

**ЗАДАЧНИК З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**  
**(РОЗДІЛ “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ”)**

**ЗМІСТ**

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку</b>	<b>4</b>
1.1. Основні поняття .....	4
1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них .....	5
1.3. Однорідні диференціальні рівняння та звідні до них .....	10
1.4. Диференціальні рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник .....	17
1.5. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них.....	22
1.6. Диференціальні рівняння, не розв’язані відносно похідної ...	29
<b>Тема 2. Диференціальні рівняння вищих порядків</b>	<b>36</b>
2.1. Основні поняття .....	36
2.2. Диференціальні рівняння, які дають змогу знизити їхній порядок .....	36
2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Однорідні рівняння Ейлера .....	41
2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків: метод варіації довільних сталих, метод невизначених коефіцієнтів .....	50
<b>Тема 3. Системи диференціальних рівнянь</b>	<b>57</b>
3.1. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами .....	57
3.2. Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами .....	62
3.3. Нормальні системи диференціальних рівнянь .....	70
<b>Список літератури</b>	<b>76</b>

## ВСТУП

В даному задачнику до кожної теми розглядаються методи і приклади розв’язування типових задач.

Задачник складено з метою навчити студентів володіти складанням і розв’язуванням диференціальних рівнянь, що відповідають умовам інженерно-технічних задач, що виникають в процесі виробництва.

За змістом задачі охоплюють науково-технічні дисципліни і розкривають зв’язок диференціальних рівнянь з суміжними науково-технічними дисциплінами. На прикладах цих задач студенти не тільки оволодівають методами розв’язування диференціальних рівнянь, але і впевнюються в тій великій ролі, яку відіграє вища математика в науці і техніці. Ці задачі, крім того, полегшують вивчення ряду дуже важливих дисциплін, що складають основу освіти спеціаліста будь-якої галузі. Розглядувані задачі розбиті за математичною ознакою на три групи: задачі на розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку, задачі на розв’язування диференціальних рівнянь вищих порядків, задачі на розв’язування систем диференціальних рівнянь.

## ТЕМА 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

### 1.1. Основні поняття

У загальному випадку диференціальне рівняння першого порядку (записане в неявній формі) має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) пов'язує незалежну змінну  $x$ , шукану функцію  $y$  і її похідну  $y'$ .

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно  $y'$ , то одержимо диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної (записане в явній формі):

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) називається функція:

$$y = \varphi(x, C), \quad (3)$$

яка залежить від однієї довільної сталої  $C$ , і така, що:

1) вона є розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) при довільних допустимих значеннях сталої  $C$ ;

2) для довільної початкової умови  $y(x_0) = y_0$ , при якій диференціальне рівняння має розв'язок, можна підібрати таке значення  $C_0$  сталої  $C$ , що розв'язок  $y = \varphi(x, C_0)$  буде задовольняти даній початковій умові.

Рівність

$$\Psi(x, y, C) = 0 \quad \text{або} \quad \Phi(x, y) = C, \quad (4)$$

яка неявно виражає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку.

Зауважимо, що диференціальним рівнянням першого порядку, записаним через диференціали (в симетричній формі), називається рівняння вигляду:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (5)$$

Задача Коші (початкова задача) для диференціального рівняння (1) або (2) полягає в знаходженні такого розв'язку  $y = y(x)$  цього рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$y(x_0) = y_0, \quad (6)$$

де  $(x_0; y_0)$  – задана точка (початкова точка) з області  $D$ .

## 1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

1. Найпростішим диференціальним рівнянням першого порядку є рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

В ньому один доданок залежить тільки від  $x$ , а другий – від  $y$ . Іноді такі диференціальні рівняння називають *рівняннями з відокремленими змінними*. Проінтегрувавши почленно це рівняння, одержуємо:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

– його загальний інтеграл.

Більш загальний випадок описують *диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними*, тобто диференціальні рівняння першого порядку, які можна записати у вигляді:

$$y' = h(x)g(y) \quad (7)$$

або

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \quad (8)$$

Вважаємо, що  $h(x)$  і  $g(y)$  – задані і неперервні на деякому інтервалі функції.

Для того, щоб розв’язати рівняння (7), його треба звести до вигляду (8). Для відокремлення змінних у рівнянні (8) досить обидві його частини поділити на функцію  $M_2(y)N_1(x) \neq 0$  і проінтегрувати отриману рівність, внаслідок чого одержимо співвідношення:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C,$$

яке і визначає загальний інтеграл вихідного рівняння.

**Зауваження.** При діленні рівняння (8) на  $M_2(y)N_1(x)$  можна втратити розв’язки, при яких  $M_2(y)N_1(x) = 0$ . Тому слід окремо розв’язати рівняння  $M_2(y)N_1(x) = 0$  і знайти ті розв’язки диференціального рівняння, які не мають бути одержані з загального розв’язку, – *особливі розв’язки*.

2. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' = f(ax + by + c), \quad (9)$$

де  $a, b, c$  – сталі, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною  $u = ax + by + c$ . Диференціюючи по  $x$ , одержуємо:

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}.$$

Дане рівняння набуває вигляду  $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$ , звідки випливає

$$\frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи це рівняння і замінюючи  $u$  на  $ax + by + c$ , одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння.

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y' = 2\sqrt{y} \cos x.$$

*Розв’язання.* Зведемо дане рівняння до вигляду (8):

$$2\sqrt{y} \cos x dx - dy = 0$$

або

$$\cos x dx - \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 0.$$

Звідси після інтегрування одержаної рівності одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$\sin x - \sqrt{y} = C.$$

При діленні на  $2\sqrt{y}$  втрачений, очевидно, розв’язок  $y = 0$ . □

**Приклад 2.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y' = \cos(y - x).$$

*Розв’язання.* Це рівняння типу (9). Зробимо заміну  $u = y - x$ . Тоді рівняння набуде вигляду

$$u' + 1 = \cos u.$$

Відокремлюємо змінні:

$$dx = \frac{du}{\cos u - 1} = -\frac{du}{2\sin^2 \frac{u}{2}}.$$

Звідси одержуємо загальний розв’язок

$$\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C.$$

Крім того, існують розв’язки  $\cos u - 1 = 0$ , тобто  $u = 2\pi k$ , тобто  $y = x + 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). □

**Приклад 3.** Розв’язати задачу Коші

$$x \ln x dy + e^y dx = 0, \quad y(e^e) = -\ln 2.$$

*Розв’язання.* Відокремлюємо в рівнянні змінні і інтегруємо:

$$-\int e^{-y} dy = \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad e^{-y} = \ln |\ln x| + C.$$

Підберемо таку сталу  $C$ , щоб виконувалась початкова умова, для чого початкову умову підставляємо в одержане рівняння:

$$2 = 1 + C, \quad C = 1.$$

Таким чином, розв’язком задачі Коші є

$$e^{-y} = \ln |\ln x| + 1.$$

□

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y' = 2 + 4yx - y^2 - 4x^2.$$

*Розв’язання.* Зведемо рівняння до вигляду

$$y' = 2 - (y - 2x)^2.$$

Одержали рівняння типу (9). Зробимо заміну  $u = y - 2x$ :

$$(u + 2x)' = 2 - u^2, \quad u' = -u^2.$$

Далі відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$-\frac{du}{u^2} = dx, \quad \frac{1}{u} = x + C.$$

При діленні на  $u^2$  втрачаємо розв’язок  $u = 0$ . Повернувшись до вихідної змінної, одержуємо

$$\frac{1}{y - 2x} = x + C, \quad y = 2x.$$

□

**Приклад 5.** Трубопровід теплової магістралі (діаметр 20 см) захищений ізоляцією товщиною 10 см; величина коефіцієнта теплопровідності (теплопровідності)  $k = 0,071 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ . Температура труби  $160^\circ\text{C}$ ; температура зовнішнього покриття  $30^\circ\text{C}$  (рис. 1). Знайти розподіл температури всередині ізоляції, а також кількість теплоти, що віддається одним погонним метром труби протягом доби.

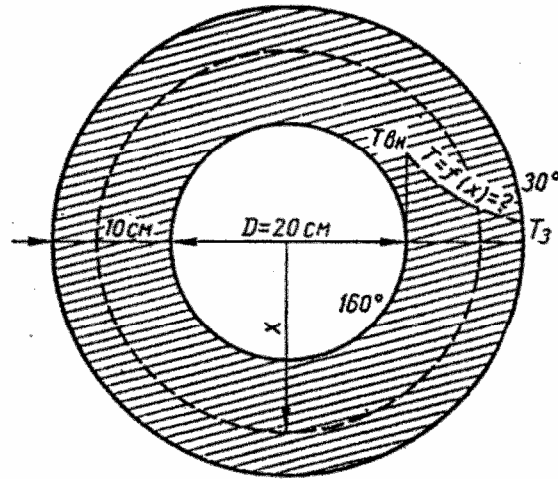


Рис. 1

*Розв'язання.* Якщо тіло знаходиться в стаціонарному тепловому стані і температура  $T$  в кожній його точці є функцією тільки однієї координати  $x$ , згідно з законом теплопровідності Фур'є кількість теплоти, що виділяється за секунду:

$$Q = -kF(x) \frac{dT}{dx} = \text{const}, \quad (10)$$

де  $F(x)$  – площа перерізу тіла на відстані  $x$ ,  $k$  – коефіцієнт теплопровідності. Тут

$$F(x) = 2\pi x l,$$

де  $l$  – довжина труби,  $x$  – радіус трубопроводу.

Таким чином, після відокремлення змінних диференціальне рівняння (10) набуде вигляду

$$dT = -\frac{Q}{kF(x)} dx = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \frac{dx}{x}. \quad (11)$$

Інтегруючи обидві частини рівності (11), знаходимо

$$\left. \begin{array}{l} \text{а)} \quad \int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \int_{10}^{20} \frac{dx}{x}, \\ \text{б)} \quad \int_{160}^T dT = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \int_{10}^x \frac{dx}{x} \end{array} \right\}$$

або



$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \\ T|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \ln x \Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \ln 2, \\ \text{б)} \\ T - 160 = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \ln x \Big|_{10}^x = -\frac{Q}{k \cdot 2\pi l} \ln 0,1x. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Розділивши почленно рівняння б) (12) на а) (12), одержимо

$$\frac{T - 160}{-130} = \frac{\ln 0,1x}{\ln 2} = \frac{\lg 0,1x}{\lg 2},$$

звідки закон розподілу температури всередині ізоляції має вигляд:

$$T \approx (591,85 - 431,85 \lg x) ^\circ\text{C},$$

де  $x$  в см.

З рівняння а) (12) при  $l = 1$  м маємо

$$Q = \frac{130 \cdot k \cdot 2\pi \cdot 1}{\ln 2} \approx \frac{2\pi \cdot 130 \cdot 0,071}{0,693} \approx 83,696 \text{ (Дж/с)}.$$

Кількість теплоти, що виділяється одним погонним метром труби протягом доби, обчислюється так:

$$24 \cdot 60 \cdot 60 Q \approx 86400 \cdot 83,696 \approx 7\,231\,334 \text{ (Дж)}.$$

□

### Задачі для самостійного розв’язування

**I.** Розв’язати диференціальні рівняння:

1.  $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$ .
2.  $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$ .
3.  $2^{x+y} + 3^{x-2y} y' = 0$ .
4.  $\sec^2 x \sec y dx = -\operatorname{ctg} x \sin y dy$ .

**II.** Розв’язати задачі Коші:

1.  $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
2.  $(1+x^2)dy + y dx = 0, \quad y(0) = 1$ .
3.  $y dx + \operatorname{ctg} x dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ .

**III. 1.** Знайти таку криву, що проходить через точку  $(0; -2)$ , щоб тангенс кута нахилу дотичної в довільній її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній на 3 одиниці.

**2.** Швидкість розпаду радію в кожний момент часу прямо пропорційна його масі. Визначити, який процент маси  $m_0$  радію розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду радію (період, по закінченню якого розпадеться половина маси радію) дорівнює 1590 років.

**3.** Довести, що два металічні шарики (рис. 2), які почали одночасно скочуватись по жолобу з довільних точок  $M$  і  $N$  (в вертикальній площині жолобу крива – циклоїда), будуть в найнижчій точці  $K$  в один і той же момент часу. Тертя і опір повітря не враховувати.

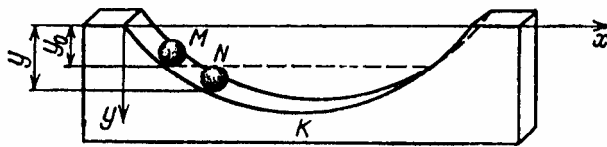


Рис. 2

### 1.3. Однорідні диференціальні рівняння та звідні до них

**1.** До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Функція  $f = f(x, y)$  називається *однорідною функцією* виміру  $m$  відносно аргументів  $x$  та  $y$ , якщо виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Диференціальне рівняння (2) називається *однорідним* відносно змінних  $x$  та  $y$ , якщо  $f = f(x, y)$  є однорідною функцією нульового виміру відносно своїх аргументів.

Якщо диференціальне рівняння вигляду (2) однорідне, то його можна записати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (13)$$

Однорідне рівняння (13) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінної (підстановки)

$$\frac{y}{x} = u \text{ або, що те саме, } y = ux. \quad (14)$$

Диференціальне рівняння (5) буде однорідним відносно  $x$  та  $y$  тоді і тільки тоді, коли  $M = M(x, y)$ ,  $N = N(x, y)$  – однорідні функції одного і того ж самого виміру  $m$ .

**2. Диференціальне рівняння вигляду**

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (15)$$

де  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  – сталі, при  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  зводиться до однорідного лінійного заміною змінних

$$\begin{cases} x = u + h, \\ y = v + l, \end{cases}$$

де  $h, l$  – розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1h + b_1l + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2l + c_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , то рівняння (15) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною  $u = a_1x + b_1y$ .

**3.** Диференціальне рівняння (2) або (5) називається *узагальнено-однорідним рівнянням*, якщо існує таке  $\alpha$ , що заміна  $y = u^\alpha$  зводить рівняння до однорідного. Параметр  $\alpha$  можна знайти з такої умови: якщо змінній  $x$  надати виміру 1, змінній  $y$  – виміру  $\alpha$  і похідній  $\frac{dy}{dx}$  – виміру  $\alpha - 1$ , то в рівнянні всі члени будуть однакового виміру.

**Приклади розв’язування типових задач****Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$(xy' - y) \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = x.$$

*Розв’язання.* Дане рівняння є однорідним. (Це можна встановити, якщо, наприклад, розв’язати його відносно  $y'$  і зазначити, що його права частина є однорідною функцією нульового виміру відносно своїх аргументів.) Зробимо заміну  $y = ux$ , звідки  $y' = u'x + u$ , і приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$u'x \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = 1.$$

Далі одержуємо

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) du = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування буде

$$u \ln(u + \sqrt{1+u^2}) - \sqrt{1+u^2} = \ln|x| + C.$$

Повернувшись до вихідної змінної, одержуємо

$$\frac{y}{x} \ln \left( \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C. \quad \square$$

**Приклад 2.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$(4x + 2y + 3)dx - (2x + y + 1)dy = 0.$$

*Розв’язання.* Це рівняння типу (15), де  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ . Тому робимо заміну

$u = 2x + y$ . Тоді

$$(4u + 5)dx = (u + 1)du.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, знаходимо

$$4u + 5 = Ce^{4u-16x} \quad (C \neq 0)$$

або

$$8x + 4y + 5 = Ce^{-8x+4y} \quad (C \neq 0).$$

При відокремленні змінних можна втратити розв’язок  $u = -\frac{5}{4}$ , тобто  $8x + 4y + 5 = 0$ , але він входить у загальний розв’язок при  $C = 0$ . Отже,

$$8x + 4y + 5 = Ce^{-8x+4y} \quad (-\infty < C < \infty). \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв’язати задачу Коші

$$(x^2 + y^2)dx + yx dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

*Розв’язання.* Це однорідне рівняння, оскільки  $M(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $N(x, y) = yx$  – однорідні функції одного і того ж самого виміру  $m = 2$ . Зробимо заміну  $y = ux$ . Тоді  $dy = x du + u dx$ . Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{u du}{1 + 2u^2} = \frac{1}{4} \ln C$$

або

$$x^4(1 + 2u^2) = C.$$

Таким чином, загальний розв’язок має вигляд

$$x^2(x^2 + 2y^2) = C,$$

а після врахування початкової умови маємо  $C=1$ . Тоді розв’язок задачі Коші має вигляд

$$x^2(x^2 + 2y^2) = 1 \quad \text{або} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2} - x^2 \right)}. \quad \square$$

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$yy' = 2y - x - 1.$$

*Розв’язання.* Це рівняння типу (15), де  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ . Тому покладаємо

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v. \end{cases}$$

Після цього треба зробити ще одну заміну  $\xi = \frac{y}{u}$ . В змінних  $u, \xi$  задане рівняння набуває вигляду

$$\xi' u = -\frac{(\xi - 1)^2}{\xi}.$$

Звідси, розв’язуючи рівняння і переходячи до попередніх змінних, одержимо

$$y - x - 1 = C e^{\frac{x+1}{y-x-1}} \quad (C \neq 0).$$

Можлива втрата розв’язку  $\xi = 1$ , тобто  $y = x + 1$ , але цей розв’язок входить в загальний розв’язок при  $C = 0$ . Остаточно:

$$y - x - 1 = C e^{\frac{x+1}{y-x-1}} \quad (-\infty < C < \infty). \quad \square$$

**Приклад 5.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$2x^2 y' = y^3 + xy.$$

*Розв’язання.* Це узагальнено-однорідне рівняння. Покладемо  $y = u^\alpha$ . Тоді рівняння

$$2x^2 \alpha u^{\alpha-1} = u^{3\alpha} + x u^\alpha$$

стає однорідним, якщо  $2 + \alpha - 1 = 3\alpha = \alpha + 1$ , тобто  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Отже, робимо заміну  $u = y^2$ . Одержимо

$$x^2 u' = u^2 + xu.$$

Покладаємо  $z = \frac{u}{x}$  і маємо  $z'x = z^2$ . Звідси

$$x = Ce^{-\frac{1}{z}} = Ce^{-\frac{x}{y^2}} \quad (C \neq 0).$$

Втрата розв'язку  $z=0$  при відокремленні змінних приводить до втрати розв'язку  $y=0$  вихідного рівняння. Розв'язок  $y=0$  в загальний розв'язок не входить і треба його дописати додатково. Отже,

$$x = Ce^{-\frac{x}{y^2}} \quad (C \neq 0), \quad y = 0.$$

□

**Приклад 6.** Знайти ізогональні траєкторії пучка прямих з центром в початку координат.

*Розв'язання.* Ізогональними траєкторіями є криві, що утворюють в кожній своїй точці сталий кут  $\alpha$  з прямою пучка, що проходить через цю точку (рис. 3).

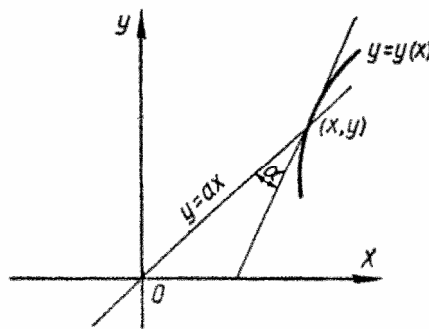


Рис. 3

Нехай рівняння даного пучка має вигляд  $y = ax$ . Покладемо  $\operatorname{tg} \alpha = k$ . Позначимо координати довільної точки траєкторії через  $(x, y)$ ; кутовий коефіцієнт дотичної до траєкторії в цій точці буде тоді  $\frac{dy}{dx}$ .

За умовою маємо:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + \frac{dy}{dx} a}.$$

В довільній точці  $(x, y)$  з рівняння пучка одержуємо  $a = \frac{y}{x}$ . Тому

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}. \quad (16)$$

Рівняння (16) є однорідним рівнянням. Щоб його розв’язати, зробимо заміну

$$y = ux, \quad (17)$$

звідки

$$dy = u dx + x du. \quad (18)$$

Підставляючи вирази (17) і (18) в (16), одержуємо:

$$x du - ku^2 dx - kxu du - k dx = 0$$

або

$$x(1 - ku) du - k(1 + u^2) dx = 0. \quad (19)$$

Відокремивши змінні в рівнянні (19), одержимо:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1 - ku}{1 + u^2} du - \frac{dx}{x} = 0.$$

Проінтегруємо:

$$\frac{1}{k} \left( \int \frac{du}{1 + u^2} - \frac{k}{2} \int \frac{d(1 + u^2)}{1 + u^2} \right) - \int \frac{dx}{x} = 0$$

або

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} u + \ln C = \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \ln x \sqrt{1 + u^2}. \quad (20)$$

Враховуючи, що  $u = \frac{y}{x}$ , надаємо рівнянню (20) вигляду:

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \ln C$$

або

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

Переходячи в останньому рівнянні до полярних координат, тобто покладаючи  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , знаходимо, що шуканими ізогональними траєкторіями є логарифмічні спіралі:

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

□

### Задачі для самостійного розв’язування

#### I. Розв’язати диференціальні рівняння:

1.  $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}.$

2.  $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$

3.  $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$

4.  $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0.$

5.  $(x + y + 1)dx = (1 - 2x - 2y)dy.$

6.  $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$

7.  $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \frac{y-2x}{x+1}.$

8.  $y' = \frac{4x^6 - y^4}{2x^4y}.$

#### II. Розв’язати задачу Коші:

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

#### III. 1. З’ясувати, при яких $p$ і $q$ рівняння

$$y' = ax^p + by^q$$

є узагальнено-однорідним. Розв’язати рівняння

$$y' = -2x^p + y^2,$$

якщо воно узагальнено-однорідне.

2. Знайти криві, у яких відрізок  $MT$  дотичної від точки дотику до перетину з віссю  $Ox$  дорівнює відрітку  $OT$  осі  $Ox$  (рис. 4).



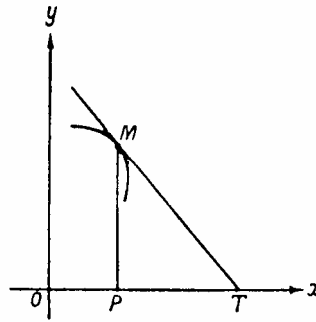


Рис. 4

### 1.4. Диференціальні рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник

#### 1. Диференціальне рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (21)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $\Phi = \Phi(x, y)$ , тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy.$$

Загальний інтеграл рівняння (21) має вигляд

$$\Phi(x, y) = C,$$

де  $C$  – довільна стала з множини значень  $\Phi$ .

Для того, щоб рівняння (21) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (22)$$

якщо функції  $M$ ,  $N$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x}$  неперервні в деякій однозв'язній області  $D$ .

Функцію  $\Phi$  знаходять за формулою:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y N(x, t)dt. \quad (23)$$

Якщо умова (22) не виконується, то в деяких випадках можна звести розглядуване рівняння до рівняння у повних диференціалах домноженням його на так званий *інтегрувальний множник*, який в загальному випадку є функцією від  $x$  і  $y$ :  $\mu = \mu(x, y)$ ,  $\mu \neq 0$ .

Щоб знайти інтегрувальний множник, треба розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Це зробити можна не завжди. В найпростіших випадках можна вважати, що  $\mu = \mu(x)$  або  $\mu = \mu(y)$ .

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

*Розв’язання.* Перевіримо, що дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Маємо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 3xy^2) = 6xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + 3x^2y) = 6xy.$$

Отже,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  в області  $D = \mathbb{R}^2$ , тобто виконується умова (22). Тоді існує така функція  $\Phi = \Phi(x, y)$ , що

$$d\Phi(x, y) = (x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

Залишається знайти загальний інтеграл рівняння  $d\Phi(x, y) = 0$ .

**1-й спосіб.** Покладаючи у формулі (23)  $x_0 = y_0 = 0$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_0^x t^3 dt + \int_0^y (t^3 + 3x^2 t) dt = C \Leftrightarrow \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + \left( \frac{t^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 t^2 \right) \Big|_0^y = C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 y^2 = C. \end{aligned}$$

**2-й спосіб.** Загальний інтеграл даного рівняння має вигляд  $\Phi(x, y) = C$ .

Скориставшись формулою  $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$ , дістанемо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x, y) = x^3 + 3xy^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x, y) = y^3 + 3x^2y.$$

Тоді

$$\Phi(x, y) = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \psi(y) = \int (x^3 + 3xy^2) dx + \psi(y) = \frac{x^4}{4} + 3y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \psi(y).$$

Для визначення функції  $\psi(y)$  обчислимо  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  і використаємо умову

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x, y). \text{ Маємо}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^2y + \psi'(y) = y^3 + 3x^2y \Rightarrow \psi'(y) = y^3 \Leftrightarrow \psi(y) = \frac{y^4}{4} + \text{const}.$$

Отже, можна взяти

$$\Phi(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4},$$

і загальний інтеграл даного рівняння має вигляд

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C.$$

**3-й спосіб.** Дане рівняння неважко звести до вигляду  $d\Phi(x, y) = 0$  безпосереднім групуванням його членів:

$$x^3 dx + 3xy(y dx + x dy) + y^3 dy = 0.$$

Помітивши, що

$$x^3 dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \quad 3xy(y dx + x dy) = 3xy d(xy) = d\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right),$$

$$y^3 dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right),$$

запишемо дане рівняння у вигляді

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = d\left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}\right) = 0,$$

звідки дістаємо його загальний інтеграл

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C.$$

□

**Приклад 2.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^2 \cos(x + y) + y) dx + (x^2 \cos(x + y) - x) dy = 0.$$

*Розв'язання.* Умова (22) не виконується. Обчислимо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x}.$$

Таким чином, можна взяти інтегрувальний множник у вигляді  $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ . Після множення на нього вихідне рівняння набуває вигляду

$$\left( \cos(x+y) + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left( \cos(x+y) - \frac{1}{x} \right) dy = 0. \quad (24)$$

Тепер умова (22) буде виконуватись, тобто ми одержали рівняння в повних диференціалах, і подальше розв'язання можна здійснити аналогічно до прикладу 1. Рівнянню (24) можна також надати вигляду

$$\cos(x+y)(dx+dy) + \frac{y dx - x dy}{x^2} = 0,$$

із якого легко бачити, що ліва частина рівняння (24) є диференціалом функції  $\sin(x+y) - \frac{y}{x}$ .

Зауважимо ще, що при множенні вихідного рівняння на інтегрувальний множник втрачається розв'язок  $x=0$ .

Таким чином, розв'язок вихідного рівняння

$$\sin(x+y) - \frac{y}{x} = C, \quad x \neq 0. \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$(\operatorname{tg}(x+y) + x) dx + x dy = 0.$$

*Розв'язання.* Умова (22) не виконується. Обчислимо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = -\operatorname{tg}(x+y).$$

Тоді

$$\omega(t) = a e^{-\int \operatorname{tg} t dt} = a |\cos t|, \quad t = x+y,$$

звідки  $\mu = \cos(x+y)$ . Помноживши на цей інтегрувальний множник вихідне рівняння, приходимо до рівносильного рівняння в повних диференціалах

$$(\sin(x+y) + x \cos(x+y)) dx + x \cos(x+y) dy = 0.$$

Подальше розв'язання здійснюється аналогічно до прикладу 1.

Таким чином, загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$x \sin(x + y) = C.$$

□

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0.$$

*Розв’язання.* Умова (22) не виконується. Представимо ліву частину рівняння у вигляді суми двох доданків

$$(xy dx + x^2 dy) + (y^4 dx - xy^3 dy) \equiv A + B,$$

для кожного з яких легко знайти інтегрувальний множник (можливо, просто безпосередньо побачити). В даному випадку для виразу  $A = xy dx + x^2 dy$  інтегрувальним множником є, очевидно,  $\mu_1 = \frac{1}{x}$  і  $\frac{1}{x} A = y dx + x dy = du_1$ , де  $u_1 = xy$ .

Для виразу  $B = y^4 dx - xy^3 dy$  інтегрувальним множником є  $\mu_2 = \frac{1}{y^5}$  і  $\frac{1}{y^5} B = \frac{y dx - x dy}{y^2} = du_2$ , де  $u_2 = \frac{x}{y}$ .

Щоб розв’язати задане рівняння, треба знайти однаковий множник  $\mu_{\text{заг}}$  для  $A$  і  $B$ . Для цього використаємо формулу  $\mu^* = \mu \psi(U)$ , де  $\psi$  – деяка диференційовна функція від  $U$ , і запишемо рівність

$$\mu_{\text{заг}} = \frac{1}{x} f(xy) = \frac{1}{y^5} \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Виражаючи  $x$  і  $y$  через  $u_1$  і  $u_2$ , маємо звідси

$$u_1^2 f(u_1) = u_2^3 \varphi(u_2).$$

Це рівняння легко задовольнити, поклавши

$$f(u_1) = \frac{1}{u_1^2}, \quad \varphi(u_2) = \frac{1}{u_2^3}.$$

Тоді  $\mu_{\text{заг}} = \frac{1}{x} \frac{1}{u_1^2} = \frac{1}{y^5} \frac{1}{u_2^3}$ . При множенні на цей множник вихідне рівняння перейде в рівняння

$$\frac{1}{u_1^2} du_1 + \frac{1}{u_2^3} du_2 = 0.$$

Таким чином,  $-\frac{1}{u_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u_2^2} = C_1$  і тому  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} = C$ . Розв'язками є також  $y = 0$  і  $x = 0$ , які були втрачені при діленні на  $x$  і  $y$ .  $\square$

### Задачі для самостійного розв'язування

I. Розв'язати диференціальні рівняння:

1.  $(x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy = 0$ .

2.  $(2xy + 3y^2) dx + (x^2 + 6xy - 3y^2) dy = 0$ .

3.  $(x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x) \frac{dy}{dx} + y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = 0$ .

4.  $(x^2 - 2y) dx - x dy = 0$ .

5.  $y(1 + xy) dx - x dy = 0$ .

6.  $(x^5 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$ .

7.  $(\sqrt{x^2 - y} + 2x) dx - dy = 0$ ,  $\mu = \mu(x^2 - y)$ .

II. Визначити форму дзеркала, коли відомо, що воно відбиває всі промені, які виходять із даної точки, паралельно даному напрямку.

### 1.5. Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них

1. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (25)$$

де  $a(x)$ ,  $b(x)$  – неперервні функції від  $x$  на деякому проміжку. При  $b(x) \neq 0$  рівняння (25) називається *лінійним неоднорідним*. Якщо  $b(x) \equiv 0$ , то рівняння (25) називається *лінійним однорідним*. Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Для того, щоб розв'язати неоднорідне рівняння (25) можна використати *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)*:

1) розв'язати відповідне однорідне рівняння, тобто рівняння

$$y' = a(x)y$$

(його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = Ce^{\int a(x) dx};$$

2) записати загальний розв'язок рівняння (25) у вигляді

$$y(x) = C(x)e^{\int a(x) dx}, \quad (26)$$

де  $C(x)$  – нова невідома функція;

3) знайти функцію  $C(x)$ , підставивши для цього розв’язок (26) в рівняння (25).

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку можна інтегрувати також *методом Бернуллі*, який полягає в наступному.

1) Записати розв’язок рівняння (25) у вигляді

$$y = uv, \quad (27)$$

де  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – невідомі функції, причому одна з цих функцій (наприклад,  $v$ ) довільна (але не дорівнює тотожно нулеві);

2) в якості  $v$  прийняти довільний частинний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$v' = a(x)v,$$

наприклад,

$$v(x) = e^{\int a(x) dx}; \quad (28)$$

3) знайти функцію  $u$ , підставивши для цього розв’язок (27) з урахуванням (28) в рівняння (25);

4) записати розв’язок рівняння (25), помноживши  $u$  на  $v$ .

**2. Диференціальне рівняння вигляду**

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad (29)$$

де  $a(x)$  і  $b(x)$  – неперервні функції від  $x$  на деякому проміжку,  $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , називається *рівнянням Бернуллі*. При  $\alpha = 0$  і  $\alpha = 1$  це рівняння є лінійним.

Для того, щоб розв’язати рівняння Бернуллі, треба звести його до лінійного рівняння, поділивши обидві частини на  $y^\alpha$  і зробивши заміну  $z = y^{1-\alpha}$ .

При  $\alpha > 0$  розв’язком рівняння (29) буде також функція  $y = 0$ .

Рівняння (29), як і лінійне рівняння, можна розв’язувати методом Лагранжа або методом Бернуллі.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + r(x), \quad (30)$$

де  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $r(x)$  – неперервні функції від  $x$  на деякому проміжку, називається *рівнянням Ріккаті*. Коли  $b(x) \equiv 0$ , рівняння (30) стає лінійним, а у разі  $r(x) \equiv 0$  – рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (30) не інтегрується в квадратурах. Якщо відомий частинний розв’язок  $y_1 = y_1(x)$  рівняння (30), то заміною  $y = y_1 + z$  рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

**Приклади розв’язування типових задач****Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x}.$$

*Розв’язання.* Розв’яжемо дане рівняння методом варіації довільної сталої.

1) Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

має вигляд

$$y = Ce^{\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}} = Ce^{\sqrt{x}}.$$

2) Загальний розв’язок вихідного рівняння відповідно до формули (26) запишеться у вигляді

$$y = C(x)e^{\sqrt{x}}. \quad (31)$$

3) Підставивши цей розв’язок у вихідне рівняння, одержимо

$$C'(x)e^{\sqrt{x}} + \frac{C(x)e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{C(x)e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\cos^2 x},$$

Звідки

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Підставляючи знайдену функцію  $C(x)$  в розв’язок (31), остаточно одержуємо загальний розв’язок вихідного рівняння

$$y = (\operatorname{tg} x + C_1)e^{\sqrt{x}}. \quad \square$$

**Приклад 2.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

*Розв’язання.* Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну  $z = y^{-2}$ . Тоді рівняння стане лінійним:

$$-\frac{x}{2}z' + 2z + x^5 e^x = 0. \quad (32)$$

Знайдемо його загальний розв’язок методом Бернуллі.

1) Запишемо розв’язок рівняння (32) у вигляді  $z = uv$ , де функція  $v$  – довільна (але не дорівнює тотожно нулеві);



2) в якості  $v$  приймемо довільний частинний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$v' = \frac{4}{x} v,$$

наприклад,

$$v(x) = e^{\int \frac{4}{x} dx} = x^4; \quad (33)$$

3) знайдемо функцію  $u$ , підставивши для цього розв’язок  $z = uv$  з урахуванням (33) в рівняння (32):

$$-\frac{x}{2}(u'x^4 + 4ux^3) + 2ux^4 + x^5 e^x = 0, \quad u = 2e^x + C;$$

4) запишемо розв’язок рівняння (32), помноживши  $u$  на  $v$ .

$$z = (2e^x + C)x^4.$$

Звідси  $y^2 = \frac{1}{(C + 2e^x)x^4}$ . Тут втрачений розв’язок  $y = 0$  (так як  $\alpha = 3 > 0$ ), його треба дописати додатково.

Отже, розв’язок вихідного рівняння має вигляд

$$y^2 = \frac{1}{(C + 2e^x)x^4}, \quad y = 0. \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y^3 dx + (1 - xy) dy = 0.$$

*Розв’язання.* Розв’яжемо дане рівняння методом варіації довільної сталої. Надамо рівнянню вигляду

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0$$

(при цьому втрачається розв’язок  $y = 0$ ). Одержимо лінійне рівняння відносно невідомої функції  $x = x(y)$ . Для відповідного однорідного рівняння

$$x = Ce^{\int \frac{dy}{y^2}} = Ce^{-\frac{1}{y}}.$$

Розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді  $x = C(y)e^{-\frac{1}{y}}$  аналогічно до прикладу 1. Після підстановки цього виразу в рівняння одержуємо  $C'(y) = -e^{\frac{1}{y}} / y^3$ , звідки

$$C(y) = -\int \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y^3} dy = e^{\frac{1}{y}} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) + C_1.$$

Отже, розв’язок рівняння має вигляд

$$x = \frac{1}{y} - 1 + C_1 e^{-\frac{1}{y}}, \quad y = 0. \quad \square$$

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$(2xy^2 - y)dx + xdy = 0.$$

*Розв’язання.* Якщо  $y$  вибрати в якості функції, а  $x$  – в якості незалежної змінної, то одержимо рівняння Бернуллі

$$xy' = y - 2xy^2.$$

Вводячи  $z = y^{-1}$ , приходимо до лінійного рівняння, розв’язуючи яке одержимо

$$z = \frac{C}{x} + x \quad \text{або} \quad x = (x^2 + C)y.$$

Сюди слід дописати втрачений розв’язок  $y = 0$ . Крім того, прийнявши  $y$  за функцію, ми втратили розв’язок  $x = 0$ , що задовольняє вихідне рівняння, в якому  $x$  і  $y$  рівноправні. Отже, остаточно маємо

$$x = (x^2 + C)y, \quad y = 0, \quad x = 0. \quad \square$$

**Приклад 5.** Розв’язати рівняння Ріккаті

$$y' + \frac{2y}{x} + 3y^2 = \frac{52}{x^2}.$$

*Розв’язання.* При підборі частинного розв’язку слід орієнтуватися на вигляд вільного члена і коефіцієнтів рівняння. Якщо шукати частинний розв’язок у вигляді  $y_1 = \frac{k}{x}$ , то одержимо

$$-\frac{k}{x^2} + \frac{2k}{x^2} + \frac{3k^2}{x^2} = \frac{52}{x^2}.$$

Це приводить для знаходження числа  $k$  до квадратного рівняння  $3k^2 + k - 52 = 0$ , що має корені  $k_1 = 4$  і  $k_2 = -\frac{13}{3}$ . Таким чином, вихідне рівняння має частинні розв’язки  $y_1 = \frac{4}{x}$ ,  $y_2 = -\frac{13}{3x}$ . Залишаємо, наприклад, пер-

ший із цих частинних розв’язків (другий відкидаємо). Після заміни  $y = \frac{4}{x} + z$  вихідне рівняння зводиться до рівняння Бернуллі

$$z' + \frac{26z}{x} + 3z^2 = 0.$$

Розв’язуючи рівняння Бернуллі аналогічно до прикладу 2, одержимо

$$\frac{1}{z} = -\frac{3x}{25} + Cx^{26}, \quad z = 0.$$

Роблячи обернену заміну  $z = y - \frac{4}{x}$  і нескладні перетворення, одержимо розв’язок вихідного рівняння:

$$y = \frac{100Cx^{25} + 13}{25Cx^{26} - 3x} = \frac{4C_1x^{25} + 13}{C_1x^{26} - 3x}, \quad y = \frac{4}{x}. \quad \square$$

**Приклад 6.** Конденсатор ємністю  $c$  включається в електричне коло з напругою  $E$  і опором  $R$ . Визначити заряд  $q$  конденсатора в момент  $t$  після включення.

*Розв’язання.* В момент  $t$  заряд конденсатора  $q$ , сила струму  $i = \frac{dq}{dt}$ , в колі діє електрорушійна сила  $V$ , яка дорівнює різниці між напругою  $E$  кола і напругою конденсатора  $\frac{q}{c}$ , тобто

$$V = E - \frac{q}{c}.$$

За законом Ома сила струму  $i = \frac{V}{R}$  або

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E - \frac{q}{c}}{R}.$$

Тоді диференціальне рівняння процесу має вигляд

$$R \frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{c}. \quad (34)$$

Зведемо рівняння (34) до вигляду (25), поділивши обидві його частини на  $R \neq 0$ . Дістанемо:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} - \frac{q}{cR}. \quad (35)$$

1) Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{cR}$$

має вигляд

$$q = Ce^{-\frac{t}{cR}}.$$

2) Загальний розв’язок рівняння (35) відповідно до формули (26) запишеться у вигляді

$$q = C(t)e^{-\frac{t}{cR}}. \quad (36)$$

3) Підставивши розв’язок (36) в рівняння (35), одержимо функцію  $C(t)$ :

$$C(t) = cEe^{\frac{t}{cR}} - C_1.$$

Підставляючи знайдену функцію  $C(t)$  в розв’язок (36), остаточно одержуємо загальний розв’язок вихідного рівняння

$$q = cE - C_1e^{-\frac{t}{cR}}.$$

Враховуючи початкові умови, при  $t = 0$ ,  $q = 0$ , маємо

$$0 = cE - C_1e^{\frac{0}{cR}}$$

або

$$C_1 = cE.$$

Таким чином, закон даного процесу описується рівністю

$$q = cE \left( 1 - e^{-\frac{t}{cR}} \right).$$

□

### Задачі для самостійного розв’язування

I. Розв’язати диференціальні рівняння:

1.  $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4.$

2.  $xy' - 2y = 2x^4.$

3.  $x^2y^2y' + xy^3 = 1.$

4.  $\frac{dy}{dx}x^3 \sin y + 2y = x \frac{dy}{dx}.$

$$5. y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x, \quad y_1(x) = e^x.$$

II. Розв'язати задачі Коші:

$$1. y dx - (3x + 1 + \ln y) dy = 0, \quad y\left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$$

$$2. (x+1)(2yy' - 1) = y^2, \quad y(0) = 0.$$

III.1. Крива  $y = y(x)$  проходить через точку  $A(a, a)$  і має таку властивість: якщо в будь-якій точці  $M(x, y)$  кривої з ординатою  $|BM|$  (рис. 5) провести дотичну до перетину з віссю ординат у точці  $C$ , то площа трапеції  $OCMB$  є сталою і дорівнює  $a^2$ . Скласти рівняння цієї кривої.

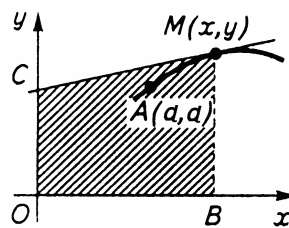


Рис. 5

2. Знайти рівняння руху важкої матеріальної точки в середовищі з опором.

### 1.6. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \quad (37)$$

називається *рівнянням, не розв'язаним відносно похідної*.

Рівняння (37) бажано розв'язати відносно  $y'$ . Одержимо сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y), \\ \dots\dots\dots \\ y' = f_k(x, y), \end{cases}$$

де  $k \geq 1$ . Кожне з цих рівнянь треба розв'язати.

Проте рівняння (37) не завжди можна розв'язати відносно  $y'$  в явному вигляді. На практиці його найчастіше розв'язують *методом введення параметра*.

Припустимо, що рівняння (37) можна розв'язати відносно  $x$  або  $y$ , тобто записати його у вигляді

$$y = g(x, y') \quad (\text{або } x = h(y, y')).$$

Тоді розв’язок рівняння (37) шукаємо в параметричному вигляді, де параметром є похідна  $y'$ :

$$p = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Тоді

$$y = g(x, p) \quad (\text{або } x = h(y, p)). \quad (38)$$

Взявши повний диференціал від обох частин рівності (38) і замінивши праві частини отриманих рівностей відповідно до формули

$$dy = p dx \quad \left( \text{або } dx = \frac{dy}{p} \right),$$

одержимо рівняння, яке можна розв’язати відносно похідної  $\frac{dx}{dp}$   $\left( \text{або } \frac{dy}{dp} \right)$ .

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$\Phi(x, p, C) = 0 \quad (\text{або } \Psi(y, p, C) = 0).$$

Тоді загальний розв’язок рівняння (37) матиме вигляд

$$\begin{cases} y = g(x, p), \\ \Phi(x, p, C) = 0 \end{cases} \quad \left( \text{або } \begin{cases} x = h(y, p), \\ \Psi(y, p, C) = 0 \end{cases} \right).$$

Розв’язок  $y = y(x)$  рівняння (37) називається *особливим розв’язком*, якщо через кожную точку його графіка проходить графік ще одного розв’язку рівняння (37), який має в цій точці ту саму дотичну, що і розв’язок  $y = y(x)$ , але не збігається з ним у як завгодно малому околі цієї точки, тобто якщо в кожній точці розв’язку порушується властивість єдиності розв’язку задачі Коші.

Якщо функції  $F$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  – неперервні, то розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

може бути особливим розв’язком рівняння (37).

*Рівнянням Лагранжа* називається диференціальне рівняння першого порядку, лінійне відносно  $x$  та  $y$ :

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

де  $\varphi(y')$ ,  $\psi(y')$  – задані диференційовні функції.

Розв’язується рівняння Лагранжа методом введення параметра. За цим методом, покладаючи  $y' = p$ , зводимо це рівняння до лінійного відносно функції  $x = x(p)$ . Якщо загальний розв’язок цього останнього рівняння має вигляд  $x = F(p, C)$ , то загальний розв’язок вихідного рівняння Лагранжа запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = F(p, C), \\ y = F(p, C)\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

За умови, що рівняння  $\varphi(p) - p = 0$  має дійсні корені  $p = p_i$ , до розв’язку слід приєднати ще розв’язки вигляду

$$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Якщо ці розв’язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливими розв’язками.

Якщо  $\varphi(p) - p \equiv 0$ , то  $\varphi(y') \equiv y'$ . У цьому випадку маємо рівняння Клеро

$$y = xy' + \psi(y'). \quad (40)$$

Використовуючи метод введення параметра, одержуємо рівність

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Якщо  $dp = 0$ , то  $p = C$  і загальним розв’язком рівняння (40) є

$$y = Cx + \psi(C) \quad (41)$$

(тобто загальний розв’язок рівняння Клеро одержуємо заміною в ньому  $y'$  на  $C$ ).

Якщо  $x + \psi'(p) = 0$  і  $p = \alpha(x)$  – розв’язок цього рівняння, то одержимо ще один розв’язок рівняння (40)

$$y = x\alpha(x) + \psi(\alpha(x)), \quad (42)$$

який є особливим.

Особливий розв’язок рівняння Клеро є обвідною сім’ї прямих, визначених загальним розв’язком (тобто загальним розв’язком рівняння Клеро є сім’я дотичних до особливого розв’язку).

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$x = \sin y' + \cos y'.$$

*Розв’язання.* Запишемо рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} y' = p, \\ x = \sin p + \cos p. \end{cases}$$

Далі одержимо

$$dy = y' dx = p(\cos p - \sin p) dp,$$

$$y = \int p(\cos p - \sin p) dp = p(\sin p + \cos p) + \cos p - \sin p + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\begin{cases} x = \sin p + \cos p, \\ y = p(\sin p + \cos p) + \cos p - \sin p + C. \end{cases}$$

□

**Приклад 2.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y \ln y' - xy' = 0.$$

*Розв'язання.* Розв'яжемо рівняння відносно  $x$

$$x = \frac{y \ln y'}{y'}$$

і запишемо його з допомогою параметра

$$\begin{cases} y' = p, \\ x = \frac{y \ln p}{p}. \end{cases}$$

Тоді

$$(\ln p - 1)dy + y \frac{1 - \ln p}{p} dp = 0.$$

Після скорочення на  $\ln p - 1$  (що приводить до втрати розв'язку  $y = ex$ ) одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$dy - \frac{y}{p} dp = 0,$$

що має розв'язок  $y = Cp$ . Таким чином, за допомогою параметра розв'язок вихідного рівняння може бути записаний у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{y \ln p}{p}, \\ y = Cp. \end{cases}$$

Тут можна виключити параметр  $p$ :

$$p = \frac{y}{C}, \quad x = C \ln \left( \frac{y}{C} \right).$$

Таким чином, розв'язок вихідного рівняння має вигляд



$$x = C \ln\left(\frac{y}{C}\right), \quad y = ex. \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y = 2xy' - y'^3.$$

*Розв’язання.* Задане рівняння є рівнянням Лагранжа. Введемо параметр  $p = y'$ , тоді

$$y = 2xp - p^3. \quad (43)$$

Диференціюючи, отримуємо:

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - 3p^2 \frac{dp}{dx}$$

або

$$\frac{dp}{dx}(-2x + 3p^2) = p \quad (44)$$

і після ділення на  $\frac{dp}{dx}$  дістанемо рівняння:

$$p \frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Інтегруючи це лінійне рівняння, маємо

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}p^2.$$

Отже, загальний розв’язок вихідного рівняння Лагранжа має вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}p^2, \\ y = \frac{2C}{p} + \frac{1}{2}p^3. \end{cases}$$

При діленні на  $\frac{dp}{dx}$  губимо розв’язок  $p = 0$  рівняння (44), якому згідно з рівнянням (43) відповідає розв’язок  $y = 0$  вихідного рівняння.  $\square$

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y = xy' + (y')^2.$$

*Розв’язання.* Задане рівняння є рівнянням Клеро. Загальним розв’язком даного рівняння за формулою (41) є

$$y = xC + C^2.$$

Якщо  $x + 2p = 0$ , то  $p = -\frac{x}{2}$ . Тоді за формулою (42) одержимо ще один розв’язок (особливий розв’язок) вихідного рівняння  $y = -\frac{x^2}{4}$ .

Отже, розв’язком вихідного рівняння є

$$y = xC + C^2, \quad y = -\frac{x^2}{4}.$$

□

**Приклад 5.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'^2((x-y)^2 - 1) - 2y' + ((x-y)^2 - 1) = 0.$$

*Розв’язання.* Маємо

$$y - x = \pm \frac{y' + 1}{\sqrt{y'^2 + 1}},$$

звідки  $p \, dx - dx = \pm \frac{d}{dp} \frac{p+1}{\sqrt{p^2+1}} dp$ , тобто

$$dx(p-1) = \pm \frac{1-p}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} dp,$$

звідки

$$\text{а) } p = 1, y = x \pm \sqrt{2}, \quad \text{б) } dx = \mp \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Квадратуру в б) зручно провести заміною  $p = \operatorname{tg} t$ . Тоді

$$dx = \mp \cos t \, dt, \quad x - C = \mp \sin t,$$

$$y = C \mp \sin t \pm \frac{\operatorname{tg} t + 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = C \mp \sin t \pm \cos t(\operatorname{tg} t + 1) = C \pm \cos t.$$

Таким чином, загальний розв’язок має вигляд

$$(y - C)^2 + (x - C)^2 = 1.$$

Одержані в а) функції теж є розв’язками, які не входять в загальний розв’язок. □

### Задачі для самостійного розв’язування

**I.** Розв’язати диференціальні рівняння:

1.  $x = \frac{1 + y'}{1 + y'^3}.$

2.  $yy'^2 + 2xy' - y = 0.$

3.  $y'^3 - y + x = 0.$

4.  $y'^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0.$

5.  $y' + y = xy'^2.$

6.  $y = 2xy' + \ln y'.$

7.  $\sqrt{y'^2 + 1} + xy' - y = 0.$

8.  $y' = \ln(xy' - y).$

**II. 1.** Знайти криву, в кожній точці якої відрізок дотичної між осями координат, має сталу довжину, що дорівнює  $a$ .

**2.** Скласти рівняння сім'ї кривих, які перетинають еліпси

$$3x^2 + y^2 = C$$

під кутом  $45^\circ$ .

## ТЕМА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

### 2.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (45)$$

Розв'язком рівняння (45) називається  $n$  разів диференційовна функція  $y = \varphi(x)$ , яка перетворює дане рівняння в тотожність.

Задача Коші для рівняння (45) полягає в тому, щоб знайти розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  – задана точка з області  $D$ .

Загальним розв'язком диференціального рівняння (45) називається функція  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , яка при відповідному виборі довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  є розв'язком довільної задачі Коші для рівняння (45).

Частинним розв'язком диференціального рівняння (45) називається розв'язок, одержаний із загального при конкретних значеннях сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Загальним інтегралом диференціального рівняння (45) називається рівність

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

яка неявно задає загальний розв'язок диференціального рівняння (45).

Якщо рівняння (45) можна розв'язати відносно  $n$ -ої похідної, то воно може бути записане у вигляді  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ .

### 2.2. Диференціальні рівняння, які дають змогу знизити їхній порядок

Розглянемо диференціальне рівняння  $n$ -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 2. \quad (46)$$

Щоб розв'язати таке рівняння треба доти знижувати його порядок, доки не отримаємо рівняння першого порядку, методи інтегрування якого ми вже розглянули.

Наведемо деякі з видів рівняння (46), що допускають зниження порядку:

1) якщо рівняння (46) не містить шуканої функції та кількох її послідовних похідних, тобто

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n,$$

то його порядок можна знизити до  $(n - k)$  заміною  $y^{(k)} = u(x)$ ;

2) якщо рівняння (46) не містить явно незалежної змінної  $x$ , тобто

$$F(y, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leq k < n,$$

то його порядок можна знизити до  $(n - k)$  заміною  $y^{(k)} = u(y)$ .

Зауважимо, що при такій заміні можна втратити розв’язки типу  $y = \text{const}$ ;

3) якщо рівняння (46) однорідне відносно  $y$  і його похідних ( $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ ), то його порядок можна знизити на одиницю заміною  $y' = uy(x)$ .

Узагальнено-однорідним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається рівняння (46), якщо існує таке число  $\alpha$ , при якому виконується рівність

$$F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1} y', t^{\alpha-2} y'', \dots, t^{\alpha-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}). \quad (47)$$

Заміною змінних

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = u(t)e^{\alpha t} \end{cases} \text{ при } x > 0 \quad \left( \text{або} \quad \begin{cases} x = -e^t, \\ y = u(t)e^{\alpha t} \end{cases} \text{ при } x < 0 \right)$$

рівняння (47) зводиться до рівняння, яке явно не містить незалежної змінної  $t$ . Його порядок можна знизити на одиницю заміною  $u' = v(u)$ .

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку називається диференціальне рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (48)$$

Його порядок можна знизити заміною  $y(x) = y_1(x) \int u(x) dx$ , де  $y_1(x)$  – який-небудь ненульовий частинний розв’язок рівняння (48), який іноді можна знайти у вигляді функції заданого вигляду, наприклад,

$$y_1(x) = e^{ax} \text{ або } y_1(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0, \quad (49)$$

де  $a, m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$  – сталі, які знаходять внаслідок підстановки (49) в (48).

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' = y'^2.$$

*Розв’язання.*

**1-й спосіб.** Це рівняння не містить  $y$ , тому заміною  $y' = u, u = u(x)$  воно зводиться до рівняння  $u' = u^2$ , рівносильного до сукупності рівнянь  $u = 0$  і  $\frac{du}{u^2} = dx$ . Із останнього знаходимо  $u = \frac{1}{C_1 - x}$ .

Так як  $u = \frac{dy}{dx}$ , то, інтегруючи знайдені співвідношення, одержуємо для  $y(x)$ :

$$y = C, \quad y = C_2 - \ln(C_1 - x). \quad (50)$$

**2-й спосіб.** Рівняння  $y'' = y'^2$  відноситься також до типу, що не містить явно незалежну змінну  $x$ . Тому порядок рівняння понижується на одиницю заміною  $y' = p$ , де  $p = p(y)$  – нова невідома функція. Дійсно,

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} p$$

і дане рівняння зводиться до рівняння першого порядку

$$\frac{dp}{dy} p = p^2,$$

рівносильного сукупності рівнянь  $p = 0, \frac{dp}{p} = dy$ . Із останнього знаходимо  $C_1 p = e^y$ .

Повертаючись до функції  $y(x)$ , одержуємо  $y' = 0$ , а також рівняння з відокремлюваними змінними

$$C_1 \frac{dy}{dx} = e^y.$$

Інтегруючи ці рівняння, знаходимо для  $y(x)$ :

$$y = C, \quad y = \ln C_1 - \ln(C_2 - x). \quad (51)$$

Результати (50) і (51) співпадають з точністю до позначень довільних сталих.  $\square$

**Приклад 2.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$yy'' = y'^2 + yy' + y^2 e^x.$$

*Розв'язання.* Тут відповідна функція

$$F(x, y, y', y'') = yy'' - y'^2 - yy' - y^2 e^x$$

є однорідною другого степеня відносно  $y, y', y''$ . Зробимо заміну  $y' = yz$ , при цьому  $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ :

$$y^2(z^2 + z') = y^2 z^2 + y^2 z + y^2 e^x, \quad z' = z + e^x.$$

Розв'язуючи одержане лінійне рівняння першого порядку, одержуємо  $z = e^x(x + C_1)$ . Повертаючись до вихідної змінної, приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними  $y' = ye^x(x + C_1)$ , що має розв'язок  $y = C_2 e^{e^x(x+C)}$  ( $C = C_1 - 1$ ).  $\square$

**Приклад 3.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 3(y')^3 \sin^2 y \cos y = 0.$$

*Розв'язання.* Підставляючи  $y' = z$ ,  $y'' = z'z$ , одержимо для знаходження функції  $z = z(y)$  рівняння першого порядку:

$$z' + 3z^2 \sin^2 y \cos y = 0$$

(при цьому скорочення на  $z$  приводить до втрати розв'язків  $y = C$ ). Одержане рівняння є нескладне рівняння з відокремлюваними змінними. Його розв'язок дається формулою  $\frac{1}{z} = \sin^3 y + C_1$ . Повертаючись до вихідної функції за формулою  $z = y'$ , одержимо ще одне нескладне рівняння з відокремлюваними змінними  $\frac{dx}{dy} = \sin^3 y + C_1$ .

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$x = \frac{\cos^3 y}{3} - \cos y + C_1 y + C_2, \quad y = C. \quad \square$$

**Приклад 4.** Куля входить в дошку товщиною 10 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, зі швидкістю 50 м/с. Знайти, скільки часу продовжувався рух кулі через дошку, якщо опір дошки руху кулі пропорційний квадрату її швидкості.

*Розв'язання.* Нехай  $m$  – маса кулі,  $s$  – шлях, пройдений нею за час  $t$ , що відраховується від моменту входу її в дошку. Тоді диференціальне рівняння руху кулі через дошку має вигляд

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \text{або} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -a \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \quad \text{де } a = \frac{k}{m}.$$

Одержане диференціальне рівняння другого порядку не містить функції  $s$ , тому покладаючи  $\frac{ds}{dt} = v$ , одержимо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$\frac{dv}{dt} = -av^2,$$

інтегруючи яке, знайдемо

$$v = \frac{1}{at + C_1}.$$

По початковій умові  $v = 200$  (м/с) при  $t = 0$  (с) визначимо сталу  $C_1$ :

$$200 = \frac{1}{C_1}, \quad C_1 = \frac{1}{200}.$$

Таким чином, залежність швидкості руху кулі через дошку від часу буде

$$v = \frac{200}{1 + 200at}. \quad (52)$$

Покладаючи в останньому рівнянні  $v = \frac{ds}{dt}$ , відокремлюючи змінні і інтегруючи, одержимо

$$ds = \frac{200 dt}{1 + 200at}, \quad s = \frac{1}{a} \ln(1 + 200at) + C_2.$$

Із умови  $s = 0$  (м) при  $t = 0$  (с) випливає, що  $C_2 = 0$ .

Таким чином, залежність відстані, яку проходить куля в дошці, від часу має вигляд

$$s = \frac{1}{a} \ln(1 + 200at). \quad (53)$$

Покладаючи  $v = 50$  (м/с) в рівності (52) і  $s = 0,1$  (м) в рівності (53), одержимо систему рівнянь з невідомими  $t$  і  $a$ :

$$\begin{cases} 50 = \frac{200}{1 + 200at}, \\ 0,1 = \frac{1}{a} \ln(1 + 200at). \end{cases}$$

Із системи знайдемо

$$a = 10 \ln 4.$$

Підставляючи значення  $a$  в перше рівняння розв’язуваної системи, визначаємо з нього шуканий час польоту кулі через дошку

$$t = \frac{3}{2000 \ln 4} \approx 0,001(\text{с}).$$

□



### Задачі для самостійного розв’язування

#### I. Розв’язати диференціальні рівняння:

1.  $y''' + 3y'' - x = 0$ .

2.  $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$ .

3.  $y''(1 + 2\ln y') = 1$ .

4.  $y'' + 2y' = e^x y'^2$ .

5.  $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ .

6.  $x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1))xy' - \alpha\beta y = 0$ ,  $\gamma \neq \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$ .

#### II. Розв’язати задачі Коші:

1.  $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$ ,  $y(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ ,  $y''(1) = -1$ .

2.  $4y''\sqrt{y} = 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ .

**III.1.** Труба для стоку води виходить із стіни на довжину  $l$  (рис. 6). Внутрішній діаметр труби  $d = 16$  см. Товщина стінки дорівнює 2 см. Чому повинна дорівнювати довжина  $l$ , щоб прогин на кінці труби  $h = 0,5$  см? Густина сталі  $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; модуль пружності  $E = 20 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Густина води  $1,0 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

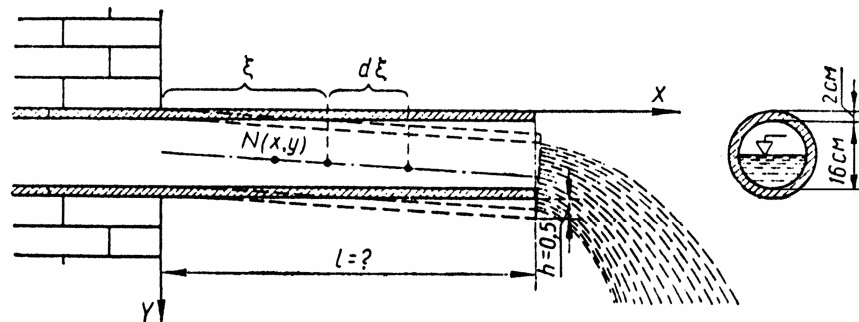


Рис. 6

2. Матеріальна точка масою  $m$  рухається вздовж осі  $Ox$  під дією відштовхувальної сили, обернено пропорційної кубу відстані від цієї точки до початку координат. Знайти закон  $x = x(t)$  руху точки, якщо  $k > 0$  – коефіцієнт пропорційності,  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = 0$ .

### 2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Однорідні рівняння Ейлера

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (54)$$

де  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – сталі. Для отримання частинних розв’язків рівняння (54) складають *характеристичне рівняння* для (54)

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0, \quad (55)$$

яке одержується з рівняння (54) заміною в ньому похідних шуканої функції відповідними степенями  $k$ .

Вигляд загального розв’язку рівняння (54) визначається виглядом коренів характеристичного рівняння (55) і їх кратністю.

Фундаментальну систему розв’язків рівняння (54) утворюють  $n$  частинних розв’язків  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , що відповідають всім кореням характеристичного рівняння (55) з урахуванням їх кратності.

Нехай коефіцієнти  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  рівняння (54) дійсні.

Тоді дійсному кореню характеристичного рівняння (55)  $k_j$  кратності  $m_j \geq 1$  відповідають  $m_j$  дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків

$$e^{k_j x}, x e^{k_j x}, \dots, x^{m_j-1} e^{k_j x}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

рівняння (54), а комплексно-спряженій парі коренів характеристичного рівняння (55)  $k_{l,2} = \alpha_l \pm i\beta_l$  з однаковою кратністю  $\mu_l \geq 1$  відповідають  $2\mu_l$  дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків

$$\begin{aligned} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, \dots, x^{\mu_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & \quad l = 1, 2, \dots, s, \\ e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, \dots, x^{\mu_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & \quad l = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

рівняння (54).

Зауважимо, що

$$\sum_{j=1}^r m_j + 2 \sum_{l=1}^s \mu_l = n.$$

Загальний розв’язок рівняння (54) записується у вигляді

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – довільні сталі,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – фундаментальна система розв’язків рівняння (54).

Однорідним рівнянням Ейлера називається рівняння

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0, \quad (56)$$

де  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – сталі. Якщо  $x > 0$ , то зробивши заміну  $x = e^t$  ( $x = -e^t$  при  $x < 0$ ), рівняння (56) зводимо до лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

На практиці частинні розв’язки рівняння (56) зручніше шукати у вигляді  $y = e^{kt} = (e^t)^k = x^k$ . Підставивши цю функцію в рівняння (56) й поділивши обидві частини на  $x^k$ , одержимо характеристичне рівняння для визначення  $k$ :

$$a_n k(k-1) \times \dots \times (k-(n-1)) + a_{n-1} k(k-1) \times \dots \times (k-(n-2)) + \dots + a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0. \quad (57)$$

Вигляд загального розв’язку рівняння (56) визначається виглядом коренів характеристичного рівняння (57) і їх кратністю.

Фундаментальну систему розв’язків рівняння (56) утворюють  $n$  частинних розв’язків  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , що відповідають всім кореням характеристичного рівняння (57) з урахуванням їх кратності.

Нехай коефіцієнти  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  рівняння (56) дійсні.

Тоді дійсному кореню характеристичного рівняння (57)  $k_j$  кратності  $m_j \geq 1$  відповідають  $m_j$  дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків

$$x^{k_j}, x^{k_j} \ln x, \dots, x^{k_j} (\ln x)^{m_j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

рівняння (56), а комплексно-спряженій парі коренів характеристичного рівняння (57)  $k_{l,2} = \alpha_l \pm i\beta_l$  з однаковою кратністю  $\mu_l \geq 1$  відповідають  $2\mu_l$  дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків

$$\begin{aligned} x^{\alpha_l} \cos(\beta_l \ln x), x^{\alpha_l} \ln x \cos(\beta_l \ln x), \dots, x^{\alpha_l} (\ln x)^{\mu_l-1} \cos(\beta_l \ln x), \quad l = \overline{1, s}, \\ x^{\alpha_l} \sin(\beta_l \ln x), x^{\alpha_l} \ln x \sin(\beta_l \ln x), \dots, x^{\alpha_l} (\ln x)^{\mu_l-1} \sin(\beta_l \ln x), \quad l = \overline{1, s} \end{aligned}$$

рівняння (56).

Зауважимо, що

$$\sum_{j=1}^r m_j + 2 \sum_{l=1}^s \mu_l = n.$$

Загальний розв’язок рівняння (56) записується у вигляді

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – довільні сталі,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – фундаментальна система розв’язків рівняння (56).

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

*Розв’язання.* Характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння має вигляд

$$k^3 - 3k + 2 = 0,$$

$$\begin{aligned} k^3 - 3k + 2 &= k^3 - k - 2k + 2 = k(k^2 - 1) - 2(k - 1) = \\ &= (k - 1)(k^2 + k - 2) = (k - 1)^2(k + 2) = 0, \quad (k - 1)^2(k + 2) = 0, \end{aligned}$$

звідки  $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = -2$ . Отже,  $m_{1,2} = 2, m_3 = 1$ .

Таким кореням із врахуванням їх кратності відповідають частинні розв'язки

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x, \quad y_3(x) = e^{-2x}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}.$$

□

**Приклад 2.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{(6)} + 4y^{(5)} + 53y^{(4)} = 0.$$

*Розв'язання.* Характеристичному рівнянню

$$k^6 + 4k^5 + 53k^4 = 0$$

надамо вигляду

$$k^4(k + 2 - 7i)(k + 2 + 7i) = 0.$$

Дійсний корінь 0 має кратність 4, а пара  $-2 \pm 7i$  комплексно-спряжених коренів має кратність 1, тому фундаментальну систему розв'язків утворюють функції

$$1, x, x^2, x^3; e^{-2x} \cos 7x, e^{-2x} \sin 7x.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-2x}(C_5 \cos 7x + C_6 \sin 7x).$$

□

**Приклад 3.** Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0.$$

*Розв'язання.* Відповідне характеристичне рівняння

$$k^6 + 3k^4 + 3k^2 + 1 = 0$$

може бути записане спочатку у вигляді  $(k^2 + 1)^3 = 0$ , а потім у вигляді  $(k - i)^3(k + i)^3 = 0$ . Це означає, що його коренями буде пара комплексно-спряжених чисел  $\pm i$  кратності 3. Фундаментальна система розв'язків складається із функцій

$$\cos x, x \cos x, x^2 \cos x; \sin x, x \sin x, x^2 \sin x.$$

Загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x^2(C_5 \cos x + C_6 \sin x). \quad \square$$

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0.$$

*Розв’язання.* Дане рівняння є рівнянням Ейлера. Будемо шукати його частинні розв’язки у вигляді  $y = x^k$ . Підставляючи шуканий вигляд у дане рівняння, маємо

$$x^k(k(k-1) - 3k + 3) = 0.$$

Так як  $x^k \neq 0$ , то для визначення  $k$  одержуємо характеристичне рівняння  $k^2 - 4k + 3 = 0$ , що має прості корені  $k_1 = 1, k_2 = 3$ , яким відповідають частинні розв’язки  $y_1 = x, y_2 = x^3$ .

Загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 x + C_2 x^3. \quad \square$$

**Приклад 5.** Знайти розв’язок задачі Коші

$$xy''' + 2y'' = 0, \quad (58)$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 2, \quad y''(x_0) = 3.$$

*Розв’язання.* Рівняння (58) стане рівнянням Ейлера, якщо записати його у вигляді

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' = 0.$$

Шукаючи частинні розв’язки рівняння Ейлера у вигляді  $y = x^k$ , приходимо до характеристичного рівняння

$$k(k-1)(k-2) + 2k(k-1) = 0 \quad \text{або} \quad k^2(k-1) = 0,$$

що має корені  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$ . Отже,  $m_{1,2} = 2, m_3 = 1$ . Кореням  $k_1, k_2$  відповідають два частинних розв’язки  $y_1 = x^0 = 1$  і  $y_2 = x^0 \ln x = \ln x$ , кореню  $k_3$  відповідає частинний розв’язок  $y_3 = x$ . Таким чином, загальний розв’язок рівняння (58) має вигляд

$$y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x.$$

Підставляючи в загальний розв’язок початкові умови, одержуємо систему для визначення  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \ln x_0 + C_3 x_0 = 1, \\ C_2 \frac{1}{x_0} + C_3 = 2, \\ -C_2 \frac{1}{x_0^2} = 3, \end{cases}$$

звідки  $C_1 = 1 - 2x_0 + 3x_0^2(\ln x_0 - 1)$ ,  $C_2 = -3x_0^2$ ,  $C_3 = 2 + 3x_0$  і

$$y(x) = 1 + (2 + 3x_0)(x - x_0) - 3x_0^2(\ln x - \ln x_0). \quad \square$$

**Приклад 6.** Коливальний контур, що представляє собою замкнуте електричне коло, має ємність  $C$ , індуктивність  $L$  і активний опір  $R$ . При переході енергії електричного поля конденсатора в енергію магнітного поля котушки (і навпаки) частина енергії контуру затрачається на активних опорах, в результаті чого величина напруги на конденсаторі поступово зменшується. Знайти закони зміни заряду конденсатора  $q$  і струму в контурі  $i$ , а також напруги на конденсаторі  $u$  (рис. 7).

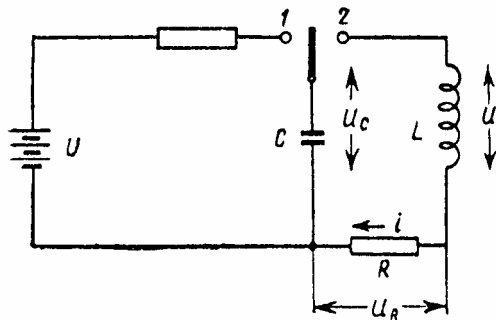


Рис. 7

*Розв’язання.* Струм в контурі визначається як частка від ділення падіння напруги на опорі на величину цього опору:

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{u_C - u_L}{R}.$$

Тут  $u_C$  – напруга на конденсаторі,  $u_L$  – напруга на котушці індуктивності, тобто

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Провівши елементарні алгебраїчні перетворення, одержимо вихідне диференціальне рівняння електричного кола:

$$L \frac{di}{dt} + iR - u_C = 0.$$

Струм в контурі  $i = -\frac{dq}{dt}$ , де  $q$  – заряд конденсатора;

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}; \quad u = \frac{q}{C}.$$

Тоді рівняння кола має такий вигляд:

$$-L \frac{d^2q}{dt^2} - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

або

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (59)$$

Підставляючи в рівняння (59) величину  $q = Cu$ , знаходимо диференціальне рівняння закону зміни напруги на конденсаторі:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0.$$

Рівняння (59) диференціюємо за  $t$ . Так як

$$-\frac{d^3q}{dt^3} = \frac{d^2i}{dt^2}, \quad -\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}, \quad -\frac{dq}{dt} = i,$$

то рівняння для визначення струму має вигляд:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0,$$

звідки

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Введемо позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_u^2, \quad \frac{R}{2L} = \alpha,$$

тоді

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_u^2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_u^2 - \alpha^2}.$$

Позначивши  $\sqrt{\omega_u^2 - \alpha^2} = \omega_p$ , одержимо:

$$k_1 = -\alpha + j\omega_p, \quad k_2 = -\alpha - j\omega_p.$$

Заряд конденсатора виражається формулою

$$q = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega_p t + C_2 \sin \omega_p t). \quad (60)$$

Значення  $C_1, C_2$  знаходяться з початкових умов:

$$\text{при } t = 0, \quad q = Q_{\max};$$

$$\text{при } t = 0, \quad i = 0.$$

Таким чином, при  $t = 0$  на конденсаторі максимальний заряд  $q = Q_{\max}$ , але по рівнянню (60) при  $t = 0, \quad q = C_1$ .

Таким чином,

$$q = e^{-\alpha t} (Q_{\max} \cos \omega_p t + C_2 \sin \omega_p t), \quad (61)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = -e^{-\alpha t} ((\omega_p C_2 - \alpha Q_{\max}) \cos \omega_p t - (\omega_p Q_{\max} + \alpha C_2) \sin \omega_p t). \quad (62)$$

В початковий момент при  $t = 0$  розряду конденсатора немає і струм в колі відсутній ( $i = 0$ ).

Із другої початкової умови і рівняння (62) випливає:

$$\omega_p C_2 - \alpha Q_{\max} = 0,$$

звідки

$$C_2 = Q_{\max} \frac{\alpha}{\omega_p}.$$

Підставляючи значення  $C_2$  в рівняння (61) і (62), одержимо:

$$q = Q_{\max} e^{-\alpha t} \left( \cos \omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p} \sin \omega_p t \right), \quad (63)$$

$$i = Q_{\max} \left( \omega_p + \frac{\alpha^2}{\omega_p} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_p t.$$

Член  $Q_{\max} \left( \omega_p + \frac{\alpha^2}{\omega_p} \right) = I_{\max}$  є максимальним значенням струму.

Таким чином,



$$i = I_{\max} e^{-\alpha t} \sin \omega_p t. \quad (64)$$

Використовуючи залежність  $u = \frac{q}{C}$  і рівність (63), одержимо напругу на конденсаторі:

$$u = U_{\max} e^{-\alpha t} \left( \cos \omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p} \sin \omega_p t \right). \quad (65)$$

Рівняння затухаючих коливань (63), (64) і (65) зображені графічно на рис. 8.

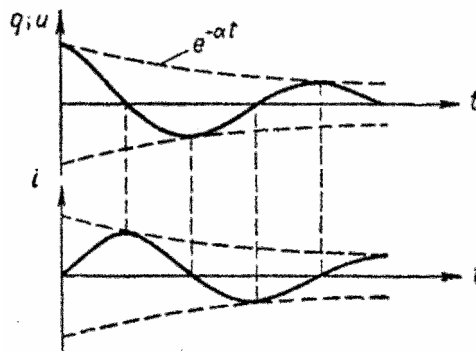


Рис. 8

□

### Задачі для самостійного розв'язування

**I.** Розв'язати диференціальні рівняння:

1.  $y'' - 5y' - 6y = 0$ .
2.  $\frac{d^2 s}{dt^2} + 4 \frac{ds}{dt} + 4s = 0$ .
3.  $y''' - 6y'' + 13y' = 0$ .
4.  $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$ .
5.  $y^{(4)} + 13y^{(2)} + 36y = 0$ .
6.  $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ .
7.  $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$ .

**II.** Два однакових вантажі підвішені до кінця пружини. Знайти рівняння руху, який здійснюватиме один із цих вантажів, якщо інший відірветься.



$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}. \end{cases} \quad (67)$$

**2. Метод невизначених коефіцієнтів (метод підбору вигляду частинного розв’язку)** застосовується до лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у тому випадку, коли його права частина – квазіполіном.

1) Якщо

$$f(x) = e^{\sigma x} U_m(x), \quad (68)$$

то частинний розв’язок рівняння (66) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{\sigma x} V_m(x), \quad (69)$$

де  $U_m(x)$  і  $V_m(x)$  – поліноми степеня  $m$  з невизначеними коефіцієнтами, які знаходяться підстановкою (69) в (66);  $k=0$ , якщо  $\sigma$  не є коренем характеристичного рівняння, що відповідає (66); якщо ж  $\sigma$  – корінь характеристичного рівняння, що відповідає (66), то  $k$  – кратність цього кореня. Тут  $\sigma$  – комплексна (зокрема дійсна) стала.

2) Якщо

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_r(x) \cos \beta x + Q_w(x) \sin \beta x) \quad (70)$$

або є сумою функцій такого вигляду, де  $\alpha$  і  $\beta$  – дійсні сталі;  $P_r(x)$  і  $Q_w(x)$  – поліноми степенів  $r$  і  $w$  відповідно, то частинний розв’язок  $\tilde{y}$  рівняння (66) шукається у вигляді

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + S_l(x) \sin \beta x), \quad (71)$$

де  $l = \max\{r, w\}$ ;  $R_l(x)$  і  $S_l(x)$  – поліноми степеня  $l$  із невизначеними коефіцієнтами, які знаходяться підстановкою (71) в (66);  $k=0$  якщо  $\alpha + i\beta$  не є коренем характеристичного рівняння, що відповідає (66); якщо ж  $\alpha + i\beta$  – корінь характеристичного рівняння, що відповідає (66), то  $k$  – кратність цього кореня.

Якщо права частина рівняння (66) має вигляд  $f = f_1 + f_2$ , то частинний розв’язок цього рівняння записують у вигляді  $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ , де  $\tilde{y}_1$  і  $\tilde{y}_2$  – частинні розв’язки лінійних неоднорідних рівнянь (66) з правими частинами  $f_1$  і  $f_2$  відповідно.

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}.$$

*Розв’язання.* Фундаментальну систему розв’язків відповідного однорідного рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 0$  утворюють функції  $y_1 = e^{2x}$  і  $y_2 = xe^{2x}$ . Запишемо систему вигляду (67):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)xe^{2x} = 0, \\ C_1'(x)2e^{2x} + C_2'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) = -\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Її розв’язок  $C_1'(x) = \sqrt{x}$ ,  $C_2'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ , звідки

$$C_1(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C_1, \quad C_2(x) = C_2 - 2\sqrt{x}.$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = \left( C_1 + C_2x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} \right) e^{2x}.$$

□

**Приклад 2.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y''' - y'' + 120y' + 122y = -610x - 478.$$

*Розв’язання.* Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння  $k^3 - k^2 + 120k + 122 = 0$  має однократні корені  $-1$ ,  $1 \pm 11i$ . Фундаментальну систему розв’язків однорідного рівняння утворюють функції

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^x \cos 11x, \quad y_3 = e^x \sin 11x.$$

Права частина вихідного рівняння має вигляд (68), причому  $\sigma = 0$ . Так як серед коренів характеристичного рівняння немає числа  $\sigma = 0$ , то  $k = 0$ , і частинний розв’язок вихідного рівняння визначається формулою

$$\tilde{y} = Ax + B.$$

Підставляючи  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{y}'$ ,  $\tilde{y}''$ ,  $\tilde{y}'''$  у вихідне рівняння, одержимо тотожність. Для зручності обчислень будемо виписувати вирази для  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{y}'$ ,  $\tilde{y}''$ ,  $\tilde{y}'''$  в окремі рядки і зліва від вертикальної риски поміщати коефіцієнти, що стоять перед ними в рівнянні. Перемножуючи ці вирази на коефіцієнти, додаючи і зводячи подібні члени, маємо:

$$\begin{array}{r|l} 122 & \tilde{y} = Ax + B, \\ 120 & \tilde{y}' = A, \\ -1 & \tilde{y}'' = 0, \\ 1 & \tilde{y}''' = 0, \\ \hline & \tilde{y}''' - \tilde{y}'' + 120\tilde{y}' + 122\tilde{y} = 0 - 0 + 120A + 122Ax + 122B \equiv -610x - 478. \end{array}$$

З останньої рівності маємо систему

$$\begin{cases} 122A = -610, \\ 120A + 122B = -478, \end{cases}$$

звідки  $A = -5, B = 1$ ;

$$\tilde{y} = 1 - 5x.$$

Загальний розв’язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-x} + e^x (C_2 \cos 11x + C_3 \sin 11x) + 1 - 5x. \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв’язати задачу Коші

$$y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3. \quad (72)$$

*Розв’язання.* Так як характеристичне рівняння  $k^2 - 6k + 8 = 0$  має корені  $k_1 = 2, k_2 = 4$ , то загальним розв’язком відповідного однорідного рівняння  $y'' - 6y' + 8y = 0$  є функція

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Права частина рівняння (72) має вигляд (68), де  $\sigma = 2$ ;  $U_0(x) = 3$ . Так як  $\sigma$  є коренем характеристичного рівняння, то  $k = 1$  і частинний розв’язок рівняння (72) визначається формулою

$$\tilde{y} = A x e^{2x},$$

де  $A = V_0(x)$ .

Підставляючи  $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$  в рівняння (72), одержимо тотожність. Для зручності обчислень будемо виписувати вирази для  $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$  в окремі рядки і зліва від вертикальної риски поміщати коефіцієнти, що стоять перед ними в рівнянні. Перемножуючи ці вирази на коефіцієнти, додаючи і зводячи подібні члени, маємо:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \tilde{y} = A x e^{2x}, \\ -6 & \tilde{y}' = e^{2x} (A + 2Ax), \\ 1 & \tilde{y}'' = e^{2x} (4A + 4Ax), \\ \hline & \tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 8\tilde{y} = e^{2x} (8Ax - 6A - 12Ax + 4A + 4Ax) \equiv 3e^{2x}. \end{array}$$

Скорочуючи обидві частини останньої тотожності на  $e^{2x} \neq 0$ , маємо  $-2A = 3$ , звідки  $A = -\frac{3}{2}$ ;

$$\tilde{y} = -\frac{3}{2} x e^{2x}.$$

Загальним розв’язком рівняння (72) є функція

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \frac{3}{2} x e^{2x}.$$

Для того щоб розв’язати задачу Коші, знаходимо  $y'$ :

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x} - \frac{3}{2} e^{2x} - 3x e^{2x}.$$

Використовуючи початкові умови, одержуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь для визначення значень довільних сталих  $C_1$  і  $C_2$ :

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad y'(0) = 2C_1 + 4C_2 - \frac{3}{2} = 3,$$

звідки знаходимо:  $C_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $C_2 = \frac{5}{4}$ .

Таким чином, частинний розв’язок, що задовольняє дані початкові умови, має вигляд

$$y = -\frac{1}{4} e^{2x} + \frac{5}{4} e^{4x} - \frac{3}{2} x e^{2x}.$$

□

**Приклад 4.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' - 6y = 2e^{-3x} x^2.$$

*Розв’язання.* Характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння має однократні корені  $-3$  і  $2$ . Фундаментальну систему розв’язків однорідного рівняння утворюють функції  $y_1 = e^{-3x}$ ,  $y_2 = e^{2x}$ . Права частина вихідного рівняння має вигляд (68), причому  $\sigma = -3$ . Оскільки число  $-3$  знаходиться серед коренів характеристичного рівняння, то в даному випадку  $k = 1$  і частинний розв’язок вихідного рівняння визначається формулою

$$\tilde{y} = x e^{-3x} (Ax^2 + Bx + C).$$

Для знаходження коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  підставляємо вираз для  $\tilde{y}$  у вихідне рівняння. Після скорочення на  $e^{-3x}$  і зведення подібних доданків одержимо

$$-15Ax^2 + (6A - 10B)x + 2B - 5C = 2x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  маємо

$$\begin{cases} -15A = 2, \\ 6A - 10B = 0, \\ 2B - 5C = 0, \end{cases}$$

звідки  $A = -\frac{2}{15}, B = -\frac{2}{25}, C = -\frac{4}{125}$ .

Загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - x e^{-3x} \left( \frac{2}{15} x^2 + \frac{2}{25} x + \frac{4}{125} \right). \quad \square$$

**Приклад 5.** Розв’язати диференціальне рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = \cos x - 3\sin x + \cos 3x.$$

*Розв’язання.* Для відповідного однорідного рівняння коренями характеристичного рівняння

$$k^3 - 3k + 2 = 0$$

є числа 1 і -2, їх кратності рівні відповідно 2 і 1, фундаментальну систему розв’язків утворюють функції  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = x e^x$ ,  $y_3 = e^{-2x}$ .

Знаходимо спочатку частинний розв’язок  $\tilde{y}_1$  рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = \cos x - 3\sin x. \quad (73)$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, ми маємо взяти

$$\tilde{y}_1 = A \cos x + B \sin x.$$

Підставляємо вираз для  $\tilde{y}_1$  в рівняння (73), зводимо подібні доданки і прирівнюємо коефіцієнти при функціях  $\cos x$  і  $\sin x$  в лівій і правій частинах рівняння:

$$\begin{cases} 2A - 4B = 1, \\ 4A + 2B = -3, \end{cases}$$

звідки  $A = B = -\frac{1}{2}$ , тому

$$\tilde{y}_1 = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

Тепер знайдемо частинний розв’язок  $\tilde{y}_2$  рівняння

$$y''' - 3y' + 2y = \cos 3x.$$

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів

$$\tilde{y}_2 = C \cos 3x + D \sin 3x.$$

Коефіцієнти  $C$  і  $D$  знаходяться аналогічно коефіцієнтам  $A$  і  $B$  і дорівнюють

$$C = \frac{1}{650}, \quad D = -\frac{9}{325}, \text{ тому}$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{650} \cos 3x - \frac{9}{325} \sin 3x.$$

Знаходимо частинний розв’язок вихідного рівняння за формулою

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2.$$

Таким чином, загальний розв’язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{-2x} - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{650} \cos 3x - \frac{9}{325} \sin 3x. \quad \square$$

### Задачі для самостійного розв’язування

**I. Розв’язати диференціальні рівняння:**

1.  $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$
2.  $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 9x^2.$
3.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sec^2 x.$
4.  $y'' - 2y' + 10y = 37 \cos 3x.$
5.  $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x.$
6.  $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 4e^{2t} - 3e^{3t}.$
7.  $y'' + 5y' + 6y = (e^{2x} + 1)^{\frac{3}{2}}.$
8.  $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}.$
9.  $y''' + 4y' = 8e^{2x} + 5e^x \sin x.$

**II. Розв’язати задачі Коші:**

1.  $y'' - y = 4e^x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2.  $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, y(0) = 1, y'(0) = 2.$





системи (75), де  $C_j$  – довільна стала,  $\gamma^j$  – власний вектор матриці  $\mathbf{A}$ , що відповідає власному значенню  $\lambda_j$ .

2) Якщо  $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$  – комплексно-спряжені власні значення матриці  $\mathbf{A}$  (вважаємо, що їхня кратність дорівнює одиниці), то їм відповідає розв’язок

$$\mathbf{X}_j(t) = C_1^j \operatorname{Re}(\gamma^j e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}) + C_2^j \operatorname{Im}(\gamma^j e^{(\alpha_j + i\beta_j)t})$$

системи (75), де  $C_1^j, C_2^j$  – довільні сталі,  $\gamma^j$  – загалом комплексний власний вектор матриці  $\mathbf{A}$ , що відповідає власному значенню  $\alpha_j + i\beta_j$ .

3) Якщо  $\lambda_j$  – корінь кратності  $k \geq 2$ , то відповідний йому розв’язок системи (75) шукається у вигляді вектора:

[illegible]

Коефіцієнти  $b_{il}$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{0, k-1}$ ) визначаються із системи лінійних рівнянь, яка одержується прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях  $t$  внаслідок підстановки вектора (76) в систему (75) (метод невизначених коефіцієнтів).

Знайшовши для кожного власного значення матриці  $\mathbf{A}$  розв'язок системи (75), підсумувавши отримані розв'язки, одержимо загальний розв'язок системи (75).

## Приклади розв'язування типових задач

### Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Характеристичне рівняння даної системи

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має дійсні власні значення  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ . Для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_1 = -1$ , отримуємо систему

$$\begin{cases} 2\gamma_1^1 - \gamma_2^1 = 0, \\ -4\gamma_1^1 + 2\gamma_2^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^1 = C, \\ \gamma_2^1 = 2C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_2 = 3$ , отримуємо систему

$$\begin{cases} -2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = 0, \\ -4\gamma_1^2 - 2\gamma_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 = C, \\ \gamma_2^2 = -2C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Загальний розв’язок системи має вигляд

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},$$

$$y_2(x) = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

□

**Приклад 2.** Розв’язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Характеристичне рівняння

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має  $\lambda_1 = 3i$ ,  $\lambda_2 = -3i$  – комплексно-спряжені власні значення. Для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_1 = 3i$ , отримуємо систему, у якій два рівняння еквівалентні

$$\begin{cases} (1 - 3i)\gamma_1^1 - 5\gamma_2^1 = 0, \\ 2\gamma_1^1 - (1 + 3i)\gamma_2^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^1 = C, \\ \gamma_2^1 = \frac{(1 - 3i)C}{5}. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 5$ . Тоді власний вектор  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$ .

Знайдемо

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 1-3i \end{array}\right)e^{3it}\right) &= \operatorname{Re}\left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 1-3i \end{array}\right)(\cos 3t + i \sin 3t)\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\begin{array}{c} 5 \cos 3t + 5i \sin 3t \\ (\cos 3t + 3 \sin 3t) + i(\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Im}\left(\left(\begin{array}{c} 5 \\ 1-3i \end{array}\right)e^{3it}\right) &= \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отже, загальний розв’язок системи має вигляд:

$$\begin{aligned}x(t) &= 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t, \\ y(t) &= C_1(\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3 \cos 3t).\end{aligned}$$

□

**Приклад 3.** Розв’язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = 1 - 2i.$$

Для знаходження власного вектора, який відповідає власному значенню  $\lambda_1 = 1$ , отримуємо систему

$$\begin{cases} 0 \cdot \gamma_1^1 + \gamma_2^1 + 0 \cdot \gamma_3^1 = 0, \\ -\gamma_1^1 + 0 \cdot \gamma_2^1 - \gamma_3^1 = 0, \\ 0 \cdot \gamma_1^1 + 3\gamma_2^1 + 0 \cdot \gamma_3^1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^1 = C, \\ \gamma_2^1 = 0, \\ \gamma_3^1 = -C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Для  $\lambda_2 = 1 + 2i$  маємо

$$\begin{cases} -2i\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0, \\ -\gamma_1^2 - 2i\gamma_2^2 - \gamma_3^2 = 0, \\ 3\gamma_2^2 - 2i\gamma_3^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 = C, \\ \gamma_2^2 = 2iC, \\ \gamma_3^2 = 3C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Знайдемо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)x} \right) &= \operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix} e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \begin{pmatrix} e^x \cos 2x + i e^x \sin 2x \\ -2e^x \sin 2x + 2i e^x \cos 2x \\ 3e^x \cos 2x + 3i e^x \sin 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos 2x \\ -2e^x \sin 2x \\ 3e^x \cos 2x \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Im} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)x} \right) &= \begin{pmatrix} e^x \sin 2x \\ 2e^x \cos 2x \\ 3e^x \sin 2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x,$$

$$y_2(x) = C_1 \cdot 0 - 2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x,$$

$$y_3(x) = -C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x.$$

□

### Задачі для самостійного розв'язування

**I.** Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 6x_2. \end{cases} & 2. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2. \end{cases} & 3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \\ 4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2y + 3z. \end{cases} & 5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases} & \end{array}$$

## II. Розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = y - 3x - 2z \end{cases}$$

з початковими умовами  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$ ,  $z(0)=1$ .

### 3.2. Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Якщо коефіцієнти  $a_{ij}$  при невідомих функціях сталі, то система вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{array} \right.$$

називається *системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, яку запишемо в матричній формі

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (77)$$

де

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок системи (77) має вигляд

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \tilde{\mathbf{X}}(t),$$

де

$$\mathbf{X}_0(t) = C_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (78)$$

– загальний розв’язок відповідної до (77) однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (75),  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  – який-небудь частинний розв’язок неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (77).

**1. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)** полягає в тому, що загальний розв’язок  $\mathbf{X}(t)$  системи (77) треба шукати у вигляді (78), де замість довільних сталих стоять невідомі функції:

$$\mathbf{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \dots + C_n(t) \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

$C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$  знаходяться з лінійної системи алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ C'_1(t) \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + C'_2(t) \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \dots + C'_n(t) \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \right.$$

**2. Метод невизначених коефіцієнтів (метод підбору вигляду частинного розв’язку)** застосовується, коли  $\mathbf{F}(t)$  системи (77) є векторним квазіполіномом.

1) Якщо

$$f_i(t) = e^{\sigma t} U_{m_i}^i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (79)$$

де  $\sigma$  – комплексна (зокрема дійсна) стала;  $U_{m_i}^i(t)$  – поліном степеня  $m_i$ , то частинний розв’язок системи (77) має вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = e^{\sigma t} \mathbf{V}_{m+k}(t), \quad (80)$$

де  $m = \max_i m_i$ ;  $\mathbf{V}_{m+k}(t)$  – вектор-поліном степеня  $(m+k)$  із невизначеними коефіцієнтами, які знаходяться підстановкою (80) в (77) й прирівнюванням коефіцієнтів подібних членів;  $k=0$ , якщо  $\sigma$  не є власним значенням матриці  $\mathbf{A}$ ; якщо ж  $\sigma$  – власне значення матриці  $\mathbf{A}$ , то  $k$  – його кратність.

2) Якщо

$$f_i(t) = e^{\alpha t} (P_{r_i}^i(t) \cos \beta t + Q_{w_i}^i(t) \sin \beta t), \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\alpha, \beta$  – дійсні сталі;  $P_{r_i}^i(t)$  і  $Q_{w_i}^i(t)$  – поліноми степенів  $r_i$  і  $w_i$  відповідно, то частинний розв’язок системи (77) має вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = e^{\alpha t} (\mathbf{R}_{l+k}(t) \cos \beta t + \mathbf{S}_{l+k}(t) \sin \beta t), \quad (81)$$

де  $l = \max_i \{r_i, w_i\}$ ;  $\mathbf{R}_{l+k}(t)$  і  $\mathbf{S}_{l+k}(t)$  – вектор-поліноми степеня  $l+k$  із невизначеними коефіцієнтами, які знаходяться підстановкою (81) в (77) й прирівнюванням коефіцієнтів подібних членів;  $k=0$ , якщо  $\alpha + i\beta$  не є власним значенням матриці  $\mathbf{A}$ ; якщо ж  $\alpha + i\beta$  – власне значення матриці  $\mathbf{A}$ , то  $k$  – кратність числа  $\alpha + i\beta$ .

Частинний розв’язок системи

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}_1(t) + \mathbf{F}_2(t)$$

має вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \tilde{\mathbf{X}}_1(t) + \tilde{\mathbf{X}}_2(t),$$

де  $\tilde{\mathbf{X}}_1(t), \tilde{\mathbf{X}}_2(t)$  – частинні розв’язки систем

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}_1(t), \quad \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}_2(t)$$

відповідно.

### Приклади розв’язування типових задач

**Приклад 1.** Розв’язати лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь



$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2 + t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 1. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Знайдемо загальний розв’язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має власні значення  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Система рівнянь для визначення власних векторів така:

$$\begin{cases} (6 - \lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ 5\gamma_1 + (2 - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

При  $\lambda_1 = 7$  маємо:

$$\begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ 5\gamma_1 - 5\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2, \\ \gamma_2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = C, \\ \gamma_2 = C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

При  $\lambda_2 = 1$  маємо:

$$\begin{cases} 5\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0, \\ 5\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 = -\frac{\gamma_2^2}{5}, \\ \gamma_2^2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^2 = -\frac{C}{5}, \\ \gamma_2^2 = C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = -5$ . Тоді власний вектор  $\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

Отже, загальний розв’язок однорідної системи має вигляд:

$$\mathbf{X}_0(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t$$

або

$$x_1^0(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^t,$$

$$x_2^0(t) = C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t.$$

Загальний розв’язок неоднорідної системи шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді:

$$\mathbf{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t.$$

Складаємо систему для визначення  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ :

$$\begin{cases} C_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1'(t) e^{7t} + C_2'(t) e^t = t, \\ C_1'(t) e^{7t} - 5C_2'(t) e^t = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$6C_2'(t) e^t = t - 1,$$

$$C_2'(t) = \frac{t-1}{6} e^{-t}.$$

Підставляючи  $C_2'(t)$  в перше рівняння системи, маємо:

$$C_1'(t) e^{7t} + \frac{t-1}{6} e^{-t} e^t = t,$$

$$C_1'(t) = \frac{5t+1}{6} e^{-7t}.$$

Далі, проінтегрувавши  $C_1'(t)$ ,  $C_2'(t)$ , отримаємо:

$$C_1(t) = \int \frac{5t+1}{6} e^{-7t} dt = -\left( \frac{5}{42} t + \frac{2}{49} \right) e^{-7t} + C_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{t-1}{6} e^{-t} dt = -\frac{1}{6} t e^{-t} + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок заданої неоднорідної системи такий:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \left( -\left( \frac{5}{42}t + \frac{2}{49} \right) e^{-7t} + C_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \left( -\frac{1}{6} t e^{-t} + C_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -\frac{5}{42}t - \frac{2}{49} - \frac{1}{6}t \\ -\frac{5}{42}t - \frac{2}{49} + \frac{5}{6}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

або

$$x_1(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},$$

□

$$x_2(t) = C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}.$$

**Приклад 2.** Розв’язати лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Знайдемо загальний розв’язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має комплексно-спряжені власні значення  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ .

Для  $\lambda_1 = i$  маємо:

$$\begin{cases} -i\gamma_1^1 + \gamma_2^1 = 0, \\ -\gamma_1^1 - i\gamma_2^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^1 = -i\gamma_2^1, \\ \gamma_2^1 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1^1 = -iC, \\ \gamma_2^1 = C. \end{cases}$$

Покладемо  $C = 1$ . Тоді власний вектор  $\gamma^1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Знайдемо

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}\right) &= \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)\right) = \\ &= \operatorname{Re}\begin{pmatrix} \sin t - i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}\right) &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Отже, загальний розв’язок однорідної системи має вигляд:

$$\mathbf{X}_0(t) = C_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{aligned}x_1^0(t) &= C_1 \sin t - C_2 \cos t, \\ x_2^0(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t.\end{aligned}$$

Загальний розв’язок неоднорідної системи шукаємо методом варіації довільних сталих у вигляді:

$$\mathbf{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Складаємо систему для визначення  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ :

$$\left\{ C_1'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2'(t) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix} \right.$$

або

$$\begin{cases} C_1'(t) \sin t - C_2'(t) \cos t = 0, \\ C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1'(t) = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad C_2'(t) = 1.$$

Далі, проінтегрувавши  $C_1'(t)$ ,  $C_2'(t)$ , отримаємо:

$$C_1(t) = \ln |\sin t| + C_1,$$

$$C_2(t) = t + C_2.$$

Отже, загальний розв’язок заданої неоднорідної системи такий:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= (\ln |\sin t| + C_1) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (t + C_2) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \cdot \ln |\sin t| - t \cos t \\ \cos t \cdot \ln |\sin t| + t \sin t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \sin t - C_2 \cos t + \sin t \cdot \ln |\sin t| - t \cos t \\ C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln |\sin t| + t \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin t - C_2 \cos t + \sin t \cdot \ln |\sin t| - t \cos t, \\ x_2(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln |\sin t| + t \sin t. \end{aligned}$$

□

**Приклад 3.** Знайти частинний розв’язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 4x_2 + 3e^{2t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = 3x_3. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Запишемо характеристичне рівняння

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 3.$$

Праві частини системи мають вигляд (79), в якому  $m_i = 0$ ,  $\sigma = 2$ . Значення  $\sigma = 2$  не співпадає ні з одним із характеристичних  $\lambda$ . Тому частинний розв’язок системи слід шукати у вигляді

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Підставляючи  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  у вихідну систему, одержуємо

$$\begin{cases} A + 4B = 3, \\ A + B = 0, \\ C = 0, \end{cases}$$

звідки  $A = -1$ ,  $B = 1$  і частинний розв’язок має вигляд

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

□

### Задачі для самостійного розв’язування

**I.** Розв’язати системи диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 - y_3 + \frac{e^{3x}}{x}, \\ y_2' = 14y_1 - 4y_2 + 2y_3 + 2\frac{e^{3x}}{x}, \\ y_3' = 40y_1 - 20y_2 + 10y_3. \end{cases}$$

**II.** Розв’язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 + 6x - 1, \\ y_2' = -3y_1 + 3y_2 + 6x - 1, \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 3. \end{cases}$$

### 3.3. Нормальні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

[illegible]

називається *нормальною*. Одним з методів розв'язання даної системи є *метод інтегровних комбінацій*: одержання диференціальних рівнянь, які легко інтегруються, із рівнянь системи (82) за допомогою арифметичних операцій.

Одна інтегровна комбінація дає можливість одержати одне кінцеве рівняння

$$\Phi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

яке називається *першим інтегралом системи* (82).

Якщо знайдено  $n$  перших інтегралів системи (82) і всі вони незалежні (їх сукупність називається *загальним інтегралом системи* (82)), тобто *якобіан системи функцій*  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то задача інтегрування системи (82) розв'язана (так як із системи

$$\Phi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

визначаються всі невідомі функції  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ).

Для знаходження інтегровних комбінацій при розв'язанні системи диференціальних рівнянь (82) буває зручно записати її у *симетричній формі*

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \quad (83)$$

Для розв'язання системи (83) або беруть пари відношень, які допускають відокремлення змінних, або використовують властивість рівних дробів

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n},$$

де коефіцієнти  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – довільні і їх вибирають так, наприклад, щоб чисельник був диференціалом знаменника, або чисельник був повним диференціалом, а знаменник дорівнював нулю.

### Приклади розв’язування типових задач

#### Приклад 1. Розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Додамо почленно дані рівняння:  $x' + y' = x + y + 2$  або  $(x + y)' = (x + y) + 2$ . Позначимо  $x + y = z$ . Тоді маємо  $z' = z + 2$ . Розв’язуємо одержане рівняння:

$$\frac{dz}{z+2} = dt, \quad \ln|z+2| - \ln C_1 = t, \quad \frac{z+2}{C_1} = e^t, \quad z+2 = C_1 e^t, \quad x+y = C_1 e^t - 2.$$

Одержали перший інтеграл системи. З нього можна виразити одну з шуканих функцій через другу, тим самим зменшити на одиницю число шуканих функцій. Наприклад,  $y = C_1 e^t - 2 - x$ . Тоді перше рівняння системи має вигляд

$$x' = C_1 e^t - 2 - x + 1, \quad x' + x = C_1 e^t - 1.$$

Знайшовши з нього  $x$  (наприклад, за допомогою підстановки  $x = uv$ ), знайдемо  $y$ .

**Зауваження.** Дана система “дозволяє” утворити ще одну інтегровну комбінацію:  $x' - y' = y - x$ ,  $(x - y)' = -(x - y)$ . Поклавши  $x - y = p$ , маємо:

$$p' = -p \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} = -dt, \quad \ln|p| - \ln C_2 = -t, \quad p = C_2 e^{-t} \quad \text{або} \quad x - y = C_2 e^{-t}.$$

Маючи два перших інтеграла системи, тобто

$$x + y = C_1 e^t - 2, \quad x - y = C_2 e^{-t},$$

легко знайти (додаючи і віднімаючи перші інтеграли), що

$$x = \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{-t} - 1, \quad y = \frac{1}{2} C_1 e^t - \frac{1}{2} C_2 e^{-t} - 1. \quad \square$$

#### Приклад 2. Розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}. \quad (84)$$

*Розв’язання.* Перша інтегровна комбінація має вигляд



$$\frac{dt}{2x} = -\frac{dx}{\ln t}.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, знайдемо перший інтеграл

$$t(\ln t - 1) + x^2 = C_1. \quad (85)$$

Використовуючи властивість рівних дробів, одержимо другу інтегровну комбінацію

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{dt + dx + dy}{0},$$

тут  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Звідси  $dt + dx + dy = 0$  або  $d(t + x + y) = 0$  і

$$t + x + y = C_2. \quad (86)$$

Перші інтеграли (85) і (86) дають загальний інтеграл системи (84)

$$x^2 + t(\ln t - 1) = C_1, \quad x + y + t = C_2,$$

з якого знаходимо загальний розв’язок системи

$$x(t) = \pm \sqrt{C_1 - t(\ln t - 1)}, \quad y(t) = C_2 - t \mp \sqrt{C_1 - t(\ln t - 1)}. \quad \square$$

**Приклад 3.** Розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

*Розв’язання.* Запишемо цю систему в симетричній формі:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{dy}{\frac{1}{x-t}},$$

звідки

$$\frac{dt}{1} = \frac{y dx}{y-1} = \frac{(x-t) dy}{1}.$$

Складаючи пропорцію

$$\frac{y(dx - dt)}{-1} = \frac{(x-t) dy}{1}$$

і переписуючи її у вигляді

$$\frac{dx - dt}{-(x - t)} = \frac{dy}{y},$$

одержуємо інтегровну комбінацію

$$\frac{d(x - t)}{x - t} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Інтегруючи її, знаходимо перший інтеграл

$$(x - t)y = C_1.$$

Визначивши звідси  $y$  і підставивши результат в перше рівняння вихідної системи, матимемо:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x - t}{C_1},$$

або

$$dx = dt - \frac{x - t}{C_1} dt, \quad \frac{d(x - t)}{x - t} + \frac{dt}{C_1} = 0,$$

звідки

$$\ln |x - t| + \frac{t}{C_1} = \ln C_2, \quad (x - t)e^{\frac{t}{C_1}} = C_2.$$

Визначивши  $C_1$  з першого інтеграла і підставивши знайдений вираз в останню рівність, одержимо ще один перший інтеграл

$$(x - t)e^{\frac{t}{(x - t)y}} = C_2.$$

Перші інтеграли дають загальний інтеграл заданої системи

$$(x - t)y = C_1, \quad (x - t)e^{\frac{t}{(x - t)y}} = C_2,$$

з якого знаходимо загальний розв’язок заданої системи

$$x(t) = C_2 e^{-\frac{t}{C_1}} + t, \quad y(t) = \frac{C_1}{C_2} e^{\frac{t}{C_1}}.$$

□

### Задачі для самостійного розв’язування

**I.** Розв’язати системи диференціальних рівнянь:

$$1. \frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

$$2. \frac{dx}{y-2z} = \frac{dy}{2z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

$$3. \frac{dt}{(y-x)^2} = \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$$

$$4. \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \frac{dz}{2yz}.$$

$$5. \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

**II.** Деяка речовина  $A$  розкладається на дві речовини  $P$  і  $Q$ . Швидкість утворення кожної із цих речовин пропорційна кількості нерозкладеної речовини. Нехай  $x$  і  $y$  – кількості речовин  $P$  і  $Q$ , що утворилися до моменту  $t$ . Визначити закон їх змін, знаючи, що в початковий момент  $x=0$ ,  $y=0$ , а через 1 год.  $x=\frac{3}{8}c$ ,  $y=\frac{1}{8}c$ , де  $c$  – початкова кількість речовини  $A$ .

## Список літератури

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика (дифференциальные уравнения, кратные интегралы, ряды, функции комплексного переменного). – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Губаль Г. М. Вища математика. Методичні вказівки до практичних занять з розділу “Диференціальні рівняння” для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання. – Луцьк: ЛНТУ, 2009. – 72 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая шк., 1999. – Ч. 2. – 416 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая шк., 1978. – 287 с.
6. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
7. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С., Павлюк И. А., Самойленко А. М., Шкиль Н. И., Мосеенков Б. И., Терещенко Н. И., Волкова В. А. – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.
8. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
9. Овчинников П. П., Кропив’янський П. С., Полушкін С. П. та ін. Вища математика: Зб. задач: Ч. 2: Навч. посібник. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1967. – Т. 2. – 656 с.