

Барановська Г.Г., Барановська Л.В.

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.
ЗБІРНИК ЗАДАЧ**

*Рекомендовано Вченою радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник
для студентів, які навчаються
за інженерно-технічними спеціальностями*

Київ 2015

УДК 519.21
ББК 22.17я7

*Гриф надано Вченою радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 4 від 12.05.2015 р.)*

Рецензенти:

*Працьовитий Микола Вікторович,
д-р фіз.-мат. наук, проф.,
директор Фізико-математичного інституту
Національного педагогічного університету
імені М.П.Драгоманова;*

*Проскурін Данило Павлович,
доцент, доктор фізико-математичних наук;
доцент факультету Кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка*

Відповідальний

редактор

*Клесов Олег Іванович,
професор, д-р фіз.-мат. наук,
зав.кафедри, професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ»*

Барановська Г.Г.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Збірник задач : Навч. посіб. /
Г.Г.Барановська, Л.В.Барановська. –К.: НТУУ “КПІ”, 2015. – 198 с.

УДК 519.21
ББК 22.17я7

© Г.Г.Барановська, Л.В.Барановська, 2015

ВСТУП

Навчальне видання "Збірник задач. Лінійна алгебра та аналітична геометрія" написано у відповідності до програми курсу "Вища математика" для підготовки бакалаврів усіх інженерно – технічних спеціальностей НТУУ "КПІ".

Задачник складено на основі багаторічного досвіду викладання авторами курсу вищої математики і є складовою методичного забезпечення кредитно – модульної системи навчання і рейтингової системи оцінювання знань студентів.

У ньому міститься перелік теоретичних питань з модуля, який використовується при тестовому контролі знань, на іспиті і під час проведення модульної контрольної роботи.

Розглянуто наступні теми кредитного модуля "Лінійна алгебра та аналітична геометрія":

- дії над матрицями, визначники;
- системи лінійних рівнянь;
- векторна алгебра;
- лінійні геометричні об'єкти: пряма і площина;
- комплексні числа;
- алгебра многочленів;
- криві і поверхні другого порядку;
- лінійні простори і лінійні оператори;
- квадратичні форми;
- зведення загальних рівнянь кривих і поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.

Кожний параграф містить: основні теоретичні відомості, які студенти використовують при розв'язанні задач; зразки розв'язання найбільш типових навчальних прикладів, які сприяють розвиткові практичних навичок у застосуванні теоретичних положень і служать зразком оформлення завдань при виконанні розрахункової і самостійної роботи студентів; достатню кількість завдань для аудиторної і самостійної роботи та відповіді до них.

У посібнику нумерація рисунків наскрізна, а нумерація формул, прикладів і завдань автономна у межах кожного параграфа. Початок і кінець розв’язання прикладів позначаються відповідно символами ◀ ▶.

Автори висловлюють щиру вдячність відповідальному редактору посібника проф. Клесову О. І. за ретельне прочитання рукопису і зроблені ним зауваження.

Незважаючи на зусилля авторів, у посібнику можуть бути виявлені деякі опечатки і помилки. Автори наперед приносять за них свої вибачення і будуть вдячні за конструктивну критику і вказівки на ці недоліки.

Посібник рекомендований студентам для організації їх самостійної роботи, а також викладачам вищої математики у технічних вузах для використання у лекційній та аудиторній роботі.

Використані позначення

\mathbb{N} – множина натуральних чисел;

\mathbb{R} – множина дійсних чисел;

\mathbb{Z} – множина цілих чисел;

\mathbb{Q} – множина раціональних чисел;

\mathbb{C} – множина комплексних чисел;

$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ – відповідно одно-, двох-, три- і n -вимірні векторні простори;

\forall – довільний, для всіх, квантор загальності;

\exists – існує, квантор існування;

\in – належить, $x \in M$ – елемент x належить множині M ;

\notin – не належить;

A, B, C, \dots – матриці, a, b, c, \dots – елементи матриць;

$A_{m \times n}$ – матриця, у якій m рядків і n стовпців;

E_n – одинична матриця;

$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ – діагональна матриця;

$\det A, |A|, \Delta$ – детермінант, визначник матриці;

M_{ij} – мінор елемента a_{ij} ;

A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} ;

A^T – транспонована матриця;

A^{-1} – обернена матриця;

A^* – приєднана матриця (складена із алгебраїчних доповнень транспонованої матриці);

$(A|B), \tilde{A}$ – розширена матриця системи;

$\text{rang} A$ – ранг матриці;

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ – колінеарні вектори;

$\vec{a} \perp \vec{b}$ – ортогональні вектори;

$z = x + iy, x = \text{Re } z, y = \text{Im } z$ – комплексне число;

$\bar{z} = x - iy$ – спряжене комплексне число;

$|z|$ – модуль, $\arg z$ – аргумент комплексного числа;

$P_n(z)$ – многочлен n – го степеня;

L_n – n – вимірний лінійний простір;

E_n – n – вимірний евклідів простір;

$\dim L$ – розмірність лінійного простору;

x, y, z – елементи лінійного простору;

A – лінійний оператор;

$\text{Spec} A$ – спектр оператора;

$\text{tr} A$ – слід лінійного оператора;

$\text{im} A$ – образ лінійного оператора;

$\ker A$ – ядро лінійного оператора.

Екзаменаційна програма з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

1. Дії над матрицями: множення на число, додавання, добуток матриць. Властивості дій.
2. Визначники, їх обчислення і властивості.
3. Мінор матриці k -го порядку, алгебраїчне доповнення елемента. Обчислення визначника n -го порядку.
4. Обернена матриця, її обчислення. Розв'язання матричних рівнянь.
5. Ранг матриці, його обчислення. Теорема про базисний мінор.
6. Розв'язання квадратної системи алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.
7. Дослідження на сумісність і розв'язання загальної системи алгебраїчних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі.
8. Розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь, фундаментальна система розв'язків.
9. Лінійні операції над векторами: додавання, віднімання, множення на число. Проекція вектора на вісь.
10. Декартова система координат. Визначення базису. Теорема про єдиність розкладу вектора за базисом.
11. Основні задачі декартової системи координат: поділ відрізка навпіл та у відношенні λ . Координати вектора, відстань між двома точками.
12. Полярна система координат. Важливі криві у полярних координатах.
13. Перетворення прямокутної системи координат: поворот на кут α та паралельне перенесення, формули перетворення.
14. Скалярний добуток векторів, його властивості, координатна форма.
15. Векторний добуток векторів, його властивості, координатна форма, обчислення площ.
16. Мішаний добуток векторів, геометричний зміст, властивості, координатна форма. Обчислення об'ємів.
17. Різні вигляди рівняння прямої на площині.
18. Кут між двома прямими в \mathbb{R}^2 , умови паралельності і перпендикулярності.
19. Нормальне рівняння прямої в \mathbb{R}^2 . Відхилення та відстань від точки до прямої.
20. Різні вигляди рівняння площини.
21. Кут між двома площинами, умови паралельності і перпендикулярності.

22. Нормальне рівняння площини. Відхилення та відстань від точки до площини.
23. Різні вигляди рівняння прямої в \mathbb{R}^3 . Кут між прямими, умови паралельності і перпендикулярності.
24. Взаємне розташування прямої і площини. Точка їх перетину. Кут між прямою і площиною, умови паралельності і перпендикулярності.
25. Еліпс, його канонічне рівняння та основні характеристики.
26. Гіпербола, її канонічне рівняння та основні характеристики.
27. Парабола, її канонічне рівняння та основні характеристики.
28. Циліндричні поверхні, поверхні обертання та конічні поверхні. Їх рівняння, приклади.
29. Еліпсоїд, дослідження його форми. Сфера.
30. Одно- та двопорожнинний гіперболоїди, дослідження їх форми.
31. Еліптичний та гіперболічний параболоїди, дослідження їх форми.
32. Комплексні числа: алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми запису, дії над ними.
33. Дії над многочленами, схема Горнера, теорема Безу, наслідок.
34. Основна теорема алгебри. Розклад многочлена на множники, кратність кореня, формули Вієта для $P_n(z)$.
35. Розклад раціонального дробу на суму елементарних.
36. Лінійний простір, його аксіоми. Розмірність простору і базису. Теорема про єдиність розкладу вектора за базисом. Приклади просторів.
37. Евклідов простір, його аксіоми. Нерівність Коші-Буняковського і Мінковського. Норма вектора, ортонормований базис.
38. Лінійний оператор, його матриця, зміна матриці оператора при переході до нового базису.
39. Власні значення та власні вектори лінійного оператора і матриці. Зведення матриці до діагонального вигляду.
40. Квадратична форма, її матриця. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Знаковизначеність квадратичної форми. Критерій Сильвестра.
41. Зведення загального рівняння кривої і поверхні другого порядку до канонічного вигляду.

Розділ І. Матриці. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

§1. Дії над матрицями. Визначники

1. **Сумою** $A+B$ матриць A і B однакових розмірів $n \times m$ називається матриця C такого ж розміру, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.
2. **Добутком** матриці $A_{n \times m}$ на число α називається матриця $B_{n \times m} = \alpha \cdot A$, у якої $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$.
3. **Різницею** $A-B$ називається матриця $A+(-B)$, де матриця $-B$ є протилежною до B .
4. **Дія множення** визначена лише для узгоджених матриць.

Матриця $A_{n \times m}$ називається **узгодженою** з матрицею $B_{m \times p}$, якщо кількість стовпців m матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Розглянемо спочатку добуток елементів i -го рядка матриці A на j -ий стовпець матриці B . За означенням це буде число:

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{im}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{rj}, \quad (1)$$

яке дорівнює сумі добутків відповідних елементів рядка і стовпця.

Добутком двох узгоджених матриць $A_{n \times m}$ і $B_{m \times p}$ називається матриця $C_{n \times p} = A \cdot B$, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{im} \cdot b_{mj} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{rj}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (2)$$

Матриця $A_{m \times n}^T$, яку отримаємо з матриці $A_{n \times m}$ заміною її рядків стовпцями з тим же номером, називається **транспонованою**.

Кожній квадратній матриці $A_{n \times n}$ ставиться у відповідність число, яке називається її **визначником або детермінантом**:

$$\det A = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Формули для обчислення визначників

$$1. n = 1: \Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}. \quad (4)$$

$$2. n = 2: \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (5)$$

Схематично це виглядає так:

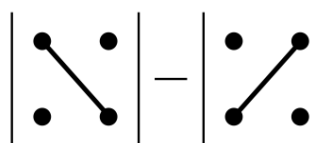


Рис.1.

Отже, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної і побічної діагоналей.

$$3. n = 3. \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \quad (6)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично обчислення за правилом трикутників здійснюється так:

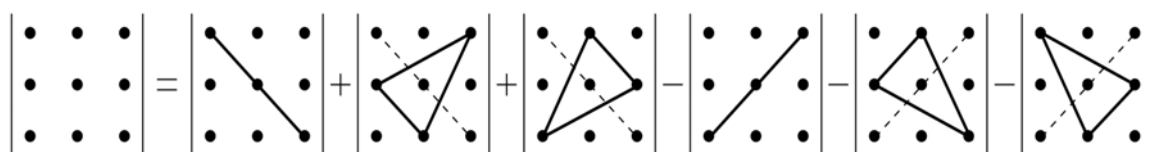


Рис. 2.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який одержимо з даного визначника шляхом викреслення i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких стоїть цей елемент. Наприклад, для визначника Δ_3 міnor $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його міnor, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Знаки міnorів для

елементів Δ_2 : $\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$, для Δ_3 : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Теорема Лапласа. Визначник Δ_n дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад,

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} - \text{розклад визначника за елементами } i\text{-го рядка, } i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} - \text{розклад за елементами } j\text{-го стовпця, } j = \overline{1, n}.$$

Обчислення Δ_n за теоремою Лапласа при великих n є досить громіздким, а тому на практиці визначник доцільніше звести до верхнього (нижнього) трикутного вигляду за допомогою **елементарних перетворень**:

1. визначник не зміниться, якщо до елементів його рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число;
2. перестановка рядків (стовпців) змінює знак визначника;
3. при множенні елементів рядка (стовпця) на число $\alpha \neq 0$ треба поділити визначник на це число.

Будемо у таких перетвореннях використовувати такі позначення: $e_i \leftrightarrow e_j$ – переставляння i -го та j -го рядків, αe_i – множення i -го рядка

на α , $e_i + \alpha e_j$ – додавання до i -го рядка відповідних елементів j -го рядка, помножених на α .

Приклади розв’язання типових завдань

Перемножимо матриці:

Приклад 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-6 & -1+0-2 & 2+0+2 \\ 6+4+15 & -3+0+5 & 6+4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 25 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$

Приклад 3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$

Приклад 4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

Приклад 5. Якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

Для квадратної матриці $A_{n \times n}$ можна обчислювати степінь $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ разів}}.$

Аналогічно многочлену від числової змінної $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ вводиться поняття многочлена від матриці:

$$P(A) = a_0 \cdot E_n + a_1A + \dots + a_kA^k \dots$$

Приклад 6. Обчислимо $f(A)$, якщо $f(x) = 3 - 4x + 2x^2$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} f(A) &= 3E_2 - 4A + 2A^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обчислимо визначники:

Приклад 7. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$

Приклад 8.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 \cdot 1 = 3.$$

Приклад 9. Обчислимо визначник $\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

◀ **1-ий спосіб** (розкладемо за елементами 4-го рядка):

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= -1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -16 + 18 + 0 - 18 + 48 + 0 + 2(8 + 18 + 0 - 6 - 24 + 0) = 24. \end{aligned}$$

2-ий спосіб (зведемо до трикутного вигляду):

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} e_2 + e_1 \\ e_3 + e_1 \\ e_4 - e_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} (5e_2 - 3e_3) = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-8)(-3) = 24. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Перемножте матриці:

$$1. (2 \ 3 \ 4 \ 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad 2. (1 \ 2 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 3 \ 1); \quad 4. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} (-1 \ 4 \ 2);$$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot A^T - ?;$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad 8. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$9. (3 \ 4 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 10. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 11. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть $f(A)$, якщо:

$$12. f(x) = x^2 + 8x + 7, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad 13. f(x) = x^2 + 16x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 3 & -14 \end{pmatrix};$$

$$14. f(x) = 3x^2 + 2x - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 15. f(x) = x^2 + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть визначники:

$$16. \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad 17. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad 18. \begin{vmatrix} a+b & a \\ a^2 & a^2 - ab + b^2 \end{vmatrix}; \quad 19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 21. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчисліть визначники а) методом розкладу за елементами рядка або стовпця; б) зведенням до трикутного вигляду:

$$22. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 23. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad 24. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Розв'яжіть рівняння:

$$25. \begin{vmatrix} x^2 - 4 & -1 \\ x - 2 & x + 2 \end{vmatrix} = 0; \quad 26. \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0; \quad 27. \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x + 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$28. \text{ Розв'яжіть нерівність: } \begin{vmatrix} 2 & x + 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0.$$

Відповіді. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} -3 & 7 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ -2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 20 & 10 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$;

6. $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -2 & 43 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$; 9. $\begin{pmatrix} 18 & 8 & -2 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & 5 \\ -3 & 22 & 18 \end{pmatrix}$;

11. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 16 \\ 2 & 23 & 27 \\ 14 & 17 & 18 \end{pmatrix}$; 12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 14. $\begin{pmatrix} 18 & 13 & 1 \\ 24 & 21 & -4 \\ 9 & 11 & 8 \end{pmatrix}$; 15. $\begin{pmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$;

16. 5; 17. $\sin(\alpha - \beta)$; 18. b^3 ; 19. -12; 20. -10;
 21. $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\beta - \gamma)$; 22. 0; 23. 42; 24. 1; 25. $x = 2$;
 26. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 27. $x \in \{-10, 2\}$; 28. $x \in [-6, -4]$.

§2. Обернена матриця. Матричні рівняння

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці $A_{n \times n}$, якщо вона задовольняє умову:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n. \quad (1)$$

Для існування оберненої матриці необхідно і достатньо, щоб $\det A \neq 0$, тобто матриця A має бути **невиродженою**.

Обернена матриця обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*. \quad (2)$$

Тут A^* – так звана **присднана матриця**, вона складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці.

Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1. обчислюємо $\det A$, якщо $\det A = 0$, то матриця A **необоротна**, A^{-1} не існує, інакше до п.2;
2. транспонуємо матрицю A ;
3. обчислюємо алгебраїчні доповнення матриці A^T , записуємо присдану матрицю;
4. записуємо A^{-1} за формулою (2).

Обернену матрицю використовують при розв'язанні матричних рівнянь. Нехай A і B – невідроджені матриці, X – невідома матриця. Тоді:

1. $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$;
2. $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$;
3. $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.

Приклади розв'язання типових завдань

Обчислимо обернені матриці:

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

◀ $\det A = 1 \neq 0$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$. ▶

Приклад 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

◀ $\det A = -15 \neq 0$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, обчислюємо A_{ij} для A^T :

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = -(-5), \quad A_{13} = -10,$$

$$A_{21} = -(-8), \quad A_{22} = 11, \quad A_{23} = -10,$$

$$A_{31} = 7, \quad A_{32} = -(-4), \quad A_{33} = -5.$$

За формулою (2) маємо: $A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 8 & 11 & -10 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Перевірка:

$$AA^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 8 & 11 & -10 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = E_3. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Знайдіть обернені матриці:

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; 3. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; 4. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}; 6. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; 7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть матричні рівняння:

$$8. AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9. AX = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$10. XA = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix};$$

$$11. XA = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

12. $AXB=C$, где $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

13. $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$.

Bidnovidi. 1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -7 \\ -3 & -9 & -17 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 21 & -10 & -4 \\ -10 & 5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 7. необоротна; 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$$9. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; 10. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; 11. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; 13. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

§3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Формули

Крамера. Ранг матриці. Метод Гаусса

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має такий загальний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (1)$$

де x_i – невідомі, $i = \overline{1, n}$, a_{ij} – коефіцієнти системи, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, b_i ($i = \overline{1, m}$) – вільні члени.

Систему (1) можна записати скорочено у матричному вигляді

$$AX = B, \quad (2)$$

де $A_{m \times n}$ – матриця коефіцієнтів системи, B – стовпець вільних членів.

Система рівнянь (1) називається **однорідною**, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулеві, тобто $b_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, і **неоднорідною**, якщо хоча б один з них відмінний від нуля.

Система рівнянь (1) називається **сумісною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **несумісною**, якщо не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного розв'язку.

Дві системи з однаковим переліком змінних називають **еквівалентними**, якщо множини їх розв'язків співпадають (зокрема, обидві несумісні).

Якщо кількість рівнянь і кількість невідомих у системі (2) однакова, тобто матриця $A_{n \times n}$ – квадратна і невироджена ($\det A \neq 0$), то така система має єдиний розв'язок, який можна знайти матричним методом.

$$X = A^{-1}B \quad (3)$$

Якщо у СЛАР (2) $AX=B$ матриця $A_{n \times n}$ – квадратна і невироджена, то система має єдиний розв'язок, який можна визначити за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (4)$$

де $\Delta = \det A$ – головний визначник системи, а визначники Δ_k дістаємо з Δ заміною k -го стовпця на стовпець вільних членів:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\dots,n$$

Виберемо у прямокутній матриці $A_{m \times n}$ визначник k -го порядку, $1 \leq k \leq \min(n, m)$, складений із елементів матриці, що стоять на перетині довільних k рядків і k стовпців. Такий визначник називають **мінором матриці k -го порядку**.

Означення. Рангом матриці $A_{m \times n}$ називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці. Позначають $r = \text{rang } A$.

Якщо $\text{rang } A = r$, то у матриці A є принаймні один мінор r -го порядку $\Delta_r \neq 0$, а всі можливі мінори порядку $r+1$ рівні нулеві.

Відмінний від нуля мінор порядку r називається **базисним**, а рядки і стовпці, з яких він утворений – **базисними**. Ранг нульової матриці $0_{n \times m}$ дорівнює нулеві. Для невиродженої квадратної матриці n -го порядку $\text{rang } A = n$.

Розглянемо два методи обчислення рангу.

1. Метод обвідних мінорів. Якщо в матриці A є ненульовий елемент, то $r \geq 1$. Обчислюємо далі мінори другого порядку, які містять цей елемент. Нехай знайдено мінор k -го порядку $\Delta_k \neq 0$. Розглядаємо лише ті мінори Δ_{k+1} , які містять у собі Δ_k , якщо всі вони рівні нулеві, то $\text{rang } A = k$, інакше $r \geq k+1$, і т.д.

2. Метод елементарних перетворень

Елементарними перетвореннями матриці $A_{n \times m}$ називаються наступні:

- переставляння рядків (стовпців);
- множення елементів рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
- додавання до рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

Такими перетвореннями матрицю A зводимо до *східчастого* вигляду: у кожному рядку ліворуч від відмінного від нуля елемента стоять нулі, крайній зліва ненульовий елемент кожного наступного рядка знаходиться правіше крайнього ненульового елемента попереднього рядка, нульові рядки стоять нижче ненульових.

Матриця, яку одержуємо з A внаслідок елементарних перетворень, називається *еквівалентною*, записують $A \sim B$.

Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Дослідження і розв'язання загальної СЛАР.

Теорема Кронекера-Капеллі

Якщо до матриці A у системі (2) дописати праворуч стовпець вільних членів, то дістанемо так звану *розширену матрицю*:

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \quad (5)$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система (2) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи A дорівнював рангу розширеної матриці:

$$\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$$

Метод Гаусса є основним методом розв'язання систем лінійних рівнянь, на ньому ґрунтуються майже всі алгоритми лінійної алгебри.

1. Розв'язання СЛАР методом Гаусса.

Розглянемо схему єдиного ділення методу Гаусса для виключення невідомих при розв'язанні СЛАР $AX = B$, $A_{m \times n}$.

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Зведемо матрицю системи до східчастого вигляду, послідовно виключаючи невідомі:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array} \right).$$

Якщо $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = r$, то $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$.

Система має безліч розв'язків: x_1, x_2, \dots, x_r – базисні невідомі, x_{r+1}, \dots, x_n – вільні.

В оберненому ході методу Гаусса, виражаємо базисні невідомі через вільні (мінор Δ_r зводимо до одиничної матриці).

Якщо $\text{rang} A < \text{rang} \tilde{A}$, тобто існують $b'_k \neq 0$, $k = r + 1, \dots, m$, то система несумісна.

2. Обчислення визначника Δ_n .

Здійснюємо прямий хід методу Гаусса для елементів визначника Δ_n . Якщо не було перестановок рядків чи стовпців, то визначник дорівнює добутку ведучих елементів:

$$\Delta_n = a_{11} \cdot a'_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n)}.$$

Якщо при виключеннях ми переставляли рядки, то кожного разу визначник домножаємо на (-1) .

3. Обчислення рангу матриці A .

При знаходженні рангу матриці A зведемо її до східчастого вигляду. Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків у ній.

4. Обчислення оберненої матриці.

Для знаходження оберненої матриці для $A_{n \times n}$, за умови $\det A \neq 0$, застосовуємо метод Гаусса до розширеної матриці, у правій частині якої стоїть одинична матриця E_n :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \sim \text{після } n \text{ кроків} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \end{array} \middle| A^{-1} \right).$$

Праворуч дістанемо обернену матрицю.

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Матричним методом розв'яжемо систему:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$$

◀ Для матриці системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ знайдемо обернену:

$$\det A = 8 - 9 = -1 \neq 0, A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

тому
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } X = A^{-1}B, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 1$. ▶

Приклад 2. За формулами Крамера розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

◀ Знайдемо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4,$$

$\Delta \neq 0$, отже, система має єдиний розв'язок. Обчислюємо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -8,$$

Тому $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2$. ▶

Приклад 3. Знайдемо ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ методом обвідних

мінорів.

◀ $A \neq 0$, тому $r \geq 1$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r \geq 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\text{rang } A = 2$. ►

Приклад 4. Знайдемо $\text{rang } A$ з пр.3 методом елементарних перетворень.

◀ Після очевидних перетворень маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 + 3e_2 \\ e_5 + 2e_2 \\ -e_2 \leftrightarrow e_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e_2}{2} \\ \frac{e_3}{11} + \frac{e_2}{2} \\ \frac{e_4}{5} - \frac{e_2}{2} \\ e_5 + e_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $\text{rang } A = 2$. ►

Приклад 5. Методом Гаусса обчислимо

$$A^{-1}, \text{rang } A, \det A, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Дopiшемо праворуч до матриці A одиничну матрицю і виконаємо наступні перетворення за методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \leftrightarrow e_2 \\ e_1 - 2e_2 \\ e_3 + e_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \leftrightarrow e_3 \\ e_2 - 4e_3 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e_3 \\ e_2 + e_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} (e_1 + e_2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \text{rang} A = 3, \det A = -1. \blacktriangleright$$

Приклад 6. Методом Гаусса дослідимо на сумісність і, в разі сумісності, розв'яжемо СЛАР із розширеною матрицею:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

$$\blacktriangleleft \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} e_2 - e_1 \\ e_3 - e_1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -e_2 \\ e_3 - 2e_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{rang} A = 2, \text{rang}(A|B) = 3$, система несумісна. \blacktriangleright

Приклад 7. Методом Гаусса дослідимо на сумісність і, в разі сумісності, розв'яжемо СЛАР із розширеною матрицею:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

\blacktriangleleft

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 2e_2 + e_1 \\ \frac{1}{3}e_3 \\ e_4 - e_2 \\ e_1 \leftrightarrow e_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e_2 \\ e_3 - \frac{e_2}{3} \\ e_4 + \frac{e_2}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) (e_1 - e_2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 = 2 - x_3 - 2x_4 - x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4 - 3x_5, \end{pmatrix} \quad \text{невідомі } x_1 \text{ і } x_2 - \text{базисні, а } x_3, x_4, x_5 - \text{вільні,}$$

$\text{rang} A = \text{rang}(\tilde{A}) = 2$. Система сумісна і має безліч розв'язків

$$(2 - x_3 - 2x_4 - x_5, 1 - 2x_3 - x_4 - 3x_5, x_3, x_4, x_5)^T, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Розв'яжіть системи а) за формулами Крамера; б) матричним методом;

в) методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 = 9; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 = 13; \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5; \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$$

Знайдіть ранг матриць:

$$7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 8. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 9. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 11. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Дослідіть на сумісність системи, задані розширеною матрицею, і, в разі сумісності, знайдіть розв'язок:

$$\begin{aligned}
& 12. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right); \quad 13. \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right); \quad 14. \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); \\
& 15. \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array} \right); \quad 16. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -5 & -2 \end{array} \right); \quad 17. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right); \\
& 18. \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -5 & -7 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -9 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 5 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right); \quad 19. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right); \quad 20. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

- Відповіді.** 1. $(-1, 2)^T$; 2. $(1, 2)^T$; 3. $(-1, 1, -2)^T$; 4. $(-2, 3, 1)^T$; 5. $(-1, 1, 0)^T$; 6. $(-2, -1, 1)^T$; 7. 3; 8. 2; 9. 4; 10. 2; 11. 2; 12. $(-1, 0, 2, 1)^T$; 13. $(2 - x_3 - 2x_4 - x_5, 1 - 2x_3 - x_4 - 3x_5, x_3, x_4, x_5)^T, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; 14. $(-2 - 2x_2, x_2, -2 - 3x_2, 2 + 2x_2)^T, x_2 \in \mathbb{R}$; 15. \emptyset ; 16. $(1 + x_3 - 2x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4)^T, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; 17. \emptyset ; 18. $(-2 - x_3 + x_4 + x_5, -1 - 3x_3 - 3x_4, x_3, x_4, x_5)^T, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; 19. $(-1, 0, 2, 1)^T$; 20. \emptyset .

§4. Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$AX = 0, \quad A_{m \times n}. \quad (1)$$

Однорідна система завжди сумісна, вона має нульовий (так званий *тривіальний*) розв'язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Якщо ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих, тобто $r_A = n$, то система має єдиний нульовий розв'язок $X = 0$.

Теорема. Однорідна СЛАР (1) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг матриці менший кількості невідомих:

$$r_A < n. \quad (2)$$

Наслідок 1. Якщо у системі (1) кількість рівнянь менша кількості невідомих ($m < n$), то система має нетривіальні розв'язки.

Наслідок 2. Однорідна система (1) з квадратною матрицею $A_{n \times n}$ має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли визначник системи рівний нулеві:

$$\Delta = \det A = 0.$$

Означення. Довільна система $n - r$ лінійно незалежних розв'язків e_1, e_2, \dots, e_{n-r} однорідної СЛАР (1), у якої $\text{rang} A = r$, називається **фундаментальною системою розв'язків** (ФСР), якщо довільний розв'язок системи (1) лінійно виражається через них.

Отже, ФСР є базисом у просторі розв'язків однорідної системи.

Зокрема, ФСР, у якій $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_{n-r} = (0, 0, \dots, 1)$, називається **нормальною**

Загальний розв'язок однорідної СЛАР має вигляд:

$$X = C_1 e_1 + C_2 e_2 + \dots + C_{n-r} e_{n-r}, \quad (3)$$

де C_i ($i = \overline{1, n-r}$) – довільні сталі, e_1, e_2, \dots, e_{n-r} – ФСР.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР.

Встановимо зв'язок між розв'язками неоднорідної СЛАР $AX = B$ з матрицею $A_{m \times n}$ і відповідної їй однорідної системи $AX = 0$.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідної системи $y_{з.н.}$ дорівнює сумі довільного часткового розв'язку неоднорідної системи $y_{ч.н.}$ і загального розв'язку відповідної однорідної системи (1) $y_{з.о.}$:

$$y_{з.н.} = y_{ч.н.} + y_{з.о.} \quad (4)$$

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Для однорідної системи $AX = 0$ із заданою матрицею A знайдемо ФСР і загальний розв'язок:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1-3 & 1 \\ 3-2 & 8 & -5 \\ 1-3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

◀ Застосуємо метод Гаусса:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1-3 & 1 \\ 3-2 & 8 & -5 \\ 1-3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 + 3e_1 \\ e_3 + e_1 \\ -e_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-1 \\ 0 & 1-1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 + e_2 \\ e_3 + 2e_2 \\ e_3 + 2e_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-3 \\ 0 & 1 & -1-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1, x_2 - \text{базисні невідомі, } x_3, x_4 - \text{вільні, } \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + 3x_4, \\ x_2 &= x_3 + 2x_4, \end{aligned}$$

ФСР: $e_1 = (-2, 1, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, 2, 0, 1)^T$. Позначимо $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, $C_1, C_2 - \text{const.}$

Тоді загальний розв'язок системи матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Для однорідної системи $AX = 0$ із заданою матрицею A знайдемо ФСР і загальний розв'язок:

$$\blacktriangleleft A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4e_1 + e_2 \\ 3e_1 + e_3 \\ e_4 - e_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & -9 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} (9e_2 + 5e_3) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 41 & 57 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} (4e_3 + 41e_4) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 41 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 269 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A = 4,$$

система має тільки нульовий розв'язок. ►

Приклад 3. Для неоднорідної системи із прикладу 7 §3 запишемо загальний розв'язок у вигляді $y_{з.н.} = y_{ч.н.} + y_{з.о.}$

◀ Покладемо вільні невідомі рівні нулеві, тоді $y_{ч.н.} = (2, 1, 0, 0, 0)^T$, $\Phi CP: e_1 = (-1, -2, 1, 0, 0)^T$, $e_2 = (-2, -1, 0, 1, 0)^T$, $e_3 = (-1, -3, 0, 0, 1)^T$.

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ де } C_1, C_2, C_3 - \text{довільні сталі.} \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Для однорідної системи $AX = O$ з матрицею A знайдіть загальний розв'язок:

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & -5 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 5. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad 6. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix};$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad 8. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

Для неоднорідної системи $AX = B$, заданої розширеною матрицею, запишіть загальний розв'язок у вигляді $y_{з.н.} = y_{ч.н.} + y_{з.о.}$:

$$9. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right); \quad 10. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -5 & -2 \end{array} \right); \quad 11. \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right);$$

$$12. \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -5 & -7 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -9 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 5 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Відповіді. 1. $X = 0$; 2. $X = C(1, -2, 1)^T$, $C - const$;

3. $X = C_1(3, 2, 0, 1)^T + C_2(-2, 1, 1, 0)^T$, $C_1, C_2 - const$;

4. $X = C(2, 1, 0, 1)^T$, $C - const$; 5. $X = C(0, 1, 1, -1)^T$, $C - const$;

6. $X = C_1(0, 2, 1, 0)^T + C_2(0, -4, 0, 1)^T + C_3(1, -2, 0, 0)^T$, $C_1, C_2, C_3 - const$;

7. $X = 0$; 8. $X = C_1(-2, 1, 0, 0)^T + C_2(-3, 0, 1, 1)^T$, $C_1, C_2 - const$;

9. $X = (14, -9, 0)^T + C(1, -2, 1)^T$, $C - const$;

$$10. X = (1, 0, 0, 0)^T + C_1(1, -1, 1, 0)^T + C_2(-2, 1, 0, 1)^T, C_1, C_2 - const;$$

$$11. X = (-2, 0, -2, 2)^T + C(-2, 1, -3, 2)^T, C - const;$$

$$12. X = (-2, -1, 0, 0, 0)^T + C_1(-1, -3, 1, 0, 0)^T + C_2(1, -3, 0, 1, 0)^T + C_3(1, 0, 0, 0, 1)^T, \\ C_1, C_2, C_3 - const.$$

Розділ II. Векторна алгебра

§1. Лінійні операції над векторами. Метод координат

Напрявлений відрізок \overrightarrow{AB} називається **вектором**, A – початок, B – кінець вектора. Позначають також \vec{a} .

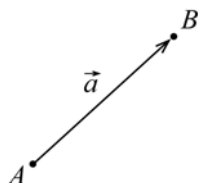


Рис. 3.

Відстань між точками A і B називають **модулем** або **довжиною** вектора, позначають $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$. **Орт** вектора \vec{a} позначають \vec{a}_0 – це одиничний вектор, напрям якого збігається з \vec{a} (Рис.4).

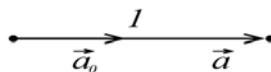


Рис. 4.

Якщо початок вектора збігається з кінцем ($A = B$), то вектор називають **нульовим** $\vec{0}$, його модуль дорівнює нулю, а напрям не визначений.

Надалі будемо розглядати **вільні вектори**, тобто такі, початок яких вибирається у просторі довільно. В механіці, наприклад, використовують ще **ковзні** (початок можна переміщувати вздовж деякої прямої) і **зв'язані** вектори (початком є фіксована точка).

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають **одиничним**.

Вектори \vec{a} і \vec{b} називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній або паралельних прямих, позначають $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (Рис. 5).

Вектори \vec{a} і \vec{b} називають **рівними** $\vec{a} = \vec{b}$, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

Три або більше векторів називаються **компланарним**, якщо вони лежать на одній або паралельних площинах (Рис.6).

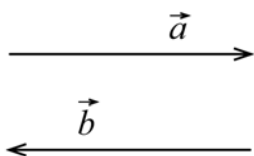


Рис. 5.

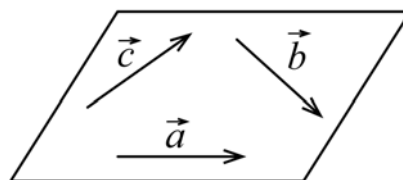


Рис.6.

Додавання векторів. Сумою векторів \vec{a} і \vec{b} називають вектор \vec{c} , який можна побудувати:

– за **правилом паралелограма**, у якого сторонами є вектори \vec{a} і \vec{b} , а $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ – його діагональ (Рис.7);

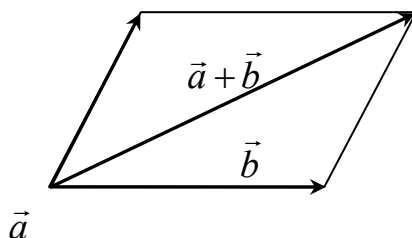


Рис.7.

– за **правилом трикутника** (Рис.8), якщо початок вектора \vec{b} відкласти з кінця вектора \vec{a} , то \vec{c} з'єднає початок вектора \vec{a} з кінцем вектора \vec{b} .

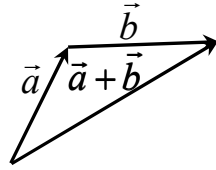


Рис.8.

Правило трикутника зручно використовувати для побудови суми скінченної кількості векторів: з кінця першого вектора будуємо другий, з кінця другого – третій і т.д. Вектор, що з'єднає початок першого вектора з кінцем останнього, буде їх сумою (Рис.9).

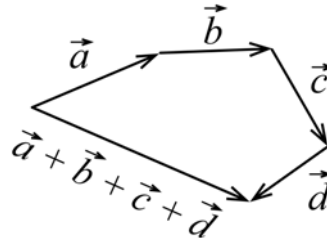


Рис.9.

Множення вектора на число. Добутком вектор \vec{a} на число $\alpha \in \mathbb{R}$ називають вектор $\alpha \cdot \vec{a}$, довжина якого дорівнює $|\alpha| |\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом \vec{a} , якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$, то $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Зокрема, $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ – вектор, протилежний вектору \vec{a} .

Різницею векторів $\vec{a} - \vec{b}$ називають суму вектора \vec{a} і протилежного до \vec{b} вектора (Рис.10).

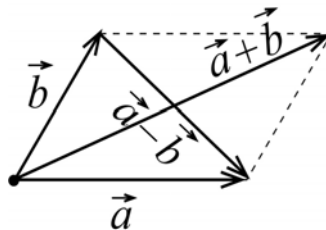


Рис.10.

Властивості лінійних операцій над векторами

Для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і дійсних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справджуються властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. існує протилежний вектор $(-\vec{a})$ такий, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \vec{a}$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$;
8. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$;

З означення добутку вектора на число випливає, що вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Множину геометричних векторів із визначеними операціями додавання елементів і множення на число, для яких виконуються властивості 1 – 8, називають лінійним векторним простором L . Одновимірний, двовимірний і тривимірний простори позначають відповідно $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Базисом у просторі \mathbb{R}^3 називають упорядковану трійку некопланарних векторів $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, у просторі \mathbb{R}^2 – упорядковану пару неколінеарних векторів (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , в \mathbb{R}^1 – ненульовий вектор \vec{e}_1 (Рис. 11, 12, 13).

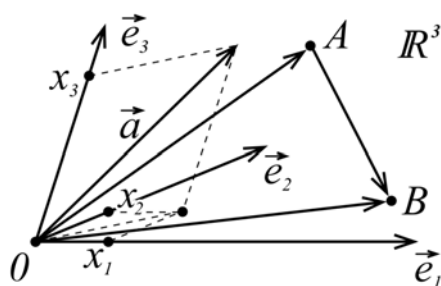


Рис. 11.

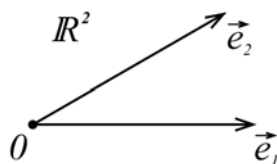


Рис. 12.

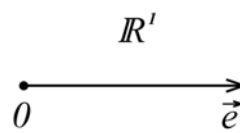


Рис. 13.

Розклад вектора за базисом у \mathbb{R}^3 : $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, числа x_1, x_2, x_3 – **координати вектора** у цьому базисі. Використовують запис $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$.

Якщо $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$, то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3,$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \quad \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Умова колінеарності: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$.

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то:

– координати $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

– координати точки M , яка ділить відрізок AB у відношенні λ (Рис. 14), тобто $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, обчислюють за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1;$$

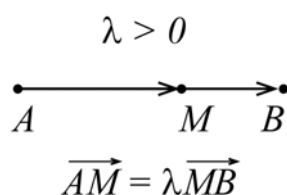


Рис. 14а).

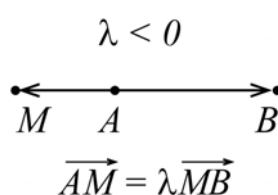


Рис. 14б).

– зокрема, при $\lambda = 1$ маємо формули поділу відрізка навпіл:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

У декартовій прямокутній системі координат (ДПСК) маємо: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – розклад вектора за ортонормованим базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; **напрямні косинуси вектора:**

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

для яких справджується тотожність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$;

координати орта $\vec{a}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$;

відстань між точками $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 30$. Обчислимо $|\vec{a} - \vec{b}|$.

◀ $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ є діагоналями паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} (Рис. 10).

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін, тому $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2} = 20$. ▶

Приклад 2. Відомі координати вершин $\triangle ABC$: $A(4,1)$, $B(7,5)$, $C(-4,7)$. Обчислимо довжину бісектриси AD (Рис. 15).

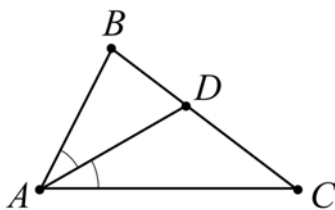


Рис. 15.

◀ Знайдемо довжини сторін

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = 5, \quad AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = 10.$$

За властивістю бісектриси точка $D(x, y)$ ділить відрізок CB у відношенні:

$$\lambda = \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = 2, \quad \text{за формулами поділу відрізка у відношенні } \lambda$$

обчислюємо її координати $x = \frac{10}{3}, y = \frac{17}{3}$. Тому довжина $AD = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція.
2. M – точка перетину медіан у $\triangle ABC$, O – довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
3. Задані радіуси-вектори вершин $\triangle ABC: \vec{r}_A = (1, 2, 3), \vec{r}_B = (3, 2, 1), \vec{r}_C = (1, 4, 1)$. Доведіть, що $\triangle ABC$ – рівносторонній.
4. В трикутнику ABC відомі вершини: $A(3, -1, 5), B(4, 2, -5), C(-4, 0, 3)$. Знайдіть довжину медіани AM .
5. Знайдіть координати вектора \vec{a} , якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ і він утворює з координатними осями рівні гострі кути.
6. Радіус-вектор точки M утворює з віссю Oy кут 60° , з Oz кут 45° , $|\overrightarrow{OM}| = 8$. Знайдіть координати точки M , якщо $x_M < 0$.
7. Знайдіть координати центра мас M у трикутнику ABC , якщо $A(13, 5), B(4, -3), C(-2, 4)$.

8. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$ такі, що $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$. Знайдіть кут (\vec{a}, \vec{b}) .

9. Знайдіть розклад вектора $\vec{c} = (-1, 7)$ за векторами $\vec{a} = (4, -2)$ і $\vec{b} = (3, 5)$.

10. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = (\alpha, -2, 5)$ і $\vec{b} = (1, \beta, -3)$ колінеарні?

11. Відомі три вершини паралелограма $ABCD$: $A(3, -4, 7)$,

$B(-5, 3, -2), C(1, 2, -3)$. Знайдіть координати вершини D .

12. У паралелограмі $ABCD$ відомі вершини $A(1, 3, 5), B(-1, 2, 1)$ і точка перетину його діагоналей $O(1, 0, 1)$. Знайдіть координати вершин C і D .

13. Відрізок AB , де $A(3, -2), B(6, 4)$, точками C і D поділено на три рівні частини. Знайдіть координати точок C і D .

14. Знайдіть вектор \vec{c} напрямлений по бісектрисі кута між векторами $\vec{a} = (7, -4, -4)$ і $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, якщо $|\vec{c}| = 5\sqrt{6}$.

15. Відомі координати вершин $\triangle ABC$: $A(3, -5), B(3, -3), C(-1, -2)$. Обчисліть довжину бісектриси AD .

16. Знайдіть центр кола, що проходить через три задані точки: $A(-3, 6), B(9, -10), C(-5, 4)$.

17. Знайдіть центр кола, що проходить через точку $A(2, -1)$ і дотикається обох координатних осей.

18. Знайдіть центр кола, що проходить через точку $(-4, 2)$ і дотикається осі Ox у точці $(2, 0)$.

Відповіді. 4. 7; 5. $(2, 2, 2)$; 6. $M(-4, 4, 8\sqrt{2})$; 7. $M(5, 2)$; 8. 150° ;

9. $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$; 10. $\alpha = -\frac{5}{3}, \beta = \frac{6}{5}$; 11. $D(9, -5, 6)$;

12. $C(1, -3, -3), D(3, -2, 1)$; 13. $C(4, 0), D(5, 2)$; 14. $\frac{5}{3}(1, -7, 2)$;
 15. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$; 16. $(3, -2)$; 17. $(1, -1)$ і $(5, -5)$; 18. $(2, 10)$.

§ 2. Полярна система координат. Криві у полярній системі

Полярна система координат це сукупність точки O (*полюса*) і променя $\overrightarrow{O\rho}$ – *полярної осі*. Координати точки $M(\rho, \varphi)$ у полярній системі: *полярний радіус* $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ і *полярний кут* $\varphi = \left(\overrightarrow{O\rho}, \overrightarrow{OM} \right)$ – кут між полярною віссю і радіусом-вектором точки (Рис. 16).

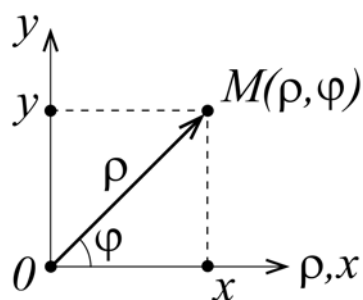


Рис. 16.

Декартові координати точки $M(x, y)$, де O – початок координат, а вісь Ox співпадає з полярною, виражаються через полярні за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

а полярні координати через декартові:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Приклади розв'язання типових завдань

Побудуємо криві, задані рівняннями:

Приклад 1. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$.

◀ ОДЗ: $\varphi \in \mathbb{R}$, $T = 2\pi$ – період, функція парна, на інтервалі $[0, \pi]$ спадає від $2a$ до 0, графік симетричний відносно полярної осі. Це *права кардіоїда* (Рис. 17). ▶

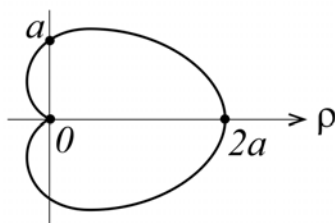


Рис. 17.

Приклад 2. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

◀ Перейдемо від декартових до полярних координат: $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

ОДЗ: $\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. Функція парна, період $T = \pi$,

при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ спадає від a до 0. графік симетричний відносно полярної осі і

на проміжку $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ періодично повторюється. Криву називають *лемніскатою Бернуллі* (Рис. 18). ▶

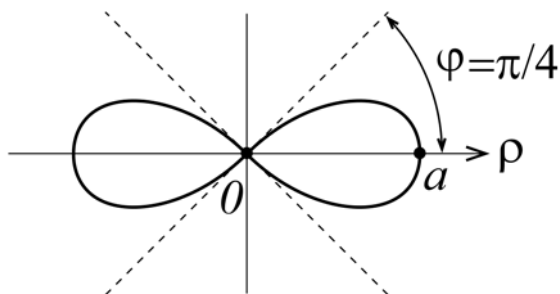


Рис. 18.

Приклад 3. $\rho = \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.

◀ $\rho = \sqrt{2} \left(\sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sin \varphi + \cos \varphi$. Домножимо обидві частини на ρ і перейдемо до декартових координат:
 $x^2 + y^2 = x + y \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ — це коло з центром $O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і радіусом $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Рис. 19) ▶

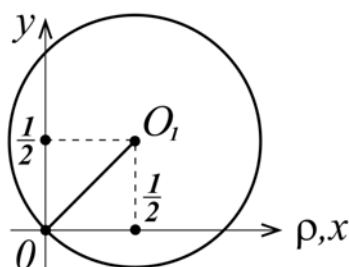


Рис. 19.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Запишіть декартові координати точок, заданих полярними координатами:

1. $A\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$; 2. $B(2, \pi)$; 3. $C\left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Запишіть полярні координати точок, заданих декартовими координатами:

4. $A(\sqrt{3}, 1)$; 5. $B(-2, -2)$; 6. $C(-1, \sqrt{3})$.

Запишіть рівняння кривих у полярних координатах:

7. $y = x$; 8. $y = -2$; 9. $x = 3$; 10. $x + y = 2$; 11. $x^2 + y^2 = 9$; 12. $x^2 + y^2 = 2x$;
13. $x^2 + y^2 = 4y$.

Запишіть рівняння кривих у декартових координатах :

14. $\rho = 2$; 15. $\operatorname{tg} \varphi = -1$; 16. $\rho \cos \varphi = 2$; 17. $\rho \sin \varphi = -1$; 18. $\rho = 2a \cos \varphi$;
19. $\rho = 2b \sin \varphi$.

Побудуйте криві у полярних координатах:

20. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$; 21. $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$; 22. $\rho = a \sin 3\varphi$; 23. $\rho = 2 - \cos 4\varphi$;
24. $\rho = a \cos \frac{\varphi}{3}$.

Відповіді. 1. $A(0, -3)$; 2. $B(-2, 0)$; 3. $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4. $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$;

5. $B\left(2\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$; 6. $C\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$; 7. $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 8. $\rho = -\frac{2}{\sin \varphi}, \varphi \in (-\pi, 0)$;

9. $\rho = \frac{3}{\cos \varphi}, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 10. $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$; 11. $\rho = 3$; 12. $\rho = 2 \cos \varphi$;

13. $\rho = 4 \sin \varphi$; 14. $x^2 + y^2 = 4$; 15. $y = -x$; 16. $x = 2$; 17. $y = -1$;
18. $x^2 + y^2 = 2ax$; 19. $x^2 + y^2 = 2by$; 20. Рис. 20;

21. Рис. 21; 22. Рис. 22; 23. Рис. 23; 24. Рис. 24.

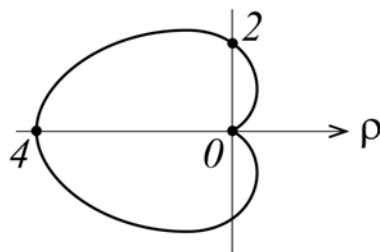


Рис. 20.

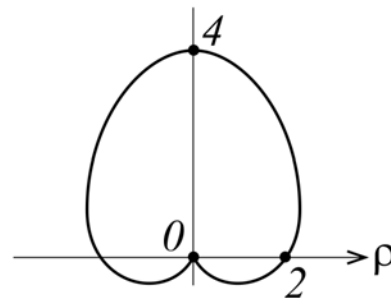


Рис. 21.

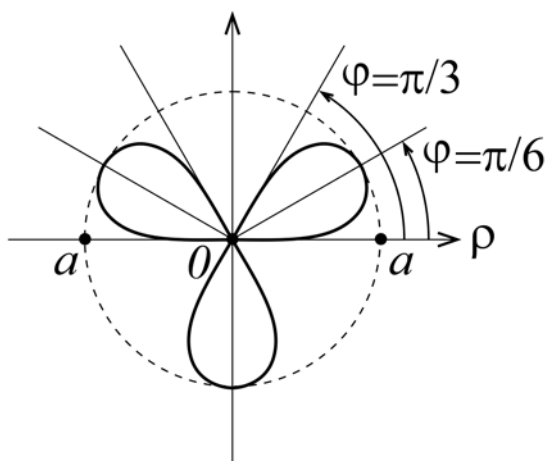


Рис. 22.

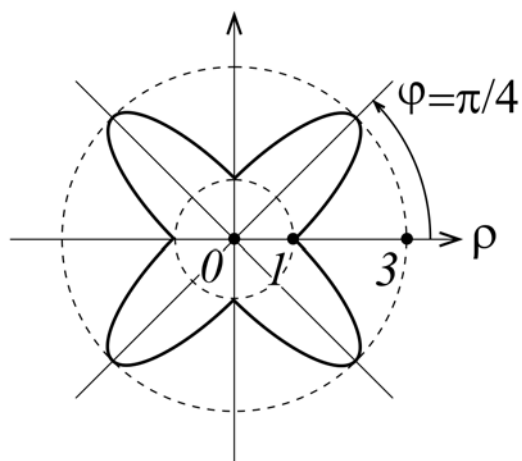


Рис. 23.

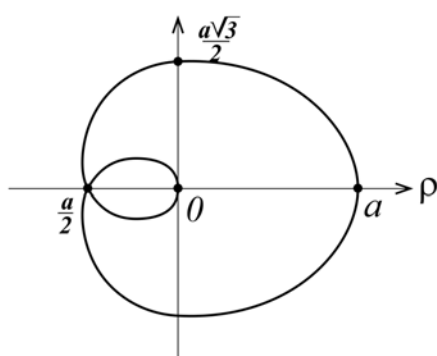


Рис. 24.

§ 3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} називається число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \text{ де } \alpha - \text{кут між ними.} \quad (1)$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (комутативність);
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (асоціативність стосовно скалярного множника);

$$3. \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (дистрибутивність);}$$

$$4. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

$$5. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ (умова ортогональності векторів).}$$

Якщо у ДПСК $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то справджуються формули:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \quad (3)$$

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4)$$

У механіці робота по переміщенню матеріальної точки уздовж вектора \vec{S} під дією сталої сили \vec{F} , напрямленої під кутом α (Рис. 25), дорівнює

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} \quad (5)$$

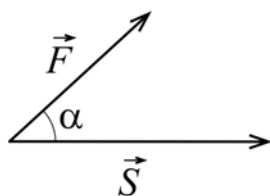


Рис. 25.

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Обчислимо $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}} (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\left(\overset{\wedge}{\vec{a}}, \vec{b} \right) = 120^\circ$.

$$\blacktriangleleft \vec{a}\vec{b} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b}) = \frac{(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{2|\vec{a}|^2 + \vec{a}\vec{b} - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайдемо кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$.

◀ Знайдемо координати діагоналей: $\vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (2, 3, -1)$, тому

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{4 - 3 - 1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, кут між ними $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Обчисліть:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

2. Відомі вектори $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, де $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, кут між ними $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3. Обчисліть довжини діагоналей паралелограма зі сторонами

$$\vec{a} = 5\vec{m} - 7\vec{n}, \vec{b} = 3\vec{m} - 4\vec{n}, \text{ якщо } |\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, \text{ кут між ними } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

4. Знайдіть $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 5\vec{p} - 7\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$, кут між ними $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

5. Знайдіть кут між векторами \vec{p} і \vec{q} ,

якщо $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b}$, вектори \vec{a}, \vec{b} – одиничні і взаємно перпендикулярні.

6. Знайдіть кут між векторами \vec{p} і \vec{q} , якщо $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\pi}{6}$.
7. Знайдіть $\text{pr}_{\vec{b}}(\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 60^\circ$.
8. Обчисліть $\text{pr}_{3\vec{m}+2\vec{n}}(\vec{m} - 4\vec{n})$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, кут між ними $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
9. Дано: $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 2, -2)$. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, кут між ними.
10. Знайдіть $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$, якщо $\vec{a} = (5, 2, 5)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$.
11. Відомі вершини трикутника: $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Знайдіть внутрішній кут при вершині B .
12. Знайдіть косинус кута між діагоналями AC і BD паралелограма, якщо відомі його вершини $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$, $C(-3, 3, -3)$.
13. Відомі вектори $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (-1, 1)$. Знайдіть вектор \vec{x} , якщо $\vec{x} \cdot \vec{a} = 13$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -3$.
14. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут при вершині.
15. Одиначні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ такі, що $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Обчисліть $\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.
16. Три сили $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, прикладені в одній точці. Обчисліть роботу їх рівнодіючої при прямолінійному переміщенні точки від $A(5, 3, -7)$ до $B(4, -1, -4)$.
17. Знайдіть вектор \vec{x} , якщо він ортогональний до векторів $\vec{a} = (2, 3, -1)$ і $\vec{b} = (1, -2, 3)$, а також $\vec{x} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

Відповіді. 1. а). $\sqrt{3}$; б). $10+\sqrt{3}$; 2. 7; 3. $2\sqrt{93}, 2\sqrt{7}$; 4. $\sqrt{113}$; 5. $\frac{\pi}{4}$; 6. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$;
 7. -2; 8. $-\sqrt{21}$; 9. -6, 180° ; 10. 6; 11. 45° ; 12. $\frac{43}{25\sqrt{13}}$; 13. $\vec{x} = (5, 2)$;
 14. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; 15. $-\frac{3}{2}$; 16. 14; 17. (-3, 3, 3).

§ 4. Векторний і мішаний добуток векторів

1. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається вектор, що позначається $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$, який задовольняє умови :

1. вектор \vec{c} перпендикулярний до кожного з векторів \vec{a} і \vec{b} ;
2. довжина вектора дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \varphi - \text{кут між ними};$$

3. вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку, тобто з кінця вектора \vec{c} найкоротший поворот від \vec{a} до \vec{b} здійснюється проти руху годинникової стрілки (Рис.26).

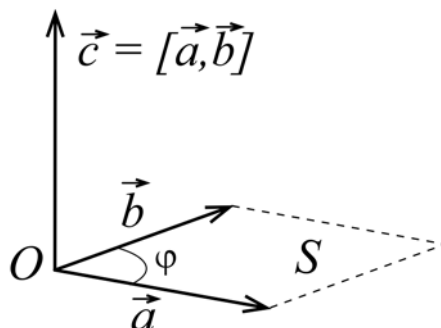


Рис. 26.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (антикомутативність);
2. $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ (асоціативність стосовно скалярного множника);
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$ (дистрибутивність);
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (умова колінеарності векторів).

Якщо у ДПСК вектори задані координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Застосування векторного добутку у геометрії:

Площа паралелограма зі сторонами \vec{a} і \vec{b} дорівнює модулю векторного добутку

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (2)$$

площа трикутника зі сторонами \vec{a} і \vec{b} дорівнює

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (3)$$

зокрема, якщо на площині трикутник заданий координатами вершин

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), \text{ то } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Застосування векторного добутку у механіці:

Якщо тверде тіло закріплене у точці O , а в деякій точці A прикладена сила \vec{F} , то момент сили (Рис. 27) дорівнює

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F} \quad (5).$$

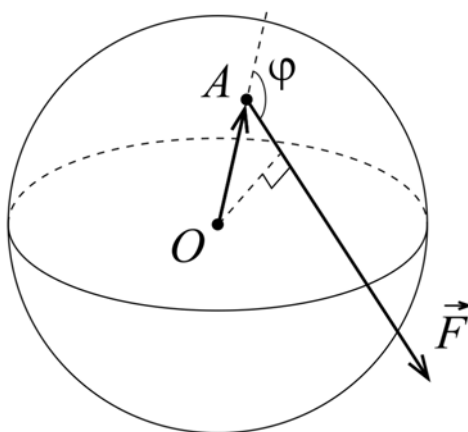


Рис. 27.

2. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів називається їх векторно-скалярний добуток

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \text{ або } \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (6)$$

Мішаний добуток векторів обчислюється через координати векторів за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Застосування мішаного добутку:

1. об'єм паралелепіпеда з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює модулю мішаного добутку (Рис. 28)

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|; \quad (8)$$

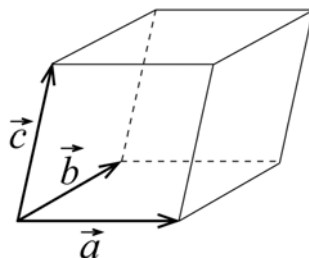


Рис. 28.

2. об'єм піраміди з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$;
3. умова компланарності векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$;
4. якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то трійка векторів права, якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то ліва.

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Дано: $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, де $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Знайдемо площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} .



$$\begin{aligned} S &= |(3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (\vec{p} + 3\vec{q})| = |3(\vec{p} \times \vec{p}) + 9(\vec{p} \times \vec{q}) - 4(\vec{q} \times \vec{p}) - 12(\vec{q} \times \vec{q})| = \\ &= 13|\vec{p} \times \vec{q}| = 13 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 78. \end{aligned}$$

Приклад 2. У трикутнику відомі вершини: $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

Знайдемо висоту $|BD|$.



$$\overrightarrow{AB} = (4, -5, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 4, -3), \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{225 + 144 + 256} = \frac{25}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 5 \Rightarrow \frac{25}{2} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot h \Rightarrow h = 5. \blacktriangleright$$

Приклад 3. Доведемо, що вектори $\vec{p} = (4, 0, 1)$, $\vec{q} = (3, 1, -1)$, $\vec{r} = (0, -2, 1)$ утворюють базис і знайдемо координати вектора $\vec{a} = (0, -8, 9)$ у цьому базисі.

$$\blacktriangleleft \vec{p}\vec{q}\vec{r} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow \text{вектори не компланарні, тобто утворюють}$$

базис.

Нехай $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$, прирівнюючи координати в обох частинах цієї рівності, для невідомих x, y, z маємо систему:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ y - 2z = -8, \\ x - y + z = 9. \end{cases}$$

За формулами Крамера одержимо:

$$\Delta = -10, \Delta_1 = -30, \Delta_2 = 40, \Delta_3 = -20 \Rightarrow x = 3, y = -4, z = 2.$$

$$\text{Отже, } \vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + 2\vec{r}. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Спростіть вираз: $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]$.
2. Спростіть вираз $[3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{p} - 4\vec{q}]$.

3. Обчисліть $\left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|$, $\left| \left(\vec{a} - 2\vec{b} \right) \times \left(2\vec{a} + 3\vec{b} \right) \right|$, якщо $\left| \vec{a} \right| = 2$, $\left| \vec{b} \right| = 3$, $\left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $\left| \vec{m} \right| = 2$, $\left| \vec{n} \right| = 1$, $\left(\vec{m} \wedge \vec{n} \right) = \frac{\pi}{6}$.
5. Знайдіть площу трикутника, зі сторонами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\left| \vec{a} \right| = 2$, $\left| \vec{b} \right| = \sqrt{2}$, $\left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) = \frac{\pi}{4}$.
6. Обчисліть $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, -3, -5)$.
7. Дано: $\vec{a} = (2, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 3, -2)$. Обчисліть: $\left[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} \right]$.
8. Знайдіть вектор \vec{c} , якщо $\left| \vec{c} \right| = 1$, \vec{c} ортогональний до векторів \vec{p} і \vec{q} , утворює тупий кут з віссю Oz , де $\vec{p} = (1, 0, 1)$, $\vec{q} = (1, -2, 0)$.
9. Обчисліть $\left(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} \right) \times \overrightarrow{CB}$, якщо $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$.
10. Знайдіть площу трикутника зі сторонами $\vec{a} = (3, -2, 6)$, $\vec{b} = (1, -4, 1)$.
11. Сила $\vec{F} = (2, -4, 5)$ прикладена у точці $A(4, -2, 3)$. Знайдіть момент сили \vec{M} відносно точки $B(3, 2, -1)$.
12. Відомі вершини паралелепіпеда $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$. Знайдіть його об'єм.
13. Вектор \vec{c} перпендикулярний до векторів \vec{a} і \vec{b} , $\left| \vec{a} \right| = 6$, $\left| \vec{b} \right| = 3$, $\left| \vec{c} \right| = 3$, $\left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) = \frac{\pi}{6}$. Знайдіть $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$.
14. При яких значеннях α вектори $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (4, -2, 1)$, $\vec{c} = (\alpha, -3, -2)$ будуть: 1) компланарними; 2) утворювати праву трійку; 3) ліву трійку?

15. Доведіть, що точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 3)$, $D(2, 1, 1)$ лежать в одній площині.

16. Обчисліть об'єм піраміди з вершинами у точках $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$, $D(3, 2, 4)$ та її висоту $|DO|$.

17. Доведіть, що вектори $\vec{p} = (0, 1, 5)$, $\vec{q} = (3, -1, 2)$, $\vec{r} = (-1, 0, 1)$ утворюють базис і знайдіть координати вектора $\vec{a} = (8, -7, -13)$ у цьому базисі.

Відповіді. 1. $\vec{0}$; 2. $-14[\vec{p}, \vec{q}]$; 3. $3\sqrt{3}, 21\sqrt{3}$; 4. 14; 5. 8; 6. $(11, 19, -7)$; 7. $(6, 12, 21)$; 8. $\frac{1}{3}(2, 1, -2)$; 9. $(-12, 8, 12)$; 10. $\frac{\sqrt{593}}{2}$; 11. $(-4, 3, 4)$; 12. 18; 13. 27; 14. 1) $\alpha = 34$, 2) $\alpha < 34$, 3) $\alpha > 34$; 16. $V = 6, |DO| = \frac{6}{\sqrt{14}}$; 17. $\vec{a} = -4\vec{p} + 3\vec{q} + \vec{r}$.

Розділ III. Пряма лінія і площина

§ 1. Пряма лінія на площині

Розглянемо різні вигляди рівнянь прямої l на площині:

1. загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 > 0,$$

вектор $\vec{n} = (A, B) \perp l$ – називається **нормальним** (Рис. 29);

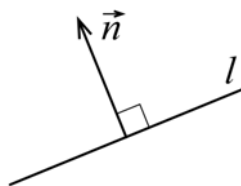


Рис. 29.

2. канонічне рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

$M_0(x_0, y_0) \in l$, $\vec{S} = (m, n) \parallel l$ – називається **напрямним** (Рис.30).

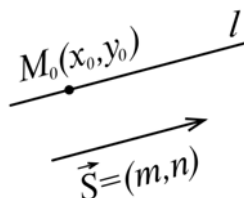


Рис. 30.

3. параметричне рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R};$$

4. рівняння прямої, що проходить через дві точки

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ (Рис.31)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

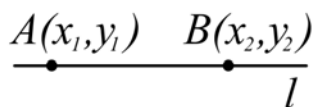


Рис. 31.

5. рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a, b – величини

відрізків, що їх пряма відтинає на координатних осях (Рис. 32);

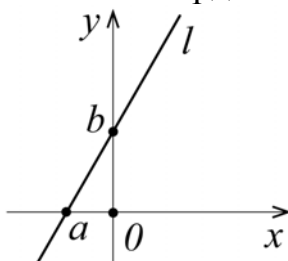


Рис. 32.

6. **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**
 $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – кут нахилу l до осі Ox (Рис. 33);

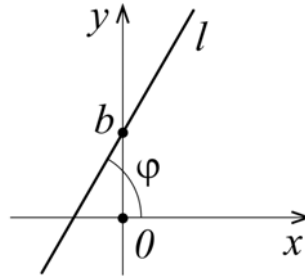


Рис. 33.

7. **рівняння в'язки прямих** $y - y_0 = k(x - x_0)$, що проходять через задану точку $M_0(x_0, y_0)$. В'язку можна задати перетином прямих l_1 і l_2 (Рис. 34), тоді її рівняння має вигляд

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0;$$

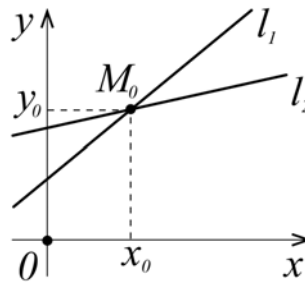


Рис. 34.

8. **нормальне рівняння прямої**

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad p > 0 -$$

довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на l , α – кут його нахилу до осі Ox (рис. 35).

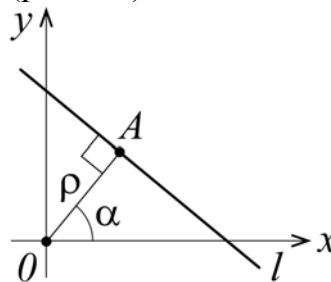


Рис. 35.

Щоб звести загальне рівняння прямої l до нормального вигляду, потрібно домножити його на **нормувальний множник** $\mu = \frac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ (Рис. 36) визначається формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

якщо рівняння l нормальне, то $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p$ — називають **відхиленням** від M_0 до l , $d = |\delta|$.

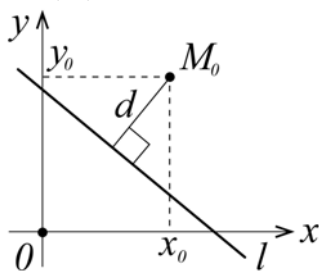


Рис. 36.

Якщо $\delta > 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від l , якщо $\delta < 0$, то по один.

Кут φ між прямими, заданими рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ (Рис.37), визначається формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} -$$

відповідно умови паралельності і перпендикулярності прямих.

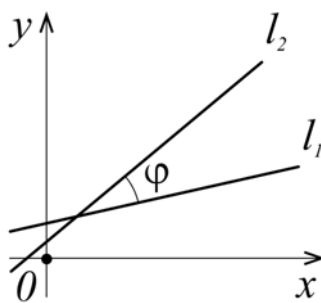


Рис. 37.

Якщо прямі задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. На прямій $5x - y - 4 = 0$ знайдемо точку, рівновіддалену від точок $A(1, 0)$ і $B(-2, 1)$.

◀ *1-ий спосіб:* Множиною точок, рівновіддалених від A і B є серединний перпендикуляр l , точка $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ – середина AB , кутовий коефіцієнт

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{3}, \quad l \perp AB \Rightarrow k_l = 3, \text{ тому рівняння}$$

$$l: y - \frac{1}{2} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

Знайдемо точку перетину прямої l із заданою:

$$\begin{cases} y = 3x + 2, \\ y = 5x - 4, \end{cases} \Rightarrow M(3, 11) - \text{шукана точка.}$$

2-ий спосіб: M належить заданій прямій, тому $M(x, 5x - 4)$ і відстані $AM = BM \Rightarrow (x - 1)^2 + (5x - 4)^2 = (x + 2)^2 + (5x - 5)^2 \Rightarrow x = 3, y = 11$. ▶

Приклад 2. Складемо рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо вершина прямого кута $C(4, -1)$, а рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$.

◀ Кутовий коефіцієнт гіпотенузи дорівнює 3. Катети нахилені до гіпотенузи під кутами $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$, тому їх кутові коефіцієнти знаходимо із рівностей:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{3-k_1}{1+3k_1}, \\ \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \frac{3-k_2}{1+3k_2}, \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -2. \end{cases}$$

Катети проходять через точку C , тому

$$\begin{cases} y+1 = \frac{1}{2}(x-4), \\ y+1 = -2(x-4), \end{cases} \Rightarrow \text{рівняння катетів } y = \frac{1}{2}x - 3, y = -2x - 7. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

- Відомі вершини трикутника $A(6, -18)$, $B(-2, -34)$, $C(10, -26)$. Складіть: загальні рівняння сторін AC і AB ; рівняння медіани CM ; рівняння висоти BN і її довжину; рівняння бісектриси AL .
- Знайдіть відстань d від точки $A(1, -2)$ до прямої $2x - 3y + 5 = 0$.
- Знайдіть кут між прямими $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-4}$ і $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$.
- Складіть рівняння бісектриси того кута між прямими $x - 7y = 1$ і $x + y = -7$, всередині якого лежить точка $A(1, 1)$.
- Доведіть, що пряма $2x + y + 3 = 0$ перетинає відрізок MN , якщо $M(-5, 1)$, $N(3, 7)$.
- Знайдіть площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$.
- Знайдіть проекцію точки $A(-6, 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

8. Складіть рівняння прямої, яка відтинає від координатного кута трикутник площею 12 кв.од. і проходить через точку $A(8, 6)$.
9. Знайдіть відстань між прямими $x + y - 1 = 0$ і $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$.
10. На березі каналу, що проходить по осі Ox , треба збудувати насосну станцію C для водопостачання сіл $A(2,1)$ і $B(5,4)$. Знайдіть координати станції, щоб загальна довжина труб була найменшою.
11. Знайдіть точку B , симетричну точці $A(8, -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $M(3, -4)$ і $N(-1, -2)$.
12. Складіть рівняння прямої, паралельної до прямих $5x - 2y + 7 = 0$ і $5x - 2y - 9 = 0$, що проходить посередині між ними.
13. Складіть рівняння прямих, паралельних прямій $3x - 4y - 10 = 0$ і віддалених від неї на 5 одиниць.
14. На осі Ox знайдіть точку, яка знаходиться на однаковій відстані від початку координат і прямої $5x - 12y - 16 = 0$.
15. Через точку $A(-1,5)$ проведіть пряму, рівновіддалену від точок $B(3,7)$ і $C(1,-1)$.
16. Складіть рівняння сторони BC у рівнобедреному трикутнику, якщо $AB=BC$, $C(4,3)$, рівняння AC : $2x - y = 5$, рівняння AB : $x - y = 0$.
17. Відомі рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$ і $3x + 2y - 7 = 0$ і його вершина $A(0, 0)$. Складіть рівняння двох інших сторін.
18. Точка $A(3, -2)$ є вершиною квадрата, а $M(1, 1)$ – точка перетину його діагоналей. Складіть рівняння його сторін.
19. Точка $A(2, 0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна їй сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Складіть рівняння двох інших сторін трикутника.

20. Складіть рівняння сторін трикутника, якщо відома вершина $A(-5,2)$ і рівняння двох медіан $5x + 4y = 0$, $3x - y = 0$.

Відповіді.

1. $AC: 2x + y + 6 = 0$, $AB: 2x - y - 30 = 0$, $CM: y = -26$, $BN: x - 2y - 66 = 0$, $|BN| = \frac{32}{\sqrt{5}}$, $AL: x = 6$;
2. $\sqrt{13}$; 3. 90° ; 4. $3x - y + 17 = 0$; 5. $\delta_M < 0, \delta_N > 0$;
6. $\frac{49}{4}$; 7. $(-2, -1)$; 8. $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$; 9. $\sqrt{2}$; 10. $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$;
11. $(10, -5)$; 12. $5x - 2y - 1 = 0$; 13. $3x - 4y + 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$;
14. $(-2, 0)$, $\left(\frac{8}{9}, 0\right)$; 15. $2x + 3y - 13 = 0$, $y - 4x - 9 = 0$; 16. $7x - y - 25 = 0$;
17. $2x - 3y = 0$, $3x + 2y = 0$;
18. $5x - y - 17 = 0$, $5x - y + 9 = 0$, $x + 5y - 19 = 0$, $x + 5y + 7 = 0$;
19. $x - (2 + \sqrt{3})y - 2 = 0$, $x - (2 - \sqrt{3})y - 2 = 0$;
20. $x - 6y + 17 = 0$, $8x + 3y - 17 = 0$, $7x + 9y + 17 = 0$.

§2. Площина і пряма у просторі

1. Площина у просторі

Розглянемо різні вигляди рівнянь площини P у просторі:

1. загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0,$$

де $\vec{n} = (A, B, C) \perp P$ – нормальний вектор (Рис.38);

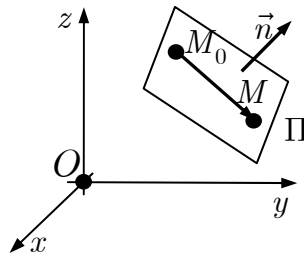


Рис.38.

2. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння **в'язки площин**, з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
3. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини P у відрізках на осях (Рис.39);

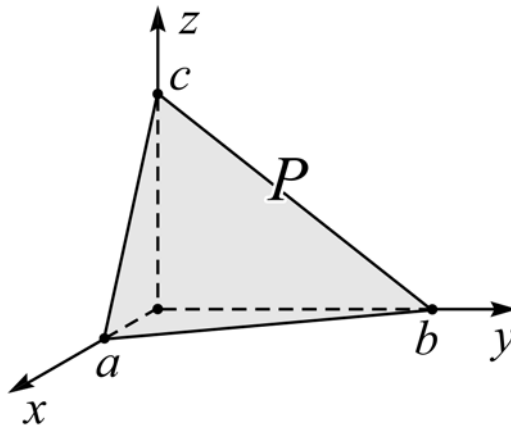


Рис.39.

4. рівняння площини P , що **проходить через три точки**, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

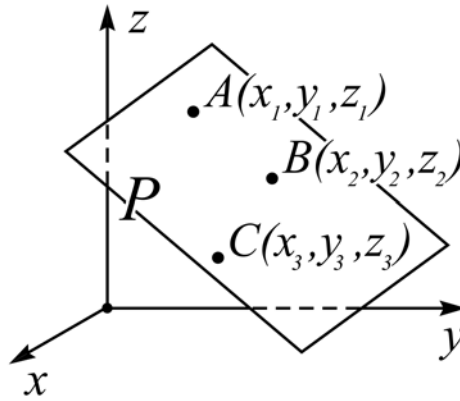


Рис. 40.

5. рівняння **жмутка площин**, які проходять через одну пряму, що задається перетином двох площин P_1 і P_2

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \alpha(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0;$$

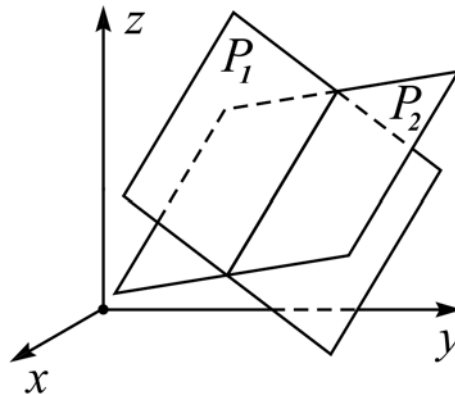


Рис.41.

6. **нормальне** рівняння площини P

$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, де $p > 0$ – відстань від початку координат до площини, $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – орт нормалі.

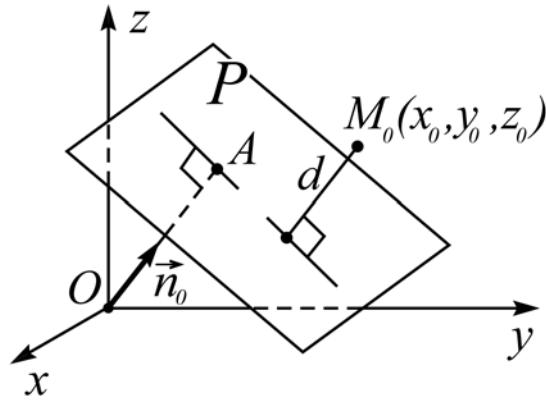


Рис.42.

Відхилення від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P дорівнює

$$\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p, \quad \text{відстань } d = |\delta|,$$

якщо площина задана загальним рівнянням, то відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кут φ між площинами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 -$$

відповідно умови паралельності і перпендикулярності площин.

2. Пряма лінія у просторі

Різні вигляди рівнянь прямої L у просторі:

1. **векторне** рівняння прямої L , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно **напрямному** вектору $\vec{s} = (m, n, l)$:
 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t, t \in \mathbb{R}$ (Рис. 43);

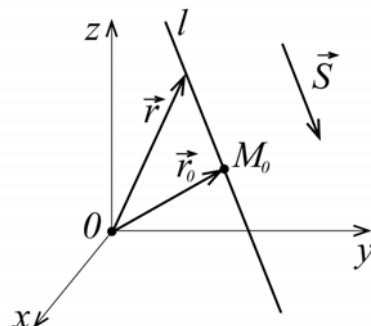


Рис. 43.

2. **канонічне** рівняння прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{l}$;

3. **параметричне** рівняння прямої $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + lt, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

4. рівняння прямої, що **проходить через дві точки**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

5. **загальне** рівняння прямої, як лінії перетину двох непаралельних площин (Рис.44)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

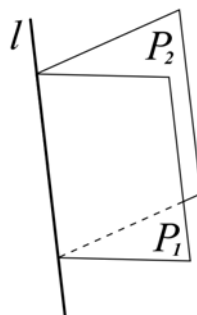


Рис. 44.

Кут між прямими L_1 і L_2 з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, l_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, l_2)$ (Рис. 45) визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}},$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}, \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0.$$

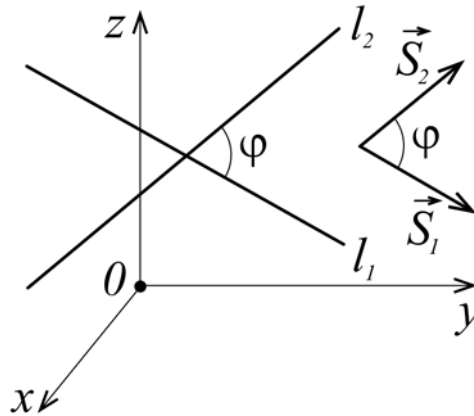


Рис. 45.

Кут між прямою з напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, l)$ і площиною з нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ (Рис. 46) визначається формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cl|}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$L \parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cl = 0,$$

$$L \perp P \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l} -$$

відповідно умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

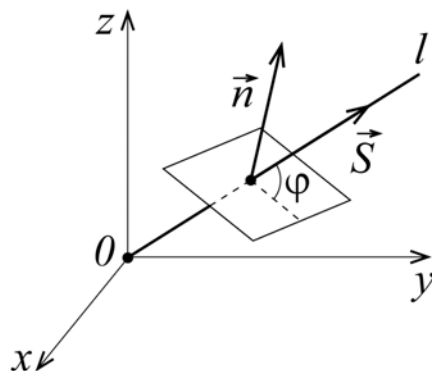


Рис. 46.

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Складемо рівняння площини P , яка проходить через точки $A(7, 2, -3)$, $B(5, 0, -4)$ і паралельна осі Ox .

◀ Для довільної точки $M(x, y, z) \in P$ вектори \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{AB} , \vec{i} – компланарні, тому

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-7 & y-2 & z+3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - 2z - 8 = 0. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайдемо точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-3}$ і площини $2x + 3y - z - 12 = 0$.

◀ Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -3t, \end{cases}$ і

підставимо ці значення у рівняння площини:
 $4t + 2 + 9t - 6 + 3t - 12 = 0 \Rightarrow t = 1$, тому $x = 3, y = 1, z = -3$, $A(3, 1, -3)$. \blacktriangleright

Приклад 3. Знайдемо канонічне рівняння проекції прямої L $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$ на площину P $3x - 2y - z + 5 = 0$.

◀ Проведемо через пряму L площину $P_1 \perp P$: точка $M_1(1,3,2) \in P_1$, $\vec{s} = (1,1,1) \perp \vec{n}_1$, $\vec{n} = (3,-2,-1) \perp \vec{n}_1$, $\forall M(x,y,z) \in P_1$ вектори $\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}, \vec{n}_1$ – компланарні, тому

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+4y-5z-3=0.$$

Загальне рівняння L , що є перетином площин P і P_1 , $\begin{cases} x+4y-5z-3=0, \\ 3x-2y-z+5=0, \end{cases}$

зведемо до канонічного вигляду. Точка $M_0 \in L$ є довільним розв'язком отриманої системи, виберемо, наприклад, $z=0$, тоді $x=-1, y=1$, $M_0(-1,1,0)$, напрямний вектор

$$\vec{s} \perp \vec{n}_1 = (1,4,-5), \quad \vec{s} \perp \vec{n}_2 = (3,-2,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-14, -14, -14) \parallel (1,1,1).$$

Отже, канонічне рівняння проекції прямої має вигляд $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Намалюйте площини, задані рівняннями:

a) $x+2y-4=0$, б) $3x-6z=0$, в) $2x-8=0$, г) $3y+6=0$, д) $y-3z+2=0$,
e) $x+2y+3z-6=0$.

2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,-1,3)$ і паралельна до площини xOz .

3. Складіть рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $A(-1,6,3)$.

4. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, 2, 4)$ і відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки.
5. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(2, -1, 3)$ і лінію перетину двох площин $2x + 3y - z + 4 = 0$ і $x - 2y - 3z + 6 = 0$.
6. Складіть рівняння бісекторної площини того двогранного кута між площинами $2x - 14y + 6z - 2 = 0$ і $3x + 5y - 5z + 3 = 0$, в якому лежить початок координат.
7. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$ і перпендикулярна площині $x + y + z - 4 = 0$.
8. Знайдіть відстань від точки $A(3, 2, -1)$ до площини $2x - 3y + 6z - 3 = 0$.
9. Складіть рівняння площин, які паралельні площині $6x + 3y - 2z + 13 = 0$ і знаходяться від неї на відстані 7 од.
10. Знайдіть відстань між площинами $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ і $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.
11. Знайдіть кут між площинами $x - 3y + 2z - 5 = 0$ і $3x - 2y - z - 3 = 0$.
12. Зведіть загальне рівняння прямої до канонічного вигляду

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$
13. Знайдіть точку перетину прямих

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{7} \quad \text{і} \quad \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{2}.$$
14. Знайдіть проекцію точки $A(2, -1, 0)$ на пряму $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$;
15. Знайдіть ортогональну проекцію точки $A(5, 2, -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.
16. Знайдіть відстань від точки $A(2, 3, -1)$ до прямої

$$\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$$

17. Знайдіть точку, симетричну точці $M(1, 2, 3)$ відносно площини $2x + y - z - 13 = 0$.

18. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ і площини $x - 2y + z - 15 = 0$.

19. Знайдіть відстань між прямими $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-5}{4}$ і $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{4}$.

20. Знайдіть найкоротшу відстань між мимобіжними прямими $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{1}$ і $\frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

21. Складіть рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}$ паралельно до прямої $\frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4}$.

22. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3, 1, 0)$ паралельно прямій $\begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 3y - 5z + 7 = 0. \end{cases}$

Відповіді. 2. $y = -1$; 3. $3x + z = 0$; 4. $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{7} = 1$; 5. $7y + 5z - 8 = 0$;

6. $(\delta_1 \cdot \delta_2 > 0)$ $x + 6y - 4z + 2 = 0$; 7. $x + 3y - 4z + 7 = 0$; 8. $\frac{9}{7}$;

9. $6x + 3y - 2z + 62 = 0$, $6x + 3y - 2z - 36 = 0$; 10. 3; 11. $\frac{\pi}{3}$; 12. $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$;

13. $(0, 5, 2)$; 14. $(4, -3, 1)$; 15. $(1, 4, -7)$; 16. 15; 17. $(9, 6, -1)$; 18. $\emptyset, l \parallel P$;

19. $\frac{15}{\sqrt{26}}$; 20. $\frac{11\sqrt{6}}{5}$; 21. $4x + 12y + 3z + 76 = 0$; 22. $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-23} = \frac{z}{-13}$.

Розділ IV. Комплексні числа. Алгебра многочленів

§ 1. Дії над комплексними числами

Множину комплексних чисел z позначають \mathbb{C} . Розглянемо різні форми їх запису:

1. алгебраїчна форма

$z = x + iy$, де $x = \operatorname{Re} z$ (*real* – дійсний), $y = \operatorname{Im} z$ (*imagine* – уявний) – відповідно дійсна і уявна частини числа, $x, y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

У ДПСК числу z відповідає радіус - вектор точки $M(x, y)$, (Рис.47);

2. тригонометрична форма

$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ρ і φ – полярні координати точки $M(\rho, \varphi)$,

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ – модуль числа, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ – його аргумент, який визначається з точністю до $2k\pi$, головне значення $\arg z \in (-\pi, \pi]$ обчислюють за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi \cdot \operatorname{sign} y, & x < 0, \text{ тут } \operatorname{sign} y = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ -1, & y < 0; \end{cases} \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y, & x = 0, \end{cases}$$

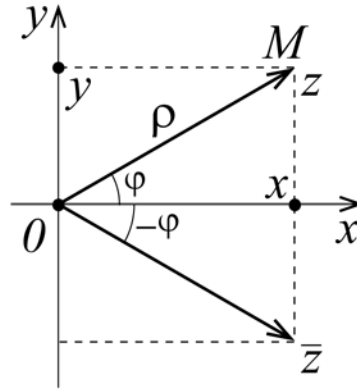


Рис. 47.

2. **показникова форма**, враховуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, має вигляд

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}.$$

Комплексні числа

$z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ і $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ **рівні**,

якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, або $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Число $\bar{z} = x - iy = \rho(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$ називається **спряженим** до числа z .

Дії над комплексними числами:

1. $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, далі степені i з періодом 4 повторюються:
2. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, $z + \bar{z} = 2x$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,
 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, $z_2 \neq 0$, $\frac{1}{i} = -i$;
5. $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$;

$$6. \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Виконаємо дії: $\frac{3+2i}{2-i} + (1-3i)^2$.



$$\frac{3+2i}{2-i} + (1-3i)^2 = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 1 - 6i - 9 = \frac{1}{5}(6-2+3i+4i) - 6i - 8 = -\frac{36}{5} - \frac{23}{5}i.$$



Приклад 2. Обчислимо всі значення коренів $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$ та зобразимо їх на комплексній площині.

◀ Знайдемо модуль і аргумент числа $-1-\sqrt{3}i$:

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2, \quad \varphi = -\pi + \operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Отже, } \omega_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{Звідси } \omega_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right),$$

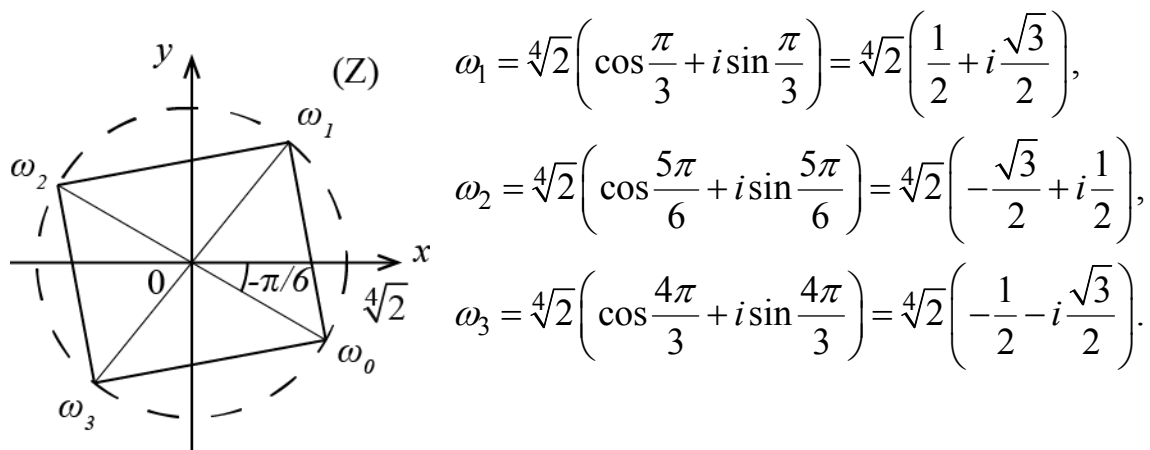


Рис.48.

Всі корені лежать на колі радіуса $\sqrt[4]{2}$, починаючи з точки, для якої $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, і є вершинами квадрата (Рис.48). ►

Приклад 3. Обчислимо $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{60}$.

◀ Знайдемо модуль і аргумент числа $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$: $\rho = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$,

$$\varphi = \arctg \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Отже, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{60} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \cdot 60 \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \cdot 60 \right) = \cos 10\pi - i \sin 10\pi = 1$. ►

Приклад 4. Зобразимо множину точок $z \in \mathbb{C}$, для якої $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

◀ Знайдемо для

$$z \neq 0 \quad \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{1}{x+iy} = \operatorname{Re} \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}. \text{ Отже, } \frac{x}{x^2+y^2} > \frac{1}{4}, \quad x^2+y^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2 < 4x \Rightarrow$$

$(x-2)^2 + y^2 < 2^2$, тобто це внутрішня частина круга з центром у точці $O_1(2,0)$ і радіусом 2, крім початку координат (Рис. 49). ►

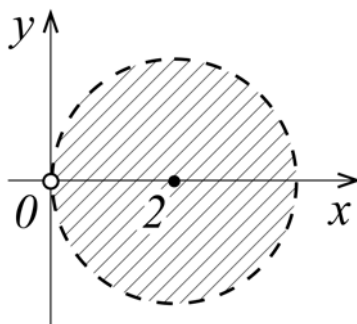


Рис. 49.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Запишіть числа у тригонометричній і показниковій формах:

1. $z = \sqrt{3} + i$; 2. $z = 1 - i\sqrt{3}$; 3. $z = -1 - i$; 4. $z = -2 + 2i$; 5. $z = 6 - 6i$;

6. $z = -\sqrt{3} + i$; 7. $z = -2\sqrt{3} - 2i$.

Виконайте дії:

8. $\frac{1+2i}{1-3i} + 4 - 3i + i^{13}$; 9. $\frac{5+i}{2+4i} + (1-i)^2 + i^9$; 10. $\frac{2-3i}{4-5i} + (1-2i)^2 - i^7$;

11. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 12. $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$; 13. $\left((-1+i)(-1-i\sqrt{3})\right)^8$; 14. $(1-i\sqrt{3})^6$.

Знайдіть всі значення коренів: 15. $\sqrt[3]{-1}$; 16. $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{32}}$; 17. \sqrt{i} ; 18. $\sqrt[4]{-16}$.

Зобразіть на комплексній площині множину точок $z \in \mathbb{C}$:

19. $|z-i| < 1$; 20. $1 < |z+2-i| < 2$; 21. $1 < |z+i| < 3$; 22. $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$;

$$23. \operatorname{Re} \frac{1}{z} > \frac{1}{2}; \quad 24. |z|^2 = 2 \operatorname{Re} z + 1; \quad 25. z \cdot \bar{z} < 4, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1;$$

$$26. \left| \frac{z-2}{z-3} \right| = 1; \quad 27. |z+i| + |z-i| = 4; \quad 28. 0 < \operatorname{Re} iz < 1; \quad 29. |z| = \operatorname{Re} z + 1.$$

Відповіді.

$$1. z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad 2. z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}};$$

$$3. z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}};$$

$$4. z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}};$$

$$5. z = 6\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 6\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

$$6. z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}};$$

$$7. z = 4 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) = 4e^{-i\frac{5\pi}{6}};$$

$$8. \frac{7}{2} - i\frac{3}{2}; \quad 9. \frac{7}{10} - i\frac{19}{10}; \quad 10. -\frac{100}{41} - i\frac{125}{41}; \quad 11. 512(1 - i\sqrt{3});$$

$$12. -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 13. 2^{11}(-1 + i\sqrt{3}); \quad 14. 64; \quad 15. \left\{ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\};$$

$$16. \left\{ \pm \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i), \pm \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3}) \right\}; \quad 17. \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\};$$

$$18. \left\{ \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2}), \pm(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \right\}; \quad 19. \text{внутрішня частина круга } x^2 + (y-1)^2 < 1 \text{ з}$$

центром (0,1) і радіусом 1;

20. внутрішня частина кільця $1 < (x+2)^2 + (y-1)^2 < 4$; 21. внутрішня частина кільця $1 < x^2 + (y+1)^2 < 9$; 22. коло $x^2 + (y+2)^2 = 4$, крім точки $z = 0$;
23. внутрішня частина круга $(x-1)^2 + y^2 < 1$, крім точки $z = 0$; 24. коло $(x-1)^2 + y^2 = 2$; 25. частина круга $x^2 + y^2 < 4, x \leq 1, y > -1$; 26. пряма $x = \frac{5}{2}$;
27. еліпс $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$; 28. смуга $-1 < y < 0$; 29. парабола $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

§ 2. Алгебра многочленів

Многочленом (поліномом) n -го степеня відносно змінної z називають вираз вигляду:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \text{ де } a_k (k = 0, 1, \dots, n) -$$

коефіцієнти многочлена, які можуть бути дійсними або комплексними.

Два многочлени називаються рівними, якщо рівні їх степені і коефіцієнти при однакових степенях z .

При додаванні многочленів додаємо коефіцієнти при однакових степенях z . При множенні кожен член одного з них множимо на кожен член іншого і одержані добутки додаємо. Ділення многочлена $P_n(z)$ на $Q_m(z)$ ($n \geq m$) можливе без остачі: $P_n(z) = Q_m(z) \cdot T_{n-m}(z)$, тоді многочлени $Q_m(z)$ і $T_{n-m}(z)$ називаються **дільниками** $P_n(z)$. Якщо це неможливо, то виконують **ділення многочленів з остачею**: $P_n(z) = Q_m(z) \cdot T_{n-m}(z) + R_k(z), k < m$, тут $T_{n-m}(z)$ - частка, а $R_k(z)$ - остача.

Приклад 1. Поділимо многочлен $3z^4 - 5z^2 + 6z - 7$ на $z^2 - z + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 3z^4 - 5z^2 + 6z - 7 & z^2 - z + 1 \\
 \hline
 - 3z^4 - 3z^3 + 3z^2 & 3z^2 + 3z - 5 \\
 \hline
 3z^3 - 8z^2 + 6z - 7 & \\
 - 3z^3 - 3z^2 + 3z & \\
 \hline
 -5z^2 + 3z - 7 & \\
 - -5z^2 + 5z - 5 & \\
 \hline
 -2z - 2 &
 \end{array}$$

Отже, $3z^4 - 5z^2 + 6z - 7 = (z^2 - z + 1)(3z^2 + 3z - 5) + (-2z - 2)$. ►

Схема Горнера. Теорема Безу

Розглянемо окремий, дуже важливий, випадок ділення многочлена

$P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ ($n \geq 1$) на зведений многочлен першого степеня $z - a$. Часткою буде многочлен $T_{n-1}(z)$, а остачею – число $R_0(z) = r$:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = (z - a)(b_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + r. \quad (1)$$

Перемножимо многочлени в правій частині і зведемо подібні. Зрівнюючи коефіцієнти в обох частинах рівності при однакових степенях z , дістанемо систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) і r :

$$b_0 = a_0, b_1 = a_0b_0 + a_1, b_2 = ab_1 + a_2, \dots, b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}, r = ab_{n-1} + a_n.$$

Їх обчислення зручно виконувати за так званою *схемою Горнера*:

	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_0 a_1 + a_1$	$b_2 = a b_1 + a_2$	\dots	$b_{n-1} = a b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = a b_{n-1} + a_n$

У верхньому рядку схеми Горнера вписуємо за спаданням степенів z коефіцієнти $P_n(z)$ (якщо степеня z^{n-k} немає, то вважаємо $a_k = 0$), а в нижньому – коефіцієнти частки b_k і остачу r .

Якщо у рівності (1) підставити значення $z = a$, то дістанемо $r = P_n(a)$. Звідси випливає таке твердження:

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(z)$ на двочлен $z - a$ дорівнює значенню многочлена при $z = a$:

$$r = P_n(a).$$

Означення. Число a називають *коренем многочлена* $P_n(z)$, якщо $P_n(a) = 0$.

Наслідок. Многочлен $P_n(z)$ ділиться без остачі на $z - a$ тоді і тільки тоді, коли a є його коренем.

Якщо многочлен $P_n(z)$ ділиться на $(z - a)^k$ ($k \in \mathbb{N}$) і не ділиться на $(z - a)^{k+1}$, то число k називають *кратністю кореня* a (при $k = 1$ корінь називають *простим*).

Приклад 2. Переконаємось, що число $z = -1$ є коренем многочлена $P(z) = 2z^5 + 5z^4 + 2z^3 - 4z^2 - 4z - 1$ і визначимо його кратність.

◀ Застосовуємо схему Горнера доти, поки чергова частка не стане відмінною від нуля:

	2	5	2	-4	-4	-1
-1	2	3	-1	-3	-1	0
-1	2	1	-2	-1	0	
-1	2	-1	-1	0		
-1	2	-3	2			

Отже, число $z = -1$ є коренем многочлена кратності 3, многочлен можна подати у вигляді:

$$2z^5 + 5z^4 + 2z^3 - 4z^2 - 4z - 1 = (z + 1)^3 (2z^2 - 3z + 2). \blacktriangleright$$

Вираз
$$P(z) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(z-a) + \frac{P''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad (2)$$

називають **формулою Тейлора для многочлена за степенями $z - a$** .

Нею зручно користуватись при обчисленні значень многочлена в околі точки $z = a$.

Приклад 3. Розкладемо многочлен $P(z) = 2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 8$ за степенями $z - 2$. Обчислимо значення многочлена і всіх його похідних при $z = 2$.

◀ Застосуємо до $P(z)$ чотири рази схему Горнера:

	2	-5	4	0	-8
2	2	-1	2	4	$0 = P(2)$
2	2	3	8	$20 = \frac{P'(2)}{1!}$	
2	2	7	$22 = \frac{P''(2)}{2!}$		
2	2	$11 = \frac{P'''(2)}{3!}$			
2	$2 = \frac{P^{IV}(2)}{4!}$				

Отже, число 2 є простим коренем многочлена. Розклад $P(z)$ за степенями $z - 2$ має вигляд:

$$P(z) = 20(z - 2) + 22(z - 2)^2 + 11(z - 2)^3 + 2(z - 2)^4.$$

Значення $P(z)$ і його похідних при $z = 2$:

$$P(2) = 0, P'(2) = 20, P''(2) = 44, P'''(2) = 66, P^{IV}(2) = 48. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Узагальнимо формули скороченого множення для многочлена $x^n - a^n$, який має корінь $x = a$.



	1	0	0	...	0	$-a^n$
a	1	a	a^2	...	a^{n-1}	0

Отже,
$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}). \blacktriangleright \quad (3)$$

Розклад многочлена на множники

Основна теорема алгебри. Кожен многочлен $P_n(z)$ степеня $n \geq 1$ має на множині комплексних чисел хоча б один корінь.

Теорема. Будь-який многочлен $P_n(z)$ степеня n з дійсними чи комплексними коефіцієнтами має на множині комплексних чисел рівно n коренів, коли кожен з них рахувати стільки разів, скільки становить його кратність.

Для $P_n(z)$ маємо такий **розклад на множники**:

$$P_n(z) = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \quad (4)$$

Якщо корінь α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) має кратність k_i , $1 \leq k_i \leq n$, то, об'єднуючи однакові співмножники, многочлен $P_n(z)$ можна єдиним способом розкласти на множники:

$$P_n(z) = a_0(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \dots (z - \alpha_m)^{k_m}, \quad (5)$$

де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Нехай тепер усі коефіцієнти a_k многочлена $P_n(x)$ є дійсні числа.

Теорема. Якщо число $a = \alpha + \beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене число $\bar{a} = \alpha - \beta i$ також буде його коренем.

Наслідок. Кожен многочлен $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами можна єдиним способом розкласти на добуток незвідних многочленів першого та другого степенів з дійсними коефіцієнтами:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (6)$$

$$\text{де } k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_s = n.$$

Використавши розклад зведеного многочлена ($a_0 = 1$)

$P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$, на множники на множині комплексних чисел, знайдемо залежності між коренями многочлена та його коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \\ a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n), \\ a_n &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Рівності (7) називають **формулами Вієта** для коренів зведеного многочлена n -го степеня.

Приклад 5. Знайдемо корені многочлена $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2$ і розкладемо його на множники.

◀ Якщо многочлен має цілі корені, то вони є дільниками числа 2, тобто це числа $\pm 1, \pm 2$. Здійснюємо перебір за схемою Горнера:

	1	2	-2	-4	1	2
1	1	3	1	-3	-2	0
1	1	4	5	2	0	
1	1	5	10	12	$\neq 0$	
-1	1	3	2	0		
-1	1	2	0			
-2	1	0				

Таким чином, $x = \pm 1$ є двократними коренями многочлена, а $x = -2$ - простим.

$$x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x+1)^2(x-1)^2(x+2). \blacktriangleright$$

Приклад 6. Знайдемо корені многочлена $3x^3 + x^2 + x - 2$ і розкладемо його на множині дійсних чисел на множники.

◀ Раціональні корені, за їх наявності, мають вигляд $\frac{r}{m}$, де r є дільниками

вільного члена 2: $\pm 1, \pm 2$, а m – дільниками старшого коефіцієнта 3: $\pm 1, \pm 3$.

Враховуючи, що на відрізку $[0, 1]$ многочлен змінює знак, перевіряємо

числа $x = \frac{1}{3}$ і $x = \frac{2}{3}$.

	3	1	1	-2
$\frac{1}{3}$	3	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{13}{9} \neq 0$
$\frac{2}{3}$	3	3	3	0

Отже, $3x^3 + x^2 + x - 2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 3x + 3) = (3x - 2)(x^2 + x + 1)$, множник

$x^2 + x + 1$ має комплексні корені $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ►

Розклад правильних раціональних дробів на елементарні

Раціональним дробом називається частка від ділення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Якщо степінь чисельника менший степеня знаменника, $n < m$, то дріб **правильний**, інакше – **неправильний**. Поділивши чисельник на знаменник у неправильному дробі, виділимо частку – цілу частину, до якої додається правильний дріб

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ де } k < m.$$

Правильні раціональні дроби

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \text{ і } \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^r},$$

де $A \neq 0$, $B^2 + C^2 > 0$, $k, r \in \mathbb{N}$, $\alpha, p, q, A, B, C \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$, називають **елементарними або найпростішими раціональними дробами** на множині \mathbb{R} .

Кожен правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n < m$, знаменник якого має розклад

$$Q_m(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}, \quad (8)$$

можна єдиним способом зобразити у вигляді суми елементарних дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{i1}}{x - \alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \dots + \\ & + \frac{A_{ik_i}}{(x - \alpha_i)^{k_i}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1r_1}x + C_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}} + \dots + \\ & + \frac{B_{jr_j}x + C_{jr_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{r_j}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Кожному дійсному кореню α_1 кратності k_1 у розкладі (9) відповідає сума k_1 елементарних дробів

$$\frac{A_{11}}{x - \alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}},$$

а кожній парі комплексних спряжених коренів кратності r_1 , яка утворює у розкладі знаменника (8) множник $(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}$, відповідає сума r_1 найпростіших дробів у розкладі (9):

$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1r_1}x + C_{1r_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{r_1}}.$$

Для визначення дійсних коефіцієнтів A_{rj}, B_{pm}, C_{pm} ($r = 1, 2, \dots, i; j = 1, 2, \dots, k_i; p = 1, 2, \dots, j; m = 1, 2, \dots, r_j$) розкладу застосовують наступні методи.

1. Метод неозначених коефіцієнтів.

Домножимо обидві частини розкладу (9) на $Q_m(x)$:

$$P_n(x) = A_{11}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{r_j} + \dots + (B_{jr_j} x + c_{jr_j})(x - \alpha_i)^{k_i} \dots \\ \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \dots (x^2 + p_{j-1} x + q_{j-1})^{r_{j-1}}. \quad (10)$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності (10). Одержимо систему лінійних рівнянь відносно неозначених коефіцієнтів.

Приклад 7. Раціональний дріб $\frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1}$ розкладемо на суму елементарних дробів.

◀ Розкладемо на множники знаменник дробу.

Можливі раціональні корені шукаємо серед чисел $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ за схемою Горнера:

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0

Маємо розклад $2x^3 - x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$, два інші корені знаменника комплексні.

Для заданого дробу маємо розклад

$$\frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Домножимо обидві частини рівності на $2x^3 - x - 1$:

$$6x^2 + x - 2 = A(2x^2 + 2x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Зрівнюємо коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 6 = 2A + B, \\ x^1 & 1 = 2A + C - B, \\ x^0 & -2 = A - C. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Додавши всі три рівності,} \\ \text{дістанемо } 5A = 5, \text{ тобто} \\ A = 1, \text{ тоді } B = 4, C = 3. \end{array}$$

Отже, $\frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$. ►

2. Метод часткових значень.

Скористаємось з того, що рівні многочлени приймають рівні значення при однакових значеннях x . Тому в правій та лівій частинах тотожності (10) підставимо довільно r значень x , де r дорівнює кількості неозначених коефіцієнтів. Зокрема, за значення x можна брати корені знаменника. Із складеної системи r лінійних рівнянь знаходимо невідомі коефіцієнти.

На практиці методи 1 і 2 доцільно комбінувати.

Приклад 8. Дріб $\frac{2x^3 - 1}{(x-2)^2(x^2+1)}$ розкладемо на суму елементарних дробів.

◀ $\frac{2x^3 - 1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$

Домножимо обидві частини рівності на знаменник:

$$2x^3 - 1 = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2.$$

Покладемо $x=0$, $x=2$, $x=i$, дістанемо:

$$\begin{cases} -1 = -2A + B + 4D, \\ 15 = 5B, \\ -2i - 1 = (Ci + D)(3 - 4i), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3, \\ A - 2D = 2, \\ 3C - 4D = -2, \\ 3D + 4C = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3, \\ C = -\frac{2}{5}, \\ D = \frac{1}{5}, \\ A = \frac{12}{5}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\frac{2x^3 - 1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{12}{5(x-2)} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1-2x}{5(x^2+1)}. \blacktriangleright$$

Якщо знаменник правильного дробу має тільки прості дійсні корені, тобто $Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)$, то розклад дробу має вигляд

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_m}{x - \alpha_m}, \quad \text{де невідомі коефіцієнти зручно}$$

знаходити **методом викреслювання**:

$$A_1 = \frac{P(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_m)} = \left. \frac{P_n(x)(x - \alpha_1)}{Q_m(x)} \right|_{x=\alpha_1},$$

$$A_2 = \frac{P(\alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1) \dots (\alpha_2 - \alpha_m)} = \left. \frac{P_n(x)(x - \alpha_2)}{Q_m(x)} \right|_{x=\alpha_2}, \dots,$$

$$A_m = \frac{P(\alpha_m)}{(\alpha_m - \alpha_1) \dots (\alpha_m - \alpha_{m-1})} = \left. \frac{P(x)(x - \alpha_m)}{Q_m(x)} \right|_{x=\alpha_m}.$$

Приклад 9. Дріб $\frac{3x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ розкладемо на суму елементарних дробів.

◀ Дріб неправильний, виділимо спочатку цілу частину

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 3x^2 + 2x - 2 \\ 3x^3 + 3x^2 - 6x \hline 8x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 + x^2 - 2x \\ 3 \hline \end{array}$$

Звідси $\frac{3x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} = 3 + \frac{8x - 2}{x(x-1)(x+2)}.$

Для дробу маємо розклад

$$\frac{8x-2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

За методом викреслювання обчислюємо

$$A = \left. \frac{8x-2}{(x-1)(x+2)} \right|_{x=0} = 1, \quad B = \left. \frac{8x-2}{x(x+2)} \right|_{x=1} = 2, \quad C = \left. \frac{8x-2}{x(x-1)} \right|_{x=-2} = -3.$$

$$\text{Отже, } \frac{3x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} = 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2}. \blacktriangleright$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Перевірте, що $x = a$ є коренем многочлена і знайдіть його кратність k :

1. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$, а) $a = 1$, б) $a = 3$;

2. $P(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x - 1$, $a = -1$;

3. $P(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 16x + 16$, $a = 2$;

4. $P(x) = x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96$, $a = 3$.

На множині дійсних чисел розкладіть многочлен на множники:

5. $P(x) = x^3 + x - 2$; 6. $P(x) = x^3 - 3x + 2$; 7. $P(x) = x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$;

8. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 1$;

9. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$; 10. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 10$.

Розкладіть раціональний дріб на суму елементарних дробів:

11. $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$; 12. $\frac{1}{x^3+1}$; 13. $\frac{4}{(x-1)^2(x-2)}$; 14. $\frac{x^3+5x-4}{(x-2)(x^2+1)}$;

$$\begin{aligned}
15. & \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}; & 16. & \frac{3x+6}{x^2(x+3)}; & 17. & \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}; \\
18. & \frac{x+5}{(x+2)(x-1)(x-2)}; & 19. & \frac{4x^2+3x-5}{x(x-1)^2}; & 20. & \frac{8x}{(x^2+3)(x^2-1)}; \\
21. & \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}; & 22. & \frac{x^5}{(x^2+1)(x^2+4)}; & 23. & \frac{5x+1}{x^3+3x^2+7x+5}.
\end{aligned}$$

Відповіді. 1. а) $k=3$, б) $k=1$; 2. $k=3$; 3. $k=2$; 4. $k=1$; 5. $(x-1)(x^2+x+2)$;

6. $(x-1)^2(x+2)$; 7. $(x-2)(x+2)^2(x^2-2x+4)$; 8. $(2x+1)(x^2-3x+1)$; 9. $(x+1)(2x-1)(x^2-x+2)$; 10. $(x+2)(x^2+x+5)$; 11. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$;

12. $\frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$; 13. $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-2}$; 14. $1 + \frac{14}{5(x-2)} + \frac{12-4x}{5(x^2+1)}$;

15. $\frac{1}{x+2} - \frac{x-6}{x^2-2x+10}$; 16. $\frac{1}{3x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3(x+3)}$; 17. $\frac{3}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2+6x+13}$;

18. $-\frac{2}{x-1} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{7}{4(x-2)}$; 19. $-\frac{5}{x} + \frac{9}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$; 20. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+3}$;

21. $2 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 22. $x + \frac{x}{3(x^2+1)} - \frac{16x}{3(x^2+4)}$; 23. $-\frac{1}{x+1} + \frac{x+6}{x^2+2x+5}$.

Розділ V. Криві і поверхні другого порядку

§1. Криві другого порядку

1. **Коло** з центром у точці $O_1(a, b)$ і радіусом R (Рис. 50, а) у ДПСК визначається рівнянням

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

і $x^2 + y^2 = R^2$, якщо центр збігається з початком координат (Рис. 50, б). Це множина точок площини, рівновіддалених від точки С.

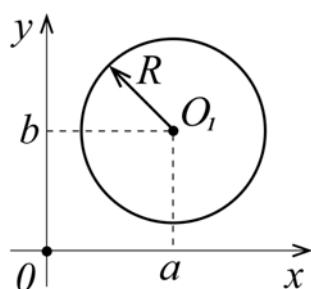


Рис. 50, а)

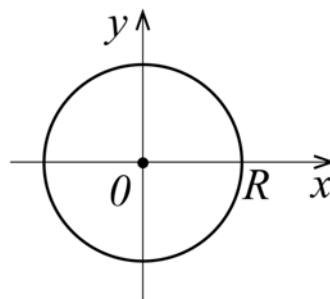


Рис. 50, б)

2. **Еліпс** – це множина точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, рівною $2a$, більшою за відстань між фокусами $2c$ (Рис. 51).

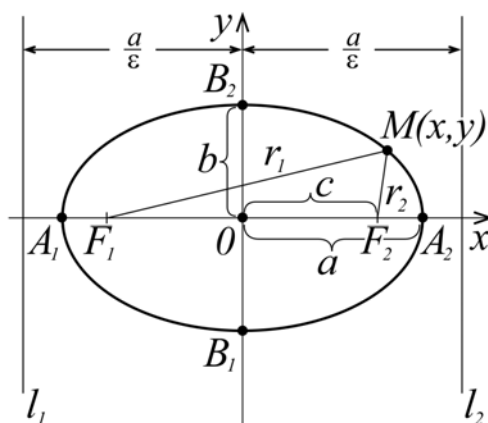


Рис. 51.

У ДПСК еліпс має **канонічне** рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a \geq b > 0$, a – **велика піввісь**, b – **мала піввісь**, $F_1 (-c, 0)$, $F_2 (c, 0)$ –

фокуси еліпса, $a > c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – **ексцентриситет** еліпса,

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – **директриси**, $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ – **фокальні радіуси**, $r_1 + r_2 = 2a$,

директоріальна властивість еліпса: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$, де d_k – відстань від точки еліпса до відповідної директриси. Якщо $a = b = R$, то дістанемо коло $x^2 + y^2 = R^2$, його $\varepsilon = 0$.

Параметричне рівняння еліпса: $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi).$

Якщо полюс помістити у фокус, а полярну вісь направити по осі абсцис, то **полярне** рівняння еліпса: $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$ – фокальний параметр.

Оптична властивість еліпса: якщо джерело світла помістити в один із фокусів еліпса, то відбиті від нього промені зберуться в другому його фокусі.

Рівняння дотичної до еліпса у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

3. **Гіпербола** – це множина точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, рівною $2a$, меншою за відстань між фокусами $2c$ (Рис. 52).

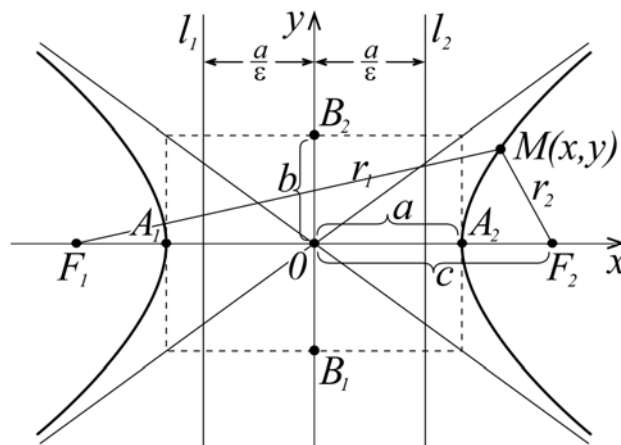


Рис. 52.

У ДПСК гіпербола має **канонічне** рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a – **дійсна піввісь**, b – **уявна піввісь**, $F_{1,2}(\mp c, 0)$ – **фокуси** гіперболи,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c > a$, $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – **ексцентриситет**, $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – **директриси**,

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – **асимптоти**, $r_{1,2} = \pm a + \varepsilon x$ – **фокальні радіуси** правої гілки

гіперболи, $r_{1,2} = \mp a - \varepsilon x$ – лівої гілки, $|r_1 - r_2| = 2a$, **директоріальна**

властивість гіперболи: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$.

Параметричне рівняння гіперболи $\begin{cases} x = \pm a \cosh t, \\ y = b \sinh t, \end{cases} t \in \mathbb{R},$

полярне рівняння $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$, $p = \frac{b^2}{a}$, $\varepsilon > 1$, якщо полюс поміщений у фокус.

Оптична властивість гіперболи: якщо джерело світла помістити в один із фокусів гіперболи, то відбиті від неї промені йдуть у напрямі, якби вони виходили з другого його фокуса.

Рівняння дотичної до гіперболи у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається **спряженою** до даної, її фокуси лежать на осі Oy .

4. **Парабола** – це множина точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси) (Рис. 53).

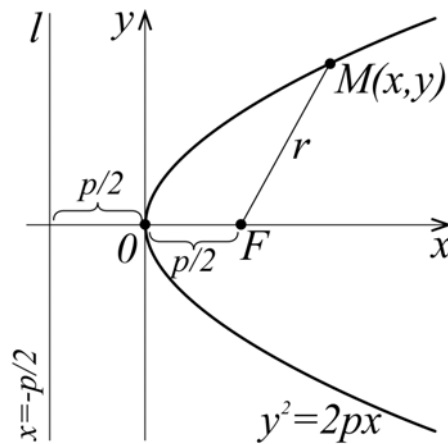


Рис. 53.

У ДПСК парабола з вершиною у початку координат і віссю симетрії Ox має **канонічне** рівняння

$$y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

параметр p – відстань від **фокуса** $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ до **директриси** $x = -\frac{p}{2}$,

фокальний радіус $r = x + \frac{p}{2}$, **директоріальна властивість**: $r = d$, d –

відстань від точки параболи до директриси, $\varepsilon = 1$.

Полярне рівняння параболи $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$, якщо полюс помістити у фокус.

Рівняння дотичної до параболи у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Приклади розв'язання типових завдань

Приклад 1. Визначимо тип кривих, зведемо їх рівняння до канонічного вигляду і знайдемо всі характеристики:

а) $x^2 - 2y^2 + 4y - 6 = 0$,

б) $3x^2 + 12x + 8y^2 - 16y - 4 = 0$,

в) $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$,

г) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

◀ а) Виділимо повні квадрати $x^2 - 2(y-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$, після заміни $x = x_1$, $y-1 = y_1$, тобто перенесення початку координат у точку $C(0,1)$, дістанемо канонічне рівняння $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1$ – це гіпербола з центром у точці $C(0,1)$, дійсна піввісь 2, уявна $\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6}$, координати фокусів $F_{1,2}(\pm\sqrt{6}, 1)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2}$, асимптоти $y = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$;

б) $3(x+2)^2 + 8(y-1)^2 = 24 \Rightarrow \frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, де $x_1 = x+2$, $y_1 = y-1$, тобто початок координат перенесено у точку $C(-2,1)$. Це еліпс з центром у точці C , півосі $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{8}}$, координати фокусів $F_{1,2}(-2 \pm \sqrt{5}, 1)$, рівняння директрис $x = -2 \pm \frac{8}{\sqrt{5}}$;

в) $(y-3)^2 = -5(x-1)$ – це парабола з центром $C(1,3)$, $p = \frac{5}{2}$, фокус $F(-\frac{3}{2}, 3)$, гілки напрямлені симетрично осі Ox у від'ємному напрямі;

г) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0 \Rightarrow$ крива вироджується у точку $(1,2)$. ▶

Приклад 2. Складемо рівняння еліпса, якщо його фокуси $F_1(-1,1)$, $F_2(5,1)$, а пряма $x = \frac{31}{3}$ є однією з директрис.

◀ Центр еліпса

$$C(2,1), c=3, \frac{a^2}{c} = x-2 \Rightarrow 2 + \frac{a^2}{3} = \frac{31}{3} \Rightarrow a^2 = 25, b^2 = 16.$$

Отже, еліпс має рівняння $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$. ►

Приклад 3. Складемо канонічне рівняння гіперболи з центром у початку координат і дійсною віссю Ox , якщо її ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2.

$$\blacktriangleleft \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}, c - a = 2 \Rightarrow a = 5, c = 7, b^2 = c^2 - a^2 = 24 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Складемо рівняння дотичної до параболи $y^2 = -8x$, відрізок якої між точкою дотику і директрисою ділиться віссю Oy навпіл.

◀ Параметр $p = 4$, тому рівняння директриси $x = 2$, за теоремою Фалеса вершина є серединою між абсцисою точки дотику і $x = 2$, $\Rightarrow M_0(-2, \pm 4)$. Підставимо її координати у рівняння дотичної $yy_0 = p(x + x_0) \Rightarrow y - x + 2 = 0, y + x - 2 = 0$ – рівняння дотичних. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Складіть рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $A(-3,0)$ і $B(3,0)$ дорівнює 50.
2. Знайдіть координати центра C і радіус R кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
3. Знайдіть найкоротшу відстань від точки $A(-7,2)$ до кривої $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.
4. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(3,1)$ і $B(-1,3)$, якщо його центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$.

5. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, перпендикулярної до прямої $x - 2y + 9 = 0$.
6. Обчисліть довжину дотичної, проведеної з точки $A(1, -2)$ до кола $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$.
7. Під дією певної сили точка рухалась по колу $x^2 + y^2 = 25$. Після припинення дії сили точка рухалась вільно і пройшла через точку $A(7, 1)$. Складіть рівняння вільного руху точки.
8. Складіть рівняння кола, яке проходить через початок координат і дотикається прямих $x + 2y - 5 = 0$ і $x + 2y + 5 = 0$.
9. Знайдіть довжини півосей, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$.
10. Знайдіть центр C , довжини півосей і ексцентриситет кривої $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.
11. Обчисліть площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $2x^2 + 5y^2 = 20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.
12. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.
13. Під дією певної сили точка M рухалась по еліпсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Коли M співпала з точкою $A(-2, 3)$, дія сили припинилась. Визначте рівняння наступної її траєкторії.
14. Складіть рівняння еліпса, якщо його фокус $F(3, 0)$ і еліпс проходить через точку $M\left(-2, -\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$.

15. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайдіть точку, найближчу до прямої $2x - 3y + 25 = 0$, і відстань до неї.

16. Переконайтесь, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ визначає гіперболу. Знайдіть координати її центра, півосі, ексцентриситет і рівняння асимптот.

17. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ординат, симетрично щодо початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$ і $e = \frac{5}{3}$.

18. Складіть рівняння гіперболи з центром у початку координат і дійсною віссю Ox , якщо відстань між її вершинами дорівнює 10, а між фокусами 12.

19. Складіть рівняння гіперболи, якщо точка $(7, -2\sqrt{3})$ належить гіперболі і віддалена від лівого фокуса на відстані $4\sqrt{7}$;

20. Відстань від точки M на гіперболі $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ до її правого фокуса дорівнює $\sqrt{5}$. Знайдіть відстань від цієї точки до правої директриси.

21. Джерело світла знаходиться у лівому фокусі гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. Промінь, перетнувшись з гіперболою у точці $B(5, 4)$, відбивається від неї. Знайдіть кут між падаючим і відбитим променями;

22. Складіть рівняння гіперболи, якщо її вершини співпадають з вершинами еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, а директриси гіперболи проходять через фокуси еліпса.

23. Складіть рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо вона симетрична відносно осі ординат і проходить через точку $(5, 1)$.

24. Складіть рівняння параболи, вершиною якої є точка $C(3,4)$, параметр $p = 7$, а вісь симетрії паралельна і співнапрямлена з віссю Ox .
25. Складіть рівняння дотичної до параболи $y^2 = 12x$, якщо вона утворює з прямою $4x - 2y + 9 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.
26. Промінь від джерела світла, яке помістили у фокусі параболи $y^2 = 4x$, відбивається від неї у точці $A(9,6)$. Складіть рівняння відбитого променя.
27. Дзеркало автомобільної фари має у розрізі форму параболи. Діаметр дзеркала 20см., глибина 10см. Знайдіть параметр p параболи.
28. Диск, кинутий під кутом 45° до горизонту, досяг найбільшої висоти 14м. На якій відстані він приземлиться?

Відповіді. 1. $x^2 + y^2 = 16$; 2. $C(2, -3)$, $R = 4$; 3. 7; 4. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$;
 5. $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 5 = 0$; 6. 3; 7. $4x - 3y - 25 = 0$, $3x + 4y - 25 = 0$;
 8. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$; 9. 5, 3, $\frac{4}{5}$, $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $x = \pm \frac{25}{4}$;
 10. $C(1, -2)$, 4, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$; 11. 16 кв.од.; 12. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$;
 13. $x - 2y + 8 = 0$; 14. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$; 15. $(-3, 2)$, $\sqrt{13}$; 16. $C(2, -1)$, 3, 4,
 $\frac{5}{4}$, $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$; 17. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; 18. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$;
 19. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$; 20. $\frac{5}{3}$; 21. $\arccos \frac{4}{5}$; 22. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$;
 23. $x^2 = 25y$; 24. $(y - 4)^2 = 14(x - 3)$; 25. $3x + y + 1 = 0$, $x - 3y + 27 = 0$;
 26. $y = 6$; 27. 5см.; 28. 56 м.

§2. Поверхні другого порядку

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку у ДПСК:

1. **Еліпсоїд** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис.54).

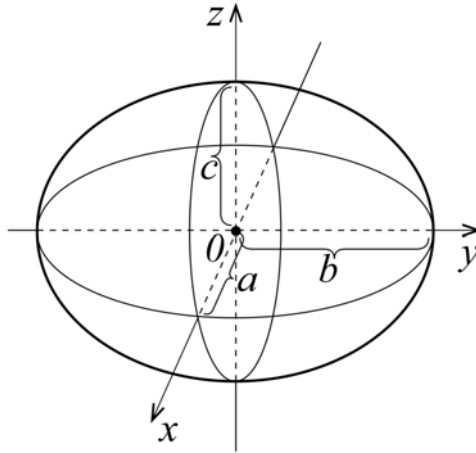


Рис. 54.

Якщо $a = b = c = R$, то дістанемо рівняння **сфери** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (Рис.55), якщо центр сфери у точці $C(a, b, c)$, то її рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ (Рис.56).

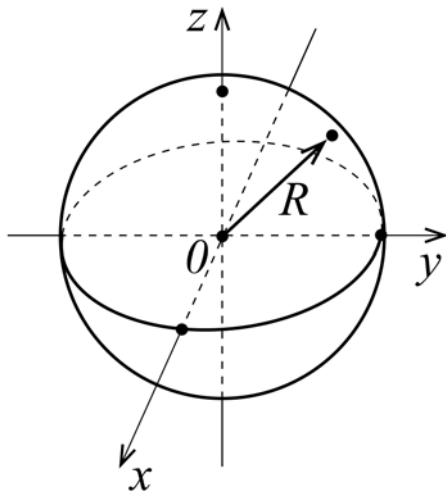


Рис. 55.

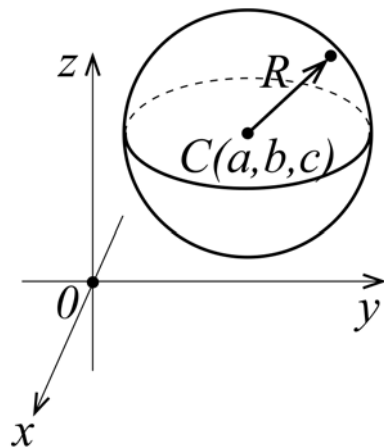


Рис. 56.

2. *Однопорожнинний гіперболоїд* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Рис.57).

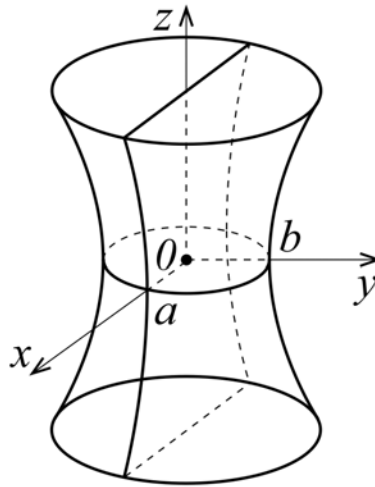


Рис. 57.

3. *Двопорожнинний гіперболоїд* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (Рис.58).

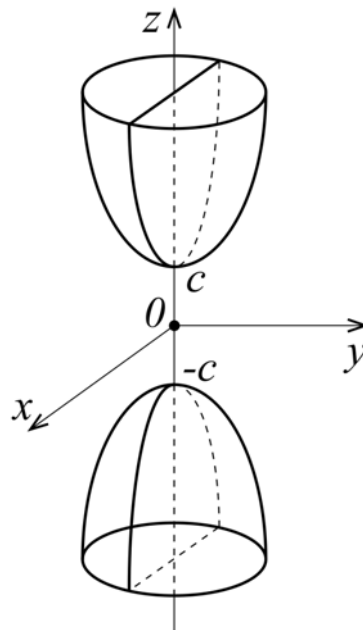


Рис. 58.

4. **Конус** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, з віссю симетрії Oz (рис.59), або $z^2 = xy$, з віссю симетрії $y = x, z = 0$.

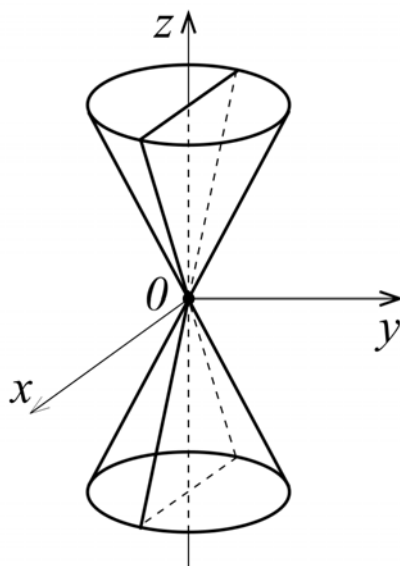


Рис. 59.

5. **Еліптичний параболоїд** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ (Рис.60).

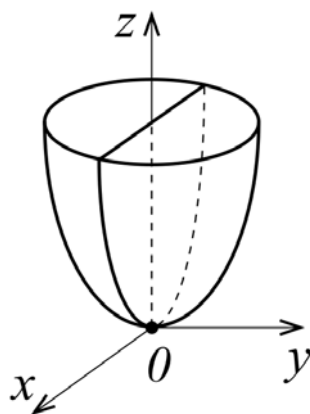


Рис. 60.

6. *Гіперболічний параболоїд* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ (Рис.61).

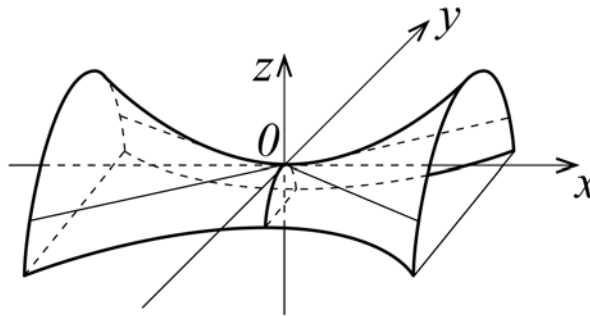


Рис. 61.

7. *Еліптичний циліндр* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис.62),

зокрема, *круговий циліндр* $x^2 + y^2 = R^2$.

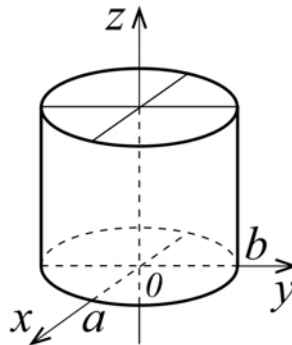


Рис. 62.

8. *Гіперболічний циліндр* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис.63).

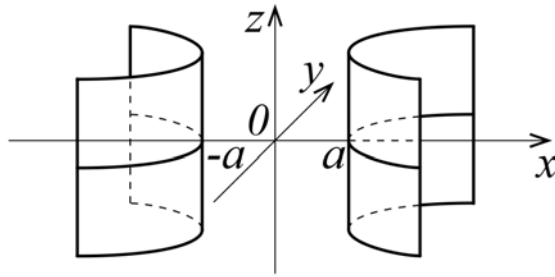


Рис. 63.

9. **Параболічний циліндр** $y^2 = 2px$ (Рис.64).

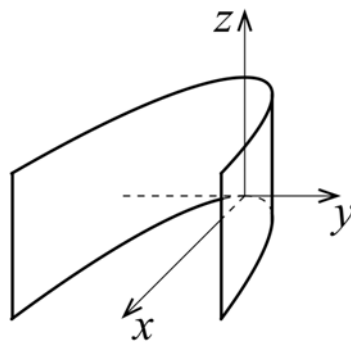


Рис.64

Рівняння $F(x, y) = 0$ визначає **циліндричну** поверхню з твірною, паралельною осі Oz , і **напрямною** $F(x, y) = 0$ (Рис.65).

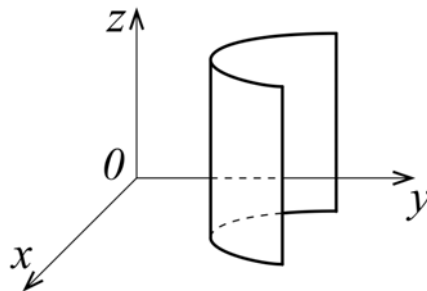


Рис. 65.

Поверхні обертання, утворені обертанням плоскої лінії з рівнянням $F(x, z) = 0, y = 0$ навколо осі Oz , мають рівняння $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ (Рис.66).

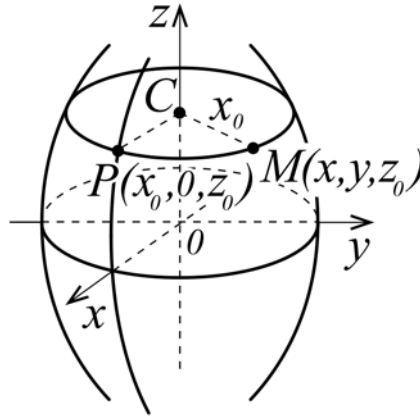


Рис. 66.

Конічна поверхня описується рухом прямої (твірної), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає напрямну L . Зокрема, якщо за вершину вибрати початок координат $O(0,0,0)$, а за напрямну еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = c$, то рівняння конуса матиме вигляд (Рис.59):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Приклади розв'язання типових завдань

Визначимо, які поверхні визначаються рівняннями, запишемо їх канонічні рівняння:

Приклад 1. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

◀ Виділимо повні квадрати: $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 4z$, після заміни $x-3 = x_1, y+3 = y_1, z = z_1$,

тобто перенесення початку координат у точку $O_1(3, -3, 0)$, дістанемо рівняння параболоїда обертання: $x_1^2 + y_1^2 = 4z_1$. ▶

Приклад 2. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

◀ $\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 - (z-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = -1$ – це двопорожнинний гіперболоїд з центром у точці $O_1(1,1,1)$. ►

Приклад 3. Складемо рівняння поверхні, яку отримаємо при обертанні кола $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ навколо осі Ox .

◀ Рівняння поверхні обертання лінії $F(x, y) = 0, z = 0$ буде $F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ – це сфера з центром у точці $O_1(2, 0, 0)$ і радіусом 1. ►

Приклад 4. Складемо рівняння параболічного циліндра з твірною, паралельною осі Oy , якщо вершина напрямної міститься у початку координат, її фокус $F\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$, а Oz вісь симетрії.

◀ Рівняння циліндра з твірною, паралельною осі Oy , має вигляд $F(x, z) = 0$. Напрямною циліндра є парабола, її параметр $\frac{p}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow p = 3, \Rightarrow x^2 = 6z$ – рівняння циліндра. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Складіть рівняння сфери з центром у точці $C(4, 1, -5)$, якщо вона дотикається площини $2x + 3y + 6z - 37 = 0$.
2. Знайдіть координати центра і радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 1 = 0$.
3. Запишіть параметричне рівняння лінії перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ і параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$.

4. Знайдіть координати центра C і величини півосей еліпсоїда $4x^2 + 16x + 2y^2 - 12y + 5z^2 - 20z - 6 = 0$.
5. Визначте тип поверхні $x^2 + 6x - 2y^2 + 4y - 3z^2 + 6z = 0$, зведіть її рівняння до канонічного вигляду, знайдіть координати центра C , вершин A, B , рівняння осей і площин симетрії.
6. Яка поверхня визначається рівнянням $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y = 0$? Зведіть її рівняння до канонічного вигляду.
7. Визначте тип і побудуйте поверхню $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$.
8. Визначте тип і побудуйте поверхню $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
9. Визначте тип і побудуйте поверхню $x^2 + y^2 = -4z$.
10. Визначте тип і побудуйте поверхню $x^2 = 4z$.
11. Визначте тип і побудуйте поверхню $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$.
12. Пряма $\begin{cases} z = y, \\ x = 0. \end{cases}$ обертається навколо осі Oy . Напишіть рівняння поверхні обертання.
13. Визначте тип поверхні $x^2 + z^2 + 2y = 1$, вісь обертання, координати вершини.
14. Запишіть рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ навколо осі Ox .
15. Запишіть рівняння поверхні обертання лінії $\begin{cases} 2y + z = 2, \\ x = 0, \end{cases}$ навколо осі Oz .

16. Запишіть рівняння поверхні обертання лінії $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0, \end{cases}$ навколо осі Oz .

17. Запишіть рівняння поверхні обертання лінії $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ z = 0, \end{cases}$

а) навколо осі Ox , б) навколо осі Oy .

Відповіді. 1. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 64$; 2. $(3, -2, 4)$, $2\sqrt{7}$;

3. коло $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2$; 4. $C(-2, 3, 2)$, $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{30}$, $c = 2\sqrt{3}$;

5. двопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} - \frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$,

$C(-3, 1, 1)$, $A(-5, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, осі симетрії $y = 1, z = 1$, площини симетрії

$x = -3, y = 1, z = 1$; 6. еліптичний циліндр $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{\frac{3}{2}} = 1$; 7. еліпсоїд;

8. однопорожнинний гіперболоїд; 9. круговий параболоїд;

10. параболічний циліндр; 11. гіперболічний параболоїд; 12. конус $y^2 = x^2 + z^2$; 13. параболоїд обертання навколо від'ємної частини осі Oy , $C\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$; 14. конус $4(x-2)^2 - 9(y^2 + z^2) = 0$;

15. конус $x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2$; 16. параболоїд $x^2 + y^2 = 2z$;

17. а) двопорожнинний гіперболоїд $x^2 - (y^2 + z^2) = 2$,

б) однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + z^2 - y^2 = 2$.

Розділ VI. Лінійні простори і лінійні оператори

§1. Лінійні та евклідові простори

Означення. Множина L елементів $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ довільної природи називається *лінійним* або *векторним простором*, якщо виконані наступні три умови:

1. задається закон (*операція додавання*), згідно з яким довільним двом елементам \mathbf{x} і \mathbf{y} з L ставиться у відповідність елемент з L , який називають їх **сумою** і позначають $\mathbf{x} + \mathbf{y}$;
2. задається закон (*операція добутку елемента на число*), згідно з яким елементу $\mathbf{x} \in L$ і числу $\alpha \in \mathbb{R}$ ставиться у відповідність елемент $\alpha \mathbf{x} \in L$, який називають **добутком** \mathbf{x} на α ;
3. для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ і чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ визначені операції задовольняють наступні аксіоми:
 - 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
 - 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
 - 3) існує нульовий елемент $\mathbf{0} \in L$ такий, що $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
 - 4) існує протилежний елемент $(-\mathbf{x}) \in L$ такий, що $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
 - 5) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}$;
 - 6) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{x}$;
 - 7) $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \mathbf{x})$;
 - 8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Елементи лінійного простору L називають **векторами**.

Означення. *Базисом* у просторі L називають упорядковану систему векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, якщо:

- 1) вона лінійно незалежна;
- 2) кожний вектор $\mathbf{x} \in L$ можна виразити через лінійну комбінацію векторів цієї системи, тобто

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n. \quad (1)$$

Вираз (1) називають *розкладом вектора \mathbf{x} за базисом*, а числа x_1, x_2, \dots, x_n — *координатами вектора у цьому базисі*.

Означення. Максимальна кількість лінійно незалежних векторів n у просторі L називається його **розмірністю**, позначають $\dim L = n$, простір називається n – **вимірним** і позначається L_n .

Приклад 1. Доведемо, що вектори $\vec{p} = (2, 1, -1), \vec{q} = (-4, -1, 2), \vec{r} = (7, 2, 3)$ утворюють базис в просторі \mathbb{R}^3 і знайдемо координати вектора $\vec{a} = (7, 1, 3)$ у цьому базисі.

◀ Кількість векторів дорівнює розмірності простору, а тому доведемо їх лінійну незалежність, тобто що їх лінійна комбінація $\alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r} = \vec{0}$ лише за умови, коли $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Підставивши координати векторів, дістанемо однорідну систему:

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 7\gamma = 0, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Розкладемо вектор \vec{a} через лінійну комбінацію векторів $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{a} = x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r},$$

що рівносильно системі:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Обидві системи мають одну і ту ж основну матрицю. Розв'яжемо їх одночасно методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 7 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[e_3+e_2]{e_1-2e_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[e_1+2e_3]{e_1 \leftrightarrow e_2, e_2 \leftrightarrow e_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array} \right) \sim \frac{e_3}{13} \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[e_2-5e_3]{e_1-2e_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{e_1+e_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$. Розв'язок однорідної системи тривіальний: $\alpha = \beta = \gamma = 0$, тобто вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ утворюють базис. Вектор \vec{a} у цьому базисі має розклад $\vec{a} = -2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$. ►

Приклад 2. Доведемо, що система многочленів

$e_1(x) = 2 + 3x + x^2, e_2(x) = 3 + 5x + 2x^2, e_3(x) = -2 + 5x + x^2$ є базисом у просторі многочленів степеня ≤ 2 і знайдемо координати многочлена $f(x) = -1 + 6x + x^2$ у цьому базисі.

◀ Доведемо, що із рівності $\alpha e_1(x) + \beta e_2(x) + \gamma e_3(x) = 0$ випливає: $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Маємо $\alpha(2 + 3x + x^2) + \beta(3 + 5x + 2x^2) + \gamma(-2 + 5x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$.

Зрівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 0, \\ 3\alpha + 5\beta + 5\gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Запишемо $f(x)$ як лінійну комбінацію $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$:

$$x_1(2 + 3x + x^2) + x_2(3 + 5x + 2x^2) + x_3(-2 + 5x + x^2) = -1 + 6x + x^2.$$

Ця рівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо обидві системи одночасно:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & | & -1 \\ 3 & 5 & 5 & | & 6 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_2 - 3e_3]{e_1 \leftrightarrow e_3, e_1 - 2e_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -4 & | & -3 \\ 0 & -1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_2]{e_3 - e_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_3]{e_1 - \frac{e_3}{6}, e_2 - \frac{2e_3}{3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{e_1 - 2e_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Неоднорідна система має розв'язок $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$, а однорідна система має тривіальний розв'язок $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тому многочлени $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ утворюють базис, а $f(x) = 2e_1(x) - e_2(x) + e_3(x)$. ►

Означення. Дійсний лінійний простір L_n називається *евклідовим* і позначається E_n , якщо в ньому визначена операція скалярного добутку, а саме довільній парі векторів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ за деяким правилом ставиться у відповідність число (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , яке задовольняє наступні аксіоми:

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – властивість комутативності;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ – властивість адитивності;
3. $(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – властивість однорідності;
4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, причому $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,

Теорема. Для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ справджується *нерівність Коші – Буняковського*:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (2)$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли вектори \mathbf{x} і \mathbf{y} лінійно залежні.

Довжиною (нормою) вектора $\mathbf{x} \in E_n$ називається число $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Кутом між ненульовими векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ називається число α , для якого

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (3)$$

Вектори $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ називаються **ортгогональними**, якщо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$,

Означення. У n -вимірному евклідовому просторі E_n базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ називається **ортонормованим**, якщо довільні його вектори попарно ортгогональні і їх норми рівні 1:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

Якщо \mathbf{x} і \mathbf{y} мають у ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ координати $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$, то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (5)$$

§2. Лінійні оператори

Лінійним оператором (лінійним перетворенням) у лінійному просторі L називається відображення \mathbf{A} простору L самого в себе, яке $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ і числа $\alpha \in \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1. $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{A}(\mathbf{x})$,
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y})$.

Для оператора \mathbf{A} позначимо образи базисних векторів:

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{e}_j, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1)$$

Матрицю $A = (a_{jk})$ називають **матрицею лінійного перетворення у базисі (\mathbf{e})** .

Покажемо, що якщо відомі образи базисних векторів (1) для даного перетворення \mathbf{A} , то можна визначити і образ довільного вектора $\mathbf{x} \in L_n$. Дійсно, запишемо перетворення $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ у координатній формі:

$$y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{jk} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k.$$

Із єдиності розкладу вектора за базисом дістанемо:

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = \overline{1, n},$$

або у розгорнутому вигляді

[illegible]

Скорочено координатне представлення лінійного перетворення має вигляд:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}. \quad (3)$$

Нехай у просторі L_n вибрані два базиси $(\mathbf{e}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ і $(\mathbf{e}') = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$, причому перехід від базису (\mathbf{e}) до (\mathbf{e}') здійснюється за формулами:

$$\mathbf{e}_k' = \sum_{i=1}^n c_{ik} \mathbf{e}_i, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (4)$$

$$\text{де } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} - \text{матриця переходу.}$$

Нехай $A = (a_{ij})$ – матриця оператора A у базисі (e) , а B – матриця цього оператора у базисі (e') . Матриці A і B , що відповідають одному і тому ж перетворенню у різних базисах, називають **подібними**, позначають $A \sim B$. Зв'язок між подібними матрицями у різних базисах такий:

$$B = C^{-1}AC. \quad (5)$$

Зауважимо, що $\det B = \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$, тобто визначник матриці оператора не залежить від вибору базису. Його називають **визначником оператора**.

§3. Власні вектори і власні значення оператора і матриці

Означення. Ненульовий вектор x називається **власним вектором лінійного оператора A** , якщо існує таке число λ , що вектор x задовольняє умову:

$$Ax = \lambda x. \quad (1)$$

Число λ називається **власним значенням (числом) оператора A** , а вектор $x \neq 0$ – **відповідним йому власним вектором**.

Множина всіх власних значень оператора A називається його **спектром**, позначається $\text{Spec} A$.

Виберемо у просторі L_n базис $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Матриця A оператора у цьому базисі задовольняє рівняння $Ax = \lambda x$, тобто вектор x є ненульовим розв'язком однорідної системи

$$(A - \lambda E_n) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

або у координатній формі:

[illegible]

Однорідна система (2) має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\det(A - \lambda E_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Рівняння (3) називається *характеристичним рівнянням*, а вираз $\det(A - \lambda E_n) = P_n(\lambda)$ – *характеристичним многочленом* оператора A і відповідної йому матриці A .

Наприклад, для матриці A третього порядку дістанемо таку формулу характеристичного многочлена:

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det A. \quad (4).$$

Алгебраїчною кратністю власного значення λ_i називають кратність k_i кореня λ_i , $i = 1, 2, \dots, r$, характеристичного многочлена $P_n(\lambda)$.

Якщо підставити власне значення матриці λ у систему (2), то фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь складається із власних векторів, що відповідають значенню λ . Кількість їх

дорівнює **геометричній кратності** власного значення λ , вона дорівнює дефекту матриці $k = n - r$, де $r = \text{rang}(A - \lambda E_n)$, і не перевищує алгебраїчної кратності.

Приклад 3. Знайдемо власні значення і власні вектори операторів, заданих у деякому базисі матрицею A :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◀ а) Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0, \text{ власні значення } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Для $\lambda_1 = 0$ знайдемо розв'язок однорідної системи $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{e_1+e_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Загальний розв'язок системи $x_2 = -2x_1$, тобто відповідний власний вектор $\mathbf{X}^1 = C_1(1, -1)^T$ для $\forall C_1 \in \mathbb{R}, C_1 \neq 0$.

Аналогічно для $\lambda_2 = 1$ маємо:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ -2 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -x_1, \mathbf{X}^2 = C_2(1, -1)^T, C_2 \neq 0;$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 - \text{ власне значення, його}$$

алгебраїчна кратність дорівнює 2. Розв'язуємо однорідну систему: $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \mathbf{X}^1 = C(1, -1), C \neq 0$. Отже, оператор має один власний вектор, його геометрична кратність дорівнює 1;

$$\text{в) } \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm i, \Rightarrow \lambda = i:$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}^1 = C_1(1, 1+i)^T,$$

для $\lambda = -i: \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X}^2 = C_2(1, 1-i)^T$. Зауважимо, що на множині

$$\mathbb{R} \quad \text{Spec} A = \emptyset;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 3 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ за формулою (14) маємо:}$$

$$-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2 - \text{ власні значення.}$$

Для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} - & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_3, x_2 = 0, x_3 = C_1, \mathbf{X}^1 = C_1(1, 0, 1)^T.$$

Для $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 = C_2, \mathbf{X}^2 = C_2(0, -1, 1)^T.$$

Для $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -2x_1, \quad x_2 = 2x_1, \quad x_1 = C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}^3 = C_3(1, 2, -2), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$$д) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = -1, \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3, \quad x_2 = C_1, \quad x_3 = C_2,$$

$$\mathbf{X}^1 = C_1(-1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{X}^2 = C_2(1, 0, 1)^T, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Оператор має власне значення $\lambda = -1$, його алгебраїчна кратність 3, а геометрична кратність 2;

$$е) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 0.$$

Для

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = x_3, \Rightarrow \mathbf{X}^1 = C_1(1, 0, 1)^T.$$

$$\text{Для } \lambda = 0: \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow x_3 = 0, x_2 = -x_1, \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}^2 = C_2(1, -1, 0)^T, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Власне значення $\lambda = 0$ має алгебраїчну кратність 2, а геометричну 1. ►

Матриця A лінійного оператора у деякому базисі має **діагональний вигляд** тоді і тільки тоді, коли всі вектори базису є власними векторами оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Лінійний оператор має у деякому базисі діагональну матрицю тоді і тільки тоді, коли всі корені його характеристичного многочлена мають рівні алгебраїчні і геометричні кратності.

Приклад 4. Вияснимо, які з наступних матриць лінійних операторів можна звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайдемо цей базис і відповідну йому матрицю:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{г) } A &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◀ а) Із прикладу 3 а) $\Rightarrow \text{Spec} A = \{0, 1\}$, базисними будуть відповідні їм власні вектори $\mathbf{e}_1 = (1, -2)^T$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1)^T$. Матриця оператора у цьому базисі має такий діагональний вигляд: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) Із прикладу 3 б) $\Rightarrow \text{Spec} A = \{1\}$, власне значення $\lambda = 1$ має алгебраїчну кратність 2, а геометричну 1, оскільки йому відповідає один власний вектор $\mathbf{e} = (1, -1)$. Тому не існує базису, у якому оператор має діагональну матрицю;

в) Із прикладу 3 в) $\Rightarrow \text{Spec} A = \{i, -i\}$, власні вектори $\mathbf{e}_1 = (1, 1+i)^T$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1-i)^T$, матриця у цьому базисі має вигляд $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$;

г) Із прикладу 3 г) $\Rightarrow \text{Spec} A = \{1, -1, -2\}$, власні вектори $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, -1, 1)^T$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, -2)^T$, матриця у цьому базисі має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

д) Із прикладу 3 д) $\Rightarrow \text{Spec} A = \{-1\}$. Власне значення $\lambda = -1$ має алгебраїчну кратність 3, а геометричну 2. Тому не існує базису, у якому оператор має діагональну матрицю. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Перевірте, що система векторів \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 є базисом і знайдіть координати вектора \mathbf{x} у цьому базисі:

1. $\mathbf{e}_1 = (1, -1, -1)^T$, $\mathbf{e}_2 = (-3, -2, 2)^T$, $\mathbf{e}_3 = (1, 3, 2)^T$, $\mathbf{x} = (0, -2, 4)^T$;

2. $\mathbf{e}_1 = (3, -1, 3)^T$, $\mathbf{e}_2 = (-3, -1, -4)^T$, $\mathbf{e}_3 = (3, 2, -1)^T$, $\mathbf{x} = (6, 5, -7)^T$;

3. Переконайтесь, що матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

є базисом у просторі матриць (2×2) і знайдіть координати матриці

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ у цьому базисі;}$$

4. Переконайтесь, що система многочленів

$f_1(x) = 2 + 4x - 2x^2$, $f_2(x) = -1 + 2x + x^2$, $f_3(x) = -2 - 2x - x^2$ є базисом у просторі многочленів другого степеня, знайдіть координати многочлена $p(x) = 2 + 4x^2$ у цьому базисі;

5. Лінійний оператор A у базисі $\mathbf{e}_1 = (-2, 3, 3)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 3, 2)^T$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 1, 1)^T$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайдіть матрицю цього оператора у базисі $\mathbf{e}'_1 = (1, -3, -3)^T$, $\mathbf{e}'_2 = (-2, 1, 2)^T$, $\mathbf{e}'_3 = (1, 1, 0)^T$;

Знайдіть власні значення і власні вектори матриць:

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

Чи можна звести матриці A до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису? Якщо так, то знайдіть діагональні матриці і відповідні базиси:

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 14. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповіді. 1. $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$; 2. $\mathbf{x} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$; 3. $Y = 2A_1 - 2A_2 + 4A_3 - A_4$;

4. $p(x) = -f_1(x) - 2f_3(x)$; 5. $A_k = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

6. $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}^1 = C_1(1, -1)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}^2 = C_2(2, -1)^T$, $C_1, C_2 \neq 0$; 7. $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}^1 = C_1(1, -1)^T$,

$\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}^2 = C_2(1, 1)^T$, $C_1, C_2 \neq 0$; 8. $\lambda_{1,2} = 0$, $\mathbf{x}^1 = C(1, -1)^T$, $C \neq 0$;

9. $\lambda_{1,2,3} = -1$, $\mathbf{x}^1 = C(1, -1, -1)^T$, $C \neq 0$;

10. $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}^1 = C_1 (1, 0, 1)^T, \lambda_{2,3} = 0, \mathbf{x}^2 = C_2 (-1, 1, 0)^T, C_1, C_2 \neq 0;$
11. $\lambda_{1,2} = 1, \mathbf{x}^1 = C_1 (0, 1, 2)^T + C_2 (1, 1, 0)^T, |C_1| + |C_2| \neq 0,$
- $\lambda_3 = 2, \mathbf{x}^3 = C_3 (1, 1, -1)^T, C_3 \neq 0;$
12. $A_e = \text{diag}(3, 0, -3), \mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)^T, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T;$
13. $A_e = \text{diag}(2, -3, 3),$
- $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \mathbf{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^T, \mathbf{e}_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T;$
14. $A_e = \text{diag}(-5, 4, 4),$
- $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)^T, \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^T, \mathbf{e}_3 = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right)^T.$

Розділ VII. Квадратичні форми

§1. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Нехай у просторі L_n вектор \mathbf{x} у базисі (\mathbf{e}) має координати

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Означення. *Квадратичною формою* називається числова функція $f(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in L_n$, яка є однорідним многочленом другого степеня відносно координат вектора \mathbf{x} і має вигляд:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + \\ & + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо покласти $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратичну форму можна записати у вигляді:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \quad (2)$$

де $A = (a_{ij})$ – симетрична матриця.

Якщо у деякому базисі (\mathbf{e}) матриця квадратичної форми діагональна, то вираз

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad (3)$$

називають **канонічним виглядом** квадратичної форми. Базис (\mathbf{e}) у цьому разі називають **канонічним**.

Розглянемо два методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

1. Метод Лагранжа полягає у виділенні повних квадратів відносно змінних. Проілюструємо його на прикладі.

Приклад 1. Знайдемо методом Лагранжа канонічний вигляд квадратичної форми $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3$ і вкажемо відповідне перетворення координат.

◀ Виберемо доданки, які містять

$$\begin{aligned} x_1 : x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(\mathbf{x}) &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

Зробимо заміну:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3, \Rightarrow f(\mathbf{x}) = y_1^2 - 3y_2^2 + 6y_2y_3 = \\ &= y_1^2 - 3(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2) + 2y_3^2 = z_1^2 - 3z_2^2 + 2z_3^2 - \end{aligned}$$

канонічний вигляд квадратичної форми, де здійснене відповідне перетворення змінних: $z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, z_2 = x_2 - x_3, z_3 = x_3$. ►

2. Метод власних значень. Нехай дійсна квадратична форма задана у ортонормованому базисі (\mathbf{e}) евклідового простору E_n симетричною матрицею A . Для матриці A :

- складаємо характеристичне рівняння і знаходимо власні значення,
- знаходимо відповідні їм власні вектори і нормуємо їх,
- здійснюємо перехід до ортонормованого базису (\mathbf{e}') , складеного із власних векторів, стовпці матриці переходу є власними векторами.

Дістанемо канонічний вигляд (3) квадратичної форми і відповідне ортогональне перетворення.

Розв'яжемо приклад 1 методом власних значень

◀ Запишемо матрицю квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо власні значення:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2.$$

Знаходимо відповідні їм власні вектори і нормуємо їх: для $\lambda_1 = 1$

розв'язуємо однорідну систему
$$\begin{cases} -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \end{cases} \quad \text{власний вектор } (1, 1, 2)^T$$

нормуємо $\mathbf{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T$; аналогічно для $\lambda_2 = 3$ обчислюємо

відповідний власний вектор $\mathbf{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, для $\lambda_3 = -2$ – власний

вектор $\mathbf{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$.

Матриця переходу $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ визначає перетворення

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ y_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3. \end{cases}$$

У базисі із власних векторів (\mathbf{e}') квадратична форма має канонічний вигляд $f(\mathbf{x}) = y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_3^2$. ►

§2. Знаковизначеність квадратичних форм. Критерій Сильвестра

Означення. Дійсна квадратична форма $f(\mathbf{x})$, визначена у лінійному просторі L_n , називається:

- додатно означеною, якщо для довільного вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ виконується нерівність $f(\mathbf{x}) > 0$;
- від'ємно означеною, якщо $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ виконується нерівність $f(\mathbf{x}) < 0$;

- додатно або від'ємно напівозначеною, якщо відповідно $f(\mathbf{x}) \geq 0$ або $f(\mathbf{x}) \leq 0$;
- знакозмінною (неозначеною), якщо існують вектори \mathbf{x}, \mathbf{y} такі, що $f(\mathbf{x}) > 0, f(\mathbf{y}) < 0$.

Якщо квадратична форма зведена до канонічного вигляду, то вона додатно (від'ємно) означена тоді і тільки тоді, коли кількість додатних r^+ (від'ємних r^-) квадратів дорівнює $\dim L_n$, якщо у її канонічному вигляді є як додатні, так і від'ємні доданки, то вона знакозмінна (див. Приклад 1).

Якщо квадратична форма задана у довільному базисі матрицею A , то без зведення її до канонічного вигляду дослідити на знаковизначеність можна за допомогою **кутових мінорів**, тобто мінорів, які стоять у перших k рядках і перших k стовпцях матриці.

Критерій Сильвестра. Для того, щоб квадратична форма $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ була:

- додатно означеною, необхідно і достатньо, щоб всі її кутові мінори були додатними, тобто

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \det A > 0;$$

- від'ємно означеною, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувались, причому $\Delta_1 < 0$.

Якщо серед кутових мінорів є нульові, то можна розглянути **головні мінори**, це такі мінори, у яких номери рядків співпадають з номерами стовпців. Квадратична форма $f(\mathbf{x}) \geq 0 \Leftrightarrow$ коли невід'ємні всі головні (не тільки кутові) мінори її матриці; $f(\mathbf{x}) \leq 0 \Leftrightarrow$ коли у її матриці всі головні мінори парного порядку невід'ємні і всі головні мінори непарного

порядку не додатні; квадратична форма знакозмінна \Leftrightarrow коли у матриці є від'ємний головний мінор парного порядку або два головних мінори непарних порядків різних знаків.

Приклад 2. Дослідимо на знаковизначеність квадратичні форми:

а) $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

б) $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$

в) $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3;$

г) $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3.$

◀ а) Матриця квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, її кутові мінори

$\Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \det A = 2$ – додатні. Отже, квадратична форма додатно означена;

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \Delta_1 = -2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \Delta_3 = \det A = -4.$

Квадратична форма від'ємно означена;

в) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \Delta_1 = -2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_3 = \det A = 0.$

За кутовими мінорами встановити знаковизначеність неможливо. Знайдемо головні мінори першого порядку:

-2, -1, -2. Головні (не кутові) мінори другого порядку $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$. Отже, всі головні мінори непарного порядку не додатні, а парного порядку невід'ємні, квадратична форма $f(\mathbf{x}) \leq 0$.

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_3 = \det A = 0.$$

За кутовими мінорами встановити знаковизначеність неможливо. Знайдемо головні мінори першого порядку:

2, 2, 4, другого порядку $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1$. Є від'ємний кутовий мінор парного порядку, тому квадратична форма знаковмінна. ►

§3. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

У декартовій прямокутній системі координат простору \mathbb{R}^2 загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \quad (4)$$

Покажемо, що рівняння (4) визначає еліпс, гіперболу або параболу, крім випадків, коли воно вироджується у пару прямих, точку або порожню множину.

Доданки

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (5)$$

розглядаємо як квадратичну форму з матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Якщо λ_1, λ_2 – власні значення матриці A , то при переході від ортонормованого базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) до базису із відповідних власних векторів (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) квадратична форма набуде канонічного вигляду

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2. \quad (6)$$

Для кривої другого порядку величини

$$s = a_{11} + a_{22} = \text{tr} A, \quad \Delta = \det A, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \quad (7)$$

є *інваріантами*, тобто вони не змінюються при зміні системи координат. Зауважимо, що при $\delta = 0$ крива вироджується.

Після виділення повних квадратів рівняння кривої матиме вигляд:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + c = 0.$$

Можливі такі випадки:

1. $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ – крива еліптичного типу, еліпс, якщо $sc < 0$, точка, якщо $c = 0$, уявний еліпс, якщо $sc > 0$;

2. $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ – крива гіперболічного типу, гіпербола, якщо $c \neq 0$, при $c = 0$ – пара перхресних прямих;

3. $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ – крива параболічного типу, парабола $\lambda_1 x_2^2 + by_2 = 0$ або пара прямих $\lambda_1 x_2^2 + c = 0$, якщо $\lambda_1 \neq 0$.

Приклад 3. Визначимо тип кривої $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$, зведемо її рівняння до канонічного вигляду і знайдемо канонічне перетворення координат.

◀ Квадратична форма рівняння кривої $9x^2 - 24xy + 16y^2$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0 - \text{крива параболічного типу.}$$

Складемо характеристичне рівняння, знайдемо власні числа і орти власних векторів матриці:

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -12 \\ -12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25,$$

$$\text{для } \lambda_1 = 0 \text{ маємо } \begin{cases} 9x_1 - 12x_2 = 0, \\ -12x_1 + 16x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{орт власного вектора } \vec{e}_1' = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)^T,$$

$$\text{для } \lambda_2 = 25: \begin{cases} -16x_1 - 12x_2 = 0, \\ -12x_1 - 9x_2 = 0, \end{cases} \quad x_1 = -\frac{3}{4}x_2,$$

$$\text{орт власного вектора } \vec{e}_2' = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Матриця переходу до нової системи координат дорівнює

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

і є матрицею повороту на кут $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$, $\det C = 1 > 0$ – тому орієнтація осей координат незмінна. Формули переходу до нової системи координат такі:

$$\begin{aligned}x &= \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1, \\y &= \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1.\end{aligned}\tag{8}$$

У базисі (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) рівняння кривої має вигляд: $25y_1^2 + 5x_1 + 20y_1 + 4 = 0$.

Виділимо повний квадрат $x_1 = -5\left(y_1 + \frac{2}{5}\right)^2$ і зробимо заміну

$x_2 = x_1, y_2 = y_1 + \frac{2}{5}$. Виразимо x_1, y_1 через нові змінні і підставимо їх у (8), дістанемо:

$$\begin{aligned}x &= \frac{4}{5}x_2 - \frac{3}{5}y_2 + \frac{6}{25}, \\y &= \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}y_2 - \frac{8}{25}.\end{aligned}$$

Отже, внаслідок повороту системи координат xOy на кут $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ і перенесення початку координат у точку $O_2\left(\frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right)$, дістанемо у системі координат $x_2O_2y_2$ з базисом (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) канонічне рівняння параболи $x_2 = -5y_2^2$. ►

Приклад 4. Визначимо тип кривої $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$, зведемо її рівняння до канонічного вигляду і знайдемо канонічне перетворення координат.

◀ Квадратична форма $5x^2 + 4xy + 8y^2$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0$ – крива еліптичного типу. Знаходимо власні числа і орти власних векторів матриці:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4, \vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T,$$

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)^T.$$

Формули ортогонального перетворення координат

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2 - 2y_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_2 + y_2),$$

Підставимо їх у рівняння кривої, дістанемо

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 + 80 = 0.$$

Виділимо повні квадрати $9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0$, після

заміни $x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}} = x_2, y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} = y_2$ дістанемо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

а формули канонічного перетворення координат мають вигляд:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2 - 2y_2) + 2,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_2 + y_2) + 3,$$

і означають поворот системи координат на кут $\arctg 2$ і перенесення початку координат у точку $O_2(2, 3)$. ►

§4. Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду

У просторовій декартовій прямокутній системі координат \mathbb{R}^3 загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \quad (9)$$

Квадратична форма $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ трьох змінних x, y, z має симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матриця A має дійсні власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, яким відповідають ортонормовані власні вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$. Стовпцями ортогональної матриці переходу $C = (c_{ij})$ до нового базису є координати цих власних векторів. Виконаємо заміну

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x_1 + c_{12}y_1 + c_{13}z_1, \\ y &= c_{21}x_1 + c_{22}y_1 + c_{23}z_1, \\ z &= c_{31}x_1 + c_{32}y_1 + c_{33}z_1 \end{aligned} \quad (10)$$

і підставимо ці значення у рівняння (9). Квадратична форма зведеться до канонічного вигляду:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2.$$

Як і для кривої другого порядку, при перетворенні рівняння поверхні другого порядку інваріантами поверхні є величини:

$$s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{tr} A - \text{слід матриці, } s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

сума головних мінорів матриці, $\Delta = \det A$ і $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$.

Після виділення повних квадратів, рівняння центральної поверхні матиме канонічний вигляд:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + c = 0, \quad c = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \Delta \neq 0.$$

Можливі такі випадки:

1. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Тоді при $c < 0$ матимемо

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ – еліпсоїд;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ – однопорожнинний гіперболоїд;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ – двопорожнинний гіперболоїд;
- $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ – порожня множина;

при $c = 0$, якщо $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ – конус, якщо всі λ_i одного знаку – точка;

2. Одне із власних чисел, наприклад, $\lambda_3 = 0$. Тоді рівняння (9) матиме вигляд

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + 2b_3 z_2 + b = 0.$$

Якщо $b_3 = 0$, то це циліндрична поверхня, або пара пересічних площин, чи порожня множина. Якщо $b_3 \neq 0$, і $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, – це еліптичний параболоїд, при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, – гіперболічний параболоїд.

3. Серед власних чисел два рівні нулю і, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$.

Канонічне рівняння поверхні матиме вигляд

$$\lambda_1 x_2^2 + 2b_2 y_2 + 2b_3 z_2 + b = 0.$$

Якщо $b_2 = 0$ і $b_3 = 0$, то це пара паралельних прямих або порожня множина, якщо хоча б одне із чисел $b_2 \neq 0, b_3 \neq 0$, то після перетворення системи координат дістанемо параболічний циліндр.

Зауважимо, що при $\delta = 0$ поверхня конічна або циліндрична, крім випадків виродження.

Приклад 5. Зведемо рівняння поверхні другого порядку

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

до канонічного вигляду, визначимо її тип і запишемо канонічне перетворення координат.

◀ Матриця квадратичної форми $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz$ дорівнює

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Коренями відповідного характеристичного многочлена $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$ є власні значення $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$.

Відповідні їм орти власних векторів дорівнюють

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T, \vec{e}_2' = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T, \vec{e}_3' = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T. \quad \text{Формули}$$

ортогонального перетворення

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3}(x_1 + 2y_1 + 2z_1), \\y &= \frac{1}{3}(2x_1 + y_1 - 2z_1), \\z &= \frac{1}{3}(2x_1 - 2y_1 + z_1)\end{aligned}\tag{11}$$

підставимо у рівняння поверхні, отримаємо

$$3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2 - 6x_1 - 24y_1 + 18z_1 + 30 = 0.$$

Виділимо повні квадрати $3(x_1 - 1)^2 + 6(y_1 - 2)^2 + 9(z_1 + 1)^2 = 6$. Зробимо заміну $x_1 = x_2 + 1$, $y_1 = y_2 + 2$, $z_1 = z_2 - 1$ і підставимо ці значення у формули (11), дістанемо канонічне перетворення координат:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3}(x_2 + 2y_2 + 2z_2) + 1, \\y &= \frac{1}{3}(2x_2 + y_2 - 2z_2) + 2, \\z &= \frac{1}{3}(2x_2 - 2y_2 + z_2) - 1.\end{aligned}$$

Початок координат перенесено у точку $O_2(1, 2, -1)$. У новій системі координат маємо канонічне рівняння поверхні

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{1} + \frac{z_2^2}{\frac{2}{3}} = 1 - \text{це трьохвісний еліпсоїд.} \blacktriangleright$$

Приклад 6. Зведемо рівняння поверхні другого порядку

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 8x - 4y + 12z + 10 = 0$$

до канонічного вигляду, визначимо її тип і запишемо канонічне перетворення координат.

◀ Матриця квадратичної форми $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$ дорівнює $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ і має характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2, \Rightarrow \vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, $\vec{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ – орти канонічного базису. Формули ортогонального перетворення координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_1, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1. \end{aligned}$$

або після виділення повних квадратів і заміни $x_2 = x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$, $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$, $z_2 = z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ дістанемо канонічне рівняння поверхні

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{y_2^2}{1} - \frac{z_2^2}{3} = 1 -$$

це однопорожнинний гіперболоїд. Канонічне перетворення координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - 2, \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + 1, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - 1. \end{aligned}$$

Точка $O_2(-2, 1, -1)$ є початком нової системи координат. ►

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

Дослідіть на знаковизначеність квадратичні форми:

1. $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3;$

2. $f(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3;$

3. $f(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

4. $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

Визначте тип кривої, зведіть її рівняння до канонічного вигляду і вкажіть канонічне перетворення координат:

5. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0;$ 6. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0;$

7. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$

Визначте тип поверхні, зведіть її рівняння до канонічного вигляду і вкажіть канонічну систему координат:

8. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0;$

9. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$

Відповіді 1. Додатно означена; 2. від'ємно означена;

3. знаковмінна; 4. невід'ємна;

5. гіпербола $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{9} = 1$, $O_1(1, 1)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right);$

6. парабола $y_1^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1$, $O_1(3,2)$, $\vec{e}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

7. еліпс $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{1} = 1$, $O_1\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

8. гіперболічний параболоїд $\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{1} = -2z_1$, $O_1(1,2,3)$,

$\vec{e}_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

9. параболічний циліндр $y_1^2 = \frac{4}{3}x_1$, $O_1(2,1,-1)$,

$\vec{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сборник задач по математике для вузов Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 432 с.
2. Кряквин В. Д. Линейная алгебра. Пособие к решению задач и большая коллекция вариантов заданий / В.Д.Кряквин. – М.: Вузовская книга, 2004. – 519 с.
3. Беклемишева Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А.Беклемишева, А.Ю.Петрович, И.А.Чубаров; под ред. Д.В.Беклемишева. – М.: Физматлит, 2001. – 496 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В.Клетеник. – М.: Профессия, 2003. – 200 с.
5. Булдигін В. В. Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри: Навч. посібн. / В.В.Булдигін, В.А.Жук, С.О.Рущицька, В.В.Ясінський. – К.: Вища школа, 1999. – 192 с.
6. Вища математика : Збірник задач: Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; За ред.. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К. : А.С.К., 2005. – 480 с.
7. Дадаян А. А. Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры: учебное пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов/А.А.Дадаян, Е.С.Масалова. – Мн.: Выш.шк.,1982. – 206 с.
8. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова: за ред.. проф. В. В. Булдигіна. – К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.
9. Працьовитий М. В. Аналітична геометрія. Полярна система координат. – К. : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. – 36 с.
10. Працьовитий М. В. Елементи векторної алгебри. Л.1-7. – К. : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008. – 173 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
Використані позначення	6
Екзаменаційна програма з лінійної алгебри та аналітичної геометрії	8
Розділ I. Матриці. Визначники. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)	10
§1. Дії над матрицями. Визначники	10
§2. Обернена матриця. Матричні рівняння	17
§3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Формули Крамера. Ранг матриці. Метод Гаусса	20
§4. Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.	30
Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР	30
Розділ II. Векторна алгебра	35
§1. Лінійні операції над векторами. Метод координат	35
§ 2. Полярна система координат. Криві у полярній системі.....	43
§ 3. Скалярний добуток векторів	47
§ 4. Векторний і мішаний добуток векторів.....	51
Розділ III. Пряма лінія і площина	57
§ 1. Пряма лінія на площині	57
§2. Площина і пряма у просторі.....	64
Розділ IV. Комплексні числа. Алгебра многочленів	74
§ 1. Дії над комплексними числами	74
§ 2. Алгебра многочленів.....	80

Розділ V. Криві і поверхні другого порядку.....	93
§1. Криві другого порядку.....	93
§2. Поверхні другого порядку.....	103
Розділ VI. Лінійні простори і лінійні оператори.....	112
§1. Лінійні та евклідові простори	112
§2. Лінійні оператори.....	116
§3. Власні вектори і власні значення оператора і матриці.....	118
Розділ VII. Квадратичні форми.....	126
§1. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.....	126
§2. Знаковизначеність квадратичних форм. Критерій Сильвестра.....	129
§3. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду	132
§4. Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду	137
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ...	144
ЗМІСТ	145