження корисного сигналу через лінійну систему його спектр перетворюється за законом (див. (7.22)):

$$C_{s \text{ вих}}(\omega) = C_s(\omega) K(i\omega). \quad (8.31)$$

У часовому поданні сигнал на виході має вигляд

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{s \text{ вих}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.32)$$

а його миттєва потужність дорівнює

$$P_{s \text{ вих}}(t) = S_{\text{вих}}^2(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2. \quad (8.33)$$

З іншого боку, середньоквадратичне значення потужності шуму на виході системи далі визначається формулою (8.18). Звідси ми знаходимо відношення миттєвої потужності сигналу до середньої потужності шуму на виході системи:

$$r(t) = \left[\frac{P_s(t)}{P_\xi} \right]_{\text{вих}} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.34)$$

У суто математичному плані поставлена нами задача зводиться до відшукування такого виду передавальної функції $K(i\omega)$, при якому $r(t)$ досягає найбільшого значення. Цю задачу було вперше розв'язано Нормом у 1943 р. методами варіаційного числення. Пізніше, у 1946 р. Ван-Флек і Д. Мідлтон незалежно один від одного розв'язали цю саму задачу за допомогою нерівності Коші-Буняковського. Коротка схема побудови розв'язання зводиться до наступного.

Нехай $t = t_0$ — деякий фіксований момент часу, коли сигнал на виході лінійної системи має відповідні значення амплітуди $S_{\text{вих}}(t_0)$ і миттєвої потужності $P_{s \text{ вих}}(t_0)$:

$$S_{\text{вих}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega, \quad (8.35)$$

$$P_{s \text{ вих}}(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2. \quad (8.36)$$

На основі нерівності Коші-Буняковського миттєву інтенсивність на виході можна оцінити так:

$$P_{s \text{ вих}}(t_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega \right\}^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}. \quad (8.37)$$

При цьому

$$r(t_0) \leq \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega}. \quad (8.38)$$

Рівність у (8.37), тобто досягнення $P_{s \text{ вих}}(t_0)$ і, отже, $r(t_0)$ максимальних значень є можливим тільки у тому випадку, якщо

$$K(i\omega) = \alpha C_s^*(\omega) e^{-i\omega t_0}, \quad (8.39)$$

де α — довільний сталий коефіцієнт, а

$$C_s^*(\omega) = C_s(-\omega) \quad (8.40)$$

комплексно спряжений Фур'є-спектр вхідного сигналу.

Скориставшись отриманою раніше оцінкою (8.23) для густоти потужності шуму на виході системи, запишемо вираз для максимального відношення сигнал/шум у момент часу $t = t_0$:

$$r_{\max}(t_0) = \frac{1}{S_{\xi}(\omega_0)} \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega. \quad (8.41)$$

При далі визначення повної енергії E_s корисного сигналу на виході системи, отримаємо

$$r_{\max}(t_0) = \frac{E_s}{2\pi S_{\xi}(\omega_0)}. \quad (8.42)$$

Згідно з (8.42) величина $r_{\max}(t_0)$ не залежить від t_0 , якщо передавальна функція $K(i\omega)$ фільтра вибирається для кожного нового значення t_0 відповідно до формули (8.39). Іншими словами, ми можемо забезпечити отримання максимального відношення сигнал/шум, що визначається формулою (8.42) у будь-який заздалегідь заданий момент часу t_0 , якщо оберемо передавальну функцію фільтра у вигляді (8.39). Видно, що частотна характеристика (8.39) близька до спектра вхідного сигналу (тому оптимальний фільтр називають також узгодженим фільтром). Слід, проте, зауважити, що до (8.39) входить не сама спектральна амплітуда вхідного сигналу, а її комплексно спряжене значення.

Згідно з (8.32) сигнал на виході оптимального фільтра у довільний момент часу t дорівнює

$$S_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_s(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (8.43)$$

При $t = t_0$ сигнал $S_{\text{вих}}(t)$ набуває максимального значення

$$S_{\text{вих max}}(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |C_s(\omega)|^2 d\omega = \frac{\alpha E_s}{2\pi} \quad (8.44)$$

(ми скористалися визначенням повної енергії (8.8) вхідного сигналу).

З іншого боку, з (8.43) видно, що сигнал на виході оптимального фільтра має вигляд симетричного відносно t_0 імпульсу, хоч форма імпульсу вхідного сигналу може бути довільною. Таким чином, під час проходження сигналу через узгоджений з ним фільтр його форма змінюється.

8.4. Виділення сигналу з шуму.

Рівняння Вінера—Хопфа

У класичній постановці задача виділення сигналу з шуму, вперше сформульована Н. Вінером ще у 1941 р., полягає у наступному. Нехай на вхід лінійної системи з незмінними у часі параметрами надходить сума (8.11) сигналу $S(t)$ і шуму $\xi(t)$ (див. рис. 8.1). Часто процес $S(t)$, що несе інформацію, є промодульованим людською мовою радіосигналом. Такий процес наближено можна розглядати як стаціонарний шум з нульовим середнім значенням ($\langle S(t) \rangle = 0$). З іншого боку, як і раніше, припускаємо, що завада $\xi(t)$, яка спотворює сигнал, також є стаціонарним шумом з нульовим середнім значенням ($\langle \xi(t) \rangle = 0$). Таким чином, на вхід лінійної системи подається два випадкових стаціонарних процеси:

$$x(t) = S(t) + \xi(t), \quad (8.45)$$

причому перший $S(t)$ ми вважаємо сигналом, а другий $\xi(t)$ — завадою. Припускаємо, що нам відомі відповідні Фур'є-подання $C_s(\omega)$ і $C_\xi(\omega)$ процесів (див. (6.2) і (8.7)), задані їхні кореляційні функції $B_s(\tau) = \langle S(t)S(t+\tau) \rangle$, $B_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$, а також відповідні енергетичні спектри $S_s(\omega)$ і $S_\xi(\omega)$. Якщо процеси $S(t)$ і $\xi(t)$ між собою корелюють, то припускається, що відома їхня взаємна кореляційна функція $B_{s\xi}(\tau) = \langle S(t)\xi(t+\tau) \rangle$ і енергетичний спектр $S_{s\xi}(\omega)$, що їй відповідає.

Задачею лінійного фільтра крім очищення сигналу від завад може бути також якийсь його лінійне перетворення (підсилення, диференціювання, інтегрування тощо). Тому у загальному випадку на виході фільтра за відсутності завад потрібно отримати деяку

функцію часу $F(t)$, пов'язану з сигналом $S(t)$, заданим лінійним перетворенням:

$$F(t) = \hat{L}\{S(t)\}, \quad (8.46)$$

де \hat{L} — деякий лінійний оператор. Наприклад:

$$F(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \text{ якщо потрібне диференціювання;}$$

$$F(t) = \int^t S(t') dt', \text{ якщо потрібне інтегрування;}$$

$$F(t) = S(t - \Delta t), \text{ якщо потрібен зсув у часі на величину } \Delta t;$$

$$F(t) = A \cdot S(t), \text{ якщо потрібне підсилення в } A \text{ разів;}$$

$$F(t) = S(t), \text{ якщо потрібне просто відтворення сигналу.}$$

Коливання $y(t)$ на виході лінійної системи пов'язане з коливанням на вході вже відомим нам співвідношенням (8.12). Потрібне ж коливання на виході фільтра — $F(t)$. Запишемо різницю

$$\varepsilon(t) = y(t) - F(t), \quad (8.47)$$

яка має зміст миттєвої похибки відтворення $F(t)$. Середній квадрат цієї похибки дорівнює

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \langle [y(t) - F(t)]^2 \rangle = \left\langle \left[\int_0^\infty dt' h(t') x(t-t') \right]^2 \right\rangle = \\ &= -2 \langle F(t) \int_0^\infty dt' h(t') x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Перетворюючи квадрат першого доданка справа у подвійний інтеграл, вносячи далі у другому доданку множник $F(t)$ як незалежний від змінної інтегрування під знак інтеграла, отримаємо

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') \langle x(t-t') x(t-t'') \rangle - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' h(t') \langle F(t) x(t-t') \rangle + \langle F^2(t) \rangle. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Враховуючи стаціонарність усіх процесів, що розглядаються, введемо до розгляду наступні кореляційні функції:

$$\begin{aligned} B_x(t_1, t_2) &= \langle x(t_1) x(t_2) \rangle = B_x(t_1 - t_2), \\ B_{Fx}(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) x(t_2) \rangle = B_{Fx}(t_1 - t_2), \\ B_F(t_1, t_2) &= \langle F(t_1) F(t_2) \rangle = B_F(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Скориставшись далі зв'язком між середньою потужністю процесу $F(t)$ і його кореляційною функцією $B_F(t_1, t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$: $\langle F^2(t) \rangle = B_F(0)$, перепишемо (8.49) так:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' h(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' h(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.51)$$

Оптимальним вважається такий фільтр, для якого величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ є мінімальною. Отже, математична задача зводиться до відшукування такого виду імпульсної перехідної функції $h(t)$, при якій величина $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ є мінімальною. Ця задача була розв'язана Вінером методами варіаційного аналізу. Він показав, що шукана характеристика $h(t)$ визначається з розв'язку наступного інтегрального рівняння:

$$\int_0^\infty B_x(t-t') h(t') dt' = B_{xF}(t), \quad (8.52)$$

яке пізніше отримало назву **рівняння Вінера-Хопфа**.

Доведення (8.52) проведемо шляхом наступних простих міркувань. Нехай оптимальний фільтр з імпульсною передавальною функцією $h(t)$ забезпечує мінімум середньоквадратичної похибки $\mathcal{E} = \overline{\varepsilon^2}$. Розглянемо тепер новий фільтр з імпульсною передавальною функцією у вигляді

$$\tilde{h}(t) = h(t) + \gamma g(t), \quad (8.53)$$

де $h(t)$ — як і раніше імпульсна передавальна функція оптимального фільтра, $g(t)$ — імпульсна передавальна функція деякого довільного фізично здійсненого фільтра, а γ — довільний дійсний параметр. Замінюючи у формулах (8.48) ÷ (8.51) $h(t)$ на $\tilde{h}(t)$, запишемо середньоквадратичну похибку $\tilde{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle$ відтворення сигналу $F(t)$ на виході нової лінійної системи:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} = \langle \tilde{\varepsilon}^2(t) \rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' \tilde{h}(t') \tilde{h}(t'') B_x(t' - t'') - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' \tilde{h}(t') B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.54)$$

Підставивши тепер сюди вираз (8.53), отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' [h(t') + \gamma g(t')] [h(t'') + \gamma g(t'')] B_x(t' - t'') - \\ &- 2 \int_0^\infty dt' [h(t') + \gamma g(t')] B_{xF}(t') + B_F(0). \end{aligned} \quad (8.55)$$

Розкривши дужки під знаком інтеграла і враховуючи визначення середньоквадратичної похибки \mathcal{E} оптимального фільтра (8.51), приходимо до наступного виразу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} = 2\gamma \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^\infty dt' g(t') B_{xF}(t') \right\} + \\ + \gamma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t''). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Під час виведення (8.56) ми врахували, що для стаціонарного процесу $x(t)$ кореляційна функція B_x парна, отже,

$$B_x(t' - t'') = B_x(t'' - t').$$

За визначенням, оптимальний фільтр мінімізує похибку на виході. А оскільки фільтр з $\tilde{h}(t)$ не є оптимальним, то різниця $\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E}$ у (8.56) має бути невід'ємною ($\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \geq 0$) для будь-яких фізично реалізованих $g(t)$ і значеннях параметра γ . Неважко довести, що другий доданок у (8.56) є додатною величиною:

$$\gamma^2 \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') g(t'') B_x(t' - t'') = \gamma^2 \left\langle \left[\int_0^\infty dt g(t) x(t) \right]^2 \right\rangle \geq 0. \quad (8.57)$$

Нерівність (8.57) приводить до того, що для виконання умови $\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \geq 0$ необхідно вимагати, щоб вираз, який міститься у фігурних дужках (8.56), дорівнював нулю:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' g(t') h(t'') B_x(t' - t'') - \int_0^\infty dt' g(t') B_{xF}(t') = 0. \quad (8.58)$$

Справді, якщо вираз (8.58) не дорівнює нулю, то при відповідному виборі величини довільного параметра γ (додатних або від'ємних

значень) можна досягти того, що різниця похибок у (8.56) стане від'ємною величиною ($\tilde{\mathcal{E}} - \mathcal{E} < 0$), а за умовою задачі це неможливо.

Перепишемо (8.58) у наступному вигляді:

$$\int_0^\infty g(t') \left\{ \int_0^\infty B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') \right\} dt' = 0. \quad (8.59)$$

Рівність (8.59) може виконуватися при всіх можливих $g(t)$ тільки у випадку, якщо

$$\int_0^\infty B_x(t' - t'') h(t'') dt'' - B_{xF}(t') = 0. \quad (8.60)$$

Таким чином, ми приходимо до рівняння Вінера—Хопфа (8.52), що й потрібно було довести.

Як *приклад* розглянемо випадок, коли вхідний сигнал $S(t)$ і завада $\xi(t)$ є статистично незалежними, а $F(t) = S(t)$ (просте відтворення вхідного сигналу). Згідно з (8.50) знаходимо відповідні кореляційні функції:

$$B_x(t_1 - t_2) = \langle [S(t_1) + \xi(t_1)][S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2) + B_\xi(t_1 - t_2),$$

$$B_{Fx}(t_1 - t_2) = \langle S(t_1)[S(t_2) + \xi(t_2)] \rangle = B_s(t_1 - t_2),$$

$$B_F(t_1 - t_2) = \langle S(t_1)S(t_2) \rangle = B_s(t_1 - t_2).$$

З урахуванням цих подань рівняння Вінера—Хопфа (8.52) набуває вигляду

$$\int_0^\infty [B_s(t - t') + B_\xi(t - t')] h(t') dt' = B_s(t). \quad (8.61)$$

Виконуючи Фур'є-перетворення цього виразу за змінною t , з урахуванням визначення передавальної функції лінійного фільтра (7.18), отримаємо

$$[S_s(\omega) + S_\xi(\omega)]K(i\omega) = S_s(\omega). \quad (8.62)$$

Звідси знаходимо передавальну функцію оптимального фільтра

$$K(i\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_\xi(\omega)}. \quad (8.63)$$

Обчислимо тепер середньоквадратичну похибку $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ відтворення сигналу. Для цього виконаємо Фур'є-перетворення виразу (8.47). Унаслідок цього з урахуванням зв'язку амплітудних спектрів сигналу і шуму на вході і виході лінійної системи отримаємо амплітудний спектр миттєвої похибки відтворення.

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\omega) &= [C_s(\omega) + C_\xi(\omega)]K(i\omega) - C_s(\omega) = \\ &= [K(i\omega) - 1]C_s(\omega) + K(i\omega)C_\xi(\omega). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Згідно з (8.64) кореляційна функція $\langle \tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle$ амплітудного спектра дорівнює

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle &= \langle [K(i\omega) - 1]C_s(\omega) + K(i\omega)C_\xi(\omega) \rangle \times \\ &\times \left\{ [K(i\omega') - 1]^* C_s^*(\omega') + K^*(i\omega')C_\xi^*(\omega') \right\}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Для стаціонарних процесів $S(t)$ і $\xi(t)$ з урахуванням їхньої некорельованості енергетичні й амплітудні спектри на вході лінійної системи пов'язані наступними співвідношеннями (див. §6):

$$\begin{aligned} \langle C_s(\omega)C_s^*(\omega') \rangle &= S_s(\omega)\delta(\omega - \omega'), \\ \langle C_\xi(\omega)C_\xi^*(\omega') \rangle &= S_\xi(\omega)\delta(\omega - \omega'), \\ \langle C_s(\omega)C_\xi^*(\omega') \rangle &= \langle C_s^*(\omega)C_\xi(\omega) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

З (8.66) видно, що у правій частині (8.65) в нас стоїть δ -корельований процес. Отже, такий самий процес має бути і в лівій частині рівності (див. §6). Увівши за допомогою співвідношення

$\langle \tilde{\varepsilon}(\omega)\tilde{\varepsilon}^*(\omega') \rangle = S_\varepsilon(\omega)\delta(\omega - \omega')$ енергетичний спектр $S_\varepsilon(\omega)$ похибки, з (8.65) отримаємо для нього такий вираз:

$$S_\varepsilon(\omega) = |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega). \quad (8.67)$$

За знайденим енергетичним спектром $S_\varepsilon(\omega)$ середньоквадратична похибка вимірювань $\langle \varepsilon^2(t) \rangle$ визначається так:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |K(i\omega) - 1|^2 S_s(\omega) + |K(i\omega)|^2 S_\xi(\omega) \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (8.68)$$

Підставляючи сюди знайдену передавальну функцію (8.63) оптимального фільтра, остаточно отримуємо

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)S_\xi(\omega)}{S_s(\omega) + S_\xi(\omega)} d\omega. \quad (8.69)$$

8.5. Оптимальні фільтри і корелятори

Розглянуті методи виявлення і виділення сигналів особливо ефективні, коли спектри сигналу і шуму суттєво відрізняються. У цьому випадку оптимальні фільтри забезпечують мінімальні похибки виявлення і виділення сигналів. Проте, як уже зазначалося, через те, що енергетичні спектри і кореляційні функції пов'язані між собою через Фур'є-перетворення, суттєві відмінності у спектрах сигналу і шуму, природно, призведуть до відмінностей у їхніх кореляційних функціях. Тому в задачах виявлення і виділення сигналів окрім розглянутих уже методів використовуються і „спряжені за Фур'є” методи, які ґрунтуються на вимірюванні автокореляційних і взаємно-кореляційних функцій. Для пояснення

вищесказаного розглянемо знову задачу про виявлення поодинокого гармонійного сигналу (8.9) на фоні стаціонарного шуму $\xi(t)$:

$$x(t) = S(t) + \xi(t) = A_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) + \xi(t). \quad (8.70)$$

Припускаємо, що сигнал і завада незалежні. Нехай тепер сумарний сигнал $x(t)$ подається на корелятор, показаний на рис.

8.2. На виході корелятора маємо

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle [S(t) + \xi(t)][S(t+\tau) + \xi(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle S(t)S(t+\tau) \rangle + \langle S(t)\xi(t+\tau) \rangle + \langle S(t+\tau)\xi(t) \rangle + \\ &\quad + \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Беручи до уваги те, що для незалежних процесів

$$\langle S\xi \rangle = \langle S \rangle \langle \xi \rangle = 0 \quad (\langle S \rangle = \langle \xi \rangle = 0),$$

отримаємо

$$B_x(\tau) = B_s(\tau) + B_\xi(\tau) = \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau + B_\xi(\tau). \quad (8.72)$$

При обчисленні $B_s(\tau)$ ми скористалися отриманим раніше результатом (8.10).

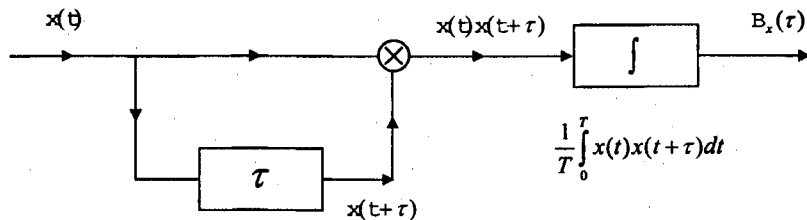


Рис. 8.2

Як уже зазначалося в §5, кореляційна функція випадкового процесу $B_\xi(\tau)$ відмінна від нуля тільки для часу τ , що не перевищує характерного часу $\tau = \tau_0$ спадання функції $B_s(\tau)$ (характерний час кореляції). При $\tau \gg \tau_0$ кореляційна функція $B_\xi(\tau)$ є зникаюче малою ($B_\xi \approx 0$) і на виході приладу, що вимірює кореляційну функцію $B_x(\tau)$ сумарного сигналу, ми отримуємо

$$B_x(\tau) \approx \frac{A_s^2}{2} \cos \omega_s \tau \quad (8.73)$$

незалежно від відношення сигнал/шум на вході. Це означає, що при великому часі спостереження з'являється можливість виявлення будь-якого малого гармонійного сигналу на фоні шуму (рис. 8.3).

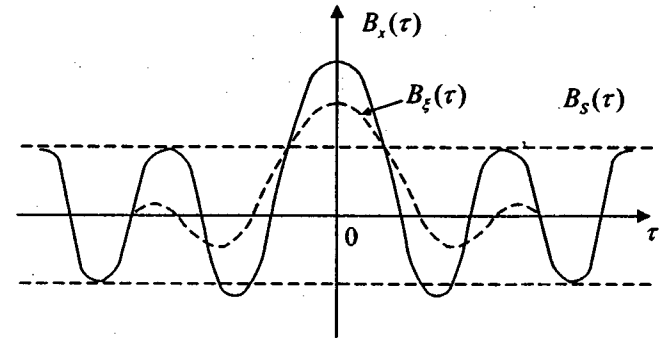


Рис. 8.3

ЗАДАЧІ

1. Визначити зв'язок між амплітудним $C_s(\omega)$ і енергетичним $S_s(\omega)$ спектрами детермінованого сигналу $S(t)$, заданого у вигляді фінітної функції, значення якої відмінні від нуля тільки на скінченному інтервалі часу:

$$\begin{aligned} S(t) &\neq 0, \quad -T_s/2 \leq t \leq T_s/2; \\ S(t) &\equiv 0, \quad |t| > T_s/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Розв'язок. Згідно з формулою (8.7) знайдемо амплітудний Фур'є-спектр $C_s(\omega)$ сигналу $S(t)$:

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

За допомогою (8.3) будемо далі кореляційну функцію імпульсного процесу:

$$B_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) S(t+\tau) dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} S(t) S(t+\tau) dt. \quad (3)$$

Виконавши тепер у (3) Фур'є-перетворення за τ , приходимо до наступного виразу, який пов'язує між собою енергетичний $S_s(\omega)$ і амплітудний $C_s(\omega)$ спектри імпульсного сигналу:

$$S_s(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} |C_s(\omega)|^2. \quad (4)$$

2. На вхід узгодженого фільтра подається прямокутний імпульс

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & |t| \leq \frac{\tau_0}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau_0}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Визначити форму сигналу на виході.

Розв'язок. Згідно з формулою (8.7) визначимо спочатку амплітудний Фур'є-спектр для заданого вхідного прямокутного імпульсу (1)

$$C_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega \tau_0/2)}{\omega \tau_0/2}. \quad (2)$$

Скориставшись співвідношенням (8.43), визначимо форму сигналу на виході оптимального фільтра. Підставивши (2) у (8.43), отримуємо

$$S_{\text{вих}}(t) = \alpha \left(\frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{(\omega \tau_0/2)^2} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega = \alpha \frac{S_0^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' - i \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \sin \omega t' \right] d\omega. \quad (3)$$

У цій формулі введено позначення $t' = t - t_0$.

Другий інтеграл у (3) дорівнює нулю, оскільки підінтегральна функція непарна, а границі інтегрування симетричні. Тому співвідношення (3) можна переписати у вигляді табличного інтеграла для косинус-перетворення Фур'є

$$S_{\text{вих}}(t) = \frac{2\alpha S_0^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau_0/2)}{\omega^2} \cos \omega t' d\omega, \quad (4)$$

який дорівнює

$$S_{\text{вих}}(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} S_0^2 \tau_0 \left[1 - \frac{|t-t_0|}{\tau_0} \right], & |t-t_0| < \tau_0, \\ 0, & |t-t_0| > \tau_0. \end{cases} \quad (5)$$

З отриманого виразу видно, що оптимальний фільтр перетворює вхідний прямокутний сигнал $S(t)$ у деякий новий $S_{\text{вих}}(t)$ і робить це таким чином, що новий сигнал набуває при $t = t_0$ значення, найбільшого з усіх можливих, і цим у найкращий спосіб виділяється на фоні шуму (рис. 8.4).

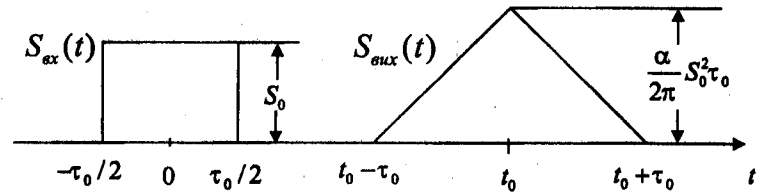


Рис. 8.4

ЛІТЕРАТУРА

1. *Блиох П.В.* Статистическая радиофизика. — Х.: Рукопись. Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, 1976. — 126 с.
2. *Фукс И.М.* Статистическая радиофизика и теория информации. Препринт. — Х.: ХГУ. — Ч. 1. — 1985. — 60 с.; Ч. 2. — 1986. — 88 с.; Ч. 3. — 1992. — 91 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — 550 с.
4. *Тихонов В.И., Харисов В.Н.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 608 с.
5. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1. Случайные процессы. — 494 с.
6. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2. Случайные поля. — 463 с.
7. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука, 1972. — 424 с.
8. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн. — М.: Сов. радио, 1970. — 384 с.
9. *Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.

Додаткові джерела

1. *Татарский В.И.* Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967. — 548 с.
2. *Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
3. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. — 624 с.
5. *Ваништейн Л.А., Зубаков В.Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960. — 447 с.
6. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. — М.: ГИФМЛ, 1963. — 276 с.
7. *Гуткин Л.С.* Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Сов. радио, 1972. — 448 с.
8. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

НБ ПНУС



733523

Навчальне видання

Мінаков Анатолій Олексійович
Тирнов Олег Федорович

СТАТИСТИЧНА РАДІОФІЗИКА

Частина I. Основні поняття теорії ймовірностей.

Елементи теорії випадкових функцій

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів*

Редактор *А.М. Цимбал*
Коректори *Н.А. Балабуха, О.О. Шапошникова*
Комп'ютерна верстка *В.А. Паланський*

Підписано до друку 05.12.2007. Формат 60х90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 12,0. Обл.-вид. арк. 15,6.
Тираж 3500 прим. Зам. №1896/087.

ТОВ «Веста». Свідоцтво ДК № 2540 від 26.06.2006.
6164, м. Харків, вул. Бакуніна, 8а.

Адреса редакції: 61145, м. Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Віддруковано у ТОВ «Навчальний друк»
Україна, 62300, Харківська обл., м. Дергачі, вул. Петровського, 163а.
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК №58 від 10.06.2002 р.