

І.О. Теплицький

# ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

*Навчальний посібник*

Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України

Видання друге, виправлене і доповнене

Кривий Ріг  
2010

УДК 004.94(07)

ББК 32.816

Т 34

**Теплицький І. О.**

Т 34 Елементи комп'ютерного моделювання : навчальний посібник.  
– Кривий Ріг : КДПУ, 2010. – 264 с., іл.

ISBN-978-966-2087-03-1

**Рецепзепти:**

**В.М. Соловійов** – доктор фізико-математичних наук, професор Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького;

**О.Д. Учитель** – доктор технічних наук, професор Національної металургійної академії України;

**С.О. Семеріков** – доктор педагогічних наук, професор Криворізького державного педагогічного університету.

У посібнику розглянута педагогічна технологія комп'ютерного математичного моделювання, наводяться численні приклади її застосування до побудови й дослідження навчальних моделей об'єктів різної природи.

У якості середовища моделювання обрано електронні таблиці.

Для вчителів, учнів 9-12 класів, студентів вищих педагогічних навчальних закладів, організаторів та слухачів післядипломної педагогічної освіти.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчально-методичний посібник серії «Бібліотека вчителя»  
для вчителів та учнів 9–12 класів загальноосвітніх шкіл, студентів  
вищих навчальних закладів, організаторів та слухачів  
післядипломної педагогічної освіти  
(лист № 1 / П – 3378 від 15.05.2009 р.)

ББК 32.816

ISBN-978-966-2087-03-1

© І.О. Теплицький , 2010

## ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	<b>8</b>
<i>Розділ 1. Моделювання як метод наукового пізнання</i> .....	<i>14</i>
<b>Глава 1. Моделі й моделювання</b> .....	<b>16</b>
1.1. Які бувають моделі .....	19
1.1.1. Фізичне моделювання .....	19
1.1.2. Аналогове моделювання .....	22
1.1.3. Інтуїтивне моделювання .....	23
1.1.4. Знакове моделювання .....	24
1.2. Математичне моделювання .....	24
<b>Глава 2. Основні етапи моделювання</b> .....	<b>26</b>
2.1. Створення моделі .....	26
2.1.1. Постановка задачі .....	26
2.1.2. Зміст відповіді .....	26
2.1.3. Спрощуючі припущення .....	27
2.1.4. Головне протиріччя в моделюванні .....	27
2.1.5. Істотні й другорядні властивості об'єкту .....	28
2.2. Обчислювальний експеримент .....	28
2.2.1. Дослідження замкнутого електричного кола постійного струму .....	29
2.2.2. Дослідження електричного кола змінного струму .....	33
Висновки .....	35
2.3. Перевірка моделі на адекватність .....	35
2.4. Комп'ютерне моделювання та його особливості .....	36
2.4.1. Особливості, що залежать від комп'ютерів .....	36
2.4.2. Особливості, пов'язані з методами роботи .....	37
Підсумки .....	38
<i>Розділ 2. Найперші моделі</i> .....	<i>39</i>
<b>Глава 3. Модель процесу поширення чуток</b> .....	<b>40</b>
Постановка задачі .....	40
Аналіз проблеми: особливості перебігу процесу .....	40
3.1. Найпростіша версія моделі .....	41
3.1.1. Алгоритм роботи з моделлю .....	42
3.1.2. Обчислювальний експеримент .....	43
Висновки .....	46
3.2. Поліпшена версія моделі .....	47
3.2.1. Алгоритм роботи з моделлю .....	48
3.2.2. Обчислювальний експеримент .....	49
Висновки .....	51

3.3. Наступне вдосконалення моделі.....	52
3.3.1. Алгоритм роботи з удосконаленою моделлю.....	54
3.3.2. Обчислювальний експеримент .....	54
Висновки .....	57
3.4. Закріплення: найпростіша модель епідемії .....	58
3.4.1. Постановка задачі.....	58
3.4.2. Створення моделі .....	59
3.4.2.1. Концептуальна модель .....	59
3.4.2.2. Математична модель .....	59
3.4.3. Алгоритм роботи з моделлю .....	60
3.4.4. Обчислювальний експеримент .....	61
Висновки .....	63
<i>Розділ 3. Елементи математичної екології.....</i>	<i>64</i>
<b>Глава 4. Динаміка одновидової популяції.....</b>	<b>66</b>
4.1. Модель одновидової популяції за відсутності обмежень .....	66
4.1.1. Постановка задачі. Опис моделі Мальтуса.....	66
4.1.2. Алгоритм роботи з моделлю .....	68
4.1.3. Обчислювальний експеримент .....	69
Висновки .....	71
4.2. Модель одновидової популяції за наявності обмежень .....	72
4.2.1. Алгоритм роботи з моделлю .....	73
4.2.2. Обчислювальний експеримент .....	74
4.2.3. Стійкість математичної моделі .....	77
Висновки .....	79
4.3. Промислове використання популяції .....	80
4.3.1. Алгоритм роботи з моделлю .....	81
4.3.2. Обчислювальний експеримент .....	81
Висновки .....	85
4.4. Удосконалена модель вилову .....	86
4.4.1. Автоматичне регулювання і зворотний зв'язок .....	87
4.4.2. Обчислювальний експеримент .....	89
Висновки .....	91
<b>Глава 5. Модель “хижак–жертва” .....</b>	<b>93</b>
5.1. Попередні зауваження .....	93
5.2. Постановка задачі і побудова математичної моделі .....	93
5.3. Обчислювальний експеримент .....	96
Висновки .....	102
<b>Глава 6. Вікова модель одновидової популяції.....</b>	<b>104</b>
Вступ .....	104



6.1. Найпростіша версія моделі .....	104
6.1.1. Постановка задачі.....	106
6.1.2. Алгоритм роботи з моделлю .....	107
6.1.3. Обчислювальний експеримент (тестування).....	108
6.2. Поліпшення моделі Леслі .....	110
6.2.1. Практична задача .....	112
6.2.1.1. Формалізована постановка задачі .....	112
6.2.1.2. Алгоритм роботи з моделлю .....	113
6.2.1.3. Обчислювальний експеримент.....	114
6.2.2. Аналіз результатів .....	116
6.3. Модель Леслі з природними обмеженнями .....	117
6.3.1. Алгоритм роботи з моделлю .....	118
6.3.2. Обчислювальний експеримент .....	119
Висновки.....	121
<i>Розділ 4. Комп'ютерне моделювання з фізики: механіка.....</i>	<i>122</i>
<b>Глава 7. Механічні коливання.....</b>	<b>124</b>
7.1. Рух тіла під дією сили пружності .....	124
7.1.1. Аналіз процесу (явища).....	124
7.1.2. Постановка задачі. Концептуальна (змістова) модель ..	125
7.1.3. Математична модель .....	126
7.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю ..	126
7.1.5. Остаточний алгоритм .....	128
7.2. Тестування моделі: нехтуємо опором .....	129
Покращення точності обчислень .....	130
Висновки .....	133
7.3. Рух тіла на пружині за наявності в'язкого опору .....	133
7.4. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя.....	134
7.5. Фазова площина .....	137
7.5.1. Теоретичні відомості.....	137
7.5.2. Дослідження коливальних процесів методом фазових діаграм.....	140
Висновки .....	143
<b>Глава 8. Рух тіла в полі сили тяжіння.....</b>	<b>144</b>
8.1. Рух штучного супутника планети.....	145
8.1.1. Постановка задачі.....	145
8.1.2. Алгоритм роботи з моделлю .....	147
8.1.3. Обчислювальний експеримент .....	147
Висновки .....	150
8.2. Рух природного супутника планети та рух компонентів	

системи “подвійна зірка” .....	151
8.2.1. Постановка задачі.....	151
8.2.2. Обговорення алгоритму .....	153
8.2.3. Алгоритм роботи.....	154
8.2.4. Обчислювальний експеримент .....	155
Висновки .....	160
8.3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння ..	160
8.3.1. Перший закон Кеплера.....	161
Алгоритм роботи.....	162
8.3.2. Другий закон Кеплера .....	163
Алгоритм роботи.....	164
8.3.3. Третій закон Кеплера .....	165
8.4. Узагальнення закону тяжіння на випадок довільного	
показника степеня $k$ для відстані $r$ між тілами .....	167
8.4.1. Постановка проблеми. План роботи .....	167
8.4.2. Обчислювальний експеримент .....	168
Висновки .....	174
8.5. Моделювання абсолютних та відносних рухів планет .....	175
8.5.1. Геліоцентрична система відліку .....	175
8.5.2. Геоцентрична система відліку .....	178
Висновки .....	181
<b>Глава 9. Задача про політ паперового літачка.....</b>	<b>182</b>
9.1. Рух тіла під дією декількох сил: загальні зауваження .....	182
9.1.1. План майбутньої роботи .....	182
9.1.2. Постановка задачі. Створення концептуальної моделі ..	182
9.1.3. Математична модель .....	183
9.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю ..	185
9.1.5. Остаточний алгоритм .....	186
9.2. Рух тіла під дією сили тяжіння (тестування моделі).....	188
Короткі підсумки тестування .....	192
9.3. Рух тіла під дією сили тяжіння та сили опору середовища ..	193
Обчислювальний експеримент .....	195
Висновки .....	201
9.4. Рух тіла під дією трьох сил: сили тяжіння, сили опору	
середовища та піднімальної сили .....	202
Обчислювальний експеримент .....	204
Висновки .....	206
<b>Глава 10. Задача про м’яку посадку па Місяць .....</b>	<b>207</b>
10.1. Передмова .....	207

10.2. Постановка задачі .....	207
10.2.1. Формалізація задачі та побудова моделі .....	208
10.2.2. Аналіз умови й обговорення плану роботи .....	209
10.3. Обчислювальний експеримент .....	213
10.4. Поліпшення інтерфейсу користувача .....	214
Висновки .....	217
<i>Розділ 5. Імітаційне моделювання .....</i>	<i>218</i>
<b>Глава 11. Моделювання за допомогою випадкових чисел .....</b>	<b>220</b>
11.1. Детерміновані й стохастичні моделі .....	220
11.2. Метод Монте-Карло .....	220
11.3. Моделювання броунівського руху (найпростіша модель) .....	223
11.3.1. Комп'ютерна модель броунівського руху .....	224
11.3.2. Обговорення алгоритму роботи з моделлю .....	224
11.3.3. Обчислювальний експеримент .....	225
11.3.4. Статистичний аналіз результатів експерименту .....	226
11.3.5. Приклад природного розподілу .....	229
11.4. Моделювання за допомогою нормально розподілених випадкових чисел .....	231
11.4.1. Як отримати такий розподіл в середовищі електронних таблиць? .....	231
11.4.2. Картини броунівського руху з нормальним розподілом окремих випадкових переміщень .....	233
Висновки .....	235
<b>Глава 12. Задача дослідження операцій .....</b>	<b>236</b>
12.1. Вступ .....	236
12.2. Постановка задачі .....	236
12.3. Обговорення алгоритму розв'язування задачі .....	237
12.4. Побудова математичної моделі .....	239
12.5. Обчислювальний експеримент .....	239
Висновки .....	247
<b>Післямова .....</b>	<b>249</b>
<b>Термінологічний словник .....</b>	<b>253</b>
<b>Література .....</b>	<b>261</b>

## Передмова

Ця книжка з'явилась як підсумок тривалого (з 1993 р.) викладання автором факультативного курсу “Комп'ютерне моделювання” учням середньої школи. Інтерес і зацікавленість, виявлені старшокласниками до вивчення курсу, навели на думку, що така робота може зацікавити і багатьох інших школярів.

Моделювання є потужним засобом наукового пізнання, воно потребує інтеграції знань із різних навчальних дисциплін і, таким чином, сприяє формуванню світогляду з позицій єдиного підходу до вивчення різноманітних явищ навколишнього світу.

Про значення модельних уявлень видатний фізик ХХ ст. Макс Борн говорив наступне: “Всі видатні експериментальні відкриття зобов'язані інтуїції тих людей, котрі широко використовували моделі. Ці моделі були, однак, не просто результатом їхньої фантазії, але являли собою відображення реальних предметів. Як взагалі може працювати експериментатор, як може він спілкуватися зі своїми колегами й сучасниками, якщо він не використовує моделі?”

Сьогодні моделювання виконує ще й важливу гуманістичну функцію, надаючи можливість прогнозувати негативні наслідки результатів людської діяльності, допомагає усуненню небажаних та небезпечних явищ аж до глобальних екологічних катастроф, серед яких, насамперед, загроза зміни клімату планети або жакливі наслідки ядерної війни. Через це комп'ютерне моделювання виявляється здатним впливати на формування змісту й стилю політичного мислення у сучасному світі. Воно є складовою науково-дослідної роботи і належить до тих видів інтелектуальної діяльності, які можна опанувати шляхом опрацювання спеціальної літератури і на основі аналізу власного досвіду такої роботи. І чим раніше такий досвід почне набуватись, тим вищою буде кваліфікація майбутнього дослідника. Адже дослідниками не народжуються – ними стають.

Комп'ютерне моделювання посідає провідне місце у практичних застосуваннях засобів електронно-обчислювальної техніки, тому, говорячи про практичні застосування комп'ютерів, ми з необхідністю приходимо до потреби в ознайомленні з ним школярів.

Головними задачами пропонованого курсу є ознайомлення з основними підходами до побудови й дослідження математичних моделей; вивчення найбільш поширених методів такої роботи, формування культури дослідницької діяльності з використанням засобів

ЕОТ.

Навчальний матеріал містить широкий спектр задач із різних предметних галузей і передбачає вивчення початкових відомостей про моделі й технологію моделювання:

- на конкретних прикладах розглянуто весь цикл моделювання: постановка задачі та її змістовий аналіз → формалізація задачі й побудова математичної моделі → складання алгоритму → обчислювальний експеримент (включаючи перевірку моделі на адекватність) → інтерпретація результатів → наступне вдосконалення моделі;

- виходячи з природи досліджуваних явищ, виокремлюються детерміновані й стохастичні моделі і розглядаються особливості роботи з моделями кожного виду;

- обговорюються такі специфічні питання моделювання, як вибір придатного типу моделі та відповідного середовища для моделювання, дискретизація процесів, що моделюються, використання чисельних методів, походження похибок округлення та шляхи їх зменшення, формуються початкові уявлення про стійкість моделі та деякі прості способи її забезпечення;

- реалізуються елементи системного підходу, можливості побудови різних моделей для вивчення одного й того ж об'єкта та використання однакових моделей для вивчення різних об'єктів.

Спрощений попервах опис вивчаного явища в подальшому поглиблюється: майже кожна модель має не менше трьох версій. Поступово нагромаджується понятійний апарат і одночасно триває опанування нових методів роботи (проте кількість спеціальних понять і термінів зведена до мінімуму). Матеріал посібника підпорядкований ідеї адекватного застосування комп'ютера при розв'язанні наукових та прикладних задач.

Обчислювальний експеримент із математичною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають при аналітичному розв'язуванні задач. Це робить такі задачі цілком доступними для старшокласників, що, у свою чергу, створює реальні передумови для розширення змістової частини різних навчальних предметів, оскільки з'являється можливість включати до них нові цікаві дослідницькі задачі. Ми постійно звертаємо увагу школярів на той привабливий факт, що вдало побудована модель здатна допомагати дослідникові отримувати нові (додаткові) відомості про вивчаний об'єкт.

Практична робота з комп'ютерними моделями вимагає вирішення проблеми вибору середовища для моделювання. На початковому

етапі цілком придатним середовищем виявляються електронні таблиці, вивчення яких передбачається чинною програмою шкільного курсу інформатики. Але при всій їхній простоті та наочності, електронні таблиці виявляються ефективними тільки для порівняно простих і (або) спеціально підібраних задач. Проте основні уявлення про особливості технології комп'ютерного моделювання вони дозволяють скласти. Взагалі ж при вивченні моделювання не слід обмежуватись якимось одним середовищем – у міру оволодіння знаннями з інформатики раціональним є перехід від одного середовища моделювання до іншого, більш досконалого. Застосування електронних таблиць дозволяє розпочати систематичне вивчення комп'ютерного моделювання помітно раніше, ніж вивчення мов програмування.

Навчальний матеріал містить широкий спектр задач із різних предметних галузей і передбачає вивчення початкових відомостей про моделі й технологію моделювання. Посібник складається з 12 глав, розміщених у п'яти розділах.

У першому розділі (Глави 1–2) формуються й у подальшому уточнюються загальні уявлення про моделі й моделювання; наводиться один з можливих підходів до класифікації моделей. Особлива увага тут приділена математичним моделям, вивчення яких складає основний зміст курсу. Два представлених тут приклади ілюструють можливості комп'ютера як потужного обчислювального пристрою і ефективного засобу побудови графіків математичних залежностей.

Другий розділ (Глава 3) знайомить із технологією створення моделі та подальшої роботою з нею. Сюжетна основа найпершої моделі в загальних рисах добре зрозуміла всім і не потребує спеціальних знань. Це на перший погляд проста, але в дійсності зовсім не тривіальна задача про поширення чуток. Перші результати роботи з украй спрощеною версією цієї моделі виявляють її майже повну якісну невідповідність фактам, відомим із життєвих спостережень. Далі здійснюється поступове ускладнення моделі шляхом введення до неї нових суттєвих факторів, і в результаті модель стає більш повною й достовірною. При цьому ми дотримуємося принципу відповідності, згідно з яким кожна наступна вдосконалена версія має містити в собі попередні як окремі випадки.

Третій розділ (Глави 4–6) присвячений розв'язанню класичних задач математичної екології.

У Главі 4 розглянуті чотири версії моделі одновидової популяції. Спочатку досліджується найпростіша модель динаміки популяції за відсутності обмежень (модель Мальтуса) і як її розвиток – модель

популяції з обмеженнями, пов'язаними з конкуренцією (модель Ферхюльста). Її логічним продовженням є дві моделі промислового використання популяції. Перша з них будується на основі жорсткого плану вилучення біомаси, що призводить до появи нестійкої рівноваги та до небезпеки невідвортної загибелі популяції. У другій моделі реалізується гнучке регулювання (модель з негативним зворотним зв'язком), що надійно забезпечує стійкі рівноважні стани. Інтерпретація результатів моделювання за двома останніми версіями виявляється корисною ще й з точки зору формування екологічної культури.

У двох наступних главах відповідно розглянуті модель співіснування популяцій двох видів на основі взаємин “хижак–жертва” (модель Вольтерра–Лотки) та вікова модель одновидової популяції (дискретна модель П. Леслі). Порівняння результатів моделювання за моделями Мальтуса та Леслі доводить їхню якісну схожість. Так само якісно схожими виявляються результати детермінованої моделі “хижак–жертва” та однойменної демонстраційної стохастичної моделі. Отже різні моделі одних і тих самих об'єктів здатні ефективно доповнювати одна одну.

Задачі, що пропонуються в четвертому розділі посібника (Глави 7–10), на відміну від попередніх потребують спеціальних знань із курсу фізики. Для дослідження тут пропонуються приклади механічних рухів тіл під дією змінних сил, а саме таких, що залежать від координат (сила пружності й сила всесвітнього тяжіння) та від швидкості (сила опору й аеродинамічна сила). Головна особливість, що відрізняє ці задачі від більшості шкільних задач із механіки, полягає в тому, що під дією змінних сил тіла набувають змінних прискорень. Тому точний розрахунок їхніх координат у довільний момент часу методами елементарної математики стає неможливим, і у природний спосіб виникають передумови для ознайомлення з найпростішими чисельними методами.

Перший в цій главі об'єкт дослідження – коливальний рух тіла на пружині з урахуванням опору (Глава 7). Тестування й налагодження моделі ведеться для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності, оскільки закономірності такого руху добре відомі зі шкільного курсу фізики. Основний інтерес при цьому являє обговорення питання про нагромадження похибок обчислень та про підвищення точності обчислень шляхом поліпшення алгоритму. Врахування сил опору дає картини загасаючих коливань, причому помітно різні при переході від в'язкого тертя до сухого.

Наступний об'єкт – рух тіла в полі тяжіння (Глава 8). Тут про-

понуються п'ять задач: 1) рух планети навколо Сонця або рух штучного сунутника навколо планети; 2) рухи компонентів у системах типу "подвійна зірка", де виникає потреба в переході до системи відліку, пов'язаної зі спільним центром мас; 3) розглядається обчислювальний експеримент із кількісної перевірки законів руху планет (законів Й. Кеплера); 4) узагальнення задачі на довільний дійсний показник степеня  $k$  в математичному записі закону всесвітнього тяжіння  $F = Gm_1m_2/r^k$ ; 5) вивчення питань про вигляд планетних орбіт при переході від геліоцентричної системи відліку до геоцентричної.

У Главі 9 розглядається задача про політ паперового літачка під дією сили тяжіння й аеродинамічної сили, що проявляє себе через дві свої складові: силу лобового опору та піднімальну силу. Оскільки кожна з цих сил згідно теореми М.Є. Жуковського пропорційна квадратові швидкості, то предметом спеціального обговорення тут є пошук придатних значень відповідних коефіцієнтів пропорційності (коефіцієнтів моделі).

Четвертий розділ завершується розробкою задачі-гри про м'яку посадку на Місяць (Глава 10) з елементами оптимізації режиму процесу посадки та створенням зручного інтерфейсу користувача.

Глави 11 та 12 присвячені вивченню стохастичних моделей на основі методу випадкової вибірки (методу Монте-Карло). Тут розглядаються модель броунівського руху і задача на дослідження операцій. Побудова й опрацювання першої з моделей вводять у світ випадкових чисел і математичної статистики, сприяє формуванню уявлень про розподіли ймовірностей, зокрема ілюструє два поширених розподіли: рівномірний та нормальний. Вивчення другої моделі доводить, що в деяких ситуаціях вдається помітно зменшити кількість і вартість ремонтів технічного обладнання виключно за рахунок вибору оптимальної організації обслуговування. До того ж з'являється нагода зрозуміти, як за допомогою рівномірно розподілених випадкових чисел і за відомим експериментальним законом розподілу відносних частот відмов обладнання стає можливим моделювання реальних випадкових подій і, таким чином, оцінити ефективність методу Монте-Карло. Не менш важливим тут є і висновок стосовно того, що дослідження подібних моделей часто дозволяє відокремити потенційно продуктивні рішення від хибних.

Оскільки пропонований курс є факультативним, робота з посібником не передбачає обов'язкового розгляду всіх без винятку наведених прикладів. Учитель може обирати їх на свій розсуд і за влас-



ними вподобаннями. Деякі із задач посібника автор у різні часи використовував при підготовці учнів до конкурсів МАН.

Підготовкою матеріалів цього посібника (обговоренням, зауваженнями, плідними порадами й рекомендаціями) автор зобов'язаний професорам національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова М.І. Жалдаку і Ю.С. Рамському, професору Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гоичара Ю.Д. Шентуну, професорам Черкаського національного університету ім. Б. Хмельницького В.М. Соловйову і Ю.В. Трнусу, науковцям Харківського державного педагогічного університету ім. Г. Сковороди професорам Л.І. Білоусовій і С.А. Ракову. За постійну допомогу, оптимізм і дружню підтримку автор щиро вдячний С.О. Семерікову.

Проте відповідальність за принущені помилки й неточності у поданні навчального матеріалу та загальний науковий і методичний рівень посібника автор повністю покладає на себе.

Критичні зауваження будуть прийняті з подякою за адресою:

Україна, 50086, м. Кривий Ріг, проспект Гагаріна, 54, Криворізький державний педагогічний університет, кафедра інформатики та прикладної математики або E-mail: [semerikov@gmail.com](mailto:semerikov@gmail.com).

## ***Розділ 1. Моделювання як метод наукового пізнання***

Слово “*модель*” походить від латинського *modulus* (міра, зразок, норма). Початкове значення цього слова було пов’язане з ремеслами – ливарною справою, архітектурою тощо. Стародавні римські ливарники називали моделями зразки майбутніх відливок, в епоху середньовіччя воно означало масштаб, у якому подавалися всі пропорції будівлі, а в подальшому воно прийняло значення зразка, за яким щось створюється і в мистецтві. Оскільки зразок часто являв собою зменшену копію предмета, то й виникла уява про модель як про мініатюрне зображення, що було схоже на об’єкт у всьому, за винятком розмірів. У більш пізні часи поняття моделі набуває загальнонаукового характеру і ним починають користуватись у наукових дослідженнях, зокрема, в тих випадках, коли безпосереднє дослідження виявлялося неможливим або малоефективним. В такому разі досліджуваний об’єкт-оригінал внаслідок його значної складності замінювався іншим, вигаданим або штучно створеним, більш простим і доступним для вивчення, таким, що знаходився у деякій відповідності з оригіналом. Цей об’єкт-замінювач і одержав назву моделі вивчуваного об’єкту.

Таким чином, як складовий елемент пізнання навколишнього світу створення й дослідження моделей (моделювання) відоме давно. Воно з’явилося одночасно з науковим пізнанням і завжди його активно супроводжувало. Більше того, наукове пізнання в його сьогодиньшому розумінні без моделювання (також у його сьогодиньшому розумінні) взагалі неможливе.

Навчання людини також є пізнанням, але це пізнання відрізняється від наукового насамперед тим, що, навчаючись, людина за допомогою вчителів, книг, комп’ютерів і комп’ютерних мереж, а також інших засобів обміну інформацією пізнає вже відомі людству факти, тоді як наука пізнає нове, невідоме. Проте, і в науковому, і в навчальному пізнанні є спільні риси, до яких належить і робота з моделями, тобто моделювання.

Людський розум не здатний одночасно охопити всю складну взаємодію і взаємний вплив будь-якого об’єкту та його оточення. Саме з цієї причини у свій час відбувся поділ пізнання на окремі галузі – науки. Цей процес відбувається й тепер. Намагаючись пізнати (вивчити, дослідити) об’єкт, дослідник вимушений вдаватись до певних спрощень та обмежень. І в межах кожної окремої науки пі-

знання звичайно йде через спрощення й обмеження, а вже далі – від простого до складного.

Говорячи, наприклад, про будову частинок речовини – молекул, ми, в міру збагачення своїх знань про них, спочатку зображуємо їх у вигляді щільно розташованих у одній площині різнокольорових кульок – утворюючих атомів, пізніше – у вигляді ланцюжків атомів на площині, а далі – у тривимірному просторі з поданням кутів та відстаней між атомами. Всі такі зображення являють собою моделі будови молекул. Ці моделі не є застиглими: кожна з них лише на момент створення або вивчення віддзеркалює існуючі відомості про об'єкт і завжди залишається відкритою для подальшого вдосконалення. Отже, навчання, так само, як і наукове пізнання, завжди пов'язане з переходом від одних моделей до інших, від простих до більш складних, проте й більш реалістичних.

Та хіба тільки навчання? Адже для того, щоб почувати себе в житті більш-менш упевнено та комфортно, ми постійно вимушені моделювати можливі ситуації й вибирати найбільш сприятливі з них. Так само й у трудовій сфері. Креслення й схеми, макети й випробувальні стеиди, зразки нової техніки й одягу, авто- й авіатренажери, глобус і планетарій – все це приклади використання різноманітних моделей.

Ми не завжди ясно усвідомлюємо, що повсякденно і повсякчасно маємо справу з моделями. Скоріше навпаки, у своєму розумінні тієї ролі, що її відіграє моделювання у нашому власному житті та пізнанні, ми часто нагадуємо відомого мольєрівського героя Журдена, котрий несподівано виявив, що ось вже сорок років він говорить прозою. Моделювання в нашому житті – це буденна проза, і колись повинен-таки настати момент усвідомлення цього факту. Автор прагне, щоб для вас таке прозріння настало раніше, ніж у сорок років. Крім того, ми маємо на меті привернути вашу увагу до однієї з ефективних сучасних технологій пізнання, ім'я якої – Комп'ютерне Математичне Моделювання. Ви зможете познайомитися з основними ідеями і методами цієї технології та застосувати їх до створення та експериментального дослідження математичних моделей багатьох цікавих і різноманітних явищ. А для тих, хто знається на програмуванні, відкриваються широкі можливості для творчої реалізації власних ідей.

## Глава 1. Моделі й моделювання

Вже давно поняття “модель” широко й різноманітно використовується в різних галузях природознавства й техніки, в гуманітарних науках і образотворчому мистецтві, в економіці і психології, в конструюванні одягу, взуття, зачісок, у художній літературі. Ось чому дати одразу зрозумілий опис або, тим більше, дати таке означення цього поняття, яке б відповідало різним його застосуванням і водночас було б доступним для фахівців різних галузей, зовсім непросто і, скоріш за все, мабуть, неможливо. Тому спочатку звернемося до деяких прикладів.

1. З метою пояснити, як працює радіоприймач, часто звертаються до малюнку, на якому з допомогою прямокутників зображують його окремі функціональні вузли (блоки), а стрілками між ними показують напрямки, вздовж яких відбувається обмін інформацією (електричними сигналами). Таке зображення на папері, яке зветься блок-схемою, – це модель.

2. Готуючись до запровадження біологічного методу боротьби зі шкідниками сільськогосподарських культур, у спеціальних лабораторіях створюють спрощені копії екологічних систем, куди приміщують представників певних культурних рослин, а також їхніх шкідників та ворогів цих шкідників. На таких мікросистемах вивчають особливості взаємодії всіх представників утвореного співтовариства. Лабораторна екосистема – це модель.

3. Перед тим, як почати серійний випуск нового типу літака (корабля, автомобіля), спочатку його зменшену копію, а у подальшому за можливості і самий цей об’єкт уміщують в аеродинамічну трубу і за допомогою спеціального обладнання визначають, які навантаження виникають у різних елементах конструкції. Літак у аеродинамічній трубі – це модель.

4. З метою оцінити довжину  $r$  дроту, який необхідно найбільш економно протягти з даху п’ятиповерхового будинку на дах розташованого поруч дев’ятиповерхового, можна виміряти відстань  $d$  між будинками та різницю висот цих будинків  $h$ , а далі обчислити

$$r = \sqrt{d^2 + h^2}.$$

Наведена формула при її використанні в умовах даної конкретної задачі – це модель.

Зрозуміло, що ознайомитися з принципом роботи радіоприймача не можна, зазирнувши в його середину, тому єдине, що тут залиша-

ється – це схема.

Зрозуміло, можна було б придбати певну кількість ворогів шкідників і одразу розселити їх у даному регіоні. Та може виявитися, що вони стануть одночасно й ворогами деяких корисних комах або ж строки їх масового вильоту не співпадуть із відповідними строками у шкідників. У такому разі, по-перше, не будуть виправдані витрати, пов'язані з їх придбанням, і, по-друге, значна частина врожаю знов загине. Краще вже виконати лабораторне дослідження.

Звичайно, можна було б запустити літак у серійне виробництво, не маючи точної уяви про навантаження, що виникатимуть під час польоту в окремих його конструкціях. Але ці навантаження, якщо вони виявляться значними, призведуть до руйнування літака в польоті. Краще вже спочатку дослідити літак у трубі.

Можна було б, не виконуючи ніяких обчислень, по черзі підняти дріт на обидва дахи, змотуючи його з котушки, розташованої на землі. Але в такому разі на другий дах довелося б піднімати дріт помітно більшої довжини, ніж потрібна, а, отже, і важчий. Якщо це важкий кабель, то краще вже витратити деякий час на попередні нескладні вимірювання та на розрахунок і відрізати дротину саме потрібної довжини.

У всіх перелічених прикладах має місце співставлення деякого реального об'єкта-оригінала з іншим, що його замінює:

- радіоприймач → схема на аркуші паперу;
- екосистема регіону → екосистема в лабораторії;
- серійний літак → одиночний літак у трубі;
- орієнтовна довжина дротини → формула.

У всіх цих випадках припускається, що якісь властивості або зберігаються при переході від реального об'єкта до замінника-моделі, або ж, навкрай, модель дозволяє скласти хоч деякі уявлення про такі властивості.

Так, прямокутники і стрілки на блок-схемі не мають нічого спільного з окремими елементами-радіодеталлями та їх групами в радіоприймачі, отже, тільки схема дозволить зрозуміти, як, звідки та куди йдуть електричні сигнали і яких змін вони зазнають.

Лабораторна екологічна система значно менша й суттєво бідніша за реальну, проте вона дозволяє скласти уявлення про ефективність обраного біологічного ворога шкідників.

Літак, що знаходиться в аеродинамічній трубі, не летить, але ті навантаження, що виникають у його окремих елементах, відповіда-

ють умовам реального польоту.

Та й відрізки, що фігурують у записі формули, мало нагадують поверхню землі разом із будинками, однак наведена формула дозволяє використати дріт більш-менш економно і здійснити задуману роботу за менший час і з меншими зусиллями.

Тепер розглянемо наступні означення:

**Модель** – це такий матеріальний або мислено уявлюваний об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) замінює собою реальний об'єкт-оригінал, і при цьому відтворює деякі важливі для даного дослідження риси оригіналу.

Тут термін “об'єкт” вжито у найбільш широкому розумінні: об'єктом може бути не тільки певний предмет, але й будь-яка ситуація, явище, процес тощо.

Модель є немов би посередником між досліджуваним об'єктом і дослідником.

**Моделювання** – це така форма дослідницької діяльності, коли з метою одержання нових відомостей про об'єкт експериментально досліджується не самий об'єкт, а його спрощений образ – модель.

Тут доречним є таке порівняння: дослідник, котрий розробляє модель, подібний до художника-карикатуриста, котрий, як відомо, відтворює оригінал не у всіх подробицях подібно до фотографа, а спрощує його так, щоб виявити й підкреслити найбільш характерні риси. Гарна модель об'єкта має бути саме його гарною “карикатурою”, такою, що відображає найбільш характерні й типові ознаки і властивості оригіналу, і навмисно ігнорує всі решту – несуттєві властивості. На моделюванні, по суті, грунтується будь-яке наукове дослідження – як теоретичне, так і експериментальне.

Як правило, *модель доступніша для дослідження, ніж реальний об'єкт*. До того ж слід розуміти, що є об'єкти, які взагалі не можуть бути досліджені безпосередньо: непринустимі, наприклад, пізнавальні експерименти з економікою країни; принципово нездійсненими є експерименти з минулим, із зірками чи зоряними системами – галактиками; неможливо досліджувати процеси з дуже довгою або ж із надзвичайно короткою тривалістю в часі тощо. Єдиним придатним тут методом дослідження є метод моделювання.

*Модель також дозволяє навчитись ефективно керувати об'єктом, випробовуючи різні варіанти управління саме на моделі цього об'єкту.* Досліджувати з цією метою самий об'єкт у кращому випадку буває незручно, а взагалі й просто шкідливо чи неможливо,

оскільки виникає загроза привести об'єкт у небажаний або, ще гірше, у незворотний аварійний стан. Дуже сумний приклад тут – це аварія у 1986 році на Чорнобильській АЕС. Якщо помилка виявлена і усунута за допомогою моделі, то це завжди значно простіше, безпечніше та менш коштовно. Переконливим прикладом є вихід з ладу системи енергозабезпечення космічного корабля “Аполлон-13” під час його перебування на орбіті навколо Місяця (1970 р.). Лише відтворення аварійної ситуації та розігрування варіантів її усунення на моделі в центрі управління польотом дозволили повернути корабель з астронавтами на Землю.

Найбільш привабливим у моделюванні є те, що *вдало створена модель має дивну властивість: вона здатна давати нові, не передбачені до того відомості про об'єкт-оригінал.*

У випадках, коли об'єкт має характеристики, що залежать від часу (так звані *динамічні* характеристики), особливого значення набуває задача прогнозування зміни станів об'єкту. Тут використання моделей також надає велику допомогу.

Отже моделювання дає змогу

- зрозуміти будову конкретного об'єкту, його основні властивості, закономірності розвитку і взаємодії з навколишнім оточенням;
- навчитися керувати об'єктом з метою виявлення найкращих способів управління у відповідності до заданої мети;
- прогнозувати наслідки заданих способів впливу на об'єкт.

## **1.1. Які бувають моделі**

Існують різні підходи до моделювання, які умовно можна об'єднати у дві великі групи: *матеріальне* (предметне, або речовинне) та *ідеальне* (мислене) моделювання. У свою чергу, їх поділяють на дещо конкретніші види.

У матеріальному моделюванні розрізняють моделювання *фізичне* й *аналогове*.

### **1.1.1. Фізичне моделювання**

*Фізичним* називають моделювання, коли деякому об'єкту відповідає його збільшена або зменшена копія, яка дозволяє проводити дослідження (здебільшого за лабораторних умов). Результати, що їх отримують на моделі, переносять на об'єкт. В основу такої можливості покладена *теорія подібності* (див. нижче).

Наведемо декілька прикладів фізичних моделей:

- у гідротехніці – лотки з водою, що моделюють річки, канали,

шлюзи;

- у будівництві – макети споруд, на яких вивчають, наприклад, умови стійкості та розподіл навантажень;

- у літако- та суднобудуванні – зменшені копії літальних апаратів та кораблів.

Фізичні моделі можуть бути і просто демонстраційними (ілюстративними):

- у фізичній географії – телурій, що моделює добове й річне обертання Землі та пов'язані з ним наслідки (зміну дня й ночі, зміну пір року, затемнення, існування кліматичних поясів тощо);

- в астрономії – планетарій, який моделює видиме обертання зоряного неба та зміну його вигляду на протязі доби або при зміні пір року;

- у теплотехніці – розріз двигуна внутрішнього згоряння, що ілюструє циклічний принцип його дії.

Теорія подібності, яку було започатковано в VII ст. І. Ньютоном, є теоретичною основою *фізичного* моделювання.

### **Приклад використання теорії подібності: моделі суден у випробувальному каналі**

Основна ідея теорії подібності полягає в тому, що фізичні явища можна характеризувати не тільки величинами, що мають певну розмірність, а й безрозмірними комбінаціями таких величин. Ці безрозмірні комбінації, складені за певними правилами, називають *критеріями подібності*.

Для того, щоб два фізичних процеси були подібні, необхідно й достатньо, щоб вони були якісно однаковими, а їхні критерії подібності – попарно рівними. Тоді, знаючи значення величин (швидкість, тиск, температуру, густину тощо), які характеризують один об'єкт, можна знайти значення відповідних (таких самих) величин, що характеризують інший. Саме так за результатами досліджень, проведених на моделі, визначають відповідні параметри, властиві оригіналу.

Для різних груп явищ існують свої критерії подібності. Кожен з них носить ім'я вченого, який його першим увів. Зокрема, одним із основних критеріїв подібності у гідродинаміці, яка вивчає рухи рідин і тіл у рідких середовищах, є число Фруда (за ім'ям англійського вченого-суднобудівника XIX ст. Уільяма Фруда):

$$Fr = \frac{v^2}{gl}, \quad (1)$$



де  $v$  – швидкість рідини на значній відстані від тіла, яке вона обтікає;  
 $l$  – характерний лінійний розмір тіла;  
 $g$  – прискорення сили тяжіння.

Цей критерій відіграє важливу роль при моделюванні процесів, пов'язаних з рухами кораблів. При невеликих швидкостях (для тихохідних суден) критерій Фруда  $Fr = 0,4$  за умови, що швидкість визначається у вузлах (морських милях за годину).

Перед тим, як розпочати будівництво нового корабля, його зменшену копію – фізичну модель – досліджують у випробувальному каналі. Одним із багатьох питань, що цікавлять суднобудівників, є питання про швидкість.

З моделлю судна, здавалося б, усе зрозуміло: її дуже зменшено у порівнянні з натурою. Так, модель двохсотметрового танкера, яку виконано у масштабі 1:200, має довжину 1 м.

Припустимо, що реальний танкер повинен розвивати швидкість 19 вузлів. Поставимо питання:

*з якою швидкістю має рухатись модель у каналі, щоб результати вимірювань, виконаних при її випробуваннях, допускали перерахунків на реальне судно?*

Чи також зі швидкістю 19 вузлів, чи, можливо, швидкість слід зменшити у відношенні 1:200?

Фруд експериментально довів, що *максимальна швидкість судна за умови, що не вдаються ні до яких технічних “трюків”, ніколи не перевищує значення*

$$v_{max} = 2,5 \sqrt{\text{довжина вздовж ватерлінії}} \text{ вузлів.} \quad (2)$$

Двохсотметровий корпус танкера має вздовж ватерлінії довжину близько 190 м, а модель – відповідно 0,95 м. Максимальні швидкості танкера і моделі відповідно становлять

$$v_{max \text{ м}} = 2,5 \cdot \sqrt{190} = 34,5 \text{ вузла} = 64 \text{ км/год},$$

$$v_{max \text{ м}} = 2,5 \sqrt{0,95} = 2,4 \text{ вузла} = 4,5 \text{ км/год}.$$

Якщо модель тягти швидше, ніж 2,4 вузла, то вона просто “вистрибне” з води.

Таким чином, випробовуючи майбутній двохсотметровий танкер на моделі, слід мати на увазі два закони подібності:

- 1) подібність геометричних розмірів моделі й реального судна;
- 2) подібність при моделюванні закону опору і відповідної швидкості при русі тіла у воді.

Зрозуміло, суднобудівник має заздалегідь знати, як поведе себе

танкер не тільки на максимальній швидкості, але й на економічній швидкості у звичайному рейсі. Відповідь на своє запитання він одержить із закону подібності:

$$\left[ \frac{v^2}{gl} \right]_{\text{танкера}} = \left[ \frac{v^2}{gl} \right]_{\text{моделі}},$$

і остаточно

$$v_{\text{танкера}} = v_{\text{моделі}} \cdot \sqrt{\frac{l_{\text{танкера}}}{l_{\text{моделі}}}} = v_{\text{моделі}} \cdot \sqrt{\frac{190}{0,95}} \approx 14,1 v_{\text{моделі}}.$$

### 1.1.2. Аналогове моделювання

*Аналогове моделювання засноване на аналогії (схожості за деякими ознаками) процесів та явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються однаковими за виглядом рівняннями, логічними схемами тощо. Це дає можливість вивчати одні явища, замінюючи їх іншими.*

Так, зокрема, за формулою

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

де  $Z$  – шукана величина, можна знаходити

- загальний опір  $R = Z$  двох паралельно сполучених провідників з опорами  $R_1 = X$  та  $R_2 = Y$ ;
- фокусну відстань  $F = Z$  тонкої лінзи, якщо відомі відстань  $d = X$  від лінзи до світної точки та відстань  $f = Y$  від лінзи до зображення;
- час  $t = Z$  спільного виконання деякої роботи двома виконавцями за умови, що один з них здатний виконати всю роботу за час  $t_1 = X$ , а другий – за час  $t_2 = Y$ ;
- час  $t = Z$  руху пасажирів на рухомому ескалаторі метро, якщо цей пасажир долає східці нерухомого ескалатора за час  $t_1 = X$ , а сам ескалатор переміщує нерухомого пасажирів за час  $t_2 = Y$ .

Це означає, що можна скласти електричне коло з двома змінними резисторами, сполученими паралельно, і розв'язати будь-яку із згаданих щойно задач. Аби тільки ми мали можливість визначати опори кожного з резисторів і їхній загальний опір. До речі, поміркуйте, як це зробити. Було б дуже бажано, щоб за можливості ви проєкспериментували з таким колом у шкільному фізичному кабінеті. Створення електричних аналогів реальних об'єктів (процесів, явищ)

було свого часу покладено в основу роботи *аналогових ЕОМ*.

Найбільш поширені приклади аналогового моделювання:

- вивчення механічних коливань за допомогою електричних кіл і навпаки;
- дослідження вихрових рухів повітряних мас за допомогою таких самих рухів рідин;
- вивчення та обчислення певних характеристик поля тяжіння за допомогою відповідних характеристик електростатичного поля.

Відмітимо, що в обох типах матеріального моделювання моделі являють собою деяке матеріальне втілення об'єкта-оригінала і завжди пов'язані з ним своїми геометричними, фізичними або іншими характеристиками. До того ж і саме дослідження – *натурний експеримент* – пов'язане з матеріальним впливом на модель.

Від матеріального моделювання принципово відрізняється *ідеальне*, яке засноване не на матеріальній аналогії об'єкта й моделі, а на аналогії ідеальній, мисленій. Воно виникає в людській свідомості й існує в ній. Ідеальна модель може існувати в уяві однієї окремої людини, співтовариства або суспільства. Ідеальне моделювання має теоретичний, абстрактний характер. Розглядають два типи ідеального моделювання: *інтуїтивне* і *знакове*.

### 1.1.3. Інтуїтивне моделювання

*Інтуїтивне моделювання* засноване на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження; воно не підлягає математичному опису, або не потребує його. Образи різних об'єктів із навколишнього оточення, що виникають у нашій свідомості, відносять до інтуїтивних моделей цих об'єктів.

Так, добре відома дитяча гра-забава “А що було б, якби...?” – це, по суті, гра у передбачення. Напевно, вона подобається дітям внаслідок природної потреби дитини будувати моделі поведінки для правильного передбачення і прогнозування життєвих ситуацій, серед яких дитині доводиться існувати. Ще до приходу в школу діти вже конструюють свої власні моделі подумки, на папері або за допомогою ЕОМ чи інших засобів.

Прикладами інтуїтивного моделювання є також і ті добре відомі випадки, коли виникає необхідність прийняти рішення в умовах браку інформації, наприклад, вибору оптимальної стратегії майбутніх дій. Часто до розв'язання такої проблеми залучають групи спеціалістів і запроваджують *мозковий штурм*. З цього приводу деякі психологи схильні вважати, що прийняття правильних рішень в означених

ситуаціях засноване на властивості людського мозку підсвідомо поповнювати брак інформації з попереднього життєвого досвіду. В цьому розумінні життєвий досвід кожної людини можна вважати її власною інтуїтивною моделлю навколишнього світу. Проте, приймаючи відповідальні рішення, не варто перебільшувати ролі людської інтуїції і покладатись тільки на неї.

#### **1.1.4. Знакове моделювання**

*Знакове моделювання* використовує в якості моделі знакові перетворення будь-якого виду: схеми, графіки, креслення, набори символів, формули, та інші умовні позначення. Поза свідомістю та діяльністю людини ніяка знакова система неможлива.

Ось деякі приклади знакових моделей:

- географічні карти;
  - записи шахових партій;
  - різноманітні схеми (електричні, кінематичні тощо);
  - нотні записи мелодій;
  - зображення взаємозв'язку та взаємозалежності між словами в реченні при синтаксичному розборі;
  - записи хімічних реакцій;
  - формули (рівняння) математики, фізики, техніки;
  - різноманітні піктограми
- і таке інше.

### **1.2. Математичне моделювання**

Надзвичайно важливим і поширеним видом знакового моделювання є *математичне моделювання*, в якому дослідження здійснюються з використанням моделі, сформульованої мовою математики (тобто у вигляді математичних виразів).

Оскільки основний зміст нашого курсу присвячений вивченню особливостей створення і методів роботи саме з математичними моделями, зупинимось на цих питаннях більш докладно.

Інформація (дані) про об'єкти, події, процеси вже є деякою їхньою моделлю – інформаційною. Окремим випадком інформаційних моделей є математичні моделі.

*Математична модель* – це опис деякого реального процесу або деякої досліджуваної ситуації мовою математичних формул та співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів тощо), це подані у математичній формі основні закономірності та зв'язки, притаманні вивчуваному об'єкту.

Пригадаймо добре відомі ще з початкової школи задачі на складання рівнянь: “Два поїзди одночасно вийшли назустріч один одному...”, “В басейні встановлено дві труби ...”. В ті часи ви складали потрібні рівняння без усякої підозри про те, що ви займалися побудовою математичних моделей. У подібних задачах усе так просто й зрозуміло, що слова “математична модель” виглядають навіть як недоречний пафос. Проте саме тут і має місце факт опису реального процесу мовою абстрактних математичних понять.

Згадане вище аналогове моделювання за своєю суттю засноване на схожості математичних моделей різних за своєю природою процесів. А наведена формула являє собою узагальнену математичну модель перелічених там явищ. Таким чином, однакові моделі часто дозволяють вивчати різні явища. Але не менш важливим є й обернений факт – можливість і доцільність вивчення одного й того явища за допомогою різних моделей. У такому разі результати вивчення взаємно доповнюють один одного, даючи більш повне уявлення про об’єкт дослідження.

Отже, математична модель – це завжди спрощений образ реальної (взятої з оточуючого світу) ситуації; вона дозволяє звести складну реальну проблему до порівняно простої математичної задачі, такої, що має розв’язок, тобто дозволяє одержати результат (відповідь).

Математичне моделювання вже давно (від часів І. Ньютона – XVII ст.) з успіхом застосовувалось у різних галузях науки й техніки. Однак широке використання цього методу стримувалося недосконалими технічними засобами для численних і складних розрахунків. Та в середині XX ст. математичне моделювання зазнало свого другого народження. Це відбулося завдяки появі ЕОМ, які дозволили фахівцям з успіхом працювати зі значно більш складними математичними моделями, що містили тисячі різноманітних параметрів та невідомих величин. Перші ЕОМ, що з’явилися у 50-х роках, були створені саме для “обслуговування” математичних моделей, пов’язаних з оволодінням ядерною енергією та розробкою і вдосконаленням ракетно-космічної техніки. Прийшов час математичних моделей, які більш повно і точно відбивали складні реальні процеси.

## Глава 2. Основні етапи моделювання

### 2.1. Створення моделі

На практиці вихідним пунктом моделювання стає деяка ситуація, що висуває перед дослідником задачу, для якої необхідно знайти відповідь. Проте, вживання в моделюванні таких слів, як “задача” й “відповідь”, можуть увести початківця в оману.

#### 2.1.1. Постановка задачі

Реальні ситуації дуже рідко бувають чітко обумовленими, оскільки складні взаємодії досліджуваного об’єкту з навколишнім оточенням призводять до значних утруднень при описі цих ситуацій. Досвід показує, що в багатьох випадках практично неможливо одразу чітко сформулювати задачу так, щоб на її основі стало б можливим створення моделі. Процес народження задачі, який називають *постановкою задачі*, фактично зводиться до послідовних переформулювань проблеми – зміни її сюжетної основи шляхом заміни реальних об’єктів на їхні абстрактні образи. Так, навіть у наведеному вище простому прикладі про оцінку довжини дротини ми замінили будинки і поверхню землі прямими відрізками, і лише після цього задача звелася до знаходження гіпотенузи прямокутного трикутника.

Завершується постановка задачі словесним і математичним описом умови задачі. Словесне (текстове) формулювання задачі разом із пояснювальними рисунками або схемами називають *змістовою (концептуальною) моделлю*, а зв’язки між найбільш важливими характеристиками об’єкту, записані у вигляді математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних виразів), являють собою *математичну модель*.

#### 2.1.2. Зміст відповіді

Відповідь (тобто результат моделювання), як уже зазначалось, має містити інформацію, що надавала б можливості для

- прогнозування нових результатів;
- одержання відомостей про непередбачені до цього властивості об’єкту;
- полегшення прийняття рішень;
- здійснення автоматичного управління.

Відповідь у моделюванні – це не обов’язково те, до чого ми звикли в шкільній математиці, фізиці, хімії:  $x = 17$ ,  $R = 400$  Ом або

$M = 98$  г/моль тощо. Результатами моделювання можуть бути також таблиці чисел та відповідні діаграми (графіки), креслення тощо.

Одержану відповідь необхідно *проаналізувати* й осмислити. Виконують це люди (спеціалісти), вони й роблять необхідні *висновки*.

### 2.1.3. Спрощуючі припущення

Вже на стадії постановки задачі триває процес виявлення основних (суттєвих) ознак об'єкту. Деякі його риси уявляються дослідникові важливими, ряд інших – другорядними. Відмова від ряду особливостей, несуттєвих на думку дослідника, приводить до спрощення й ідеалізації. Опис об'єкту формулюється у вигляді спрощуючих припущень, які входять до сюжетної основи майбутньої концептуальної моделі.

Повертаючись знов до розглянутого прикладу, зазначимо, що, строго кажучи, визначення довжини дротини за теоремою Піфагора є не цілком коректним внаслідок провисання дроту, оскільки цей дріт має деяку певну масу. Використання наведеної формули передбачає припущення про те, що масою дроту, а отже і його провисанням можна знехтувати. З цієї причини одержаний результат слід розглядати тільки як *оцінку* довжини, про що й говориться в прикладі. Спрощуючі припущення зумовлюють існування певних границь застосовності будь-якої моделі.

### 2.1.4. Головне протиріччя в моделюванні

В моделюванні завжди існує серйозне протиріччя: *з одного боку моделювання неможливе без спрощення, без нехтування другорядними чинниками, а з другого – завжди існує ризик “переспростити” модель, відкинувши якісь важливі риси об'єкту разом із другорядними*. Адже заздалегідь важко зрозуміти, які риси об'єкту є важливими, а які – другорядними, адже цей об'єкт ще не вивчено. Як правило, це самий відповідальний етап у моделюванні.

Звернемося ще до наступного прикладу. Прийнявши припущення, що приріст населення деякого міста пропорційний кількості мешканців, ми одержимо математичну модель, яка виявляється правильною лише в дуже грубому наближенні. Якщо ж врахувати кількість людей похилого віку і дітей (непродуктивну частину населення), то модель зазнає певних ускладнень. А якщо включити до моделі такі чинники, як рівень освіти, кількість працюючих жінок, рівень добробуту і т.п., то математична модель стане вже настільки складною, що побудувати й вивчити її буде і зовсім непросто. Однак навіть при

врахуванні подібних факторів модель може виявитись далекою від дійсності: адже в ній не врахований ряд випадкових факторів – міграція населення, статистика шлюбів і розлучень та багато іншого.

Мета дослідника – знайти “золоту середину”: створити достатньо просту модель процесу, не позбавляючи його першорядних властивостей. Тут не існує якихось конкретних рекомендацій. Це сфера особистого досвіду, заснованої на ньому професійної інтуїції, рівня та якості освіти, інтелекту та творчості дослідника. Моделювання – це мистецтво і ним, як, до речі, й будь-яким іншим мистецтвом, можна оволодіти лише через аналіз чужих і власних вдалих і невдалих дій, лише виконуючи постійно вправи, тобто постійно розв’язуючи дослідницькі задачі.

### **2.1.5. Істотні й другорядні властивості об’єкту**

Кожному об’єкту в залежності від мети дослідження можна поставити у відповідність різні моделі. Наприклад, якщо взяти таку складну систему, як популяція тварин, то для опису процесів життєдіяльності буде використано модель окремої тварини як біологічної істоти – представника біологічного виду, для моделювання поведінки тварин у численній групі (зграї) дослідник створить іншу, етологічну модель (етологія – наука про поведінку і поведки тварин), а для прогнозування динаміки зміни кількості особин із плином часу буде створена зовсім інша, екологічна модель. При цьому властивості об’єкта, суттєві при побудові однієї моделі, можуть виявитися (і часто виявляються) другорядними для іншої.

### **2.2. Обчислювальний експеримент**

Математичне моделювання часто порівнюють з натурним (лабораторним) експериментом. При цьому аналогом математичної моделі є спеціально побудована дослідна установка, за допомогою якої дослідники задають питання природі шляхом контрольованої зміни умов досліду і вивчаючи наслідки таких дій. Саме так поводитьеся й ви при виконанні лабораторних та практичних робіт з фізики, хімії чи біології.

В математичному моделюванні питання задають математичній моделі. І якщо в сучасних складних і коштовних дослідних установках зміна деяких умов може призвести до значних технічних і економічних утруднень, то математичним моделям такі утруднення, як правило, невідомі.

Отже, після того, як математична модель створена, переходять



до наступного етапу, що має назву *обчислювальний експеримент*. Цей етап становить основний зміст розв'язування задачі з допомогою комп'ютера. Суть його найчастіше зводиться до повторення однотипних, однакових за змістом серій обчислень при зміні вхідних даних, або до пошуку відповіді на питання “Що відбудеться, якщо ...?”

*Обчислювальний експеримент сьогодні – це сучасна технологія теоретичних досліджень, заснованих на експериментуванні з комп'ютерною математичною моделлю.*

Дослідження математичних моделей реальних об'єктів часто (але не завжди) передбачає виявлення виду функціональних залежностей між характеристиками цих об'єктів. Таку роботу, як це зазначалося вище, зручно проводити в спеціалізованих середовищах для моделювання – математичних пакетах, пристосованих для певних предметних галузей знань (техніки, економіки, бухгалтерської справи тощо). Наш посібник орієнтований на використання знайомого всім школярам середовища «Електронні таблиці». В цьому середовищі ми й будемо проводити *обчислювальні експерименти*.

Відомо, що одним із можливих способів дослідження функціональних залежностей між змінними є подання цих залежностей у графічному вигляді. Електронні таблиці дозволяють легко будувати такі графіки. До того ж за необхідності можна одночасно будувати декілька графіків функцій від одного або декількох аргументів. Зрозуміло, що коли залежність має простий вигляд, такої потреби може й не бути, але в шкільному курсі фізики трапляються і не зовсім прості функції. Проілюструємо сказане двома прикладами з фізики.

### 2.2.1. Дослідження замкнутого електричного кола постійного струму

При вивченні шкільного курсу фізики відповідне лабораторне дослідження виконується в темі “Закон Ома для повного кола постійного струму”.

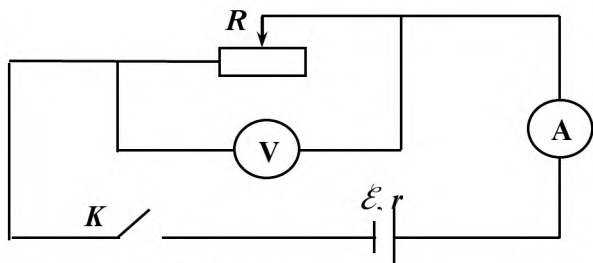


Рис. 2.1. Схема для дослідження повного кола постійного струму

Схема електричного кола для виконання лабораторної роботи має вигляд, поданий на рис. 2.1. Елементами кола є джерело струму з електрорушійною силою  $\mathcal{E}$  і внутрішнім опором  $r$ , вимикач  $K$ , споживачем є реостат  $R$ . Електровимірювальні прилади (амперметр і вольтметр) є єдиними джерелами числової інформації.

Побудова математичної моделі. На відміну від лабораторної роботи математична модель не зобов'язана включати електричну схему; теоретичну основу для побудови математичної моделі складають наступні співвідношення:

$$- \text{закон Ома для повного кола постійного струму } I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

а також вирази, за якими обчислюються

- напруга на кінцях споживача  $U = IR$ ;
- корисна потужність  $P_{\text{кор}} = IU$ ;
- коефіцієнт корисної дії  $\eta = \frac{R}{R + r}$ .

Характеристики джерела струму – ЕРС  $\mathcal{E}$  і внутрішній опір  $r$  – будемо вважати відомими.

*Метою дослідження* поставимо вивчення залежності перелічених величин ( $I$ ,  $U$ ,  $P_{\text{кор}}$ ,  $\eta$ ) від опору  $R$  споживача шляхом побудови відповідних графіків.

Таким чином, математичною моделлю поставленої задачі є наступна система чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \\ U = IR \\ P_{\text{кор}} = IU \\ \eta = \frac{R}{R + r} \end{cases}$$

Після створення математичної моделі запишемо з урахуванням особливостей роботи в обраному середовищі моделювання (електронних таблицях)

Алгоритм подальшої роботи:

1. Створити таблицю за зразком, поданим нижче.
2. Заповнити перший рядок іменами змінних.
3. Заповнити стовпці F (“Дано:”) і G (числові значення).

	A	B	C	D	E	F	G
1	$R$	$I$	$U$	$P_{кор}$	$\eta$	Дано:	
2						$\mathcal{E}, B = 3$	
3						$r, \text{Ом} = 0,5$	
...	...	...	...	...	...		

4. Заповнити вміст ключових комірок таблиці (комірок, які слід заповнювати з клавіатури):

комірка	формула/число
A2	0
A3	=A4+0,1
B2	=\$G\$2/(\$G\$3+A2)
C2	=B2*A2
D2	=B2*C2
E2	=A2/(\$G\$3+A2)

5. Формули з комірок B2, C2, D2, E2 копіювати в третій рядок.

6. Всі формули третього рядка копіювати в наступні 45 рядків.

7. За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних  $I$ ,  $U$ ,  $P_{кор}$ ,  $\eta$  від опору  $R$  зовнішньої ділянки кола (споживача), як це показано на рис. 2.2.

З цією метою помічаємо всі комірки в стовпцях A, B, C, D, E і звертаємось до програми *Мастер диаграмм*. На вкладинці *Стандартные* вибираємо тип *Точечная* (саме цей тип забезпечує подання функціональної залежності виду  $y = y(x)$  на відміну від типу *График*). При цьому за замовченням аргументами стають дані з першого виділеного стовпця (у даному випадку стовпця A), для них не будується лінія графіка, як це має місце для типу *График*. (Перевірте!).

#### Обчислювальний експеримент.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$R$	$I$	$U$	$P_{кор}$	$\eta$	Дано:	
2	0,0	6,00	0,00	0,00	0,00	$\mathcal{E}, B = 3$	
3	0,1	5,00	0,50	2,50	0,17	$r, \text{Ом} = 0,5$	
...	...	...	...	...	...		

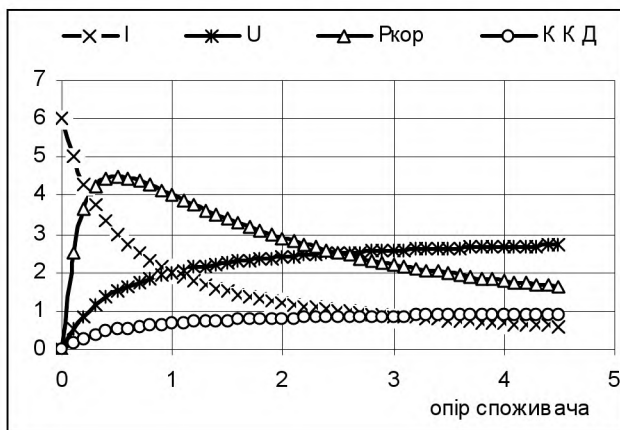


Рис. 2.2. Графіки залежності  $I$ ,  $U$ ,  $P_{\text{кор}}$ ,  $\eta$  від опору  $R$  споживача

### Аналіз результатів

Розглянута математична модель дозволяє висунути наступну гіпотезу:

*максимальна корисна потужність  $P_{\text{кор}}$  струму в колі розвивається, коли опір споживача дорівнює внутрішньому опорі джерела струму (як це видно з рис. 2.2, при  $R = r = 0,5$  Ом), однак значення коефіцієнта корисної дії  $\eta$  при цьому не є максимально можливим (100%), а становить тільки 50%.*

З метою перевірки гіпотези змодельуйте заміну джерела струму на нове з такою самою ЕРС, але з внутрішнім опором  $r = 1,0$  Ом. Як це вплине на максимальні значення змінних  $P_{\text{кор}}$  і  $\eta$ ? Повторіть обчислювальний експеримент, поклавши  $\mathcal{E} = 5,0$  В, а внутрішній опір  $r = 1,0$  Ом. Чи підтверджується гіпотеза за нових умов?

Цей висновок є справедливим для будь-яких електричних кіл. Його можна отримати і без комп'ютера, користуючись виключно аналітичними методами, але зараз ми маємо нагоду перевірити зазначений факт на комп'ютерній моделі.

### Запитання і вправи

1. Чому копіювання вмісту комірок слід виконувати не з другого рядка таблиці, а саме з третього?

2. Зверніть увагу: максимального значення сила струму  $I$  набуває при  $R = 0$  ("коротке замикання"). При цьому напруга  $U$  на кінцях споживача дорівнює нулеві. За яких умов це дуже небезпечний

режим експлуатації електричного кола, а коли це не так?

3. Аналітично дослідіть на екстремум наступні функції:

$$а) P_{кор} = P_{кор}(R) = \mathcal{E}^2 \frac{R}{R+r}; \quad б) \eta = \frac{R}{R+r}.$$

### 2.2.2. Дослідження електричного кола змінного струму

Схема досліджуваного кола, подана на рис. 2.3. Під дією джерела змінної напруги в колі виникають *вимушені електричні коливання* сили струму – *змінний струм*. Амплітуда цих коливань залежить не тільки від прикладеної напруги  $U$  і параметрів кола  $R$ ,  $X_L$  і  $X_C$ , але й від частоти  $\nu$  вимушених коливань.

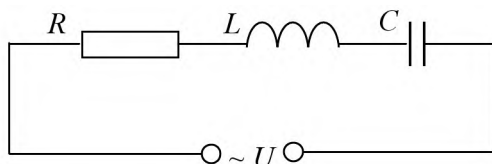


Рис. 2.3. Схема для дослідження кола змінного струму

Математична модель, як і в попередньому прикладі, не потребує схеми і будується на основі таких співвідношень:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad - \text{закон Ома для ділянки кола змінного}$$

струму, яка містить активний опір  $R$ , індуктивність  $L$  і ємність  $C$ . Тут  $U_0$  – амплітуда напруги на кінцях ділянки кола;

$$X_L = 2\pi\nu L, \quad X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad -$$

формули відповідно індуктивного  $X_L$ , ємнісного  $X_C$  та повного  $Z$  опорів. Знаючи  $Z$  – повний опір кола, можна обчислити амплітуду сили струму:  $I_0 = \frac{U_0}{Z}$ .

Оскільки повне аналітичне дослідження функції  $I_0 = I_0(\nu)$  засобами диференціального числення потребує чимало часу, то, як правило, на уроці фізики його не виконують, а обмежуються якісними оцінками. Ми ж виконаємо дослідження з наступною графічною інтерпретацією за алгоритмом, майже таким, як попередній. Відмінність полягає в тому, що змінюється вміст ключових комірок нової таблиці:

Комірка	Формула/число
A2	=\$G\$6
A3	=A2+\$G\$7
B2	=2*3,14*A2*\$G\$4
C2	=1/(2*3,14* A2*\$G\$5)
D2	=(G\$3^2+(B2-C2)^2)^0,5
E2	=\$G\$2/D2*1000

Вміст комірок A2, B2, C2, D2, E2 слід копіювати в ті самі стовпці третього рядка, а всі формули третього рядка копіювати в наступні 18 рядків.

За даними стовпців A, B, C, D, E побудувати в одній координатній площині графіки залежності змінних  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $Z$ ,  $I_0$  від частоти  $\nu$  змінного струму, як це показано на рис. 2.4.

Графік функції  $I_0 = I_0(\nu)$  називають резонансною кривою.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$\nu, \Gamma\text{ц}$	$X_L, \text{Ом}$	$X_C, \text{Ом}$	$Z, \text{Ом}$	$I_0, \text{мА}$	Дано:	
2	25	118	455	337	44	$U_0, \text{В} =$	15
3	30	141	379	238	63	$R, \text{Ом} =$	10
4	35	165	325	160	93	$L, \text{Гн} =$	0,75
5	40	188	284	96	155	$C, \text{Ф} =$	1,4E-05
6	45	212	253	42	357	$\nu_0, \Gamma\text{ц} =$	25
7	50	236	227	13	1170	$\Delta\nu, \Gamma\text{ц} =$	5
...	...	...	...	...	...		

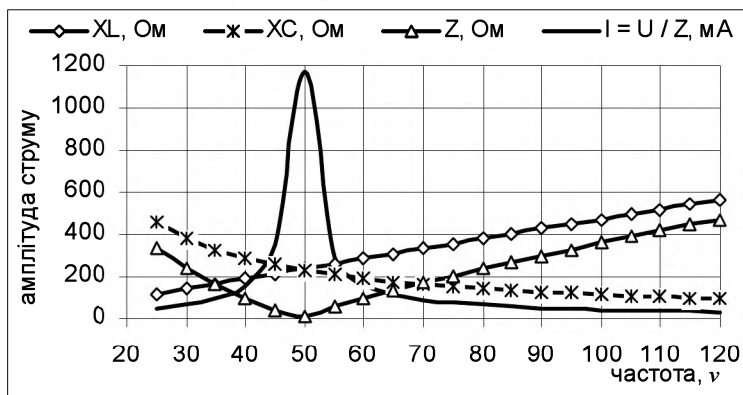


Рис. 2.4. Побудова резонансної кривої

1. Для одночасного виведення на екран усіх чотирьох графіків  $X_L = X_L(\nu)$ ,  $X_C = X_C(\nu)$ ,  $Z = Z(\nu)$  та  $I_0 = I_0(\nu)$  слід виділити всі заповнені

комірки у стовпцях A, B, C, D, E. Якщо потрібна змістовна легенда, виділення слід починати з рядка 1, інакше – з рядка 2 (*перевірте!*).

2. Відповідні графіки наведені в нижньому фрагменті рис. 2.4.

$$X_L = 2\pi\nu L; X_C = 1/(2\pi\nu C); Z = (R^2 + (X_L - X_C)^2)^{1/2}; I_0 = U_0/Z.$$

3. З графіків добре видно, що при частоті вимушених коливань  $\nu \approx 50$  Гц маємо: а)  $X_L = X_C$ ; б)  $Z = Z_{\min}$ ; в)  $I = I_{\max}$ .

4. Змінюючи по черзі значення активного опору  $R$  (комірка G3), індуктивності  $L$  (комірка G4) та ємності  $C$  (комірка G5), дослідіть їхній вплив на вигляд кожної кривої і, зокрема, резонансної кривої.

## Висновки

1. З розглянутих прикладів видно, що математичне моделювання із залученням комп'ютера (комп'ютерне моделювання) відкриває широкі можливості для графічної інтерпретації (подання, представлення) складних аналітичних залежностей.

2. В обох випадках були продемонстровані приклади *адекватного використання комп'ютера* при вивченні природничих наук, і зокрема, фізики. В даному контексті «адекватне використання» означає використання комп'ютера тільки в тих випадках, коли без нього або незручно, або взагалі неможливо. Саме завдяки цій обставині економиться час роботи за рахунок автоматизації рутинних обчислювальних операцій.

3. Обчислювальний експеримент з математичною моделлю здатний суттєво спростити процедуру розв'язування задач.

## 2.3. Перевірка моделі на адекватність

Побудовану модель слід піддати перевірці на вірогідність, тобто встановити, чи досить правильно її результати відбивають поведінку об'єкта-оригінала в досліджуваних ситуаціях, тобто, чи достатньо повною є відповідність результатів моделювання поведінці реально-го об'єкта. Це своєрідний “момент істини” для моделі. В такому разі говорять про *перевірку моделі на адекватність*. Ознакою адекватності моделі є, насамперед, задовільний збіг результатів моделювання з відомими та (або) достатньо надійними дослідними даними.

З метою перевірки моделі на адекватність обчислювальний експеримент часто спрямовують на підтвердження очевидних і заздалегідь відомих властивостей об'єкта. Така процедура має назву *тестування моделі*. Що ж до тих випадків, коли відсутня можливість порівняння результатів, одержаних на моделі, з поведінкою самого об'єкта, порівняння проводять за результатами, що їх дають теорія та

відповідні розрахунки.

Модель, яка пройшла тестування, може вважатися якщо не задовільною, то щонайменше – правдоподібною.

## **2.4. Комп'ютерне моделювання та його особливості**

Для ясного розуміння подальшого викладу нам слід на певний час вдатися до з'ясування ряду фактів, що зумовлюють деякі специфічні особливості комп'ютерного моделювання.

Майже все, про що йшлося вище, взагалі можна робити і без комп'ютерів. З появою ЕОМ можливості для моделювання піднялися на значно вищий рівень. Завдяки здатності комп'ютерів працювати з великими обсягами інформації, і, що не менш важливо, величезній (у порівнянні з іншими засобами) швидкості опрацювання інформації, комп'ютери стали в моделюванні основним робочим інструментом.

### **2.4.1. Особливості, що залежать від комп'ютерів**

З природничих наук відомо, що процеси в природі можуть мати неперервний (в просторі й у часі) характер або переривчастий, стрибкоподібний. Ця переривчастість має спеціальну назву – *дискретність*.

Зрозумілий приклад щодо цього дає математика. Так множина всіх дійсних чисел при їх зображенні на числовій осі являє собою неперервну послідовність точок, а множина цілих чисел при цьому утворює послідовність дискретну.

Ще один приклад можна взяти з фізики. Для регулювання сили струму в електричному колі користуються реостатами, які бувають здебільшого двох типів: повзункові та ступінчасті. У перших опір змінюється плавно, неперервно, а у других – стрибками, переривчасто. Тому, в залежності від конструкції взятого реостату, сила струму в колі в одному випадку буде змінюватись неперервно, плавно, а в іншому – дискретно.

Цифровий комп'ютер за принципом своєї дії є дискретним пристроєм: опрацювання інформації в ньому відбувається переривчасто, дискретно під управлінням спеціальних тактових імпульсів, що дає можливість здійснення потрібної послідовності операцій. До речі, саме частота слідування цих імпульсів визначає швидкість виконання обчислювальних операцій або, як говорять, швидкодію. Оскільки і пам'ять комп'ютера має кінцевий обсяг, і кількість операцій в одиницю часу є скінченою, то й математичні моделі, які підлягають комп'ютерній обробці, також повинні бути дискретними і скінченими.



ми. Так при моделюванні процесів у рідинах, що, як відомо, містять величезну кількість частинок, яка значно перебільшує обсяг оперативної пам'яті комп'ютера, для задоволення обмежуючих вимог комп'ютера при моделюванні рідину представляють як систему елементарних комірок, до складу кожної з яких входить дуже багато молекул ( $\sim 10^4$ ), а це не що інше, як дискретизація, що закладається в модель.

Відмітимо ще один принциповий факт. Комп'ютери не оперують з дійсними числами нескінченної точності, вони працюють з числами, що мають деякий фіксований набір цифр. Кількість цифр у такому наборі визначається апаратними засобами і програмним забезпеченням. Арифметичні операції, що виконуються з дійсними числами, можуть призводити до специфічної похибки, яку називають *похибкою округлення*. Якби, наприклад, наш комп'ютер оперував з дійсними числами, що містять лише один десятковий розряд, то результатом множення 2,1 на 3,2 було б число 6,7. Походження похибок округлення дозволяє зрозуміти, по-перше, їхню невідворотність, і, по-друге, той негативний факт, що вони нагромаджуються в міру зростання обсягу обчислень. Щоб якоюсь мірою послабити похибки округлення, намагаються обирати або створювати такі алгоритми, у яких ці похибки помітним чином не нагромаджуються.

#### **2.4.2. Особливості, пов'язані з методами роботи**

В математиці добре відомі ситуації, коли рівняння складене, але не існує відомих методів його точного аналітичного розв'язування (тобто одержання розв'язку у вигляді точної формули). Не набагато легше й у тих випадках, коли метод розв'язування існує, але він є настільки трудомістким та громіздким, що розв'язування вимагає значних витрат часу. До того ж далеко не завжди буває необхідною дуже висока точність. Тому математики наполегливо працюють над розробкою так званих *чисельних методів* розв'язування рівнянь, що становить зміст окремого і дуже важливого розділу математики, який має назву *обчислювальна математика*.

Оскільки комп'ютерне моделювання в наш час є дуже розповсюдженим видом дослідницької та конструкторської діяльності, то для задоволення потреб користувачів спеціалістами вже створені і продовжують створюватись окремі пакети програм, призначені для роботи з математичними моделями – так звані *спеціалізовані середовища* для комп'ютерного моделювання.

## Підсумки

1. Математичне моделювання є ефективним інструментом теоретичних досліджень і важливою складовою сучасної інформатики.

2. Задачі моделювання виникають з практики й не бувають чітко сформульованими: перед створенням моделі завжди має пройти процес постановки задачі.

3. Створення математичної моделі завжди починають з ідеалізації об'єкту на основі спрощуючих принушень. З метою більш глибокого вивчення об'єкту до попередньої спрощеної версії його моделі вводять нові фактори, які розглядають тепер як суттєві.

4. Якщо в процесі створення моделі комп'ютер іноді безпосередньо не використовується, він все одно буде наступною ланкою в роботі з моделлю. Тому слід враховувати дискретний принцип його дії, а також невідворотність появи похибок округлення.

5. Центральне місце в моделюванні посідає обчислювальний експеримент, який має на меті дослідити поведінку моделі внаслідок зміни вхідних даних: саме так виявляють особливості перебігу процесу чи явища за різних умов.

6. Оскільки ніколи не існує повної впевненості в тому, що створена модель правильно відтворює описуване нею явище (процес), то завжди необхідною є перевірка моделі на адекватність.

7. Заключним етапом у моделюванні є аналіз результатів і формулювання висновків. Слід розуміти, що ці висновки справджуються лише в межах прийнятих принушень, поширювати їх поза ці межі, строго кажучи, не можна. Якщо ж інколи і вдаються до такого кроку, то йдуть на це свідомо і аналізують результати особливо обережно.

Для практичної роботи з моделлю (обчислювального експерименту) принциповим є *вибір середовища для моделювання конкретної задачі*. Найпростішим середовищем, яке задовольняє основні вимоги до подання результатів моделювання, є *електронні таблиці*, якими ми й скористуємось.

Загальні зауваження стосовно моделювання не можуть утворити більш-менш цілісного уявлення про цю непросту, але цікаву роботу, яку фахівці часто розглядають як мистецтво. Отже перейдемо до практичного вивчення прикладів.

## ***Розділ 2. Найперші моделі***

Приступаючи до вивчення комп'ютерного моделювання, ми розглянемо задачі, які не вимагатимуть спеціальних знань з якоїсь певної предметної галузі. На прикладі їх розв'язування ми зможемо отримати початкові уявлення про основні етапи та деякі прийоми такої роботи.

Першою пропонується задача про поширення чуток. Навряд чи багатьох людей хвилювали проблеми, пов'язані з процесом поширення чуток, проте, як і більшість задач, що реально виникають на практиці, вона є прикладом типової задачі моделювання, а саме *задачі із нечітко (погано) сформульованою умовою*, чим суттєво відрізняється від звичних задач із підручників.

З метою закріплення умінь і навичок, набутих при роботі над задачею про поширення чуток, слідом за нею пропонується задача про створення й дослідження вкрай спрощеної моделі епідемії. На відміну від задачі про чутки тут наводяться тільки текстові коментарі і повністю відсутні зразки будь-яких таблиць і графіків. Цю частину роботи вам доведеться виконати самостійно, користуючись зразками з попередньої задачі. Наприкінці вам треба буде продумати й реалізувати більш досконалі версії цієї моделі.

Одразу ж зауважимо, що за змістом пропонованих ідей розглянуті нижче підходи до розв'язування задачі не є єдино можливими, і ця багатоваріантність підходів також є характерною ознакою задач моделювання.

## **Глава 3. Модель процесу поширення чуток**

### **Постановка задачі**

Сучасні засоби масової інформації (радіо, телебачення, преса, телеграф, Інтернет) дозволяють у короткий термін донести будь-куди які завгодно новини. Незважаючи на це і понині продовжує існувати давній спосіб передавання інформації – від людини до людини, – який здебільшого стосується чуток. При всій його часом удаваній недосконалості цей спосіб сьогодні може бути настільки ефективним (телефонний зв'язок, електронна пошта), що здатний легко конкурувати навіть із телебаченням. То ж спробуємо змодельовати процес поширення чуток у межах деякого населеного пункту. Метою моделювання поставимо пошук відповіді на питання:

*Скільки мешканців знатимуть новину через деякий час, якщо у початковий момент вона відома лише кільком з них?*

Визначимо загальний план наступної роботи.

1. З метою формалізації задачі і створення її змістової (концептуальної) моделі введемо певні кількісні характеристики процесу. Встановлення зв'язків між цими характеристиками у вигляді математичних співвідношень дозволить створити математичну модель.

2. Як це часто роблять у моделюванні, спочатку ми розглянемо найпростішу версію моделі, яку в подальшому будемо вдосконалювати.

3. Кожну чергову версію будемо завершувати аналізом отриманих результатів. Головна мета такого аналізу – виявлення найбільш слабких місць у створеній моделі і пошук шляхів щодо їх подолання в напрямі підвищення реалістичності (адекватності) моделі. Здебільшого джерелом слабких місць виявляються занадто спрощені припущення. Саме їх необхідно буде замінювати на складніші в надії на те, що вони виявляться й більш продуктивними.

### **Аналіз проблеми: особливості перебігу процесу**

1. У різних розповідачів проміжки часу між послідовними передаваннями так само, як і тривалість цих передавань можуть набувати довільних випадкових значень.

2. Серед слухачів трапляються такі, котрим чутка ще невідома, і такі, що її вже знають, тобто “отримують” її повторно. Цілком природно, що за таких обставин деякі з цих останніх (повторних) можуть або втрачати інтерес до її подальшого поширення, або ж продовжу-

вати її розповсюдження.

3. Окремі люди розрізняються за ознакою здатності до спілкування (рівнем комунікабельності), і більш говірливі з них (назвемо їх *балакунами*) за однакових умов передають новину більшій кількості слухачів, ніж решта – *звичайні* розповідачі. Відомо, що деякі люди взагалі не люблять що-небудь розповідати. Це *мовчуни*.

4. З кожним наступним передаванням кількість знавців новини зростає, і за умови сталого чисельного складу мешканців пошук чергових слухачів із часом стає справжньою проблемою полювання на “вільні вуха”. Врешті має статися щось одне: або поширення чутки припиниться, або ж чутка буде “циркулювати” серед мешканців за принципом “я знаю, що ти знаєш, але все одно послухай...”.

Кожний із наведених вище факторів здатний суттєво ускладнити вивчення процесу, а про їх одночасний прояв годі й говорити.

### 3.1. Найпростіша версія моделі

З метою спрощення ситуації приймемо ряд припущень.

*Припущення 1.* Сеанси передавання починаються одночасно для всіх розповідачів і мають однакову тривалість.

*Припущення 2.* Кожен знавець чутки розповсюджує її протягом усього обраного нами часу моделювання, не вносячи при цьому спотворень.

*Припущення 3.* При кожному черговому передаванні інформація має потрапляти лише до осіб, які нею раніше не володіли. Для виконання цієї умови слід перш, ніж передати чутку, задати питання: “А ви чули, що ...?”.

Реально поширення чуток відбувається не цілодобово. Адже у переважної більшості людей є чимало й інших важливих справ, і найчастіше люди спілкуються не з метою слухання й розповсюдження чуток.

Припустимо, що тривалість одного сеансу передавання становить 2 години і за добу відбувається 6 сеансів. Якщо нас цікавитиме кількість знавців новини, наприклад, через 4 доби, то такому термінові буде відповідати час моделювання  $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$  годин. А за умови, що сеанс триватиме 1 годину і відбуватиметься 10 разів на добу, то за ті самі 4 доби час моделювання становитиме  $1 \cdot 10 \cdot 4 = 40$  годин. Тому зручнішим видається підрахунок кількості знавців новини не через певний час, а після певної кількості сеансів передавання. В такому разі доцільно скоригувати мету моделювання, а саме:

*Скільком людям чутка стане відомою після j сеансів передаван-*

ня, якщо у початковий момент вона відома лише декільком з них?

Формалізуємо задачу. Введемо такі кількісні характеристики:

$j$  – порядковий номер сеансу передавання ( $j = 0, 1, 2, \dots$ );

$N_0$  – початкова ( $j = 0$ ) кількість знавців новини (чутки);

$N_j$  – кількість знавців після  $j$ -го сеансу.

Нехай кожен знавець передає чутку  $k$  новим особам. В такому разі для виконання *Припущення 3* необхідно, щоб протягом сеансу передавання кожен знавець знаходив  $k$  осіб, яким чутка ще невідома.

Тут  $N, j, k$  – додатні цілі числа.

Як зазначалося вище, параметр  $k$  у різних людей може мати різні значення в залежності від рівня їхньої індивідуальної здатності до спілкування і, крім того, за різних обставин він може випадково змінюватися в часі. У зв'язку з цим прийемо ще одне

*Припущення 4.* Будемо вважати параметр  $k$  однаковим для всіх знавців і незмінним у часі.

Тоді, наприклад,  $k = 2$  означатиме, що протягом усього часу моделювання кожен знавець за один сеанс передавання розповідає чутку двом новим особам, а кожен з тих двох у наступному сеансі передаватиме чутку двом іншим і т.д.

Якщо після  $(j-1)$ -го сеансу інформацією володіють  $N_{j-1}$  осіб, то після наступного сеансу з номером  $j$  кількість знавців збільшиться на

$$\Delta N = N_{j-1} k, \quad (1)$$

а їхня загальна кількість становитиме

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N, \quad (2)$$

або, з урахуванням (1),

$$N_j = N_{j-1} (1 + k). \quad (3)$$

*Системи рівнянь (1) і (2) або (1) і (3) являють собою найпростішу математичну модель задачі про поширення чуток.*

*Зауваження.* У відповідності з нашою домовленістю в розглянутій моделі час  $t$  явно не фігурує, тобто рівняння (1) і (2) не містять змінної  $t$ , але при потребі час  $t$  можна знайти за виразом  $t = j \cdot \Delta t$ , де  $\Delta t$  – тривалість одного сеансу передавання.

Таким чином, задачу формалізовано і створено її математичну модель.

### 3.1.1. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити за поданим нижче зразком електронну таблицю і заповнити її перший рядок іменами стовпців, а у стовпець D (“Дано:”) занести позначення (імена) параметрів моделі  $N_0, k$  разом із знаком “=”.

	A	B	C	D	E
1	$j$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2				$N_0 =$	
3				$k =$	
...	...	...	...		

2. Увести до комірок E2 та E3 числові значення вхідних даних. Наприклад, 1 і 2 відповідно ( $N_0 = 1$  і  $k = 2$ ).

3. Заповнити другий рядок (початкові умови):

3.1.  $j = 0$  – початковий номер сеансу передавання;

3.2.  $\Delta N = 0$  – перед першим сеансом приріст  $\Delta N$  кількості знавців новини дорівнює нулеві;

3.3.  $N = N_0$  – посиланням на комірку E2 з “Дано:”.

Відповідні комірки таблиці матимуть такий уміст:

комірка	формули / числа
A2	0
B2	0
C2	=E\$2

4. Заповнити третій рядок, тобто вписати формули, що відповідають рівнянням (1) і (2) для  $j = j + 1 = 0 + 1 = 1$  – номер наступного сеансу передавання:

комірка	формули / числа
A3	=A2+1
B3	=C2*\$E\$3
C3	=C2+B3

5. Команди третього рядка повторювати  $n$  разів, де  $n$  – кількість передавань, що моделюються (в нашому прикладі  $n = 20$ ). Для цього слід копіювати всі формули третього рядка в  $n$  наступних рядків.

6. За даними таблиці побудувати графіки залежності  $\Delta N = \Delta N(j)$  і  $N = N(j)$ .

### 3.1.2. Обчислювальний експеримент

Нехай, наприклад, у населеному пункті, всі мешканці якого мають параметр передавання  $k = 2$ , з'являється  $N_0 = 1$  знавець чутки з таким самим параметром передавання. Скільком людям новина буде відомою після  $n = 20$  сеансів передавання?

Підставляючи вхідні дані до комірок E2 та E3, одержуємо таблицю, фрагмент якої поданий на рис. 3.1. Тут видно, що в міру збільшення числа передавань відбувається стрімке зростання кількості знавців чутки. З таблиці також видно, що послідовні значення приро-

сту  $\Delta N$  та кількості знавців  $N$  утворюють геометричні прогресії зі знаменником 3.

	A	B	C	D	E
1	$j$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	1	$N_0 = 1$	
3	1	2	3	$k = 2$	
4	2	6	9		
5	3	18	27		
6	4	54	81		
7	5	162	243		
8	6	486	729		
9	7	1458	2187		
...	...	...	...		

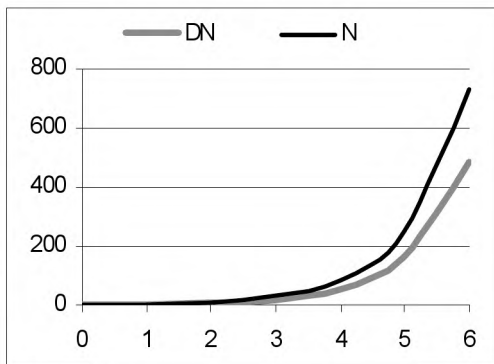


Рис. 3.1

Зауваження. Змінні  $\Delta N$  і  $N$  за своїм змістом є цілими числами. Слід прийняти до уваги, що електронні таблиці дозволяють подати дійсні числа у форматі цілих з урахуванням правил округлення. Але при цьому в пам'яті комп'ютера ці числа будуть залишатись у форматі дійсних чисел з максимально можливою для даного табличного процесора кількістю розрядів. У всіх арифметичних операціях вони будуть фігурувати саме в такому форматі.

### Вправа

1. З метою перевірки останнього Зауваження в будь-яку вільну комірку введіть формулу (вираз):  $=22/7$ .

1.1. Подайте результат у форматі "Цілі".

1.2. Далі скопіюйте без формул вміст цієї комірки в яку-небудь іншу вільну комірку і збільште розміри цієї комірки так, щоб побачити всі десяткові розряди.

2. Яка кількість рядків таблиці на рис. 3.1 було використано для побудови відповідного графіка? Які це рядки?

3. Аналізуючи вирази (1), (2) і (3), дайте відповіді на питання:

3.1. Чому при значенні параметра передавання  $k = 2$  обидві прогресії значень  $\Delta N$  і  $N$  мають знаменник 3?

3.2. При  $N_0 = 1$  після шостого передавання кількість знавців становить 729. Якщо початкову кількість знавців збільшити в 10 разів (тобто взяти  $N_0 = 10$ ), то чи можна стверджувати, що в 10 разів скоротиться число передавань  $j$ , потрібних для ознайомлення з чуткою такої самої кількості людей (729), що й при  $N_0 = 1$ ? Свою відпо-



відь перевірте експериментально

У даній версії моделі процес поширення чутки відбувається так швидко, що вже після 13-го передавання кількість знавців перевищує 2 мільйони, а ще через два-три передавання стає більшою за населення будь-якого міста у світі: геометрична прогресія демонструє свій крутий характер.

Якщо прийняти число передавань за добу рівним 10, то зазначений ефект буде досягнутий швидше, ніж за дві доби. Зрозуміло, що такий хід подій не відповідає дійсності, тобто побудована модель не є адекватною щодо реальних ситуацій, і виникає потреба в покращенні моделі. Але перш, ніж перейти до створення більш досконалої моделі, виконаємо деякі вправи із щойно розглянутою.

Поцікавимося тим, скільки сеансів передавання має відбутися, щоб чутка обійшла усіх мешканців населеного пункту. Одразу ж з'являється природне бажання ввести до розгляду загальну кількість мешканців. Тоді, порівнюючи це число зі значеннями змінної  $N_j$ , ми зможемо дати відповідь на поставлене питання. То ж і прийнемо чергове

*Припущення 5.* Нехай протягом часу моделювання кількісний склад розглядуваної групи залишається сталим (серед мешканців немає ні смертей, ні ізоляції, ніхто не вибуває й не прибуває). Для не дуже великих груп і не дуже тривалих проміжків часу з цим можна погодитись.

Тепер зробимо інформацію, що виводиться на екран, дещо більш зручною для огляду й аналізу. З цією метою *штучно* створимо обмеження кількості знавців  $N_j$  так, щоб вона не перевищувала загальної чисельності  $S$  мешканців населеного пункту.

З цією метою вдамося до деяких змін у алгоритмі:

– п. 2: додати до вхідних даних нову змінну  $S$  (комірка D4) – чисельність населення (наприклад, 10000 – комірка E4):

комірка	число
E4	10000

– п. 4.2: обчислити  $\Delta N$  згідно виразу (1)

**якщо** кількість знавців  $N_j$  не менша за  $S$

**то** у наступному рядку виконати надання (при-  
своювання)  $\Delta N = S - N_{j-1}$

**інакше**  $\Delta N$  залишити попереднім

**все**

Відповідно у таблиці

комірка	формула
B3	=ЕСЛИ(C2*\$E\$3>=\$E\$4;\$E\$4-C2;C2*\$E\$3)

– п. 4.3:

**якщо**  $N_{j-1} + \Delta N$  не менше за  $S$   
**то** у наступному рядку виконати надання  $N_j = S$   
**інакше**  $N_j = N_{j-1} + \Delta N$

**все**

У таблиці це реалізувати наступною формулою:

комірка	формула
C3	=ЕСЛИ(B3=0;\$E\$4;C2+B3)

Решту пунктів алгоритму залишити без змін.

Перегляд нової таблиці (рис. 3.2) доводить, що поставленої мети досягнуто: тепер достатньо одного погляду, щоб одразу встановити, після якого передавання все населення стає інформованим. Одночасно з таблиці зникає зайва інформація.

	A	B	C	D	E
1	$j$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	1	$N_0=$	1
3	1	2	3	$K=$	2
4	2	6	9	$S=$	10000
5	3	18	27		
6	4	54	81		
7	5	162	243		
8	6	486	729		
9	7	1458	2187		
10	8	4374	6561		
11	9	3439	10000		
12	10	0	10000		
...	...	...	...		

Рис. 3.2

## Висновки

1. Розглянута версія моделі є у край спрощеною. Покладені в її основу *Припущення* 1–5 приводять до результату, який неважко було передбачити заздалегідь і без моделювання. А саме: чисельність знавців у міру зростання кількості передавань швидко й необмежено зростає.

2. Поява обмеження чисельності знавців принципово не робить модель більш вірогідною. Адже ми розуміємо, що вжиті задля цього дії мають відверто штучний характер: обмеження кількості знавців

аж ніяк не впливає із самої моделі (системи рівнянь).

3. На цьому етапі роботи ми не повинні серйозно обговорювати питання про відповідність між моделлю і розглядуваним процесом (питання про адекватність моделі): якщо вона навіть існує, то є у край поверховою.

*Зауваження.* При обговоренні питання про адекватність математичної моделі слід мати на увазі не адекватність взагалі (такої просто не існує), а адекватність відносно певних ознак або властивостей об'єкту. Зокрема, для даної моделі такою властивістю є динаміка зміни чисельності знавців новини. Ігнорування тієї обставини, що адекватність моделі є лише відносним фактом, може призвести до грубих помилок, заснованих на безконтрольному приписуванні реальному об'єкту властивостей його моделі. Саме тому не варто серйозно сприймати результат, згідно з яким через 15 сеансів передавання кількість знавців новини згідно рис. 3.1 перебільшуватиме населення Землі.

4. Основне значення даної версії полягає в тому, що вона може бути використана як основа для подальшого поліпшення моделі.

5. Згідно з п. 1 обчислювального експерименту вираз (3)

$$N_j = N_{j-1} (1 + k)$$

задає геометричну прогресію, суму її перших  $j$  членів можна знайти за відомою формулою

$$S_j = N_0 (1 + k)^j.$$

Варто звернути увагу на те, що існує чимало об'єктів, які описуються цією формулою *точно*, проте не мають ніякого відношення до поширення чуток. Зокрема, якщо  $N_0$  – розмір початкового грошового внеску, а  $k$  – річний банківський відсоток, то  $S_j$  – розмір внеску через  $j$  років. В даному прикладі  $j$  – обов'язково натуральне число. У ряді інших випадків  $j$  може набувати дійсних значень.

А чи можете ви навести подібний приклад?

### 3.2. Поліпшена версія моделі

Припущення, використані нами у попередній версії, були занадто простими, тому й результати роботи з моделлю практично виявилися нецікавими. Перейдемо до вдосконалення моделі.

Згідно з *Припущенням* 4 наша модель передбачає однорідний за ознакою балакучості склад населення. У житті такого фактично не буває. Тому, насамперед, частково знімемо це обмеження і сформулюємо

*Припущення* 4\*. Будемо вважати, що населення складається з

трьох груп: звичайних людей з параметром передавання  $k_{зв}$ , балакунів з параметром передавання  $k_{б}$  ( $k_{б} > k_{зв}$ ) та мовчунів з параметром передавання  $k_{м} = 0$ . При цьому, як і раніше, значення відповідних параметрів вважатимемо незмінними в часі.

Нехай доля мовчунів становить  $M$ , а балакунів –  $B$  від усієї кількості населення. Тоді доля  $Z$  звичайних знавців становитиме

$$Z = 1 - M - B.$$

Не викликати серйозних заперечень твердження, що за достатньо великої чисельності населення у такий самий спосіб розподіляються відповідні долі й серед знавців новини. Так, наприклад, якщо доля мовчунів серед усього населення становить  $M$ , то й серед знавців ця доля буде також  $M$ .

Тепер приріст  $\Delta N$  кількості знавців після  $j$ -го передавання буде забезпечуватися балакунами та звичайними людьми і становитиме

$$\Delta N = \underbrace{N_{j-1} \cdot B \cdot k_{б}}_{\text{за рахунок балакунів}} + \underbrace{N_{j-1} \cdot k_{зв} \cdot (1 - M - B)}_{\text{за рахунок звичайних}} \quad (4)$$

або

$$\Delta N = N_{j-1} (B \cdot k_{б} + k_{зв} \cdot Z); \quad (5)$$

загальна ж кількість знавців шукатиметься, як і раніше згідно (2):

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N,$$

або з урахуванням (5)

$$N_j = N_{j-1} (1 + B \cdot k_{б} + k_{зв} \cdot Z), \quad (5^*)$$

Рівняння (5) і (2) або (5) і (5\*) являють собою поліпшену математичну модель процесу

Модифікована таблиця має такий вигляд:

	A	B	C	D	E
1	$j$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2				$M =$	
3				$B =$	
4				$k_{б} =$	
5				$k_{зв} =$	
6				$N_0 =$	
...	...	...	...		

У відповідності до нових рівнянь потребує певних змін і

### 3.2.1. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 2: до вхідних даних замість колишнього  $k$  додати нові параметри  $M$ ,  $B$ ,  $k_{б}$  і  $k_{зв}$ : (комірки E2–E5 відповідно), а параметр  $N_0$  пе-

ренести до комірки E6.

- п. 4.2: обчислювати приріст  $\Delta N$  кількості знавців згідно (5):

комірка	формула
B3	=C2*(\$E\$3*\$E\$4+\$E\$5*(1-\$E\$2-\$E\$3))

Значення параметрів  $M$  і  $B$  повинні задовольняти умові  $M+B \leq 1$ , тому з метою хоч би часткового запобігання некоректного введення значень цих параметрів слід після заповнення комірок E2 та E3 в разі необхідності виводити на екран відповідне повідомлення. Для цього в комірку E8 слід створити формулу

=ЕСЛИ(E2+E3>1;"Має бути M+B<=1!";"").

Решту пунктів алгоритму залишити без змін.

### 3.2.2. Обчислювальний експеримент

1. Вважатимемо, для прикладу, що за ознакою балакучості мешканці деякого населеного пункту розподіляються у такий спосіб: доля мовчунів  $M$  становить 0,75 (75%), доля балакунів – 0,1 (10%), решта  $Z = 1 - M - B$  – доля звичайних людей. Параметри передавання  $k_b = 3$ ,  $k_{zg} = 2$ . Серед мешканців з'являється  $N_0 = 1$  знавець чутки.

Скільки людей знатимуть новину після  $n = 22$  сеансів передавання?

2. Вводимо дані й одержуємо відповідну таблицю (рис. 3.3).

	A	B	C	D	E
1	$j$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	1	$M = 0,75$	
3	1	1	2	$B = 0,1$	
4	2	1	3	$k_b = 3$	
5	3	2	4	$k_{zg} = 2$	
6	4	2	7	$N_0 = 1$	
7	5	4	10		
8	6	6	17		
9	7	10	27		
...	...	...	...		

Рис. 3.3

2.1. Чи утворює послідовність значень змінної  $N_j$  геометричну прогресію? Чому?

Якщо ваша відповідь негативна, то ви помиляєтесь. В оману вас увела саме несподіваність питання стосовно послідовності такого незвичного вигляду. По-перше, не слід забувати, що дійсні числа у комірках таблиці представлені у форматі цілих. По-друге, погляньте на вираз (5\*): з нього видно, що кожний наступний член  $N_j$  послідо-

вності дорівнює попередньому  $N_{j-1}$ , помноженому на постійне число  $q = 1 + k_{\text{б}} \cdot B + k_{\text{зб}} \cdot Z$ . Отже, послідовність  $N_j$ -их – геометрична прогресія, а число  $q$  – її знаменник.

2.2. Напишіть формулу довільного члена утвореної послідовності у вигляді  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ . Для цього за нашими даними знайдіть конкретні значення  $N_1$  (замість  $a_1$ ),  $q$  і  $n$ .

2.3. Якого вигляду тепер набуде вираз для  $N_j$ ?

2.4. Створіть у таблиці після стовпця значень  $N$  новий стовпець, у якому будуть обчислюватися значення  $N_j$  згідно виразу з п. 2.2:

$$N_j = N_1 \cdot (1 + k_{\text{б}} \cdot B + k_{\text{зб}} \cdot Z)^{j-1}.$$

Для цього в комірки D2 і D3 уведіть вирази

комірки	формули
D2	=F\$6
D3	=C\$3*(1+F\$3*F\$4+F\$5*(1-F\$2-F\$3))^(A3-1)

2.5. Порівняйте значення  $N_j$  у стовпцях C і D, зробіть висновки.

2.6. Переконайтеся, що послідовність  $N_j$  є дійсно геометричною прогресією, можна й інакше – виходячи з означення такої послідовності, а саме: відношення  $N_j/N_{j-1}$  має бути сталим числом.

То ж видаліть зі стовпця D попередні значення і в комірці D3 створіть відповідну формулу  $=C3/C2$ , яку скопіюйте у решту комірок стовпця D. Як слід прокоментувати той факт, що значення всіх комірок стовпця D виявляються однаковими?

Тепер стовпець D видаліть із таблиці.

3. З'ясуйте, як впливає на виведені значення  $N_j$  зміна параметрів  $M$  та  $B$ . З цієї метою порівнюйте результати при початкових даних з результатами при

3.1.  $M = 0,75$  і  $B = 0,05$ ;

3.2.  $M = 0,8$  і  $B = 0,1$ .

Прокоментуйте причини спостережуваних змін.

4. Поверніть параметрам  $M$  і  $B$  їхні початкові значення. Залишаючи їх незмінними, спробуйте одночасно підібрати для параметрів передавання  $k_{\text{зб}}$  і  $k_{\text{б}}$  такі нові значення, щоб у стовпці C залишилися попередні результати.

Коли вам набридне це заняття, введіть  $k_{\text{зб}} = 1$  і  $k_{\text{б}} = 4,5$  ( $k_{\text{б}} = 4,5$  можна інтерпретувати так: кожен балакун за два сеанси передавання знаходить 9 слухачів).

4.1. Звідки взялися ці числа 1 і 4,5? Чи існують інші такі пари? Скільки їх може бути? Інакше кажучи, чи існує зв'язок між парамет-

рами передавання  $k_{36}$  і  $k_6$  за умовою п. 4?

На всі ці питання можна дати надійні відповіді, якщо знову звернутися до виразу (5\*), який був переписаний у вигляді

$$N_j = N_{j-1} \cdot q,$$

де  $q = 1 + k_6 \cdot B + k_{36} \cdot Z$ .

Отже, ті самі значення  $N_j$  будуть з'являтися кожного разу, коли будуть забезпечені однакові значення для  $q$ :  $q_1 = q_2$ , тобто

$$B \cdot k_{61} + k_{361} \cdot Z = B \cdot k_{62} + k_{362} \cdot Z.$$

Це рівняння одночасно містить обидві невідомі  $k_{62}$  і  $k_{362}$ . Розв'язуючи його, наприклад, відносно  $k_{62}$ , маємо

$$k_{62} = \frac{B \cdot k_{61} + Z \cdot (k_{361} - k_{362})}{B}.$$

Беручи далі згідно умови  $M = 0,75$ ;  $B = 0,1$ ;  $k_{361} = 2$ ;  $k_{61} = 3$ , отримуємо

$$k_{62} = \frac{0,6 - 0,15 \cdot k_{362}}{0,1},$$

або остаточно

$$k_{62} = 6 - 1,5 \cdot k_{362}.$$

Тепер можна надавати певних значень  $k_{362}$  і отримувати відповідні значення для  $k_{62}$ . Необхідно лише контролювати себе очевидними обмеженнями  $k_{62} > 0$ ,  $k_{362} > 0$ ,  $k_{62} > k_{362}$ .

### **Вправа**

1. Дайте відповіді на питання п. 4.1.

2. Як і в п. 3 обчислювального експерименту попередньої версії моделі, створіть обмеження кількості знавців  $N_j$  так, щоб вона знов не перевищувала загальної чисельності  $S$  мешканців населеного нункту і порівняйте цю таблицю з таблицею попередньої версії.

3. За яких умов розглядувана версія моделі може бути зведена до попередньої?

### **Висновки**

1. Поліпшена версія моделі є логічним продовженням попередньої і містить її як окремий випадок. Вона дещо цікавіша і більш реалістична, але все ще залишається дуже спрощеною і являє собою лише незначний крок уперед. Та й чого можна чекати від моделі, яка побудована на обмеженій кількості зовсім простих принужень?

2. Пошук відповідей на питання, поставлені у п. 4 при виконанні обчислювального експерименту, мав на меті продемонструвати одну з важливих особливостей роботи дослідника в процесі моделювання.

Суть її полягає в тому, що, виконуючи обчислювальний експеримент і аналізуючи його результати, можна, звичайно, пробувати шукати відповіді шляхом “сліпого” підбору, але значно ефективнішими є спроби розв’язання проблеми шляхом аналізу математичних співвідношень, покладених в основу моделі. Проте, як ми побачимо далі, в моделюванні часто трапляються випадки, коли дослідник позбавлений такої можливості, і тоді залишається єдиний шлях – саме підбір.

3. Знов, як і у попередній версії моделі, поява обмеження чисельності знавців не робить модель більш вірогідною. Причина та сама – обмеження кількості знавців є *штучним*, воно зовсім не впливає із самої моделі.

4. В обох розглянутих версіях моделі найбільш слабким місцем є вимога, сформульована у *Припущенні 3*. Дійсно, хіба обов’язково чутка має потрапляти лише до тих осіб, яким вона невідома? Якщо цю вимогу зняти, то це означатиме, що слухачами можуть стати й ті особи, котрим чутка вже відома (повторні знавці). Тим більше, що у житті часто саме так і відбувається.

### 3.3. Наступне вдосконалення моделі

Тепер почнемо не зовсім просту розмову про спосіб підрахунку кількості  $X$  повторних знавців.

Навіть, якщо у наступному сеансі виключити можливість повернення інформації від щойно спеченого знавця чутки до його безпосереднього інформатора, все одно інформація може повернутися до цього самого інформатора від кого-небудь з інших знавців. Це означає, що виключення згаданої можливості не є принциповим, тобто вже у наступному сеансі чутка може повернутися до того, хто поширював її у попередньому сеансі. Крім того, повторні знавці можуть з’явитися й при самому першому передаванні, якщо  $N_0 > 1$  (дехто з початкових знавців може стати слухачем іншого початкового знавця). Отже, *підрахунок кількості  $X$  повторних знавців можна починати від самого першого сеансу передавання.*

Пригадаймо знайому ситуацію: на перерві зібралася невелика група учнів, які слухають новину від свого товариша. Всі, крім одного, зацікавлені. А цьому байдуже – поширювана чутка на цей момент йому вже відома. Він, як і будь-який інший знавець, і сам при нагоді завжди готовий передати її будь-кому, адже згідно *Припущення 2* кожен(!) знавець розповсюджує інформацію протягом усього часу моделювання. Скільки ж *нових* знавців з’являється внаслідок розглянутого передавання? Зрозуміло, що на одного менше, ніж було слу-



хачів у групі.

Таким чином, відмовляючись від *Припущення 3*, ми опиняємося перед необхідністю не зараховувати до числа *нових* знавців тих осіб, для яких чутка не є новою, тобто тих, хто отримує її повторно. І не тому, що в житті здебільшого інтерес являють лише нові відомості, а саме тому, що *повторні знавці не збільшують нової загальної кількості володарів новини*. Для врахування кількості таких людей можна скористатися різними ідеями. Розглянемо *одну з можливих*.

Будемо вважати, що на самому початку розповсюдження чутка є новою для всіх  $S$  мешканців населеного пункту. Після першого передавання загальна кількість знавців (для кого вона є новою разом з тими, кому вона вже відома –  $N_0$ ) збільшиться на  $\Delta n$  (для приросту лише нових знавців ми, як і раніше, залишимо позначення  $\Delta N$ ). Зауважимо, що *повторні знавці можуть знаходитися тільки серед приросту  $\Delta n$* , який будемо обчислювати за формулою (3) або (3\*) з попередньої версії моделі.

Вираз  $\Delta n/S$  має зміст тієї *долі* від усього населення, в межах якої доцільно шукати повторних знавців, а  $Q = X/\Delta n$  – доля повторних знавців у черговому прирості ( $Q \leq 1$ ).

Шукатимемо  $X$  у два кроки.

1. Спочатку приймемо

*Припущення 6*. Доля  $Q$  осіб, котрі під час чергового передавання одержують інформацію повторно, пропорційна  $\Delta n/S$ :

$$Q = G \frac{\Delta n}{S}, \quad (5)$$

де  $G$  – коефіцієнт, що *підбирається* шляхом експериментування.

2. Далі обчислимо абсолютну кількість  $X$  осіб, котрі одержують інформацію повторно,

$$X = Q \cdot \Delta n. \quad (6)$$

Тоді фактичний приріст  $\Delta N$  кількості осіб, котрим новина надходить вперше, становитиме

$$\Delta N = \Delta n - X. \quad (7)$$

Діючи згідно (5)–(7) при кожному наступному передаванні, ми й надалі будемо знаходити приріст  $\Delta N$  лише тих осіб, які одержуватимуть новину вперше. Обчислюючи далі

$$N_j = N_{j-1} + \Delta N,$$

ми матимемо загальну кількість саме тих знавців, котрі поширюватимуть її в наступних передаваннях.

Тепер залишається внести відповідні зміни до алгоритму.

### 3.3.1. Алгоритм роботи з удосконаленою моделлю

– пп. 1, 2: вхідні дані вирізати зі стовпця Е і перенести у стовець Н; до вхідних даних додатково ввести змінні  $S$  та  $G$  (комірки Н2 та Н8, решту параметрів розташувати у Н3–Н7 в зазначеному раніше порядку). В утворених трьох нових стовпцях будемо вести спостереження за поведінкою змінних  $\Delta n$ ,  $X$  та  $Q$  (D, E та F відповідно).

– п. 4.2:

$Z = 1 - M - B$  – доля звичайних передавачів;

$\Delta n = N_{j-1} \cdot (B \cdot k_{\delta} + Z \cdot k_{3\delta})$  – як і у попередній версії моделі, але тут  $\Delta n$  – тимчасове значення змінної  $\Delta N$ ;

$Q = G \frac{\Delta n}{S}$  – доля осіб, які одержують чутку повторно;

$G$  – коефіцієнт, що добирається шляхом експериментування;

$X = Q \cdot \Delta n$  – кількість осіб, котрі під час чергового передавання одержують чутку повторно;

$\Delta N = \Delta n - X$  – остаточний приріст кількості нових знавців (лише тих, котрим чутка надходить вперше).

Відповідні комірки таблиці мають такий уміст:

комірка	Формули / числа
A3	=A2+1
B3	=D3-E3
D3	=C2*(H\$4*H\$5+(1-H\$3-H\$4)*H\$6)
E3	=F3*D3
F3	=H\$8*D3/H\$2

– п. 4.3 залишити без змін:  $N_j = N_{j-1} + \Delta N$ ,

тут  $N_j$  – остаточна кількість знавців новини, здатих до її поширення після передавання з порядковим номером  $j$ .

У відповідній комірці C3 таблиці, як і для попередньої версії моделі, це матиме таке відображення:

комірка	формула
C3	=C2+B3

– так само без змін залишити п. 5:

– формули з комірок A3, B3, C3, D3, E3 та F3 копіювати в решту комірок стовпців A, B, C, D, E та F відповідно.

### 3.3.2. Обчислювальний експеримент

- Нехай  $S = 10000$ ;  $M = 0,6$ ;  $B = 0,05$ ;  $k_{\delta} = 4$ ;  $k_{3\delta} = 2$ ;  $N_0 = 1$ ;  $G = 1,5$  (рис. 3.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$j$	$\Delta N$	$N$	$\Delta n$	$X$	$Q$	Дано:	
2	0	0	1	0	0	0,000000	$S =$	10000
3	1	1	2	1	0	0,000135	$M =$	0,6
4	2	2	4	2	0	0,000256	$B =$	0,05
5	3	3	7	3	0	0,000487	$k_6 =$	4
6	4	6	13	6	0	0,000926	$k_{36} =$	2
7	5	12	25	12	0	0,001758	$N_0 =$	1
...	...	...	...	...	...	...	$G =$	1,5
24	22	0	7407	6667	6667	1,000000		
25	23	0	7407	6667	6667	1,000000		

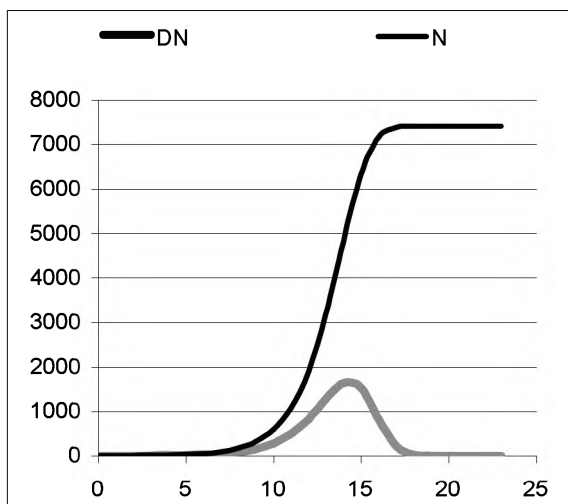


Рис. 3.4

Розглядаючи утворену таблицю, звертаємо увагу на таке:

1.1. На початку процесу ймовірність появи повторних знавців (її характеризує  $Q$ ) дуже мала, але поступово вона зростає до 1 (100%), тобто всі нові знавці з часом стають повторними.

1.2. Приріст  $\Delta N$  дорівнює зміні числа знавців за одне передавання, тому  $\Delta N$  характеризує швидкість поширення новини. З таблиці видно, що на початку процесу ця швидкість також дуже мала. У міру перебігу процесу його швидкість повільно зростає до максимуму, а далі швидко спадає до нуля і залишається такою на всю решту часу моделювання. Одночасно перестає змінюватися (зростати) загальна чисельність  $N_j$  знавців новини.

1.3. Виведемо на екран графіки залежностей  $\Delta N = \Delta N(j)$  та  $N(j)$  і переконаймося у сказаному вище.

1.4. Привертає увагу принципово новий і в певній мірі несподіваний факт:

$$N_{j \max} < S.$$

Це означає, що за прийнятих вхідних даних частина населення може так і залишитись не інформованою.

2. Проаналізуйте розміри цієї не інформованої частини  $S - N_{j \max}$  в залежності від різних чинників.

2.1. З'ясуйте, насамперед, залежність  $N_{j \max}$  від коефіцієнта пропорційності  $G$  у виразі (5), про який було сказано, що його значення добирається експериментально. Візьміть, для прикладу,  $G = 1$  (а далі  $G = 0,5$ ), залишаючи решту даних із попередніми значеннями.

#### Вправа

1. Чому  $N_{j \max}$  зростає (спадає)?
2. Підберіть таке значення  $G$ , яке б забезпечувало інформованість усього населення.
3. При якому значенні  $G$  новина взагалі не буде поширюватись?
4. Яку, на ваш погляд, роль відіграє коефіцієнт  $B$  у даній версії моделі?
5. Якщо відновити дані згідно п. 1 і змінити  $M$  – долю мовчунів, наприклад, зменшити її на 5%, то:
  - а) як це позначиться на розмірах не інформованої частини населення?
  - б) як така заміна взагалі впливає на перебіг процесу?

2.2. Повторіть п. 2.1 почергово для решти вхідних даних ( $B$ ,  $Z$ ,  $k_b$ ,  $k_{zg}$ ,  $N_0$ ). Кожного разу намагайтеся пояснити причини спостережуваних подій.

2.3. Наступне дослідження заслуговує на особливу увагу.

Знов поверніться до п. 2.2 у тій його частині, де пропонується експериментування з параметрами  $k_b$  і  $k_{zg}$ . Надайте їм таких значень:  $k_b = 7$ ,  $k_{zg} = 5$ . Таблиця набуває незвичного і незрозумілого вигляду:

– у послідовних сусідніх комірках стовпця для  $\Delta N$  з'являються додатні й від'ємні значення з великою різницею, які весь час чергуються;

– у рядках, що відповідають від'ємним числам,  $Q > 1$ ;

– взагалі в цій частині таблиці спостерігаються коливання значень всіх змінних.

Можливо, при виконанні попередніх експериментів перед вами

вже виникали подібні ситуації. У чому ж причина?

Будь-які спроби знайти тут логічне обґрунтування (у межах розглядуваної моделі) заздалегідь приречені на невдачу.

У моделюванні подібні ситуації добре відомі. У більшості випадків, і зокрема, коли сама модель за своєю внутрішньою логікою не передбачає коливних процесів, причина спостережуваних значних коливань змінних (до того ж і зі зміною знаків) завжди однакова: *за певних значень вхідних даних модель втрачає стійкість*. Це одна з важливих особливостей всякої більш-менш складної моделі. Що ж до вмісту самої таблиці, то тепер значення змінних у ній – це усього лише результати обчислень, вони аж ніяк не відбивають реальний перебіг процесу. Більш докладно про стійкість моделі йтиметься у наступній главі.

### Висновки

1. Самою суттєвою якістю розглянутої версії моделі є те, що в ній, нарешті, з'являється таке довго очікуване *обмеження кількості знавців новини*. Причому, принциповим тут є той факт, що це обмеження впливає із самої моделі, а не внаслідок якихось додаткових штучних заходів, як це мало місце у двох попередніх версіях.

2. Обчислювальний експеримент у завданні 4 із *Вправ* дозволяє дійти висновку, що коефіцієнт пропорційності  $B$  має зміст своєрідного регулятора швидкості процесу поширення чуток.

3. Важливе значення має результат, отриманий у п. 2.3, а саме уявлення про *стійкість моделі*. Його варто повторити:

*За певних значень вхідних даних модель може втратити стійкість. Числові значення змінних при цьому являють собою усього лише результати обчислень і ніяк не відображують реальний перебіг процесу або явища*

Найпершими ознаками (мовою медиків – симптомами) втрати моделлю стійкості є коливання з великою амплітудою та зміною знаків значень змінних у сусідніх комірках деякого стовпця. Проте, тут треба бути впевненим, що спостережувані коливання не є наслідком внутрішніх закономірностей моделі. В таких ситуаціях допомогти дослідникові встановити справжню причину зазначених коливань може особистий досвід роботи з математичного моделювання.

### 3.4. Закріплення: найпростіша модель епідемії

Як зазначалося, ця задача пропонується з метою закріплення початкових умінь, набутих у роботі з попередньою задачею про поширення чуток. Але тут будуть наводнитись тільки текстові коментарі, а зразки таблиць і графіків будуть відсутні. Цю роботу вам доведеться виконати самостійно, користуючись попереднім розв'язуванням.

#### 3.4.1. Постановка задачі

За багато років існування людства чимало життів було забрано внаслідок різних епідемій. Чума, холера, грип та деякі інші хвороби нерідко вражали численні маси людей.

Для того, щоб успішно вести боротьбу з епідеміями, тобто своєчасно вдаватися до тих чи інших санітарних заходів (карантини, вакцинації тощо), необхідно мати уявлення про ефективність таких заходів. І щоб порівнювати їх за ефективністю, треба бути впевненим, що є можливість передбачати, як той чи інший захід впливатиме на хід епідемії, тобто як із часом буде змінюватись кількість захворювань. Звідси виникає потреба у побудові моделі, яка б могла допомогти в прогнозуванні явища. Метою такого моделювання буде *прогнозування кількості хворих у будь-який момент часу за умови, що відома їхня кількість у початковий момент*.

Зрозуміло, що більш-менш реалістична модель епідемії має враховувати вплив багатьох різноманітних факторів і зокрема:

- закономірності, що обумовлюють розвиток бактеріальних клітин;
- наявність чи відсутність засобів боротьби з хворобою;
- ступінь сприйнятливості до інфекції окремих людей;
- ймовірність зустрічей носіїв інфекції зі здоровими людьми і багато іншого.

Тобто обговорювана модель епідемії мала б ґрунтуватися на знаннях із різних наук (мікробіологія, медицина, санітарія, фармакологія, теорія ймовірностей і математична статистика, соціальна психологія тощо). Проте врахувати означені вище чинники або навіть частину з них ми не в змозі. Ситуація виявляється для нас занадто складною, і тому доцільно прийняти ряд принужень, спрямованих на її спрощення. Аби не засмучувати наші перші кроки в роботі з моделювання, домовимося, що поширювана хвороба не є смертельно небезпечною.

### 3.4.2. Створення моделі

#### 3.4.2.1. Концептуальна модель

Нехай у деякий момент часу в групу здорових людей потрапляють декілька хворих – носіїв інфекції. Зрозуміло, що загальний кількісний склад цієї групи (здорові + хворі) може змінюватися в часі (приїзди й від'їзди, смерті й народження і таке інше), і тоді тільки вивчення змін цього кількісного складу становитиме самостійну не дуже просту задачу. З метою спрощення прийемо ряд припущень.

*Припущення 1.* Під час епідемії, ніяких кількісних змін у групі не відбувається (немає ні смертей, ні народжень, ні ізоляції, ніхто з мешканців не прибуває й не вибуває). Для не дуже великих груп і не занадто тривалих проміжків часу із цим можна погодитись.

*Припущення 2.* Воно стосується механізму передавання інфекції: здорова людина заражається сама і стає джерелом інфекції у момент зустрічі з хворим.

У такому разі ми нехтуємо тривалістю латентного (прихованого) періоду хвороби у порівнянні з тривалістю епідемії. Такі хвороби медицині відомі. З відповідних довідників можна дізнатися, що, наприклад, для грипу й холери цей період становить кілька годин, а для дифтерії, чуми, коклюшу – від двох діб і більше.

*Припущення 3.* Один хворий може зустрітись лише з одним здоровим (групові зустрічі не відбуваються).

*Припущення 4.* Серед заходів боротьби із захворюванням обираємо найпростіший: в цьому напрямі нічого не робиться. Такі дії не є гуманними, проте ж і йдеться всього лише про найпростішу модель, та й хвороба не така вже й небезпечна.

#### 3.4.2.2. Математична модель

Весь час спостереження розіб'ємо на достатньо малі однакові проміжки (інтервали)  $\Delta t$  (малі в порівнянні з тривалістю епідемії).

Уведемо позначення:

$i$  – порядковий номер проміжку  $\Delta t$ ;

$M_i$ ,  $N_i$  – відповідно кількість хворих і здорових людей у довільний проміжок часу з номером  $i$ .

На початку спостереження ( $i = 0$ ), отже  $M_i = M_0$ ,  $N_i = N_0$ .

Згідно з *Припущенням 1* у довільний момент часу

$$M_i + N_i = M_0 + N_0. \quad (1)$$

Зауважимо тут, що  $M_i$  і  $N_i$  – величини змінні, з плином часу вони монотонно змінюються в протилежних напрямках: у міру зростання

$M_i$  відбувається спадання  $N_i$ .

*Припущення 5.* Приріст чисельності хворих  $\Delta M_i$  пропорційний тривалості проміжку  $\Delta t$  і кількості зустрічей здорових людей із хворими за цей проміжок часу.

*Припущення 6.* Кількість зустрічей пропорційна як кількості хворих ( $M_i$ ), так і кількості здорових ( $N_i$ ) людей на початок  $i$ -го проміжку  $\Delta t$ . В такому разі кількість зустрічей пропорційна добуткові  $M_i$  і  $N_i$ .

На основі *Припущень 5 та 6* можна записати:

$$\Delta M = k M_i N_i \Delta t, \quad (2)$$

де  $0 < k < 1$  – коефіцієнт пропорційності, який назвемо коефіцієнтом зараження. Цей коефіцієнт має статистичний зміст і враховує, насамперед, такі фактори, як імовірність зустрічей і сприйнятливність окремої людини до хвороби.

Зазначимо, що різні індивіди в групі можуть проявляти різну сприйнятливність до хвороби, внаслідок чого в міру перебігу епідемії спочатку захворюватимуть найбільш сприйнятливі, а наприкінці залишатимуться найстійкіші. Одночасно зменшується ймовірність зустрічей. Це означає, що числове значення  $k$  може брати незмінним.

*Припущення 7.* Нехай коефіцієнт зараження  $k$  є незмінним у часі.

З (1) маємо

$$N_i = M_0 + N_0 - M_i \quad (3)$$

і після підстановки (3) у (2) остаточно отримуємо:

$$\Delta M_i = k M_{i-1} (M_0 + N_0 - M_{i-1}) \Delta t. \quad (4)$$

Знайдемо нову кількість хворих  $M_i$ , додаючи до її попереднього значення  $M_{i-1}$  шойно обчислений приріст  $\Delta M$ :

$$M_i = M_{i-1} + \Delta M_i \quad (5)$$

*Рівняння (4) і (5) являють собою найпростішу математичну модель епідемії.* Якщо вони будуть розв'язані відносно  $M_i$ , то ми отримаємо можливість щодо прогнозування перебігу епідемії.

Про рівняння (4) говорять, що воно записане у *формі скінчених різниць*. У шкільній математиці не вивчаються аналітичні методи розв'язування рівнянь такого виду. Тому для досягнення кінцевої мети виконаємо розв'язування чисельним методом. Використовуючи в якості середовища для моделювання електронні таблиці, будемо виводити на екран результати у вигляді таблиць та відповідних графічних залежностей змінних  $\Delta M_i$ ,  $M_i$  і  $N_i$  від часу.

### 3.4.3. Алгоритм роботи з моделлю

*Попереднє зауваження.* За змістом змінних  $M_i$ ,  $N_i$ , та  $\Delta M_i$



доцільно їхні значення подати у форматі цілих чисел.

1. Створити таблицю, в стовпцях A, B, C, D якої в першому рядку помістити імена змінних:  $t$ ,  $\Delta M$ ,  $M$ ,  $N$ . Значення цих змінних будуть вноситись у наступні рядки, починаючи з другого.

2. У стовпці E (“Дано:”) помістити імена констант:  $N_0$ ,  $M_0$ ,  $k$ ,  $\Delta t$ , а у стовпці F – їхні значення.

3. Заповнити другий рядок ( $i = 0$ ) початковими значеннями змінних:

- $t = 0$ ;
- $\Delta M = 0$  (приросту чисельності ще немає);
- $M$  і  $N$  – посиланнями на відповідні комірки стовпця F зі значеннями  $M_0$  і  $N_0$ .

4. Заповнити наступний (третій) рядок ( $i = 1$ ) формулами для обчислення чергових значень змінних:

- $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ ;
- $\Delta M$  згідно (4):  $\Delta M_i = k M_{i-1} (M_0 + N_0 - M_{i-1}) \Delta t$ ;
- $M$  у відповідності з (5):  $M_i = M_{i-1} + \Delta M_i$ ;
- $N$  за виразом (3):  $N_i = M_0 + N_0 - M_i$ .

Повторювати  $n = 20$  разів (на один екран) п. 4. З цієї метою копіювати формули третього рядка в наступні 19 рядків.

5. Стосовно критерію вибору нижньої межі значень проміжку  $\Delta t$  замінимо таке. Якщо подальше зменшення  $\Delta t$  не приводить до помітних змін результатів, то можна залишити його значення попереднім. Проте занадто мале значення  $\Delta t$  призведе до значного збільшення кількості повторень. Це, у свою чергу, потребуватиме збільшеного обсягу оперативної пам’яті і відповідно збільшить час опрацювання даних. Останнє зауваження має загальний характер, а в даному конкретному випадку (за малої кількості стовпців і рядків) згадане збільшення часу буде непомітним.

*Примітка.* Методами вищої математики можна отримати точний аналітичний розв’язок рівняння (4) у вигляді складної функції часу, але зараз важливим є інше. Адже відповідь у моделюванні, як відомо, не зводиться просто до числа або формули: бажано одержати таблицю значень шуканої величини для різних моментів часу і за цією таблицею побудувати графіки відповідних залежностей. Аналіз інформації, поданої у графічній формі, часто ефективніший, аніж аналітичний аналіз формул. Це зовсім не означає, що аналітичне дослідження у комп’ютерному моделюванні не є актуальним.

#### 3.4.4. Обчислювальний експеримент

1. Надайте параметрам моделі наступних значень:

$$N_0 = 10000; M_0 = 1; k = 0,1; \Delta t = 0,1.$$

Це означає, що в початковий момент у групу з десяти тисяч здорових людей потрапляє один хворий.

1.1. Підготуйте потрібну електронну таблицю і заповніть 22 її рядки один екран). З цієї таблиці видно, що вже на шостому кроці перестає виконуватись умова стійкості різницевого рівняння (4).

1.3. Для виправлення ситуації зменшимо проміжок  $\Delta t$  на один порядок, тобто введемо  $\Delta t = 0,01$ . Тепер, схоже, все гаразд.

2. Декілька останніх рядків таблиці показують, що через деякий час хворими стають всі члени групи. Дійсно, нові хворі не з'являються ( $\Delta M = 0$ ), а кількість хворих становить 10001 згідно (1). За даною таблицею побудуємо графіки залежності від часу кількості хворих  $M = M(t)$ , кількості здорових  $N = N(t)$  і графік  $\Delta M = \Delta M(t)$ .

3. Зменшимо проміжок  $\Delta t$  ще вдвічі:  $\Delta t = 0,005$ . Спостерігаємо уповільнення зміни  $\Delta M$  і  $M$ . Таким чином, тепер для завершення розрахунків ми вимушені довести кількість повторень майже до 50. Проте істотних якісних змін у відповідних таблицях і графіках ми не виявляємо. То ж виходить, що останнє зменшення  $\Delta t$  було необов'язковим. Тому залишимо  $\Delta t = 0,01$ .

4. Стовець  $\Delta M$  містить виключно додатні числа, отже кількість хворих із часом лише збільшується (це видно зі стовпця  $M$ ), а в описі моделі якраз і зазначається, що в напрямі боротьби з хворобою нічого не робиться, отже ніхто й не одужує. Бачимо, що наша модель правильно відбиває заздалегідь очікуваний результат. Розробники моделей навіть спеціально вдаються до подібних заходів, уводячи такі вхідні дані, за якими має відтворитись очікуваний результат. Така робота (тестування моделі) має виконуватися завжди.

5. З'ясуємо тепер питання: як позначитись на часові перебігу епідемії збільшення вдвічі початкової кількості хворих, тобто при  $M_0 = 2$ ? Чи буде правильною відповідь, що така заміна приведе до помітного скорочення цього часу? Тут ми маємо можливість перевірити відповідь на моделі, поклавши  $M_0 = 2$ . Результат спростовує запропоновану відповідь! Час поширення епідемії дійсно скорочується, проте... скорочення це майже непомітне – всього один рядок таблиці, один проміжок  $\Delta t$ . Цей результат, взагалі кажучи, можна було б передбачити при уважному огляді таблиці при  $M=1$ : адже  $M = 2$  з'являється тут саме в другому рядку.

6. Середню швидкість поширення епідемії  $\Delta M / \Delta t$  можна оцінювати за значеннями приростів  $\Delta M$ , оскільки всі проміжки  $\Delta t$  однакові. І таблиця, і графік  $\Delta M = \Delta M(t)$  показують, що швидкість поширення епідемії не є сталою. Дійсно, за таблицею (стовпець  $\Delta M$ ) видно, що ця швидкість спочатку зростає, а далі спадає. Можна

дізнатися, на якому навіть такті процесу вона стає максимальною. Але та наочність, яку забезпечує графік, не йде ні в яке порівняння з табличною: якщо одночасно вивести на екран графіки залежності  $\Delta M = \Delta M(t)$ ,  $M = M(t)$  і  $N = N(t)$ , то отримана інформація буде зручнішою для порівняльного аналізу.

Виконайте таку побудову й аналіз кожного з графіків.

#### **Вправа**

1. Як визначають значення коефіцієнтів моделі, зокрема,  $k$ ?
2. Як встановити, що проміжок  $\Delta t$  обраний занадто великим або занадто малим?
3. Якого змісту слід було б надати появі від'ємних значень у стовпчику  $\Delta M$ ?
4. Експериментально перевірте той факт, що добуток двох обмежених змінних, які міняються в протилежних напрямках (в нашій моделі такими є змінні  $M$  і  $N$ ), набуває максимуму, коли значення змінних стають однаковими. Тепер прокоментуйте графік залежності  $\Delta M = \Delta M(t)$ .

#### **Висновки**

Розглянута модель є вкрай спрощеною і дуже наближеною, проте результати, отримані на її основі, дозволяють стверджувати:

1. Стосовно динаміки розвитку процесу модель непогано узгоджується з даними численних спостережень: адже добре відомо, що на початку епідемії (для тварин *epizootii*) кількість захворювань різко зростає, а далі швидкість поширення хвороби знижується.
2. Обумовлений при описі моделі сталий кількісний склад групи може розглядатись, як рекомендація, як один із заходів у боротьбі з епідемією шляхом запровадження *карантину*. Якби не було нічого відомо про карантин, то можна було б навіть претендувати на відкриття.
3. Чисельне розв'язування цієї задачі можна виконати за допомогою олівця й паперу, але така робота буде тривалою, нудною і стомлюючою, внаслідок чого напевно з'являтимуться помилки. Не сильно допоможе і мікрокалькулятор. Ось чому саме такого виду роботу, в першу чергу, доцільно перекладати на комп'ютери, які здатні швидко й надійно опрацьовувати величезну кількість циклів.

### ***Розділ 3. Елементи математичної екології***

Термін “екологія” був запропонований німецьким біологом Е. Геккелем у 1869 р., та довгий час цей термін не використовували. Як самостійна наука екологія сформувалась близько 1900 р., але тільки кількома останніми десятиліттями слово “екологія” набуло особливої популярності. Коротке визначення екології – “біологія оточуючого середовища”. Сьогодні екологія – це багатогранна галузь знань, що охоплює уявлення майже всіх наук про взаємодії живих організмів, включаючи людину, між собою та з довкіллям.

Перші спроби математичного опису зміни в часі чисельності окремих популяцій та їх співтовариств мають досить давню історію, що ведеться ще з XVIII ст. Сучасна ж математична екологія зароджувалася у 20–30-х роках XX століття. Саме в цей час у біологію почали проникати методи математики та ідеї моделювання. Причому, як і в інших науках, моделювання тут було і залишається важливим засобом теоретичного вивчення природних систем.

Основою математичної екології є математична теорія динаміки популяцій, в якій формалізовані у вигляді математичних співвідношень фундаментальні біологічні уявлення про динаміку чисельності певних видів тварин, рослин, мікроорганізмів та їх взаємодії. Отже, математична екологія поєднує математичні моделі і методи, що використовуються при вирішенні проблем екології.

В останні десятиліття увагу біологів привертають можливості комп’ютерного моделювання. Насамперед, це обумовлено потребами сучасних підходів до розв’язання складних і багатосторонніх проблем. Ці підходи сьогодні відомі під загальною назвою “*системний аналіз*”. В математичній екології такий аналіз передбачає дослідження певного об’єкта за допомогою декількох різних його моделей, і в цьому напрямі досягнуті цілком задовільні результати. Надії, що їх покладають біологи на математичне моделювання, ґрунтуються на визначних успіхах, отриманих у інших природничих науках (зокрема, у фізиці).

Перед сучасною екологією стоїть чимало проблем, серед яких і такі, що в загальних рисах вже згадувались у Вступі, а саме:

- прогнозування станів екологічної системи під впливом антро-

погенних факторів (результатів людської діяльності);

- вибір оптимальної (найбільш ефективної за даних умов) стратегії раціонального використання різних поновлюваних природних ресурсів – промислових риб, мисливських або земельних угідь тощо;

- управління популяціями та їх співтовариствами з метою боротьби зі шкідниками сільськогосподарських культур, але не шляхом застосування отрутохімікатів, а заходами, пов'язаними з використанням природних ворогів шкідників;

- розробка наукових засад і практичних методів контролю за станом навколишнього середовища.

В цьому розділі ми розглянемо декілька прикладів математичного моделювання в екології і познайомимося з новими підходами до побудови моделей і до роботи з ними, що обумовлено специфікою означеної науки. При цьому традиційно ми будемо просуватися від простого до складного, тобто спочатку розглядати украй спрощені версії моделей, а потім поступово будемо їх ускладнювати.

## Глава 4. Динаміка одновидової популяції

### 4.1. Модель одновидової популяції за відсутності обмежень

Спрощено уявити собі одновидову популяцію, що існує без зовнішніх обмежень, можна на такому *ідеалізованому* прикладі. Нехай у великому ставку розводять рибу (наприклад, карасів). Вони не заважають одне одному: їжі, світла та місця вистачає, хижаки відсутні і рибу не виловлюють.

Метою дослідження поставимо пошук відповіді на питання:

*Як буде змінюватися чисельність популяції з плином часу?*

Нагадаємо, що моделі, в яких досліджується зміна в часі деякої величини, називають *динамічними*.

#### 4.1.1. Постановка задачі. Опис моделі Мальтуса

Введемо такі позначення:

$N_0$  – кількість особин на початку спостереження (в момент часу  $t = 0$ );

$N$  – чисельність популяції у довільний момент часу  $t$ ;

$\Delta N$  – приріст чисельності за достатньо малий проміжок часу  $\Delta t$ ,

а вираз  $\frac{\Delta N}{\Delta t}$  матиме зміст середньої швидкості приросту впродовж цього проміжку. Умову “достатньої малості” ми обговоримо дещо пізніше.

Цілоком природно, що середня швидкість приросту популяції має залежати, насамперед, від факторів, що характеризують здатність особин до відтворення, і одночасно – їхню здатність до виживання. Введемо відповідні характеристики:

$a$  – коефіцієнт народжуваності;

$b$  – коефіцієнт смертності.

Цим коефіцієнтам надамо такого змісту: якщо чисельність популяції становить  $N$  особин, то за проміжок часу  $\Delta t$  від них народжуються  $aN$  особин і одночасно  $bN$  особин гинуть. В такому разі ефективний (результуючий) приріст чисельності  $\Delta N = (a - b) \cdot N$ , причому у випадку зростання чисельності  $a > b$ , а при її зменшенні  $a < b$ .

Позначимо далі  $k = a - b$ . У математичній екології параметр  $k$  є кількісною мірою (характеристикою) внутрішньої здатності популяції до чисельного росту і називається *коефіцієнтом приросту*.

Спостереження доводять, що в природних умовах

1) параметри  $a$  і  $b$ , а отже й  $k$ , змінюються з плином часу (з віком

особин);

2) у багатьох біологічних видів моменти появи потомства від окремої особини мають зазвичай майже періодичний характер, але у великій сукупності різних особин ці періоди можуть перекриватися, так що фактично потомство з'являється постійно й неперервно.

З метою спрощення приймемо ряд припущень.

*Припущення 1.* Будемо вважати, що за незмінних зовнішніх умов коефіцієнт приросту  $k$  є величиною, сталою в часі; народження та загибель особин відбуваються неперервно; тривалість життя кожної з особин значно менша за час “спостереження” (час моделювання).

Нехай за деякий  $i$ -ий достатньо малий інтервал часу  $\Delta t$  (тут  $i$  – порядковий номер даного інтервалу) чисельність зростає на  $\Delta N$ . Тоді на початок наступного такого ж інтервалу з номером  $i + 1$  чисельність становитиме  $N_{i+1}$ . Цілком зрозуміло, що більша кількість особин за такий самий проміжок часу  $\Delta t$  даватиме більший приріст  $\Delta N$ , тому середня швидкість приросту  $\Delta N/\Delta t$  має зростати. *За незмінних зовнішніх умов швидкість приросту залежить від чисельності популяції в даний момент.* Проте вигляд цієї залежності нам невідомий і, взагалі кажучи, може бути різним. Маючи на меті створення *найпростішої моделі*, приймемо

*Припущення 2.* Нехай залежність середньої швидкості приросту від чисельності популяції у даний момент є найпростішою – прямою пропорційною:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN. \quad (1)$$

Якщо переписати (1) у вигляді

$$\Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t, \quad (2)$$

то можна сказати, що *за будь-який малий проміжок часу  $\Delta t$  приріст чисельності пропорційний як кількості особин на початку проміжку  $\Delta t$ , так і тривалості цього проміжку.*

Характерною властивістю рівнянь такого виду є те, що вони справедливі лише для малих приростів аргументів; підстановка у них довільних значень аргументів є некоректною.

Згідно з (1) або (2)

$$k = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t},$$

тобто чисельно параметр  $k$  дорівнює відносному приросту  $\Delta N/N$  за одиницю часу.

Рівняння (1) вперше було запропоноване в 1798 р. англійським вченим Томасом Мальтусом і в математичній екології дістало назву

### “модель Мальтуса”.

Ці рівняння містять невідому величину  $N$  та швидкість її зміни  $\Delta N/\Delta t$ . Вище вже зазначалось, що засобами елементарної математики рівняння такого типу не розв’язуються, тому скористаємось чисельним методом – покроковим розв’язуванням:

1. У початковий момент часу ( $t = 0$ ) покладемо  $N=N_0$  і  $\Delta N=0$ .

2. Наступний момент візьмемо наприкінці першого проміжку часу  $\Delta t$  і згідно (2) обчислимо  $\Delta N$  – зміну кількості особин за цей проміжок.

3. Знайдемо нову кількість особин  $N_i$ , додаючи до її попереднього значення  $N_{i-1}$  щойно обчислену зміну  $\Delta N$ :

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N, \quad (3)$$

або підстановкою (2) в (3) отримаємо

$$N_i = N_{i-1} + k N_{i-1} \Delta t, \quad (4)$$

Вираз (4) є еквівалентним (2) і (3), записаним у формі скінчених різниць.

4. Повторюючи нункти 2 і 3 для наступних моментів  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ , будемо знаходити відповідні нові значення  $N$ .

Рівняння (2) і (3) або (4) являють собою математичну модель динаміки популяції за відсутності обмежень. Вони дозволяють знайти чисельність популяції на інтервалі  $\Delta t$  з номером  $i$ , якщо відома чисельність на попередньому інтервалі з номером  $(i-1)$ . Рівняння (4), таким чином, є рекурентним.

Як і раніше, швидкість приросту  $\Delta N/\Delta t$  можна оцінювати за значеннями самих приростів  $\Delta N$ , оскільки всі проміжки  $\Delta t$  однакові.

*Зауваження 1.* Проміжки часу  $\Delta t$ , що фігурують в даній математичній моделі, як і сам час  $t$ , доцільно подавати в умовних одиницях. У залежності від біологічного виду це можуть бути хвилини, години, роки і т.п. Важливо, щоб ці проміжки  $\Delta t$  були набагато меншими за час моделювання і щоб протягом такого проміжку приріст чисельності  $\Delta N$  становив малу долю від загальної кількості особин  $N$  на даний момент. Саме у такий спосіб і буде задовольнятися умова “достатньої малості проміжку часу”. Що може відбуватись із моделлю при порушенні цієї умови, ми з’ясуємо трохи пізніше.

Оскільки постановка задачі і створення її математичної моделі виконані, запишемо

#### 4.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити електронну таблицю та заповнити перший її рядок іменами змінних за зразком, наведеним у попередній главі, замінивши  $j$  на  $t$ .



	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2				$N_0 =$	100
3				$k =$	0,25
4				$\Delta t =$	0,1
...	...	...	...		

2. Увести вхідні дані та початкові умови (заповнити стовпець “Дано:” і наступний за ним).

3. Заповнити другий рядок таблиці (для початкового моменту часу з номером  $i=0$ ):

$$t = 0;$$

$N = N_0$  – посиланням на відповідне значення зі стовпця E;

$\Delta N = 0$  – на початку спостереження приросту ще немає.

4. Заповнити третій рядок (для кінця першого ( $i=1$ ) проміжку  $\Delta t$ , тобто для моменту часу  $t + \Delta t$ ), перетворивши на табличні формули подані нижче вирази:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$\Delta N_i = N_{i-1} \cdot k \cdot \Delta t \text{ згідно з (2);}$$

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N_i \text{ згідно з (3).}$$

Значення змінних  $N$  і  $\Delta N$  відповідно до змісту цих величин подати у форматі цілих.

5. Повторювати  $n$  разів п. 4, де  $n$  – кількість проміжків часу. Нехай для визначеності  $n = 22$  (один екран).

За наведеним алгоритмом заповнимо відповідні комірки таблиці і почнемо

#### 4.1.3. Обчислювальний експеримент

Введемо такі початкові значення змінних:

$N_0 = 100$ ;  $k = 0,25$ ;  $\Delta t = 0,1$  (рис. 4.1).

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	100	$N_0 =$	100
3	0,1	3	103	$k =$	0,25
4	0,2	3	106	$\Delta t =$	0,1
5	0,3	3	109		
6	0,4	3	113		
7	0,5	3	116		
8	0,6	3	119		
...	...	...	...		

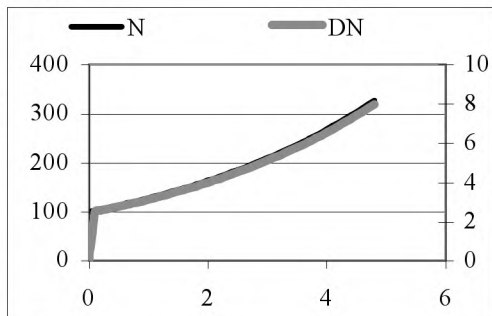


Рис. 4.1

З таблиці легко бачити, що

1) чисельність  $N$  популяції з плином часу монотонно зростає, так само зростає і середня швидкість  $\Delta N/\Delta t$  приросту популяції;

2) значення змінних  $N$  і  $\Delta N$  є несумірними, а саме  $N \gg \Delta N$ , тому графіки залежностей  $N = N(t)$  і  $\Delta N = \Delta N(t)$  доцільно виводити на різних осях:  $N = N(t)$  – на основній, а  $\Delta N = \Delta N(t)$  – на допоміжній осі.

### Вправи

1. Як за допомогою таблицю встановити, що залежність чисельності від часу  $N = N(t)$  не є лінійною функцією?

Визначте, через який час початкова чисельність збільшиться удвічі? Ще удвічі?

2. Чи можна зробити висновок, що за моделлю Мальтуса послідовні подвоєння чисельності  $N$  відбуваються через однакові проміжки часу?

3. Чи виконується така сама закономірність для приростів чисельності  $\Delta N$ ?

4. Візьміть два однакових за тривалістю проміжки часу (наприклад,  $2\Delta t$  або  $3\Delta t$ ) і знайдіть на кожному з них відношення кінцевої чисельності до початкової. Виконайте це у вільних комірках електронної таблиці.

5. Повторіть завдання з якими-небудь іншими, але знов однаковими проміжками часу. Порівняйте результати, зробіть висновки.

*Зауваження 2.* Аналітичний розв'язок рівняння (1) в математиці добре відомий. Він має вигляд

$$N = N_0 e^{kt}, \quad (5)$$

де  $N_0$  – кількість особин у початковий момент часу  $t = 0$ ;

$e = 2,718\dots$  – основа натуральних логарифмів; це число на честь видатного математика XVIII ст. Леонарда Ейлера називають *числом Ейлера*.

Завдання 2–5 із вправи на практиці знайомлять з деякими властивостями показникової функції (5).

**Задача.** Період подвоєння населення Землі у наш час становить близько 40 років. Якби швидкість приросту чисельності не змінювалася з часом, то чи можна було б стверджувати, що

а) кількість людей, які живуть на Землі сьогодні, більша за кількість померлих за останні 1000 років?

б) вона більша за кількість усіх людей, що колись померли?

в) яким би тоді мав бути час існування людства?

г) то ж чи змінювалася швидкість приросту населення? Якщо

так, то як саме?

д) поміркуйте, як треба було б змінити вхідні дані в таблиці, щоб перевірити свої відповіді за допомогою даної моделі, та виконайте таку перевірку.

## Висновки

1. При  $k > 0$  модель Мальтуса дає *необмежене зростання* чисельності популяції з плином часу, чого в природних умовах ніколи не спостерігається. Адже слід мати на увазі, що згадані на початку природні ресурси (такі як простір, їжа, вода, світло) обмежені. Це має приводити до існування верхньої межі чисельності. Таким чином, зміну чисельності популяцій рослинного і тваринного світу не можна описувати простим законом Мальтуса: її динаміку у складний спосіб обумовлюють багато різних чинників.

2. Працюючи з цією моделлю, ми мали нагоду впевнитися в тому, що результати моделювання цілком відповідають принущенням, прийнятим при побудові моделі. *Будь-яка модель є адекватною лише в межах прийнятих припущень*. Але чим менш обґрунтованими є ці принущення, тим менше шансів сподіватися на задовільні й реалістичні (адекватні) результати.

3. Результати моделювання можуть виявлятися хибними принаймні з таких причин:

- в основу моделі покладені необґрунтовані припущення;
- дослідник поширює область застосування моделі, виходячи за межі, обумовлені прийнятими принущеннями (екстраполяція);
- на етапі прийняття принущень дослідник не враховує деякі суттєві фактори.

От і модель Мальтуса непогано відповідає дійсності лише за відсутності обмежень. Інших ситуацій вона й не передбачає.

4. В математичній екології модель Мальтуса є найпростішою і зазвичай використовується як основа для подальшої побудови більш досконалих, тобто більш реалістичних і адекватних моделей.

5. З пізнавальної точки зору модель Мальтуса може становити додатковий інтерес ще й як об'єкт для дослідження деяких цікавих властивостей показникової функції, що описується рівнянням (5).

Повернемося, однак, до наших карасів у ставку, яких ми залишили у повній ідилії. А чи не набридло їм одноманітне життя у повному достатку? Без боротьби за існування, без конкуренції?

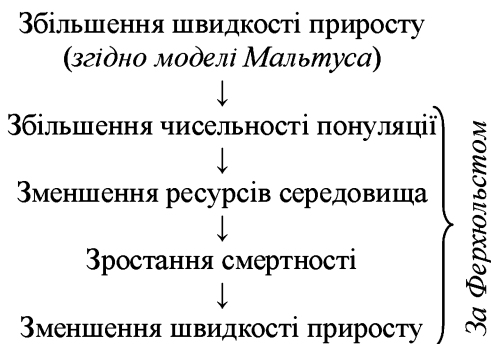
От і розглянемо далі

#### 4.2. Модель одновидової популяції за наявності обмежень

Вже давно добре відомо, що у жнвйй природі жодна теиденція зростання не може бути необмеженою, оскільки кожен з використуваних ресурсів завжди має певну природну границю. Тому й розмноження кожного виду в природі *саморегулюється* так, щоб цей вид зберігався у процесі еволюції. З огляду на цей факт модель Мальтуса містить суттєвий недолік: вона ігнорує залежність коефіцієнта смертності  $b$  від кількості особин  $N$ , тобто не враховує обмеженості ресурсів. Дійсно, якщо коефіцієнт народжуваності зумовлюється здебільшого генетично, то на коефіцієнт смертності суттєвий вплив чинить середовище.

Наступний крок щодо вдосконалення моделі був зроблений у 1845 р. німецьким математиком П. Ферхюльстом, який увів до моделі Мальтуса деякі обмеження. Розглянемо їх.

З плином часу при  $k > 0$  кількість особин збільшуватиметься, і їм вже не вистачатиме вільного простору, а, можливо, і їжі та деяких інших ресурсів середовища. Тому подальший приріст чисельності вже не повинен відповідати рівнянню (2). Адже за розглянутих умов виникатиме *конкуренція*, яка призведе до зменшення швидкості приросту за схемою:



Проте, оскільки можливий вигляд залежності коефіцієнта смертності  $b$  від кількості особин  $N$  нам заздалегідь невідомий, прийнемо для спрощення чергове

*Припущення 3.* Будемо вважати, що коефіцієнт  $b$  лінійно залежить від кількості особин:

$$b = d + q \cdot N,$$

де  $d$  і  $q$  – деякі сталі величини.

Таке припущення має певне обґрунтування: як відомо з математики, за достатньо малої зміни значень аргументу довільну гладку

функцію можна з непоганим наближенням замінити лінійною функцією.

З урахуванням останнього виразу маємо для  $k$  нове значення:

$$k = a - b = a - (d + qN) = a - d - qN.$$

Виконуючи далі заміну  $p = a - d$ , замість (2) отримуємо

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t, \quad (6)$$

де  $p$  – параметр, що враховує здатність популяції до відтворення (тут параметр  $p$  відіграє роль, аналогічну  $k$  з попередньої моделі);

$q$  – параметр, що враховує наявність конкуренції,  $q \geq 0$ .

Як, на вашу думку, буде поводити себе модель за умови  $q = 0$ ?

Параметр  $p$  дістав назву “*коефіцієнт відтворення*”, а параметр  $q$  – “*коефіцієнт опору середовища*”. Параметр  $p$  є сталим у часі, тому що сталими в часі вважалися параметри  $a$  і  $d$ .

Оскільки

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N, \quad (3)$$

то аналогічно до (4) можна записати:

$$N_i = N_{i-1} + (p - q \cdot N_{i-1}) \cdot N_{i-1} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Рівняння (3) і (6) або (7) є математичною моделлю динаміки популяції з урахуванням конкуренції, пов’язаної з обмеженням ресурсів середовища.

У математичній екології ця модель має назву “*модель Ферхюльста-Перла*”.

Точний аналітичний розв’язок рівняння (6) має вигляд складної функції. Ми ж, як і у попередній версії моделі, вдамося до покрокового чисельного методу розв’язування.

У зв’язку зі змінами, що їх зазнала модель, відповідним чином змінимо й

#### 4.2.1. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 1: замість  $k$  увести до вхідних даних параметри  $p$  та  $q$ ;
- п. 4: обчислювати приріст кількості особин  $\Delta N_i$  згідно (6):

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t.$$

*Зауваження 3.* Воно стосується конкретних значень коефіцієнтів моделі  $p$  і  $q$ . У випадках, коли вони заздалегідь невідомі, можна вдатись до одного з перелічених нижче заходів:

а) виконати натурний експеримент, в ході якого отримати якомога більше значень для  $N$  та  $\Delta N$ , що відповідають різним моментам часу, а далі методами математичної статистики визначити шукані параметри  $p$  та  $q$ ;

б) спробувати визначити їх хоч би орієнтовно за допомогою додаткових теоретичних міркувань;

в) добирати їх інтуїтивно шляхом послідовних проб, так щоб одержані результати забезпечували хоч би задовільну адекватність моделі.

#### 4.2.2. Обчислювальний експеримент

1. Скористаємося останнім зауваженням і на основі обчислювального експерименту з моделлю після декількох попередніх спроб, уведемо такі дані:

$$N_0 = 100; \quad p = 5; \quad q = 0,01; \quad \Delta t = 0,01 \text{ (рис. 4.2).}$$

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0,00	0	100	$N_0 = 100$	
3	0,01	4	104	$p = 5$	
4	0,02	4	108	$q = 0,01$	
5	0,03	4	112	$\Delta t = 0,01$	
6	0,04	4	117		
7	0,05	4	121		
8	0,06	5	126		
9	0,07	5	130		
...	...	...	...		

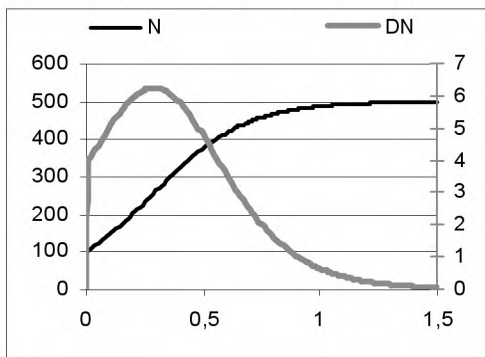


Рис. 4.2

З таблиці й графіка  $N = N(t)$  видно, що з плином часу чисельність карасів у ставку зростає до деякої верхньої межі (у нашому випадку до 500 особин), а далі підтримується сталою, тобто популяція приходить у рівноважний стан: саме з цього моменту приріст чисельності  $\Delta N$  стає і залишається надалі рівним нулеві (чорна крива). При цьому чисельність популяції зросла на 400 особин у порівнянні з початковою.

Розглядаючи значення змінних у стовпцях B і C, можна побачити, що в комірках C6 і C9 ці значення не відповідають формулі  $N_i = N_{i-1} + \Delta N_i$ . У чому полягає ця невідповідність?

Цей факт є платнею за заміну формату дійсних чисел на цілий. Як можна в цьому переконатись?

2. Візьмемо початкову кількість особин  $N_0 = 800$  (на 300 більше за виявлену межу), а решту параметрів залишимо з попередніми значеннями. З таблиці та відповідних графіків бачимо, що тепер із плином часу чисельність “населення” у ставку монотонно зменшується,

аж поки знов не стабілізується. Але, що цікаво, стабілізація відбувається на попередній межі – 500 особин!

3. Переконайтесь у тому, що, експериментуючи з довільними значеннями  $N_0$ , ми кожного разу будемо одержувати те саме граничне значення  $N_{\text{гр}} = 500$  особин (рис. 4.3, 4.4).

*Зауваження 4.* Ситуація, з якою ми зустрілися, у природних процесах досить поширена, вона заслуговує на більш докладне обговорення. Цю ситуацію можна було б передбачити, і не виконуючи обчислювальний експеримент. Дійсно, якщо дана модель має рівноважні стани, то в цих станах приріст чисельності  $\Delta N$  має бути рівним нулю (це видно з таблиці). З виразу (6) неважко побачити, що  $\Delta N = 0$  за умови, що нулю дорівнює вираз у дужках

$$p - q \cdot N = 0,$$

звідки

$$N_{\text{гр}} = \frac{p}{q}$$

Цей вираз називають *вмістом середовища*.

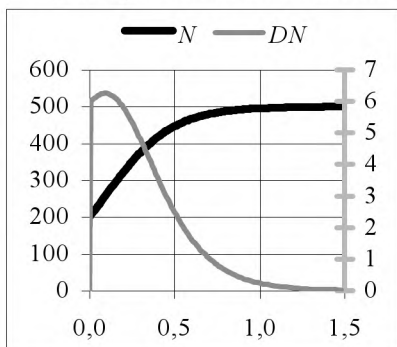


Рис. 4.3  
 $N_0 = 200; N_{\text{гр}} = 500$

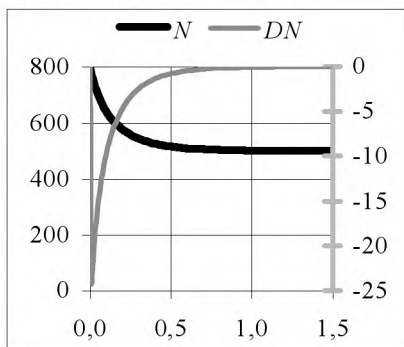


Рис. 4.4  
 $N_0 = 800; N_{\text{гр}} = 500$

Згідно з нашими даними  $N_{\text{гр}} = 5/0,01 = 500$ .

4. Цікаву картину являють одночасно виведені на екран графіки  $N = N(t)$  – залежності кількості особин від часу для  $N_0 = 200$  і  $N_0 = 800$  (рис. 4.5). Цей рисунок фактично поєднує рис. 4.3 і рис. 4.4 й ілюструє той факт, що згідно прийнятої моделі за будь-якої початкової кількості особин  $N_0$  їхня остаточна кількість із плином часу завжди встановлюється рівною вмісту середовища  $N_{\text{гр}}$ .

**Вправа.** Самостійно побудуйте графіки згідно рис. 4.5.

Звертає на себе увагу ще одна особливість: хоч числа 200 і 800 є

симетричними відносно 500, отримані графіки не є симетричними: графік для  $N_0 = 800$  спадає крутіше, аніж зростає графік для  $N_0 = 200$ .

Які міркування про те, що саме так і має бути, ви б могли тут навести?

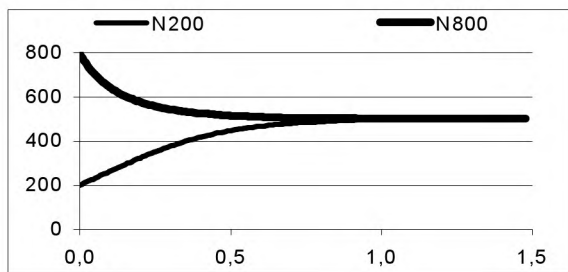


Рис. 4.5

Справа в тому, що при  $N_0 < N_{\text{тр}}$  населення ставка (200 особин) помітно не конкурує і деякий час значення приросту зростають повільно. Якщо ж  $N_0 > N_{\text{тр}}$ , то фактор конкуренції починає проявляти себе від самого першого моменту, що й приводить до різкого зменшення чисельності. Отже, якщо розглядати процеси у ставку протягом деякого часу, починаючи від самого початку ( $t = 0$ ), то швидкість зростання кількості особин при  $N_0 < N_{\text{тр}}$  завжди змінюється повільніше, ніж швидкість зменшення при  $N_0 > N_{\text{тр}}$ .

5. Нагадаємо, що середня швидкість зміни чисельності  $\Delta N / \Delta t$  можна досліджувати за графіком  $\Delta N = \Delta N(t)$ .

5.1. Виведемо на екран графіки залежності приросту чисельності  $\Delta N$  від часу, тобто графіки  $\Delta N = \Delta N(t)$  для  $N_0 = 200$  і  $N_0 = 800$  (рис. 4.6).

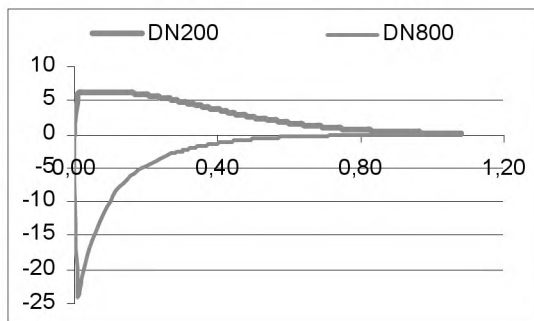


Рис. 4.6

Одразу ж бачимо, що перший з них не є монотонним, а має максимум; другий – монотонно зростає до нуля. Наявність максимуму у 76



першого графіка показує, що швидкість приросту спочатку зростає, а далі спадає до нуля, тому що чисельність  $N$  особин перестає змінюватись. Цей факт для нас не є несподіванкою і наводиться тут лише як вправа для тренування дуже корисних (зокрема, в моделюванні) навичок аналізу інформації, поданої у графічній формі. Так, маючи графік швидкості зміни деякої величини, бажано вільно уявляти собі поведінку самої цієї величини.

5.2. Тепер іще раз виведіть на екран графік залежності  $N = N(t)$ .

Графіки яких функцій нагадують вам окремі ділянки цього графіка?

6. Виконайте експерименти з величиною  $p/q$  – вмістом середовища. Для визначеності введіть такі дані:

$$N_0 = 10; \quad p = 1,7; \quad q = 0,02; \quad \Delta t = 0,1 \text{ (рис. 4.7).}$$

Порівняйте новий вміст середовища  $N_{\text{тр}} = p/q$  за таблицею і за розрахунком.

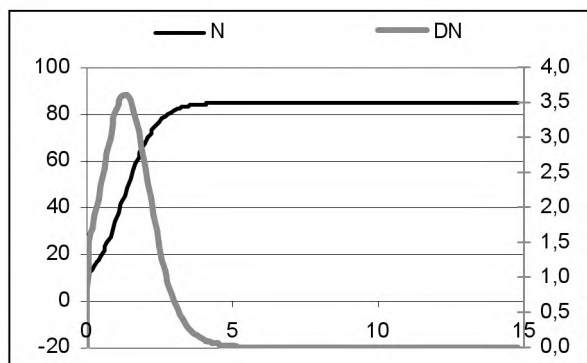


Рис. 4.7

### 4.2.3. Стійкість математичної моделі

Наступне дослідження стосується прийнятних значень проміжків часу  $\Delta t$ . Про це вже йшлося в задачі про чутки на с. 56 (п. 2.3).

Надамо інтервалові часу  $\Delta t$  більшого значення, ніж у попередньому досліді. Нехай  $\Delta t = 0,5$ . Поясніть причину спостережуваної зміни у таблиці та на відповідному графіку.

Продовжимо далі збільшення інтервалів  $\Delta t$ , надаючи їм послідовних зростаючих значень  $\Delta t = 1; \Delta t = 1,1; \dots$  (рис. 4.8).

У порівнянні з рис. 4.7 в таблиці та на екрані спостерігаються дивні речі: чисельність  $N$  понуляції, як і її приріст  $\Delta N$ , перед виходом на усталений режим рівноваги деякий час коливаються відносно гра-

нично можливого значення  $N_{\text{гр}}$ .

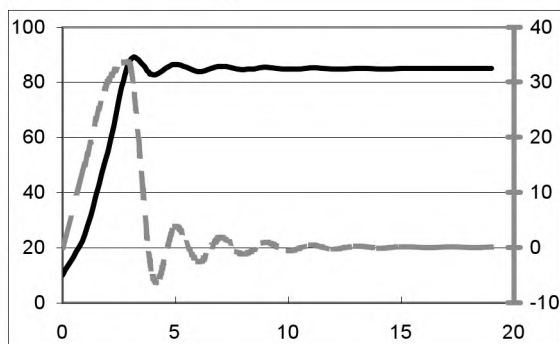


Рис. 4.8

Як віднестись до отриманого результату? Його прийняття означатиме, що значення проміжків часу  $\Delta t$  здатні впливати на хід процесів, але з іншого боку рис. 4.8 з'явився з тієї самої моделі, що й рис. 4.7. Якому ж із цих результатів довіряти? Весь наш життєвий досвід, як і досвід навчальної діяльності свідчать, що перебіг природних процесів не може залежати, наприклад, від того, якою стрілкою годинника ми користуємось: хвилинною чи секундною. Скоріш за все, рис. 4.8 ілюструє, що модель і обчислювальний алгоритм втратили адекватність.

Непорозуміння в таблиці (а отже і на графіку) продовжуються і при ще більшому значенні  $\Delta t = 1,5$  (перевірте). Вони набувають стійкого характеру, і тому виникає природне питання: яке відношення до досліджуваної системи мають всі ці результати?

Виявляється, що фахівцям із комп'ютерного моделювання такі ситуації добре відомі. Справа в тому, що, коли до процесу розв'язування задачі залучається комп'ютер – пристрій, що працює за дискретним принципом, – то при побудові комп'ютерної моделі завжди виникає необхідність замінювати неперервні в часі процеси на їхні дискретні аналоги. Зрозуміло, що математична модель може бути як неперервною, так і дискретною, тоді як комп'ютерна модель завжди дискретна. Рівень дискретизації може бути різним: зменшення кроку дискретизації наближає модель до неперервної. У практичній реалізації це означає перехід від аналітичних методів розв'язування до чисельних методів (до покрокових обчислень за рекурентними виразами). І саме тут даються взнаки специфічні особливості комп'ютерних обчислень – нагромадження похибок округлення різного походження. Їх вивчає окремий розділ обчислювальної матема-

тики – теорія дискретних математичних моделей. У ній розробляються методи встановлення відповідності між обома типами моделей – неперервними і дискретними. Визначення умов стійкості розрахункових алгоритмів, тобто умов, за яких похибки обчислень не нагромаджуються, – одна з важливих задач дискретної математики.

Стосовно обговорюваного прикладу (і деяких наступних задач) ця теорія дає просту і надійну умову:

$$\Delta t \leq \varepsilon h^2,$$

де  $\Delta t$  – крок зміни по вісі часу (аргументу);

$\varepsilon$  – деяка стала (іноді беруть  $\varepsilon = 1$ );

$h$  – крок зміни іншої величини, залежної від часу (у нашому прикладі  $h$  відповідає кроку вздовж вісі  $N$ ).

При  $\Delta t < 0$  з цієї умови випливає важливий висновок: якщо крок для  $h$  малий (при великих кроках не буде досягнута очікувана стійкість), то крок  $\Delta t$  уздовж вісі часу має бути ще меншого порядку малості (доведіть!).

Таким чином, рис. 2.8 ніякого відношення до процесу не має. Річ у тім, що при збільшенні значень кроку аргументу – інтервалу  $\Delta t$  – перестає виконуватись умова достатньої малості цих інтервалів, внаслідок чого нестійким стає сам обчислювальний процес, руйнується стійкість різницевого рівняння і розрахункового алгоритму. В таких ситуаціях результати моделювання, як правило, виявляються хибними, а тому їм не слід довіряти.

## Висновки

1. Розглянута модель була отримана з найпростішої моделі Мальтуса шляхом вдосконалення останньої, а саме – врахуванням реальних обмежень на ресурси середовища, що призвело до появи конкуренції між особинами в популяції.

2. У відповідності до прийнятих припущень ця модель на якісному рівні задовільно відображує зміну чисельності особин у природних популяціях. Зокрема, було встановлено існування рівноважного стану: за будь-яких відхилень чисельності від  $N_{\text{гр}}$  популяція самостійно повертається у цей стан. Таку рівновагу називають стійкою. Одночасно ми виявили фактори, від яких залежать значення вмісту середовища  $N_{\text{гр}}$ .

3. За можливості математичну модель доцільно аналітично перевіряти на наявність у ній рівноважних станів.

4. Обчислювальний експеримент дозволив виявити умови, за яких порушується стійкість розрахункового алгоритму. Такі ситуації

потребують особливої уваги й аналізу, оскільки вони часто ведуть до хибних висновків про поведінку досліджуваної системи.

Що ж до наших карасів у ставку, то чи не прийшов час не тільки вести підрахунки чисельності, а й використовувати їх як харчовий ресурс?

#### 4.3. Промислове використання популяції

До цього часу ми розглядали одновидову популяцію карасів, яка розвивалася вільно: зовнішні фактори помітним чином не впливали на її чисельність. Припустимо тепер, що ми приймаємо рішення про-водити вилов карасів з постійною абсолютною швидкістю, тобто за кожен одиницю часу вилучати з популяції однакову кількість риб.

Нехай  $c$  – абсолютна швидкість виловлювання,  $c \geq 0$ . Параметр  $c$  характеризує дозволену швидкість вилову і зветься *квотою* (у даному випадку – *абсолютною квотою*). Цей параметр чисельно дорівнює кількості особин, що вилучаються з популяції за одиницю часу.

Тепер рівняння (6) необхідно переписати у вигляді

$$\Delta N = (p - q \cdot N) \cdot N \cdot \Delta t - c \cdot \Delta t$$

або

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - c) \cdot \Delta t. \quad (8)$$

За аналогією з двома попередніми версіями згідно (3) маємо

$$N_i = N_{i-1} + \Delta N,$$

і замість (6) стає

$$N_i = N_{i-1} + ((p - q \cdot N_{i-1}) \cdot N_{i-1} - c) \cdot \Delta t \quad (9)$$

Рівняння (8) і (3) або рівняння (9) являють собою найпростішу математичну модель вилову з постійною абсолютною квотою.

Зрозуміло, що, ведучи вилов, бажано не знищити популяцію. То чи можна вести його у такий спосіб, щоб чисельність особин із часом не змінювалась? Питання можна перефразувати: *чи можна вести вилов так, щоб популяція залишалась у рівноважному стані?*

Якщо таке можливо, то значення параметра  $c$  не можуть бути довільними, і знову виникає проблема пошуку таких його значень, які б забезпечували рівновагу системи. Для цього, як ми вже бачили, приріст чисельності  $\Delta N$  за рівнянням (8) має дорівнювати нулеві (саме це і є умовою рівноваги):  $(p - q \cdot N) \cdot N - c = 0$ , звідки

$$c = (p - q \cdot N) \cdot N. \quad (10)$$

Згідно (10) параметр  $c$  є квадратичною функцією чисельності  $N$ . Якщо в координатах  $N, c$  ми побудуємо графік такої залежності – параболу (рис. 4.9), то цей графік перетинатиме горизонтальну вісь  $N$  у точках  $N=0$  і  $N=N_{\text{тр}}=p/q$ , які є нулями функції (доведіть!).

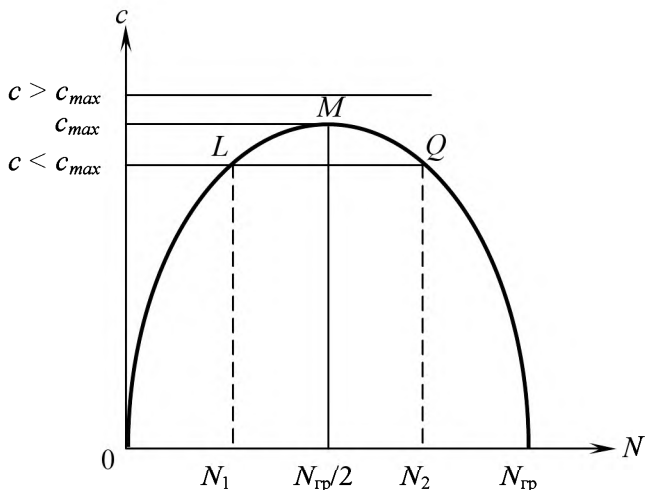


Рис. 4.9

Кожна точка цієї параболи відповідає деякому одному з множини можливих рівноважних станів, тобто дана версія моделі передбачає безліч рівноважних станів.

Щоб упевнитися в цьому, достатньо взяти в якості  $N_0$  будь-яке значення  $N$  з інтервалу  $0 \leq N \leq p/q$  і обчислити відповідне значення  $c$  – кожна така пара чисел  $N$  і  $c$  буде обертати  $\Delta N$  з рівняння (10) на нуль. Максимального значення середня швидкість вилову  $c$  набуватиме при  $N = N_{\text{гр}}/2 = p/2q$ , і воно буде становити (переконайтесь у цьому самостійно):

$$c_{\text{max}} = p^2/4q. \quad (11)$$

Накреслимо тепер лінії  $c = c_{\text{max}}$ ,  $0 < c < c_{\text{max}}$  і  $c > c_{\text{max}}$ . Перша з них перетинає параболу в одній точці (вершині  $M$ ), друга – у двох точках  $L$  і  $Q$  (нижче вершини), а третя не має жодної спільної з параболою точки. З'ясуємо зміст цих трьох випадків.

У відповідності до наведених міркувань змінимо

#### 4.3.1. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 1: додати до вхідних даних параметр  $c$ ;
- у окремій вільній комірці стовпця Е обчислити значення параметру  $c_{\text{max}}$  згідно (7);
- п. 4: приріст чисельності  $\Delta N$  знаходити за виразом (8):

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - c) \cdot \Delta t.$$

#### 4.3.2. Обчислювальний експеримент

1. Уведіть такі дані:  $N_0 = 250$ ;  $p = 5$ ;  $q = 0,01$ ;  $\Delta t = 0,1$  і обчисліть

значення параметра  $c_{max}$ .

*Примітка.* Нехай вас не дивує нібито велике значення  $c_{max} = 625$ , яке помітно перебільшує розмір  $N_0$  популяції. Пригадайте, що параметр  $c$  чисельно дорівнює кількості особин, які вилучаються з популяції за одиницю часу. За нашими даними кожен проміжок  $\Delta t$  становить не 1, а 0,1 і, отже, за такий час із популяції вилучатиметься відповідно менша кількість особин, тобто приблизно 63.

2. Ви, напевно, здогадуєтесь, як має відреагувати модель у випадку, коли  $c > c_{max}$ . Перевірте свій здогад шляхом обчислювального експерименту, наприклад, для введеного з клавіатури  $c=635$ . З таблиці та з графіка (рис. 4.10) одразу ж бачимо, що популяція через деякий час невідворотно гине, адже  $c > c_{max}$  знаходиться поза межами параболи рівноважних станів з рис. 4.9.

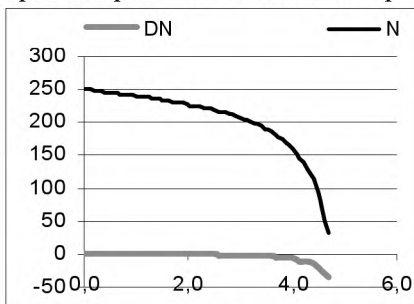


Рис. 4.10

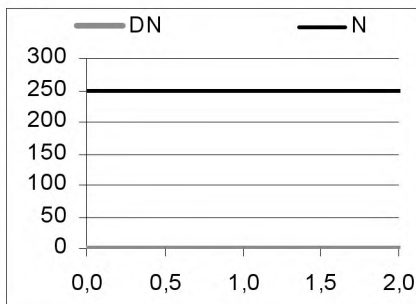


Рис. 4.11

3. Тепер дослідимо стан популяції при максимальній швидкості виліву  $c = c_{max} = 625$  (рис. 4.11).

3.1. Виведемо на екран таблицю результатів і відповідний графік. Чи відповідають вони очікуваням?

Справа в тому, що за даних параметрів у системі із самого початку виникає стан рівноваги. При цьому чисельність популяції підтримується на сталому рівні 250 особин. Біологи додали б тут: “за рахунок внутрішнього саморегулювання”.

Такий рівноважний стан може тривати як завгодно довго, якщо не будуть змінюватися зовнішні умови. Оскільки таких гарантій дати неможливо, то доцільним є дослідження поведінки популяції (фактично, моделі) в умовах незначних відхилень її початкової чисельності відносно рівноважної (у нашому прикладі 250 особин).

Говорячи про рівноважні стани, завжди слід уточнювати питання про стійкість рівноваги. *Якщо за невеликих відхилень від рівноважного стану виникають фактори, що повертають систему у цей стан, то така рівновага зветься стійкою. Якщо ж за незначних відхилень від рівноважного стану система продовжує віддалятися від нього, то така рівновага є нестійкою.*

3.2. Збільшимо початкову кількість особин на 50, тобто нехай

$N_0 = 300$ . Параметр  $c$  залишимо попереднім.

Бачимо, що чисельність популяції врешті знов стабілізується на рівні 250 особин (рис. 4.12).

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	300	$N_0 = 300$	
3	0,1	-3	298	$p = 5$	
4	0,2	-2	295	$q = 0,01$	
5	0,3	-2	293	$c = 625$	
6	0,4	-2	291	$\Delta t = 0,1$	
	...	...	...		

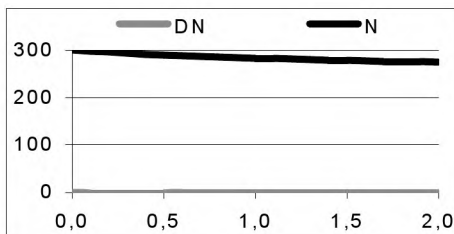


Рис. 4.12

3.3. Принустимо тепер, що за непередбачених обставин чисельність популяції зменшується на 50, тобто становить  $250 - 50 = 200$  особин. Покладемо  $N_0 = 200$  і знов розглянемо таблицю й відповідний графік (рис. 4.13). Виявляється, що через певний час популяція гине.

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	200	$N_0 = 200$	
3	0,1	-3	198	$p = 5$	
4	0,2	-3	195	$q = 0,01$	
5	0,3	-3	192	$c = 625$	
6	0,4	-3	188	$\Delta t = 0,1$	
	...	...	...		

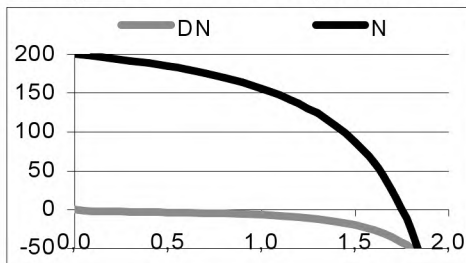


Рис. 4.13

Отже, за максимальної швидкості вилову рівновага системи є нестійкою.

4. Дізнаємось, нарешті, що відбуватиметься за умови  $c < c_{max}$ . У цьому випадку графік функції  $c = const$ , як це було встановлено вище, перетинає параболу у двох точках  $L$  і  $Q$ , симетричних відносно вертикалі, що проходить через точку  $N_{гр}/2$ . На горизонтальній вісі  $N$  відповідають дві точки  $N_1$  і  $N_2$  по обидва боки від точки  $N_{гр}/2 = 250$  і на однакових відстанях від неї:  $N_1 = 200$ ,  $N_2 = 300$ . Обчислимо згідно (8) значення параметра  $c$ , яке має забезпечити рівноважний стан. Одержимо

$$c_1 = (5 - 0.01 \cdot 200) \cdot 200 = 600; \quad c_2 = (5 - 0.01 \cdot 300) \cdot 300 = 600.$$

Перевіримо наявність рівноваги для  $N_0 = N_1 = 200$ , та  $N_0 = N_2 = 300$  при  $c = 600$ .

Уведемо по черзі ці значення до умови і, переглядаючи відповідні комірки таблиці або відповідні графіки (рис. 4.14), впевнюємося в тому, що обидва рази виникає рівновага.

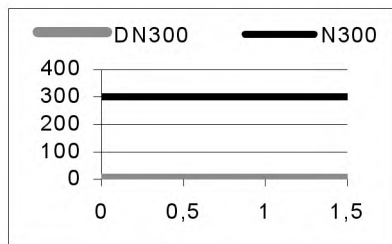
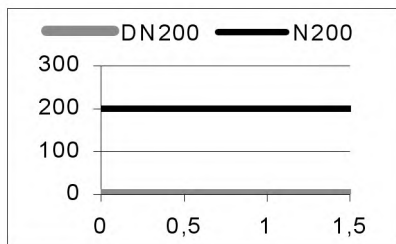


Рис. 4.14

4.2. З'ясуємо, чи є ця рівновага стійкою для  $N_1$ .

Надамо  $N_0$  значення, дещо більшого за  $N_1$ , наприклад, 220. З таблиці можна побачити, що чисельність популяції поступово зростає і повільно наближається до 300, як це зображено на рис. 4.15.

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	220	$N_0 = 220$	
3	0,1	2	222	$p = 5$	
4	0,2	2	223	$q = 0,01$	
5	0,3	2	225	$c = 600$	
	0,4	2	227	$\Delta t = 0,1$	
	...	...	...		

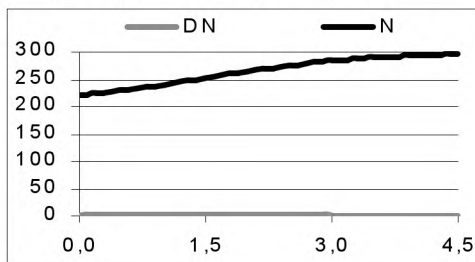


Рис. 4.15

Нехай далі  $N_0$  буде дещо меншим за  $N_1$ , наприклад, 180. Звернувшись до таблиці і графіка (рис. 4.16), бачимо, що чисельність популяції спадає до нуля – популяція гине.

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	180	$N_0 = 180$	
3	0,1	-2	178	$p = 5$	
4	0,2	-3	175	$q = 0,01$	
5	0,3	-3	172	$c = 600$	
6	0,4	-4	168	$\Delta t = 0,1$	
	...	...	...		

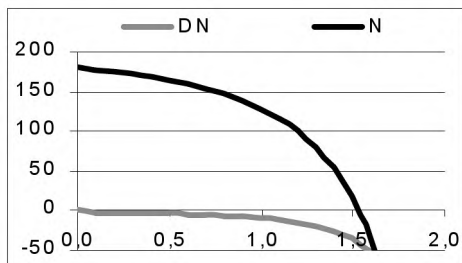


Рис. 4.16

Таким чином, при  $N_0 = N_1 = 200$  особин рівновага системи виявляється нестійкою.

**Вправа.** Виконайте самостійно аналогічні експерименти для другої точки ( $N_0 = N_2$ ) і переконайтесь у тому, що при  $N_0 = N_2 = 300$



особин рівноваги системи стійка.

## Висновки

1. За будь-яких прийнятних значень параметра  $c$  ( $0 < c < c_{max}$ ) стійка рівновага популяції забезпечується тільки для  $N$  з інтервалу  $N_{гр} > N > N_{гр}/2$  (спадаюча гілка параболи за рис. 4.9). Для решти значень  $N$  рівновага є нестійкою, тобто, якщо за непередбачених обставин виявиться, що  $N \leq N_{гр}/2$ , то система перейде у нестійкий стан.

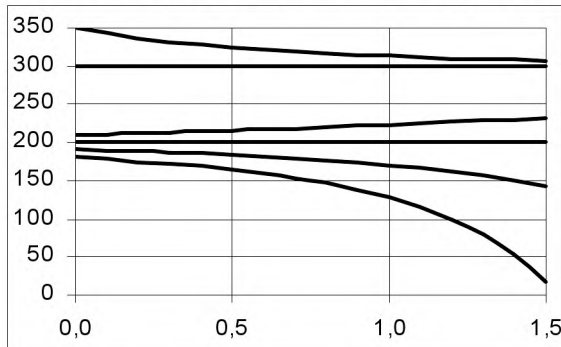


Рис. 4.17

Рис. 4.17 відтворює всі етапи обчислювального експерименту і, таким чином, є їхнім узагальнюючим підсумком.

2. Допустимі значення абсолютної швидкості вилову (абсолютної квоти) можуть бути якими завгодно, аби вони не перебільшували  $c_{max} = p^2/4q$ . Якщо абсолютна квота виявиться більшою за  $c_{max}$ , це завжди вестиме до невідворотного знищення популяції. *Будь-які спроби максимізувати прибуток (кількість вилученої біомаси) небезпечні – популяція може увійти в нестійкий стан і загинути!*

3. Практично прийнятною стратегією слід вважати вилов з абсолютною квотою, меншою за максимальну. При цьому значення рівноважної чисельності  $N$  дещо зросте ( $N > N_{гр}/2$ ) і відповідно зменшиться улов.

Цей факт є найбільш важливим результатом виконаного аналізу. Одночасно він викриває і найбільш істотний недолік даної моделі, який обмежує можливості раціонального вилову.

Виявляється, однак, що можна так організувати справу, щоб отримувати стійкий улов без виявленого обмеження. Про це – далі.

#### 4.4. Удосконалена модель вилову

Як досягти оптимального вилову за умови збереження популяції на деякому стійкому рівні? Насамперед, не призначати жорсткого плану вилову, а вести його з використанням так званого *негативного зворотного зв'язку*. Замість абсолютної швидкості вилову  $s$  введемо *відносну швидкість*  $s$  – виловлювану за одиницю часу долю від наявної чисельності популяції. Її ще називають *відотною квотою*.

У такому разі замість (8) має стати

$$\Delta N = ((p - q \cdot N) \cdot N - s \cdot N) \cdot \Delta t, \quad (12)$$

де вираз  $s \cdot N$  відіграє роль параметра  $s$  з попередньої версії моделі, але тепер абсолютна квота  $s$  пропорційна  $N$  – фактично існуючим ресурсам.

Аналог рівняння (9) в цьому випадку матиме вигляд:

$$N_i = N_{i-1} + ((p - q \cdot N_{i-1}) \cdot N_{i-1} - s \cdot N_{i-1}) \cdot \Delta t \quad (13)$$

Рівняння (12) і (3) або (13) являють собою *удосконалену математичну модель вилову з відновленням чисельності*.

**Вправа.** Доведіть, що нова модель, як і попередня, також передбачає наявність рівноважних станів за умови

$$s = p - q \cdot N. \quad (14)$$

Результат (14) дійсно нескладно одержати формально (аналітично), прирівнюючи  $\Delta N$  до нуля. Якщо ж викладки провести у дещо інший спосіб – з використанням геометричних міркувань, – то можна отримати цікаві результати щодо геометричного унаочнення множини рівноважних станів.

Дійсно,  $\Delta N = 0$  означає

$$(p - q \cdot N) \cdot N - s \cdot N = 0.$$

Останнє рівняння можна замінити системою рівнянь

$$\begin{cases} c = (-q \cdot N + p) N \\ c = s \cdot N \end{cases}$$

Перше з них – це рівняння відомої вже нам з попередньої версії параболи, всі точки якої відповідають множині рівноважних станів у координатах  $N, c$  (рис. 4.9). Друге – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом  $s$ , яка проходить через початок координат. Будь-яка точка перетину цих графіків відповідає одному з можливих рівноважних станів у новій версії моделі (рис. 4.18).

Інтервал значень кутового коефіцієнта  $s$  визначимо з (14):

$$\begin{aligned} s_{\max} \text{ відповідає } N_{\min} = 0 & \Rightarrow s_{\max} = p, \\ s_{\min} \text{ відповідає } N_{\max} = N_{\text{гр}} = p/q & \Rightarrow s_{\min} = 0, \end{aligned}$$

тобто

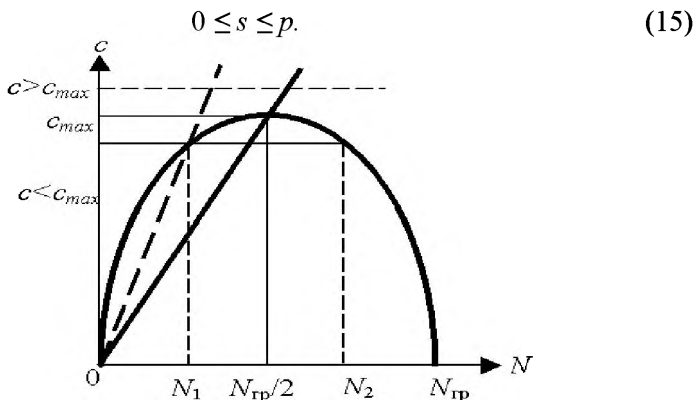


Рис. 4.18

В математичній екології ця остання модель має спеціальну назву – *модель вилову з негативним зворотним зв'язком*.

Зважаючи на важливість поняття зворотного зв'язку, розглянемо його дещо докладніше.

#### 4.4.1. Автоматичне регулювання і зворотний зв'язок

Поняття зворотного зв'язку належить до основних понять кібернетики – науки про управління і зв'язок у природних, технічних і суспільних процесах – і заслуговує на більш докладне висвітлення.

Всі біологічні і більшість складних технічних систем відносять до *саморегульованих систем*, які за непередбачених зовнішніх впливів здатні самостійно підтримувати свій стан або режим функціонування на певному заданому рівні.

Необхідною умовою існування таких систем є зворотні зв'язки. Усяка саморегульована система містить *керуючу (управляючу)* і *виконавчу* частини. Схема найпростішої системи автоматичного керування подана на рис. 4.19.



Рис. 4.19.

Лінією прямого зв'язку відповідно до завдання керуюча частина

надсилає команди до виконавчої. Лінією зворотного зв'язку з виконавчої частини до керуючої надходять відомості про виконання надісланих команд. Наприклад, головний мозок (керуюча частина) надсилає команди м'язам, а по каналах зворотного зв'язку в головний мозок надходять відомості про виконання команд (наприклад, про відповідний руховий акт).

Таким чином, зворотний зв'язок передає до управляючої частини інформацію про результат функціонування системи. Розрізняють позитивні й негативні зворотні зв'язки.

*Позитивні зворотні зв'язки* приводять до вироблення команд, що ведуть до збільшення відхилення системи від початкового стану і зазвичай переводять систему в нестійкий стан.

Найпростішим прикладом системи з позитивним зворотним зв'язком є акустична система, що містить звуковий підсилювач, до входу якого підключено мікрофон, а до виходу – гучномовець. Якщо звуковий сигнал від гучномовця надходитиме до мікрофону, виникатиме добре відомий акустичний ефект у вигляді свисту з наростаючою гучністю та частотою.

За участю позитивних зворотних зв'язків, наприклад, можуть розвиватися деякі хвороби. Так, ослаблення серцевої діяльності може приводити до закупорки судин, що, в свою чергу, викликає ще більше ослаблення серцевої діяльності.

*Негативні зворотні зв'язки* ведуть до зменшення відхилення в системі і тим самим стабілізують режим її функціонування. Наприклад, при перегріві організму підсилюється потовиділення, частішає дихання, що приводить до збільшення тепловіддачі в навколишнє середовище і до зниження температури організму. Класичним прикладом пристрою з негативним зворотним зв'язком є широко відомий механічний відцентровий регулятор, призначений для стабілізації частоти обертання двигунів.

Точне визначення стійкості системи регулювання дав відомий математик і механік О.М. Лянунов: система є стійкою, якщо вона повертається до рівноваги після скільки завгодно малого збурення, причому час процесу повернення необмежений. На практиці часто застосовують більш жорсткі вимоги: система вважається стійкою, якщо вона повертається до стану рівноваги ... за певний час (стійкість в техніці). У теорії автоматичного регулювання кібернетику іноді тлумачать як учення про зворотний зв'язок у складних технічних, біологічних і соціальних системах.

**Вправа.**

1. Чи можна стверджувати, що модель Ферхюльста-Перла містить елемент з негативним зворотним зв'язком? Розгляньте відповідні рівняння.

2. Прокоментуйте рівняння (12) з метою пояснити механізм негативного зворотного зв'язку.

Повертаючись до задачі, з'ясуємо, як створену модель реалізувати на практиці? Насамперед, слід уміти *оцінювати* фактичну чисельність  $N$  популяції у будь-який момент часу. Часто з цією метою вдаються до так званих *контрольних замірів*, у яких визначають середню об'ємну густину популяції  $n_{\text{контр}}$ , тобто кількість особин, що за один раз потрапляють у невід (якщо йдеться про рибу) одиничного об'єму. Якщо популяція рівномірно розподілена у всьому об'ємі  $V$  водоймища, обчислюють далі  $N = n_{\text{контр}} \cdot V$ . Якщо ж розподіл нерівномірний, то  $n_{\text{контр}}$  визначають у різних місцях з наступним усередненням результатів. Схожим способом підраховують кількість дичини у мисливських угіддях, кількість дерев на певній ділянці лісу. Тут  $n_{\text{контр}}$  називають середньою поверхневою густиною і відносять до одиниці площі. При цьому  $N = n_{\text{контр}} \cdot S$ .

Далі отримане значення  $N$  слід було б увести в комп'ютер у якості  $N_0$  і обчислити абсолютну квоту  $c = s \cdot N$ , а потім і вираз  $c \Delta t$ . Проте, якщо ареал (акваторія) проживання популяції настільки великий, що описана процедура моніторингу  $n_{\text{контр}}$  може стати занадто складною внаслідок значних фінансових і часових витрат, то слід буде перейти до більш ефективних засобів розвідки, можливо, й до космічної.

Тепер у відповідності до вдосконаленої моделі вилову самостійно внесіть зміни до алгоритму і розпочинайте

#### 4.4.2. Обчислювальний експеримент

Припустимо, що ми знов плануємо виловлювати максимально можливу кількість риби, тобто будемо вести вилов на рівні  $c_{\text{max}}$ . Тоді значенню для  $s$  відповідатиме точка  $M$  перетину прямої  $c = s \cdot N$  і параболи  $c = pN - q \cdot N^2$ . Ця точка лежить у вершині параболи.

**Вправа.** Доведіть, що цій точці відповідає  $s = p/2$ .

1. В деякій вільній комірці таблиці обчисліть значення параметра  $s$ . Чому той факт, що значення  $s$  помітно менше за  $c_{\text{max}}$ , не повинен викликати подиву?

2. Створіть нову таблицю при  $N_0 = 500$ . Зверніть увагу на те, що після деякого періоду усталення популяція виходить на рівноважний

(стаціонарний) режим – її чисельність перестає змінюватись і залишається на рівні 250 (рис. 4.20). Чому саме 250?

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	-13	488	$p = 5$	
4	0,02	-12	476	$q = 0,01$	
5	0,03	-11	465	$s = 2,5$	
6	0,04	-10	455	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	-9	446		
8	0,06	-9	437		
...	...	...	...		

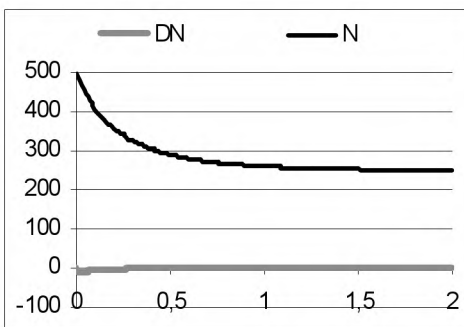


Рис. 4.20

3. У попередній версії результат був таким самим, але там було встановлено, що при  $c = c_{max}$  рівновага виявлялася нестійкою: при випадковому зменшенні чисельності ( $N < N_{rp} / 2$  – ліва гілка параболи) популяція гинула. Дана версія позбавлена такої вади і в цьому легко переконатись.

Уменшіть  $N_0$  до 100, залишаючи решту вхідних даних незмінними. З отриманої таблиці можна дізнатись, що популяція не тільки не гине, а, навпаки, чисельність її починає зростати, аж поки не стабілізується на значенні 200. До речі, як ви гадаєте, що відбуватиметься з популяцією при  $N_0 = 1$ ? І взагалі, чи існує в даній моделі нижня границя для  $N_0$ ? Перевірте свої припущення експериментально і дайте оцінку встановленому факту.

4. До позитивних якостей даної версії моделі слід віднести й те, що ця модель жорстко обумовлює межі можливих значень відносної квоти  $s$  у відповідності з (14). Будь-яка спроба виходу за ці межі призводить до одного з двох наслідків:

4.1. Значенням  $s < 0$  відповідає “від’ємний вилов”, що рівноцінне додаванню риби у водоймище. Проте сказати про зазначену ситуацію словами прислів’я “носити дрова в ліс” – це ще сказати не все. Дійсно, якщо візьмемо  $s = -2,5$ , то одержимо таблицю, з якої добре видно, що чисельність популяції не зростає необмежено (як це було б згідно прислів’я), а стабілізується на рівні 750 (рис. 4.21). Адже продовжує діяти механізм обмеження, пов’язаного з конкуренцією!

**Вправа.** Виконайте експерименти з  $N_0 = 200, 100, 10$  при тому самому  $s = -2,5$ . Зробіть висновки, порівнюючи граничні чисельності

у кожному випадку.

	A	B	C	D	E
1	$t$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0,00	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	13	513	$p = 5$	
4	0,02	12	525	$q = 0,01$	
5	0,03	12	536	$s = -2,5$	
6	0,04	11	548	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	11	559		
8	0,06	11	570		
...	...	...	...		

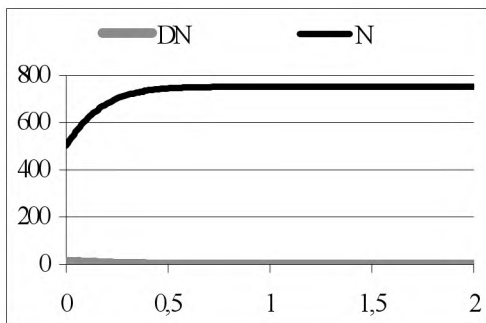


Рис. 4.21

4.2. При  $s > p$  пряма  $c = sN$  і парабола  $c = -qN^2 + pN$  (рис.4.18) не матимуть жодної точки перетину, окрім нецікавого випадку  $N = 0$ . Це означає, що рівноважних станів не існує: вилов перевищує реальні ресурси популяції і вона гине.

Рис. 4.22 подає результат моделювання при  $N_0 = 500$  і  $s = 7$ .

	A	B	C	D	E
1	$T$	$\Delta N$	$N$	Дано:	
2	0,00	0	500	$N_0 = 500$	
3	0,01	-35	465	$p = 5$	
4	0,02	-31	434	$q = 0,01$	
5	0,03	-28	407	$s = 7$	
6	0,04	-25	382	$\Delta t = 0,01$	
7	0,05	-22	360		
...	...	...	...		

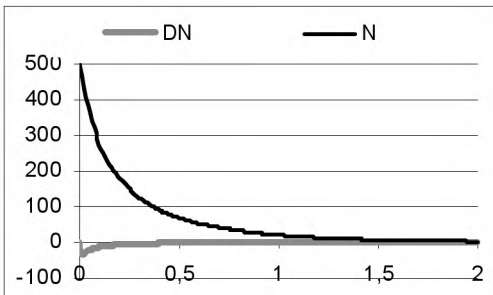


Рис. 4.22

## Висновки

1. Модель вилову з негативним зворотним зв'язком забезпечує на довгий час оптимальний вилов – такий самий, як і при жорсткому плані з постійною абсолютною квотою. При цьому слід зазначити, що велика продуктивність тут неможлива. Однак при жорсткому плані внаслідок випадкових причин система може втратити стійкість і, отже, бути винищеною, а негативний зворотний зв'язок стабілізує її чисельність і відвертає від катастрофи.

2. Моделі, подібні до розглянутої, але помітно складніші, допомагають створювати стратегії ефективного використання відновлю-

ваних природних ресурсів. Адже кінцевою метою управління ресурсами є не стільки плани їхнього використання, скільки правильно обрані *стратегії планування*.

3. Фахівці-екологи стверджують, що побудова сучасних математичних моделей в екології потребує впорядкування й класифікації численної наявної інформації стосовно екосистеми, веде до необхідності заздалегідь планувати збирання даних, а також дозволяє поєднати сукупність фізичних, хімічних і біологічних відомостей та уявлень про окремі процеси, що відбуваються в екологічних системах.



## Глава 5. Модель “хижак–жертва”

### 5.1. Попередні зауваження

Розглянута вище одновидова популяція є надзвичайно спрощеною та ідеалізованою екологічною системою. Насправді ж популяції в природі існують, а точніше, співіснують у вигляді співтовариств різних видів, які перебувають у різноманітних стосунках. Тому цілком природним і логічним є дослідження наступних за складністю моделей співіснування *двох* популяцій. Класифікація таких моделей здійснюється у відповідності до тину міжвидових стосунків:

- модель “хижак–жертва”;
- модель “паразит–хазяїн”;
- модель конкуренції за обмежені спільні ресурси існування тощо.

На початку Глави 2 зазначалося, що математична екологія як наука почала формуватися у 20–30-х роках ХХ століття. Визначальною подією для подальшого розвитку цієї науки стала поява в 1931 р. книги відомого італійського математика, засновника сучасної математичної екології Віто Вольтерра “Математична теорія боротьби за існування”. В цій книзі вперше були систематично розглянуті математичні моделі, що описують відношення між *двома* біологічними видами. Один із розділів книги був присвячений аналізу взаємин між хижаками й жертвами. Ці драматичні відносини ми й покладемо в основу подальшої навчальної роботи.

*Метою дослідження як і в попередній главі, поставимо питання про характер зміни чисельності представників кожного виду з плином часу.*

### 5.2. Постановка задачі і побудова математичної моделі

Нехай у знайомому нам ставку з карасями (жертвами) з’являються щуки (хижаки).

*Припущення 1.* За умови, що хижаки й жертви ізольовані одні від інших, а зовнішні обмеження на ресурси середовища для карасів відсутні, динаміку кожної популяції для достатньо малих проміжків часу  $\Delta t$  можна описати законом Мальтуса, де з метою спрощення всі індекси 1 відносяться до жертв, а індекси 2 – до хижаків.

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1; \quad \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2$$

Тут  $k_1 = \frac{\Delta N_1}{N_1 \Delta t}$  і  $k_2 = \frac{\Delta N_2}{N_2 \Delta t}$  – відповідні відносні прирости чисе-

льності жертв і хижаків за одиницю часу. Знак “–” у другому рівнянні означає, що ізольовані від жертв (їжі) хижаки матимуть від’ємний приріст, тобто їхня чисельність із плином часу зменшуватиметься, і вони вимиратимуть.

Але якщо хижаки й жертви опиняються поруч, зміни чисельності обох популяцій стають взаємозалежними. За цих умов прийmemo

*Припущення 2.* Швидкість приросту жертв має залежати від розмірів популяції хижаків, причому вона буде зменшуватись із зростанням чисельності хижаків. Для швидкості приросту хижаків має справджуватись протилежне: швидкість приросту хижаків збільшуватиметься одночасно зі зростанням чисельності жертв.

Оскільки хижак з’їдає жертву лише при зустрічі з нею, прийmemo

*Припущення 3.* Число зустрічей пропорційне як кількості жертв  $N_1$ , так і хижаків  $N_2$ , тобто добуткові  $N_1 \cdot N_2$ .

Для опису динаміки популяцій В. Вольтерра запропонував таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1 - a_1 N_1 N_2 \\ \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2 + a_2 N_1 N_2. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $N_1, N_2$  – чисельності жертв і хижаків у деякий момент часу;  
 $k_1, a_1, k_2, a_2$  – постійні коефіцієнти.

**Завдання.** Поясніть, чому вирази, пропорційні добутку  $N_1 \cdot N_2$ , входять до рівнянь системи (1) з протилежними знаками?

Перепишемо наведену систему (1) у формі скінчених різниць:

$$\begin{cases} \Delta N_1 = N_1 (k_1 - a_1 N_2) \Delta t \\ \Delta N_2 = -N_2 (k_2 - a_2 N_1) \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (1) або (2) – це математична модель динаміки співіснування двох біологічних видів на основі відносин “хижак – жертва”. У математичній екології вона відома під назвою “*модель Вольтерра – Лотки*”.

В. Вольтерра згадував, що у 1925 році його знайомий розповів цікавий факт. Коли в роки першої світової війни та в перші повоєнні роки інтенсивність промислів на Адріатиці різко скоротилась, то в уловах почали спостерігати помітне зростання відносної долі хижих риб. Щоб пояснити це, Вольтерра й запропонував модель (1).

При формалізації стосунків “хижак – жертва” приймемо далі

*Припущення 4.* Коефіцієнти моделі ( $k_1$ ,  $a_1$ ,  $k_2$ ,  $a_2$ ) не залежать від того, яку саме частину кожної популяції ми бажаємо описати. Таку популяцію називають *просторово однорідною*.

У випадку ж неоднорідного розподілу хижаків і жертв може скластися ситуація, коли частина хижаків знаходяться дуже далеко від жертв ( $a_2$  малий), а решта – поблизу ( $a_2$  великий). В такому разі опис кожної популяції системою рівнянь (1) стає неможливим. Отже, будемо вважати, що *коефіцієнти моделі є сталими в просторі і не змінюються з плином часу*.

Далі виявилось, що *модель Вольтерра–Лотки не має точних аналітичних розв'язків*, тобто виразити  $N_1(t)$  і  $N_2(t)$  через відомі елементарні функції неможливо. Тому єдине, що залишається в означеній ситуації – це скористатися чисельним розв'язуванням. Для нас цей факт є принциповим: адже в попередніх задачах (моделях) аналітичні розв'язки існували, проте ми наполегливо й планомірно освоювали чисельний метод. Виявляється, що марно.

То ж підготуємо таблицю за таким зразком:

	A	B	C	D	E	F	G
1	$t$	$N_1$	$N_2$	$\Delta N_1$	$\Delta N_2$	Дано:	
						$k_1 =$	
3						$k_2 =$	
4						$a_1 =$	
5						$a_2 =$	
6						$N_{01} =$	
7						$N_{02} =$	
8						$\Delta t =$	
...	...	...	...	...	...		

Комірки другого рядка цієї таблиці (для  $t = 0$ ) матимуть такий уміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=\$G\$6
C2	=\$G\$7
D2	=B2*(\$G\$2-\$G\$4*C2)*\$G\$8
E2	=-C2*(\$G\$3-\$G\$5*B2)*\$G\$8

Заповнимо третій рядок, який далі скопіюємо у наступні  $n$  рядків, де  $n = t_{\text{модельовання}} / \Delta t$ :

комірки	формули
A3	=A2+\$G\$8
B3	=B2+D2
C3	=C2+E2
D3	=B3*(\$G\$2-\$G\$4*C3)*\$G\$8
E3	=-C3*(\$G\$3-\$G\$5*B3)*\$G\$8

Тепер можна розпочинати

### 5.3. Обчислювальний експеримент

1. Уведемо такі вхідні дані:  $k_1 = 5$ ;  $k_2 = 0,001$ ;  $a_1 = 0,002$ ;  $a_2 = 10$ ;  $N_{01} = 15000$ ;  $N_{02} = 2500$ ;  $\Delta t = 0,01$ . З метою отримати декілька періодів візьмемо кількість рядків таблиці  $n = 402$ .

2. Результати моделювання подані на рис. 5.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$T$	$N_1$	$N_2$	$\Delta N_1$	$\Delta N_2$	Дано:	
2	0,00	15000	2500	0	125	$k_1 =$	5
3	0,01	15000	2625	-38	131	$k_2 =$	10
4	0,02	14963	2756	-77	137	$a_1 =$	0,002
5	0,03	14886	2893	-117	141	$a_2 =$	0,001
6	0,04	14769	3034	-158	145	$N_{01} =$	15000
7	0,05	14611	3179	-198	147	$N_{02} =$	2500
8	0,06	14413	3326	-238	147	$\Delta t =$	0,01
...	...	...	...	...	...		

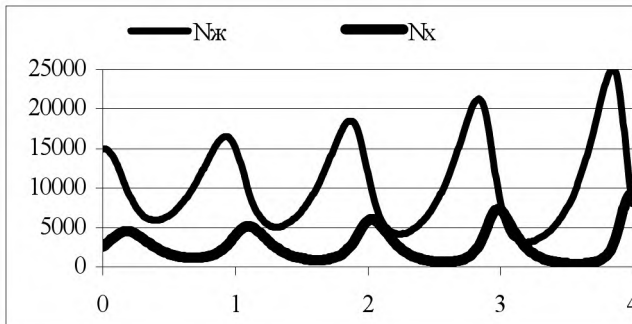


Рис. 5.1

3. З таблиці й графіків на рис. 5.1 видно, що зміни чисельності, як хижаків, так і жертв, є коливаннями із майже однаковими періодами (переконайтесь за таблицею) та зростаючими амплітудами.

### Завдання

1. Чим, на вашу думку, обумовлене зростання амплітуд?
2. Як ви вважаєте, чому фази цих коливань не співпадають?

4. Дослідимо вплив параметрів моделі на перебіг процесу. Загальноприйнятим тут є такий підхід: усі параметри моделі, крім одного, фіксуються, а незафіксованому параметру надають різних значень. Нехай для початку таким параметром буде  $N_{01}$ .

4.1. Зменшимо  $N_{01}$ , наприклад, від 15000 до 13000.

Чи змінився помітним чином період коливань?

4.2. Стосовно амплітуд коливань кількості хижаків і кількості жертв зазначимо, що тепер вони стали меншими.

Для того, щоб мати можливість *проаналізувати* результати впливу  $N_{01}$  на амплітуди цих коливань, будемо зменшувати  $N_{01}$  із певним кроком, наприклад, 2000, тобто надаватимемо  $N_{01}$  значень 15000, 13000, 11000, 9000, 7000, 5000. При цьому спостерігаємо, що амплітуди спочатку спадають (до  $N_{01} = 11000$ ), а потім зростають (для  $N_{01} > 9000$ ). Одразу виникає два питання:

а) при якому значенні  $N_{01}$  амплітуди коливань чисельності хижаків і жертв набувають мінімумів;

б) якими є ці мінімальні значення?

Узявши  $N_{01} = 10000$ , ми одразу одержуємо відповідь і, крім того, принципово важливий результат: *модель Вольтерра – Лотки передбачає рівноважний стан* (рис. 5.2).

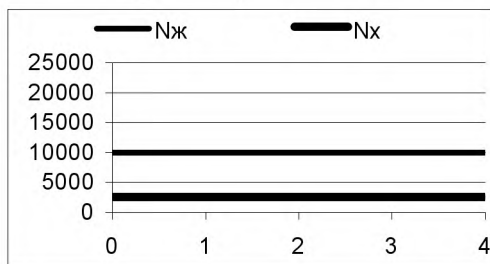


Рис. 5.2

Тут слід зазначити, що нам просто пощастило. Якби значення параметра  $N_{01}$ , що відповідає рівноважному стану, знаходилось не в точці 10000, то пошуки його шляхом обчислювальних експериментів могли б виявитись досить тривалими.

Після цього слід було б зафіксувати деяке значення параметру  $N_{01}$ , а експериментувати з параметром  $N_{02}$ .

Та виявляється, що в цьому немає ніякої необхідності: адже ми маємо вже певний досвід аналітичного пошуку рівноважних станів і можемо ним скористатись. Оскільки рівноважному стану відповідає  $\Delta N_1 = 0$  і  $\Delta N_2 = 0$ , то з (2) одразу видно, що нулю повинні дорівнювати вирази в дужках:  $k_1 - a_1 N_2 = 0$  і  $k_2 - a_2 N_1 = 0$ , звідки для будь-якого, в тому числі й початкового моменту  $t = 0$ , маємо

$$N_{02} = \frac{k_1}{a_1} \quad \text{і} \quad N_{01} = \frac{k_2}{a_2}. \quad (3)$$

Залишається виконати перевірку:

$$N_{02} = \frac{5}{0.002} = 2500 \quad \text{і} \quad N_{01} = \frac{10}{0.001} = 10000.$$

Отже, рівноважні стани визначаються тільки значеннями параметрів  $k_1$ ,  $a_1$ ,  $k_2$  і  $a_2$  – коефіцієнтів моделі.

При одержанні розв'язку (3) передбачалося, що чисельності  $N_1$  і  $N_2$  не змінюються з часом ( $\Delta N_1 = 0$  і  $\Delta N_2 = 0$ ). Це один із багатьох розв'язків – *стаціонарний*.

5. Залишився не з'ясованим той факт, що періоди коливань чисельності хижаків і жертв, по-перше, однакові між собою і, по-друге, ці періоди не залежать від значень, що їх набувають  $N_1$  і  $N_2$  у ході своєї зміни.

Звернемо тут увагу на наступне. Модель Вольтерра – Лотки була нами взята в готовому вигляді і виявилася досить складною. Коли моделі складали ми, то йшли від найпростіших версій до все більш ускладнених, а отже й більш узагальнених. Такий метод побудови міркувань (від часткового до загального) зветься *індуктивним*. Часто, однак, для аналізу складної залежності виявляється доцільним іти в протилежному напрямі – у бік спрощення моделі (системи рівнянь), тобто розглядати окремі спрощені випадки. Відповідний метод міркувань (від загального до конкретного) зветься *дедуктивним*. До речі, в нашій ситуації це чи не єдиний шлях щось зрозуміти, не вдаючись до чисельних методів.

5.1. То ж принустимо, що система “хижак – жертва” якимось чином (не має значення, яким саме) виявилась поблизу рівноваги. При цьому чисельності хижаків і жертв мало відрізняються від відповідних стаціонарних значень.

Отже, нехай

$$N_1 = \frac{k_2}{a_2} + n \quad \text{і} \quad N_2 = \frac{k_1}{a_1} + x,$$

де  $n$  та  $x$  малі у порівнянні з  $N_1$  і  $N_2$ .

Якщо ці вирази підставити в (1) і знехтувати добутком  $nx$  внаслідок його малості у порівнянні з рештою членів, то одержуємо

$$\begin{cases} \frac{\Delta n}{\Delta t} = -k_2 \frac{a_1}{a_2} x; \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} = k_1 \frac{a_2}{a_1} n. \end{cases} \quad (4)$$

Уведемо нову змінну  $v = k_1 \frac{a_2}{a_1} n$ . Після відповідної заміни система (1) набуває такого спрощеного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v; \\ \frac{\Delta v}{\Delta t} = -k_1 k_2 x. \end{cases} \quad (5)$$

5.2. Якби ми нічого не знали про модель Вольтерра–Лотки, і перед нами було б поставлене питання: “Що саме описує система рівнянь (5), де  $k_1$  і  $k_2$  – деякі постійні числа?”, то рано чи пізно у цій системі ми б, напевно, впізнали рівняння, що описують рух вагтяжу на пружині за умови, що  $x$  – зміщення вагтяжу від положення рівноваги,  $v$  – швидкість вагтяжу і вираз  $k_1 \cdot k_2$  дорівнює відношенню жорсткості пружини до маси вагтяжу. Звідси випливає, що система (5) має такий самий розв’язок, як і задача про малі коливання вагтяжу на пружині – пружинного маятника.

Збіг рівнянь, що описують коливання пружинного маятника і чисельність особин у системі “хижак – жертва” дозволяє стверджувати, що кількості хижаків і жертв повинні змінюватись за гармонічним законом із періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 k_2}}. \quad (6)$$

Якщо далі пригадати, що коливання швидкості маятника випереджають коливання його координати на чверть періоду (на  $\pi/2$  рад), то слід зробити висновок, що коливання чисельності хижаків також мають випереджати коливання чисельності жертв на чверть періоду.

5.3. Таким чином, розв’язком системи рівнянь Вольтерра–Лотки є коливання чисельності хижаків і жертв, зсунуті одне віднос-

но одного за фазою, з періодом  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_{cx} \cdot k_{пж}}}$ . Звісно, коли амплітуда

цих коливань зростає, вони перестають описуватися законом косинуса або синуса, тобто перестають бути гармонічними, що видно з графіків на рис. 5.1, проте період залишається незмінним.

#### Вправа

1. Поясніть, чому період коливань не залежить від  $N_1$  і  $N_2$ .
2. Обчисліть період  $T$  згідно (6) і порівняйте одержане значення з тим, що дає таблиця на рис. 5.1, на якій зображено не менше трьох періодів. За результатами порівняння зробить висновки.

5.4. Завершимо експериментальне дослідження моделі Вольterra–Лотки побудовою й аналізом графіків зміни чисельності обох популяцій в залежності від часу згідно спрощеної системи (5). Будемо мати на увазі, що система (1) автоматично переходить до спрощеного вигляду за умови, визначеної у п. 5.1, а саме, коли початкові кількості особин кожного виду  $N_{01}$  і  $N_{02}$  трохи відрізняються від своїх стаціонарних значень (10000 і 2500 відповідно). Для цього візьмемо для них такі, наприклад, значення:  $N_{01} = 10040$  і  $N_{02} = 2520$ .

Результат, поданий на рис. 5.3, виявляється надзвичайно невізразним (перевірте!). Причиною цього є те, що на кожній з координатних осей ми вирішили показати несумірні пари чисел 10000 і 40 та 2500 і 20.

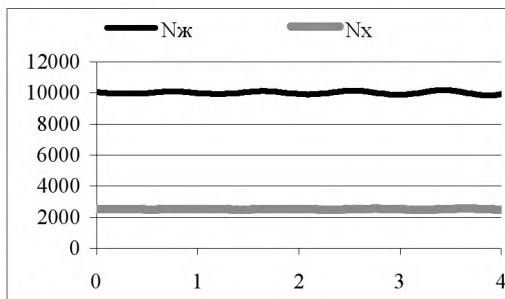


Рис. 5.3

Чисельне розв'язування системи (2) привело до висновку, що чисельності популяцій обох видів із плином часу здійснюють складні коливання з наростаючою амплітудою (рис. 5.1). У спрощеній системі (5) ці коливання набувають гармонічного характеру, але безпосе-



редньо побачити цей факт досить складно, тому що результат на графіку, поданому на рис. 5.3, виявляється не переконливим.

Наступний текст доцільно вивчати після розгляду теми “Фазова площина” з Глави 7.

Щоб отримати переконливу інформацію про досліджуваний процес, зобразимо його на фазовій площині в координатах  $N_1$ ,  $N_2$ , що, як ми бачили, є аналогами зміщення  $x$ , і швидкості його зміни  $v$ , тобто введемо на екран графіки залежності  $N_2 = f(N_1)$  – рис. 5.4.

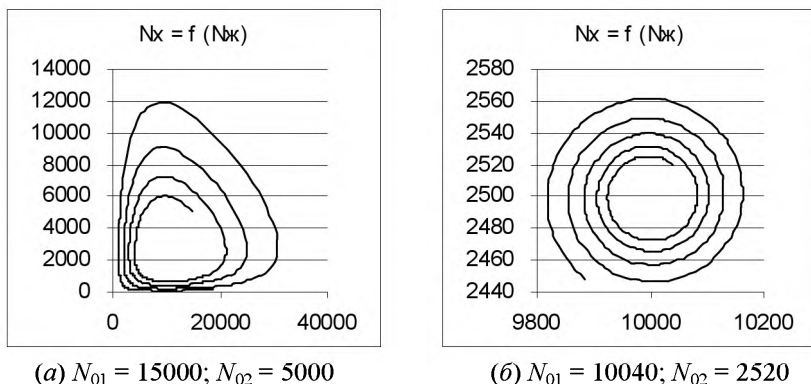


Рис. 5.4

З рис. 5.4а видно, наступне:

- процес дійсно є коливальним;
- амплітуда коливань постійно зростає.

Згущення траєкторії зображуваної точки біля координатних осей обумовлене тим, що величини  $N_1$  і  $N_2$  за своєю природою є додатними числами і не можуть набувати від’ємних значень, а тому вони “вимушені” ґрунтуватись у вузьких смугах біля осей.

У порівнянні з рис. 5.1 ніяких принципово нових відомостей тут немає, а от фазовий портрет процесу, поданий на рис. 5.4б, повністю усуває недоліки, перелічені при аналізі рис. 5.3.

### Вправа

1. Проаналізуйте рис. 5.4б.
2. За рис. 5.1 з’ясуйте, чи утворюють послідовності максимумів функцій  $N_1 = N_1(t)$  і  $N_2 = N_2(t)$  прогресії. Якщо так, то які: арифметичні чи геометричні?
3. І все ж погодьтесь, не дуже віриться, що розглядувана нами система “хижак – жертва” є таким своєрідним генератором незату-

хаючих коливань!

3.1. Якщо ж із цим погодитись, то як у такому разі в системі реалізується позитивний зворотний зв'язок, необхідний для переходу системи в режим генерації?

3.2. Висловіть свої міркування про джерело енергії, за рахунок якої можуть здійснюватись такі коливання (до того ж зі зростаючими амплітудами).

3.3. За яких умов, на вашу думку, може відбутись загасання цих коливань?

6. Запропонуйте додаткові версії моделі, пов'язані з виловом жертв (карасів) та жертв і хижаків (карасів і щук) одночасно, розробіть план таких досліджень і реалізуйте його.

## Висновки

1. Модель Вольтерра–Лотки передбачає процеси, що відбуваються лише в просторово однорідних системах і нічого не говорить про можливий розвиток подій у випадках просторових неоднорідностей. Тому вона, хоч і дає до деякої міри адекватний розв'язок, але є досить грубою і дозволяє утворити тільки “усереднене розуміння” того, як із плином часу змінюється кількість елементів системи.

2. У методі моделювання широко використовують два принципово різні підходи.

При першому підході створюється математична модель процесу і виконується аналітичне або чисельне її розв'язування, яке за можливості супроводжується графічними побудовами. Тут комп'ютер використовується здебільшого як високоефективний обчислювальний засіб. Саме у такий спосіб ми здійснили описане вище дослідження.

Другий підхід – *комп'ютерне імітаційне моделювання* складної системи. Воно дозволяє одержати більш докладні уявлення про процеси (в моделі Вольтерра – Лотки було б урахування просторових неоднорідностей). Але зазвичай такий підхід потребує значно складніших алгоритмів і більших витрат часу й пам'яті. Розв'язуючи подібні задачі, дослідники активно використовують якісний аналіз, моделюють систему у спеціалізованих сучасних середовищах на спеціалізованих комп'ютерах, розробляють “правила гри” і розмірковують над тим, які з цих “правил” найбільш повно відповідають реальній системі. У цих моделях дуже часто характеристикам процесу надають випадкових значень, і такі моделі прийнято називати *імітацій-*

ними.

Докладніше про імітаційні моделі йтиметься далі у Главі 11.

3. Виявляється, що з неменшим успіхом моделлю Вольтерра–Лотки можна скористатись і для з'ясування проблем, пов'язаних із кінетикою (тобто розвиток процесу в часі) хімічних та ядерних реакцій. Тут частинки реагентів унаслідок дифузії рухаються, зустрічаються, вступають у реакції, в результаті яких вони “гинуть”, продукуючи нові частинки і т.п. Розмноженню риб відповідає, наприклад, ланцюгова ядерна реакція, їхній загибелі – поглинання частинок (нейтронів) у реакторі. Для розв'язання таких задач зазвичай складають рівняння, схожі на рівняння системи (1) і дістають попередні грубі й усереднені дані – відомості про виучуваний процес.

Схожі результати з'являються і при вивченні багатьох інших конкуруючих взаємообумовлених процесів.

## Глава 6. Вікова модель одновидової популяції

### Вступ

У цій главі буде розглянута математична модель одновидової популяції, яку в 1945 р. запропонував американський біолог П. Леслі. Її привабливість, на наш погляд, полягає в тому, що в цій моделі був здійснений цікавий і нетрадиційний на той час підхід до моделювання динаміки популяції.

Традиційне розв'язання такої задачі, як ми бачили у попередніх главах на прикладах моделі Т. Мальтуса та її ускладнених версій, передбачає складання рівняння для швидкості зміни загальної чисельності особин за достатньо малий проміжок часу і наступне аналітичне або чисельне розв'язування одержаного рівняння

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = f(N).$$

Вікова модель П. Леслі в цьому відношенні має принципову відмінність – в її основу покладено розподіл популяції за групами у відповідності з віком особин. Ця модель визначає правила, за якими змінюються характеристики, що описують еволюцію окремих груп і популяції в цілому. При цьому її словесний опис легко формалізується, тобто його нескладно подати у вигляді математичних співвідношень. Цією моделлю в математичній екології було започатковано новий клас так званих *матричних дискретних моделей*.

### 6.1. Найпростіша версія моделі

Для вивчення змін чисельності, що відбуваються в популяції із плином часу, розглянемо популяцію, розподілену за віковими групами. Цей розподіл стосовно *продуктивної частини популяції* заданий такими *Правилами*:

*Правило 1.* Першу групу складають всі особини віком до 1 року, другу – особини другого року життя і т.д. Нехай до першої групи входять  $N_1$  особин, до другої –  $N_2$ , ..., до  $j$ -ї –  $N_j$ , де  $j = 1, 2, \dots$  – вік особин (номер групи).

*Правило 2.* Смертність спрощено можна врахувати у такий спосіб: особини вимирають (гинуть) після перебування у  $k$ -тій віковій групі, де  $k$  – максимальний вік ( $k = j_{max}$ ).

Загальна кількість особин у популяції становить

$$\Sigma N_j = N_1 + N_2 + \dots + N_k.$$

*Правило 3.* Для кожної  $j$ -ї вікової групи встановлюється коефіцієнт народжуваності  $B_j$  з таким змістом: річний приплід, обумовлений присутністю  $j$ -ї вікової групи з чисельністю  $N_j$ , становить  $B_j \cdot N_j$ . Коефіцієнт  $B_j$  не обов'язково має бути цілим числом, більшим 1. Зокрема, в залежності від біологічного виду і умов життя можливі навіть випадки, коли  $0 \leq B_j \leq 1$  (докладніше далі). Річний приплід для усієї популяції підраховується наприкінці року і становить

$$B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k.$$

*Правило 4.* Особини, котрі в  $i$ -у році належали до  $j$ -ї вікової групи, у наступному  $(i+1)$ -у році переходять до  $(j+1)$ -ї групи, а особини, котрі належали до  $k$ -ї групи, за *Правилом 2* гинуть.

Потомство поточного року – це особини, яким у наступному році виповниться 1 рік, а тому наступного року вони мають увійти до складу першої вікової групи.

Формалізуємо *Правило 4*:

$$N_{ij} = N_{(i+1)(j+1)}, \quad (*)$$

де  $i = 1, 2, \dots, t$  – номер року (рядок таблиці),  $j = 1, 2, \dots, (k-1)$  – номер вікової групи (стовпець таблиці).

Таким чином у  $i$ -му й у наступному  $(i+1)$ -му році згідно з новим розподілом загальна чисельність  $\Sigma N_j$  популяції становитиме:

$$\begin{array}{ll} i\text{-й рік:} & \Sigma N_j = \underbrace{B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k}_{N_1} + \underbrace{N_1 + N_2 + \dots + N_{k-1}}_{\text{всі решта груп, починаючи з другої}} \\ (i+1)\text{-й рік:} & \Sigma N_j = \underbrace{N_1}_{\text{перша вікова група (приплід за попередній рік)}} + \underbrace{N_2 + N_3 + \dots + N_k}_{\text{всі решта груп, починаючи з другої}} \end{array}$$

Припустимо, що в деякій популяції кожна продуктивна особина протягом року дає приплід, рівний 1. При цьому половину загальної кількості щорічного потомства складають особини чоловічої статі, половину – жіночої (непродуктивна і продуктивна частини популяції). Припустимо далі, що необхідно вести підрахунок лише продуктивної частини популяції. Якого значення в такому разі слід надати коефіцієнту народжуваності  $B_j$ ?

Порівняйте свої міркування з нашими.

Якби треба було підраховувати всіх, а не лише продуктивних представників потомства, то для коефіцієнта народжуваності згідно умови слід було б прийняти  $B_j = 1$ . Оскільки продуктивна частина потомства складає половину його загальної чисельності, то фактично  $B_j = 0,5$ .

На рис. 6.1 наведена схема, що ілюструє механізм розподілу популяції за віковими групами при переході у наступний рік.

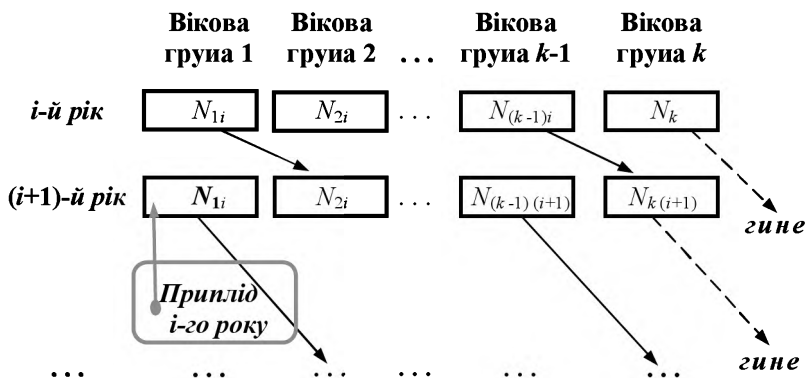


Рис. 6.1

Окремо слід звернути увагу на питання про час і ось чому.

1. З біологічної точки зору час існування живої істоти складається з періодичних повторень життєво важливих процесів – репродуктивних циклів, що завершуються появою потомства. Максимальна кількість циклів (від одного до декількох) та їх тривалість залежать від біологічного виду. Тому цілком логічно одиницею виміру часу вважати тривалість одного репродуктивного циклу, а вік істоти визначати за кількістю таких циклів. Отже, стосовно продуктивної частини популяції можна сказати, що певну вікову групу в моделі Леслі утворюють особи, що пройшли однакову кількість репродуктивних циклів.

2. До жодного *Правила*, як і до жодної формули моделі час не входить як аргумент. Він фігурує тут лише як лічильник (порядковий номер, індекс) циклів – тактів “життя” популяції, але для визначеності тривалість циклу має умовну назву “1 рік”.

**Вправа**

1. Які значення може приймати коефіцієнт народжуваності  $B_1$ ?
2. Чи має сенс поширювати подібні міркування на людину?

### 6.1.1. Постановка задачі

Вважаючи заданими

- механізм (правила) розподілу популяції за віковими групами;
- $N_{01}, N_{02}, \dots, N_{0k}$  – початковий кількісний склад вікових груп;
- $B_1, \dots, B_k$  – коефіцієнти народжуваності для відповідних груп;

–  $k$  – максимальний вік особин,  
визначати чисельність кожної вікової групи і загальну чисельність  
популяції на протязі кожного з наступних  $t$  років, де  $N_1, N_2, \dots, N_k$ ;  
 $k, t$  – додатні цілі числа;  $B_1, \dots, B_k$  – додатні дійсні числа.

*Примітка.* Той факт, що в моделі Леслі фігурують коефіцієнти народжуваності на відміну від коефіцієнтів розмноження з попередніх моделей, дає привід думати, що вона пристосована більше до опису динаміки чисельності класу ссавців (тварин). Саме для їхнього розмноження застосовують термін “народжуваність”.

### 6.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Поклавши  $k = 6$ , створити електронну таблицю за зразком:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Рік ( $i$ )	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$\Sigma N_j$	Дано:	
2										Початкові чисельн.:
3									$N_{01} =$	
...									...	
8									$N_{06} =$	
9										Коефіцієнти
10										народжуваності:
11									$B_1 =$	
...									...	
16									$B_6 =$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...		

2. Заповнити перший рядок таблиці іменами змінних.

3. Увести імена вхідних даних і знак “=” у стовпець “Дано:” –  $N_{01} =, \dots, N_{06} =; B_1 =, \dots, B_6 =$ .

4. Заповнити другий рядок початковими значеннями змінних:

а) покласти  $i = 1$ ;

б) проставити для  $N_{11}, \dots, N_{16}$  відповідні значення посиланнями  $=\$J\$3, \dots, =\$J\$8$  на комірки, що містять початкові значення  $N_{01}, \dots, N_{06}$ ;

в) загальна чисельність популяції на кінець року (“ $\Sigma N_j$ ”):

$$\Sigma N_j = N_{11} + \dots + N_{16}.$$

5. Заповнити третій рядок таблиці

а)  $i = 2$ ;

б) за *Правилом 3* обчислити річний приплив минулого року, який є значенням першої вікової групи в даному році:

$$N_{21} = B_1 \cdot N_{11} + B_2 \cdot N_{12} + \dots + B_6 \cdot N_{16};$$

в) у відповідності до (\*) – *Правила 4* – для решти комірок цього рядка  $N_{22}, \dots, N_{26}$  увести відповідно:

$$N_{22} = N_{11}; N_{23} = N_{12}; \dots, N_{26} = N_{15};$$

г) обчислити загальну чисельність популяції на кінець року:

$$\Sigma N_j = N_{21} + \dots + N_{26}.$$

5. Повторювати п. 4 для  $i = 3, 4, \dots$  копіюванням всіх формул другого рядка в 11 наступних рядків.

Згідно пп. 1–5 уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа	коментарі
з B2 по G2	=J\$3, ..., =J\$8	– зі стовпця “Дано:”
H2	=СУММ(B2:G2)	– у стовпець “ $\Sigma N_j$ ”
B3	=B2*J\$11+C2*J\$12+D2*J\$13+E2*J\$14+F2*J\$15+G2*J\$16	Формули рядка 3 від B3 по H3 включно
з C3 по G3	=B2, ..., =F2	копіювати
H3	=СУММ(B3:G3)	у наступні 11 рядків

### 6.1.3. Обчислювальний експеримент (тестування)

1. Виконаємо тестування на прикладі деякої поки що вигаданої популяції, в якій особини мають максимальний вік 6 років:

– кількість вікових груп  $k = 6$ ;

– початкові чисельності у групах нехай становлять:

$$N_{01} = 10, N_{02} = 13, N_{03} = 12, N_{04} = 15, N_{05} = 11, N_{06} = 14;$$

– коефіцієнтам народжуваності  $B_i$  надамо таких значень:

$B_1 = 0$  (вважаємо, що особини першого року життя не здатні до відтворення);

$$B_2 = 0,25; B_3 = 0,3; B_4 = 0,4; B_5 = 0,35; B_6 = 0,25.$$

*Зауваження 1.* Обрані значення початкових чисельностей  $N_{01}, \dots, N_{06}$  та змінних  $k$  і  $B_j$  взяті довільно і без посилань на будь-які наукові джерела. Проте для тестування механізму роботи моделі такий підхід є цілком прийнятним.

Будемо відслідковувати динаміку чисельності популяції протягом  $t = 15$  років, отже таблиця буде мати 16 рядків (рис. 6.2).

*Перевірте:*

- чи виконується правило переходу у наступний рік, зображене схемою на рис. 4.1?
- чи правильно обчислюються щорічні суми?
- чи правильно обчислюється припілд хоча б у початковому й наступному роках?



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$P_{ik}(i)$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$\Sigma N_j$	Дано:	
2	1	10	13	12	15	11	14	75	Початк. чисельн.	
3	2	20	10	13	12	15	11	81	$N_{01}=$	10
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
8	7	29	26	22	21	19	20	138	$N_{06}=$	14
9	8	33	29	26	22	21	19	151	Коефіцієнти	
10	9	36	33	29	26	22	21	168	народжуваності:	
11	10	41	36	33	29	26	22	188	$B_1=$	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
16	15	71	64	57	51	45	41	329	$B_6=$	0,25

Рис. 6.2

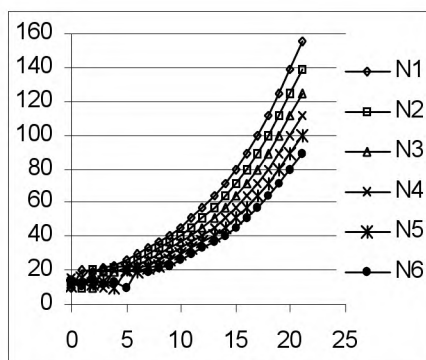


Рис. 6.3а

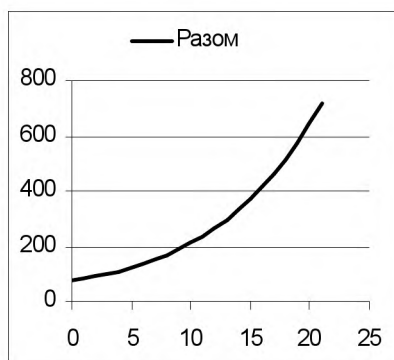


Рис. 6.3б

Виведемо на екран графіки, що відображують динаміку чисельності кожної з вікових груп  $N_1$ – $N_6$  (рис. 6.3а) і динаміку загальної чисельності  $\Sigma N_j$  популяції (рис. 6.3б).

Аналіз графіків показує, що чисельність кожної окремої групи, як і загальна чисельність популяції після декількох коливань починає

монотонно зростати, набуваючи вигляду, що дуже нагадує аналогічний графік для моделі Мальтуса – показникову функцію виду

$$N = N_0 e^{kx}.$$

Перевірте зазначений факт у такий спосіб: обчисліть відношення будь-якого члена послідовності  $\Sigma N_j$ , починаючи з того, який вже не коливається, до наступного. Якщо значення таких відношень виявляться однаковими, то це й стане прямим доказом того, що послідовність є геометричною прогресією, тобто дійсно являє собою показникову функцію. З цією метою виконайте вправу.

### Вправа

1. Після стовпця Н (перед стовпцем І) створіть новий стовпець. Він стане стовпцем І, а колишній стовпець І стане тепер стовпцем К.

2. В комірку І3 уведіть формулу (вираз) для обчислення відношення загальної чисельності популяції  $\Sigma N_j$  попереднього і наступного років.

3. Скопіюйте цю формулу вниз у решту вільних комірок нового стовпця.

5. Забезпечте у новому стовпці точність до третього десяткового знаку і прогляньте результати.

6. Зробіть висновок про характер залежності загальної чисельності особин  $\Sigma N_j$  від кількості років  $i$ .

7. Вилучіть стовпець Н.

*Показникова функція є дуже поширеною для багатьох природних, технічних, економічних і соціальних процесів.*

8. Порівняйте моделі Мальтуса і Леслі: яка з них, на вашу думку, є більш загальною, тобто містить у собі іншу як окремий випадок?

9. Виконайте самостійно тестування для випадку, коли початкові чисельності у всіх вікових групах за винятком останньої (шостої), дорівнюють нулю, наприклад,  $N_{01} = N_{02} = \dots = N_{05} = 0$ , а  $N_{06} = 20$  і проаналізуйте результати.

### 6.2. Поліпшення моделі Леслі

Одним із суттєвих недоліків розглянутої версії моделі є край спрощене уявлення (припущення) про смертність. Модель не враховує того очевидного факту, що в реальних популяціях життєва стійкість (здатність до виживання) особин дуже часто буває пов'язана з їхнім віком і може бути різною для різних вікових груп.

Модель можна зробити більш реалістичною, якщо для всіх вікових груп, окрім коефіцієнтів народжуваності  $B_j$ , додатково ввести коефіцієнти виживання  $S_j$ :  $S_1, \dots, S_k$ , де  $0 < S_j \leq 1$  ( $j = 1, 2, \dots, k-1$ ). Це означатиме, що коли у поточному ( $i$ -му) році  $j$ -та вікова група має чисельність  $N_j$ , то у наступному ( $i+1$ )-у році, ставши  $(j+1)$ -ю групою, вона матиме чисельність  $S_j \cdot N_j$ . Оскільки вік особин не може перебільшувати  $k$  років, то  $S_k = 0$ .

Потомство поточного року не належить ні до якої групи, а перейде до першої у наступному році. Для врахування можливих втрат уведемо  $S_0$  – коефіцієнт виживання потомства. Тоді кількість особин у першій віковій групі становитиме

$$N_{(i+1)1} = S_0 \cdot (B_1 \cdot N_1 + B_2 \cdot N_2 + \dots + B_k \cdot N_k).$$

### Вправа

1. Як слід розуміти  $S_1 = 1$ ?
2. Чи згодні ви з тим, що до  $S_k = 0$  не буде потреби звертатись у подальшому?

*Зауваження 2.* Коефіцієнти виживання  $S_j$  так само, як і коефіцієнти народжуваності  $B_i$ , повинні братися на основі багаторічних спостережень за популяціями певного виду. Їхні значення є усередненими, оскільки у окремих ідивідів вони дещо відрізняються і являють собою, строго кажучи, численну сукупність випадкових величин. Закономірності таких сукупностей вивчає спеціальна дисципліна – *математична статистика*.

Встановлено, наприклад, що

- для ящірок характерна зовсім слабка залежність  $S_j$  від  $j$ , тобто добре виконуються наближені рівності  $S_1 \approx S_2 \approx \dots$ ;
- спадання  $S_j$  з віком характерне для слонів і китів;
- максимум  $S_j$  для серединних значень  $j$  мають корови;
- у край мале значення  $S_j$  для початкових значень  $j$  спостерігається у деяких видів риб, але  $B_j$  в них набувають великих значень.

Тепер схема механізму розподілу за віковими групами при переході у наступний рік набуває вигляду, показаного на рис. 6.4.

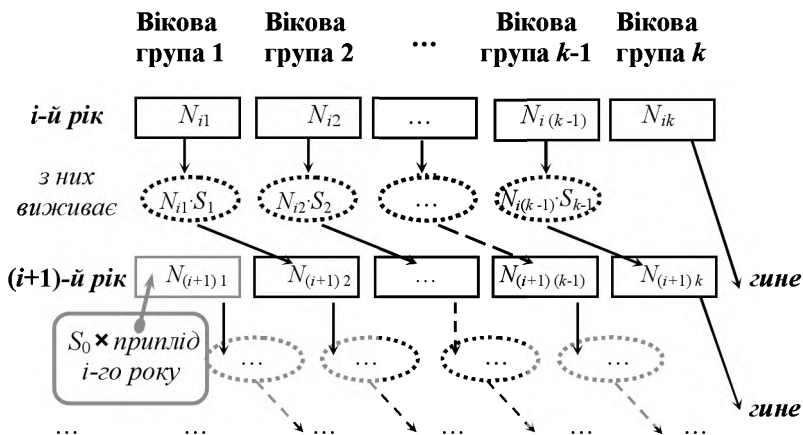


Рис. 6.4

Таким чином, вважаючи, що додатково задані  $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$ , знову розглянемо задачу розрахунку чисельності окремих вікових груп і популяції в цілому через  $t$  років.

### 6.2.1. Практична задача

Дослідимо динаміку чисельності популяції за новою моделлю на прикладі наступної практичної задачі.

**Задача.** У тваринницькому господарстві займаються розведенням великої рогатої худоби за наступною стратегією.

1. Основну масу тварин у стаді складають корови, тобто продуктивна частина популяції.

2. Із щорічного приплоду забирають бичків, яких у подальшому утримують окремо від основного стада і після першого року життя здають на м'ясо, тобто однорічні бички утворюють одну із складових м'ясної продукції господарства.

3. Другу частину м'ясної продукції складають корови останньої вікової групи, які внаслідок пов'язаного з віком зниження молочної продуктивності також вилучаються на м'ясо.

4. Умови утримання худоби забезпечують продуктивність тварин і їхнє виживання на досить високому рівні (від  $S_0 \approx 0,9$  до  $S_0 \approx 1$ ).

Господарство планує придбати і в подальшому розводити нову, більш продуктивну породу корів. Існує можливість придбати 20 тварин будь-якої з  $k$  вікових груп. При цьому вартість тварини пропорційна її молочної продуктивності.

*Тварин якої вікової групи було б найбільш доцільно придбати, щоб забезпечити максимальну чисельність стада через 10 років?*

#### 6.2.1.1. Формалізована постановка задачі

Очевидно, що сформульована у такий спосіб задача не має прямого відношення до моделі Леслі, оскільки в її умові відсутні основні параметри моделі – коефіцієнти народжуваності  $B_j$  і виживання  $S_j$ . Проте відома одна, на перший погляд, несуттєва деталь – біологічний вид тварин. Насправді ж, як ми побачимо, цього факту виявиться цілком достатньо, щоб побудувати придатну модель і довести розв'язання задачі до кінця, тобто одержати змістовну відповідь.

З практичних спостережень відомо, що для корів молочна продуктивність із віком спочатку деякий час зростає, а далі спадає. Схожим способом (*і це принципово важливо!*) поведуть себе і коефіцієнти виживання  $S_j$ . Отже, між молочною продуктивністю і коефіцієнтами виживання існує деяка відповідність.

Зв'язок між величинами, який суттєво ускладнюється наявністю багатьох невідомих випадкових факторів, на відміну від функціонального, називають статистичним або *кореляцією*. Якщо такий зв'язок існує, то говорять, що величини корелюють між собою. У даному

випадку *молочна продуктивність корелює з коефіцієнтами виживання*, тобто за зміною в часі коефіцієнтів виживання можна судити про відповідну зміну молочної продуктивності. Орієнтовні значення цих коефіцієнтів не складно уточнити з бесід із фахівцями. Заздалегідь відомо тільки, що  $S_k = 0$  у відповідності до п. 3 умови задачі.

Продовжимо міркування:

- група, яку збираються придбати, складатиметься лише з корів (продуктивного поголів'я);

- кожна з тварин, починаючи з другої вікової групи, протягом року дає приплід, рівний 1;

- тварини першого року життя не здатні до відтворення,  $B_1 = 0$ ;

- в загальному річному приплоді кількість тварин обох статей з достатнім ступенем точності будемо вважати розподіленою порівну.

У відповідності з п. 2 умови задачі коефіцієнти народжуваності для всіх вікових груп, окрім першої, слід прийняти однаковими:

$$B_1 = 0; B_2 = B_3 = \dots = 0,5.$$

*Формалізація умови цієї задачі зведеться до її переформулювання в термінах моделі Леслі.*

Будемо вважати заданими:

- механізм розподілу популяції за віковими групами при переході у наступний рік (рис. 6.4);

- $N_{0j}$  – початкову чисельність групи нових тварин (номер  $j$  цієї групи має задовольняти умові  $j \leq k$ );

- $B_1 = 0, B_2 = B_3 = \dots = B_k = 0,5$  – коефіцієнти народжуваності для відповідних вікових груп;

- $S_1, S_2, \dots, S_k$  – коефіцієнти виживання кожної з вікових груп,  $S_k = 0$ ;

- $S_0$  – коефіцієнт виживання потомства;

- $k$  – максимальний вік особин.

*Знайти таке значення  $j$ , при якому загальна чисельність нової популяції через  $t = 10$  років буде максимально можливою.*

( $k, N_{0j}, t$  – натуральні;  $B_2, \dots, B_k, S_2, \dots, S_{k-1}$  – додатні дійсні числа;  $B_1 = 0, S_k = 0$ ).

#### 6.2.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

- п. 2: до вхідних даних додати  $S_0, \dots, S_5$ :

в таблиці з'являться комірки K18–K22 для нових даних; комірки J18–J22 тимчасово залишити пустими.

- п. 4.2:

$$N_{i+2} = N_{(i-1)+1} \cdot S_1, \dots, N_{i+6} = N_{(i-1)+5} \cdot S_5, \text{ тобто зазнають змін фор-}$$

мули переходів у наступні вікові групи у комірках C3–G3.  
Уміст комірок таблиці стане таким:

комірка	формули	коментарі
C3	=B2*\$K\$18	<i>Формули рядка 3 від B3 по H3 включно копіювати у наступні 11 рядків</i>
D3	=C2*\$K\$19	
E3	=D2*\$K\$20	
F3	=E2*\$K\$21	
G3	=F2*\$K\$22	

Оскільки настає відповідальний момент роботи, доцільно здійснити контрольне порівняння вмісту решти комірок третього рядка:

комірка	формули	коментарі
B3	=B2*\$K\$11+C2*\$K\$12 +D2*\$K\$13+E2*\$K\$14 +F2*\$K\$15+G2*\$K\$16	<i>Підрахунок річного приросту для формування першої групи <math>N_{12}</math></i>
H3	=СУММ(B3;G3)	<i>Для стовпця <math>\Sigma N_j</math></i>
I3	=B3+G3	<i>Для стовпця “М’ясо”</i>

#### 6.2.1.3. Обчислювальний експеримент

1. Нехай для визначеності  $k = 6$ . Це значення дещо занижене проти реального (7–8 років) і приймається таким лише з міркувань зменшення трудомісткості при роботі з моделлю. Як далі стане зрозуміло, на результатах дослідження суттєво це не позначиться.

2. Уведемо до таблиці нові вхідні дані:

$$S_1 = 0,95; S_2 = 0,96; S_3 = 0,97; S_4 = 0,98; S_5 = 0,96; S_6 = 0.$$

За цими даними найбільш життєстійкими, а, отже, й найбільш продуктивними (проте і найбільш коштовними) виявляються особи *ни четвертої вікової групи*. Тому почнемо саме з них і введемо

$$N_{04} = 20;$$

$$N_{01} = N_{02} = N_{03} = N_{05} = N_{06} = 0;$$

$$B_1 = 0; B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 = 0,5.$$

Виконаємо копіювання третього рядка у наступні 11 рядків.

Значення загальної чисельності тварин через 10 років виявляється рівним 71.

3. Дотримуючись головного принципу моделювання “А що відбудеться, якщо...?”, подивимось, як відреагує наша модель на інше рішення:

*придбати 20 тварин третьої вікової групи.*

Після введення нових даних ( $N_{03} = 20$ ;  $N_{04} = 0$ ) дещо несподівано отримуємо більше значення загальної чисельності тварин через зазначений час – 89.

Не заглиблюючись поки що у причини цього факту, спробуймо

провести експеримент із тваринами другої вікової групи.

Результат ще вищий – 100! (рис. 6.5)

Експерименти з тваринами першої, п'ятої та шостої вікових груп приводять до помітно менших результатів (*перевірте!*):

по першій – 74; по п'ятій – 51; по шостій – 29.

### Вправа

1. Виконайте відповідні експерименти і переконайтесь у справедливості наведених результатів.

2. Дослідіть по роках кількість голів скота, що йде у м'ясну продукцію.

3. Після стовпця “ $\Sigma N$ ” вставте у таблицю новий стовпець “М'ясо”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<b>Рік</b>	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$\Sigma N_i$	<b>М'ясо</b>	<b>Дано:</b>	
2	<b>I</b>	0	20	0	0	0	0	20	0	<b>Початк. чисельн.:</b>	
3	<b>2</b>	9	0	18	0	0	0	27	9	$N_{01}=$	0
4	<b>3</b>	8	8	0	18	0	0	34	8	$N_{02}=$	20
5	<b>4</b>	11	7	7	0	17	0	43	11	$N_{03}=$	0
6	<b>5</b>	14	10	7	7	0	16	54	30	$N_{04}=$	0
7	<b>6</b>	18	12	9	6	7	0	52	18	$N_{05}=$	0
8	<b>7</b>	15	15	11	9	6	6	63	22	$N_{06}=$	0
9	<b>8</b>	21	13	14	11	9	6	74	27	<b>Коефіцієнти</b>	
10	<b>9</b>	24	18	12	13	11	8	86	31	<b>- народжуваності:</b>	
11	<b>10</b>	<b>28</b>	<b>20</b>	<b>17</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>10</b>	<b>100</b>	<b>38</b>	$B_1=$	0
12	<b>11</b>	32	24	19	16	11	12	115	45	$B_2=$	0,5
13	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$B_3=$	0,5
14										$B_4=$	0,5
15										$B_5=$	0,5
16										$B_6=$	0,5
17										<b>- виживання:</b>	
18										$S_0=$	0,9
19										$S_1=$	0,86
20										$S_2=$	0,92
21										$S_3=$	0,96
22										$S_4=$	0,98
23										$S_5=$	0,93

Рис. 6.5

4. Доведіть, що до комірок нового стовпця потраплятимуть суми  $N_{i1} + N_{i6}$  – така собі компанія з молодих бичків і застарілих корівок

5. Переконайтеся, що значення чисельності у цьому стовпці добре узгоджується з результатами експерименту за пп. 1–3.

Результати виконаної вправи підтверджують правильність прийнятого рішення про доцільність придбання продуктивних тварин саме другої вікової групи. В цьому разі м'ясна продукція господарства так само, як і продуктивне поголів'я, будуть максимально можливими.

### 6.2.2. Аналіз результатів

1. Насамперед, дамо пояснення того результату, що найбільш ефективним є придбання тварин другого року життя. Дійсно, тварини цього віку вже здатні до відтворення і при цьому проходять найдовший (по відношенню до решти вікових груп) життєвий шлях. Виявлений факт заздалегідь передбачити складніше, ніж при застосуванні даної моделі, тому що він не такий вже й очевидний. Отже, у відповідності до сформульованих у моделі припущень *максимально вигідним виявляється придбання найбільш молодих тварин, здатних до відтворення*. Тут максимальна вигода містить три складові:

- по-перше, 20 тварин другої вікової групи коштують дешевше, ніж 20 тварин четвертої групи;
- по-друге, вони забезпечать максимальну кількість поголів'я через 10 років;
- по-третє, максимальною буде і загальна м'ясна продукція.

**Запитання.** Чи можна стверджувати, що коливання чисельності кожної вікової групи і загальної чисельності популяції на перших етапах обумовлені поганим доглядом за тваринами?

Після обрання оптимальної стратегії ми зіштовхуємося з проблемою обмеженості максимально можливої кількості особин, яку здатне утримувати господарство. В даному випадку ця кількість дорівнює 100 ( $28+20+17+12+13+10$ ). Якщо господарство має можливість утримувати таку кількість поголів'я, воно залишає її. Але через рік кількість особин перевищить 100. В такій ситуації найпростішою стратегією буде просте вилучення надлишкових особин із кожної вікової групи. З рис. 4.5 видно, що через 11 років чисельність поголів'я стане 115 ( $32+24+19+16+11+12$ ). З допомогою щорічних вилучень з відповідних груп можна встановлювати таку саму кількість, як і після попереднього 10-го року.



### **Вправа**

1. Здійсніть на папері щорічні вилучення. Яка при цьому виникає проблема?

2. Яке розв'язання цієї проблеми пропонуєте Ви?

Вилучені особини можуть бути реалізовані або через продаж іншим господарствам для подальшого розведення, або через поповнення м'ясної продукції даного господарства.

Обмеження чисельності тварин, про яке щойно йшлося, здійснюється людьми, а тому є штучним. Які ж реальні обмеження можуть мати місце в природних умовах, тобто для вільних популяцій?

### **6.3. Модель Леслі з природними обмеженнями**

Чисельність вільних популяцій ссавців для різних їх видів на певних ареалах може змінюватися з часом у широких межах. В основі цих змін знаходяться різноманітні і не завжди зрозумілі причини. Біологи вважають, що відмінність у чисельності виникає в результаті зміни інтенсивності народжуваності і смертності особин (в термінах моделі Леслі – зміни коефіцієнтів народжуваності  $B_j$  і коефіцієнтів виживання  $S_j$ ), які здебільшого обумовлюються наступним:

- зміною у достатку кормів та їх доступності;
- захворюваннями, що за певних умов набувають характеру різноманітних епізоотій (епідемій у тварин);
- коливаннями погодних умов (тривалих і несвоєчасних приморозків чи опадів у вигляді снігопадів та дощів або ж посух);
- наявністю хижаків тощо.

Масові захворювання не тільки призводять до безпосередньої загибелі тварин, але й знижують плодовитість, а також полегшують переслідування жертви хижаками і роблять тварин менш стійкими до згубної дії несприятливих умов. Фахівцями встановлено існування в популяціях внутрішніх механізмів регулювання чисельності, суть яких проявляється в залежності від ситуації: зростання коефіцієнтів розмноження при різкому зменшенні чисельності або зниження цих коефіцієнтів внаслідок різкого зростання чисельності (густини популяції). Для ряду видів зміна чисельності має деяку, хоч і не строго витриману періодичність. Тривалість періоду залежить від виду й умов існування.

Вивчення динаміки змін чисельності популяцій з метою її прогнозування (мисливські угіддя, рибні запаси, хвороби тварин) ускла-

дноється тим, що зазначені причини виявляються взаємопов'язаними і взаємообумовленими.

Спростимо таку задачу настільки, щоб до її розв'язування можна було застосувати модель Леслі. Припустимо, що коли на кінець року чисельність вільної популяції виявляється більшою за деяке фіксоване число  $L$ , то внаслідок надмірно великого скупчення особин коефіцієнти виживання  $S_j$  у наступному році зменшуються в  $Q$  разів. Причиною зменшення, зокрема, може стати загострення конкуренції за їжу та простір (як результат обмеженості ареалу, на якому мешкає популяція) або епізоотія, що призведе до збільшення смертності.

Вважаючи  $L$  і  $Q$  заданими ( $L$  – натуральне;  $Q \geq 1$  – дійсне), знов повернемося до задачі розрахунку загальної чисельності популяції через  $t$  років.

### 6.3.1. Алгоритм роботи з моделлю

п. 2: – до вхідних даних додати значення величин  $L$  і  $Q$ ;

п. 4.2:– для визначення моменту зміни коефіцієнтів виживання  $S_j$  треба кожного разу при переході до наступної групи перевіряти, чи перевищує загальна чисельність популяції  $\Sigma N_j$  на кінець попереднього  $(i-1)$ -го року значення параметра  $L$ .

Якщо це так, то замість коефіцієнтів виживання  $S_j$  використовувати вирази  $S_j/Q$ , інакше  $S_j$  залишити без змін.

**якщо**  $\Sigma N_{j(i-1)} > L$

**то** поділити  $S_j$  на  $Q$

**інакше** поділити  $S_j$  на 1 (залишити без зміни)

**все**

Уміст комірок має бути таким:

комірки	Формули	коментарі
B2, ..., G2	=J\$5, ,=J\$10	
H2	=СУММ(B2:G2)	
B3	=J\$20*(B2*J\$13+C2*J\$14+D2*J\$15+E2*J\$16+F2*J\$17+G2*J\$18)	Формування першої групи з потомства
C3	=B2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$21/J\$3;J\$21)	Усі формули третього рядка від A3 по H3 копіювати вниз у наступні рядки
D3	=C2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$22/J\$3;J\$22)	
E3	=D2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$23/J\$3;J\$23)	
F3	=E2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$24/J\$3;J\$24)	
G3	=F2*ЕСЛИ(H2>J\$2;J\$25/J\$3;J\$25)	
H3	=СУММ(B3:G3)	

### 6.3.2. Обчислювальний експеримент

Уведемо початкові дані (стовпець “Дано.”):

- нехай, як і раніше, кількість вікових груп  $k = 6$ ;
- початкові чисельності у групах  $N_{0j}$  нехай будуть дорівнювати  $N_{01} = 21, N_{02} = 18, N_{03} = 16, N_{04} = 13, N_{05} = 10, N_{06} = 6$ ;
- коефіцієнти народжуваності  $B_j$  розподілимо у такий спосіб:  $B_1 = 0,6; B_2 = 0,65; B_3 = 0,75; B_4 = 0,85; B_5 = 0,8; B_6 = 0,6$ ;
- коефіцієнти виживання прийнемо рівними  $S_0 = 0,6; S_1 = 0,7; S_2 = 0,75; S_3 = 0,8; S_4 = 0,82; S_5 = 0,7$ .
- покладемо параметри  $L = 80, Q = 3$ .

Виконаємо копіювання третього рядка в наступні 20 рядків.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	$P_{ik}$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$\Sigma N_j$	Дано:	
2	1	21	18	16	13	10	6	84	$L = 80$	
3	2	35	5	5	4	4	2	55	$Q = 3$	
4	3	21	25	4	4	3	2	59	Початк. чисельності:	
5	4	23	15	19	3	3	2	65	$N_{01} = 21$	
6	5	26	16	11	15	2	2	73	$N_{02} = 18$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	9	23	15	18	4	3	2	66	$N_{06} = 6$	
11	10	27	16	11	15	3	2	74	Коефіцієнти	
12	11	31	19	12	9	12	2	85	- народжуваності:	
13	12	35	7	5	3	2	3	55	$B_1 = 0,6$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
18	17	35	7	5	3	2	3	56	$B_6 = 0,6$	
19	18	22	25	5	4	3	2	60	- виживання:	
20	19	24	15	19	4	3	2	67	$S_0 = 0,6$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Рис. 6.6

1. Огляд таблиці на рис. 6.6 дає можливість побачити, що після чергового виконання умови  $N_{i-1} > L$  відбувається повторення значень чисельності в кожній віковій групі і в популяції в цілому, до того ж ці повторення мають майже періодичний характер. При заданих вище параметрах період коливань (за таблицею) становить приблизно 5 одиниць часу. Це означає, що саме через такий строк відбувається відновлення загальної чисельності та чисельності у окремих вікових групах.

Наочне підтвердження зазначених закономірностей можна одержати, якщо вивести на екран відповідний графік залежності загальної чисельності від часу (рис. 6.7), з якого добре видно, що ці майже періодичні коливання є до того ж пилкоподібними.

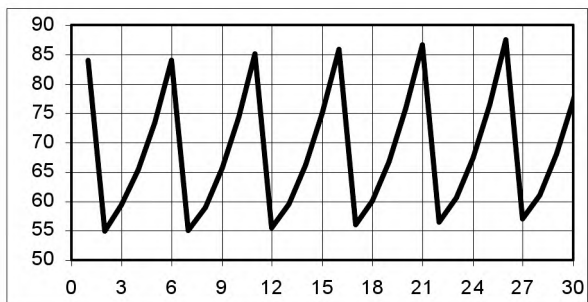


Рис. 6.7

2. Уважио розглядаючи цей графік, можна помітити тенденцію до повільного зростання чисельності у кожному наступному періоді. З метою дослідження цієї тенденції збільшимо час моделювання на порядок. Для цього скопіємо останній рядок формул у наступні 300 рядків і побудуємо новий графік (рис. 6.8).

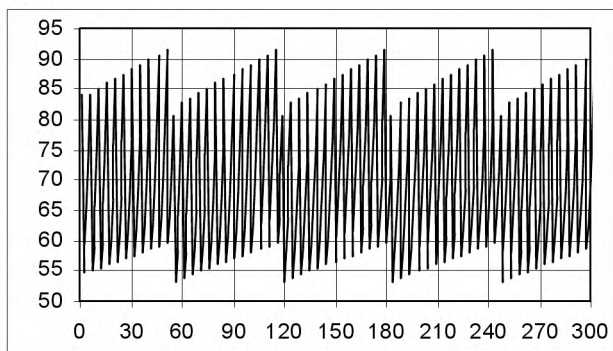


Рис. 6.8

Не дуже очікуваний результат! Виявляється, що окрім коротко-часного майже п'ятирічного періоду досліджувана модель має ще й довготривалий період.

#### Вправа

1. З графіка видно, що тривалість цього періоду близько 50. Встановіть за таблицею його більш точне значення.

2. Від чого залежить тривалість обох цих періодів? Відповідь на таке питання потребує спеціального експериментального і теоретичного дослідження, оскільки загальна чисельність популяції є складною функцією від усіх вісімнадцяти аргументів зі стовпця “Дано:”, які в різній мірі впливають на тривалість обох періодів. У цьому мо-

жиа переконатись, змінюючи параметри моделі у стовпці J.

## **Висновки**

1. Модель Леслі дозволяє зазирнути у внутрішнє життя популяції лише в моменти завершення репродуктивних циклів і нічого не повідомляє про поступові зміни чисельності, що відбуваються впродовж циклу, оскільки в ній закладено *фіксований* часовий інтервал. Працюючи з моделлю, ми уподібнюємося до клієнта ощадного банку: якщо відсотки приросту капіталу розраховується банком на рік, то банк виконує перерахування тільки за цілу кількість років. Ця модель і подібні до неї належить до класу *дискретних моделей*.

2. М'ясомолочне стадо, яке розглядається в *Задачі*, стосовно м'ясної продукції є відновлюваним ресурсом. Розв'язування задачі звелось до прогнозованого пошуку оптимальної стратегії промислового використання цього ресурсу, що становить одну з актуальних проблем сучасної популяційної екології.

3. Розглянутий у *Задачі* механізм щорічного підтримання загальної чисельності продуктивного стада на сталому рівні забезпечує рівновагу кількісного розподілу тварин за віковими групами. Фактично це механізм регулювання з негативним зворотним зв'язком: видалення тварин відбувається в залежності від їх наявної кількості. Таким самим є і механізм природного обмеження для вільної популяції. Схожа ситуація нами вже була досліджена у попередній главі при вивченні удосконаленої моделі промислового рибальства.

4. Чи можна на практиці скористатися результатами проведеного у *Задачі* дослідження? Питання риторичне і фактично зводиться до іншого. Що краще: протягом десятиліть проводити натурні експерименти і нагромаджувати досвід чи скористатися прогнозом, одержаним на основі моделі? Основне утруднення тут полягає в тому, щоб виявити, наскільки обґрунтованими є припущення, покладені в основу моделі, наскільки сама модель є несуперечливою і, головне, наскільки вона є адекватною досліджуваному об'єкту.

5. Факт існування довгострокового періоду в третій версії моделі виявився непередбаченим. Проте виявити його вдалося досить швидко лише завдяки можливості *графічного* подання інформації за наслідками обчислювального експерименту.

## **Розділ 4. Комп'ютерне моделювання з фізики:** **механіка**

Спостережувані нами механічні рухи оточуючих тіл – це результат їхньої взаємодії з іншими тілами, своєрідна гра діючих на них сил. То ж давайте поспостерігаємо за цією грою – адже правила її, якими в механіці є закони збереження і закони Ньютона, нам відомі.

З усього розмаїття механічних рухів ми розглянемо приклади рухів тіл під дією *змінних сил*, а саме таких, що залежать від координат (сила пружності, сила всесвітнього тяжіння) та від швидкості (сила опору, аеродинамічна сила). Пропоновані приклади виходять за межі шкільного підручника фізики, і тому для вас – школярів – являють досить незвичні об'єкти для дослідження. Головна особливість, що відрізняє їх від переважної більшості задач на вивчення рухів за шкільними підручниками, полягає в тому, що *під дією змінних сил тіла набувають змінних прискорень*. За таких умов швидкість руху вже не є лінійною функцією часу, а змінюється у більш складний спосіб. Унаслідок цього точний розрахунок координат, прискорення й швидкості тіла у будь-який момент часу засобами елементарної математики стає неможливим. Проте сучасні комп'ютерні технології дозволяють це утруднення подолати.

Першим об'єктом дослідження оберемо *коливальний рух тіла на пружині з урахуванням опору середовища*. При цьому спочатку розглянемо силу опору у вигляді сили в'язкого, а далі – сухого тертя. Тестування математичної моделі такого руху проведемо для випадку дії на тіло лише однієї сили – сили пружності. Закономірності зазначеного руху вивчаються в шкільному курсі фізики і нам добре відомі.

Одночасно з тестуванням обговоримо важливе питання про підвищення точності комп'ютерних обчислень.

Наступним об'єктом вивчення стане *рух під дією сили всесвітнього тяжіння* (п'ять фрагментів, серед яких 1) задачі про рух супутника навколо планети або рух планети навколо Сонця, 2) рух компонентів у системах подвійних зірок і багато іншого), 3) перевірка законів руху планет засобами обчислювального експерименту, 4) дослідження закону тяжіння для довільного показника степеня у формулі закону, 5) вигляд планетних орбіт у геліоцентричній та геоцентричній системах відліку). На відміну від попереднього прикладу, де сили діють вздовж однієї лінії і де для опису руху цілком вистачить однієї координатної вісі, в даному випадку знадобляться вже дві

координатні вісі, оскільки тут рух відбуватиметься у площині, і всі вектори (сили тяжіння, з якими взаємодіятимуть тіла, відповідні прискорення й швидкості) матимуть дві проекції.

Третьою стане задача про *рух паперового літачка у повітряному середовищі* під дією трьох сил – сили тяжіння, сили опору і піднімальної сили. Цей рух відбуватиметься у вертикальній площині, і кожна з діючих сил також матиме дві проекції.

Сюжетною основою останньої моделі є *задача про м'яку посадку на Місяць*, що свого часу (у 80-і роки – пору масового поширення в нашій країні програмованих мікрокалькуляторів) обійшла сторінки ряду науково-популярних журналів.

Як і раніше, дослідження кожного об'єкту будемо викопувати у такій послідовності:

1. Здійснимо фізичний аналіз процесу і постановку задачі. З цією метою на основі деяких спрощуючих припущень формалізуємо умову задачі, яку супроводимо пояснювальним рисунком, тобто складемо змістову (концептуальну) модель досліджуваного явища.

2. Від змістової моделі перейдемо до моделі математичної, тобто запишемо у вигляді математичних співвідношень залежності між величинами, що характеризують досліджуваний рух.

3. Складемо алгоритм роботи з моделлю.

4. Проведемо обчислювальний експеримент.

5. На основі аналізу результатів обчислювального експерименту дамо необхідні інтерпретації та сформулюємо висновки.

Середовищем для моделювання залишатимуться електронні таблиці.

## Глава 7. Механічні коливання

### 7.1. Рух тіла під дією сили пружності

На змашений горизонтальний стержень надінемо кулю, що може ковзати вздовж нього, і циліндричну пружину, один кінець якої закріпимо на стержні, а другий – на кулі (рис. 7.1).



Рис. 7.1

На початку спостереження пружина не деформована і куля перебуває у спокої. Відведемо кулю у нове положення й відпустимо. Здійснивши декілька коливань зі спадаючою амплітудою, куля нарешті зупиниться у положенні рівноваги.

#### 7.1.1. Аналіз процесу (явища)

При малому зміщенні кулі від положення рівноваги пружина деформується і в ній виникає сила пружності  $F_{np}$ , яка за законом Гука пропорційна величині деформації  $\Delta l$  і напрямлена до положення рівноваги (тобто проти деформації):

$$F_{np} = -k\Delta l,$$

де  $k$  – жорсткість пружини.

Сила пружності діє на кулю й на пружину і надає прискорення обом цим тілам. Розгляд загального випадку коливань тіла (кулі) масою  $m_1$  під дією пружини масою  $m_2$  являє собою зовсім непросту задачу. Вдамося до ідеалізації і прийнемо деякі спрощуючі припущення.

*Припущення 1.* Пружна є однорідною, тобто фізичні властивості її однакові вздовж усієї довжини. Це дозволяє вважати жорсткість  $k$  пружини величиною сталою.

*Припущення 2.* Будемо вважати пружину невагомою. Ця вимога задовольняється, якщо маса пружини набагато менша за масу вантажу ( $m_{пружини} \ll m_{вантаж}$ ), тобто всю масу системи будемо вважати зосередженою в кулі.

*Припущення 3.* Оскільки куля – тверде тіло, то всі її точки рухатимуться однаково і описуватимуть однакові за формою траєкторії, тому рух всієї кулі опишемо, як рух однієї точки – її центра мас.

Для рухів тіл у в'язких середовищах сила опору залежить від



швидкості руху тіла. За таких умов її називають *силою в'язкого тертя*. В нашому прикладі вона обумовлюється ковзанням кульки вздовж *змащеного* стержня. З експериментальних досліджень відомо, що при малих швидкостях руху сила опору пропорційна швидкості, а при великих – квадратів швидкості. Вважаючи швидкість тіла невеликою, прийнемо чергове

*Припущення 4.* Сила опору середовища пропорційна швидкості тіла:

$$F_{on} = -rv,$$

де  $r$  – стала, що зветься *коефіцієнтом опору* і залежить від фізичних властивостей середовища та форми й розмірів рухомого тіла.

### 7.1.2. Постановка задачі. Концептуальна (змістова) модель

Сформулюємо умову з урахуванням прийнятих припущень.

Нехай тіло масою  $m$ , що з'єднане з невагомою пружиною, здійснює малі коливання вздовж горизонтального стержня. Враховуючи опір середовища, встановити характер руху тіла, тобто відшукати відповіді на питання про

- 1) положення (координату), швидкість та прискорення тіла в будь-який момент часу;
- 2) період його коливань;
- 3) характер залежності від часу амплітуди коливань.

Для фізичного опису такого руху цілком достатньо однієї координатної вісі, яку ми спрямуємо в бік початкового відхилення тіла (рис. 7.2, *а*). На рис. 7.2, *б* зображено стан тіла у деякий довільний момент часу.

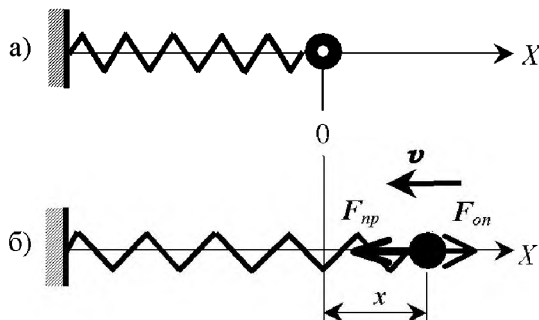


Рис. 7.2

### 7.1.3. Математична модель

При переході до проєкції сила пружності у довільний момент визначатиметься виразом

$$F_{np\ x} = -kx,$$

де  $x$  – координата тіла.

Для сили опору маємо

$$F_{on\ x} = -rv_x.$$

Рівнодійна сил пружності й опору надає тілу прискорення

$$a_x = \frac{F_{np\ x} + F_{on\ x}}{m}$$

або

$$a_x = -\frac{kx + rv_x}{m}.$$

При русі тіла з плином часу відбувається зміна його координати  $x$  і проєкції швидкості  $v_x$ . Це приводить до відповідної зміни прискорення, що видно з останнього виразу.

*Рівняння (1) є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили в'язкого опору середовища.*

### 7.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю

Таким чином, ми маємо дослідити рух із прискоренням, яке змінюється в часі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося чисельним методом і виконаємо розв'язування шляхом покрокових обчислень. Головна ідея методу тут полягає у заміні складного неперервного руху послідовністю окремих короткочасних рівноприскорених рухів.

Розіб'ємо весь час руху тіла на достатньо малі проміжки  $\Delta t$  такі, щоб на протязі кожного з них величина діючих на тіло сил могла б вважатися сталою, тобто зміна прискорення була б настільки малою, аби ми могли вважати рух рівноприскореним. Будемо вважати, що зміна прискорення відбуватиметься стрибкоподібно на початку кожного наступного проміжку  $\Delta t$ . Тоді, зокрема,  $a_{0x} = a_{1x}$ , де  $a_{1x}$  – проєкція вектора прискорення від моменту часу  $t = 0$  і аж до моменту  $t = 0 + \Delta t$ .

1. Спочатку обчислимо прискорення  $a_{0x}$  у початковий момент:

$$a_{0x} = a_{1x} = -\frac{kx_0 + rv_{0x}}{m}.$$

2. Далі обчислимо швидкість  $v_{1x}$  наприкінці першого проміжку часу  $\Delta t$ . Для рівноприскореного руху

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x} \Delta t,$$

де  $v_{0x}$  – проекція вектора швидкості у початковий момент  $t = 0$ .

*Зауваження 1.* При обчисленні швидкості наприкінці будь-якого  $i$ -го інтервалу часу  $\Delta t$  ми й надалі будемо використовувати значення прискорення на початку цього інтервалу:

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t,$$

де  $v_{(i-1)x}$  – кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі  $\Delta t$ , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.

3. Нове положення тіла (нову координату) наприкінці першого проміжку  $\Delta t$  знайдемо за рівнянням

$$x_1 = x_0 + v_{1x} \Delta t.$$

*Зауваження 2.* При обчисленні координати наприкінці будь-якого інтервалу часу  $\Delta t$  будемо використовувати значення координати із попереднього інтервалу, а швидкості – із поточного, оскільки її значення на цей момент буде вже обчислене:

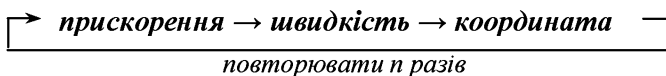
$$x_i = x_{i-1} + v_{ix} \Delta t.$$

Записаний вираз для обчислення нової координати має відверто наближений характер, адже він справджується лише для рівномірного руху. Ось чому цей вираз тим точніший, чим менший інтервал  $\Delta t$ . Саме тому цей інтервал має бути настільки малим, щоб за цей час швидкість не змінювалася б помітним чином. Проте виявляється, що цей вираз може бути *достатньо точним*, навіть коли інтервал  $\Delta t$  і не зникаюче малий.

Маючи нові значення швидкості  $v_i$  та координати  $x_i$ , на наступному кроці знов можна визначити прискорення:

$$a_{(i+1)x} = - \frac{kx_i + rv_{ix}}{m}.$$

Отже пп. 1–3 будемо повторювати  $n$  разів, де  $n = t_{\text{mod}}/\Delta t$ . Тут  $t_{\text{mod}}$  – час моделювання, який ми визначаємо самі, обираючи тривалість проміжку часу  $\Delta t$  і відповідну кількість рядків таблиці. Стосовно вибору часу моделювання зазначимо, що найчастіше це такий час, через який стає зрозумілою тенденція процесу. Наприклад, припиняються помітні зміни досліджуваних величин (перехід до рівноважного або стаціонарного стану); повторюється характер змін досліджуваних величин (процес є періодичним або стає таким); процес вимушено переривається внаслідок досягнення граничних умов (зокрема, падіння тіла на Землю) і т.п. Значення проміжку  $\Delta t$  має забезпечувати необхідну точність обчислень і стійкість обчислювального алгоритму. Таким чином, послідовність розрахунків має здійснюватись за такою циклічною схемою:



### 7.1.5. Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю для введення даних та виведення результатів, перший її рядок заповнити іменами змінних.

	A	B	C	D	E	F
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	Дано:	
2					$x_0, \text{м} =$	
3					$v_{0x}, \text{м/с} =$	
4					$\Delta t, \text{с} =$	
5					$m, \text{кг} =$	
6					$k, \text{Н/м} =$	
7					$r, \text{кг/с} =$	
...	...	...	...	...		

Рис. 7.3

2. Увести вхідні дані й початкові умови: заповнити стовпець E іменами змінних, а стовпець F – їх числовими значеннями (рис. 7.3).

3. Заповнити табличними формулами другий рядок (для початкового моменту часу  $t = 0$ ), використовуючи посилання на відповідні комірки стовпця F:

$$t = 0; \quad a_x = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{rv_{0x}}{m}; \quad v_x = v_0; \quad x = x_0.$$

Комірки таблиці матимуть такий зміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=-(F\$6*F\$2+F\$7*F\$3)/F\$5
C2	=F\$3
D2	=F\$2

5. Заповнити третій рядок (для кінця першого проміжку  $\Delta t$ , тобто для моменту часу  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ , де  $i = 1$ ):

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t;$$

$$a_{ix} = -\frac{k}{m}x_{i-1} - \frac{rv_{(i-1)x}}{m};$$

$$v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t;$$

$$x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t.$$

Відповідно в таблиці

комірки	формули
A3	=A2+F\$4
B3	=-(F\$6*D2+F\$7*C2)/F\$5
C3	=C2+B3*F\$4
D3	=D2+C3*F\$4

Для заповнення наступних рядків формули п. 4 повторювати  $n$  разів шляхом копіювання третього рядка у  $n$  наступних, де  $n = t_{\text{мод}}/\Delta t$ .

## 7.2. Тестування моделі: нехтуємо опором

Як було зазначено вище, виконаємо тестування моделі для випадку дії на тіло однієї лише сили пружності. З метою виключення з розгляду сили опору, покладемо  $r = 0$  (комірка F7). В такому разі

$$a_x = -\frac{kx}{m} = -\frac{k}{m}x.$$

Цей вираз є математичною моделлю руху тіла під дією сили пружності.

Задамо початкові умови для руху тіла масою  $m = 100$  г, прикріпленого до пружини жорсткістю  $k = 40$  Н/м, і у початковий момент відведеного від положення рівноваги на відстань  $x_0 = 1$  см:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = 0,01 \text{ м}; \quad v_0 = 0; \quad k = 40 \text{ Н/м}; \quad m = 0,1 \text{ кг}.$$

Тривалість проміжку часу  $\Delta t$  візьмемо рівною 0,01 с, а час моделювання – 1 с. Тоді кількість рядків таблиці буде  $n + 2 = 102$  (два рядки – перший і другий – на цей момент вже заповнені).

Фрагмент таблиці з результатами обчислень і відповідний графік залежності координати від часу  $x = x(t)$  подані на рис. 7.4.

	A	B	C	D	E	F
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} =$	0,01
3	0,01	-4,000	-0,040	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} =$	0
4	0,02	-3,840	-0,078	0,009	$\Delta t, \text{ с} =$	0,01
5	0,03	-3,526	-0,114	0,008	$m, \text{ кг} =$	0,10
6	0,04	-3,072	-0,144	0,006	$k, \text{ Н/м} =$	40
7	0,05	-2,494	-0,169	0,005	$r, \text{ кг/с} =$	0
...	...	...	...	...		

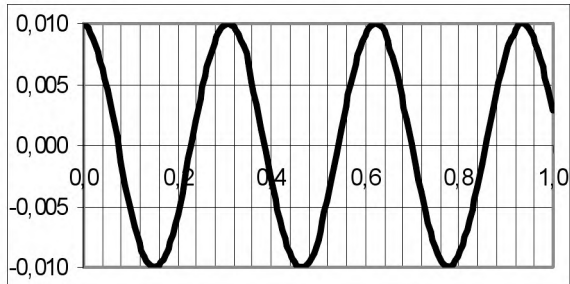


Рис. 7.4

Аналізуючи за таблицею результати моделювання, можна простежити картину руху тіла: спочатку воно знаходиться у спокої, далі поступово набуває швидкості в бік положення рівноваги ( $v_x < 0$ ), а це приводить до зменшення його відстані від положення рівноваги. При цьому, хоч прискорення і стає меншим, швидкість за модулем продовжує зростати.

У міру наближення до положення рівноваги ( $x = 0$ ) прискорення стає все меншим, швидкість зростає все повільніше аж до точки  $x = 0$ . В цю точку тіло приходить приблизно через 0,08 с після початку руху (встановіть ціну дрібної поділки на горизонтальній вісі  $t$ ). В цей момент пружина не деформована і на тіло не діє сила пружності. Маючи деяку швидкість, тіло за інерцією продовжує рухатись далі, але тепер усе йде навпаки: координата тіла стає від'ємною, а проекція прискорення – додатною. Швидкість поступово зменшується до нуля, після чого процес повторюється у зворотному порядку.

### Покращення точності обчислень

Зі шкільних курсів математики й фізики відомо, що точним аналітичним розв'язком задачі про рух тіла під дією сили пружності при заданих початкових умовах ( $x = x_0$  при  $t = 0$ ) є функція

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t.$$

**Завдання.** З метою порівняння результатів моделювання (стовпець D) із точними значеннями згідно наведеної формули створіть у таблиці два додаткових стовпці, у яких будуть обчислюватися значення  $x$  (стовпець E) за шойно наведеною формулою і різниця  $x - x_{\text{точн}}$  (стовпець F), як це показано на рис. 7.5. Виявляється, що в межах точності наших розрахунків (чотири десяткові розряди) результат не є задовільним: розбіжність сягає 12%.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	$x_{\text{точн}}$	$x - x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,010	0,0100	0,0E+00	$x_0$ , м =	0,01
3	0,01	-4,000	-0,040	0,0096	0,0098	-2,0E-04	$v_{0x}$ , м/с =	0
4	0,02	-3,840	-0,078	0,0088	0,0092	-3,9E-04	$\Delta t$ , с =	0,01
5	0,03	-3,526	-0,114	0,0077	0,0083	-5,7E-04	$m$ , кг =	0,1
6	0,04	-3,072	-0,144	0,0062	0,0070	-7,3E-04	$k$ , Н/м =	40
7	0,05	-2,494	-0,169	0,0045	0,0054	-8,6E-04	$r$ , кг/с =	0
...	...	...	...	...	...	...		

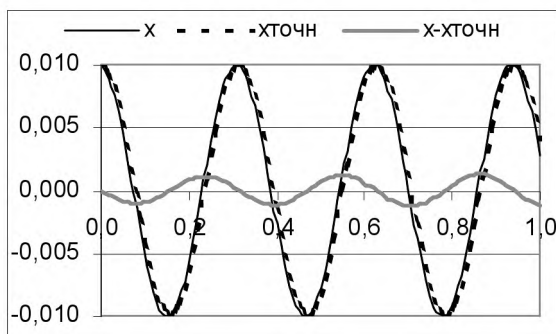


Рис. 7.5

Зрозуміло, що точність можна поліпшити за рахунок зменшення тривалості проміжку часу  $\Delta t$ , але це призведе до збільшення обсягу необхідної оперативної пам'яті комп'ютера і часу виконання обчислень. Відомий інший шлях підвищення точності. Він полягає в покращенні обчислювального алгоритму, що ми і зробимо.

Як було показано при попередньому обговоренні алгоритму, нова координата тіла дорівнює попередній плюс добуток проекції швидкості  $v_x$  на інтервал часу  $\Delta t$ . Але що це за швидкість? У який момент? Адже на початку інтервалу швидкість одна, а наприкінці вона зовсім інша. Якщо відома швидкість у деякий момент і відомо, що вона безупинно змінюється, то хіба можна сподіватися одержати задовільний результат, припускаючи, що тіло рухається весь час  $\Delta t$  із однаковою швидкістю, такою, яку воно мало на початку інтервалу?

Доцільнішим буде використати деяку проміжну швидкість між початком та кінцем інтервалу.

Найпростіший прийом підвищення точності обчислень полягає в тому, щоб брати швидкість у середині інтервалу. Для рівноприскореного руху, яким за нашою домовленістю є рух тіла протягом інтервалу  $\Delta t$ , це середня швидкість  $v_{cix}$  на цьому інтервалі. Таким чином, необхідно дещо змінити наші міркування: нова координата  $x_i$  (наприкінці  $i$ -го інтервалу) дорівнює попередній координаті  $x_{i-1}$  (наприкінці попереднього інтервалу) плюс добуток швидкості  $v_{cix}$  у середині інтервалу на  $\Delta t$ . Ця швидкість, у свою чергу, дорівнює швидкості  $v_{c(i-1)x}$  у середині попереднього інтервалу (тобто на проміжках  $\Delta t$  раніше) плюс прискорення на початку інтервалу, помножене на  $\Delta t$ .

Іншими словами, нові рівняння матимуть вигляд:

$$x_i = x_{i-1} + v_{cix} \Delta t, \quad v_{cix} = v_{c(i-1)x} + a_{ix} \Delta t.$$

Тепер, однак, щоб почати обчислення, необхідно скористатися додатковим рівнянням  $v_{1x} = v_{0x} + a_{0x} \Delta t/2$ .

Додаючи далі до половини першого інтервалу по  $\Delta t$ , ми кожного разу потраплятимемо в середину наступного інтервалу.

У відповідності до наведених міркувань внесемо зміни до п. 4 алгоритму:

$$v_{ix} = \begin{cases} v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t/2 & \text{при } i = 1 \\ v_{(i-1)x} + a_{ix} \Delta t & \text{при } i > 1 \end{cases}$$

тобто змінімо вміст однієї лише комірки С3, не змінюючи всі інші.

Результат не примусить на себе чекати (рис. 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	$x_{\text{точн}}$	$x - x_{\text{точн}}$	Дано:	
2	0,0	-4,000	0,000	0,0100	0,0100	0,0E+00	$x_0$ , м = 0,01	
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	0,0098	-6,7E-07	$v_{0x}$ , м/с = 0	
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	0,0092	-2,6E-06	$\Delta t$ , с = 0,01	
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	0,0083	-5,7E-06	$m$ , кг = 0,1	
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	0,0070	-9,6E-06	$k$ , Н/м = 40	
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	0,0054	-1,4E-05	$r$ , кг/с = 0	
...	...	...	...	...	...	...		

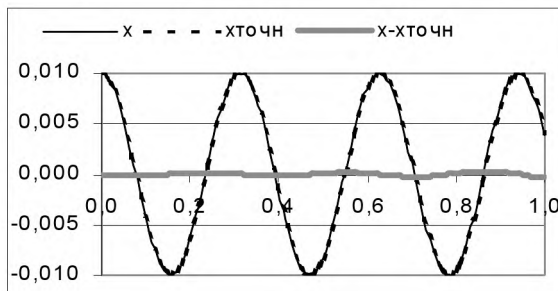


Рис. 7.6

Так що тепер ми маємо наочне уявлення про ефективність чисельного аналізу: такий простий розрахунок за поліпшеним алгоритмом дає такий гарний результат. Адже тепер розбіжність не перебільше 2,5%.

**Вправа.** З підручника фізики відомо, що частота власних коливань пружинного маятника визначається за формулою

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$



Оскільки джерелом і критерієм фізичного знання є експеримент, пропонуємо наступне:

1. Сплануйте і виконайте натурне лабораторне дослідження для перевірки останньої формули. Особливу увагу приділіть методу визначення жорсткості  $k$  пружини та способам її *практичної зміни* (збільшення або зменшення), а також питанню про порівняння жорсткостей різних пружин.

2. Наша модель не передбачає наведеної формули. Перевірте, як вона відреагує на зменшення  $k$  у чотири рази; на збільшення  $m$  у чотири рази. В обох випадках час моделювання брати однаковим.

3. Обчисліть за наведеною вище формулою частоту коливань тягаря на пружині, підставляючи у формулу параметри даної моделі. Чи узгоджуються результати моделювання з теоретичними розрахунками? Зробіть висновок щодо адекватності моделі.

4. Виведіть на екран на одному рисунку графіки залежностей

$$x = x(t), \quad v = v(t) \quad a = a(t).$$

Це завдання має на меті проілюструвати зміст уявлень про зсуви фаз коливань координати, швидкості та прискорення або їхніх аналогів у електродинаміці (заряду, сили струму та швидкості зміни сили струму) при розгляді електромагнітних коливань.

При виконанні завдання може виникнути проблема одночасного виведення графіків несумірних (непорівнянних) величин. Так у нашій конкретній моделі  $|a_{\max}| \gg |x_{\max}|$ . Тому в середовищі електронних таблиць ми радимо виводити графік  $x = x(t)$  з використанням додаткової вісі та добром для неї придатного масштабу.

## Висновки

1. Точність комп'ютерних обчислень можна помітно поліпшити шляхом удосконалення обчислювального алгоритму.

2. Комп'ютерне моделювання є одним з ефективних методів *теоретичних* досліджень, і тому при вирішенні питання про адекватність моделі особливо важливо, щоб результати обчислювального експерименту хоча б задовільно узгоджувалися з результатами натурального експерименту.

3. Тестування моделі довело її задовільну адекватність відносно дослідних даних і результатів теоретичного аналізу.

## 7.3. Рух тіла на пружині за наявності в'язкого опору

Продовжимо експеримент, поклавши числове значення  $r$  (коефіцієнта опору) рівним не 0, а, наприклад, 0,4 (рис. 7.7).

	A	B	C	D	E	F
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	Дано:	
2	0,000	-4,000	0,000	0,010	$x_0, \text{ м} =$	0,01
3	0,010	-4,000	-0,020	0,010	$v_{0x}, \text{ м/с} =$	0
4	-3,840	-0,058	0,009	-0,003	$\Delta t, \text{ с} =$	0,01
5	-3,453	-0,093	0,008	-0,005	$m, \text{ кг} =$	0,1
6	-2,943	-0,122	0,007	-0,006	$k, \text{ Н/м} =$	40
7	-2,336	-0,146	0,006	-0,007	$r, \text{ кг/с} =$	0,1
...	...	...	...	...		

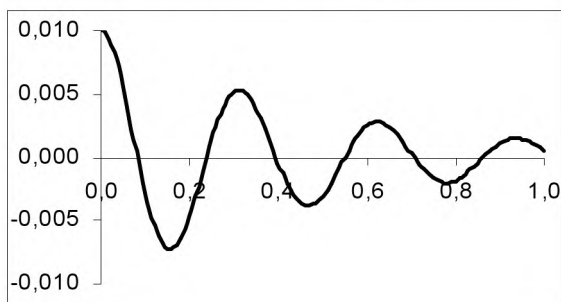


Рис. 7.7

### Запитання

1. У який спосіб, на вашу думку, відреагує модель, якщо коефіцієнт опору  $r$  надати від'ємного значення? Перевірте для  $r = -0,1$ .
2. Який фізичний зміст може мати отриманий результат?
3. Якого змісту слід було б тепер надати виразу  $F_{on} = -rv$ ?

## 7.4. Рух тіла на пружині за наявності сили сухого тертя

При вивченні в шкільному курсі фізики сили тертя основну увагу приділяють розгляду сили сухого тертя, а при вивченні механічних коливань з урахуванням опору зазвичай розглядають силу в'язкого тертя. Справа в тому, що і фізичний аналіз коливань з урахуванням сухого тертя, і аналітичний розв'язок відповідного рівняння руху тут помітно складніші, ніж у випадку в'язкого тертя. Проте можливість застосування комп'ютера для чисельного розв'язування рівняння руху суттєво спрощує проблему.

Як відомо, модуль сили сухого тертя при горизонтальному русі визначається виразом  $F_{mp} = \mu mg$  і в певних межах не залежить від швидкості. Напрямок цієї сили завжди протилежний напрямку вектора швидкості. При коливаннях тіла проекція вектора швидкості

періодично змінює свій знак, тому й проекція сили тертя також має змінювати знак, але у *протилежній фазі*.

У попередній версії моделі ця властивість сили опору не створювала проблем, тому що проекція швидкості входила до виразу для сили опору безпосередньо, але тепер така проблема є. Розв'язати її можна, дописавши в останній вираз множником функцію  $\text{sgn}(v_x)$ , яка передає у вираз знак свого аргументу  $v_x$ :

$$F_{\text{тр}} = -\mu mg \cdot \text{sgn}(v_x).$$

А саме:

$$\text{sgn}(v_x) = \begin{cases} 1 & \text{при } v_x > 0 \\ 0 & \text{при } v_x = 0 \\ -1 & \text{при } v_x < 0 \end{cases}.$$

**Завдання.** Доведіть, що таку саму властивість має вираз  $\frac{v_x}{|v_x|}$ .

Перехід до нової версії моделі зводиться до зміни у виразі  $a_x$ :

$$a_x = -\frac{kx + \mu g \cdot \text{sgn}(v_x)}{m}.$$

Останнє рівняння є математичною моделлю коливального руху тіла на пружині з урахуванням сили сухого тертя.

У відповідності до цього внесемо зміни й до комірок таблиці:

комірки	формули / числа
B2	$=-(\$F\$6*\$F\$2+\$F\$7*9,81*3\text{НАК}(\$F\$3))/\$F\$5$
B3	$=-(\$F\$6*D2+\$F\$7*9,81*3\text{НАК}(C2))/\$F\$5$

Результати моделювання подані на рис. 7.8.

	A	B	C	D	E	F
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	Дано:	
2	0,0	-4,00	0,00	0,010	$x_0, \text{м} =$	0,01
3	0,01	-4,00	-0,04	0,010	$v_{0x}, \text{м/с} =$	0
4	0,02	-3,64	-0,08	0,009	$\Delta t, \text{с} =$	0,01
5	0,03	-3,34	-0,11	0,008	$m, \text{кг} =$	0,1
6	0,04	-2,90	-0,14	0,006	$k, \text{Н/м} =$	40
7	0,05	-2,34	-0,16	0,005	$\mu =$	0,002
...	...	...	...	...		

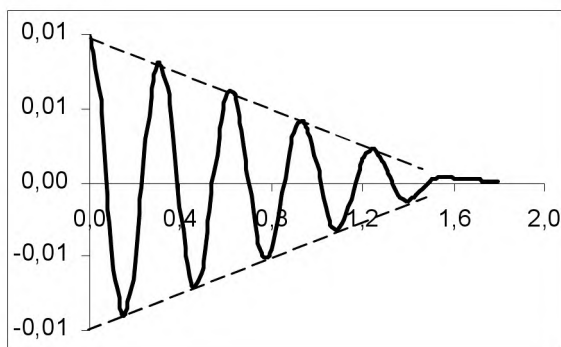


Рис. 7.8

### Вправи

1. Підберіть таке мінімальне значення  $\mu$ , при якому коливання припиняються за 2,5 с від початку. Скільки повних коливань здійснює кулька за цей час?

2. Замість функції  $\text{sgn}(v_x)$  скористайтесь виразом  $\frac{v_x}{|v_x|}$ . Порів-

няйте результати.

3. Добудовані штрихові прямі на рис. 7.8 наводять на думку, що послідовність значень амплітуд є спадаючою лінійною функцією часу. У який спосіб можна в цьому переконатись, не будуючи прямі лінії, а користуючись таблицею?

В разі утруднення пропонуємо в окремому стовпці вивести різниці значень *двох послідовних амплітуд* і переконатись, що всі такі різниці однакові. Звідси випливає, що послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію. Отже, залежність амплітуди від часу є спадаючою лінійною функцією.

4. Користуючись моделлю, розв'яжіть задачу.

**Задача.** Брусок масою 500 г, сполучений із закріпленою пружиною жорсткістю 2,45 Н/см, може ковзати на горизонтальній площині. Коефіцієнт сухого тертя становить 0,055.

Скільки коливань здійснить брусок до повної зупинки, якщо у початковий момент пружина розтягнута на 3 см?

На рис. 7.9 подано чисельне розв'язання задачі (з відповідним графіком), одержане на основі побудованої моделі.

Таким чином, обчислювальний експеримент із математичною моделлю усуває багато ускладнень, що виникають при аналітичному

розв'язуванні задач. Це робить їх цілком доступними для школярів.

	A	B	C	D	E	F
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	Дано:	
2	0,00	-14,70	0,00	0,030	$x_0, \text{м} =$	0,03
3	0,01	-14,70	-0,15	0,029	$v_{0x}, \text{м/с} =$	0
4	0,02	-12,90	-0,28	0,026	$\Delta t, \text{с} =$	0,01
5	0,03	-11,55	-0,39	0,022	$m, \text{кг} =$	0,5
6	0,04	-9,63	-0,49	0,017	$k, \text{Н/м} =$	245
7	0,05	-7,24	-0,56	0,011	$\mu =$	0,055
...	...	...	...	...		

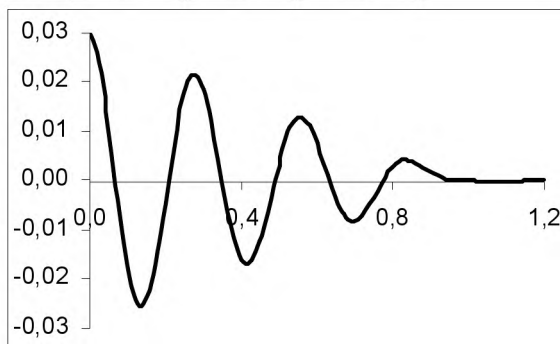


Рис. 7.9

На закінчення настійно радимо опрацювати наступний матеріал про дуже ефективний метод аналізу коливальних процесів – *метод фазових діаграм*.

## 7.5. Фазова площа

### 7.5.1. Теоретичні відомості

Вивчаючи механічні рухи тіл, ми можемо цікавитися тим, яким буде їхнє положення в деякий момент часу (головна задача механіки), або тим, *коли* тіло прийде у деяке певне положення (саме так ставиться задача у сферичній астрономії при прогнозуванні моментів настання затемнень Сонця або Місяця, схожа задача розв'язується при проектуванні виробничого конвеєра).

Однак можна зацікавитися й іншим: загальним характером руху – тим, зокрема, є він періодичним чи ні. Саме такий підхід є характерним для *теорії коливань*. Наприклад, питання про те, чи може під дією поштовхів сильно розгойдатися міст, вирішується не тим, наскільки вони сильні, а тим, яким є ритм цих поштовхів і скільки часу вони тривають. Інакше кажучи, цікавим є *питання про харак-*

тер руху, взятого в цілому. Це означає, що ми бажаємо мати таке графічне зображення (діаграму) руху коливальної фізичної системи, яке охоплює усі значення часу  $t$ . Бажано, крім того, відобразити на одній діаграмі все розмаїття рухів, що їх може здійснювати рухоме тіло.

Найпростішим прикладом механічної коливальної системи є вагтаж на пружині. В такій системі рух відбувається за законом

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (*)$$

Якщо показати в координатах  $x, t$  всі можливі графіки цієї функції з урахуванням різних початкових умов ( $x_0$  і  $\varphi_0$ ), то, як можна бачити з рис. 7.10, бажаної мети ми не досягаємо.

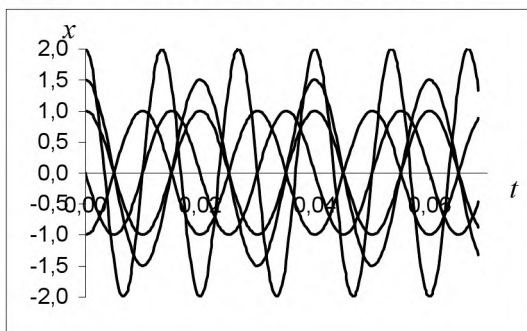


Рис. 7.10

Вийшло щось не зовсім розбірливе: графіки перетинаються між собою і, до того ж, на такій діаграмі можна показати лише частину кожного графіка внаслідок обмеження вісі  $t$  розмірами рисунку. До того ж збільшення значень часу  $t$  (продовження вісі абсцис) ніякої нової інформації стосовно процесу не дасть.

Проте ми отримаємо те, чого бажаємо, якщо візьмемо декартову систему координат і будемо відкладати на вісі абсцис зміщення  $x$ , а на вісі ординат – його похідну, тобто швидкість руху  $v$  (ще краще, пропорційну їй величину  $v/\omega$ ). Нагадаємо, що  $\omega$  має назву *циклічна частота* і вона пов'язана зі звичайною частотою  $\nu$  співвідношенням

$\omega = 2\pi\nu$ . Ці дві величини  $x$  і  $\frac{v}{\omega}$  повністю характеризують стан тіла,

що здійснює колювання: будь-яка точка на площині змінних  $x, \frac{v}{\omega}$  зображує стан системи. Таку точку називають *зображуючою точкою*. Оскільки характеристику стану коливальної системи називають *фазою*, площину  $x, v/\omega$  називають *фазовою площиною*. Коли вагтаж

на пружині здійснює коливання, його швидкість змінюється, зображуюча точка переміщується на фазовій площині. Диференціюючи вираз (\*), знаходимо:  $\frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{v}{\omega} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}.$$

Вони є параметричними рівняннями лінії (траєкторії), вздовж якої переміщується зображуюча точка на фазовій площині, параметром є час  $t$ . Параметр легко виключити, підносячи кожне з рівнянь до квадрату і далі додаючи їх. Це дає:  $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = x_0^2$ , тобто рівняння кола з радіусом, рівним амплітуді  $x_0$  (рис. 7.11а).

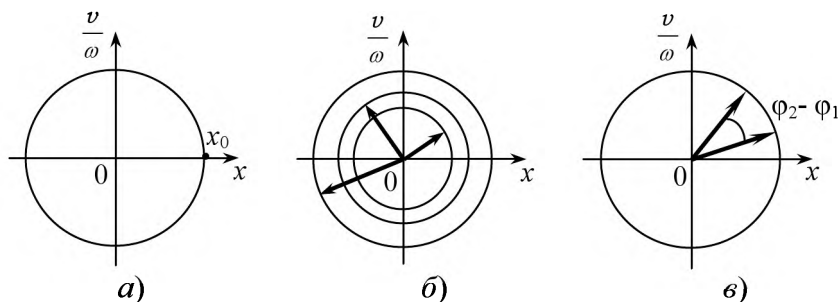


Рис 7.11

Коливанням з різними амплітудами відповідають концентричні кола з центром у початку координат (рис. 7.11б).

Коливанням з однаковими амплітудами, але з різними фазами відповідає рух зображуючих точок уздовж одного кола, але при цьому в однакові моменти часу зображуючі точки займають різні положення. Різниця фаз дорівнює куту між відповідними радіусами-векторами зображуючих точок у однакові моменти часу (рис. 7.11в).

Розгляд питання про фазовий простір (у даному випадку двовимірний) відповідає головному принципу математичного моделювання – *принципу множинності математичних моделей*: оскільки при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі сторони реальності, то для більш повного її вивчення необхідною виявляється сукупність моделей, які дозволяють з різних боків і з

різним ступенем деталізації відобразити об'єкт дослідження.

Так при вивченні коливальних процесів широко використовуються відомі вам *часові діаграми*, що відображують залежність коливної величини від часу, в електротехніці поширеними є так звані *векторні діаграми*, в загальній теорії коливальних дощойно згаданих підходів додається метод *фазових діаграм*. Всі ці підходи реалізують різні моделі певних об'єктів (процесів, явищ).

Слід розуміти, що фазовий простір не має нічого спільного з реальним простором (у випадку плоского руху – з координатною площиною  $XOY$ ). Зокрема, траєкторія руху зображуючої точки – *фазова траєкторія (фазовий портрет)* – не є траєкторією руху тіла (матеріальної точки).

### 7.5.2. Дослідження коливальних процесів методом фазових діаграм

Розглянемо застосування методу фазових діаграм для вивчення різних прикладів механічних коливальних.

1. *Незатухаючі колювання* (у відповідності з рис. 7.4).

Спочатку створимо нову таблицю, скопіюємо в неї всі комірки таблиці з рис. 7.4.

Для побудови графіка залежності  $v/\omega = f(x)$  – фазової траєкторії – слід врахувати, що при колюваннях вантажу на пружині  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Тому після стовпця D таблиці вставимо допоміжний стовпець для значень  $v/\omega$ . Саме ж значення  $\omega$  помістимо в комірку G9, вміст якої становитиме таблична формула  $= (G6/G5)^{0,5}$ . Значення комірки E2 обчислимо за формулою  $= C2/\$G\$9$ , і цю формулу скопіюємо у всі наступні комірки стовпця E. Нижче наведено остаточний вигляд нової таблиці (рис. 7.12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	$t$	$a_x$	$v_x$	$x$	$v_x/\omega$	Дано:	
2	0,00	-4,000	0,000	0,0100	0,000	$x_0, \text{ м} =$	0,01
3	0,01	-4,000	-0,020	0,0098	-0,001	$v_{0x}, \text{ м/с} =$	0
4	0,02	-3,920	-0,059	0,0092	-0,003	$\Delta t, \text{ с} =$	0,01
5	0,03	-3,683	-0,096	0,0082	-0,005	$m, \text{ кг} =$	0,1
6	0,04	-3,299	-0,129	0,0070	-0,006	$k, \text{ Н/м} =$	40
7	0,05	-2,783	-0,157	0,0054	-0,008	$r, \text{ кг/с} =$	0
8	...	...	...	...	...	$\omega, \text{ с}^{-1} =$	20
...	...	...	...	...	...		

Рис. 7.12



Виділивши стовпці D і E, будемо графік залежності  $v/\omega = f(x)$ , показаний на рис. 7.13а.

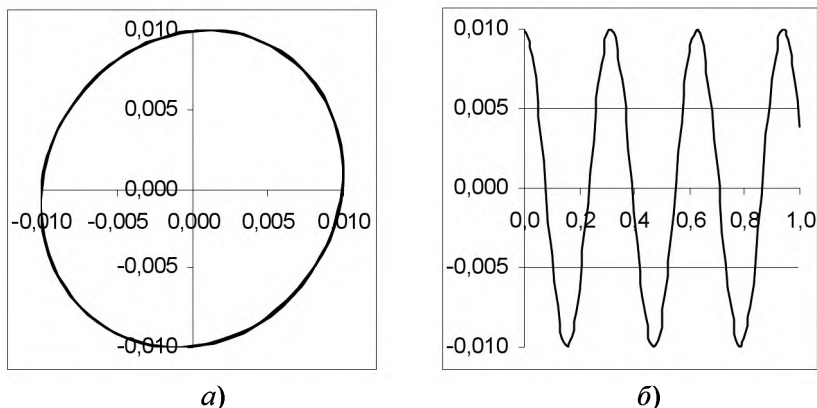


Рис. 7.13

- а) графік залежності  $v/\omega = f(x)$  для незатухаючих коливань;  
 б) для порівняння – відповідний графік залежності  $x = f(t)$ .

2. *Коливання, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху* (відповідна таблиця була розглянута на рис. 7.7).

Знов слід виконати процедуру, описану в п.1 стосовно створення нової таблиці і заповнення стовпця E. Прийнемо  $r = 0,5$ .

Результат поданий на рис. 7.14а.

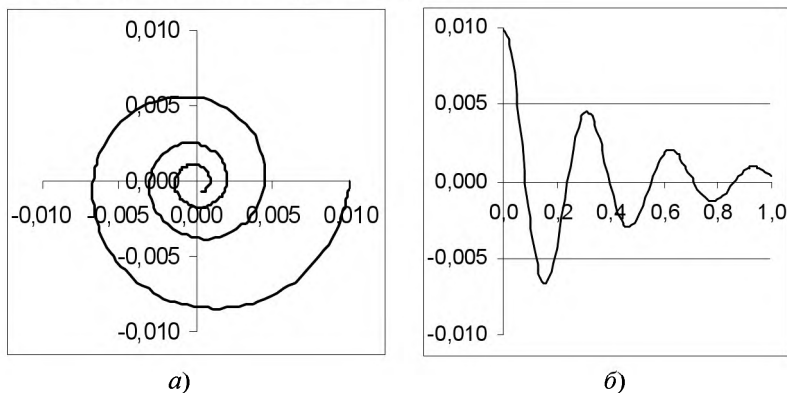


Рис. 7.14

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сили опору, пропорційної швидкості руху;  
 б) для порівняння – відповідний графік залежності  $x = f(t)$ .

3. Коливання, що загасають при дії сили сухого (кулонівського) тертя. Основою для побудови діаграми тут буде таблиця на рис. 7.8, а результатом – рис 7.15а.

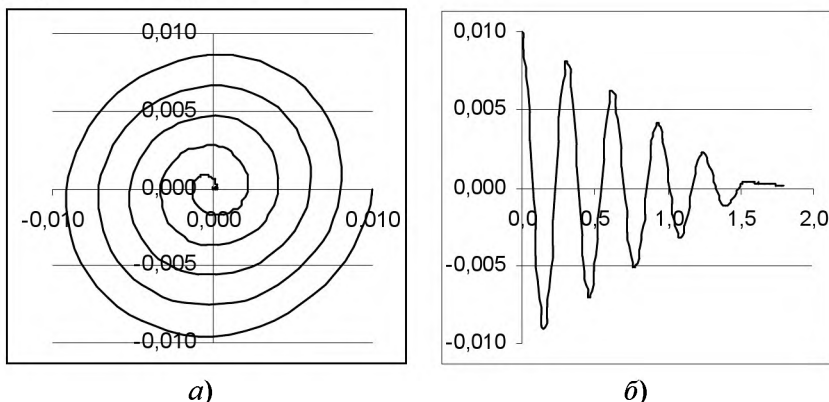


Рис. 7.15

- а) фазовий портрет коливань, що загасають при дії сухого тертя;  
б) відповідний графік залежності  $x = f(t)$ .

#### 4. Порівняльний аналіз результатів за рис. 7.13 – 7.15.

4.1. Ознакою незатухаючих коливань на фазовій площині є замкнута траєкторія руху зображуючої точки (рис. 7.13).

4.2. Якщо коливання гальмуються внаслідок дії сили опору, пропорційної швидкості руху ( $F_{on} = -rv$ ), то, як відомо, послідовність значень амплітуди утворює спадаючу геометричну прогресію (рис. 7.14б). Які точки перетинає фазова траєкторія (рис. 7.14а) після кожного повного коливання тіла?

*Відповідь.* Зображуюча точка починає переміщуватись на фазовій площині від вісі абсцис ( $x = x_0$ ,  $x > 0$ ). Наступний перетин фазової траєкторії з віссю абсцис в області  $x > 0$  відповідає черговому значенню амплітуди, тобто завершенню чергового періоду.

З обох графіків (а і б) видно, що рухоме тіло за час спостереження здійснило чотири повних коливання.

4.3. При дії на коливне тіло сили сухого тертя ( $F_{тр} = -\mu N$ ) відбувається загасання коливань, причому послідовність значень амплітуд утворює спадаючу арифметичну прогресію (рис. 7.15).

4.4. Яких змін зазнає цей рисунок при збільшенні часу спостереження за процесом від 1 с до 2 с?

#### 5. Чим відрізняються фазові діаграми функцій

$$x = x_0 \cos \omega t \text{ і } x = x_0 \sin \omega t?$$

6. Поверніться до п. 5 Глави 5 “Хижак–жертва” нашого посібника і для опрацювання розглядуваних там питань скористайтесь відомостями про фазові діаграми.

### **Висновки**

1. Завдяки своїй високій інформативності метод фазових діаграм є досить поширеним у практиці дослідження коливальних процесів різної природи. Довгий час ознайомлення з цим методом у школі стримувалося відсутністю засобів швидкої побудови і подання графічної інформації. Комп’ютеризація та інформатизація освіти, а також розробка ефективного програмного забезпечення створюють сприятливі умови для ознайомлення школярів із цим методом.

2. При побудові фазової діаграми слід в декартовій системі координат на осях відкладати коливну величину та її похідну (наприклад,  $x$  і  $\omega$  або пропорційні їм величини). Часто при побудові фазових діаграм у механіці користуються системою координат “імпульс – кінетична енергія”, оскільки кінетична енергія є похідною від імпульсу.

3. Подані вище відомості стосовно особливостей методу фазових діаграм розглянуті лише на рівні ознайомлення. Більш докладне вивчення цього методу виходить за рамки нашого посібника.

## Глава 8. Рух тіла в полі сили тяжіння

В цій главі йтиметься про одне із самих далекосяжних узагальнень, зроблених будь-коли людським розумом, а саме про закон все-світнього тяжіння:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Відкриття закону належить видатному англійському фізику І. Ньютону (1666 р.). Якщо до цього додати, що всяке тіло під дією прикладеної до нього сили набуває в напрямку цієї сили прискорення, величина якого пропорційна силі і обернено пропорційна масі тіла (другий закон Ньютона),

$$a = \frac{F}{m}, \quad (2)$$

то, як говорять фахівці, досвідченому математику цих відомостей цілком вистачить для отримання всіх наступних наслідків. Не претеридуючи на таке високе звання, ми зупинимось лише на деяких з них, щоб побачити і зрозуміти дещо більше, ніж у шкільному підручнику фізики.

Насамперед зазначимо, що вирази (1) і (2) являють собою математичну модель руху під дією сили тяжіння у найбільш загальному вигляді. Чи не найцікавішим при вивченні таких рухів є питання про форми їхніх траєкторій у залежності від початкових умов. Для вивчення цього питання скористаємося можливостями комп'ютерного моделювання (обчислювального експерименту).

При цьому спочатку ми розглянемо прості приклади – рух штучного сунутника навколо планети (або рух планети навколо Сонця). В цих прикладах можна нехтувати масою тіла-сунутника і розглядати тільки його рух відносно центрального тіла.

Далі дослідимо рухи системи тіл “планета – природний супутник” (на прикладі системи “Земля – Місяць”). Оскільки масою сунутника в таких випадках, взагалі кажучи, нехтувати не можна, необхідно буде розглянути рухи обох тіл навколо спільного центра мас. Змінюючи умови задачі (а саме – маси тіл і відстані між ними), ми зможемо зазирнути в деякі подробиці з “життя” подвійних зірок.

Ряд результатів, пов'язаних із законами руху планет, встановленими на початку XVII ст. видатним математиком і астрономом Й. Кеплером, ми одержимо як наслідки закону все-світнього тяжіння.

Далі з'ясуємо, якими були б рухи тіл, якби в законі тяжіння показник степеня  $k$  для відстані  $r$  між тілами мав би значення не 2, а деяке інше, тобто якби закон мав вигляд  $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}$ .

І, насамкінець, розглянемо рухи кількох тіл (планет) у різних системах відліку – геліоцентричній (пов'язаній із Сонцем) та геоцентричній (пов'язаній із Землею).

## **8.1. Рух штучного супутника планети**

### **8.1.1. Постановка задачі**

Формула (1), як і формули всіх фізичних законів, має границі застосовності. Вона справджується

- а) для матеріальних точок;
- б) у випадках, коли одне з тіл є матеріальною точкою, а інше – однорідною кулею;
- в) обидва тіла – однорідні кулі.

У двох останніх випадках  $r$  – відстань між центрами тіл (куль). Вираз “границі застосовності” означає, що результат, отриманий розрахунком за формулою, даватиме тим кращий збіг з реальним (дійсним, спостережуваним) результатом, чим краще виконуються зазначені умови.

*Припущення 1.* Враховуючи, що відстань між центрами планети і штучного супутника значно перевищує розміри супутника, і розглядаючи планету як однорідну кулю, вважатимемо, що забезпечено умови застосовності закону всесвітнього тяжіння (1).

*Припущення 2.* Будемо вважати (і не без підстав) масу супутника набагато меншою за масу планети:  $m_{\text{супутн}} \ll m_{\text{пл}}$ . Це дозволить не розглядати рух самої планети, оскільки прискорення, що їх надають одне одному два тіла під час взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам.

*Припущення 3.* Знехтуємо опором середовища, адже реально штучні супутники рухаються у надзвичайно розріджених шарах планетних атмосфер. В такому разі на супутник діятиме єдина сила – сила всесвітнього тяжіння.

Рух штучного супутника відбувається в площині, в якій лежать вектор швидкості  $\mathbf{v}$  супутника і центр планети. В цій площині лежить і вектор  $\mathbf{F}$  сили тяжіння. Для опису такого руху потрібні дві координатні вісі. Початок координат помістимо в центрі планети (рис. 8.1).

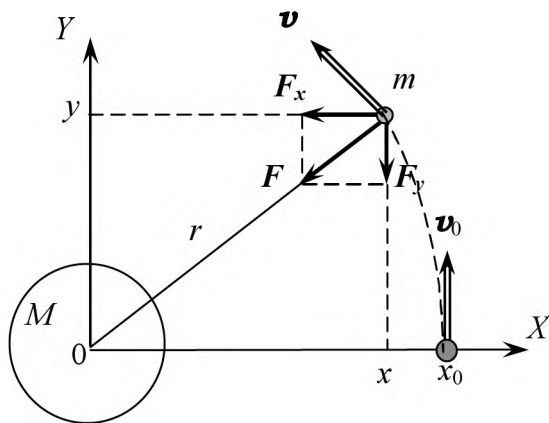


Рис. 8.1

Тут  $F_x$  і  $F_y$  – складові вектора сили тяжіння  $F$ ;

$M, m$  – маси планети і супутника відповідно.

Положення супутника визначається двома координатами  $x$  та  $y$ ; проекції  $F_x$  і  $F_y$  мають знаки, протилежні координатам.

Нехай початковий момент «спостереження» відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис, як це показано на рис. 8.1.

З подібності трикутників витікає:

$$\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}, \quad \frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r},$$

що разом з (1) дає

$$F_x = -GMm \frac{x}{r^3}; \quad F_y = -GMm \frac{y}{r^3}.$$

Проекції прискорення знайдемо з виразу (2):

$$a_x = -GM \frac{x}{r^3}; \quad a_y = -GM \frac{y}{r^3}. \quad (3)$$

Відстань  $r$  між тілами будемо визначати за теоремою Піфагора:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Система рівнянь (3) є математичною моделлю руху штучного супутника.

Якщо в напрямку, перпендикулярному до лінії дії сили, в початковий момент орбітального руху супутника надати йому *першої кос-*

мічної швидкості  $v_{1K} = GM/r$ , то його орбіта буде коловою.

### 8.1.2. Алгоритм роботи з моделлю

1. Створити таблицю за зразком:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$v_x$	$v_y$	$x$	$y$	Дано:	ШСЗ
2							$G =$	
3							$\Delta t =$	
4							$M =$	
5							$m =$	
6							$r =$	
7							$v_x(0) =$	
8							$v_y(0) =$	
9							$x(0) =$	
10	...	...	...	...	...	...	$y(0) =$	

2. Заповнити Ключові комірки таблиці таким умістом:

комірки	формули / числа	примітки
H7	=0	$v_x(0)$
H8	=(H2*H4/H6)^0,5	$v_y(0)$
H9	=H6	$x(0)$
H10	=0	$y(0)$
A2	=\$H\$2*\$H\$4*E2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в A3 і A4
B2	=\$H\$2*\$H\$4*F2/((E2)^2+(F2)^2)^1,5	копіювати в B3 і B4
C2	=\$H\$7	
D2	=\$H\$8	
E2	=\$H\$9	
F2	=\$H\$10	
C3	=C2+A2*\$H\$3*0,5	
D3	=D2+B2*\$H\$3*0,5	
E3	=E2+C3*\$H\$3	копіювати в E4
F3	=F2+D3*\$H\$3	копіювати в F4
C4	=C3+A3*\$H\$3	
D4	=D3+B3*\$H\$3	

### 8.1.3. Обчислювальний експеримент

Конкретизуємо умову для штучного супутника Землі (ШСЗ) масою  $m = 1000$  кг, що рухається коловою орбітою на висоті  $h = 300$  км від земної поверхні.

Маса супутника не входить до виразу (3), але її значення забезпечує виконання умови  $m_{\text{супутник}} \ll M_{\text{пл}}$ . Для Землі  $M = 5,976 \cdot 10^{24}$  кг.

Відстань між тілами  $r = R_3 + h = 0,3 \cdot 10^6$  м +  $6,4 \cdot 10^6$  м =  $6,7 \cdot 10^6$  м.

Відомо, що період обертання штучного супутника Землі поблизу поверхні планети становить близько 100 хв. Таким і оберемо час

модельовання. Будемо фіксувати значення всіх кінематичних характеристик руху супутника ( $a$ ,  $v$ ,  $x$ ,  $y$ ) через малі (у порівнянні з періодом обертання) однакові проміжки часу  $\Delta t = 1 \text{ хв.} = 60 \text{ с.}$

Тепер проведемо звичну процедуру підготовки таблиці до обчислювального експерименту: заповнимо комірки Н2–Н6 (“Дано:”) і решту комірок згідно наведеної вище таблиці. Всі формули четвертого рядка (від А4 по F4) скопіюємо в наступні 100 рядків.

Нагадаємо, що вміст комірки Н8 відповідає виразу для *першої космічної швидкості*:  $v_y(0) = v_{1K}$ .

Відповідна таблиця має вигляд, поданий на рис. 8.2.

Маючи заповнену таблицю, будемо траєкторію руху  $y = y(x)$  – графік залежності між даними зі стовпців Е та F. На цьому ж рисунку показана *колова* траєкторія руху.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$v_x$	$v_y$	$x$	$y$	Дано:	ПСЗ
2	-8,88	0,00	0	7714	6,70E+06	0,00E+00	$G =$	6,672E-11
3	-8,86	-0,61	-266	7710	6,68E+06	4,63E+05	$\Delta t =$	60
4	-8,80	-1,22	-798	7673	6,64E+06	9,23E+05	$M =$	5,976E+24
5	-8,69	-1,83	-1326	7600	6,56E+06	1,38E+06	$m =$	1,000E+03
6	-8,54	-2,42	-1847	7490	6,45E+06	1,83E+06	$r =$	6,700E+06
7	-8,36	-3,01	-2360	7345	6,30E+06	2,27E+06	$v_x(0) =$	0
8	-8,13	-3,58	-2862	7164	6,13E+06	2,70E+06	$v_y(0) =$	7,710E+03
9	-7,86	-4,13	-3349	6950	5,93E+06	3,12E+06	$x(0) =$	6,700E+06
10	-7,56	-4,66	-3821	6702	5,70E+06	3,52E+06	$y(0) =$	0
...	...	...	...	...	...	...		

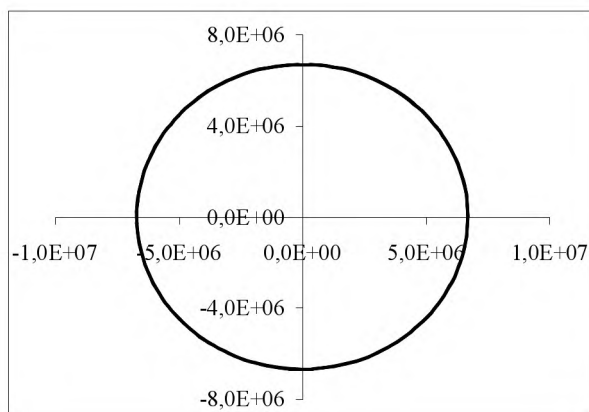


Рис. 8.2

Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника  $v_y(0)$



задовольнятиме нерівності  $v_{1K} < v_y(0) < \sqrt{2} \cdot v_{1K}$ , то, як відомо з курсу фізики (астрономії), він рухатиметься еліптичною орбітою.

Продовжимо обчислювальний експеримент і збільшимо попереднє значення початкової швидкості  $v_y(0)$  у 1,2 рази. Щоб не виконувати зайвої роботи, відредагуємо формулу, введену в комірку Н8:

$$= (H2*H4/H6)^{0,5*1,2}.$$

Результат показаний на рис. 8.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$u_x$	$u_y$	$x$	$y$	Дано:	ПІСЗ
2	-8,88	0,00	0	9257	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11
3	-8,83	-0,73	-266	9260	6,68E+06	5,55E+05	$\Delta t=$	60
4	-8,69	-1,45	-796	9216	6,64E+06	1,11E+06	$M=$	5,976E+24
5	-8,45	-2,13	-1318	9129	6,56E+06	1,66E+06	$M=$	1,000E+03
6	-8,13	-2,77	-1825	9001	6,45E+06	2,20E+06	$R=$	6,700E+06
7	-7,75	-3,35	-2313	8835	6,31E+06	2,73E+06	$v_x(0)=$	0
8	-7,31	-3,86	-2778	8634	6,14E+06	3,24E+06	$v_y(0)=$	9,26E+03
9	-6,82	-4,30	-3216	8402	5,95E+06	3,75E+06	$x(0)=$	6,700E+06
10	-6,31	-4,67	-3626	8144	5,73E+06	4,24E+06	$y(0)=$	0
...	...	...	...	...	...	...		

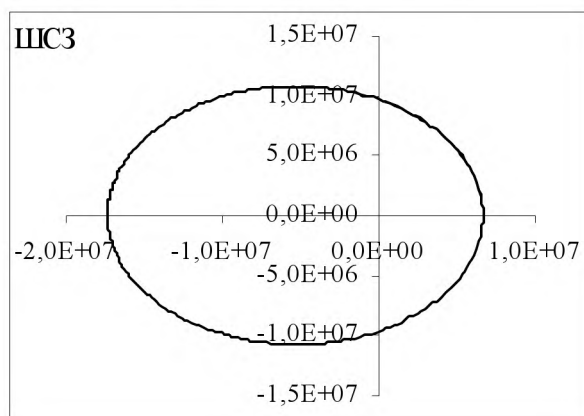


Рис. 8.3

Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення  $v_y(0) = \sqrt{2} \cdot v_{1K}$ , тобто вводячи до Н8 нового множника  $\sqrt{2}$ , одержуємо параболічну (розімкнену) траєкторію (рис. 8.4):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_x$	$a_y$	$v_x$	$v_y$	$x$	$y$	Дано:	ПІСЗ
2	-8,88	0,00	0	10800	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11
3	-8,80	-0,86	-266	10910	6,68E+06	6,48E+05	$\Delta t=$	60
4	-8,55	-1,68	-794	10858	6,64E+06	1,29E+06	$M=$	5,976E+24
5	-8,16	-2,43	-1307	10757	6,56E+06	1,93E+06	$m=$	1,000E+03
6	-7,66	-3,07	-1797	10611	6,45E+06	2,56E+06	$r=$	6,700E+06
7	-7,08	-3,60	-2257	10427	6,31E+06	3,18E+06	$v_x(0)=$	0
8	-6,45	-4,01	-2682	10211	6,15E+06	3,79E+06	$v_y(0)=$	1,08E+04
9	-5,80	-4,30	-3068	9970	5,97E+06	4,38E+06	$x(0)=$	6,700E+06
10	-5,16	-4,48	-3417	9712	5,76E+06	4,96E+06	$y(0)=$	0
...	...	...	...	...	...	...		

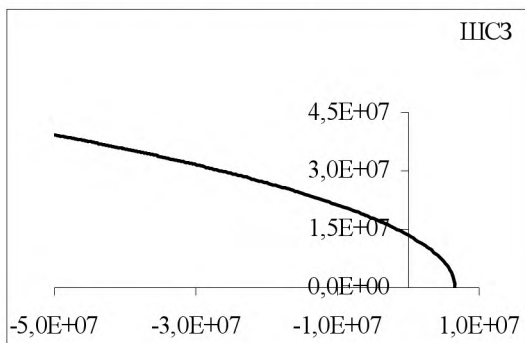


Рис. 8.4

### Завдання

1. Траєкторія може бути й гіперболічною. З'ясуйте, за якої умови це стає можливим, а потім перевірте свою відповідь на моделі.

2. Закон тяжіння не відрізняє штучний супутник від природного. Планети Сонячної системи є природними супутниками Сонця, і при цьому добре виконується умова  $m_{\text{планети}} \ll M_{\text{Сонця}}$ . Враховуючи цей факт, змодельуйте рух Землі навколо Сонця, змінивши в уже побудованій моделі потрібним чином вміст деяких комірок стовпця Н.

### Висновки

1. Траєкторією руху тіла, на яке діє сила всесвітнього тяжіння, може бути одна з кривих другого порядку – коло, еліпс, парабола чи гіпербола в залежності від початкових умов.

2. Всі розглянуті моделі можна об'єднати в одну групу за спільною ознакою  $m_{\text{супутн}} \ll M_{\text{центр. тіла}}$ . Усвідомлення цього факту є логічною умовою переходу до наступного етапу роботи.

## 8.2. Рух природного супутника планети та рух компонентів системи “подвійна зірка”

### 8.2.1. Постановка задачі

Природні супутники планет мають маси, якими не завжди можна нехтувати в порівнянні з масами самих планет, тому моделювання руху таких супутників є більш складною задачею.

Знов почнемо аналіз із найбільш простого випадку – руху вздовж колових орбіт.

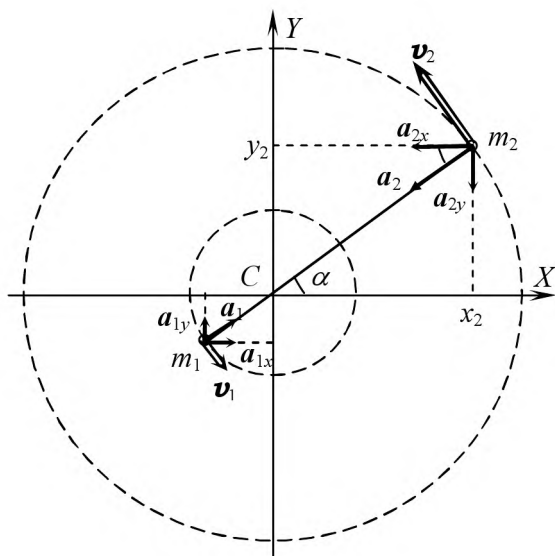


Рис. 8.5

1. Обидва ці тіла – центральне  $m_1$  і супутник  $m_2$  – обертаються навколо нерухомої точки  $C$  – їхнього спільного центра мас. При цьому вони весь час знаходяться на одній прямій, що сполучає тіла і проходить через точку  $C$ . Ця точка ділить відстань  $R$  між тілами на відрізки  $r_1$  і  $r_2$  у відношенні

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

звідки маємо:

$$r_1 = \frac{R}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad r_2 = \frac{R}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Переходячи до проекцій, маємо для моменту часу  $t = 0$ :

$$x_1(0) = -\frac{R}{1 + \frac{m_1}{m_2}}; \quad x_2(0) = \frac{R}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad (5)$$

де  $x_1, x_2$  – координати тіл у системі відліку, пов'язаній зі спільним центром мас.

2. Певних уточнень вимагають також вирази для прискорень.

Сила тяжіння надає прискорень обом тілам:

$$\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2, \text{ звідки } a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2}.$$

Для моменту часу  $t = 0$  отримуємо:

$$\begin{aligned} a_{1x}(0) &= \frac{Gm_2x_1(0)}{R^3}; \quad a_{1y}(0) = \frac{Gm_2y_1(0)}{R^3}; \\ a_{2x}(0) &= -\frac{Gm_1x_2(0)}{R^3}; \quad a_{2y}(0) = -\frac{Gm_1y_2(0)}{R^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

В загальному випадку (для будь-якого моменту часу) з урахуванням можливої зміни відстані між тілами (наприклад, при русі тіл еліптичними траєкторіями) вирази (6) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \quad a_{1y} = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \\ a_{2x} &= -\frac{Gm_1(x_2 - x_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}; \quad a_{2y} = -\frac{Gm_1(y_2 - y_1)}{\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right)^3}, \end{aligned}$$

де  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  – відповідно координати першого і другого тіла, а  $R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  – відстань між тілами.

В задачі про штучний супутник ми вже бачили, що вигляд траєкторій руху тіл визначається початковими умовами, і зокрема, початковими швидкостями  $v_{1y}(0)$  і  $v_{2y}(0)$ . Оскільки тут розглядається рух

двох тіл уздовж колових орбіт, то  $v_{2y}(0) = \sqrt{\frac{Gm_1}{R}}$ . Виразимо  $v_{1y}(0)$  через  $v_{2y}(0)$  з наступних міркувань.

Знаходячись весь час на одній прямій, обидва тіла мають однакові періоди обертання  $T_1 = T_2$ :

$$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \text{ і } T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2}, \text{ звідки } \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

що для  $t = 0$  в проєкціях дає  $\frac{v_{1y}(0)}{v_{2y}(0)} = \frac{x_1(0)}{x_2(0)}$ .

Остаточно маємо:

$$v_{1y}(0) = v_{2y}(0) \frac{x_1(0)}{x_2(0)}.$$

### 8.2.2. Обговорення алгоритму

Оскільки тепер розглядається рух *двох* тіл, то виникає необхідність збільшити удвічі кількості змінних (а отже, й стовпців таблиці). Розподілимо їх у такий спосіб:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$a_{1x}$	$a_{1y}$	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{1x}$	$v_{1y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	Дано:	Значення
2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$G =$	
3													$\Delta t =$	
4													$m_1 =$	
5													$m_2 =$	
6													$R =$	
7													$v_{1x}(0) =$	
8													$v_{1y}(0) =$	
9													$v_{2x}(0) =$	
10													$v_{2y}(0) =$	
11													$x_1(0) =$	
12													$y_1(0) =$	
13													$x_2(0) =$	
14													$y_2(0) =$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

Вміст комірок нової таблиці:

комірки	формули / числа	коментарі
N7	0	
N8	=N10*N11/N13	
N9	0	
N10	=(N2*N4*N13)^0,5/N6	
N11	=N6/(1+N4/N5)	
N12	0	
N13	=N6/(1+N5/N4)	
N14	0	
A2	=\$N\$2*\$N\$5*(K2-I2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в A3, A4
B2	=\$N\$2*\$N\$5*(L2-J2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в B3, B4
C2	=\$N\$2*\$N\$4*(I2-K2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в C3, C4
D2	=\$N\$2*\$N\$4*(J2-L2)/((I2-K2)^2+(J2-L2)^2)^1,5	копіювати в D3, D4

комірки	формули / числа	коментарі
E2	=N\$7	
F2	=N\$8	
G2	=N\$9	
H2	=N\$10	
I2	=N\$11	
J2	=N\$12	
K2	=N\$13	
L2	=N\$14	
E3	=E2+A2*\$N\$3*0,5	
F3	=F2+B2*\$N\$3*0,5	
G3	=G2+C2*\$N\$3*0,5	
H3	=H2+D2*\$N\$3*0,5	
I3	=I2+E3*\$N\$3	копіювати в I4
J3	=J2+F3*\$N\$3	копіювати в J4
K3	=K2+G3*\$N\$3	копіювати в K4
L3	=L2+H3*\$N\$3	копіювати в L4
E4	=E3+A3*\$N\$3	
F4	=F3+B3*\$N\$3	
G4	=G3+C3*\$N\$3	
H4	=H3+D3*\$N\$3	

### 8.2.3. Алгоритм роботи

1. Додати до таблиці нові стовпці.
2. Заповнити комірки N2–N6 у відповідності з даними задачі.
3. Заповнити комірки за наведеною вище таблицею.
4. Всі формули 4-го рядка копіювати у наступні 100.
5. Побудувати графіки, користуючись парами даних зі стовпців I, J ( $x_1, y_1$ ) та K, L ( $x_2, y_2$ ).

*Увага!* Виконання цього пункту виявиться успішним, якщо правильно відкоригувати ряди даних. Опишемо це більш докладно.

У всіх попередніх графічних побудовах нам доводилось мати справу з випадками, коли були потрібні один або декілька графіків залежності від одного й того самого аргументу (часто, але не завжди таким аргументом виявлявся час  $t$ ). Зараз виникла потреба в побудові іншого характеру: згідно з п. 5 на одній координатній площині потрібні два графіки залежностей  $y_1 = y_1(x_1)$  та  $y_2 = y_2(x_2)$ , тобто залежностей від різних аргументів. Якщо на початку побудови виділити чотири стовпці I ( $x_1$ ), J ( $y_1$ ), K ( $x_2$ ), L ( $y_2$ ), то програма *Мастер діаграм* за замовчанням сприйме в якості аргументу стовпець I – перший з виділених стовпців, – і побудує три графіки для функцій одного аргументу  $x_1$ :  $y_1 = y_1(x_1)$ ,  $y_2 = y_2(x_1)$ ,  $y_3 = y_3(x_1)$ . Саме з цієї причини виникає потреба в редагуванні рядів даних.

Подальша робота передбачає таке: поставити покажчик миші в *Область дирамы* там вивести контекстне меню (права кнопка миші), в якому обрати *Исходные данные*, там відкрити вкладку *Ряд*, а далі керуватись фрагментами вікна *Исходные данные*, зображеними нижче.

Насамперед у вікні *Ряд* слід видалити  $x_2$ .

Для ряду  $y_1$  зміни не потрібні, оскільки значення  $y_1$  розміщені саме в стовпці J.

Для ряду  $y_2$  змін потребує рядок Значення X. Адже аргументами для значень  $y_2$  зі стовпця L є числа зі стовпця K.

#### 8.2.4. Обчислювальний експеримент

**Задача 1.** Відомо, що маса Місяця ( $m_2$ ) у 81 раз менша за масу Землі ( $m_1$ ). Приймавши відстань  $R$  між центрами цих тіл рівною 380 тис. км ( $3,8 \cdot 10^8$  м), змодельємо рух системи Земля – Місяць.

*Розв'язання.*

1. Уведемо дані до комірок таблиці:

$$N4(m_1) \rightarrow 5,98 \cdot 10^{24}; N5(m_2) \rightarrow 5,98 \cdot 10^{24}/81; N6(R) \rightarrow 3,8E+08;$$

$$N3(\Delta t) \rightarrow 8,64E+04 \text{ (тривалість однієї доби в секундах).}$$

2. Побудуємо траєкторії руху кожного з тіл (рис. 8.6), якими є графіки  $y_1 = y_1(x_1)$  і  $y_2 = y_2(x_2)$ .

Жирна “точка” в центрі рис. 8.6 в дійсності є маленьким колом. Це орбіта Землі.

**Завдання.** Переконайтесь, що дана модель містить у собі попередню (про рух штучного супутника) за попередніх умов.

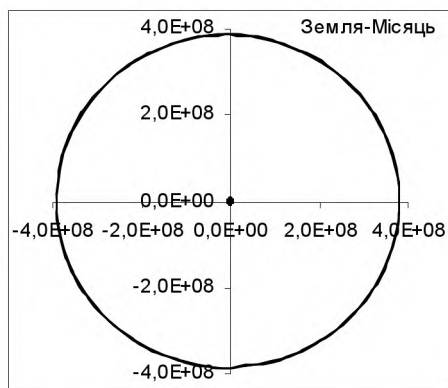


Рис. 8.6

**Задача 2.** Якби на місці Місяця знаходилась планета з масою, утричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти цих тіл?

Результат зображений на рис. 8.7. При побудові цього рисунку час моделювання був обмежений так, щоб обидва тіла не виконали й одного повного оберту. Тоді довжина штрихового відрізка прямої, що сполучає точки траєкторій в останній момент руху, дорівнює сталій відстані  $R$  між тілами, як про це йшлося вище. Крім того, стають зрозумілими напрямки руху кожного з тіл.

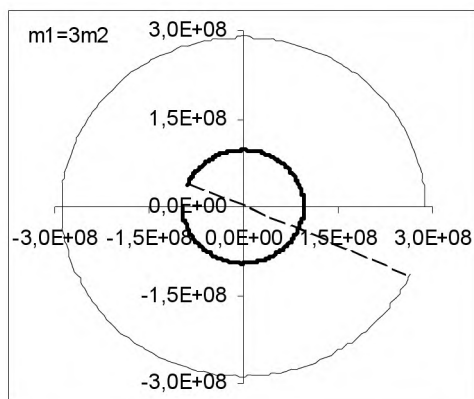


Рис. 8.7

Тут ми безпосередньо підійшли до моделювання руху компонентів у системах, що зовуться фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння, і обертаються по



еліптичних орбітах навколо спільного центра мас. Зрозуміло, що остання модель передбачає такі об'єкти. Проте ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які є широко вживаними в астрофізиці:

- 1) одиницею маси є маса Сонця,  $1 M_c = 1,99 \cdot 10^{30}$  кг;
- 2) час вимірюють у земних роках,  $1 \text{ рік} = 3,15 \cdot 10^7$  с;
- 3) одиницю довжини обирають в залежності від задачі, нею може бути:

- астрономічна одиниця (середній радіус земної орбіти),  
 $1 A.O. = 1,5 \cdot 10^{11}$  м;
- світловий рік (відстань, що її долає світло протягом 1 року),  
 $1 \text{ св. рік} = 9,5 \cdot 10^{15}$  м;
- парсек (відстань, з якої радіус земної орбіти видно під кутом  $1''$ ),

$$1 \text{ пк} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ м.}$$

Відстані до зірок найчастіше подають у світлових роках або в парсеках, а відстані між компонентами систем зірок – у астрономічних одиницях.

Згаданий перехід фактично стосується визначення числового значення розмірного коефіцієнта  $G$  у законі всесвітнього тяжіння. Така вправа без сумніву є корисною, оскільки розкриває зміст часто вживаної фрази: “Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць”.

Пригадайте, у який спосіб виконують подібні операції.

В разі утруднення скористайтеся допомогою:

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,5 \cdot 10^{11}}\right)^3 A.O.^3}{\left(\frac{1}{1,99 \cdot 10^{30}}\right) M_c \cdot \left(\frac{1}{3,15 \cdot 10^7}\right)^2 \text{рік}^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Остаточню отримуємо } G = 39 \frac{A.O.^3}{M_c \cdot \text{рік}^2}.$$

#### Завдання

1. Якими в даній системі одиниць є одиниці швидкості, прискорення?

2. Яких значень набуватиме стала всесвітнього тяжіння  $G$ , якщо

відстань вимірювати в парсеках або у світлових роках?

3. Встановіть співвідношення між зазначеними вище одиницями довжини.

Після виконання наведених перетворень розв'яжіть задачу.

**Задача 3.** Побудувати орбіти компонентів системи подвійної зірки, до складу якої входять зірки з масами  $1 M_{\odot}$  та  $4 M_{\odot}$ , відстань між якими становить  $20 A.O.$

*Розв'язання.*

Насамперед вимагає збільшення хоча б до 300 кількості рядків, тому що помітно зростають періоди обертання компонентів системи, а просте збільшення інтервалу  $\Delta t$  при попередніх 100 рядках таблиці вже не забезпечує необхідної точності обчислень. У зв'язку з цим всі формули 4-го рядка слід копіювати у наступні 300.

Заповнимо комірки N2–N6:

N2 ( $G$ ) – 39; N3 ( $\Delta t$ ) – 0,15; N4 ( $m_1$ ) – 4; N5 ( $m_2$ ) – 1; N6 ( $R$ ) – 20.

За умови, що  $v_{2y}(0)$  – вміст комірки N10 – дорівнює числовому значенню швидкості, яка забезпечує рух по коловій орбіті і для штучних супутників має назву “перша космічна”, отримаємо вже знайомий результат з коловими орбітами (рис. 8.8), а у випадку її збільшення, наприклад, у 1,17 рази з одночасною зміною  $\Delta t$  (комірка N3) до 0,3 орбіти обох компонентів будуть еліптичними (рис. 8.9).

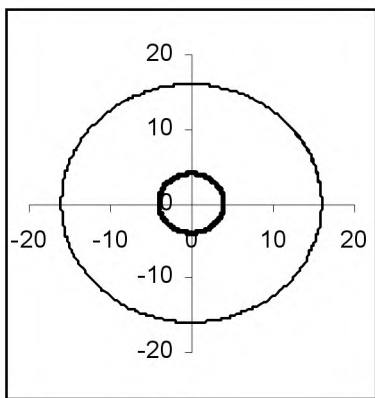


Рис. 8.8

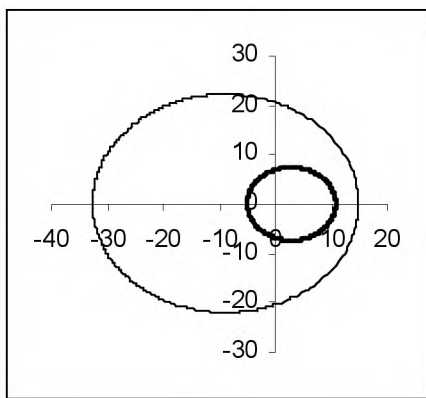


Рис. 8.9

За астрономічними даними в нашій Галактиці від 50 до 70% зірок входять до складу подвійних систем, а 10% є компонентами кратних систем, які містять у своєму складі від 3 до 10 зірок.

З підручників фізики відомо, що в межах Сонячної системи

закон всесвітнього тяжіння і решта законів Ньютона є правильними. Адже саме на основі цих законів свого часу були відкриті дві до того невідомі планети, що одержали назви Нептун (1846 р.) і Плутон (1930 р.). У наш час ці закони кладуть в основу розрахунків траєкторій космічних апаратів, і вони підтверджуються усім досвідом практичної космонавтики. Принагідно зазначимо, що польоти американських космічних апаратів до Місяця з наступним поверненням на Землю здійснювалися за найбільш економічною схемою, що її в 1927 р. обґрунтував і розрахував невизнаний за радянських часів талановитий український вчений Юрій Коидратюк. Відповідну траєкторію американські вчені називають «траєкторією Коидратюка».

Чи можна стверджувати, що на міжзоряних відстанях, значно більших за розміри Сонячної системи, ці закони також справджуються? Позитивну відповідь астрономи знаходять, фотографуючи далекі системи подвійних зірок. На рис. 8.10 подана широко відома фотографія, отримана в результаті тривалих спостережень за відносними позиціями компонентів подвійної зірки Сиріус.

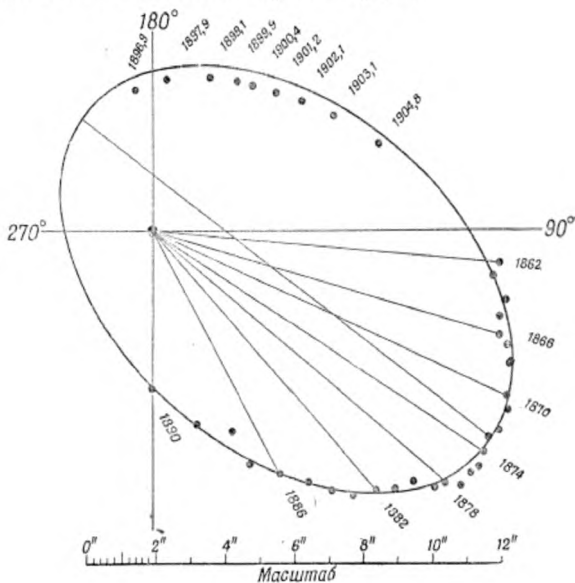


Рис. 8.10

Як говорять, коментарі зайві. Подібну картину руху можна одержати, якщо в таблиці, що відповідає рис. 8.9, реалізувати умову  $m_2 \ll m_1$  і узгодити масштаби на координатних осях.

### **Вправи**

1. Скільки років тривали спостереження згідно рис. 8.9?
2. З'ясуйте за підручниками астрономії, чому початок координат на фотографії (рис. 8.10) не знаходиться на великій вісі еліпса?

У сучасній астрофізиці закон тяжіння відіграє важливу роль при описі процесів, що відбуваються на різних стадіях еволюції зірок.

### **Висновки**

1. З рис. 8.9 та 8.10 гарно видно, що обидва тіла обертаються в один бік відносно центра мас вздовж геометрично подібних траєкторій, які відрізняються тільки розмірами. Ці розміри обернено пропорційні масам тіл:  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ .

2. Відрізок прямої, що сполучає тіла під час руху, завжди проходить через спільний центр мас (центр мас системи).

3. Насправді відміна §2 від §1 не є принциповою. Виконання умови  $m_{\text{супутника}} \ll m_{\text{центр. тіла}}$  тільки полегшує задачу. Головне ж полягає в тому, що ми розглядаємо так звану задачу двох тіл про рухи тіл у створюваному ними полі тяжіння. Якщо ж тіл не два, а, наприклад, три, то ускладнення стає настільки значним, що розв'язок взагалі не може бути виражений у вигляді відомих елементарних або спеціальних функцій. В загальному випадку така задача зветься задачею  $n$  тіл і розв'язується виключно чисельними методами.

### **8.3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння**

Закони руху планет були експериментально відкриті видатним австрійським математиком і астрономом Йоганном Кеплером на основі вивчення результатів тривалих спостережень за положеннями (координатами) планет (зокрема, Марсу) на небесній сфері і наступним поданням цих координат в системі відліку, пов'язаній із Сонцем. Ці спостереження раніше виконав учитель Кеплера – голландський астроном Тіхо Браге.

Як зазначають історики науки, для встановлення цих законів Кеплеру довелося виконати багато обчислень. Кожне обчислення – три сторінки великого формату, а для запобігання помилок воно повторювалося 70 разів. Збереглося 900 аркушів таких обчислень, заповнених дрібним кеплерівським почерком. На ці розрахунки та на осмислення їх результатів учений витратив вісімнадцять (!) років.

Закон всесвітнього тяжіння був встановлений Ньютоном помітно пізніше, ніж закони Кеплера, і, як відомо, виявився їх теоретичним уточненням і узагальненням. Закони Кеплера були сформульовані автором тільки для планет, тобто для випадків, коли маса тіла-супутника (планети) набагато менша за масу центрального тіла (Сонця). Вони передбачають тільки еліптичні орбіти.

Закон всесвітнього тяжіння описує гравітаційні взаємодії будь-яких пар тіл. Саме тому при перевірці законів Кеплера на основі закону всесвітнього тяжіння можна скористатись однією з уже розглянутих моделей з еліптичними траєкторіями, наприклад, моделлю руху штучного супутника навколо планети з §8.1.

### 8.3.1. Перший закон Кеплера

*Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.*

Означення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою.

На рис. 8.11 зображений еліпс. Тут показані:  $F_1, F_2$  – фокуси еліпса;  $2a$  – велика вісь;  $2b$  – мала вісь,  $C$  – центр симетрії.

Внаслідок симетрії  $F_2G = F_1H$ .

Окремим випадком еліпса є коло (фокуси співпадають і утворюють центр кола).

Можна довести, що  $r_1 + r_2 = 2a = \text{const}$  (доведіть!).

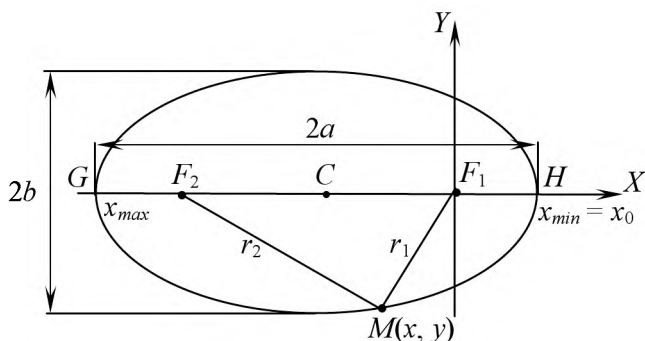


Рис. 8.11

Суть пропонованого нижче підходу відтворює наступну ідею: якщо стверджується, що траєкторією руху є одна з кривих другого порядку, то всі її точки мають задовольняти означенню даної кривої. На наш погляд, це надійний спосіб відрізнити еліпс від овалу чи параболу від гіперболи, адже на око вони можуть бути схожими.

Те, що орбіта є еліпсом, зазвичай сприймається школярами на віру. Проте застосування комп'ютера дозволяє організувати дослідження, спрямоване на з'ясування форми траєкторії. Якщо траєкторія дійсно є еліпсом, а центральне тіло знаходиться у фокусі  $F_1$ , то для всіх точок такої траєкторії повинна виконуватись щойно згадана рівність

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const.}$$

Цей факт і буде перевірений у обчислювальному експерименті.

Повернемось до таблиці, що відображає рух штучного супутника Землі (рис. 8.3).

Нагадаємо, що тут на основі закону тяжіння ми розрахували координати точок орбіти, що відповідають послідовним однаковим проміжкам часу  $\Delta t$ , і за цими координатами саму орбіту.

Відрізки  $r_1$  і  $r_2$  будемо визначати через координати  $x$ ,  $y$  довільної точки  $M$  орбіти та координати фокусів  $F_1$  і  $F_2$ :

$$r_1 = \sqrt{(x_M - x_{F_1})^2 + (y_M - y_{F_1})^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x_M - x_{F_2})^2 + (y_M - y_{F_2})^2}.$$

У відповідності до рис. 8.11 конкретизуємо значення деяких змінних:

$$x_{F1} = 0, y_{F1} = 0;$$

$$\begin{aligned} x_{F2} &= GH - F_1H - F_2G = 2a - 2F_1H = (|x_{\max}| + |x_{\min}|) - 2|x_{\min}| = \\ &= |x_{\max}| - |x_{\min}| = |x_{\max}| - |x_0|; \end{aligned}$$

$$y_{F2} = 0.$$

Після перетворень попередніх формул для  $r_1$  і  $r_2$  шляхом підстановки в них щойно встановлених значень отримуємо вирази, придатні для розрахунків:

$$r_1 = \sqrt{x_M^2 + y_M^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x_M - (|x_{\max}| - |x_0|))^2 + y_M^2}.$$

### Алгоритм роботи

1. Дописати до умови (у стовпці G та H) значення параметрів  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ ,  $a$ , та  $x$ -координат фокусів  $x_{(F1)}$  та  $x_{(F2)}$  майбутнього еліпса.

2. Додати до таблиці три нові стовпці I, J, K; у них розмістити результати розрахунків значень змінних  $r_1$ ,  $r_2$ , та  $r_1 + r_2$ . Довжини відрізків  $r_1$  та  $r_2$  обчислювати за координатами їхніх початків та кінців.

3. Уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа	коментарі
H10	=МАКС(E2:E250)	x-координата точки $G$
H11	=МИН(E2:E250)	x-координата точки $H$
H12	=0,5*ABS(H10-H11)	x-координата точки $O$
H13	0,00	x-координата точки $F_1$
H14	=H11+H10	x-координата точки $F_2$
I3	=((E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000	довжина відрізка $r_1$
J3	=((\$H\$14-E2)^2+(F2)^2)^0,5/1000000	довжина відрізка $r_2$
K3	=I3+J3	

4. Формули комірок I3, J3 та K3 копіювати до самого низу таблиці (кожну у своєму стовпці), так що фактично переглядом охоплюються всі точки, за якими була побудована траєкторія.

На рис. 8.12 наведені результати дослідження.

Такі гарні результати завжди повинні викликати сумніви, однак у даному випадку приводи для сумнівів відсутні: точність кінцевого результату ( $r_1 + r_2$ ) має бути не набагато гіршою за точність обчислення координат точок орбіти, тому що розрахунки значень  $r_1$  і  $r_2$  ведуться саме за цими точками.

Таким чином, при русі тіла під дією сили тяжіння траєкторія, якщо вона обмежена в просторі (фінитна) і замкнута, виявляється еліпсом, у одному з фокусів якого знаходиться центральне тіло.

	...	E	F	G	H	I	J	K
1	...	$x$	$y$	Дано: ШСЗ	Перший закон Кеплера			
2	...	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11	$r_1$	$r_2$	$r_1+r_2$
3	...	6,68E+06	5,55E+05	$\Delta t=$	60	6,70	17,27	23,97
4	...	6,64E+06	1,11E+06	$M=$	5,976E+24	6,71	17,26	23,97
5	...	6,56E+06	1,66E+06	$r=$	6,700E+06	6,73	17,24	23,97
6	...	6,45E+06	2,20E+06	$v_x(0)=$	0	6,76	17,20	23,97
7	...	6,31E+06	2,73E+06	$v_y(0)=$	9,26E+03	6,81	17,15	23,97
8	...	6,14E+06	3,24E+06	$x(0)=$	6,700E+06	6,87	17,09	23,97
9	...	5,95E+06	3,75E+06	$y(0)=$	0	6,95	17,02	23,97
10	...	5,73E+06	4,24E+06	$x_{max}=$	6,70E+06	7,03	16,94	23,97
11	...	5,49E+06	4,71E+06	$x_{min}=$	-1,73E+07	7,13	16,84	23,97
12	...	5,23E+06	5,16E+06	$a=$	1,20E+07	7,23	16,73	23,97
13	...	4,95E+06	5,60E+06	$x_{(F1)}=$	0,00	7,35	16,62	23,97
14	...	4,65E+06	6,01E+06	$x_{(F2)}=$	-1,06E+07	7,47	16,49	23,97
...	...	...	...			...	...	...

Рис. 8.12

### 8.3.2. Другий закон Кеплера

Напрявлений відрізок, що сполучає Сонце й планету (радіус-вектор планети) за однакові проміжки часу описує (замітає) рівні

площі (рис. 8.13).

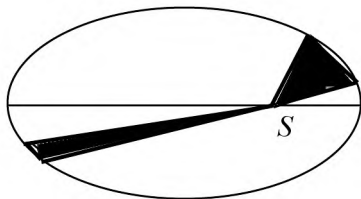


Рис. 8.13

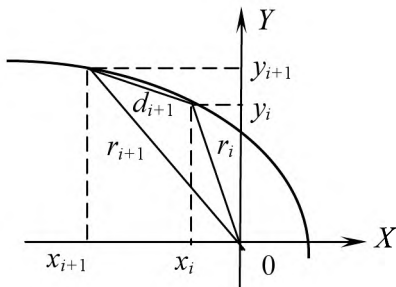


Рис. 8.14

Експериментальна перевірка другого закону Кеплера є не менш цікавою та корисною, ніж попередня.

На рис. 8.14 показані два радіуси-вектори  $r_i$  і  $r_{i+1}$ , що відповідають початку і кінцю  $i$ -го проміжку часу  $\Delta t$ . Дугу, що стягує їхні кінці, з достатнім наближенням можна замінити хордою  $d_{i+1}$ . Шукану площу знайдемо за трьома сторонами  $r_i, r_{i+1}, d_{i+1}$  (за формулою Герона):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де  $p = \frac{1}{2}(r_i + r_{i+1} + d_{i+1})$  — напівпериметр трикутника.

#### Завдання

1. Як можна обчислити  $r_i, r_{i+1}$  та  $d_{i+1}$ ?

#### Алгоритм роботи

Добавимо до таблиці п'ять нових стовпців L, M, N, O, P. У них будуть заноситися результати обчислення сторін трикутника  $r_i, r_{i+1}, d_{i+1}$ , півпериметра  $p_i$  та площі  $S_i$ .

Довжини всіх відрізків, як і раніше, обчислюємо за координатами їхніх початків та кінців. Уміст комірок таблиці має бути таким:

комірка	формули / числа
L3	$=((E2)^2 + (F2)^2)^{0,5} / 1000000$
M3	$=((E3)^2 + (F3)^2)^{0,5} / 1000000$
N3	$=((E3 - E2)^2 + (F3 - F2)^2)^{0,5} / 1000000$
O3	$= 0,5 * (L3 + M3 + N3)$
P3	$= (O3 * (O3 - L3) * (O3 - M3) * (O3 - N3))^{0,5}$

Дільник 1000000 спрощує виведення результатів у таблиці.

На рис. 8.15 подано відповідний фрагмент доповненої таблиці:



	...	L	M	N	O	P
1	...	<i>Другий закон Кеплера</i>				
2	...	$r_i$	$r_{i+1}$	$d_{i+1}$	$p_i$	$S_i$
3	...	6,70	6,71	0,56	6,98	<b>1,86</b>
4	...	6,71	6,73	0,55	7,00	<b>1,86</b>
5	...	6,73	6,76	0,55	7,02	<b>1,86</b>
6	...	6,76	6,81	0,55	7,06	<b>1,86</b>
7	...	6,81	6,87	0,55	7,12	<b>1,86</b>
...	...	...	...	...	...	...

Рис. 8.15

Отже, перевірка другого закону Кеплера засобами обчислювального експерименту підтверджує його справедливість.

**Завдання.** Поверніться до рис. 8.10. У якому з років – 1896 чи 1874 – компонент меншої маси (тіло-супутник) рухався з більшою швидкістю?

### 8.3.3. Третій закон Кеплера

Нагадаємо, що закони руху планет були встановлені Й. Кеплером на основі опрацювання даних із спостережень. На відміну від двох перших законів, де йдеться про особливості руху тіла-супутника (планети) відносно центрального тіла (Сонця), в третьому законі розглядаються *дві довільні пари тіл*, в кожній з яких тіла взаємодіють із силою всесвітнього тяжіння. У формулюванні Кеплера (для планет) *квадрати періодів обертання будь-яких двох планет відносяться як куби їх середніх відстаней від Сонця*:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}.$$

Середньою відстанню  $R$  тіла-супутника від центрального тіла є половина великої осі орбіти – так звана велика піввісь.

Перевірку закону можна здійснити, маючи таблицю, побудовану для двох пар тіл (“Сонце – планета1” і “Сонце – планета2”), або одержати його як *теоретичний* наслідок закону всесвітнього тяжіння, що ми й виконаємо для найбільш простого випадку – колових орбіт.

Як було зазначено раніше, сила тяжіння надає прискорень обом тілам:  $\frac{Gm_1m_2}{R^2} = m_1a_1 = m_2a_2$ , звідки

$$a_1 = \frac{Gm_2}{R^2}; \quad a_2 = \frac{Gm_1}{R^2}. \quad (7)$$

З іншого боку,  $a = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ , так що

$$a_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}; \quad a_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2} \quad (8)$$

Поєднуючи відповідні вирази із (7) та (8), отримуємо

$$\frac{Gm_2}{R^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}; \quad \frac{Gm_1}{R^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}. \quad (9)$$

Додамо обидва рівняння з (9), і, оскільки  $T_1 = T_2$ , будемо мати

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{R^2} = \frac{4\pi^2 (r_1 + r_2)}{T^2}$$

або

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

що можна записати у вигляді

$$(m_1 + m_2) \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Тут  $m_1, m_2$  – маси тіл, що взаємодіють.

Переходячи до пари “планета–Сонце”, одержимо

$$(m + M) \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

Для двох будь-яких пар тіл, в кожній з яких між тілами діють сили всесвітнього тяжіння, зазвичай записують

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{m_1 + M_1}{m_2 + M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad (10)$$

Вираз (10) є уточненням третього закону Кеплера, зробленим Ньютоном на основі закону всесвітнього тяжіння:

*Квадрати періодів обертання тіл-супутників навколо центральних тіл, помножені на суму мас відповідної пари тіл, відносяться як куби великих півосей орбіт.*

Цей вираз дає надійний спосіб для порівняння мас небесних тіл.

Ще раз наголошуємо, що *всі* закони Кеплера описують поведінку будь-якої пари тіл, між якими діє сила всесвітнього тяжіння. Прикладами таких пар є Сонце – планета, Сонце – комета, планета – природний (або штучний) супутник тощо. Дуже цікавими небесними об'єктами є комети, що мають вигляд хвостатої зірки або просто туманної плями, яка переміщується на фоні зоряного неба.

Мабуть, самою знаменитою періодичною кометою є комета Галлея. Записи про її появи вдалося прослідкувати аж до 239 р. до н.е. Її назвали на честь англійського вченого Едмунда Галлея, котрий у

1705 р. першим припустив, що комети, які спостерігалися в 1456, 1531, 1607 та 1682 рр., були повторними поверненнями одного й того самого об'єкта. Він висловив передбачення, що комета знову повернеться в 1758 р., і її повернення в 1758 р., вже після смерті вченого, довело, що вона є членом сонячної системи. Коли комета Галлея поверпулася в 1910 р., Земля пройшла крізь її хвіст, що на той час стало джерелом надзвичайно сильного хвилювання серед населення, хоч проходження комети не спричинило в природі ніяких наслідків. У 1986 р. спостерігалася чергова поява комети Галлея. Це було її сьоме і поки що останнє повернення з подорожі навколо Сонця, якщо вести рахунок від тих днів 1456 р., коли перелякані люди возносили молитви, бажаючи захистити їх від “диявола, турка і комети”.

**Задача.** Відомо, що під час сьомого проходження комети через перигелій була визначена відстань між нею й Сонцем, яка виявилась рівною  $0,6 \text{ А.О.}$  (астрономічних одиниць).

1. Змодельуйте рух комети Галлея й оцініть за моделлю відстань, на яку відходить комета від Сонця в афелії.

2. Результат перевірте розрахунком. Прийняти період обертання комети  $T = 75,5$  років, а її масу  $m = 10^{14}$  кг.

**Примітка.** Для розрахунку слід скористатись виразом третього закону згідно формулювання, даного Кеплером. Його зручно записати для двох пар тіл: “Сонце – комета” і “Сонце – Земля”. Одиницею відстані взяти  $1 \text{ А.О.}$ , а одиницею часу –  $1$  земний рік.

3. Яким стане розрахунок, якщо другою парою тіл буде не “Сонце – Земля”, а “штучний супутник – Земля”?

## **8.4. Узагальнення закону тяжіння на випадок довільного показника степеня $k$ для відстані $r$ між тілами**

### **8.4.1. Постановка проблеми. План роботи**

Далі йдеться про узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного значення показника степеня  $k$  для відстані  $r$  між тілами:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k} \quad (7)$$

Поставлену проблему можна сформулювати і так: як би рухалися тіла Сонячної системи, якби гравітаційна взаємодія відбувалася за законом (7) при довільному  $k$ ?

Така постановка проблеми виходить за межі шкільних курсів фізики й математики і є об'єктом курсу теоретичної фізики. Тому дослідження комп'ютерної моделі виявляється єдиним методом, що дозволяє усупути ускладнення, пов'язані з обмеженим математичним

апаратом школярів.

Спочатку розглянемо згаданий вище простий випадок, коли  $m_{\text{супутн}} \ll m_{\text{центр.тіло}}$  і відстань між центрами тіл значно перевищує їхні розміри (вважаємо тіла матеріальними точками), будемо також нехтувати впливом на них інших тіл Сонячної системи і опором середовища. Тоді на тіло-супутник діятиме тільки одна сила всесвітнього тяжіння (рис. 6.1). Її проекції на вісі  $x, y$  відповідно дорівнюватимуть

$$F_x = -\frac{GMmx}{r^{k+1}}; \quad F_y = -\frac{GMmy}{r^{k+1}},$$

а проекції прискорення за аналогією з (3) будуть

$$a_x = -\frac{GMmx}{r^{k+1}}; \quad a_y = -\frac{GMmy}{r^{k+1}} \quad (8)$$

Відстань  $r$  між тілами, як і раніше, будемо визначати за теоремою Піфагора:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Тому

$$a_x = GMx(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}; \quad a_y = GMy(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}. \quad (9)$$

Система рівнянь (9) є математичною моделлю руху тіла-супутника.

Знов дослідимо рух Землі навколо Сонця, але вже за новим, модифікованим законом. Пригадаємо, що тіло стає супутником і рухається коловою орбітою, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості  $v_{1K}$ , значення якої звичайно знаходять за умови, що сила тяжіння забезпечує необхідне доцентрове (нормальне) прискорення:

$$\frac{GMm}{r^k} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки

$$v_y(0) = v_{1K} = \sqrt{\frac{GM}{r^{(k-1)}}} \quad (10)$$

#### 8.4.2. Обчислювальний експеримент

У зв'язку з появою ще однієї змінної величини – показника степеня  $k$  – деяких змін має зазнати зовнішній вигляд таблиці:

Не повторюючи всіх подробиць, зазначимо тільки головне.

1. Обчислення координат  $x, y$  точок орбіти будемо виконувати за циклічною схемою *прискорення*  $\rightarrow$  *швидкість*  $\rightarrow$  *координата*.

2. Початкові значення змінних  $v_x(0), v_y(0), x(0)$  та  $y(0)$  будемо зберігати в комірках, розташованих під умовою, причому значення  $v_y(0)$  обчислюватиметься автоматично за модифікованою формулою (10), яку необхідно буде створити в Н9.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	
2							$G=$	
3							$\Delta t=$	
4							$m_1=$	
5							$m_2=$	
6							$r=$	
7							$k=$	
8							$v_{2x}(0)=$	
9							$v_{2y}(0)=$	
10							$x_2(0)=$	
11							$y_2(0)=$	
...	...	...	...	...	...	...		

Зазначимо вхідні дані та початкові ( $t = 0$ ) умови:

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}, m = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}, r = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м}, x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, x_2(0) = r, \\ y_2(0) = 0, v_{1x}(0) = 0, v_{2x}(0) = 0, v_{1y}(0) = 0, v_{2y}(0) = v_{1k}.$$

І знов індекси 1 віднесемо до центрального тіла (Сонця), а індекси 2 – до тіла-супутника (Землі).

Крок зміни часу  $\Delta t$  будемо добирати експериментально.

Ключові комірки цієї таблиці мають такий уміст:

комірка	формули / числа	примітки
H7	=2	значення $k$
H8	=0	
H9	=(H2*H4/H6^(H7-1))^0,5	$v_{1k}$ – перша космічна
H10	=H6	
H11	=0	копіювати в A3 і A4 копіювати в B3 і B4
A2	=-\$H\$2*\$H\$4*E2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1))	
B2	=-\$H\$2*\$H\$4*F2/((КОРЕНЬ((E2)^2+(F2)^2))^(H\$7+1))	копіювати в E4 копіювати в F4
C2	=\$H\$7	
D2	=\$H\$8	
E2	=\$H\$9	
F2	=\$H\$10	
C3	=C2+A2*\$H\$3*0,5	
D3	=D2+B2*\$H\$3*0,5	
E3	=E2+C3*\$H\$3	
F3	=F2+D3*\$H\$3	
C4	=C3+A3*\$H\$3	
D4	=D3+B3*\$H\$3	

*Порядок роботи*

1. Заповнити комірки H2–H7.
2. Заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.
3. Всі формули 4-го рядка (від A4 по F4) копіювати в наступні 200 рядків.
4. За даними стовпців E та F побудувати траєкторію руху.

Враховуючи, що в досліджуваній моделі формули для прискорень  $a_x$  і  $a_y$  та для першої космічної швидкості  $v_{1k}$  модифіковані, маємо розглядати рис. 8.16 як тест на перевірку нових формул при звичайному значенні  $k = 2,0$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	
2	-5931	0	0	943186	1,50E+08	0,00E+00	$G = 6,67E-11$	
3	-5927	-205	-16309	943186	1,50E+08	5,19E+06	$\Delta t = 5,5$	
4	-5916	-410	-48908	942058	1,50E+08	1,04E+07	$M = m_1 = 2,0E+30$	
5	-5899	-614	-81449	939803	1,49E+08	1,55E+07	$m_2 = 6,0E+24$	
6	-5874	-818	-113892	936424	1,49E+08	2,07E+07	$r = 1,5E+08$	
7	-5842	-1021	-146199	931926	1,48E+08	2,58E+07	$k = 2,0$	
8	-5803	-1222	-178331	926312	1,47E+08	3,09E+07	$v_{2x}(0) = 0$	
9	-5758	-1422	-210249	919591	1,46E+08	3,60E+07	$v_{2y}(0) = 9,43E+05$	
10	-5705	-1620	-241916	911770	1,44E+08	4,10E+07	$x_2(0) = 1,5E+08$	
11	-5645	-1817	-273293	902859	1,43E+08	4,59E+07	$y_2(0) = 0$	
...	...	...	...	...	...	...		

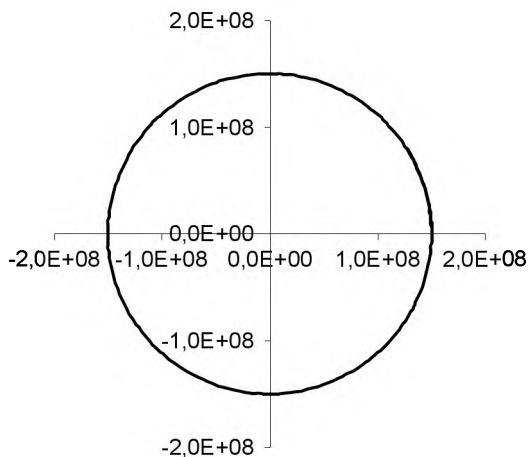


Рис. 8.16

Поклавши  $k = 1,5$  і  $\Delta t = 0,05$  с, отримуємо схожий результат.

Можна переконатися в тому, що формально колова траєкторія існує для будь-яких значень  $k$ . Зокрема, при  $k = 1$  слід було б узяти  $\Delta t \approx 0,0005$  с, а при  $k = 2,2$  інтервал  $\Delta t \approx 50$  і т.д. Висновок про існування колових траєкторій є дійсно формальним. Якщо простежити за тим, яких значень набуває  $v_{1k}$  в описаних експериментах (комірка Н9), то виявляється, що в міру зменшення  $k$  відбувається швидке зростання орбітальної швидкості аж до  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с і більше, а це

принципово неможливо.

Таким чином, модель перестав адекватно описувати досліджуване явище. Такі занадто великі значення  $v_{1k}$  ми маємо сприймати лише як результати обчислень за наведеною формулою і ні в якому разі не приписувати об'єкту властивості неадекватної моделі.

Знов виконаємо тестування. Показник степеня залишимо з попереднім значенням  $k = 2$ , проте збільшимо орбітальну швидкість тіла-супутника  $v_{y2}(0)$  так, щоб задовольнялась умова замкнутої траєкторії  $v_{1k} < v_y(0) < \sqrt{2} v_{1k}$ . Орбіта має набути еліптичної форми. Нагадаємо, що тут  $v_{1k} = \sqrt{2} v_{1k}$  – друга космічна швидкість.

То ж збільшимо попереднє значення  $v_y(0)$ , наприклад, в 1,25 рази. Для цього, як і раніше, відредагуємо формулу в комірці Н9. А саме:

$$=(H2*H4/H6^{(H7-1)})^{0,5*1,25}. \quad (11)$$

Результат показаний на рис. 8.17.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	
2	-5931	0	0	1178983	1,50E+08	0,00E+00	$G =$	6,672E-11
3	-5806	-920	-59307	1178983	1,49E+08	2,36E+07	$\Delta t =$	20
4	-5451	-1755	-175418	1160585	1,45E+08	4,68E+07	$m_1 =$	2,00E+30
5	-4920	-2442	-284431	1125480	1,40E+08	6,93E+07	$m_2 =$	6,00E+24
6	-4283	-2948	-382824	1076641	1,32E+08	9,08E+07	$r =$	1,50E+08
7	-3609	-3273	-468482	1017680	1,23E+08	1,11E+08	$k =$	2,00
8	-2951	-3438	-540652	952223	1,12E+08	1,30E+08	$v_{2x}(0) =$	0
9	-2345	-3475	-599664	883468	9,98E+07	1,48E+08	$v_{2y}(0) =$	1,18E+06
10	-1809	-3419	-646555	813966	8,69E+07	1,64E+08	$x_2(0) =$	1,500E+08
11	-1349	-3300	-682729	745585	7,32E+07	1,79E+08	$y_2(0) =$	0
...	...	...	...	...	...	...		

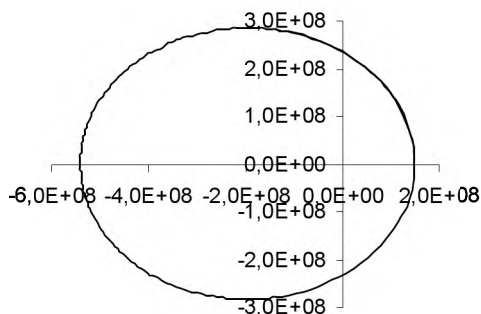


Рис. 8.17

Якщо початковій швидкості надати значення  $v_y(0) = \sqrt{2} v_{1k}$ , тоб-

то ввести до Н9 нового множника  $=(H2*H4/H6^{(H7-1)})^{0,5*2^{0,5}}$ , одержуємо параболічну траєкторію (рис. 8.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_2$	$y_2$	Дано:	
2	-5931	0	0	1330000	1,50E+08	0,00E+00	$G =$	6,672E-11
3	-5919	-263	-14827	1330000	1,50E+08	6,67E+06	$\Delta t =$	5
4	-5884	-523	-44422	1328687	1,50E+08	1,33E+07	$m_1 =$	2,00E+30
5	-5827	-777	-73844	1326075	1,49E+08	2,00E+07	$m_2 =$	6,00E+24
6	-5749	-1025	-102981	1322187	1,49E+08	2,66E+07	$r =$	1,50E+08
7	-5650	-1263	-131725	1317062	1,48E+08	3,32E+07	$k =$	<b>2,00</b>
8	-5533	-1490	-159975	1310747	1,47E+08	3,98E+07	$v_{2x}(0) =$	0
9	-5398	-1703	-187638	1303299	1,46E+08	4,63E+07	$v_{2y}(0) =$	1,33E+06
10	-5249	-1902	-214631	1294784	1,45E+08	5,28E+07	$x_2(0) =$	1,500E+08
11	-5087	-2086	-240877	1285275	1,44E+08	5,93E+07	$y_2(0) =$	0
...	...	...	...	...	...	...		

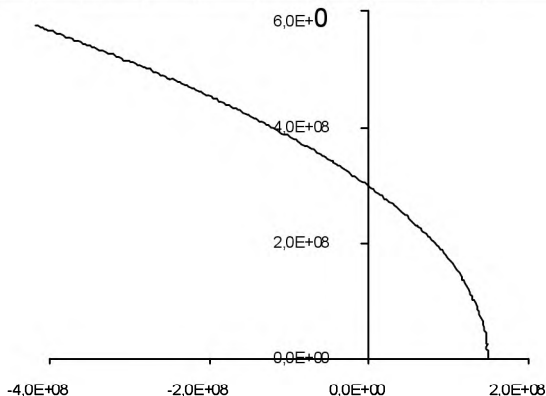


Рис. 8.18

Отже, можна вважати, що модель з модифікованими формулами (1), (4), (5) пройшла тестування, оскільки зазначені формули при  $k = 2$  приводять до заздалегідь відомих результатів.

Перейдемо, нарешті, до експериментів з  $k \neq 2$ .

Нехай  $k = 1.8$ ,  $v_x(0) = 1.25 v_{1k}$  відповідно до (11) і нехай  $\Delta t = 3$  с.

Результати моделювання наведені на рис. 8.19 (a – e)

Рис. 8.19a показує, що тіло-супутник, виконавши один оберт уздовж еліпса, не потрапляє у початкову точку, оскільки велика вісь еліпса за цей час повертається на деякий кут  $\Delta\varphi$  відносно центрального тіла – точки (0; 0).



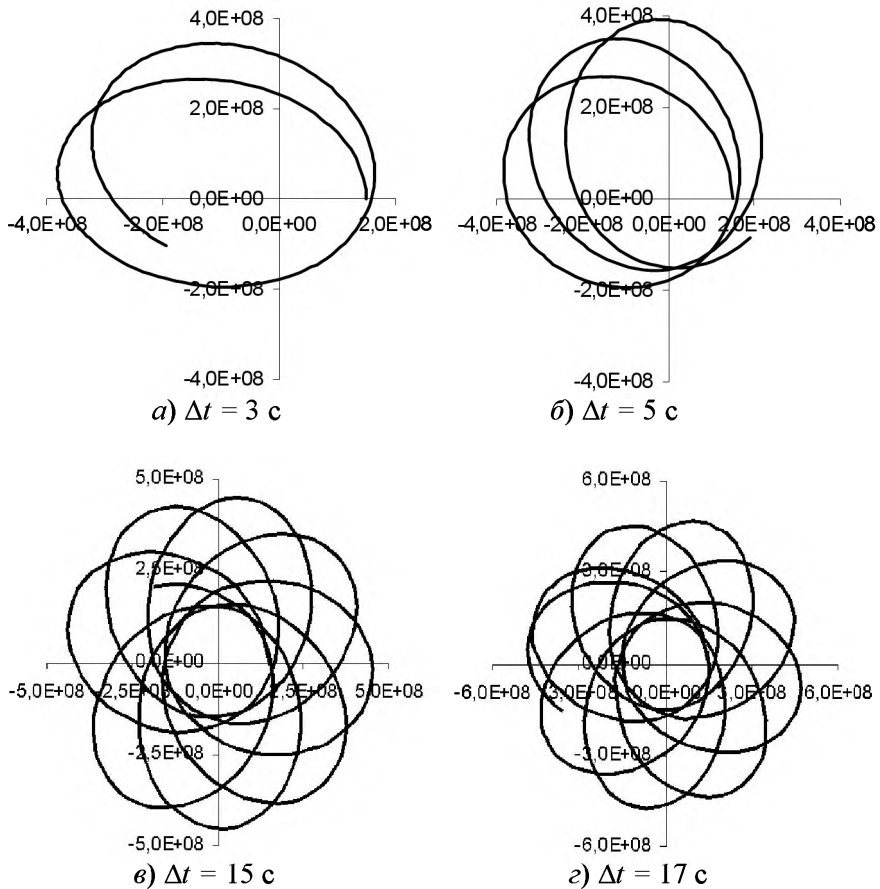


Рис. 8.19

Саме за такими траєкторіями мали б рухатись планети навколо Сонця або штучні супутники навколо планет.

Якщо область допустимої зміни  $r$  обмежена лише однією умовою  $r \geq r_{\max}$  то траєкторія приходить із нескінченності і йде на нескінченність.

Якщо область зміни  $r$  має дві границі  $r_{\min}$  і  $r_{\max}$ , то траєкторія цілком лежить всередині кільця, обмеженого колами  $r = r_{\max}$  і  $r = r_{\min}$  (рухи вздовж таких обмежених у просторі траєкторій називають фінітними). Це, однак, не означає, що траєкторія неодмінно є замкнутою кривою. За час, протягом якого  $r$  змінюється від  $r_{\max}$  до  $r_{\min}$  і потім знову до  $r_{\max}$ , радіус-вектор повертається на кут  $\Delta\varphi$ .

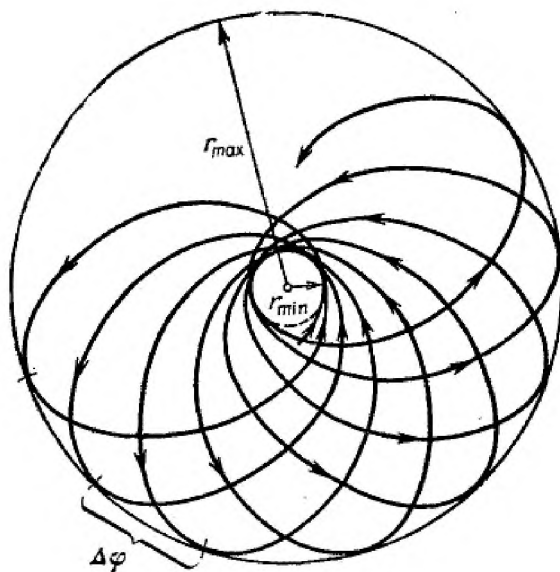


Рис. 8.20

Умова замкнутості траєкторії полягає в тому, щоб цей кут дорівнював раціональній частині від  $2\pi$ , тобто мав вигляд  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{m}{n}$ , де  $m, n$  – цілі числа. Тоді через  $n$  повторень цього проміжку часу радіус-вектор точки, виконавши  $m$  повних обертів, співпадає зі своїм початковим значенням, тобто траєкторія замкнеться.

Однак такі випадки виняткові, і при довільному значенні кут  $\Delta\varphi$  не є раціональною частиною від  $2\pi$ . Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не замкнута. Вона нескінчену кількість разів проходить через мінімальну і максимальну відстань (як, наприклад, на рис. 8.20) і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними колами.

Існують лише два типи центральних полів, у яких всі траєкторії рухів замкнені. Це поля, в яких потенціальна енергія частинки пропорційна  $1/r$  або  $r^2$ . Перший з цих випадків відповідає  $k = 2$  (світ, у якому ми живемо).

## Висновки

1. Якщо тіло рухається під дією сили всесвітнього тяжіння, то траєкторією його руху в залежності від початкових умов є одна з

кривих другого порядку – еліпс, гіпербола чи парабола.

2. Закон всесвітнього тяжіння не тільки узагальнив, але й багато в чому уточнив Закони Кеплера, що описують рухи планет. Тут і розмаїття орбіт, і поняття про космічні швидкості, і залежність періоду обертання космічного об'єкту від суми мас обох тіл – центрального і супутника тощо.

3. Засобами обчислювального експерименту та вивчення фотографій ми впевнились у тому, що це закон дійсно всесвітнього значення, оскільки його дія охоплює широкий діапазон рухів – від штучних супутників планет і аж до галактичних об'єктів.

### **8.5. Моделювання абсолютних та відносних рухів планет**

Пригадаємо, що при вивченні криволінійних рухів значний інтерес становить питання про вигляд траєкторії, тому основною метою чергового дослідження поставимо задачу побудови траєкторій планет у двох системах відліку: в системі, пов'язаній із Сонцем (геліоцентричній), та в системі, пов'язаній із Землею (геоцентричній), тобто в другому випадку дослідимо питання про вигляд планетних траєкторій з точки зору земного спостерігача.

#### **8.5.1. Геліоцентрична система відліку**

Як і на початку глави розглянемо випадок руху планети навколо Сонця на основі вже згаданих раніше припущень.

Побудуємо в одній координатній площині траєкторії руху Землі і Марсу навколо Сонця. Необхідні дані про планети візьмемо з відповідних довідників.

Для розміщення даних про Землю й Марс змінимо структуру таблиці (кількість стовпців зростає внаслідок розгляду двох планет).

Нехай для визначеності індекси 1 відповідають Землі, а індекси 2 – Марсу.

Вибір у якості початкових швидкостей  $v_{1y}(0)$ ,  $v_{2y}(0)$ , розрахованих за виразом для першої космічної швидкості  $v_{1K} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ , забез-

печує колові траєкторії руху планет. Це є спрощенням їх реального руху (особливо це стосується Марсу), оскільки в дійсності планетні орбіти є еліпсами. При моделюванні для перетворення колових орбіт на еліптичні, як ми вже бачили, треба вираз для  $v_{1K}$  помножити на деяке число  $b$ , що задовольняє умові  $1 > b > \sqrt{2}$ . З астрономії відомо, що для Землі потрібний коефіцієнт має становити 1,020204, а для

Марсу – 1,094442 (комірки N10, N12). Розраховані значення початкових швидкостей відповідають найближчій до Сонця (фокуса) точці траєкторії – афелію.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	$a_{1x}$	$a_{1y}$	$a_{2x}$	$a_{2y}$	$v_{1x}$	$v_{1y}$	$v_{2x}$	$v_{2y}$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	Дано:	(CI)
2													$G=$	6,672E-11
3													$\Delta t=$	172800
4													$M=$	1,990E+30
5													$m_1=$	5,976E+24
6													$m_2=$	6,429E+23
7													$r_1=$	1,496E+11
8													$r_2=$	2,279E+11
9													$v_{1x}(0)=$	0
10													$v_{1y}(0)=$	2,98E+04
11													$v_{2x}(0)=$	0
12													$v_{2y}(0)=$	2,41E+04
13													$x_1(0)=$	1,496E+11
14													$y_1(0)=$	0
15													$x_2(0)=$	2,279E+11
16													$y_2(0)=$	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

Ключові комірки цієї таблиці мають такий зміст:

комірка	формули / числа	примітки
N9	=0	відповідно до рис. 1
N10	=(N2*N4/N7)^0,5*1,020204	$v_{1K}$ для Землі
N11	=0	відповідно до рис. 1
N12	=(N2*N4/N8)^0,5*1,094442	$v_{1K}$ для Марсу
N13	=N7	
N14	=0	
N15	=N8	
N16	=0	
A2	=-N\$2*\$N\$4*I2/((I2)^2+(J2)^2)^1,5	копіювати в A3, A4
B2	=-N\$2*\$N\$4*J2/((I2)^2+(J2)^2)^1,5	копіювати в B3, B4
C2	=-N\$2*\$N\$4*K2/((K2)^2+(L2)^2)^1,5	копіювати в C3, C4
D2	=-N\$2*\$N\$4*L2/((K2)^2+(L2)^2)^1,5	копіювати в D3, D4
E2	=N9	
F2	=N10	
G2	=0	
H2	=N12	
I2	=N13	

J2	=N14	
K2	=N8	
L2	=0	
E3	=E2+A2*\$N\$3*0,5	
F3	=F2+B2*\$N\$3*0,5	
G3	=G2+C2*\$N\$3*0,5	
H3	=H2+D2*\$N\$3*0,5	
I3	=I2+E3*\$N\$3	копіювати в I4
J3	=J2+F3*\$N\$3	копіювати в J4
K3	=K2+G3*\$N\$3	копіювати в K4
L3	=L2+H3*\$N\$3	копіювати в L4
E4	=E3+A3*\$N\$3	
F4	=F3+B3*\$N\$3	
G4	=G3+C3*\$N\$3	
H4	=H3+D3*\$N\$3	

### Порядок роботи

1. Заповнити комірки N2–N8.
2. Заповнити комірки згідно наведеної вище таблиці.
3. Всі формули 4-го рядка копіювати в наступні 365 рядків.
4. За даними стовпців I,J та K,L побудувати орбіти планет – графіки залежності  $y_1$  від  $x_1$  та  $y_2$  від  $x_2$  (рис. 8.21).

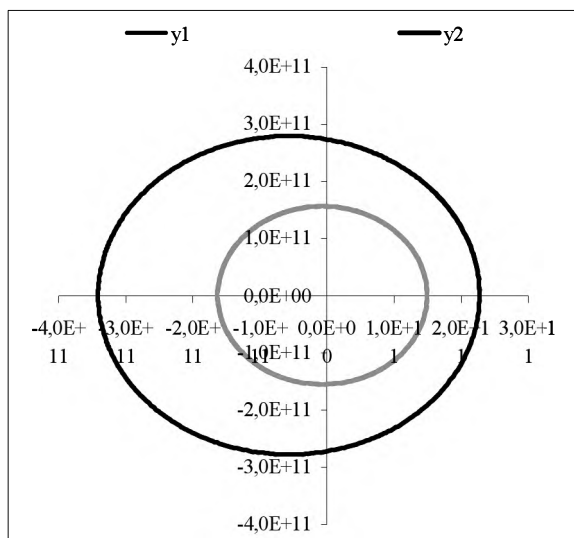


Рис. 8.21

### 8.5.2. Геоцентрична система відліку

Перехід від геліоцентричної системи відліку  $XS\bar{Y}$  до геоцентричної системи  $X^*EY^*$  виконаємо паралельним перенесенням початку координат із центру Сонця у центр Землі, як це показано на рис. 8.22.

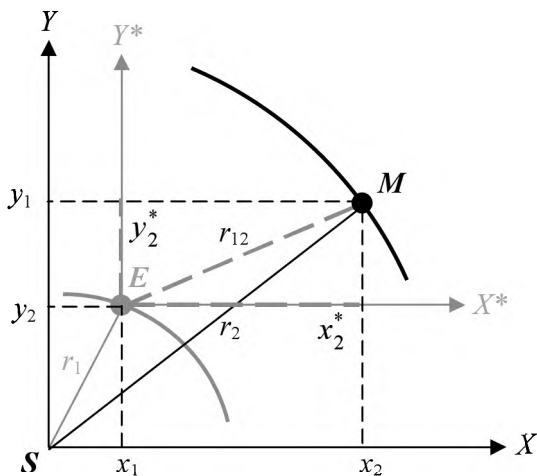


Рис. 8.22

Тут уведені такі позначення:

- $S$  – Сонце,  $E$  – Земля,  $M$  – Марс;
- $r_1, r_2$  – відстані від Сонця до Землі і до Марсу відповідно;
- $x_1, y_1, x_2, y_2$  – координати Землі та Марсу відповідно в геліоцентричній системі відліку  $XS\bar{Y}$ ;
- $x_2^*, y_2^*$  – координати Марсу в геоцентричній системі відліку.

Оскільки вигляд траєкторії залежить від вибору системи відліку, то, перейшовши до нової системи, ми маємо отримати нову траєкторію. Щоб скласти уявлення про її вигляд з позиції земного спостерігача, внесемо наступні зміни до таблиці: перед стовпцем “Дано” вставимо три нові стовпці, які позначимо  $x^*, y^*$  – відносні координати Марсу в системі відліку “Земля” та  $r_{12}$  – відстань між планетами. З рис. 8.22 видно, що  $x^* = x_2 - x_1$ ;  $y^* = y_2 - y_1$

комірка	Формули	Примітки
M2	=K2-I2	копіювати в M3–M366
N2	=L2-J2	копіювати в N3–N366
O2	=(M2^2+N2)^0,5	копіювати в O3–O366

Рис. 8.23 відображає видиму з Землі траєкторію руху Марсу на небесній сфері. Зверніть увагу на той факт, що поява петлеподібних траєкторій є не динамічним ефектом, а є ефектом суто кінематичним, обумовленим переходом до іншої системи відліку. Саме такі петлеподібні рухи планет спостерігали ще давні астрономи Шумеру, Єгипту, Китаю, Давньої Греції.

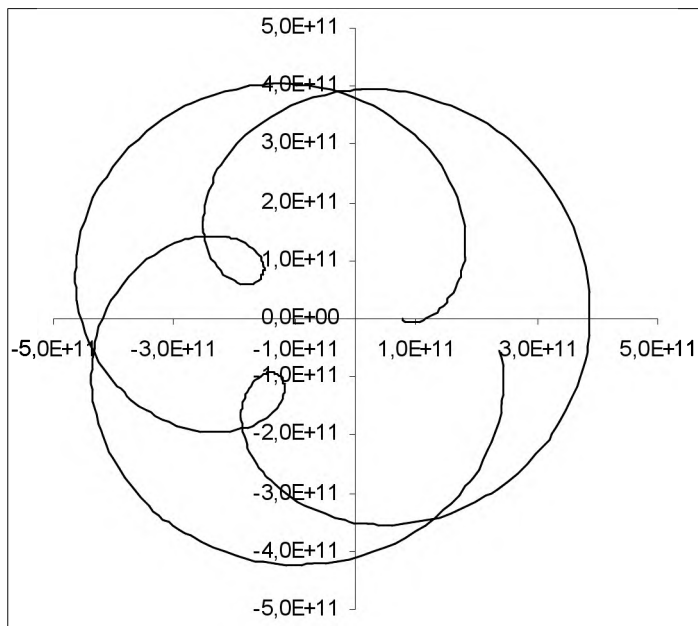


Рис. 8.23

Систематизацію таких рухів дав Клавдій Птолемей (100–165 рр. н.е.), який створив теорію видимо-го руху Сонця, Місяця і планет. На основі каталогу Гіппарха, власних спостережень та фізики Аристотеля він розробив найбільш докладну й популярну геоцентричну систему світу, яка визначала космологічні уявлення вчених на протязі наступних 1500 років. Праця Птолемея “Велика математична побудова астрономії” (в арабському

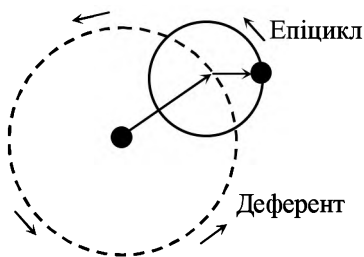


Рис. 8.24

перекладі “Альмагест”) у тринадцяти книгах стала науковою астрономічною енциклопедією давнини та Середньовіччя.

За теорією Птолемея Земля нерухома та знаходиться в центрі світу, а всі решта планети разом із Сонцем і Місяцем рівномірно обертаються навколо Землі по коловим орбітам. Для пояснення руху планет Птолемей застосував систему гармонічних епіциклів та деферентів (рис. 8.24).

Епіциклічна система Птолемея була простою, універсальною, економною і, незважаючи на свою принципову хибність, дозволяла прогнозувати астрономічні явища з будь-якою необхідною точністю. З її допомогою можна розв’язувати деякі задачі й сучасної астрометрії, небесної механіки та космонавтики.

Одним із засновників нової астрономії і нового наукового світогляду став Микола Копернік (1473–1543). У своїй праці «Про обертання небесних сфер» він виклав геліоцентричну теорію, яка висунула найважливіший принцип будови Всесвіту – його рухомість. Планетарність Землі усувала давні уявлення про унікальність її як центра обертання Всесвіту. Цікаво дізнатись, що розрахунки руху планет за теорією М. Коперніка давали меншу точність у передбаченні положень планет, ніж розрахунки «за теорією Птолемея». Справа в тому, що в теорії М. Коперніка планети мали рухатись рівномірно по ідеальним круговим орбітам. Насправді ж, як пізніше встановив Й. Кеплер, орбіти планет мають форму еліпса, а швидкості їхнього руху періодично змінюються.

Сам Птолемей з честю справжнього вченого визнавав виключно прикладний характер своєї системи і відмовлявся розглядати її як космологічну (вчення про всесвіт у цілому) за браком переконливих доказів на користь гео- чи геліоцентричної теорії світу.

Повертаючись до результатів моделювання, зазначимо, що за даними зі стовпця  $r_{12}$  можна визначити відстань між планетами під час протистоянь. І хоч якісна картина відносного руху Марсу є цілком задовільною, та через введені до моделі спрощення (рівномірний рух планет по коловим орбітам) кількісні результати відрізняються від відомих із спостережень. Зокрема, відстань між Землею та Марсом під час великого протистояння має бути ~56 млн. км, тоді як за таблицею отримуємо суттєво менше значення.

#### **Завдання**

1. Чому відкриття М. Коперніка вважається науковим подвигом?
2. Підготуйте декілька коротких повідомлень з історії станов-



лення наукового світогляду в природознавстві (Птолемей, Копернік, Кеплер, Ньютон).

3. Марс відносять до зовнішніх планет Сонячної системи, орбіти яких розташовані поза орбітою Землі. Змодельуйте рух Венери (впут-рішньої планети) в системі відліку, пов'язаній із Землею.

### **Висновок**

Постановка проблеми дослідження не є традиційною і виходить за межі шкільних курсів фізики й астрономії. Проте сам процес її вирішення й отримані результати мають не лише пізнавальне, а й велике світоглядне значення: вони дають можливість безпосередньо познайомитися з геоцентричною моделлю (за Птолемеєм) і зрозуміти ідею переходу від геліоцентричної до геоцентричної моделі світу для побудови траєкторій відносного руху тіл.

## Глава 9. Задача про політ паперового літачка

### 9.1. Рух тіла під дією декількох сил: загальні зауваження

Задача про політ паперового літачка є окремим найпростішим випадком більш загальної задачі про некерований політ безмоторного літального апарату. Ця задача вперше була сформульована і розв'язана видатним російським вченим, засновником аеродинаміки М.Є. Жуковським (1847–1921). Тут ми розглянемо лише той її варіант, який сам Жуковський назвав “задачею про планер”.

Починаючи дослідження, насамперед уточнимо визначений у попередній главі

#### 9.1.1. План майбутньої роботи

1. Спочатку дослідимо рух тіла під дією лише однієї сили – сили тяжіння. Такий рух вивчається в шкільному курсі фізики, і це дослідження має на меті здійснити *тестування* моделі, тобто з'ясувати, чи даватиме модель заздалегідь відомі результати.

2. Далі розглянемо рух під дією двох сил – сили тяжіння й сили опору середовища. Стосовно сили опору в шкільному підручнику наведені деякі загальні міркування й одна з можливих формул для її обчислення.

3. Нарешті, включимо до розгляду третю силу – піднімальну.

#### 9.1.2. Постановка задачі. Створення концептуальної моделі

Отже, нехай у повітряному середовищі рухається симетричний планер, тобто планер з розподілом мас, симетричним відносно вертикальної площини, що проходить через його центр мас. У цій самій площині лежить і вектор швидкості.

*Метою дослідження будемо вважати розв'язання головної задачі механіки:*

*як із плином часу змінюються координати тіла і вектор його миттєвої швидкості (за модулем та напрямком)?*

При цьому результатами дослідження мають бути значення всіх кінематичних характеристик рухомого тіла у довільні моменти часу:

- координат  $x$ ,  $y$ ;
- проєкцій швидкості  $v_x$ ,  $v_y$ ;
- модуля швидкості  $v$  та кута  $\alpha$  його нахилу до горизонту;
- проєкцій прискорення  $a_x$ ,  $a_y$ .

Крім того, значна увага буде приділена аналізу графічної інтерпретації залежностей між основними характеристиками процесу.

Таким чином, ми ставимо перед собою типову задачу прогнозування поведінки об'єкту з плином часу, тобто маємо створити *динамічну модель* об'єкту (процесу).

### 9.1.3. Математична модель

Нагадаємо, що метод моделювання передбачає прийняття певних спрощуючих припущень, які мають бути обґрунтованими. Тому, обираючи з багатьох діючих на тіло сил лише декілька, ми зобов'язані визначити, за яких умов такий вибір є виправданим. Адже, насамперед, необхідно, щоб одержані результати задовільно узгоджувалися з експериментальними даними. У зв'язку з цим відмітимо, що найбільш суттєву дію на тіло чинять Земля та навколишнє середовище (повітря), в якому це тіло рухається. Отже силами, що суттєво діють на тіло, є

- сила тяжіння  $F_m$ , напрямлена вертикально вниз;
- аеродинамічна сила, що проявляє себе через свої складові – силу лобового опору  $F_{on}$ , напрямлену проти вектора швидкості  $\mathbf{v}$ , та піднімальну силу  $F_n$ , напрямлену перпендикулярно до вектора швидкості;
- архімедова (виштовхувальна) сила  $F_A$ , що напрямлена вертикально вгору.

Якщо густинна речовини тіла значно перевищує густину середовища, як це має місце в даному випадку, то дію архімедової сили в порівнянні з іншими силами можна знехтувати.

Будемо розглядати всі три згадані сили  $F_m$ ,  $F_{on}$  та  $F_n$  прикладеними до центру мас, що знаходиться в площині симетрії планера.

Прискорення, що його надає тілу рівнодійна всіх сил, будемо визначати за другим законом Ньютона:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{on} + \mathbf{F}_n}{m}$$

На рис. 9.1 зображене рухоме тіло і сили, що діють на нього, а також відповідні прискорення.

Сила тяжіння  $F_m$ , як відомо, надає всім тілам незалежно від їхньої маси однакового прискорення  $g$ , середнє значення якого поблизу земної поверхні становить приблизно  $9,81 \text{ м/с}^2$ :

$$F_m = mg$$

Згідно з теоремою Жуковського обидві складові аеродинамічної

сили пропорційні квадратові швидкості:

$$F_{on}=kv^2, \quad F_n=bv^2,$$

де  $k$  і  $b$  – постійні коефіцієнти, що визначаються геометрією тіла (його формою та розмірами) і фізичними властивостями середовища.

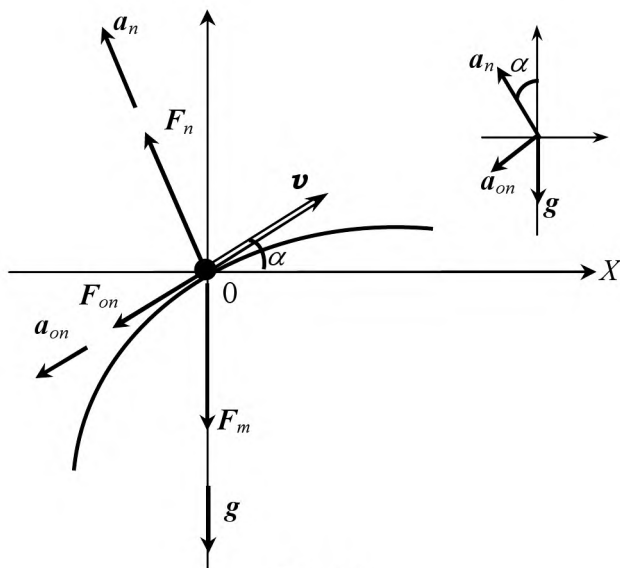


Рис. 9.1

У проекціях на вісі координат одержимо:

$$a_x = \frac{F_{onx} + F_{nx}}{m} = \frac{-F_{on} \cos \alpha - F_n \sin \alpha}{m}$$

і остаточно

$$a_x = -\frac{k}{m}v^2 \cos \alpha - \frac{b}{m}v^2 \sin \alpha.$$

Так само

$$a_y = \frac{F_{my} + F_{ony} + F_{ny}}{m} = \frac{-mg - kv^2 \sin \alpha + bv^2 \cos \alpha}{m}$$

і, нарешті,

$$a_y = -g - \frac{k}{m}v^2 \sin \alpha + \frac{b}{m}v^2 \cos \alpha.$$

Вводячи позначення  $R = k/m$  і  $Q = b/m$ , будемо мати

$$a_x = -v^2(R \cos \alpha + Q \sin \alpha) \quad (1)$$

$$a_y = -g + v^2(Q \cos \alpha - R \sin \alpha) \quad (2)$$

#### 9.1.4. Попереднє обговорення алгоритму роботи з моделлю

З виразів (1) і (2) видно, що величина прискорення не є постійною, оскільки залежить від швидкості  $v$  та кута  $\alpha$ , які, у свою чергу, змінюються з плином часу. При вивченні механічних коливань ми вже бачили, що в межах шкільного курсу математики задачі з таким складним типом залежностей між змінними аналітично не розв'язуються. Тому і в новій ситуації скористаємось чисельним методом розв'язування, тобто виконаємо його шляхом покрокових обчислень за тим самим алгоритмом:

1. Розіб'ємо весь час руху на достатньо малі проміжки  $\Delta t$  такі, щоб на протязі кожного такого проміжку зміна прискорення була настільки малою, аби ми могли вважати рух рівноприскореним.

2. Обчислимо швидкість  $\mathbf{v}_1$  наприкінці першого проміжку  $\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 \Delta t,$$

де  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{a}_0$  – відповідно вектори швидкості та прискорення у початковий момент часу  $t = 0$ .

У проекціях на вісі координат це дає:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{1x} \Delta t,$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_{1y} \Delta t.$$

При обчисленні швидкості наприкінці будь-якого інтервалу  $\Delta t$  ми і надалі будемо використовувати значення прискорення із попереднього інтервалу:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{a}_i \Delta t,$$

де  $\mathbf{v}_{i-1}$  – кінцева швидкість тіла на попередньому інтервалі  $\Delta t$ , яка одночасно є початковою швидкістю на даному інтервалі часу.

3. Модуль вектора швидкості  $v_1$  визначимо за формулою

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}.$$

4. Напрямок вектора  $\mathbf{v}_1$ , тобто кут  $\alpha_1$  знайдемо за рис. 9.1:

$$\alpha_1 = \arccos \frac{v_{1x}}{v_1} \cdot \operatorname{sgn}(v_{1y}).$$

Для довільного моменту

$$\alpha_i = \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} \cdot \operatorname{sgn}(v_{iy}).$$

Пригадаємо, що множник  $\operatorname{sgn}(v_y)$  дає можливість одержувати від'ємні значення кутів у тих випадках, коли тіло матиме вертикальну складову швидкості  $v_y$ , напрямлену донизу, і додатні значення –

для  $v_y$ , напрямленої вгору.

Зручніше працювати лише з додатними значеннями кутів, наприклад, замість  $\alpha = -90^\circ$  мати  $\alpha = 270^\circ$ , тому рівняння доведеться дещо змінити, а саме:

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{v_x}{v} & \text{для } v_y \geq 0 \\ 360^\circ - \arccos \frac{v_x}{v} & \text{для } v_y < 0 \end{cases}$$

5. Нове положення тіла (нові координати) наприкінці першого проміжку  $\Delta t$  знайдемо за рівняннями

$$x_1 = x_0 + v_{1x}\Delta t,$$

$$y_1 = y_0 + v_{1y}\Delta t.$$

При обчисленні координат наприкінці будь-якого інтервалу часу  $\Delta t$  будемо використовувати значення середньої швидкості із цього самого інтервалу:

$$x_i = x_{i-1} + v_{icx}\Delta t,$$

$$y_i = y_{i-1} + v_{icy}\Delta t,$$

де  $x_{i-1}$ ,  $y_{i-1}$  – координати тіла наприкінці попереднього інтервалу  $\Delta t$ .

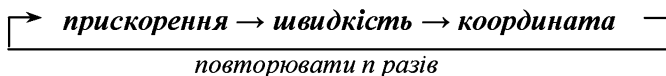
### Запитання

1. Обчислити заздалегідь час польоту за відомих початкових умов ( $v_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $y_0$ ) у межах шкільного курсу фізики можна в єдиному випадку – при дії на тіло однієї лише сили тяжіння. Чому?

2. Яка з кінематичних характеристик рухомого тіла дозволяє вирішити, знаходиться тіло в польоті чи політ завершено?

Як завжди, значення проміжку  $\Delta t$  має задовольняти двом вимогам: забезпечувати необхідну адекватність результатів розрахунків і стійкість алгоритму роботи моделі (обчислювального алгоритму).

Нагадаємо, що послідовність розрахунків можна показати знайомою схемою:



Після всіх наведених міркувань залишимо

### 9.1.5. Остаточний алгоритм

1. Підготувати таблицю за зразком:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$t$	$v_x$	$v_y$	$v$	$\alpha$	$a_x$	$a_y$	$x$	$y$	Дано:	
2										$x_0 =$	
3										$y_0 =$	
4										$v_0 =$	
5										$\alpha_0 =$	
6										$\Delta t =$	
7										$g =$	
8										$R =$	
9										$Q =$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

2. Уввестн вхідні дані для моменту часу  $t = 0$ , тобто заповнити стовпець J (“Дано:”) і заповнити перший рядок таблиці іменами змінних, а стовпець K – їхніми числовими значеннями згідно умови задачі:

- $x_0, y_0$  – початкові координати;
- $v_0$  – початкова швидкість;
- $\alpha_0$  – початковий кут нахилу вектора  $\mathbf{v}_0$  до горизонту;
- $g = 9,81$  – прискорення сили тяжіння;
- $R$  – фактор сили опору;
- $Q$  – фактор піднімальної сили.

3. Заповнити другий рядок (для  $t = 0$ ):

- $t = 0$ ;
- $v_x = v_0 \cos \alpha_0$ ;  $v_y = v_0 \sin \alpha_0$ ;  $v = v_0$ ;
- $\alpha = \alpha_0$ ;
- $a_x = -v^2(R \cos \alpha + Q \sin \alpha)$ ;  $a_y = -g + v^2(Q \cos \alpha - R \sin \alpha)$
- $x = x_0$ ;  $y = y_0$ .

Комірки таблиці матимуть такий уміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=K4*COS(K5*ПИ()/180)
C2	=K4*SIN(K5*ПИ()/180)
D2	=K4
E2	=K5
F2	=-(D2^2)*(K8*COS(E2*ПИ()/180)+K9*SIN(E2*ПИ()/180))
G2	=-K7+D2^2*(K9*COS(E2*ПИ()/180)-K8*SIN(E2*ПИ()/180))
H2	=K2
I2	=K3

*Примітки.*

а) при обчисленні прямих та обернених тригонометричних фун-

кцій (для комірок B2, C2, F2 та G2) електронні таблиці, як і переважна більшість інших програмних засобів, працюють з радіанною мірою кутів, проте для школярів більш звичним та наочним є використання градусної міри. У зв'язку з цим скористаємося формулою переходу від градусної міри до радіанної:  $\varphi(\text{рад}) = \alpha(\text{град}) \cdot \pi / 180$ .

б) комірки B2 та C2 містять значення  $v_{0x}, v_{0y}$  – проєкцій вектора початкової швидкості  $\mathbf{v}_0$  на вісі координат.

4. Заповнити третій рядок (для кінця першого проміжку  $\Delta t$ , тобто для моменту часу  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ , де  $i = 1$ ):

$$- \quad v_{ix} = v_{(i-1)x} + a_{ix}\Delta t; \quad v_{iy} = v_{(i-1)y} + a_{iy}\Delta t$$

$$- \quad v_i = \sqrt{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}$$

$$- \quad \alpha_i = \begin{cases} \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} & \text{для } v_{iy} \geq 0 \\ 360^\circ + \arccos \frac{v_{ix}}{v_i} & \text{для } v_{iy} < 0 \end{cases}$$

$$- \quad a_{ix} = -v_i^2(R \cos \alpha_i + Q \sin \alpha_i);$$

$$- \quad a_{iy} = -g + v_i^2(Q \cos \alpha_i - R \sin \alpha_i)$$

$$- \quad x_i = x_{i-1} + v_{ix}\Delta t; \quad y_i = y_{i-1} + v_{iy}\Delta t$$

Відповідно у таблиці

комірка	формули / числа
A3	=A2+K\$6
B3	=B2+F2*K\$6
C3	=C2+G2*K\$6
D3	=(B3^2+C3^2)^0,5
E3	=ЕСЛИ(C3>0;ACOS(B3/D3)*180/ПИ(); 360-ACOS(B3/D3)*180/ПИ())
F3	=-(D3^2)*(K\$8*COS(E3*ПИ()/180)+K\$9*SIN(E3*ПИ()/180))
G3	=-K\$7+D3^2*(K\$9*COS(E3*ПИ()/180)-K\$8*SIN(E3*ПИ()/180))
H3	=H2+B3*K\$6
I3	=I2+C3*K\$6

5. Копіювати третій рядок у  $n$  наступних рядків ( $n = t_{\text{польоту}} / \Delta t$ ).

## 9.2. Рух тіла під дією сили тяжіння (тестування моделі)

У відповідності до загального плану роботи розглянемо приклади руху тіл під дією однієї лише сили тяжіння  $F_m$ , знайомі нам зі шкільного курсу механіки. Оскільки в цих випадках дією середовища на тіло звичайно нехтують, то й ми покладемо  $Q = 0$  і  $R = 0$ , тобто виключимо з розгляду обидва фактори аеродинамічної сили.



1. Спочатку дослідимо рух тіла, кинутого вертикально.

Нехай тіло починає рухатись над плоскою горизонтальною поверхнею з початковою швидкістю  $v_0 = 10$  м/с з точки, що має координати  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 20$  м. Рух тіла відбувається

1.1. вертикально вгору ( $\alpha_0 = 90^\circ$ );

1.2. вертикально вниз ( $\alpha_0 = 270^\circ$  або  $\alpha_0 = -90^\circ$ );

1.3. без початкової швидкості ( $v_0 = 0$ ).

**Вправа.** По черзі виведіть на екран і розгляньте три таблиці за пп. 1.1–1.3.

У кожній з таблиць можна побачити, що час підйому та повний час польоту повністю відповідають розрахованим заздалегідь за формулами

$$v_y = v_{0y} - gt,$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2.$$

Перша з цих формул дає час підйому при  $v_y = 0$  (коли спливає час підйому, вертикальна складова швидкості зменшується до нуля, тобто у верхній точці траєкторії тіло завмирає).

Наступна формула дає повний час польоту при  $y = 0$ . Дійсно, коли закінчується повний час польоту, тіло виявляється на поверхні землі. *До речі, наша модель цих формул не передбачає.*

У випадках 1.2 і 1.3 кут  $\alpha$  автоматично перетворюється на  $\alpha = 270^\circ$ , а у випадку  $v_0 = 0$ , це має місце за будь-яких значень  $\alpha_0$  (!).

Той факт, що у всіх стовпцях, де розташовані проекції змінних на вісь  $Ox$ , з'являються нулі, повністю узгоджується з умовою, що  $\alpha_0$  – прямий кут і, отже,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 0$ . Це зрозуміло з фізичних міркувань, але зараз ми маємо нагоду впевнитися в тому, що даний результат одержано на основі прийнятої моделі.

2. Продовжимо тестування. Розглянемо рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.

2.1. Почнемо з прикладу, коли *тіло кидають горизонтально* ( $\alpha_0 = 0$ ). Початкові значення координат  $x_0$ ,  $y_0$  і швидкості  $v_0$  залишимо попередніми.

**Вправи**

1. Доведіть, що при відсутності в алгоритмі помилок нулі мають залишитись тільки у стовпці для значень  $a_x$ .

2. За таблицею встановіть, що будь-яким однаковим послідовним проміжкам часу відповідають однакові прирости  $\Delta x$ , а прирости для  $\Delta y$  послідовно зростають (спадають) на одну й ту саму величину. Отже залежність  $y$  від  $x$  не є лінійною. згадану властивість має тільки

квадратична функція.

3. Беручи аргументами значення змінних із стовпця  $x$ , побудуйте траєкторію тіла – графік залежності  $y = y(x)$ , як показано на рис. 9.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$t$	$v_x$	$v_y$	$v$	$\alpha$	$a_x$	$a_y$	$x$	$y$	Дано:	
2	0,00	10,00	0,00	10,00	0	0,00	-9,81	0,00	20,00	$x_0 = 0$	
3	0,10	10	-1	10	354	0	-10	1,00	19,90	$y_0 = 20$	
4	0,20	10	-2	10	349	0	-10	2,00	19,71	$v_0 = 10$	
5	0,30	10	-3	10	344	0	-10	3,00	19,41	$\alpha_0 = 0$	
6	0,40	10	-4	11	339	0	-10	4,00	19,02	$\Delta t = 0,1$	
7	0,50	10	-5	11	334	0	-10	5,00	18,53	$g = 9,81$	
8	0,60	10	-6	12	330	0	-10	6,00	17,94	$R = 0$	
9	0,70	10	-7	12	326	0	-10	7,00	17,25	$Q = 0$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

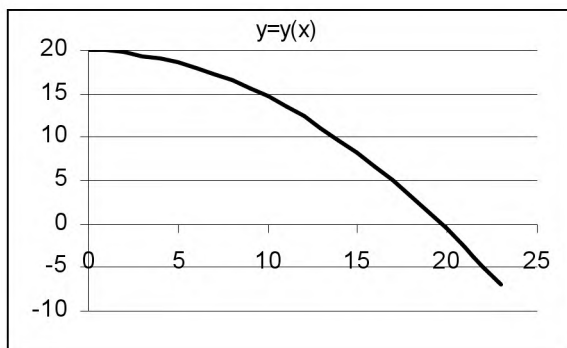


Рис. 9.2

Перевіримо модель на прикладі стандартної задачі.

**Задача.** Літак летить горизонтально на висоті 100 м із швидкістю 100 м/с. Від літака відокремлюється вантаж, який починає падати вниз. Нехтуючи опором повітря, знайти:

- скільки часу вантаж перебуватиме в польоті?
- на якій відстані від місця призначення (вздовж вісі  $Ox$ ) треба звільнити вантаж, щоб він потрапив у це місце?
- з якою швидкістю вантаж торкнеться землі?

Змінімо згідно умови вміст комірок у попередній таблиці:

комірки	числа	коментарі
K3	100	початкова висота $y_0$
K4	100	початкова швидкість $v_0$

Порівнюючи відповіді, одержані розв'язанням за допомогою фізичних формул, з даними, одержаними за допомогою моделі (таблиці та графіка  $y = y(x)$ ), можна переконатись, що вони добре узгоджуються.

## 2.2. Поширимо тестування на довільні кути.

Нехай, для визначеності, з точки, що має координати  $x_0=0$ ,  $y_0=0$  (початкові координати), з пружинного пістолета вистрілюють кульку під кутом  $\alpha_0 = 60^\circ$  з початковою швидкістю  $v_0 = 5$  м/с (рис. 9.3).

З отриманої таблиці маємо можливість побачити, що

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$t$	$v_x$	$v_y$	$v$	$\alpha$	$a_x$	$a_y$	$x$	$y$	Дано:	
2	0,00	2,5	4,330	5,000	60	0	-9,81	0,00	0,00	$x_0=0$	
3	0,05	2,5	3,840	4,582	57	0	-9,81	0,13	0,19	$y_0=0$	
4	0,10	2,5	3,349	4,179	53	0	-9,81	0,25	0,36	$v_0=5$	
5	0,15	2,5	2,859	3,798	49	0	-9,81	0,38	0,50	$\alpha_0=60$	
6	0,20	2,5	2,368	3,444	43	0	-9,81	0,50	0,62	$\Delta t=0,05$	
7	0,25	2,5	1,878	3,127	37	0	-9,81	0,63	0,71	$g=9,81$	
8	0,30	2,5	1,387	2,859	29	0	-9,81	0,75	0,78	$R=0$	
9	0,35	2,5	0,897	2,656	20	0	-9,81	0,88	0,83	$Q=0$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

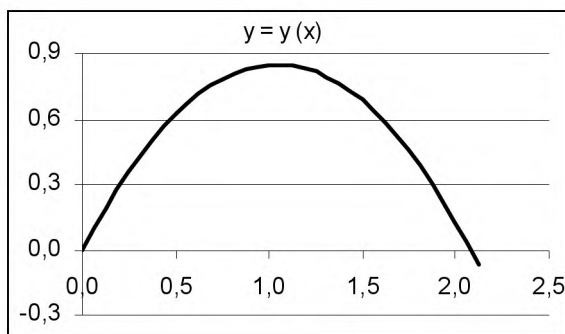


Рис. 9.3

– часи підйому і падіння, а також повний час польоту співпадають з розрахованими теоретично;

– миттєві значення змінних  $a_y$ ,  $v_y$ ,  $v$ ,  $y$  та  $\alpha$  у межах усталеної точності є симетричними відносно моменту часу, що відповідає максимальній висоті підйому тіла.

Далі звернемося до задачі нестандартної.

**Задача.** Згідно з легендою відомий своєю влучністю Робін Гуд, маючи на меті передати листа в'язневі Ноттінгемського замку, загорнув у цей лист камінь і кинув його так, що камінь перелетів огорожу і точно потрапив у вікно в'язниці. Вважаючи, що камінь був кинутий з відстані  $d$  від огорожі висотою  $h$  і що вікно в'язниці знаходилося на відстані  $D$  від місця кидання (вздовж горизонталі) і було на висоті  $H$ , знайти, під яким кутом і з якою мінімальною початковою швидкістю був кинутий камінь? У момент кидання камінь знаходився на висоті  $Z$ . Опором повітря знехтувати.

Виконаємо теоретичний розрахунок за такими даними:

$$x_0 = 0, y_0 = Z = 2 \text{ м};$$

$$x_1 = d = 8 \text{ м}; y_1 = h = 6,8 \text{ м};$$

$$x_2 = D = 13 \text{ м}; y_2 = H = 5,5 \text{ м}.$$

Спростимо розв'язування, поклавши  $Z = 0$ .

*Примітка.* Оскільки зазначені три точки знаходяться на одній траєкторії (параболі), то, написавши двічі рівняння траєкторії для  $x_1 = d, y_1 = h$  та для  $x_2 = D, y_2 = H$ , після перетворень можна одержати систему двох рівнянь з двома невідомими  $v_0$  та  $\alpha_0$ . Ця система являтиме собою математичну (не комп'ютерну) модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

Після математичного розв'язання задачі введемо до комп'ютерної моделі (таблиці) одержані відповіді як значення  $v_0$  та  $\alpha_0$  і перевіримо результати моделювання, якими тепер стають значення змінних  $x$  та  $y$ . При цьому бажано зменшити інтервал  $\Delta t$  до 0,01, збільшивши відповідно кількість рядків таблиці додатковим копіюванням останнього рядка формул.

Дійсно, в отриманій на екрані таблиці ми виявляємо дві пари координат, що відповідають заданим в умові точкам:  $X_1, Y_1$  та  $X_2, Y_2$ .

**Завдання.** Дайте фізичне тлумачення отриманому результату, виконайте відповідний рисунок.

### Короткі підсумки тестування

1. Можна було б стверджувати, що з пізнавальної точки зору розв'язки майже усіх попередніх задач особливої цінності не мають: всі вони заздалегідь відомі зі шкільного курсу фізики. Проте цінність має сама модель як узагальнення всіх можливих задач на рух під дією сили тяжіння.

2. Після численних перевірок прийшов момент, коли ми маємо прийняти і приймаємо рішення про відсутність у моделі помилок, а

також рішення про те, що у межах зазначених вище припущень вона є адекватною розглянутим процесам.

3. Якщо раніше результати, що їх ми отримували за допомогою моделі, перевірялися розрахунками за точними формулами фізики, то відтепер ми надаємо собі право довіряти результатам, що їх буде давати наша модель. І при тому довіряти настільки, що саме за цими результатами будемо робити певні висновки про рухи, які ми моделюємо. Інакше кажучи, настав момент, коли *модель із об'єкту, що підлягав перевірці, стає інструментом дослідження*.

4. Проте не будемо перебільшувати ролі окремої моделі: адже модель – це усього лише наближений образ реального об'єкту (явища, процесу). І врахувати вона здатна тільки ті властивості об'єкту, які є істотними саме на *наш* погляд.

### **9.3. Рух тіла під дією сили тяжіння та сили опору середовища**

Тепер до складу суттєвих факторів включимо вплив середовища, в якому відбувається рух тіла. Насамперед, звернемо тут увагу на принциповий факт: якщо у випадку дії однієї лише сили тяжіння можна було нехтувати формою та розмірами тіла і вважати його матеріальною точкою, то при спробі врахувати вплив середовища такий підхід виявляється суттєво хибним. Справа в тому, що середовище виявляє себе саме внаслідок наявності у тіла розмірів та форми.

Спеціально проведені дослідження показують, що модуль сили опору залежить від швидкості руху: за малих швидкостей він пропорційний швидкості, а при великих швидкостях він пропорційний квадратові швидкості. Відповідь на питання, великою чи малою є деяка певна швидкість, значною мірою залежить від форми та розмірів тіла, а також від фізичних властивостей середовища. Тому може статися так, що одну й ту саму швидкість за одних умов слід вважати малою, а за інших – великою. Остаточпу відповідь про вид залежності  $F_{on} = F_{on}(v)$  може дати лише натурний експеримент.

Залежність сили опору від форми тіла характеризують спеціальним терміном – *обтічність*. Форму, при якій сила опору набуває меншого значення, називають більш обтічною. Саме такі форми намагаються надавати транспортним засобам, снарядам і кулям у вогнепальній зброї та ракетам. У сучасній техніці обтічність тіл досліджують у спеціальних установках – аеродинамічних трубах, де рухається не саме тіло (або його фізична модель), а повітря. Обтічність водних засобів досліджують у випробувальних каналах. Зразки обті-

чних форм у живій природі дають нтахи, риби, дельфіни й інші істоти, які існують завдяки великим швидкостям руху.

### Запитання

1. З якою метою намагаються максимально покращити аеро- або гідродинамічні якості згаданих об'єктів?

2. Наведіть приклади ефективності обтічних форм у деяких видах спорту.

3. З'ясуйте, якими проблемами переймається наука *біоніка*.

Напрямок сили опору завжди протилежний до напрямку вектора швидкості, а наведені вище міркування необхідні для того, щоб при створенні моделі прийняти певне припущення про характер залежності сили опору від швидкості. То ж будемо вважати, що ця залежність є прямою пропорційною. Це означатиме, що ми плапуємо досліджувати рухи з невеликими швидкостями.

На основі прийнятого припущення запишемо

$$\mathbf{F}_{on} = -k\mathbf{v},$$

де  $k$  – розмірний коефіцієнт пропорційності, який враховує геометричні характеристики тіла і фізичні властивості середовища.

*Вправа.* Визначте, якою є розмірність коефіцієнта пропорційності  $k$  в міжнародній системі одиниць вимірювання фізичних величин (СІ) згідно наведеної формули.

Прискорення, що його надають тілу сили тяжіння й опору, будемо визначати за другим законом Ньютона.

Переходячи до проекцій і у відповідності з рис. 9.1, можна записати:

$$a_x = -\frac{k}{m}v \cos \alpha,$$
$$a_y = -g - \frac{k}{m}v \sin \alpha.$$

Як зазначалося при обговоренні алгоритму, обидві проекції прискорення  $a_x$  і  $a_y$  залежать від модуля швидкості  $v$  та кута  $\alpha$ , а тому вектор прискорення є змінним у часі.

В цій ситуації ми фактично позбавлені можливості здійснити кількісну перевірку нової моделі (за відсутності у нас відповідних точних формул) і тому маємо задовольнитися лише перевіркою якісною: *будемо порівнювати з даними дослідів не числові значення, а поведінку досліджуваних величин.*

## Обчислювальний експеримент

Зауважимо, що тимчасова зміна залежності сили опору від швидкості з квадратичної (за алгоритмом) на пряму пропорційну вимагає відповідної заміни формул для проекцій прискорення в стовпцях F і G:

комірки	формули
F2	$= -D2^{\wedge}I*(K\$8*\text{COS}(E2*\text{ПИ}()/180)+K\$9*\text{SIN}(E2*\text{ПИ}()/180))$
G2	$= -K\$7+D2^{\wedge}I*(K\$9*\text{COS}(E2*\text{ПИ}()/180)-K\$8*\text{SIN}(E2*\text{ПИ}()/180))$

*Примітки.*

– фрагмент “ $I$ ” можна не вводити, він записаний тільки з метою показати зміни у формулах;

– уміст комірок F2 і G2 слід скопіювати у всі наступні рядки до самого низу таблиці.

У наступних обчислювальних експериментах знов будуть розглянуті чотири випадки рухів тіл під дією сили тяжіння, але з *урахуванням опору середовища*; вони відрізнятимуться тільки початковими умовами:

1. Рух без початкової швидкості.
2. Рух з початковою швидкістю, напрямленою вниз.
3. Рух з початковою швидкістю, напрямленою вгору.
4. Рух з початковою швидкістю, напрямленою під кутом до горизонту.

1. Дослідимо рух тіла, яке з деякої висоти зі стану спокою починає рухатись вертикально вниз за наявності сили опору повітря.

Введемо вхідні дані:

$$x_0 = 0, y_0 = 100 \text{ м}, v_0 = 0, \alpha_0 = 270^\circ, g = 9,81 \text{ м/с}^2, \Delta t = 0,1 \text{ с}.$$

Приймемо  $R = 0,6$  (це значення збільшене проти реального з метою зменшення кількості рядків таблиці).

**Завдання.** Встановіть розмірність коефіцієнта  $R$ .

Кількість рядків таблиці будемо обирати експериментально. При цьому критерій достатності визначатиметься змістом того конкретного питання, на яке ми шукатимемо відповідь.

Найбільший інтерес у розглядуваному русі являє питання про залежність швидкості від часу.

Виведемо на екран таблицю з новими даними і новими формулами в F2 і G2 (рис. 9.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$t$	$u_x$	$u_y$	$v$	$\alpha$	$a_x$	$a_y$	$x$	$y$	Дано:	
2	0,0	0,00	0,00	0,00	270	0,00	-9,81	0,00	100,00	$x_0 = 0$	
3	0,1	0,00	-0,98	0,98	270	0,00	-9,22	0,00	99,90	$y_0 = 100$	
4	0,2	0,00	-1,90	1,90	270,0	0,00	-8,67	0,00	99,71	$v_0 = 0$	
5	0,3	0,00	-2,77	2,77	270,0	0,00	-8,15	0,00	99,43	$\alpha_0 = 270$	
6	0,4	0,00	-3,58	3,58	270,0	0,00	-7,66	0,00	99,08	$\Delta t = 0,1$	
7	0,5	0,00	-4,35	4,35	270,0	0,00	-7,20	0,00	98,64	$g = 9,81$	
8	0,6	0,00	-5,07	5,07	270,0	0,00	-6,77	0,00	98,13	$R = 0,6$	
9	0,7	0,00	-5,75	5,75	270,0	0,00	-6,36	0,00	97,56	$Q = 0$	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		

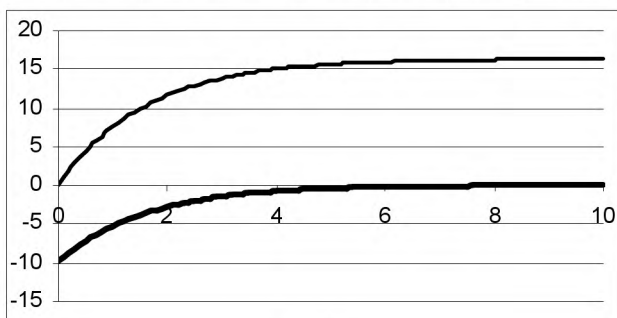


Рис. 9.4

З таблиці бачимо, що проекції всіх векторів на вісь  $x$ , як і сама координата  $x$ , весь час дорівнюють нулю (стовпці B, F, H). Було б дивно, якби ми отримали щось інше.

Та головне полягає в тому, що модуль швидкості  $v$  руху весь час монотонно зростає, але спостерігаючи зміну швидкості за послідовні однакові проміжки часу, виявляємо, що темп цього зростання монотонно уповільнюється і швидкість перестає змінюватись. Отже *рух за наявності опору середовища не є рівноприскореним*, як цього і слід було чекати. Одночасно із стовпця G для значень  $a_y$  видно, що модуль цієї складової прискорення поступово зменшується, наближаючись до нуля. Це означає, що рух, врешті, перетворюється на рівномірний.

Кількість рядків таблиці має бути такою, щоб можна було бачити перехід  $y$ -координати через нуль (момент закінчення падіння).

Повчальним та інформативним щодо аналізу процесу є порівняння графіків залежності  $u_y$  та  $a_y$  від часу (рис. 9.5).



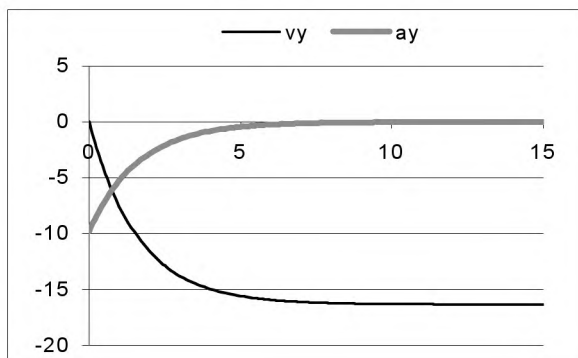


Рис. 9.5

До речі, саме у такий спосіб рухаються у повітрі парашутисти за відсутності вітру.

Наша модель може статись у нагоді для перевірки результату розв'язування цікавої фізичної задачі.

**Задача.** Чому при падінні зі стану спокою двох однакових за розмірами, але різних за масами кульок більшу кінцеву швидкість має кулька більшої маси?

*Примітка.* Умова однакових розмірів при різних масах означає, що кулька більшої маси має більшу середню густину.

*Розв'язування.*

При падінні на кожну кульку діють дві протилежно направлені сили: постійна сила тяжіння  $F_m = mg$  і змінна сила опору повітря  $F_{on} = -kv$ .

На початку руху  $F_{on} = 0$  (оскільки  $v_0 = 0$ ), а у міру зростання швидкості сила  $F_{on}$  також зростає. Модуль рівнодійної цих сил  $Z = F_m - F_{on}$ , а отже і результуюче прискорення  $a_y$ , поступово зменшуються. Нарешті, у той момент, коли сила опору стає рівною силі тяжіння, прискорення кульки  $a_y$  стає рівним нулю і рух стає рівномірним. Починаючи з цього моменту, весь наступний час польоту  $F_{on} = F_m$ , тобто  $kv_{max} = mg$ . Тут  $v_{max}$  – швидкість усталеного рівномірного руху. Звідси

$$v_{max} = m \frac{g}{k}.$$

Тепер видно, що внаслідок існування опору швидкість усталеного руху падаючих у повітрі тіл дійсно більша для тіла більшої маси,

оскільки за умовою форма й розміри тіл однакові, а отже однаковими мають бути і значення  $k$ .

Оскільки остання формула не містить початкової швидкості  $v_0$  та початкової висоти  $y_0$  (у всякому разі в явному вигляді  $v_0$  й  $y_0$  до формули не входять), виникає припущення (*гіпотеза*): *значення усталеної швидкості не залежить від початкових умов руху.*

З метою перевірки цієї гіпотези розглянемо

## 2. Рух тіла, кинутого вертикально вниз.

2.1. Перед стовпцем Е зі значеннями модуля швидкості  $v$  вставимо новий стовпець, який дістане ім'я Е, при цьому колишній Е стане F і т.д. аж до кінця таблиці.

2.2. У стовпець К (“Дано:”) введемо змінені початкові умови:  $y_0 = 250$  м,  $v_0 = 10$  м/с,  $\alpha_0 = 270^\circ$ . Інтервал  $\Delta t$  зменшимо удвічі, тобто візьмемо  $\Delta t = 0,05$  с.

Усі комірки стовпця D скопіюємо *без формул* у новий (Е) в режимі “Правка”  $\rightarrow$  “Спеціальная вставка”  $\rightarrow$  “Значения”. Після копіювання попередні дані стовпця К міняємо на нові:  $y_0 = 350$ ,  $v_0 = 0$ . У стовпці D з’являться нові значення модуля швидкості  $v$ .

Таким чином, ми маємо можливість одночасно працювати (у тому числі й будувати графіки) з двома стовпцями – активним D (з формулами) і пасивним Е (без формул). Зрозуміло, і в цьому легко впевнитись експериментально, що на будь-які зміни у стовпці “Дано:” реагувати будуть тільки значення стовпця D.

Нагадаємо, що ознакою закінчення руху є перехід у-координати через нуль. Коли при порівнянні швидкостей ми не виявимо виходу на режим усталення, то причина цього може полягати або в тому, що тіло ще не завершило політ, або в тому, що недостатньою була початкова висота  $y_0$ .

Порівнюючи значення швидкостей у сусідніх стовпцях D і Е, а також відповідні графіки, бачимо, що значення усталених швидкостей *майже* однакові, хоч усталення цих величин відбувається у різні моменти часу. Тому можна відмітити, що наша гіпотеза *майже* підтверджується (рис. 9.6). Щоб позбавитись цього “майже”, при формулюванні гіпотези слід було вказати, *що початкова висота має бути достатньою для того, щоб процес перейшов на усталений режим.* У даній таблиці, зокрема, для забезпечення точності у два десяткових розряди при зазначених вище даних довелося створити *майже* 160 рядків.

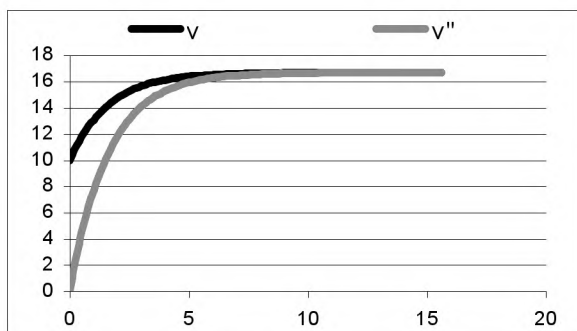


Рис. 9.6

### Запитання

1. Якби опір середовища був відсутній, то чи спостерігали б ми результат, про який щойно було сказано словами: “...значення ustalених швидкостей майже однакові, хоч усталення ... відбувається у різні моменти часу”?

2. Як впливає значення початкової швидкості на час виходу мнтьової швидкості на усталений режим? Залучіть до своїх міркувань дані обчислювального експерименту.

Далі слід видалити спочатку графік, а потім – вставлений стовпець.

3. Тепер розглянемо рух тіла, кинутого вертикально вгору за такими початковими даними:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, v_0 = 10 \text{ м/с}, \alpha_0 = 90^\circ,$$

$$\Delta t = 0,025 \text{ с}, g = 10 \text{ м/с}^2, R = 0,6 \text{ кг/с}.$$

Відповідно до цих даних отримаємо таблицю, за якою порівняємо тривалості підйому і падіння.

Умова  $y \geq 0$  перестав виконуватись на 69 рядку, якому відповідає повний час польоту  $t_{\text{пльоту}} = 1,675 \text{ с}$ .

Час підйому відповідає максимальному значенню у-координати. За таблицею  $u_{\text{тах}} = 3,392 \text{ м}$ , а  $t_{\text{підйому}} = 0,650 \text{ с}$ .

Оскільки час падіння  $t_{\text{падіння}} = t_{\text{пльоту}} - t_{\text{підйому}}$ , маємо:

$$t_{\text{падіння}} = 1,675 \text{ с} - 0,650 \text{ с} = 1,025 \text{ с}.$$

Отже за наявності сили опору середовища час падіння завжди більший за час підйому.

### Завдання

1. Обґрунтування цього факту становить окреме задачу, яку ми

й пропонуємо вам вирішити, тобто дати фізичне тлумачення.

2. Переглядаючи таблицю, можна бачити, що швидкість тіла у момент падіння менша за початкову швидкість  $v_0$  у повній відповідності із законом збереження і перетворення енергії.

Про яке збереження і перетворення енергії йдеться?

4. Рух тіла, кинутого під довільним кутом до горизонту.

Змінімо у попередньому прикладі початкове значення кута  $\alpha_0$ , залишаючи решту вхідних даних незмінними. Нехай  $\alpha_0 = 60^\circ$ .

Якщо закінченням руху знов будемо вважати момент переходу у-координати через нуль, то орієнтовна кількість рядків таблиці становитиме 30. Нарешті у стовпцях В, F та I таблиці з'являються ненульові значення.

4.1. Шукатимемо спочатку відповідь на питання про вигляд траєкторії. З цієї метою розглянемо стовпці Н та І зі значеннями координат  $x$  та  $y$ . З таблиці видно, що  $x$ -координата найвищої точки траєкторії більша за  $x_{max}/2$ . Це означає, що тепер траєкторія руху не є параболою хоч би з тієї причини, що вона не є симетричною відносно вертикальної прямої, проведеної через точку максимального підйому, як це було при дії на тіло однієї сили тяжіння.

До того ж в цьому легко впевнитися, якщо вивести на екран траєкторію руху – графік залежності  $y = y(x)$ . Траєкторію ілюструє рис. 9.7: підйом тіла відбувається вздовж пологої ділянки траєкторії, а зниження – вздовж крутішої.

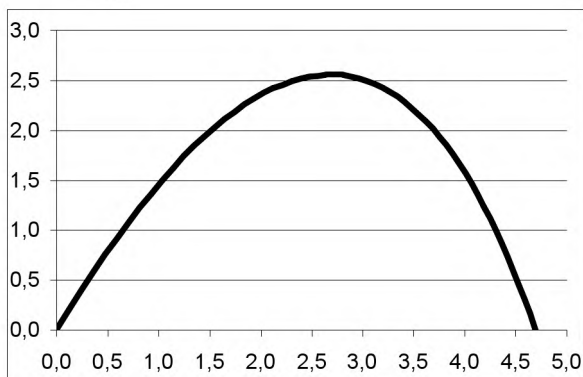


Рис. 9.7

За такою траєкторією рухається після удару волан у бадмінтоні. Знавці цієї гри часто виконують високі подачі, після яких волан знижується на полі суперника майже вертикально, що позбавляє супер-

200

ника можливості нанести сильний удар у відповідь. Експерименти на моделі з різними початковими кутами кидання добре узгоджуються із цим фактом.

Зовні схожими, але в дійсності значно складнішими, є траєкторії рухів футбольного м'яча або тенісної кульки під час гри. Справа в тому, що часто при ударі їх підкручують, а це викликає додаткові ускладнення в русі цих тіл (зокрема, так званий *ефект Магнуса*). Якщо ж їхній рух буде поступальним, то всі зазначені вище особливості матимуть місце.

4.2. Збільшуючи початкову швидкість до 100 м/с, можна одержати безперечно цікаву інформацію, що її дають виведені разом на екран графіки залежності  $v_x$ ,  $v_y$  та  $v$  від часу: із плином часу всі компоненти швидкості руху перестають змінюватись (рис. 9.8). Орієнтовна кількість рядків таблиці у цьому випадку становить 200.

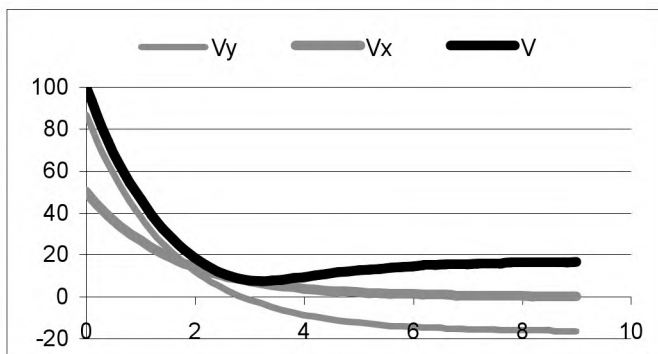


Рис. 9.8

**Завдання.** Дайте фізичне тлумачення зображеним залежностям.

На завершення цієї версії знов сформулюємо

### Висновки

1. У цій версії моделі була здійснена спроба включення до розгляду сили опору середовища. Обговорюючи питання про фактори, від яких ця сила залежить, ми прийняли припущення, згідно з яким сила опору пропорційна швидкості: саме на це були розраховані розглянуті нами приклади.

2. У межах прийнятого припущення було встановлено, що  
– за достатньої тривалості часу, протягом якого відбувається рух, має місце усталення (стабілізація) значення швидкості і, як

довела перевірка, за достатньої початкової висоти цей факт не залежить від початкових умов;

- час підйому і час падіння до початкового рівня не однакові:

$$t_{\text{підйому}} < t_{\text{падіння}};$$

- траєкторія руху не є параболою, її висхідна частина більш положиста, ніж спадна.

На якісному рівні результати моделювання добре узгоджуються з відомими дослідними фактами.

Тут на деякий час доцільно відкласти читання і вимкнути комп'ютер. З аркушу паперу зробіть літачок і поспостерігайте за тими викрутасами, які він виконує у повітрі, якщо його запускати з різними швидкостями і під різними кутами. Це, по-перше, дасть можливість трохи відпочити, а по-друге, після таких експериментів стане набагато цікавіше працювати з остаточною версією моделі.

#### **9.4. Рух тіла під дією трьох сил: сили тяжіння, сили опору середовища та піднімальної сили**

Щойно проведені експерименти переконливо доводять, що паперовий літачок поводить себе у польоті набагато цікавіше, ніж камінь або волан від бадмінтону. Навіть, якщо весь час кидати його строго горизонтально, то в залежності від початкової швидкості він або майже вертикально падає на підлогу, або ж прямує під саму стелю.

Вгадати заздалегідь траєкторію його польоту практично неможливо, однак це зовсім не означає, що поведінка нашого літачка, який виписує у повітрі складні фігури, не піддається ніякому аналізу.

З огляду на те, що найбільш цікавими у проведених дослідях виявилися саме траєкторії руху, головною, але не єдиною метою подальшого дослідження вважатимемо побудову цих траєкторій. При цьому будемо мати на увазі, що (як вище вже зазначалося) тими спрощеними підходами, які ми застосовуємо до аналізу складних фізичних явищ, найбільшим, чого ми зможемо досягти, має бути не кількісний, а *лише якісний результат*. Це означає, що очікуваним підсумком дослідження буде загальна картина перебігу процесів. Проте, як стане видно з наступного, і цього не буде замало.

Нагадаємо, що переважаючу дію на літачок спричиняють Земля і середовище, а відповідними силами є сила тяжіння  $F_m$  та аеродинамічна сила, яка проявляє себе через свої складові – силу лобового опору  $F_{on}$  та піднімальну силу  $F_n$ .

Згідно із загальним планом роботи, розглянемо тепер повну версію моделі. З цією метою врахуємо вплив на тіло піднімальної сили,

тобто перейдемо до умови  $Q \neq 0$ . Значення  $Q$  добиратимемо експериментально.

Здавалося б, можна переходити до обчислювального експерименту, та варто ще раз оцінити ситуацію, у якій ми опинилися. Отже, ми будуємо модель, що має враховувати вплив на тіло трьох сил, кожна з яких спричиняє певного прискорення. Два з них – прискорення сили лобового опору та прискорення піднімальної сили визначаються через коефіцієнти  $R$  та  $Q$ , значення яких нам невідомі. І хоч вони при роботі з моделлю можуть добиратися експериментально (шляхом поступового збільшення від нуля), проте, як виявляється, це не так просто. Якщо до того ж додати, що так само без відповіді поки що залишається питання про значення інтервалу часу  $\Delta t$ , який впливає на точність обчислень та на стійкість алгоритму, то можна у повній або, принаймні, у певній мірі відчувати типовий стан, у якому часто опиняється дослідник, котрий займається моделюванням.

*Знаходження значень невідомих коефіцієнтів моделі становить самостійну, так звану обернену задачу моделювання.*

Для з'ясування питання про можливі значення невідомих коефіцієнтів при нагоді намагаються виконати достатньо надійні натурні експерименти, що дають змогу визначити ці величини. Такої можливості ми позбавлені.

Так само ми не маємо можливості скористатися іншим відомим у моделюванні способом – скористатися теоретичними співвідношеннями, за допомогою яких ці величини можна було б обчислити.

Які ж дії нам слід здійснити в означеній ситуації? Адже до тих пір, поки нами не буде прийняте рішення про значення невідомих  $R$ ,  $Q$  та  $\Delta t$ , ми не зможемо зрушити з місця. Залишається останнє: вдаватися до спрощеної оцінки невідомих параметрів. У певний мірі це краще, ніж блукати навмання.

Можливо, має рацію пропозиція скористатися відповідними значеннями невідомих із попередньої моделі? Та більш-менш детальний аналіз доводить, що робити цього не варто. Адже значення  $R$  свого часу було обрано за умови лінійної залежності сили опору від швидкості, нині ж ця залежність є квадратичною. Це означає, що тепер за тих самих значень швидкості сила опору зростатиме помітно швидше. Тому нове значення  $R$  має бути меншим, приміром,  $R=0,2-0,3$ . Що ж стосується значення  $Q$ , то, враховуючи, що залежність піднімальної сили від швидкості також є квадратичною, спробуємо прийняти його більшим за  $R$ , наприклад,  $Q=0,5-0,7$ : у такий спосіб ми

сподіваємося більш рельєфно проявити вплив піднімальної сили на рух тіла.

Оскільки траєкторії, що їх виписував ваш паперовий літак, інколи виявлялися досить складними, то прийнятною вбачається пропозиція про необхідність брати достатньо малі значення  $\Delta t$  для побудови більш-менш точної траєкторії (хотілося б не загубити навіть дрібні деталі). Крім того, зменшення інтервалів  $\Delta t$  сприяє покращенню адекватності моделі. Пам'ятаючи, однак, якою ціною даються такі вдосконалення (насамперед, додаткові витрати пам'яті та збільшення часу обчислень), ми повинні шукати компромісу між нашими бажаннями і платнею за них. То ж з метою задоволення зазначених вимог замість  $\Delta t = 0,1$  с прийемо  $\Delta t = 0,05$  с.

Ще раз зауважимо, що добір заздалегідь невідомих значень величин  $R$ ,  $Q$  та  $\Delta t$  був здійснений на основі наших інтуїтивних уявлень про виучуване явище. Отже надійної гарантії успіху дати тут не можна, тобто не можна цілком покладатися на них. Ці значення є лише орієнтовними і для їхнього уточнення необхідно виконати декілька попередніх обчислювальних експериментів з моделлю.

### Обчислювальний експеримент

Після декількох спроб можна одержати, наприклад, такі прийнятні вхідні дані:

$x_0 = 0$ ,  $y_0 = 4$  м,  $v_0 = 6$  м/с,  $\alpha_0 = 30^\circ$ ,  $\Delta t = 0,05$  с,  $R = 0,2$  м<sup>-1</sup>,  $Q = 0,6$  м<sup>-1</sup>.

Відповідно до цих даних будується траєкторія (рис. 9.9).

Поступово збільшуючи початкову швидкість  $v_0$ , наприклад, на 1 м/с, ми з часом одержимо таке її значення, при якому характерною прикметою графіка стане “надлом” у найвищій точці (рис. 9.10).

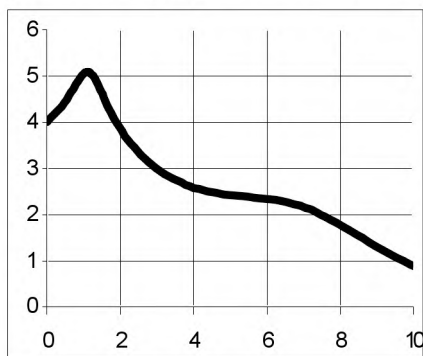


Рис. 9.9

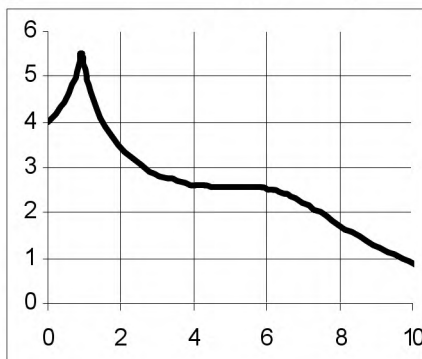


Рис. 9.10



Цікаво, як відреагує модель на подальше збільшення швидкості? Невже наша край спрощена модель здатна на щось більш складне? Ситуація дійсно інтригує! Тут нам нічого не залишається, як продовжити збільшення початкової швидкості.

І ось вона – нагорода за наполегливу працю і терпіння: наш літак описав саму справжню “мертву петлю”! Ця дивовижна картинка (рис. 9.11) здатна будь-кого привести у захват.

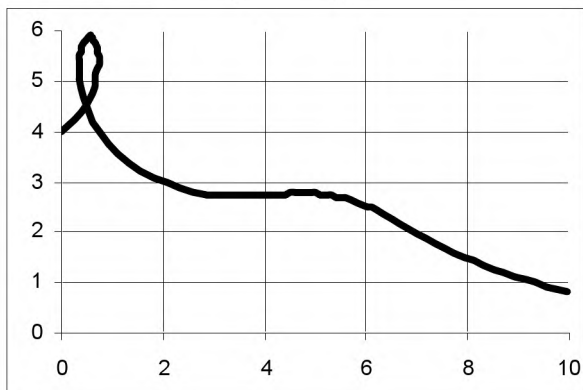


Рис. 9.11

Заспокоймо, однак, емоції і поставимо питання: а чи можна сказати, буде чи не буде виконана петля, якщо не будувати графік, а тільки аналізувати таблицю? Виявляється, так. Необхідна інформація міститься у стовпці для значень кута  $\alpha$ , що його утворює вектор швидкості  $v$  з додатним напрямком осі  $Ox$ .

Адже у криволінійному русі вектор швидкості завжди напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в кожній її точці (у кожний момент часу). Саме тому надійною ознакою петлеподібного руху є монотонне зростання кута  $\alpha$  з переходом через  $360^\circ$  (або через  $0^\circ$ ).

Такий спосіб не єдиний, але найзручніший. Для порівняння розглянемо ще один, згідно з яким тієї ж мети буде досягнуто, якщо, наприклад, спочатку з’ясувати для себе, яким чином з плином часу мають змінюватися координати  $x$  та  $y$  рухомого тіла, якщо воно описує петлеподібну траєкторію, а потім спробувати в таблиці виявити подібні фрагменти.

4. Досвід попередньої роботи станеться вам у нагоді, якщо ви перейдете до дослідження моделі при помітно більших (порядку 20 м/с і більше) початкових швидкостях. Виконуючи такі експерименти, ви неодмінно потрапите в ситуацію, коли порушиться стійкість

алгоритму і необхідним стане прийняття рішення про зміну (зменшення) зазначених вище параметрів задля “рятування” моделі.

### **Вправа**

1. Виконайте завдання, запропоновані у пп. 3 і 4, користуючись останньою таблицею.

2. Що утримує літак у той момент, коли вектор швидкості утворює кут  $\alpha = 90^\circ$  і  $\alpha = 270^\circ$  з горизонтом, тобто коли він направлений вертикально? Поясніть з точки зору фізики.

### **Висновок**

1. Задачу, поставлену на початку глави, на якісному рівні розв’язано. Користуючись порівняно простими ідеями, ми одержали різноманітні траєкторії рухів паперового літачка у повітрі, незважаючи на те, що строге аналітичне розв’язання задачі про планер засобами шкільної математики абсолютно неможливе.

2. В межах прийнятих припущень побудована модель на якісному рівні непогано відтворює реальні рухи. Основна таблиця за кількістю виведених змінних виявилася досить інформативною, але при бажанні можна додати стовпці для спостереження за поведінкою миттєвих значень модуля прискорення та рівнодійної всіх сил, що діють на тіло.

3. Та все одно видається випадковим везінням, що порівняно проста модель здатна давати такі цікаві результати, нехай і на якісному рівні. Тим більше, що про конкретну форму рухомого тіла в ній взагалі не говориться нічого. Невже і насправді так легко примусити тіло невизначеної форми описати “мертву петлю”?

Справа в тому, що використані нами формули математичного запису теореми Жуковського *вже передбачають* наявність відповідних аеродинамічних характеристик (форми та розмірів) рухомого тіла – планера. Дійсною проблемою є саме створення реального об’єкту з необхідними характеристиками.

## **Глава 10. Задача про м'яку посадку на Місяць**

### **10.1. Передмова**

Сюжетною основою моделювання тут є відома задача-гра про “м'яку посадку” на Місяць, яка за часів широкого використання у навчальних цілях та в інженерних розрахунках програмованих мікрокалькуляторів обійшла сторінки ряду науково-популярних журналів (80-ті роки, період початкового оволодіння комп'ютерною грамотністю в нашій країні). При бажанні одну з її версій ви можете знайти в журналі “Техника – молодёжи”, №6 за 1985 р. у цікавому фантастичному оповіданні М. Пухова “Истинная правда”. Від усіх попередніх розв'язуваних нами задач вона відрізняється тим, що передбачає *пошук оптимального управління* процесом (посадкою). Термін “оптимальний” слід розуміти як найбільш вдалий, найбільш доцільний, найкращий з можливих за певних конкретних умов.

За “правилами гри” пошук такого управління має здійснювати дослідник (гравець) методом багаторазових спроб та помилок, покладаючись на власну інтуїцію.

Оскільки цією задачею завершується розділ “Моделювання механічних рухів” нашого посібника, то тут принагідно будуть зроблені певні узагальнення стосовно застосування чисельного методу розв'язування задач механіки, і, крім того, вирішуватимуться нові проблеми, пов'язані, зокрема, зі створенням зручного інтерфейсу користувача.

### **10.2. Постановка задачі**

З метою доставки і розміщення на поверхні Місяця апаратури для наукових досліджень планується запуск космічного корабля. Схема його посадки передбачає декілька послідовних фаз:

- 1) виведення корабля з корисним вантажем на колову селеноцентричну орбіту, тобто корабель має стати штучним сунутником Місяця;
- 2) відділення від корабля вантажу і перетворення його на самостійний орбітальний модуль;
- 3) здійснення м'якої посадки модуля на поверхню Місяця.

Заключна третя фаза має пройти у два етапи:

- спочатку за допомогою маневрових двигунів відбудеться гасіння швидкості модуля відносно Місяця, внаслідок чого він зійде з

колової орбіти й у певний момент над потрібним місцем посадки на короткий час зависне на деякій висоті  $h_0$  над поверхнею Місяця;

– щоб уникнути подальшого вільного падіння, в цей момент увімкнуться двигуни м'якої посадки, що й забезпечить керований плавний спуск модуля до поверхні.

Уточнимо основні технічні умови здійснення другого етапу – безпосередньо посадки.

1. Запас пального, призначеного для роботи двигунів м'якої посадки, є обмеженим (саме цей факт у найбільшій мірі обумовлює необхідність пошуку *оптимального* управління).

2. Передбачається, що швидкість апарату під час опускання можна регулювати, змінюючи витрату пального, що подається до камер згоряння, оскільки реактивна сила тяги гальмівних двигунів залежить від маси пального, що згоряє в камерах за одиницю часу.

3. Щоб запобігти руйнуванню цих двигунів під час роботи, витрата пального за одиницю часу не повинна перебільшувати деякого максимально дозволеного значення.

4. При здійсненні посадки швидкість витікання реактивного струменя (продуктів згоряння) через сопло підтримується сталою.

5. Сталою також вважається і маса модуля без маси пального.

При моделюванні завершення посадки вважатиметься момент, коли значення висоти  $h$  над поверхнею Місяця переходить через нуль. При цьому м'якою вважатиметься така посадка, коли швидкість апарату в цей момент (при переході  $h$  через нуль) не перебільшуватиме деякого певного значення, наприклад, 1 м/с.

*Задача полягає в тому, щоб за умови обмеженої маси пального виявити такий режим подавання його до камер згоряння, тобто таке управління, яке забезпечить м'яку посадку.*

За цілком зрозумілих причин конструктори не можуть провести реальні експерименти. Єдиний придатний спосіб знаходження необхідного управління полягає в підготовці й проведенні відповідного обчислювального експерименту на ЕОМ на основі математичної моделі заключного етапу операції.

### 10.2.1. Формалізація задачі та побудова моделі

Уведемо позначення:

$M$  – маса модуля без урахування маси пального (за умовою п. 5 величина стала).

$m = m_t$  – змінна маса пального. У початковий момент  $m = m_0$ .

$r$  – витрата пального, тобто маса пального, що спалюється в

камерах згоряння двигунів м'якої посадки за проміжок часу від моменту  $t$  до  $t + \Delta t$ , тобто за проміжок часу  $\Delta t$ . Оскільки припускається, що витрату можна регулювати в ході зниження, то  $r$  є невідомою і шуканою функцією часу:  $r = r(t)$ .

Зазначене вище обмеження на витрату пального (п. 3 технічних умов) можна записати у вигляді нерівності  $0 \leq r(t) \leq r_{\max}$ .

$v = v_t$  – миттєва швидкість модуля під час опускання. Початкова умова “зависання” виражається рівністю  $v_0 = 0$ . Умова м'якої посадки – одночасне виконання нерівностей  $0 \geq v \geq -1$  і  $h \leq 0$ .

$u$  – швидкість витікання реактивного струменя; величина стала згідно п. 4 технічних умов.

$h_t$  – миттєве значення висоти над поверхнею Місяця, причому  $h = h_0$  при  $t = 0$ .

Решту позначень будемо вводити в міру необхідності.

### 10.2.2. Аналіз умови й обговорення плану роботи

1. Рух, що його ми збираємось дослідити, з фізичної точки зору являє собою неперервний у часі й просторі процес. Дійсно, тут неперервно відбуваються зміни значень всіх динамічних і кінематичних характеристик рухомого об'єкта: маси, рівнодійної всіх діючих сил, прискорення, швидкості, імпульсу, координати тощо. Згадаємо, що математичні моделі, створені для опрацювання за допомогою комп'ютера (комп'ютерні математичні моделі), повинні бути дискретними, оскільки сам комп'ютер є дискретним пристроєм, тобто виконує операції за окремими кроками. Тому при комп'ютерному опрацюванні неперервних аналітичних моделей завжди існує потреба в уведенні до моделі елементів дискретизації.

Ця потреба реалізується на основі чисельних методів шляхом переходу від неперервної математичної моделі до рівнянь, записаних у формі скінчених різниць. З попереднього досвіду ви вже знаєте, що для дискретизації неперервного в часі процесу, яким, зокрема, є механічний рух, весь час руху розбивають на окремі достатньо малі інтервали  $\Delta t$ . При цьому вважають, що протягом такого інтервалу характеристики руху (значення відповідних змінних) залишаються постійними, а їхні зміни відбуваються миттєво (стрибкоподібно) в моменти часу, що відповідають кінцю або середині кожного такого інтервалу. Ці моменти, а також тривалість проміжків  $\Delta t$  обирає дослідник. При послідовному зменшенні  $\Delta t$  результати, одержані на дискретній моделі, наближаються до результатів, що їх дає аналітич-

не розв'язування за неперервною моделлю, якщо воно існує і відоме.

З метою спрощення подальших міркувань прийmemo такі припущення.

*Припущення 1.* Протягом проміжку часу  $\Delta t$  аж до його останньої мнті повна маса модуля  $m + M$  і його швидкість  $v$  залишаються незмінними. В останній момент *миттєво* спалюється пальне масою  $r$  і це приводить до одночасної зміни значень згаданих характеристик. Ці нові значення стають початковими для наступного інтервалу  $\Delta t$ , адже, як уже багаторазово зазначалося, кінець даного інтервалу є початком наступного.

Розглянемо окремі елементарні моделі, при об'єднанні яких буде побудована загальна математична модель м'якої посадки модуля. В основу побудови покладемо рис. 10.1.

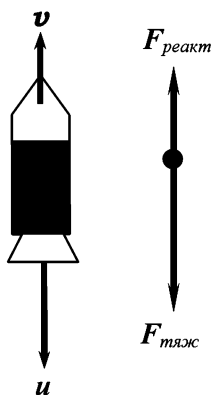


Рис. 10.1

### 1. Модель вигорання пального.

$$m_t = m_{t-\Delta t} - r_{t-\Delta t}, \quad (1)$$

де  $0 \leq r_t \leq r_{\max}$ ;

$m_t$  – маса пального в момент  $t$ ;

$m_{t-\Delta t}$  – маса пального в момент  $(t-\Delta t)$ , тобто на попередньому проміжку  $\Delta t$ ;

$r_{t-\Delta t}$  – витрата пального на проміжку, що був на  $\Delta t$  раніше за момент часу  $t$ , або маса пального, що згоріло за попередній проміжок часу  $\Delta t$ .

### 2. Модель гравітаційного притягання Місяця.

$$F_{\text{тяж}} = (m_t + M) \cdot g, \quad (2)$$

де  $g = 1,62 \text{ м/с}^2$  – прискорення сили тяжіння поблизу поверхні Місяця.

### 3. Модель реактивної сили тяги.

Реактивна сила тяги  $F_{\text{реакт}}$ , що діє на модуль, дорівнює швидкості зміни імпульсу модуля:

$$F_{\text{реакт}} = \frac{((M + m_{t+\Delta t}) v_{t+\Delta t}) - ((M + m_t) v_t)}{\Delta t} = \frac{\Delta((M + m) v)}{\Delta t}.$$

Згідно закону збереження імпульсу для замкнутої системи “модуль – реактивна струмина” зміна імпульсу модуля за абсолютною величиною дорівнює зміні імпульсу струмини:

$$\Delta((M + m) \cdot v) = \Delta m \cdot u = r_{t-\Delta t} \cdot u,$$

де  $\Delta m = m_{t-\Delta t} - m_t = r_{t-\Delta t} -$  маса струмини, що втікає за проміжок часу  $\Delta t$  згідно (1).

Таким чином,

$$F_{\text{реакт}} = \frac{r_{t-\Delta t} \cdot u}{\Delta t}. \quad (3)$$

### 4. Модель руху модуля.

Внаслідок відсутності на Місяці атмосфери силу опору рухові з боку середовища можна не включати до розгляду. Тому на активній ділянці спуску, коли працюють тільки двигуни м'якої посадки, на модуль діють тільки дві сили: сила гравітаційного притягання Місяця  $F_{\text{тяж}}$  і протилежно напрямлена реактивна сила тяги  $F_{\text{реакт}}$ . За другим законом Ньютона рівнодійна цих сил надає модулеві прискорення:

$$F_{\text{тяж}} - F_{\text{реакт}} = (m_t + M) \cdot a,$$

де  $a = a_t$  – прискорення апарату, яке змінюється з часом.

Підставляючи (2) і (3) в останній вираз, будемо мати:

$$a_t = \frac{u \cdot r_{t-\Delta t}}{(m_t + M) \cdot \Delta t} - g. \quad (4)$$

Оскільки розглядається рух тіла змінної маси, то прискорення виявляється складною функцією часу.

*Припущення 2.* Прийнемо наближено, що прискорення  $a(t)$  залишається сталим на кожному малому інтервалі  $\Delta t$ , тобто рух апарату на кожному часовому інтервалі є рівноприскореним. Тоді миттєва швидкість модуля  $v_t$  наприкінці інтервалу може бути визначена з виразу

$$v_t = v_{t-\Delta t} + a_t \Delta t. \quad (5)$$

Висота  $h_t$  над поверхнею Місяця може бути задана виразом

$$h_t = h_{t-\Delta t} + v_{t-\Delta t} \cdot \Delta t + \frac{a_t \cdot \Delta t^2}{2}. \quad (6)$$

Система рівнянь (1), (4), (5), (6) являє собою математичну модель м'якої посадки на Місяць.

Суттєвого спрощення подальшої роботи можна досягти, прийнявши тривалість інтервалу  $\Delta t$  рівною одиниці часу:  $\Delta t = 1$ . Проте платнею за таке спрощення стане погіршення точності результатів. На якісному рівні, однак, модель залишатиметься задовільною. З урахуванням сказаного запишемо систему:

$$\begin{cases} m_t = m_{t-1} - r_{t-1} \\ a_t = \frac{u \cdot r_{t-1}}{m_t + M} - g \\ v_t = v_{t-1} + a_t \\ h_t = h_{t-1} + v_{t-1} + \frac{a_t}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Цю систему рівнянь відносно  $m_t$ ,  $a_t$ ,  $v_t$ ,  $h_t$  будемо розв'язувати методом послідовних підстановок. Суть методу полягає в такому. Нехай обрано деяке припустиме управління апаратом, тобто є заданою послідовність значень  $r_0, r_1, \dots, r_t$ , така, що  $r_0 + r_1 + \dots + r_t \leq m_0$ . При  $t = 0$  нам уже відомі значення  $m_0, a_0, v_0, h_0$  і, отже, можна обчислити значення правих частин у рівняннях системи (7), тобто знайти  $m_1, a_1, v_1, h_1$ . У свою чергу, їх можна використати для обчислення значень  $m_2, a_2, v_2, h_2$  і т.д.

Послідовність значень  $r$  стане відомою лише після того, як ми відшукаємо її під час роботи з моделлю, тобто під час "гри".

Процес обчислень має тривати до моменту виконання умови  $h_{t+1} \leq 0$ , тобто досягнення поверхні. Якщо при цьому одночасно виявиться, що  $-1 \leq v_{t+1} \leq 0$ , то посадку будемо вважати м'якою.

#### Вправа

1. Поясніть, чому досягнення поверхні ми описуємо умовою  $h \leq 0$ , а не більш жорсткою  $h = 0$ ?
2. Поясніть необхідність подвійної нерівності в умові для кінцевої швидкості м'якої посадки.

Система рівнянь (7) є рекурентною. Алгоритм її розв'язування передбачає виконання однотипних обчислень при  $t = 0, t = 1, \dots$ . Зрозуміло, що з подібною одноманітною роботою комп'ютер вправляється краще за людину. При математичному моделюванні реальних процесів і явищ на сучасних ЕОМ доводиться розв'язувати системи численних рекурентних рівнянь з багатьма невідомими.



### 10.3. Обчислювальний експеримент

1. Створимо електронну таблицю, перший рядок якої заповнимо іменами стовпців, стовпець G (“Дано:”) – іменами змінних, стовпець H – їх початковими значеннями, а комірки A2 – F2 (для моменту часу  $t = 0$ ) – посиланнями на відповідні комірки стовпця H (рис. 10.2):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		$t$	$a$	$v$	$h$	$r$	Дано:	
2	0	100	-1,62	0,00	10,00	0	$M_0$ , кг =	100
3							$g$ , м/с <sup>2</sup> =	1,62
4							$v_0$ , м/с =	0
5							$u$ , м/с =	200
6							$M$ , кг =	1000
7							$h_0$ , м =	10
8							$r_{max}$ , кг =	10
...		...	...	...	...	...		

Рис. 10.2

2. Заповнимо третій рядок необхідними формулами.

комірки	формули / числа
A3	=A2+1
B3	=B2-F2
C3	=\$H\$5*F2/(B3+\$H\$6)-\$H\$3
D3	=D2+C3
E3	=E2+D2+C3/2
F3, F4, ...	Заповнюються з клавіатури

3. Скопіюємо формули третього рядка у наступні рядки. Таблиця набуває вигляду, показаного на рис. 10.3:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$t$	$t$	$a$	$v$	$h$	$r$	Дано:	
2	0	100	-1,62	0,00	10,00	0	$m_0$ , кг =	100
3	1	100	-1,62	-1,62	8,38		$g$ , м/с <sup>2</sup> =	1,62
4	2	100	-1,62	-3,24	5,14		$v_0$ , м/с =	0
5	3	100	-1,62	-4,86	0,28		$u$ , м/с =	200
6	4	100	-1,62	-6,48	-6,20		$M$ , кг =	1000
...	...	...	...	...	...	...	$h_0$ , м =	10
...	...	...	...	...	...	...	$r_{max}$ , кг =	10

Рис. 10.3

З таблиці видно таке: коли не працюють двигуни м'якої посадки ( $r = 0$ ), модуль вільно падає, і вже наприкінці четвертої секунди досягає поверхні в аварійному режимі ( $h = -6,2$  м,  $v = -6,48$  м/с). Наступні значення величин швидкості (після D6) і висоти (після E6)

являють собою результати обчислень за введеними формулами і в даному випадку не відображують реальний процес.

4. Будемо послідовно заповнювати комірки стовпця F довільними значеннями змінної  $r$  – витрати пального за однакові проміжки часу  $\Delta t = 1$  с.

5. Після заповнення кожної чергової комірки спостерігаємо за значеннями у комірках *наступного* рядка для стовпців D (швидкість) та E (висота).

6. З'ясуємо, чи не відбулася м'яка посадка.

Якщо при деякому черговому значенні  $r$  одночасно виконуватимуться умови  $h \leq 0$  і  $-1 \leq v \leq 0$ , то задачу вважаємо розв'язаною і припиняємо обчислювальний експеримент.

**Запитання.** Поясніть, чому значення інтервалу  $\Delta t = 1$  суттєво спрощує роботу з моделлю?

Виявляється, що “здійснити” м'яку посадку – зовсім не проста справа. Вона ще більше ускладнюється, коли додається умова *зеконотити при цьому якомога більше пального*.

### **Вправи**

1. Спробуйте “здійснити” економну м'яку посадку при початковій масі пального 100 кг.

2. На рис. 3 подано одне з можливих удалих управлінь (послідовність значень витрати пального  $r$ ) для  $m_0 = 100$  кг; дане управління забезпечує економію 44 кг пального.

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7
$r$	0	6	10	10	10	10	10	
$v$	0	-1,62	-2,14	-1,92	-1,68	-1,42	-1,14	-0,84
$h$	10	9,19	7,31	5,28	3,48	1,93	0,66	-0,33

Рис. 10.4

3. Перевірте експериментально запропонований на рис. 10.4 режим управління посадкою.

4. Не виконуючи експерименту, скажіть, чи виявиться посадка за рис. 10.4 м'якою, якщо початкову масу пального взяти не 100 кг, а з урахуванням економії  $100 - 44 = 56$  кг? Свою відповідь обґрунтуйте.

5. Тепер виконайте перевірку на моделі. Якщо результат перевірки не співпадає з очікуваним, поверніться до попереднього п. 4.

## **10.4. Поліпшення інтерфейсу користувача**

Створена таблиця має чимало суттєвих вад.

1. Насамперед, у ній відсутня інформація про результат процесу посадки після введення кожного чергового значення витрати  $r$ . Цю

інформацію ми поки що вимушені отримувати шляхом безпосереднього перегляду значень швидкості й висоти та порівнянням їх з умовами м'якої посадки. З метою автоматизації цієї справи виконаємо так:

- після стовпця F створимо новий стовпець, який одержить ім'я G, а стовпець “Дано:” і наступний – відповідно H, I;
- у комірці G1 запишемо “Процес”;
- залишаючи комірку G2 пустою, уведемо до комірки G3 формулу

=ЕСЛИ(И(D3>=-1;D3<=0;E3<=0);"Ok!";ЕСЛИ(И(D3<-1;E3<0);"Аварія";"")), яку скопіюємо у комірки (G4–G12).

**Завдання.** Прокоментуйте запропоновану формулу.

2. Згідно умови в моделі існує обмеження  $0 \leq r_t \leq r_{max}$ , яке поки що не враховане. Реалізуємо його шляхом введення до комірки H9 такої формули:

=ЕСЛИ(ИЛИ(F3>\$I\$8;F4>\$I\$8;B5>\$I\$8;F6>\$I\$8;F7>\$I\$8;F8>\$I\$8;F9>\$I\$8;F10>\$I\$8;F11>\$I\$8;F12>\$I\$8);"Дивись I8 !";"").

Тепер при введенні до будь-якої з комірок B3–B13 значень, що перебільшують вміст комірки I8 (обмеження на  $r$ ), у H9 матимемо повідомлення “Дивись I8 !”. У випадку допустимих значень змінної  $r$  комірка H9 буде порожньою.

**Вправа.** Доопрацюйте наведену формулу так, щоб у ній додатково враховувалася ще й умова  $r \geq 0$ .

3. Оскільки початковий запас пального  $m_0$  для двигунів м'якої посадки є обмеженим (комірка I2), то бажано також виводити на екран повідомлення про закінчення пального. Таке повідомлення можна здійснити, наприклад, у комірці H10 за допомогою формули

=ЕСЛИ(СУММ(F2:F12)>=\$I\$2;"ЗАКІНЧИЛОСЯ ПАЛЬНЕ !";"").

**Вправа**

1. Виконайте в попередній таблиці всі зміни, описані в пп. 1-3.
2. Уведіть початкову масу пального  $m_0 = 70$  кг.
3. Починайте обчислювальний експеримент, дотримуючись поданої нижче схеми управління витратою пального

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$r$	0	6	9	9	10	10	10	8	6

Ваша таблиця набуває дуже цікавого вигляду (рис. 10.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K
1	$t$	$m$	$a$	$v$	$h$	$r$	Процес	Дано:			
2	0	70	-1,62	0,00	10,00	0		$m_0=$	70		
3	1	70	-1,62	-1,62	9,19	8		$g_{mic}=$	1,62		
4	2	62	-0,11	-1,73	7,51	9		$v_0=$	0		
5	3	53	0,09	-1,64	5,82	9		$H=$	200		
6	4	44	0,10	-1,54	4,23	10		$M=$	1000		
7	5	34	0,31	-1,23	2,85	10		$h_0=$	10		
8	6	24	0,33	-0,89	1,79	10		$r_{max}=$	10		
9	7	14	0,35	-0,54	1,07	8					
10	8	6	-0,03	-0,57	0,52	6		Закінчилося пальне !			
11	9	0	-0,42	-0,99	-0,26		Ок!				

Рис. 10.5

Тут видно, що при  $m_0 = 70$  кг і управліннях  $r = 0, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 8, 6$  пальне закінчується в останній момент вдалої посадки.

#### Вправи

1. Запропонуйте інші можливі варіанти такої перевірки.
2. Перевірте нові можливості таблиці шляхом тестування за пп.1–3.
3. Доцільним доповненням до інтерфейсу користувача є графічне відображення залежностей змінних величин від часу. Як відомо, така задача легко реалізується засобами електронних таблиць. На рис. 10.6 маємо графіки залежності від часу основних характеристик процесу у відповідності до рис. 10.5.

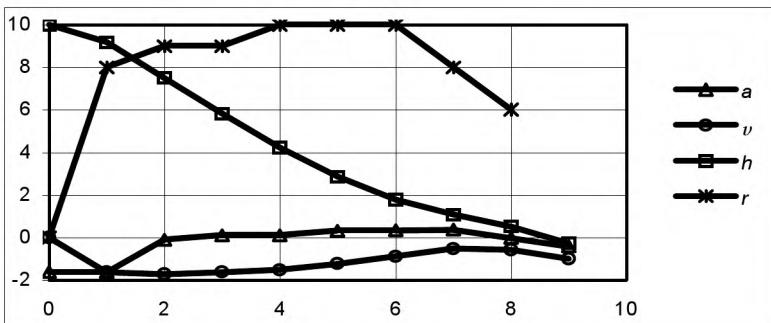


Рис. 10.6

4. В даній моделі за домовленістю зміна значень всіх характеристик руху відбувається наприкінці кожного інтервалу  $\Delta t$ .

Побудуйте модель, у якій ці характеристики змінюватимуться в середині інтервалу  $\Delta t$ .

5. Проведіть серед бажаючих змагання за критерієм “витрата пального  $\times$  час посадки”. Перемагає гравець, в якого цей критерій виявиться найменшим.

### **Висновки**

1. Головна мета моделювання в дапій задачі-грі полягає у відшуванні оптимального управління м'якою посадкою спускиого модуля космічної станції. На рівні гри цієї мети досягнуто. Рис. 10.6, на якому показана динаміка зміни всіх характеристик руху, можна розглядати як компактний підсумок виконаної роботи. Достатньо у “бортовий комп'ютер” увести програму управління режимом роботи гальмівних двигунів згідно з експериментально знайденою залежністю  $r = r(t)$ , і процес посадки буде автоматизовано. Отже наступна гра з тими самими дапами закінчиться успішно.

2. Розглянута модель є прикладом постановки задачі оптимізації управління. Пошук оптимального управління здійснювався тут людиною-гравцем методом багаторазових спроб та помилок. Сьогодні такі задачі розв'язуються на основі спеціальних математичних методів, які забезпечують автоматизований пошук оптимальної стратегії. Їх вивчає комплексна математична дисципліна, що має назву “Дослідження операцій”. Деякі з цих методів мають досить прості і надійні комп'ютерні реалізації. У наступному розділі ми познайомимося з прикладом автоматизованого розв'язування задачі оптимального управління на виробництві.

## Розділ 5. Імітаційне моделювання

Сьогодні існує два головних напрями використання ЕОМ. У межах першого дослідник намагається якомога далі просунутись у розв'язанні задачі ще до використання ЕОМ, і перед тим, як звернутись до комп'ютера, він уже уявляє собі основні закономірності вивчуваного явища (наприклад, у вигляді системи рівнянь, нерівностей-обмежень, логічних виразів тощо), а машина стає при нагоді лише як ефективний обчислювальний інструмент.

Проте поява ЕОМ і практика їх використання привели до цікавого і принципово важливого феномену: витвір людського розуму – комп'ютер – почав здійснювати зворотний вплив на стілець мислення людини. Цей факт виявився віддзеркаленням більш загальної закономірності: інструменти, які люди створюють для своїх цілей, впливають своїм устроєм і обмеженнями на формування людських уявлень про світ. Інструмент створюється для вирішення конкретної проблеми, але в міру застосування і вдосконалення інструмент підказує інші способи його використання.

Зокрема, в моделюванні це проявилось появою нового напрямку, суть якого визначається двома ознаками. По-перше, дослідник бере до розгляду тільки основні закономірності тієї галузі знань, у якій він працює. По-друге, цей підхід заздалегідь передбачає наявність комп'ютера як основного інструмента-партнера для створення моделі і подальшої роботи з нею. Згодом такий підхід одержав навіть спеціальну назву – *імітаційне моделювання*.

Слово “*імітація*” походить від латинського *imitatio* і означає наслідування когось чи чогось (рос. – *подражание*). У моделюванні цим терміном позначають відтворення всіх або частини функцій та властивостей реального об'єкту за допомогою моделі. У англomовних країнах або у тих, що перейняли їхню термінологію, застосовують інший термін *simulation* – симуляція. Тут можна пригадати відомого героя Я. Гашека – бравого солдата Швейка, який дуже майстерно імітував (симулював) божевільня.

*Імітаційне комп'ютерне моделювання – це штучний експеримент на екрані дисплея, при якому з метою зрозуміти поведінку системи або порівняти різні стратегії управління нею замість натурних випробувань на реальній складній системі експериментують з її комп'ютерною моделлю.*

Строго кажучи, будь-яка комп'ютерна модель є імітаційною, але

цей термін закріпився за моделями *складних систем*, коли внутрішні закони досліджуваних явищ невідомі або визначаються *випадковими* чинниками.

Результат еволюції таких систем можливо змодельовати лише шляхом прямої покрокової імітації, оскільки не існує жодного способу передбачити наслідки дії численних випадкових факторів. Треба просто вести обчислювальний експеримент і чекати до тих пір, коли еволюція відбудеться. Для дослідження складних природних, економічних, виробничих систем сьогодні відомі лише два способи: 1) натурний експеримент, який може виявитись занадто коштовним, небезпечним, шкідливим чи нездійсненним і 2) обчислювальний експеримент з математичною моделлю досліджуваної системи.

## Глава 11. Моделювання за допомогою випадкових чисел

### 11.1. Детерміновані й стохастичні моделі

Усі без винятку попередні моделі мають одну спільну особливість – хід процесів у них визначається строгими й чіткими закономірностями, тобто між значеннями характеристик об'єкту чи деякої системи об'єктів у певний момент часу і значеннями цих характеристик у будь-який наступний (або попередній) момент існував строгий однозначний зв'язок. Цей зв'язок встановлювався математичним записом закономірностей у вигляді точних формул. Явища, що описуються такими величинами, мають назву *детермінованих* (від латинського *determino* – визначаю), таку ж назву мають і відповідні моделі.

Однак, окрім детермінованих об'єктів (процесів, явищ) у природі й суспільстві існують і такі, що для них неможливо за допомогою точних формул врахувати численні й різноманітні впливи випадкових факторів, наприклад, майже всі виробничі процеси, а також об'єкти, характеристики яких за своєю природою можуть набувати *лише* випадкових значень. Наприклад, денна кількість пасажирів на різних видах транспорту, тривалість проміжків часу між ремонтами техніки, ряд властивості об'єктів мікросвіту, зміни в часі симпатій виборців тощо. Величини з наведених прикладів називають випадковими або *стохастичними*. Цю ж назву – “стохастичні” – мають і математичні моделі, що містять такі величини.

Якщо в детермінованих явищах багаторазово відтворювати ті самі початкові умови, то обов'язково відтворюватимуться ті самі результати. У випадку стохастичних величин результати кожного разу будуть новими. За потреби тут часто вдаються до усереднення результатів.

### 11.2. Метод Монте-Карло

Існують різні підходи до моделювання систем, що містять стохастичні характеристики, але найбільш поширеним є *метод випадкової вибірки*, відомий ще під назвою методу Монте-Карло. Створення цього методу пов'язане з роботою видатного американського математика, одного із засновників кібернетики Джона фон Неймана, котрий наприкінці 40-х років увів цей термін при розв'язуванні проблеми екранування (захисту) від ядерних випромінювань.



Назва методу походить від назви столиці князівства Монако, відомої у всьому світі своїми гральними домами, де значне місце посідає рулетка. Якщо рулетка гарно збалансована, кулька (або стрілка-показчик) може зупинитись у будь-якому положенні, тому ймовірність одержання будь-якого числа однакова для всіх чисел на барабані.

Поглянемо на рулетку з позиції дослідника. Уявімо, що на диску містяться цілі числа з деякого інтервалу, наприклад,  $[0, 9]$ . Після кожного випробування будемо в прямокутній системі координат на вісі ординат відкладати ці числа, а на вісі абсцис – відповідно порядкові номери їхньої появи. Тоді за достатньо великої кількості випробувань ми одержимо множину точок, майже рівномірно розподілених на координатній площині.

Інший метод одержання рівномірно розподілених випадкових чисел – використання лототрону.

За необхідності одержати  $m$ -розрядні числа можна було б  $m$  разів підряд пустити рулетку або вилучити з лототрону підряд  $m$  куль (зрозуміло, повертаючи їх знов після кожного випробування до лототрону). Рівномірний розподіл випадкових чисел – це ідеалізоване математичне поняття і фактично не зустрічається на практиці.

В дійсності немає потреби багаторазово обертати рулетку або барабан лототрону, оскільки випадкові числа давно визначені і зведені до спеціальних таблиць. Фрагмент такої таблиці для  $m = 4$  наведений нижче.

3513	6976	9847	1722	3874	6793	5587	4268	7740	2544
1247	4679	1275	7556	5297	2883	0882	4311	2741	2020
6904	7243	1157	9490	1043	2749	7881	3774	3275	6238
5675	2501	7238	0945	7257	0283	3170	7628	7272	3355

Таблиця чотиризначних ( $m = 4$ ) випадкових чисел.

Коли випадкові числа добирають з таблиці, то не обов'язково починати із самого першого числа: до таблиці можна входити з будь-якого місця. Однак надалі треба використовувати певну регулярність. Наприклад, брати числа підряд уздовж рядків, зміщуючись весь час праворуч чи ліворуч, або вздовж стовпців (вгору чи вниз), нічого не пропускаючи, тобто не можна надавати перевагу “гарним” числам і пропускати “незручні”, наприклад, дуже малі.

У природних і виробничих умовах, у суспільних і багатьох інших явищах спостерігаються розподіли нерівномірні. Такими є розподіли, характерні для коливань купівельного попиту, для

величини врожаю у різні роки, для виробничих похибок та похибок вимірювань, для рівня перешкод при передаванні інформації тощо. Відомі й інші види нерівномірних розподілів випадкових величин. Всі їх вивчає окрема теорія – *математична статистика*.

При моделюванні випадкових величин їх розподіл визначають одним із двох способів:

1) за певним теоретичним законом методами математичної статистики;

2) на основі даних, отриманих за результатами спеціально поставленого натурального експерименту, і саме цей спосіб ми далі використаємо.

Для роботи ЕОМ з випадковими числами спочатку були здійснені спроби вводити ці числа до машини ззовні. Вводили у пам'ять готові таблиці, будували прилади на основі випадкових фізичних процесів (наприклад, радіоактивного розпаду або підрахунку кількості електронів, що вилітають за деякий фіксований проміжок часу з гарячого катоду), і одержані на цих приладах числа також вводили у пам'ять. Однак і те, й інше працювало однаково погано: таблиці випадкових чисел в ЕОМ швидко вичерпувалися, а випадкове фізичне явище взагалі не можна відтворити з тією самою послідовністю чисел для перевірки розрахунків.

Саме в цій ситуації Джон фон Нейман придумав алгоритм генерування (створення) чисел, дуже схожих на випадкові і рівномірно розподілених у інтервалі  $[0, 1]$ . Ці числа ще називають *псевдовипадковими* (нібито, майже випадковими), оскільки їхня послідовність є, нажаль, періодичною. Кількість чисел у періоді намагаються збільшувати шляхом удосконалення алгоритму їх утворення. У сучасних мовах програмування такі алгоритми реалізують у спеціальних стандартних функціях. Так, відома функція  $RND(X)$  генерує рівномірно розподілену в інтервалі  $[0, 1]$  послідовність псевдовипадкових чисел. Назва функції походить від англійського *random* – випадковий. В електронних таблицях також є відповідна функція.

Ідея методу Монте-Карло полягає в тому, що при побудові стохастичних моделей деякі суттєві параметри моделі визначають за допомогою випадкових чисел. Основна проблема тут зводиться до пошуку зручного та надійного джерела (генератора) таких чисел.

У безмашинному варіанті ці числа, як зазначалося вище, беруть зі спеціальних таблиць, а за наявності комп'ютера користуються стандартним генератором псевдовипадкових чисел.

Розглянемо деякі прості приклади моделювання з використанням випадкових чисел.

### **11.3. Моделювання броунівського руху (найпростіша модель)**

Пригадаємо, що броунівським рухом називають неупорядкований рух дрібних частинок, завислих у рідині чи газі, під впливом ударів молекул навколишнього середовища. Вперше це явище спостерігав у мікроскоп англійський ботанік Роберт Броун у 1827 р., розглядаючи рух частинок квіткового пилку, завислих у краплі воді.

Як згодом було встановлено, причиною руху броунівської частинки є тепловий рух молекул середовища і відсутність точної просторової компенсації ударів, що їх зазнає частинка з боку оточуючих її молекул. Ці некомпенсовані удари, будучи безладними, приводять і частинку у неупорядкований рух: швидкість її весь час різко змінюється і за величиною, і за напрямком. Якщо фіксувати положення довільної частинки через невеликі однакові проміжки часу, то побудована у такий спосіб траєкторія виявляється надзвичайно складною й заплутаною ламаною лінією. На рис. 11.1 показані фотографії рухів трьох броунівських частинок радіусом 0,52 мкм у воді. Точками відмічені положення частинок через кожні 30 с. Відстань між поділками сітки 3,4 мкм.

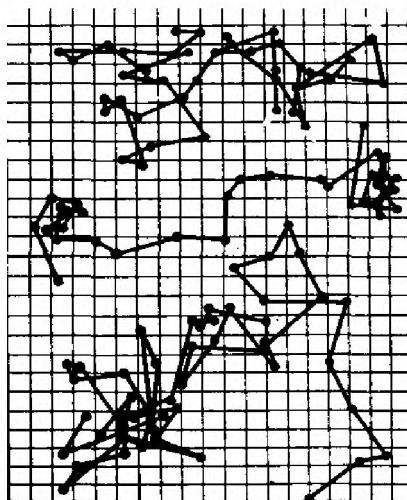


Рис. 11.1

У другій половині XIX ст. броунівський рух виявився найбільш переконливим експериментальним підтвердженням основних поло-

жень молекулярно-кінетичної теорії (про хаотичний тепловий рух атомів і молекул речовини): хоч молекули в оптичний мікроскоп безпосередньо і не видні, та рух броунівських частинок *опосередковано* свідчать про рух молекул. Повну теорію броунівського руху дали в 1905 – 1906 рр. Альберт Ейнштейн і Маріан Смулховський.

Поставимо за мету моделювання ламаної траєкторії руху броунівської частинки.

### 11.3.1. Комп'ютерна модель броунівського руху

Оскільки координати  $x$  та  $y$  такої частинки у будь-який довільний момент часу заздалегідь передбачити неможливо, то моделювати їх будемо парами випадкових чисел, які в середовищі електронних таблиць в інтервалі  $[0; 1]$  продукує функція СЛЧИС( ). Прийнемо до уваги, що всі напрямки руху однаково ймовірні. Саме тому такий рух називають випадковим блуканням. Для того, щоб координати могли набувати як додатних значень, так і від'ємних, випадкові числа мають змінюватись від  $-1$  до  $+1$ . Такі числа даватиме функція  $2*\text{СЛЧИС}() - 1$  (доведіть!).

Нову координату  $x_{i+1}$  частинки будемо знаходити, додаючи до її попередньої координати  $x_i$  випадкове число з інтервалу  $[-1; 1]$ :

$$x_{i+1} = x_i + (2*\text{СЛЧИС}() - 1).$$

Значення проєкцій окремих послідовних переміщень  $s_x$ ,  $s_y$  отримаємо як різниці між поточними і попередніми координатами частинки:  $s_x = x_i - x_{i-1}$ ;  $s_y = y_i - y_{i-1}$ . Ці значення, як і координати  $x$ ,  $y$  будемо зберігати. Крім того, будемо зберігати модулі проєкцій переміщення  $|s_x|$ ,  $|s_y|$  і модуль вектора переміщення  $|s| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ .

### 11.3.2. Обговорення алгоритму роботи з моделлю

1. Створити таблицю за таким зразком

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x$	$y$	$s_x$	$s_y$	$ s_x $	$ s_y $	$ s $
2							
...	...	...	...	...	...	...	...

2. У першому рядку помістити імена змінних:

- $x$ ,  $y$  – координати частинки (випадкові числа);
- $s_x$ ,  $s_y$  – проєкції переміщення  $s$  на координатні осі  $x$ ,  $y$ ;
- $|s_x|$ ,  $|s_y|$  – модулі проєкцій переміщення на ці осі;
- $|s|$  – модуль вектора переміщення;
- для зручності початкові координати частинки прийняти

рівними нулю:  $x_0 = 0, y_0 = 0$ ;  
Вміст комірок має бути наступним:

комірки	формули / числа
A2	=0
A3	=A2+(2*СЛЧИС()-1)
B2	=0
B3	=B2+(2*СЛЧИС()-1)
C2	пуста
C3	=A3-A2
D3	=ABS(C3)

3. Комірки E3, F3 і G3 заповнити самостійно.

4. Третій рядок копіювати в наступні 100 рядків, тобто до рядка з номером 102.

5. Побудувати траєкторію руху частинки, тобто графік залежності координати  $y$  від координати  $x$ .

### 11.3.3. Обчислювальний експеримент

	A	B	C	D	E	F	G
1	$x$	$y$	$s_x$	$s_y$	$ s_x $	$ s_y $	$s$
2	0,00	0,00					
3	0,20	-0,03	0,20	-0,03	0,20	0,03	0,21
4	0,27	-0,05	0,07	-0,02	0,07	0,02	0,07
5	0,16	-0,46	-0,12	-0,41	0,12	0,41	0,43
...	...	...	...	...	...	...	...

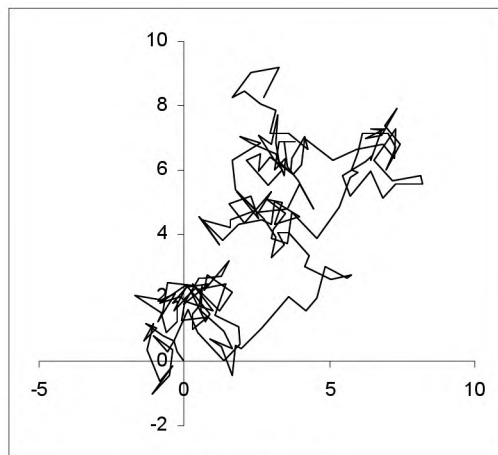


Рис. 11.2

Натискання на клавішу F9 приводить до перерахунку за новими

даними (новими випадковими числами). Відповідно до цього змінюється вигляд траєкторії руху броунівської частинки. Отримувані у такий спосіб картинки будуть нагадувати сюжети з рис. 11.1.

#### 11.3.4. Статистичний аналіз результатів експерименту

Здавалося б, гарна модель, і дає вона правдоподібні результати. Проте це тільки на перший погляд. Результати за моделлю не узгоджуються з тими, що спостерігаються в реальних (натурних) експериментах. Про яке ж неспівпадіння йдеться?

Кожен стовпець нашої таблиці містить випадкові числа, але не всі вони є зручними для дослідження. Так, значення координат  $x$  та  $y$  лежать в широкому діапазоні і помітно виходять за межі інтервалу від  $-1$  до  $+1$ , що якраз і не є зручним. Зручнішими для аналізу є значення проєкцій переміщення на осі координат  $s_x$ , або  $s_y$ , які всі потрапляють у зазначений інтервал. Не менш зручними виявляються модулі цих проєкцій  $|s_x|$  і  $|s_y|$ , адже вони розташовані в іще більш вузькому інтервалі від  $0$  до  $+1$ .

То ж виконаємо нескладне *статистичне дослідження* отриманих послідовностей випадкових чисел, якими для визначеності нехай будуть значення  $|s_x|$  зі стовпця Е. В результаті моделювання у всіх стовпцях таблиці, а отже, й у стовпці Е з'являється невпорядкована купа числового матеріалу, що потребує систематизації.

1. Насамперед виконаємо першу і обов'язкову процедуру статистичної обробки даних – їхнє *групування*, тобто розчленування на групи за певною ознакою. До першої групи включимо всі числа, менші за  $0,1$  (числа з інтервалу від  $0$  до  $0,1$ ); до другої – ті, значення яких знаходяться в інтервалі від  $0,1$  до  $0,2$ , до третьої – числа з інтервалу  $0,2 - 0,3$  і т.д. – усього 10 груп.

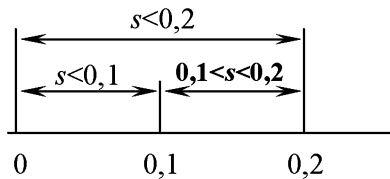
2. Далі підрахуємо кількість чисел (елементів) у кожній із цих десяти груп.

Для виконання такого завдання скористаємось функцією, яка в середовищі електронних таблиць у заданому діапазоні комірок підраховує кількість непустих комірок, вміст яких задовольняє заданій умові. Такою є функція СЧЕТЕСЛИ(*діапазон*; "*умова*"). Тут діапазоном є адреси комірок, у яких розташовані випадкові числа, що їх ми маємо розбити на групи. Умова може бути задана, зокрема, за допомогою відношень “дорівнює” (=), “більше” (>), “менше” (<), “не більше” (<=), “не менше” (>=). Слід, однак, мати на увазі, що умова не може бути складеною, наприклад, не може бути “>5 і <10”, вона має бути тільки простою.

Саме тому для підрахунку кількості елементів, які належать інтервалу від 0,1 до 0,2 виявляється неможливим створити, наприклад, конструкцію СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;">0,1;<0,2"), а проблему вирішує конструкція

СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;"<0,2") –  
– СЧЕТЕСЛИ(АДРЕСА1:АДРЕСА2;"<=0,1").

Останню формулу ілюструє рисунок



2.2. Створимо ще одну таблицю (рис. 11.3)

	I	J	K	L	M
1	Інтервали		Середина	Кількість в інтервалі	
2	від $s \geq$	до $s <$	інтервалу	абсолютна	Відносна
3	0,0	0,1	0,05	11	0,110
4	0,1	0,2	0,15	13	0,130
...	...	...	...	...	...

Рис. 11.3

У стовпцях I та J показані границі інтервалів для кожної з десяти груп (дані у цих стовпцях уведені з клавіатури), стовець K містять середини відповідних інтервалів, проте найбільш цікава й важлива інформація міститься у стовпцях L і M.

Вміст комірок у цих стовпцях наступний:

комірки	формули / числа	Примітки
K3	$= (I3 + J3) / 2$	
L3	$= \text{СЧЁТЕСЛИ}(E3:E102; "<=0,1")$	
L4	$= \text{СЧЁТЕСЛИ}(E3:E102; "<0,2") - \text{СЧЁТЕСЛИ}(E3:E102; "<=0,1")$	Копіювати в решту комірок стовпця L з наступним редагуванням
M3	$= 100 / C3$	Копіювати в решту комірок стовпця M з наступним редагуванням

Експериментування тут зводиться знов до натискання на клавішу F9, внаслідок чого змінюється вміст усіх комірок обох таблиць, зокрема, і комірок у стовпцях L і M останньої таблиці.

3. Уміст стовпця L, нажаль, не дозволяє зробити ніяких висновків про яку-небудь певну закономірність у розподілі випадкових

величин у групах. Той самий результат при бажанні можна побачити і на гістограмі, побудованій за даними стовпця L.

Тут зауважимо, що *математична статистика вивчає численні сукупності елементів, і чим більше елементів містить сукупність, тим більш надійними й адекватними виявляються результати статистичного дослідження*. Саме тому кількість рядків (елементів) у всіх стовпцях А – G попередньої таблиці 11.2 доцільно збільшити, як показують досліди, від 100 до хоч би 5000. Як завжди, здійснимо це копіюванням формул останнього рядка з номером 102 до рядка з номером 5002. Після кількох натискань на F9 спостерігаємо таке чи подібне:

	I	J	K	L	M
1	Інтервали		Середина	Кількість в інтервалі	
2	від $s \geq$	до $s <$	інтервалу	абсолютна	відносна
3	0,00	0,10	0,05	535	0,107
4	0,10	0,20	0,15	497	0,099
5	0,20	0,30	0,25	480	0,096
6	0,30	0,40	0,35	519	0,104
7	0,40	0,50	0,45	480	0,096
8	0,50	0,60	0,55	519	0,104
9	0,60	0,70	0,65	522	0,104
10	0,70	0,80	0,75	470	0,094
11	0,80	0,90	0,85	459	0,092
12	0,90	1,00	0,95	519	0,104

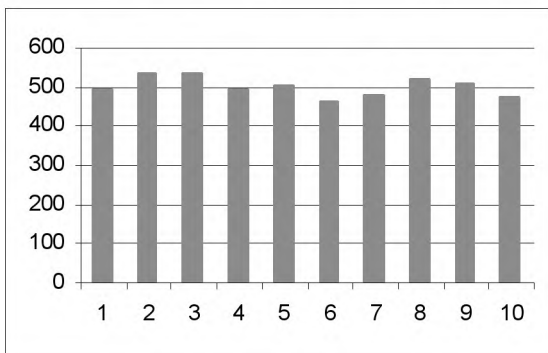


Рис. 11.4

Тепер остання таблиця має поновлений вигляд, і нарешті ця таблиця разом з відповідною гістограмою (рис. 11.4) дозволяють встановити, що розподіл випадкових чисел за визначеними десятима



групами є *рівномірним*. Таким самим рівномірним є розподіл випадкових чисел у всіх решта стовпцях попередньої таблиці (координат, проекцій переміщення, модулів цих проекцій тощо).

Отже, маємо зробити висновок, що *випадкові числа, які продукує комп'ютер, є рівномірно розподіленими, тобто будь-якому значенню випадкової величини відповідає одна й та сама ймовірність появи*.

У природі зазвичай усяка мінливість розподіляється нерівномірно, і, скоріш за все, не існує фізичних процесів, які б могли бути описані за допомогою рівномірного розподілу. На практиці такий розподіл використовують здебільшого при імітаційному моделюванні складних систем у якості первісної основи для отримання потрібних статистичних моделей.

### 11.3.5. Приклад природного розподілу

В кабінеті шкільного лікаря зберігаються медичні карти кожного школяра, де міститься чимало медичних і фізіологічних показників. Серед цих показників розглянемо один – зріст. Візьмемо навмання групу учнів деякого класу, і зріст (у сантиметрах) кожного з 30 школярів упишемо до таблиці, але не за абеткою, а задалегідь впорядкувавши.

143	150	155	158	163
144	151	155	160	164
146	152	156	161	166
147	153	156	161	168
148	153	156	161	169
150	155	157	162	171

Рис. 11.5

Виконаємо поділ отриманих даних на групи шириною 5 см: перша від 140 до 144 см, друга від 145 до 149 см і т.д.

*Примітка.* Задавати інтервали рекомендують так, щоб їхня кількість  $k$  була не меншою 6 і не більшою 20.

Тепер заповнимо наступну таблицю:

	A	B	C	D	E
1	Інтервали		Середина	Кількість в інтервалі	
2	від $s \geq$	до $s <$	інтервалу	абсолютна	відносна
3	140	144	142	2	0,067
4	145	149	147	3	0,100
5	150	154	152	6	0,200
6	155	159	157	8	0,267
7	160	164	162	7	0,233
8	165	169	167	3	0,100
9	170	174	172	1	0,033

Рис. 11.6.

Комірки у стовпцях А, В, С таблиці заповнюються з клавіатури згідно з даними таблиці за рис. 11.5. Стовпець D можна заповнювати або за формулами стовпця L таблиці з рис. 11.3, або простим підрахунком за таблицею на рис. 11.5 завдяки малій кількості елементів у ній. Формули у комірках стовпця Е не повинні викликати утруднень.

Будуючи гістограму за даними стовпця D таблиці 11.6, отримуємо наступний розподіл росту за сьома визначеними групами (рис.11.6 а). Цей природний розподіл докорінно відрізняється від рівномірного, він є ближчим до так званого *нормального* розподілу або розподілу Гауса. Такий розподіл є так само ідеалізованим як і розглянутий перед цим рівномірний, функція цього розподілу має вигляд симетричної дзвіноподібної кривої, що асимптотично наближається до вісі абсцис (рис. 11.6б).

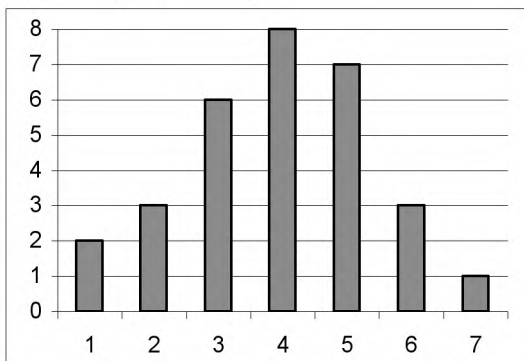


Рис. 11.6а

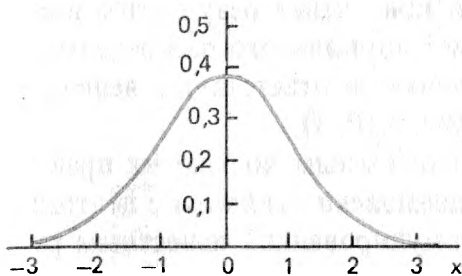


Рис. 11.6б

Зазначимо основні властивості такого розподілу:

- випадкові величини групуються навколо деякого числа і чим меншим за абсолютною величиною є відхилення від цього числа, тим частіше це число з'являється, тобто малі відхилення більш імовірно

вірні, аніж великі;

- однакові за величиною, але протилежні за знаком відхилення виникають однаково часто;

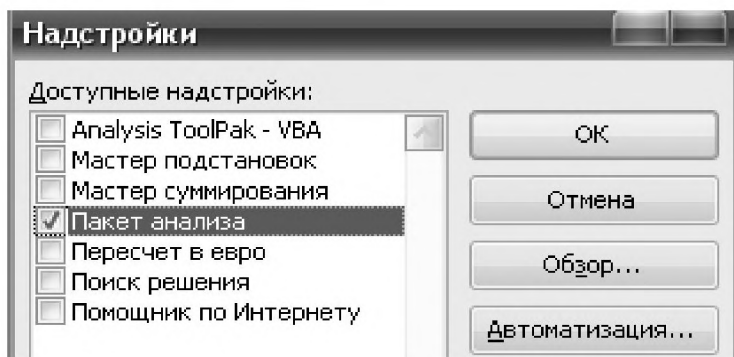
- максимальне значення випадкових відхилень не перебільшує деякої величини, яка зветься граничною похибкою.

#### **11.4. Моделювання за допомогою нормально розподілених випадкових чисел**

##### **11.4.1. Як отримати такий розподіл в середовищі електронних таблиць?**

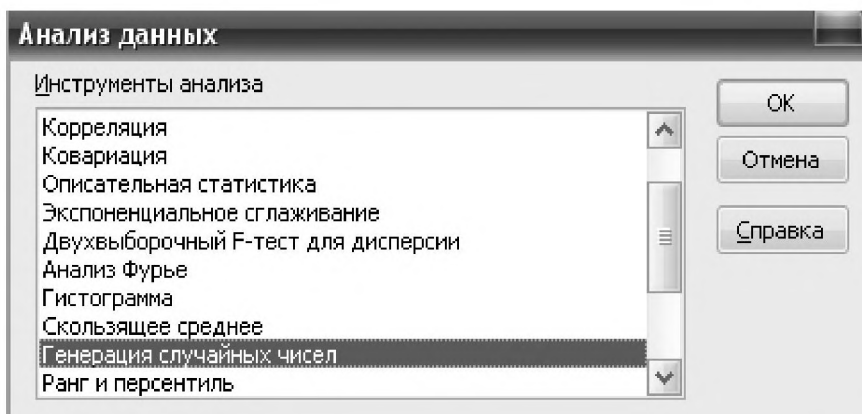
Електронні таблиці дозволяють генерувати не тільки рівномірно розподілені випадкові числа, але й випадкові числа за деякими іншими найчастіше вживаними розподілами. Зокрема, в Microsoft Excel це здійснюється у наступний спосіб.

1. Виконати команду *Сервис* → *Надстройки*.
2. Після появи діалогового вікна *Надстройки* встановити прапорець послуги *Пакет анализа*.

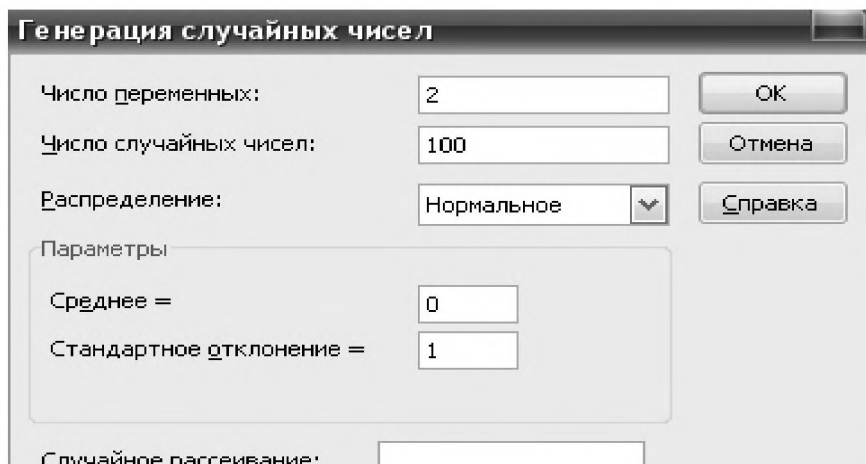


3. Якщо в діалоговому вікні *Настройки* така послуга відсутня, то це означає, що вона не була встановлена при інсталяції і її слід встановити. Після повернення до робочого аркушу на екрані не відбудеться ніяких змін, але в меню *Сервис* з'явиться нова команда *Анализ данных*.

Щоб встановити параметри випадкових величин, виконаємо команду *Сервис* → *Анализ данных*. З'явиться діалогове вікно *Анализ данных*. У списку *Инструменты анализа* виберіть послугу *Генерация случайных чисел*.



У текстовому полі *Число переменных* уведемо кількість стовпців, що їх ми хочемо заповнити, а в полі *Число случайных чисел* – кількість випадкових чисел, що мають розміститися в кожному стовпці. Уведемо відповідно числа 2 і 100 (два стовпця по 100 чисел в кожному). Далі слід розкрити список *Распределение* і вибрати потрібний розподіл (в нашому випадку розподіл має бути нормальним). Далі слід перейти до розділу *Параметры* і ввести значення в поля *Среднее* і *Стандартное отклонение*. За замовчанням там стоять відповідно 0 і 1, їх і залишимо.



Отримані у такий спосіб випадкові числа мають нормальний розподіл, але на відміну від чисел, що їх продукує функція СЛЧИС(), натискаючи на клавішу F9 не змінює поточний набір

випадкових чисел. Щоб отримати новий набір таких чисел, слід знов повторити команди *Сервис* → *Анализ данных* і всі наступні, а цей новий набір з'явиться на новому аркуші даної книги. Таким чином, якщо раніше для виконання, скажімо, п'яти варіантів обчислювального експерименту треба було п'ять разів натискати на F9, то тепер з цією метою необхідно п'ять разів повторити всю описану вище процедуру.

#### 11.4.2. Картини броунівського руху з нормальним розподілом окремих випадкових переміщень

Отже, створимо два стовпця нормально розподілених випадкових чисел по сто чисел у кожному. Ці числа моделюватимуть переміщення  $\Delta x$  і  $\Delta y$  броунівської частинки. Координати  $x_i$  та  $y_i$  частинки на будь-якому проміжку часу з номером  $i$ , як і раніше, знайдемо так:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x; \quad y_i = y_{i-1} + \Delta y.$$

Ці координати розташуємо у двох наступних стовпцях таблиці.

Наведемо можливий варіант заповнення такої таблиці і за даними стовпців  $x$  і  $y$  побудуємо траєкторію руху частинки, яка є графіком залежності  $y = y(x)$ .

	A	B	C	D
1	$\Delta x$	$\Delta y$	$x$	$y$
2	0	0	0	0
3	1,60072	-1,45557	1,60072	-1,45557
4	0,275593	-0,42472	1,876313	-1,88029
5	-0,29607	-0,36688	1,580239	-2,24717
6	-0,94592	0,70337	0,634317	-1,5438
...	...	...	...	...

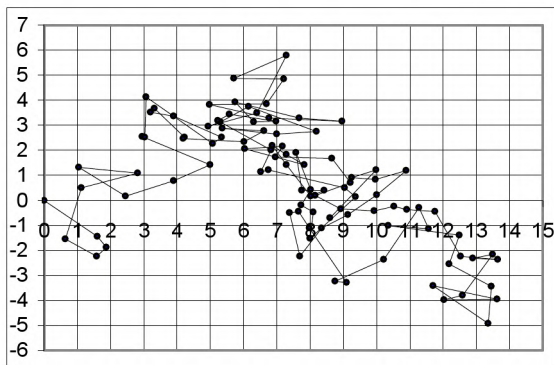


Рис. 11. 7а

Повторюючи процедуру отримання нормально розподілених випадкових чисел (переміщень  $\Delta x$  і  $\Delta y$ ), у нових таблицях можна так само добудувати стовпці C і D для поточних координат  $x$  та  $y$  і вивести на екран нові траєкторії.

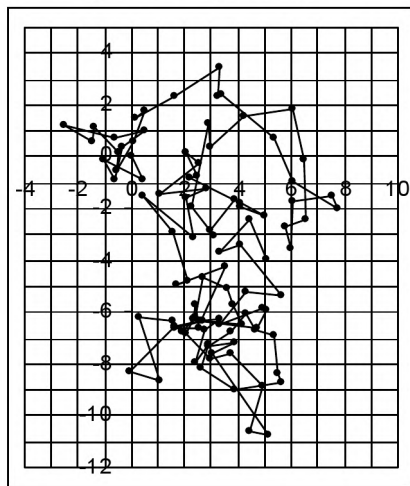


Рис. 11. 76

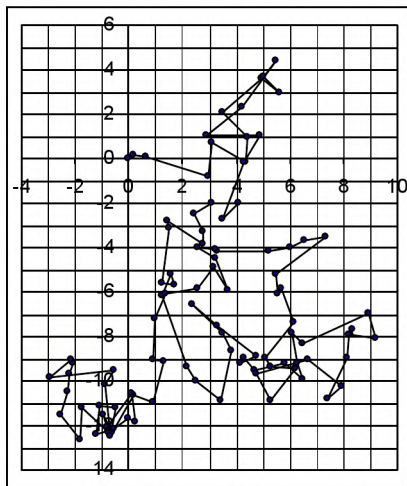


Рис. 11. 76

Картини на трьох останніх рисунках знов нагадують сюжети з рис. 11.1. Візуальне порівняння цих рисунків з рис. 11.2 не виявляє суттєвої різниці між ними. Тому можна констатувати, що для ілюстрування броунівського руху генерування випадкових чисел за рівномірним або нормальним розподілом не є вирішальним фактором. Але оскільки функція для рівномірного розподілу СЛЧИС( ) реалізується простіше і здатна до автоматичного перерахунку всього лише одним натисканням на клавішу F9, то їй при бажанні можна було б віддати перевагу.

*Зауваження.* Для того, щоб отримати картинки, подібні до тих, що наведені на рисунках 11.2 або 11.7, треба виконувати декілька експериментів і чекати, поки не з'явиться придатний (гарний) рисунок.

*Вправи.*

1. У чому полягає ідея методу Монте-Карло?
2. Чи повинні збігатися значення змінних у таблицях цієї глави посібника з відповідними даними у таблицях, створених вами?
3. З якою метою використовують рівномірно розподілені випадкові числа?

4. У яких випадках вдаються до використання нормально розподілених випадкових чисел?

5. Запропонуйте функцію для отримання в електронних таблицях однозначних цілих випадкових чисел в інтервалі  $[-9; 9]$  за допомогою функції СЛЧИС( ).

6. Побудуйте полігон частот і відносних частот для значень зі стовпців С і D таблиці 11.6.

Для побудови полігону в прямокутній системі координат на осі абсцис у довільно обраному масштабі відкладають значення аргументу, а на осі ординат також у довільно обраному масштабі – значення частот чи відносних частот. Масштаб обирають такий, щоб була забезпечена потрібна наочність, і щоб рисунок мав бажаний розмір. Далі в цій системі координат будують точки, координатами яких є пари відповідних чисел з варіаційного ряду. Отримані точки послідовно сполучають прямими відрізками.

7. Виконайте статистичне дослідження даних зі стовпця G таблиці 11.6.

## **Висновки**

1. Випадкові числа, які продукує комп'ютер, зокрема в середовищі електронних таблиць за допомогою функції СЛЧИС( ), є рівномірно розподіленими, тобто будь-якому значенню випадкової величини відповідає одна й та сама ймовірність. На практиці такий розподіл використовують при комп'ютерному моделюванні складних систем у якості основи при побудові стохастичних моделей.

2. Побудована нами модель броунівського руху із застосуванням рівномірно розподілених випадкових чисел виявилася вдалою тільки на перший погляд, тільки на якісному рівні. Адже з опрацювання результатів фізичних спостережень та з дослідів добре відомо, що особливості такого руху характеризуються не рівномірним, а *нормальним* законом розподілу. В електронних таблицях також є засоби генерування нормально розподілених випадкових чисел. До речі, в обчислювальній математиці відомі формули перетворення рівномірно розподілених випадкових чисел на нормально розподілені.

3. В математичній статистиці, окрім розглянутих тут рівномірного і нормального розподілів, відомі й інші не менш важливі.

## Глава 12. Задача дослідження операцій

### 12.1. Вступ

У найрізноманітніших галузях людської діяльності – організації промислового чи сільськогосподарського виробництва, на транспорті, в освіті, охороні здоров'я, телефонному й поштовому зв'язку, торгівлі й громадському харчуванні – виникають задачі, схожі за постановкою. Вони мають ряд спільних ознак і розв'язуються схожими методами. Специфіка цих задач полягає в такому: якщо деякий захід (найчастіше організаційний) можна здійснити різними способами, то при цьому виникає необхідність у прийнятті рішення, який із цих способів слід обрати. Кожний варіант має певні переваги й недоліки, а внаслідок складних обставин не зовсім ясно, який з усіх можливих (і чому саме він) кращий за інші. Сьогодні з цією метою застосовуються математичні підходи, результати яких мають допомогти відповідальним особам зробити *науково обгрунтований вибір*.

Уперше наукові методи обгрунтування рішень були застосовані під час другої світової війни. Вони засновувалися на математичних розрахунках і показували можливі результати різних варіантів військових операцій. Тому всі ці методи отримали назву *дослідження операцій*. Їх вивчає спеціальний розділ математики.

Згодом стало зрозуміло, що *операції як послідовність цілеспрямованих дій, об'єднаних спільним задумом і спрямованих на досягнення певної цілі*, мають місце не лише у військовій справі, а й у багатьох інших галузях людської діяльності.

Прийняття рішення безпосередньо не входить у дослідження операцій, його здійснює особа, котрій офіційно надається це право.

Застосування швидкодійних ЕОМ привело до стрімкого росту ефективності досліджень і значного розширення кола таких задач.

### 12.2. Постановка задачі

Проілюструємо застосування методу Монте-Карло на прикладі розв'язання задачі пошуку оптимальної стратегії обслуговування виробничого устаткування на основі дослідження операцій.

На виробничій дільниці було помічено, що відмови устаткування найчастіше відбувається внаслідок виходу з ладу одного з чотирьох потужних транзисторів, які входять до електронного пристрою управління. При відмові обладнання одразу вживаються ремонтні заходи. На виклик механіка, виявлення зippedованого транзистора та його заміну йде 1 година, і протягом цього часу дільниця продукцію не випускає. Будемо вважати, що за кожну годину простою підпри-



ємство терпить збиток 100 у.о., вартість одного транзистора приймемо рівною 5 у.о.

*Необхідно оцінити збитки, що їх несе підприємство протягом року внаслідок відмов обладнання, та відшукати шляхи зменшення економічних втрат, пов'язаних з такими відмовами.*

Якщо устаткування експлуатується у дві зміни (16 годин на добу), а в одному році 52 тижні по 5 робочих днів, то на 1 рік час, що його треба буде моделювати, становитиме  $16 \cdot 5 \cdot 52 \approx 4200$  годин.

Строки безвідмовної роботи кожного з транзисторів є випадковими величинами, тому використання будь-яких точних формул тут втрачає сенс. Для аналізу проблеми доцільно скористатися імітаційним моделюванням і для розігрування означених вище випадкових величин застосувати метод Монте-Карло. При моделюванні випадкових величин – строків безвідмовної роботи кожного з транзисторів необхідно знати їх *реальний розподіл*, який визначають на основі дослідних даних, одержуваних шляхом проведення спеціально спланованих натурних експериментів.

### 12.3. Обговорення алгоритму розв'язування задачі

Розглянемо основні етапи розв'язання поставленої задачі.

У лабораторії підприємства було здійснене випробування великої партії (500 шт.) транзисторів необхідного типу. Результати цього випробування подані в таблиці на рис. 12.1, де наводяться розподіл строків безвідмовної роботи транзисторів.

№	Години роботи		Відмов	Разом	Відносна частота відмов
	від	до			
0	0	200	0	0	0,000
1	201	400	4	4	0,008
2	401	600	41	45	0,090
3	601	800	92	137	0,274
4	801	1000	173	310	0,620
5	1001	1200	151	461	0,922
6	1201	1400	35	496	0,992
7	1401	1600	4	500	1,000

Рис. 12.1

1. З таблиці видно, що реальні строки безвідмовної роботи транзисторів можуть набувати значень від 201 до 1600 годин.

2. За даними цієї таблиці побудуємо криву розподілу відносних частот (ймовірностей) відмов транзисторів (рис. 12.2).

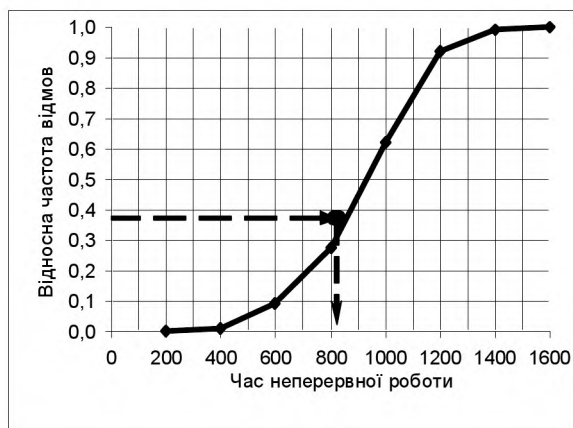


Рис. 12.2

На вісі абсцис відкладені значення моментів виходу транзисторів із ладу, а на вісі ординат – відносні частоти відмов.

Засобами електронних таблиць ламану лінію графіка можна було б згладити, проте для спрощення подальшої роботи ми залишимо саме ламану. До того ж, від даного методу не вимагається високої точності.

3. Будемо моделювати час, через який відбуватимуться відмови обладнання протягом року (4200 годин).

*Можливий строк роботи кожного окремого транзистора визначатимемо за допомогою генератора випадкових чисел та кривої розподілу.*

За відсутності комп'ютера звичайно роблять так:

3.1. Криву розподілу креслять на аркуші міліметрового паперу достатньо великого розміру, а випадкові числа беруть із таблиць.

3.2. На вісі ординат обирають точку, що відповідає випадковому числу, і з неї проводять горизонтальну лінію до перетину з кривою розподілу.

3.3. З цієї точки опускають перпендикуляр на вісь абсцис і одержане там число приймають за розігрувану випадкову величину із законом розподілу, що відповідає експериментальним даним.

3.4. Кроки 3.2 і 3.3 повторюють для всіх випадкових чисел у порядку їх отримання до тих пір, поки сумарна тривалість роботи кожного транзистора з урахуванням всіх замін не стане більшою за 4200 годин.

## 12.4. Побудова математичної моделі

З метою автоматизувати цю нецікаву й стомлюючу роботу, доручивши її комп'ютеру, проведемо деякі міркування з використанням рис. 2.

1. Одержана крива розподілу складається з  $i = 7$  прямих відрізків з різними кутовими коефіцієнтами. Нам потрібно, щоб за випадковим числом  $y_i$  (відносна частота відмов) автоматично обчислювалося відповідне значення  $x$  – момент відмови. Це значення може знаходитись у будь-якому із семи *однакових* інтервалів на вісі абсцис. Проте випадкові числа  $y_i$ , які будуть генеруватися комп'ютером, потраплятимуть в один із семи *неоднакових* відповідних інтервалів на вісі ординат, оскільки вся крива розподілу *в цілому* не є лінійною функцією. Тому й розміри інтервалів на вісі ординат будуть різними. Отже, обчислення  $x$  мають виконуватися за різними даними в залежності від номера інтервалу. Ось чому кожного разу, одержуючи випадкове число  $y$ , необхідно буде виявляти, якому інтервалу з рис. 2 воно належить.

2. Кожен із семи елементів ламаної є відрізком прямої, що проходить через три точки згідно рівняння

$$\frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 7) \quad (1)$$

де  $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$  – координати початку та кінця  $i$ -го відрізка;

$x, y$  – поточні координати,  $x \in [x_i, x_{i+1}[$ ;  $y \in [y_i, y_{i+1}[$ .

Розв'язуючи рівняння (1) відносно  $x$ , одержимо:

$$x = \frac{y - y_i}{k_i} + x_i, \quad (2)$$

де  $k_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$  – кутовий коефіцієнт відрізка з номером  $i$ . (3)

3. Маючи кутові коефіцієнти  $k_i$  та обираючи в якості змінної  $y_i$  випадкові числа з проміжку  $[0; 1]$ , можна за допомогою рівняння (2) знайти відповідні значення змінної  $x$  – часів безвідмовної роботи обладнання.

## 12.5. Обчислювальний експеримент

Зважаючи на специфіку цієї задачі, вхідні дані, таблиці й діаграми пропонуємо розташувати дещо інакше, ніж при роботі з попередніми моделями. Зокрема, вигляд перших шести рядків буде таким:

	A	B	C	D	E	F
1	<b>ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ</b>					
2	Втрати від 1 год. простою обладнання -					100
3	Вартість 1 транзистора -					5
4	Кількість випробуваних транзисторів, $N$ -					500
5	Крок нарощування часу, год., $h$ -					200
6						

1. На початку роботи перейдіть в режим ручного управління обрахунками. Зокрема, в MS Excel це робиться так: *Сервіс* → *Параметри* → *Вычисления*. Далі користуйтеся клавішею F9.

У перших п'яти рядках помістимо заголовок та вхідні дані.

Шостий рядок залишимо порожнім, він буде відокремлювати умову від наступних робочих таблиць.

Наступні рядки 7–19 містять Таблицю 1.

	A	B	C	D	E	F
7	<b>Таблиця 1. Розподіл строків роботи транзисторів</b>					
8		Години роботи		Відмов	Разом	Відносна
9		від	до			частота відмов
10	0	0	200	0	0	0,000
11	1	201	400	4	4	0,008
12	2	401	600	41	45	0,090
13	3	601	800	92	137	0,274
14	4	801	1000	173	310	0,620
15	5	1001	1200	151	461	0,922
16	6	1201	1400	35	496	0,992
17	7	1401	1600	4	500	1,000
18	$i$		$x_i$		$n_i$	$y_i$

Внесемо уточнення.

1.1. Комірки 11-го рядка разом з групою D11–D18 заповнюються з клавіатури згідно Таблиці 1. Винятком є C11 і F11:

комірки	формули
C11	=\$F\$5
F11	=E11/\$F\$4

1.2. Вміст комірок 12-го рядка має бути таким:

комірки	формули	примітки
A12	=A11+1	копіювати в A13–A18
B12	=C11+1	копіювати в B13–B18
C12	=C11+\$F\$5	копіювати в C13–C18
E12	=D12+E11	копіювати в E13–E18
F12	=E12/\$F\$4	копіювати в F13–F18

2. За даними комірок C11–C18 (аргументи або в термінології таблиць – категорії) і F11–F18 (значення) побудуємо криву розподілу

відносних частот (ймовірностей) виходу з ладу транзисторів у відповідності з рис. 2. Розташуємо цю діаграму праворуч від умови і таблиці 1 орієнтовно в області комірок Н2–М20.

3. Нижче, у рядках 21–32 створимо дві допоміжні таблиці (Таблицю 2 і Таблицю 3). В Таблиці 2 помістимо значення кутових коефіцієнтів  $k_i$ , що будуть обчислюватись згідно виразу

$$k_i = (y_{i+1} - y_i) / h = n_i / (h \cdot N),$$

а в Таблиці 3 розташуємо рівномірно розподілені псевдовипадкові числа  $y_i$  з інтервалу  $[0, 1]$ , генеровані спеціальною функцією, вбудованою в будь-які електронні таблиці.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
21	Таблиця 2. Визначення								
22	кутових коефіцієнтів $k_i$								
23	$k_i = (y_{i+1} - y_i) / h = n_i / (h \cdot N)$				Таблиця 3. Випадкові числа $y_i$				
24		$i$	$k_i$			1-й	2-й	3-й	4-й
25		0	0,00000			0,530	0,603	0,038	0,407
26		1	0,00004			0,260	0,937	0,310	0,911
27		2	0,00041			0,195	0,810	0,140	0,807
28		3	0,00092			0,312	0,891	0,704	0,140
29		4	0,00173			0,564	0,395	0,049	0,177
30		5	0,00151			0,294	0,823	0,598	0,849
31		6	0,00035			0,779	0,378	0,994	0,034
32		7	0,00004			0,139	0,907	0,302	0,972

Всі комірки Таблиці 3 заповнюються однаково:

комірка	формула	примітки
F25	=СЛЧИС()	копіювати в F25–I32

4. Будемо моделювати час, через який відбуватимуться відмови обладнання протягом року. Відповідну до цього Таблицю 4 помістимо в рядки 34–45 (комірки з області А34–І45):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
34	Таблиця 4. Моделювання тривалості роботи обладнання								
35	№	1-й транзист.	2-й транзист.	3-й транзист.	4-й транзит.				
36	заміни	Години	Всього	Години	Всього	Години	Всього	Години	Всього
37		роботи	годин	роботи	годин	роботи	годин	роботи	годин
38	0	948	948	990	990	474	474	877	877
39	1	785	1733	1242	2232	821	1295	1193	2070
40	2	714	2447	1126	3357	655	1950	1124	3194
41	3	822	3269	1180	4537	1056	3006	655	3849
42	4	968	4236	870	0	501	3506	695	4543
43	5	812	0	1135	0	987	4494	1152	0
44	6	1105	0	860	0	1448	0	464	0
45	7	653	0	1190	0	816	0	1342	0

4.1. Стовпець А заповнюється зовсім просто:

комірки	формули / числа
A38	0
A39	=A38+1 (копіювати у комірки A40-A45)

4.2. Складніше зі стовпцем В (D, F, H). Саме в його комітках реалізується автоматичне обчислення строків безперервної роботи першого (другого, третього, четвертого) транзистора, тобто інтервалів часу між його послідовними замінами. Тут перевіряється, якому із семи інтервалів належить випадкове число  $y_1$  (комірка F25), і у відповідності до цього обчислюється час безперервної роботи транзистора за формулою (2):

комірка	формула
B38	$= \$F\$5 +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$11; \text{F25} < \$F\$12); (\text{F25} - \$F\$12) / \$C\$26 + \$C\$11) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$12; \text{F25} < \$F\$13); (\text{F25} - \$F\$13) / \$C\$27 + \$C\$12) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$13; \text{F25} < \$F\$14); (\text{F25} - \$F\$14) / \$C\$28 + \$C\$13) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$14; \text{F25} < \$F\$15); (\text{F25} - \$F\$15) / \$C\$29 + \$C\$14) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$15; \text{F25} < \$F\$16); (\text{F25} - \$F\$16) / \$C\$30 + \$C\$15) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$16; \text{F25} < \$F\$17); (\text{F25} - \$F\$17) / \$C\$31 + \$C\$16) +$ $\text{ЕСЛИ}(\text{И}(\text{F25} \geq \$F\$17; \text{F25} < \$F\$18); (\text{F25} - \$F\$18) / \$C\$32 + \$C\$17)$

*Примітка.* Для прискорення набору цієї формули можна, набравши вираз першої функції ЯКЩО (“ЕСЛИ”) і знак додавання, скопіювати їх шість разів і виконати необхідне редагування всього виразу. Аналогічно можна діяти при заповненні решти комірок цього стовпця. Після заповнення стовпця В всі його формули (комірки) слід помітнити і одночасно скопіювати у стовпці D, F і H. Далі слід виконати необхідне редагування.

4.3. У стовпцях С, Е, G, I для кожного з чотирьох транзисторів, по-перше, здійснюється нагромадження загального часу роботи з урахуванням усіх виконаних замін і, по-друге, при переході цього часу через 4200 год. значення його обнуляється. Комірки C38, E38, G38, I38 містять посилання на своїх сусідок зліва (замін іще не було):

комірки	формули
C38	=B38
E38	=D38
G38	=F38
I38	=H38

Формули в C39, E39, G39, I39 мають вигляд:

комірки	формули
C39	=ЕСЛИ(ИЛИ(И(C38<5800;C38>4200);C38=0);0;C38+B39)
E39	=ЕСЛИ(ИЛИ(И(E38<5800;E38>4200);E38=0);0;E38+D39)
G39	=ЕСЛИ(ИЛИ(И(G38<5800;G38>4200);G38=0);0;G38+F39)
I39	=ЕСЛИ(ИЛИ(И(I38<5800;I38>4200);I38=0);0;I38+H39)

Кожна з цих формул має копіюватись у решту комірок свого стовпця.

*Примітка.* При аналізі вмісту комірки C39 може скластися думка, що логічна операція АБО, до складу якої входить перевірка умови  $C38 = 0$ , зайва (в C38 завжди буде число, більше за 200). Це ж саме стосується і комірок E39, G39 та I39. Але як же тоді в декількох останніх комірках згаданих стовпців могли б з'явитись нулі? Тим більше, що кількість нульових комірок заздалегідь невідома.

#### Вправа

1. Прокоментуйте рядок:

=ЕСЛИ(ИЛИ(И(C38<5800;C38>4200);C38=0);0;C38+B39)

2. З яких міркувань, на вашу думку, з'явилося верхнє обмеження 5800 (4200 + 1600)?

4.4. З Таблиці 4 видно, що 2-й транзистор набере більше, ніж 4200 годин роботи після третьої заміни, 1-й і 4-й транзистори – після четвертої заміни, а 3-й прийдеться міняти п'ять разів. Тільки після всіх цих замін загальний час роботи кожного транзистора перебільшить 4200 годин, тобто чергові відмови обладнання відбудуться вже у наступному році.

5. Для більшої наочності дані про кількість замін кожного транзистора подамо у підсумковій Таблиці 5.

	A	B	C	D	E	F
47	<b>Таблиця 5. Кількість замін кожного транзистора</b>					
48		№	Кількість			
49		транзист.	замін			
50		1	<b>4</b>			
51		2	<b>3</b>			
52		3	<b>5</b>			
53		4	<b>4</b>			
54		<i>разом:</i>	<b>16</b>			
55						
56						
57						
58						
59		<i>Втрати від простоїв -</i>			<b>1600</b>	
60		<i>Вартість транзисторів -</i>			<b>80</b>	
61				<i>разом:</i>	<b>1680</b>	

Розглянемо вміст комірок цієї таблиці.

### 5.1. Комірки C50–C53 та C54:

Комірки	формули
C50	=СЧЁТЕСЛИ(C38:C45;">0")-1
C51	=СЧЁТЕСЛИ(E38:E45;">0")-1
C52	=СЧЁТЕСЛИ(G38:G45;">0")-1
C53	=СЧЁТЕСЛИ(I38:I45;">0")-1
C54	=СУММ(C50:C53)

Після копіювання слід відредагувати формули в C51, C52, C53.

Таким чином, протягом року може відбутися 16 відмов, і стільки ж транзисторів доведеться замінити. То ж підрахуємо втрати:

### 5.2. Комірки E59–E61:

комірки	формули
E59	=C54*F2
E60	=C54*F3
E61	=СУММ(E59:E60)

*від простоїв*  $100 \cdot 16 = 1600$  у.о.;

*вартість транзисторів*  $5 \cdot 16 = 80$  у.о.;

*разом* – 1680 у.о.

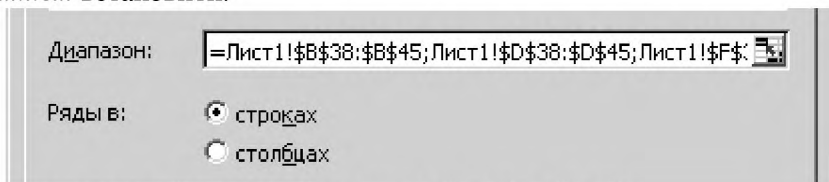
5.3. Дані про моменти відмов кожного транзистора зобразимо на діаграмі “Календарний графік ремонтів”.

*Примітка.* Для успішної побудови цієї діаграми слід виконати наступні дії:

а) виділити комірки B38:B45, D38:D45, F38:F45, H38:H45;

б) вибрати тип діаграми *Линейчатая*;

в) обравши опцію *Исходные данные*, на вкладці *Диапазон данных* встановити:



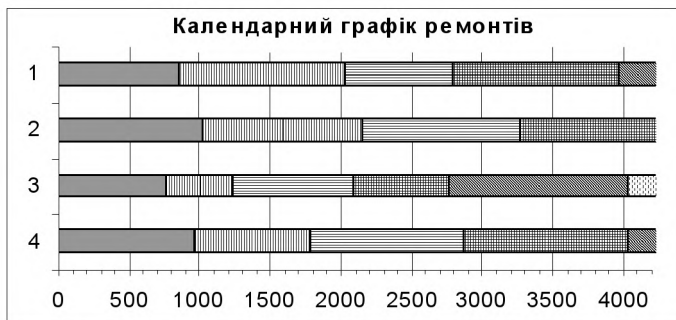
а на вкладці *Ряд* взяти 8 рядів: від Ряд 1 по Ряд 8;

г) на отриманій діаграмі обрати опцію *Формат оси* і у відповідному вікні на вкладці *Шкала* встановити

мінімальне значення	0
максимальне значення	4200
ціна основних поділок	500
ціна проміжних поділок	100



Нижче подано результат:



6. Тепер з'ясуємо, чи можна так організувати обслуговування, аби зменшити час простою обладнання, тобто кількість ремонтів. Пропозиція про підвищення надійності транзисторів виключається відразу, оскільки підприємство одержує їх готовими.

6.1. Проаналізуємо, що буде, коли за кожної відмови деякого одного транзистора, механік буде міняти не лише дефектний, а одразу всі чотири, тобто весь блок. Результат такої операції заздалегідь передбачити складно, оскільки *тепер заміна відбуватиметься після відмови транзистора із самим коротким строком служби*.

Якщо вважати, що за нової системи обслуговування будуть використовуватися ті самі транзистори, або точніше, з тими самими строками служби, то з метою одержання необхідної інформації можна скористатися даними з таблиці 4. Однак тепер з неї треба брати дані про строк безвідмовної роботи після 1-го, 2-го і т.д. ремонтів. Той транзистор, у якого цей строк після чергового ремонту буде найменшим, і визначатиме момент наступної відмови (заміни) і, отже, наступного ремонту. Одержані результати зведені до Таблиці 6:

	A	B	C	D	E	F
63		<i>Таблиця 6. Кількість ремонтів за новою</i>				
64		<b>організацією обслуговування – 5</b>				
65		№	№	Строк	Всього	
66		ремонту	транзистора	роботи	годин	
67		0	3	758	758	
68		1	3	487	1244	
69		2	1	759	2003	
70		3	3	670	2673	
71		4	4	782	3455	
72		5	1	843	4298	
73		6	3	460	0	
74		7	4	407	0	

6.2. Комірки Таблиці 6 мають такий уміст:

комірка	формула
C67	=ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=В38;1; ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=D38;2; ЕСЛИ(МИН(В38;D38;F38;H38)=F38;3;4)))

*Примітка.* Вміст С67 копіювати в решту комірок стовпця.

комірки	формули	примітки
D67	=МИН(В38;D38;F38;H38)	копіювати в С68–С74
E67	=МИН(С38;Е38;G38;I38)	
E68	=ЕСЛИ(ИЛИ(И(Е67<5800;Е67>4200); Е67=0);0;Е67+D68)	копіювати в Е69–Е74
F64	=7-(ЕСЛИ(Е74=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е73=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е72=0;1;0)+ ЕСЛИ(Е71=0;1;0))	

6.2. Підсумкові результати формуємо у такий спосіб:

	Г	Н	І	J	К
66	<i>Втрати від простоїв -</i>				500
67	<i>Вартість транзисторів -</i>				100
68	<i>разом:</i>				600
69					
70	<i>Ефективність нової організації</i>				
71	<i>обслуговування -</i>				2,80

Уміст комірок такий:

комірка	формула
K66	=F64*F2
K67	=4*F64*F3
K68	=СУММ(K66;K67)
K71	=E61/K68

7.2. З Таблиці 6 видно, що за рік тепер відбудеться п'ять ремонтів. За тих самих умов обчислення втрат це складе:

*внаслідок простоїв:*  $100 \cdot 5 = 500$  у.о.;

*вартість транзисторів:*  $5 \cdot (4 \cdot 5) = 100$  у.о.;

*разом – 600 у.о.*

Отже, за нової системи обслуговування загальні втрати складатимуть 600 у.о. проти 1680 у.о., тобто *без будь-яких додаткових коштів, а виключно завдяки іншій організації обслуговування втрати можна зменшити більше, ніж у 2 рази.*

### **Вправа**

1. Прокоментуйте формули в комірках C50–C53, C67, D67, E67, E68, F64

2. . Переведіть електронну таблицю з автоматичного на ручний режим перерахунків.

3. Повторюючи багаторазово пп. 4–7 перерахуванням таблиць 2–6 (з новими значеннями випадкових чисел – F9), отримуємо *середнє значення показника ефективності* обслуговування, яке має підтвердити отриманий вище результат.

4. За якої умови ефективність нової організації обслуговування залишиться попередньою, тобто не зміниться?

5. Виконайте від самого початку дослідження за умови, що час моделювання, який становив 4200 годин протягом року, стане величиною змінною. Це дозволить міняти графік роботи підприємства (кількість змін, кількість робочих годин протягом зміни тощо).

### **Висновки**

1. В ході розв'язування задачі було проведено дослідження двох операцій, пов'язаних з організацією технічного обслуговування виробничого обладнання. У першій операції була реалізована схема: “відмова одного елемента → його заміна”, у другій операції схема була змінена: “відмова елемента → заміна всього блоку”. Якщо в якості критерію ефективності технічного обслуговування прийняти відношення виробничих втрат внаслідок відмов за попередньою і новою схемами, то, зрозуміло, особа, котра приймає рішення, надасть перевагу організації ремонтів за другою схемою. Якби критерій ефективності був інший, наприклад, вартість транзисторів, то перевага була б віддана першій схемі.

2. Таким чином, *імітаційне моделювання в управлінській діяльності часто дозволяє відрізнити потенційно продуктивні рішення, що ведуть до успіху, від помилкових.*

Слід, однак, пам'ятати, що будь-яка модель завжди є спрощеним образом об'єкту, і результатам моделювання можна довіряти лише після того, як вони будуть підтверджені хоча б одним із доступних способів: натурними спостереженнями (або ще краще – натурним експериментом), іншими моделями того самого об'єкту, висновками відповідної теорії, бажано перевіреної попередньою практикою і т.п.

3. Привабливість та ефективність методу Монте-Карло полягає в тому, що з допомогою рівномірно розподілених випадкових (псевдо-випадкових) чисел і за відомим законом розподілу можна моделюва-

ти реальні випадкові події. Вся історія цього методу, численні приклади його ефективного застосування на практиці показують, що цей порівняно простий метод є дуже популярним в практиці імітаційного комп'ютерного моделювання.

Цікаво відмітити, що випадкові числа, які з філософської точки зору часто являють собою відображення нашого незнання, кладуться в основу методів, за допомогою яких дослідники пізнають поведінку складних систем.

4. При моделюванні випадкових величин їх реальний розподіл визначають або за певним теоретичним законом методами математичної статистики, або на основі дослідних даних, які одержують шляхом здійснення спеціального натурального експерименту.

5. Основу управління і взагалі всіх “розумних” дій комп'ютера становлять логічні операції. Як ми переконалися, створення таких команд потребує уваги і досвіду.

## Післямова

При задовільній простоті та наочності електронних таблиць слід розуміти, що вони є придатним середовищем для моделювання тільки на початковому етапі. Так, вже при спробах розв'язання задач, що передбачають організацію циклів з великою кількістю повторень, звичайне копіювання формул у все нові рядки з метою здійснення нових розрахунків та утримання даних для подальшої побудови графіків (тобто організація великих масивів даних) викликає значні утруднення, позбавляючи користувача змоги простежити динаміку зміни значень будь-якої величини переглядом відповідного стовпця таблиці. Нарешті, електронні таблиці стають зовсім непридатними для задач, що вимагають засобів візуального спостереження динаміки процесу, тобто візуалізації поточних станів об'єкту. Такі задачі традиційно розв'язують з використанням середовищ, створених на основі мов програмування високого рівня. Отже одним із критеріїв необхідності відмови від електронних таблиць як середовища моделювання є ситуація, коли сама таблиця перестає використовуватись для аналізу даних, залишаючи користувачеві можливість лише графічного подання залежностей між даними.

Наприклад, у задачі на побудову траєкторії руху планети навколо Сонця повна таблиця містить близько 400 рядків, і це дійсно утруднює аналіз даних. Розгляд усіх дев'яти планет разом із Сонцем вимагатиме вже близько 90500 рядків, що об'єктивно зумовлює потребу в іншому середовищі.

Ось чому повний курс основ комп'ютерного моделювання після початкового етапу включає ще дві важливі частини: вивчення методів ефективного використання ресурсів комп'ютера для розв'язання задач моделювання та вивчення об'єктно-орієнтованого підходу до моделювання динамічних систем, де засоби і методи спрямовуються на опанування все більш досконаліх прийомів роботи, які можна здійснити в середовищі мови програмування. І хоч перехід від електронних таблиць до мови програмування позбавляє зручності миттєвої зміни параметрів моделі та наочності процесу розрахунків, проте надає ряд нових можливостей: 1) групування подібних між собою змінних у масиви; 2) зняття обмежень на кількість ітерацій та послаблення обмежень на кількість змінних; 3) графічна інтерпретація динаміки моделі в процесі розрахунків (а не після їх закінчення, як в електронних таблицях).

Насправді існує можливість, залишаючись у середовищі електронних таблиць, використати вбудовану мову програмування, наприклад, Visual Basic – внутрішню мову електронних таблиць Excel. Такий крок дозволяє об'єднати переваги електронних таблиць та мов програмування високого рівня, проте орієнтація на мову програмування лише однієї фірми неминуче ставить користувача у залежність від стратегії розвитку мови, а ця стратегія обирається фірмами переважно з комерційних міркувань. До того ж значна швидкість еволюції такої мови, відсутність інваріантного (незмінного) ядра та переобтяженість додатковими можливостями підвищують вимоги до техніки і утруднюють вивчення такої мови в школі.

Тому в якості наступного середовища для моделювання ми використовуємо процедурну мову високого рівня. Однією з найпоширеніших мов високого рівня, що користується великою популярністю у системі освіти США, Франції, Німеччини та інших країн, є мова С. Доступність некомерційних та ліцензованих для закладів освіти операційних систем і компіляторів цієї мови дозволяє використовувати їх майже на всіх типах техніки, встановлених у наших школах.

Перехід до моделювання у середовищі мови програмування так само, як і перехід від паперових розрахунків до електронних таблиць, є еволюційним кроком, спрямованим на підвищення ефективності процесу розв'язання задач моделювання.

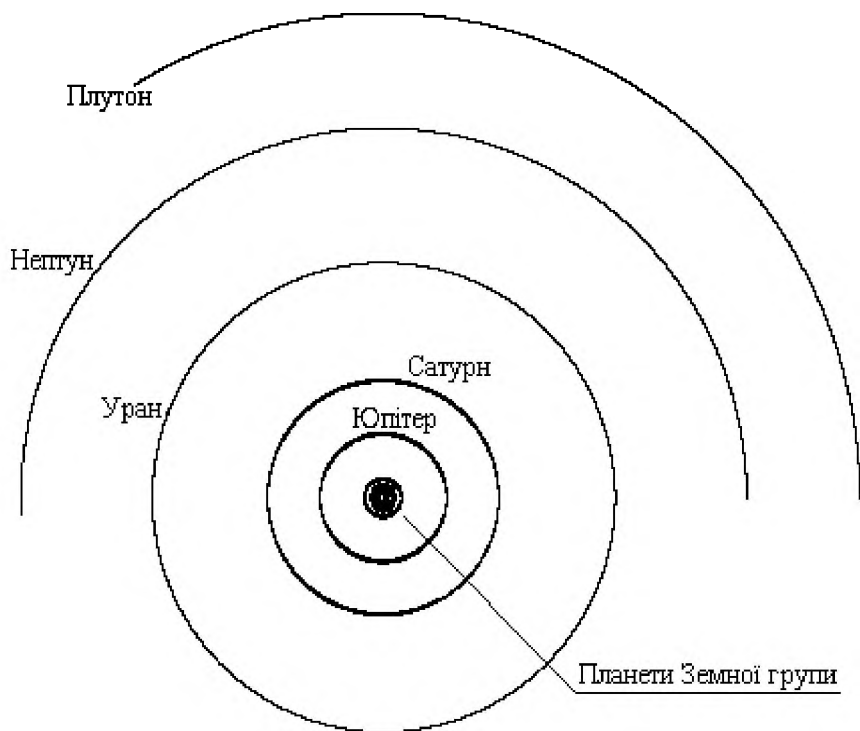
Усі згадані середовища відображають не стільки саму модель, скільки формалізований засобами процедурної методології алгоритм роботи з нею.

Свого часу автори першої об'єктно-орієнтованої мови програмування Simula-67 наголошували на тому, що об'єктно-орієнтоване середовище є природним середовищем для розв'язання задач моделювання (*simulation*). Об'єктно-орієнтований підхід (ООП) вносить якісні зміни у самий процес моделювання, надаючи потужні можливості щодо підвищення рівня абстракції даних. Сьогодні такі можливості серед інших мов має мова C++, яка легко пристосовується для використання у спеціальних областях шляхом створення на її базі складених понять та конструкцій, що слугують будівельними блоками при програмуванні. Так наявність у ній типу "арифметичний вектор" та визначених операцій над ним спрощує запис програми, наближуючи його до алгоритмічного. До того ж об'єктно-орієнтоване середовище дозволяє від групування зазначених вище

параметрів за ознакою спільності фізичного змісту перейти до групування за ознакою “бути планетою”. В такому разі ми розглядатимемо Сонячну систему як набір планет (вважаючи Сонце однією з них), а не як сукупність прискорень, швидкостей, координат тощо.

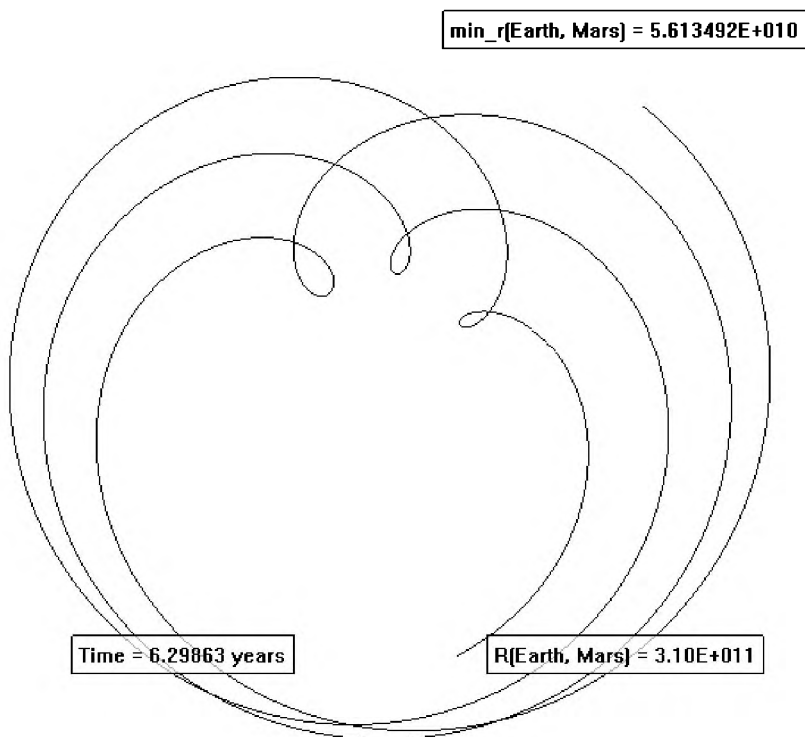
Групування даних за ознакою “бути планетою” не є прерогативою ООП, воно можливе і в процедурній методології. Але принциповою перевагою ООП є те, що об’єкти не лише зберігають свої дані, а й змінюють їх, обмінюються інформацією, взаємодіють тощо. В даному випадку взаємодія об’єктів типу “планета” є інформаційною моделлю фізичної взаємодії. Об’єктно-орієнтоване середовище моделювання у найбільшій мірі відображує підходи сучасного комп’ютерного моделювання та є ефективним інструментом не лише при навчанні, а й у професійній діяльності.

Нижче на рисунку зображено модель Сонячної системи, створену засобами мови C++ за технологією ООП.



Стан Сонячної системи на момент  
завершення Ураном повного оберту

На наступному рисунку подані результати моделювання руху Марсу з точки зору земного спостерігача (в системі відліку, пов'язаній із Землею). Розрахунок показує, що за 6 років відбулося три протистояння, і останнє з них виявилось великим – обчислена мінімальна відстань склала 56 млн. 135 тис. км.





## Термінологічний словник

**Абстракція** – одна з форм пізнання, що полягає в мисленому відволіканні від ряду властивостей предметів і відношень між ними й виокремленні деякої властивості або відношення.

**Автоматизована система управління (АСУ)** – система, заснована на комплексному використанні економіко-математичних методів і технічних засобів обробки інформації для розв'язування задач керування виробничо-господарською діяльністю.

**Адекватність моделі** – правильне відтворення моделлю властивостей, зв'язків і відношень оригінала.

**Адреса даних** – адреса поля пам'яті, в якому розміщені дані.

**Алгоритм** – набір інструкцій для виконавця, що дає можливість розв'язати конкретну задачу або клас задач.

**Аналогія** – подібність в деяких якостях і відношеннях між різними за природою об'єктами. Важливою сферою застосування аналогії є розвинута в моделюванні *теорія подібності*.

**Аналогове моделювання** – математичне моделювання, засноване на *аналогії* (схожості за деякими ознаками) процесів та явищ, що мають різну фізичну природу, але описуються однаковими за виглядом рівняннями, логічними схемами тощо.

**Атрибут** – властивість (ознака), що містить одну з характеристик даної величини.

**Буфер обміну** – спеціальна область оперативної пам'яті, яка резервується операційною системою для збереження даних.

**Величина** – одиниця даних, що представлена своїм ім'ям і своїм значенням.

**Випадкова (статистична) вибірка** – набір значень деякої характеристики певного процесу, отриманий із множини можливих значень досліджуваної характеристики.

**Випадкова змінна** – змінна, що набуває довільного значення з певної області значень.

**Випадкове число** – число, частота повторення якого у вибраній послідовності визначається технікою використання випадкової вибірки з множини допустимих значень.

**Вихідні дані** – результат виконання програми.

**Вхідні дані** – дані, що вводяться до програми для обробки або зберігання.

**Гістограма** – один з видів статистичних розподілів за кількісною ознакою; являє собою сукупність суміжних прямокутників, побудованих на одній прямій; площа кожного з них пропорційна частоті знаходження даної величини в інтервалі, на якому побудований прямокутник.

**Графік** – засіб відображення функціональної залежності між змінними, може слугувати основою для відкриття нових властивостей, співвідношень и закономірностей.

**Групування (статистичне)** – розчленування елементів статистичної сукупності на окремі групи за певною ознакою. Завдяки групуванню матеріал спостережень набуває впорядкованого (систематизованого) вигляду.

**Дані** – інформація, подана у вигляді, придатному для опрацювання автоматичними засобами за можливої участі людини.

**Детермінована модель** – модель, що відповідає причинно обумовленому об'єкту (явищу, процесу).

**Динамічна модель** – модель, в якій досліджується зміна в часі деякої величини.

**Динамічні характеристики** – характеристики об'єкту, що залежать від часу.

**Дискретизація** – 1) вимірювання значень неперервної величини через певні (дискретні) проміжки часу; 2) дискретне представлення неперервної величини; 3) квантування.

**Дискретна модель** – модель, у якій досліджуваний процес подають у вигляді дискретної послідовності подій.

**Діаграма** – рисунок, що зображує співвідношення між певними величинами; умовне зображення числових величин або їх співвідношень, виконане геометричними побудовами.

**Дослідження операцій** – комплексна математична дисципліна, що досліджує методами математичного моделювання пошук оптимальної стратегії.

**Екологія** – наука про відношення рослинних і тваринних організмів і утворюваних ними співтовариств між собою та з навколишнім оточенням. Сучасна екологія, крім того, займається розробкою теорети-

чних і практичних методів контролю (моніторингу) за станом навколишнього середовища.

Електронна таблиця – інтерактивна система обробки даних. Являє собою прямокутну таблицю, її комірки можуть містити числові й рядкові типи даних або формули (які задають залежність значення в даній комірці від умісту інших комірок).

Закон розподілу – див. *Розподіл*.

Зворотний зв'язок – вплив вихідної величини деякої системи на вихід цієї самої системи. Може бути позитивним (віддаляє систему від стану рівноваги) і негативним (повертає систему до рівноваги).

Змінна – програмний об'єкт, що має ім'я і значення, яке програма може одержати і змінити.

Знакове моделювання – використання в якості моделі знакових перетворень будь-якого виду: схем, графіків, креслень, формул, наборів символів та інших умовних позначень.

Значення – зміст, що присвоюється даному.

Зображувальна точка – будь-яка точка на площині змінних  $x, y/\omega$ , яка зображує стан системи, зокрема коливної.

Інтерпретація 1) *заг.* – представлення, тлумачення; 2) *інформат.* – трансляція і виконання кожної команди початкової мови машинної програми.

Інтерфейс – сукупність правил, що встановлюють єдині принципи взаємодії пристроїв ЕОМ.

Інтерфейс користувача – програмні й апаратні засоби взаємодії оператора або користувача з програмою або комп'ютером.

Інформатика – наука, що вивчає закони, методи і засоби нагромадження, обробки, збереження, передачі й представлення інформації.

Інформаційна модель – 1) подання у відповідному вигляді процесу циркуляції інформації, що має бути автоматично оброблена в системі управління; 2) подання даних і відношень між ними математичними та програмними засобами.

Інформація – відображення предметного світу з допомогою сигналів (знаків, символів, жестів, звуків тощо), міра (характеристика, ознака) розмаїтості довкілля (об'єктів у ньому).

Кібернетика – наука про керування, а також про одержання, передавання і перетворення інформації в кібернетичних системах.

**Кібернетична система** – сукупність зв’язаних одне з одним об’єктів (елементів системи), спроможних сприймати, зберігати, переробляти інформацію, а також обмінюватися інформацією.

**Коефіцієнти моделі** – параметри математичної моделі, що є коефіцієнтами біля змінних

**Комп’ютерна модель** – це інформаційна модель, реалізована засобами тієї чи іншої комп’ютерної технології.

**Комп’ютерне моделювання** – моделювання об’єкта (процесу, явища) за допомогою програми, що реалізується обчислювальною системою.

**Комплекс** – сукупність компонентів, що утворюють у певному розумінні єдине ціле.

**Константа** – величина, що не змінює своє значення в процесі виконання алгоритму (програми).

**Концептуальна модель** – змістова структура об’єкту з деякої предметної галузі.

**Концепція** – набір основних ідей чи теоретичних положень, сукупність взаємопов’язаних уявлень, поглядів стосовно деякої проблеми.

**Кореляція** (в математичній статистиці) – ймовірнісна чи статистична залежність. На відміну від функціональної залежності кореляція виникає, коли залежність однієї ознаки від іншої ускладнюється через наявність ряду випадкових факторів.

**Космологія** – вчення про всесвіт у цілому.

**Критерій подібності** – (основне поняття *теорії подібності*) безрозмірна комбінація фізичних величин – характеристик деякого явища, складена за певними правилами.

**Лінійчата діаграма** – діаграма, що складається із сукупності горизонтальних смуг і використовується для демонстрування значень окремих груп даних.

**Логічна змінна** – змінна, яка набуває одного з двох логічних значень – “істина” або “хибність”.

**Логічна операція** – 1) машинна операція, що реалізує функції алгебри логіки; 2) дія над логічними величинами з одержанням логічного значення.

**Математична екологія** – сучасна наука, що поєднує математичні моделі й методи вирішення проблем екології.

**Математична модель** – система математичних співвідношень, яка описує об’єкт (процес або явище).

**Математичне моделювання** – процес побудови і дослідження математичних моделей різних явищ.

**Меню** – відображуваний на екрані список команд, повідомлень, питань або варіантів відповідей, з яких користувач обирає потрібне, вводячи його номер, букву або вказуючи на нього курсором.

**Метод випадкової вибірки (метод Монте-Карло)** – загальна назва обчислювальних методів, у яких використовується ймовірнісна інтерпретація обчислюваних величин з допомогою випадкових чисел.

**Моделювання** – особлива форма дослідження, що полягає у вивченні об'єкта не безпосередньо, а на його моделі.

**Модель** – фізична система (або математичний опис), що відображає істотні властивості або характеристики об'єкта (процесу, явища).

**Мозковий штурм** – оперативний метод колективного вирішення проблеми на основі стимулювання творчої активності, при якому учасникам обговорення пропонують висловлювати якомога більшу кількість варіантів розв'язання, в тому числі найфантастичніших. Далі із загальної кількості висловлених ідей відбирають найбільш вдалі, які можуть бути використані на практиці; є одним з методів експертного оцінювання.

**Надання** – призначення змінній деякого значення.

**Налагодження програми** – виявлення, локалізація й усунення помилок у програмі.

**Натурний експеримент** – експеримент з природним об'єктом.

**Обчислювальна математика** – 1) розділ математики, що вивчає методи чисельного розв'язування математичних задач на ЕОМ; 2) теорія чисельних методів розв'язування типових математичних задач.

**Обчислювальна система** – сукупність апаратних засобів обчислювальної техніки і відповідного програмного забезпечення, яка функціонує як одне ціле і призначена для розв'язування певного класу задач.

**Обчислювальний експеримент** – технологія теоретичних досліджень, заснована на вивченні поведінки і властивостей моделі за допомогою обчислювальної системи.

**Операнд** – 1) величина у виразі, над якою виконується операція; 2) аргумент операції; частина машинної команди, що визначає об'єкт, над яким виконується операція.

**Оптимізація** – 1) процес приведення системи в найкращий за даних

умов (онтимальний) стан; 2) у дослідженні операцій – знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму) функції при заданих обмеженнях.

Опція – параметр програми, що задає режим її роботи.

Парадигма – система поглядів, закладена в конкретну технологію.

Параметр – значення, надане змінній або на початку операції, або перед обчисленням виразу програмою.

Подібність фізична – два фізичних процеси подібні, якщо вони якісно однакові, а їхні критерії подібності – попарно рівні.

Полігон – графічне зображення співвідношень між значеннями ознак і відповідними чи відносними частотами її повторення. Часто використовують для зображення дискретних рядів.

Поняття – цілісна сукупність суджень, в яких що-небудь стверджується про відмітні ознаки досліджуваного об'єкта.

Понуляція – це група особин одного виду, що існує на певному ареалі і характеризується багатьма спільними ознаками.

Постановка задачі – початковий етап процесу побудови моделі; на змістовому рівні передбачає виявлення всіх суттєвих факторів і зв'язків між ними і шуканим результатом.

Похибка вимірювання – відхилення результатів вимірювання від дійсного значення вимірюваної величини.

Похибка обчислень – методична помилка, що виникає при обчисленнях на ЕОМ.

Предметна область – частина реального світу, що є середовищем визначення і реалізації конкретного процесу або групи процесів.

Прикладна задача – задача, що має частковий, прикладний характер.

Прикладна математика – математика в аспекті її додатків до розв'язання задач, постановка яких найчастіше не пов'язується з потребами самої математики.

Принцип відповідності – твердження, згідно з яким нова теорія, що претендує на охоплення більш широкої області застосування, ніж попередня, має включати останню як окремий або граничний випадок.

Програма – алгоритм, записаний мовою програмування, зрозумілою для ЕОМ.

Псевдовипадкове число – число, частота повторення якого у вибраній послідовності визначається технікою використання випадкової вибірки з множини допустимих значень.

Рекурентна формула – формула, що виражає наступні члени послідовності через попередні.

Розподіл ймовірностей – одне з основних понять теорії ймовірностей і математичної статистики. Це функція, яка зіставляє з множиною можливих значень випадкової величини ймовірності цих значень.

Середовище – оточення, в якому функціонує об'єкт.

Середовище для моделювання – інструментальні засоби, що охоплюють весь цикл розробки й функціонування моделі.

Система – сукупність об'єктів і відношень між ними, яка утворює єдине ціле.

Системний підхід – комплексний послідовний розгляд усіх факторів, шляхів і методів розв'язання задачі в їхньому взаємному зв'язку.

Стійкість моделі – здатність обчислювального алгоритму не руйнуватися за певних значень вхідних даних.

Стохастика – синонім до “теорія ймовірностей”.

Стохастична модель – математична модель, що містить випадкові (стохастичні) величини.

Структурна схема – умовне зображення процесів, способів організації, аналізу чи плану розв'язування задачі (використовують спеціальні графічні позначення для операцій, потоків даних, пристроїв).

Таблиця – спосіб формалізованого подання даних у вигляді двовимірного масиву.

Теорія – система основних ідей у тій або іншій галузі знань.

Теорія подібності – вчення про умови подібності фізичних явищ; спирається на вчення про розмірності фізичних величин і слугує основою фізичного моделювання. Має на меті встановлення критеріїв подібності для різноманітних фізичних явищ.

Тестування моделі – етап створення моделі, полягає в тому, що обчислювальний експеримент спрямовують на підтвердження очевидних і заздалегідь відомих властивостей об'єкту.

Технології 1) промислові – послідовність етапів перероблення природної сировини (руди, нафти тощо) або одержаних з неї напівфабрикатів (металів, комплектуючих до виробів); 2) соціальні – зміни, спрямовані на людину, на перетворення або набуття деяких її властивостей; ці технології за організацією і здійсненням значно складніші за промислові. Кінцевим результатом обох видів технологій є продукт із заданими властивостями.

**Точність** – 1) міра можливості розрізняти майже рівні значення; 2) характеристика розрядності машинного подання чисел з рухомою крапкою; 3) атрибут даних, що визначає їх повну довжину і довжину дробової частини; 4) властивість програми видавати числові дані в межах принудимих відхилень.

**Трансляція** – перетворення програми, поданої однією мовою програмування, в еквівалентну програму на іншій мові.

**Тривіальний** – позбавлений новизни, не оригінальний.

**Умова** – правило для вибору однієї з альтернативних гілок алгоритму.

**Фазова площина** – декартова система координат, в якій на вісі абсцис відкладають зміщення  $x$ , а на вісі ординат – його похідну, тобто швидкість руху  $v$  (краще величину  $v/\omega$ ).

**Фазова траєкторія** – лінія, що її описує на фазовій площині (у фазовому просторі) зображувальна точка.

**Фінітна траєкторія** – траєкторія, обмежена в просторі (колова, еліптична на відміну від параболічної, гіперболічної).

**Формалізація** – процес подання інформації про об'єкт (процес, явище) у певній формі для формального виконавця.

**Функція** – 1) змінна величина, значення якої залежить від значень іншої величини (величин); 2) одне з призначень пристрою, програми, системи; 3) у мовах програмування – процедура, внаслідок виконання якої формується деяке значення і виклик якої може бути використаний як операнд у виразі.

**Чисельні методи (матем.)** – методи наближеного розв'язування математичних задач, що дозволяють звести розв'язання до скінченної кількості арифметичних дій над числами.

**Швидкодія** – показник швидкості роботи ЕОМ та її продуктивності в одиницю часу.



## Література

1. Задачи по программированию / С. А. Абрамов, Г. Г. Гиездилова, Е. Н. Капустина, М. И. Селюк. – М. : Наука, 1988. – 223 с. – (Вып. 56).
2. Авилов В. Физика + Математика + ЭВМ / Авилов В. // Квант. – 1985. – № 11.
3. Алминдеров В. Международный турнир «Компьютерная физика» / Алминдеров В., Поповичева О. // Квант. – 1999. – № 3.
4. Белонучкин В. Е. Кеплер, Ньютон и все-все-все... / Белонучкин Владимир Евгеньевич. – М. : Наука, 1990. – 122 с. – (Б-чка "Квапт"; Вып. 78).
5. Богдапов К. Как быстрее спуститься на лифте в час пик / Богдапов К. // Квант. – 2004. – № 1.
6. Брудио А. Л. Московские олимпиады по программированию / А. Л. Брудио, Л. И. Каплап ; под ред. Б. Н. Наумова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1990. – 208 с.
7. Бурсиан Э. В. Задачи по физике для компьютера : [для физ.-мат. фак.] / Бурсиан Эрик Викторович. – М. : Просвещение, 1991. – 255 с. : ил. – (Учебное пособие для педагогических институтов).
8. Верлаин А. Ф., Распопов В. Б. Основы применения вычислительной техники : пробн. учебн. пособие для 10 кл. ср. шк. – К : Рад. шк., 1986.
9. Вершинин О. Е. За страницами учебника информатики : кн. для учащихся 10-11-х кл. сред. шк. / Вершинин Олег Емельянович. – М. : Просвещение, 1992. – 351 с.
10. Вершинин О. Е. Компьютер для менеджера : [учеб. пособие для экон. спец. вузов] / Вершинин Олег Емельянович. – М. : Высш. шк., 1990. – 238 с.
11. Водолажекко А. В. Деловые применения компьютеров. (Раздел "Моделирование") / Водолажекко А. В. – Харьков : Харьковский педагогический университет, РЦ НИТ, 1994.
12. Гильде В. С микрокалькулятором в руках : пер. с нем. / Вернер Гильде, Зигфрид Альтрихтер – 2-е изд. – М. : Мпр, 1987. – 215 с. – (В мире науки и техники)
13. Глушков В. М. Что такое ОГАС : [Для детей] / В. М. Глушков, В. Я. Валах. – М. : Наука, 1981. – 159 с. : ил. – (Б-чка "Квапт". Вып. 10).
14. Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием / А. Б. Горстко. – М. : Знание, 1991. – 160 с.
15. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике : [в 2 ч.] / Харви Гулд, Ян Тобочник. – М. : Мпр, 1990.
16. Жалдак М. И. Компьютер на уроках математики : пособие для учителей / М. И. Жалдак. – Издание 2-е, переработанное и дополненное. – К. : ДИНИТ, 2004. – 327 с.
17. Жалдак М. І. Про лінійне програмування. – К. : Радянська школа, 1970. – (Сер. У світі математики, вип. 2.)

18. Жалдак М. І. Чисельні методи математики : посібник для самоосвіти вчителів / М. І. Жалдак, Ю. С. Рамський. – К. : Радяйська школа, 1984.
19. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Віїниченко. – 2-ге вид. – К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 282 с.
20. Информатика : Энцикл. слов. для начинающих / [Александров В. В. и др.]; Под общ. ред. Д. А. Поспелова. – М. : Педагогика-пресс, 1994. – 349 с.
21. Информатика та обчислювальна техніка : Короткий тлумачий словник / В. П. Гондюл, А. Г. Дерев'яко, В. В. Матвеев, Ю. З. Прохур ; за ред. проф. В. П. Гондюла. – К. : Либідь, 2000. – 320 с.
22. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент : Введ. в информатику с позиций мат. моделирования : [сб. ст.] / АН СССР ; [предисл. А. А. Самарского]. – М. : Наука, 1988. – 169 с. – (Кибернетика – неогранич. возможности и возмож. ограничения).
23. Кочергии А. Задача о слухах / Кочергии А. // Информатика и образование. – 1989. – № 5.
24. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Курицкий Борис Яковлевич. – СПб. : BHV-Санкт-Петербург, 1997. – 384 с. – (В примерах)
25. Линдьер Г. Картины современной физики / Линдьер Г. – М. : Мир, 1977. – 272 с.
26. Лишевский В. П. Рассказы об ученых / Володар Петрович Лишевский ; отв. ред. А. Т. Григорьян ; АН СССР. – М. : Наука, 1986. – 166 с. – (Сер. "История науки и техники").
27. Марочник Л. С. Свидание с кометой / Леонид Марочник. – М. : ТЕРРА-Ки. клуб, 2008. – 317 с. – (Мир вокруг нас).
28. Математическое моделирование / Редакторы Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоуи. – М. : Мир, 1979. – 277 с.
29. Матюшкин-Герке А. А. Учебно-прикладные задачи в курсе информатики / Матюшкин-Герке А. // Информатика и образование. – 1992. – №№ 3–6.
30. Мичи Д. Компьютер-творец / Дональд Мичи, Рори Джоистон. – М. : Мир, 1987. – 254 с.
31. Моисеев Н. Н. Математик задаёт вопросы... (Приглашение к диалогу). – М. : Знание, 1974. – 191 с.
32. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей : [описание уравнений, упрощение уравнений, выбор решений] / Анатолий Дмитриевич Мышкис. – 4-е изд. – М. : URSS : Либроком, 2009. – 191 с.
33. Островская Е. М. Моделирование на компьютере / Островская Е. М. // Информатика и образование. – 1998. – №8.
34. Пак В. В. Инженер, математик и другие : Простые методы математического моделирования природных и технологических процессов /

- Пак В. В. – Донецк : ДонГТУ, 1995. – 224 с.
35. Першиков В. И. Толковый словарь по информатике / Першиков В. И., Савииков В. М. – М. : Фииапсы и статистика, 1991. – 543 с.
  36. Простое и сложное в программировании / [Вишняков Ю. С., Грюнталь А. И., Кольцова А. А. и др. ; редкол. : И. М. Макаров (пред.) и др. ; предисл. Е. П. Велихова] ; АН СССР. – М. : Наука, 1988. – 169 с. – (Кибернетика – неогранич. возможности и возмож. ограничения).
  37. Распопов В. Б. Імітаційні алгоритми / Распопов В. Б. // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1999. – № 2.
  38. Румянцев А. Ю. Астрономия : учебно-методическое пособие / Румянцев А. Ю., Серветник Т. А. ; под ред. А. В. Усовой. – Магнитогорск : МаГУ, 2003. – 309 с.
  39. Самарский А. А. Компьютеры и жизнь : (Мат. моделирование) / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М. : Педагогика, 1987. – 127 с.
  40. Словник фізичної лексики : українсько-англійсько-німецько-російський / Уклад. В. Козирський, В. Шендеровський. – К. : Рада, 1996. – 934 с.
  41. Соколов И. М. Фракталы / Соколов И. М. // Квант. – 1989. – № 5.
  42. Струве О. Л. Элементарная астрономия / Струве О., Линдс Б., Пиллаис Э. – М. : Главн. ред. физ.-мат. лнт., 1964. – 468 с.
  43. Уолфрем С. Современный компьютер / Сб. научно-популярных статей. Раздел “Научные исследования”. – М. : Мпр, 1986.
  44. Федер Е. Фракталы / Еис Федер. – М. : Мпр, 1991. – 260 с.
  45. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. – М. : Мир, 1967. – Т. 1. – 267 с.
  46. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями / Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. – М. : Мпр, 1969. – 624 с.
  47. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. – Т. 1–5.
  48. Хилькевич С. С. Как построить траекторию? / Хилькевич С. С., Зайцева О. А. // Квант, 1987. – № 7.
  49. Хургии Я. И. Да, Нет или Может быть : [Рассказы о стат. теории упр. и эксперимента] / Яков Исаевич Хургии. – М. : Мпр, 1985. – 224 с. – (Наука для всех).
  50. Хургии Я. И. Ну и что? : Разговоры математика ... / Яков Исаевич Хургии. – М. : Интерконтакт Наука, 2002. – 323 с.
  51. Шнейдеров В. С. Занимательная информатика или Собрание веселых и поучительных историй ... / Виталий Семенович Шнейдеров. – СПб. : Политехника, 1994. – 301 с.
  52. Шпилевский А. Фрактальные кластеры / Шпилевский А. // Информатика и образование. – 1989. – № 5.
  53. Эфрос А. Что такое теория протекания / Эфрос А. // Квант. – 1982. – №2.

Навчальний посібник

Теплицький Ілля Олександрович

**ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Видання друге, виправлене і доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підп. до друку 29.03.2010  
Папір офсетний №1  
Ум. друк. арк. 15,3

Формат 80×84 1/16  
Зам. №2903  
Тираж 300 прим.

Жовтнева друкарня  
50014, м. Кривий Ріг, вул. Електрична, 5  
Тел. (0564) 407-29-02

---

E-mail: [semerikov@gmail.com](mailto:semerikov@gmail.com)