Федак І.В.

Вибрані питання функціонального аналізу

Спеціальний курс

Івано-Франківськ
2010

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф76

Друкується за рішенням вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника від 8 вересня 2009 р.

Рецензенти:

Загороднюк А.В., зав. кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, доктор фізико-математичних наук

Никифорчин О.Р., зав. кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, кандидат фізико-математичних наук

Федак І.В.

Вибрані питання функціонального аналізу. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: 2010. – 48с.

Навчальний посібник розрахований на закріплення знань про найважливіші поняття та теореми з функціонального аналізу. Містить завдання для самостійного розв'язування.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «математика».

Зміст

1. Означення та приклади метричних просторів.

Нехай X – множина елементів довільної природи. Якщо для будь-яких елементів x та y цієї множини визначена дійсна функція $\rho(x,y)$, яка задовольняє аксіоми:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причому $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) *аксіома симетрії* $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) *нерівність трикутника* $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$,

то пару (X,ρ) називають *метричним простором*, а функцію $\rho(x,y)$ – *метрикою* або *відстанню*.

Розглянемо приклади деяких метричних просторів:

1. *Простір* R^1. Тут $X = R$, $\rho(x,y) = |x - y|$.

При цьому виконання перших двох аксіом відстані очевидне, а нерівність трикутника отримуємо з нерівності:

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|.$$

2. *Простір* R^n. Множина X складається із впорядкованих груп n дійсних чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а відстань задається формулою

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

Виконання перших двох аксіом відстані тут також очевидне, а для доведення нерівності трикутника введемо позначення: $x_k - y_k = a_k$, $y_k - z_k = b_k$. Тоді $x_k - z_k = a_k + b_k$, і нерівність трикутника набуває вигляду:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Після піднесення до квадрату вона зводиться до відомої *нерівності Коші-Буняковського:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Зауважимо, що справедливість останньої нерівності легко випливає з недодатності дискримінанта квадратичної функції

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \lambda + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \lambda^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdot \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

яка при всіх $\lambda \in R$ набуває лише невід'ємних значень. А якщо всі $a_k = 0,$ то така нерівність перетворюється в очевидну рівність.

3. *Простір* l_2. Тут $X = \{(x_1, x_2, ..., x_k, ...)\},$ причому $\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^2 < \infty.$

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Виконання аксіом відстані перевіряємо аналогічно, як у просторі R^n.

4. *Простір* $C[a,b]$. Множина X складається з неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, а відстань

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Існування такого максимуму та виконання перших двох аксіом відстані випливають з властивостей неперервних функцій. А оскільки при кожному $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$|x(t) - z(t)| \le |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)| \le \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

то, перейшовши в цій нерівності до максимуму, отримуємо також виконання третьої аксіоми.

5. *Простір* $C_2[a,b]$. Множина X тут також складається з неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt}.$$

Виконання перших двох аксіом відстані тут також зрозуміле, а справедливість третьої аксіоми випливає з інтегральної нерівності Коші-Буняковського

$$\left(\int_a^b x(t) y(t) dt \right)^2 \le \int_a^b x^2(t) dt \cdot \int_a^b y^2(t) dt,$$

яку легко отримати з недодатності дискримінанта квадратичної функції

$$f(\lambda) = \int_a^b (\lambda x(t) + y(t))^2 \, dt =$$

$$= \int_a^b x^2(t) dt \cdot \lambda^2 + 2\int_a^b x(t) y(t) dt \cdot \lambda + \int_a^b y^2(t) dt.$$

Узагальненням нерівності Коші-Буняковського є нерівність Гельдера

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

де числа $p>1$ та $q>1$ пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

З цієї нерівності випливає також нерівність Мінковського

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k+b_k|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>1.$$

Зауважимо, що у випадку збіжності відповідних рядів ці нерівності залишаться справедливими і для нескінченного числа доданків. В інтегральній формі вони мають вигляд:

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

та

$$\left(\int_a^b \left(|x(t)+y(t)|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p>1.$$

Ці нерівності дають змогу обґрунтувати виконання аксіом відстані в таких метричних просторах:

2^*. *Простір* $R_p^n,\ p>1.$

$$X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\},\ \rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3^*. *Простір* $l_p,\ p>1.$

$$X=\{(x_1,x_2,...,x_n,...)\},\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty,\ \rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

5^*. *Простір* $C_p[a,b],\ p>1.$ Множина X складається з неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій,

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зауважимо також, що у кожному з цих просторів аксіоми відстані залишаться справедливими і у випадку, коли $p=1$.

Вправи до п. 1:

1. Нехай X – множина елементів довільної природи, $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$ Обґрунтуйте, що (X,ρ) – метричний простір.

2. Дослідіть, при яких $\alpha\in R$ функція $\rho(x,y)=|x-y|^{\alpha}$ може визначати метрику на множині дійсних чисел.

3. Обґрунтуйте виконання аксіом відстані у просторі R_0^n, якщо $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\}$, $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$.

4. Доведіть, що при $p=\dfrac{1}{2}$ функція $\rho(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ не визначає відстані на множині $X=\{(x_1,x_2,...,x_n)\}$.

2. Збіжність у метричних просторах.

Замкненою кулею $K[x_0,r]$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)\le r$.

Відкритою кулею $K(x_0,r)$ з *центром* x_0 і *радіусом* r у метричному просторі (X,ρ) називають множину точок $x\in X$, які задовольняють нерівність $\rho(x,x_0)<r$. Відкрита куля радіуса ε з центром у точці x_0 називається $\varepsilon-$*околом* точки x_0 і позначається $O_{\varepsilon}(x_0)$.

Точка x_0 називається *границею послідовності* (x_n) точок метричного простору (X,ρ), якщо у кожному околі цієї точки містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера. З використанням математичної символіки це означення можна записати так:

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\ \ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

Враховуючи відоме з математичного аналізу означення границі числової послідовності, можна також записати, що

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Зауважимо, що у просторі R^1 це означення співпадає з означенням границі числової послідовності, а у просторі $C[a,b]-$ з означенням рівномірної збіжності функціональної послідовності.

Теорема 1. *Якщо послідовність (x_n) точок метричного простору (X,ρ) має границю, то ця границя єдина.*

Доведення. Припустимо, що послідовність (x_n) має границі x_0 та x_0'. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \;\; \rho(x_n, x_0) < \varepsilon, \; \rho\left(x_n, x_0'\right) < \varepsilon.$$

Звідси за нерівністю трикутника отримуємо, що

$$\rho\left(x_0, x_0'\right) \le \rho(x_n, x_0) + \rho\left(x_n, x_0'\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

А оскільки число $\varepsilon > 0$ можна вибрати довільно, то $\rho\left(x_0, x_0'\right) = 0,$ тобто $x_0' = x_0.$

Послідовність (x_n) точок метричного простору (X,ρ) називається *фундаментальною*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всіх $n > N,\; m > N.$

Теорема 2. *Якщо послідовність (x_n) збіжна, то вона фундаментальна.*

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$ Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $n > N,\; m > N.$ Звідси за нерівністю трикутника отримуємо

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $n > N,\; m > N.$

Зауважимо, що *обернене твердження до теореми 2 справедливе не у кожному метричному просторі.* Наприклад, на множині раціональних чисел $X = Q$ з метрикою $\rho(x,y) = |x - y|$ послідовність десяткових наближень з недостачею числа $\sqrt{2}$ є фундаментальною, але не є збіжною, бо число $x_0 = \sqrt{2}$ ірраціональне.

Теорема 3. *Якщо послідовність* $\left(x_n\right)$ *фундаментальна, а деяка її підпослідовність* $\left(x_{n_k}\right)$ *збігається до* x_0, *то й* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Доведення. З умов теореми випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho\left(x_m, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $n_k > N$, $n > N$, $m > N$. Покладаючи $m = n_k$, за нерівністю трикутника отримаємо

$$\rho\left(x_n, x_0\right) \le \rho\left(x_n, x_m\right) + \rho\left(x_{m=n_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $n > N$.

Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається *повним метричним простором*.

З курсу математичного аналізу відомий *критерій Коші* збіжності числової послідовності: *для того, щоб послідовність* $\left(x_n\right)$ *була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$ *знайшовся такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що* $\left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$ *для всіх* $n > N$, $m > N$.

Оскільки у просторі R^1 метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, то з критерію Коші безпосередньо випливає повнота даного простору.
Аналогічно отримуємо повноту простору $C[a,b]$ з критерію Коші рівномірної збіжності для функціональних послідовностей, врахувавши, що границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій – неперервна функція.

Повними будуть також простори R_p^n та l_p при кожному $p \ge 1$. Але всі простори $C_p[a,b]$, $p \ge 1$, є неповними.

Вправи до п. 2:

1. Дослідіть послідовність $x_n(t) = t^n$ на збіжність у метричних просторах $C[0;1]$, $C_1[0;1]$ та $C_2[0;1]$.

2. Доведіть, що послідовність функцій $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ у просторі $C[0;1]$ збігається до функції $x(t) = 0$.

3. Обґрунтуйте повноту просторів R^n та l_2.

4. Доведіть, що простори $C_1[-1;1]$ та $C_2[-1;1]$ неповні.

3. Принцип стискаючих відображень та його застосування до розв'язування інтегральних рівнянь.

Нехай (X,ρ_X) та (Y,ρ_Y) – два метричні простори і f – відображення, яке кожному $x\in X$ ставить у відповідність деякий елемент $y=f(x)\in Y$. Це відображення називається *неперервним в точці* $x_0\in X$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх $x\in X$ таких, що $\rho_X(x,x_0)<\delta$, виконується нерівність $\rho_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. Якщо відображення f неперервне у всіх точках множини X, то його називають *неперервним відображенням*.

У випадку, коли $(X,\rho_X)=(Y,\rho_Y)=R^1$ означення неперервного відображення зводиться до означення неперервної функції.

Нехай тепер (X,ρ) – довільний метричний простір. Відображення $A:X\to X$ цього простору самого в себе називається *стискаючим*, якщо існує таке число $\alpha<1$, що для будь-яких точок $x,y\in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax,Ay)\le\alpha\rho(x,y).$$

Усяке стискаюче відображення є неперервним. Це випливає з нерівності

$$\rho(Ax,Ax_0)\le\alpha\rho(x,x_0)\le\rho(x,x_0).$$

Точка x називається *нерухомою точкою* відображення A, якщо $Ax=x$.

***Теорема Банаха (** принцип стискаючих відображень **).** У повному метричному просторі всяке стискаюче відображення має одну і тільки одну нерухому точку.*

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка повного метричного простору (X,ρ), $A:X\to X$ – стискаюче відображення. Розглянемо послідовність точок цього простору

$$x_1=Ax_0,\ x_2=Ax_1,\ \dots,\ x_n=Ax_{n-1},\ \dots$$

Вона фундаментальна, бо вважаючи $m>n$, отримуємо

$$\rho(x_n,x_m)=\rho(Ax_{n-1},Ax_{m-1})\le\alpha\rho(x_{n-1},x_{m-1})\le\dots\le\alpha^n\rho(x_0,x_{m-n})\le$$

$$\le \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \right] \le$$

$$\le \alpha^n \left[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1} \right] \rho(x_0, x_1) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1) \to 0$$

при $n \to \infty$. Оскільки простір повний, то така послідовність має деяку границю $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Внаслідок неперервності відображення A отримуємо

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, x – нерухома точка відображення A. Вона єдина, бо з рівностей $Ax = x$ та $Ay = y$ випливає, що

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

При $\alpha < 1$ це можливе лише у випадку $\rho(x, y) = 0$, тобто $y = x$.

Зауважимо, що для неперервного відображення A достатньо лише вимагати, щоб деякий степінь цього відображення був стискаючим відображенням.

Розглянемо застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування інтегральних рівнянь.

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt + f(x),$$

в якому ядро $K(x,t)$ неперервне у квадраті

$$Q = \{(x,t) : a \le x \le b, a \le t \le b\},$$

функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а λ – довільний параметр.

Відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt + f(x)$$

переводить простір $C[a,b]$ в себе.

Оскільки

$$\left| A\overline{y}(x) - A\overline{\overline{y}}(x) \right| \le |\lambda| \int_a^b |K(x,t)| \cdot \left| \overline{y}(t) - \overline{\overline{y}}(t) \right| dt \le$$

$$\le |\lambda| M(b-a) \max_{a\le t\le b} \left| \overline{y}(t) - \overline{\overline{y}}(t) \right|,$$

де

$$M = \max_{(x,t)\in Q} \left| K(x,t) \right|,$$

то достатньою умовою для його стискання є нерівність

$$|\lambda| M (b-a) < 1.$$

При її виконанні розв'язок такого інтегрального рівняння можна знайти методом послідовних наближень:

1) вибираємо довільну неперервну функцію $y_0(x)$, наприклад, $y_0(x) \equiv f(x)$;

2) шукаємо послідовні наближення за формулою

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t) dt + f(x), \; n \in N;$$

3) знаходимо розв'язок $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$.

Зауважимо, що даний метод буде застосовний і при виконанні дещо слабшої вимоги

$$|\lambda| \max_{a\le x\le b} \int_a^b |K(x,t)| dt < 1.$$

Аналогічно можна розв'язувати і лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) y(t) dt + f(x), \; a \le x \le b,$$

ядро якого неперервне при $a \le t \le x \le b.$

Це рівняння є частковим випадком рівняння Фредгольма, але характерне тим, що має у просторі $C[a,b]$ єдиний розв'язок при кожному $\lambda \in R.$ При цьому послідовні наближення знаходять за формулою

$$y_n(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) y_{n-1}(t) dt + f(x), \; n \in N.$$

Вправи до п. 3:

1. Доведіть, що відображення $Ax = x + \frac{1}{x}$ у повному метричному просторі $(X,\rho) = ([1;+\infty), |x-y|)$ для всіх $x \ne y$ задовольняє нерівність $\rho(Ax, Ay) < \rho(x,y),$ але не має жодної нерухомої точки.

2. Методом послідовних наближень розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

а) $y(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2ty(t)dt-x;$ б) $y(x)=2\int\limits_0^1 xt^3y(t)dt-1.$

3. Доведіть, що при кожному λ існує такий степінь відображення $Ay(x)=\lambda\int\limits_a^x K(x,t)y(t)dt+f(x),\ a\le x\le b,$ який є стискаючим відображенням.

4. Методом послідовних наближень розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду:

а) $y(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt;$ б) $y(x)=1+\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt.$

4. Лінійні нормовані та евклідові простори

Надалі будемо вважати, що на множині X введені операції додавання та множення на число, які задовольняють аксіоми лінійного простору:

1. $\forall x,y\in X \quad x+y=y+x$ (*комутативність*);
2. $\forall x,y,z\in X \quad x+(y+z)=(x+y)+z$ (*асоціативність*);
3. $\exists 0:\forall x\in X \quad x+0=x$ (*існування нуля*);
4. $\forall x\in X \ \exists -x: x+(-x)=0$ (*існування протилежного елемента*);
5. $\forall x\in X \ 1\cdot x=x;$
6. $\forall x\in X \ \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x;$
7. $\forall x\in X \ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x;$
8. $\forall x,y\in X \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$

Лінійний простір X називають *нормованим простором*, якщо кожному елементу $x\in X$ поставлено у відповідність таке дійсне число $\|x\|$, що виконуються умови:

1. $\|x\|\ge 0,$ причому $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|;$
3. $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|.$

Всякий нормований простір стає метричним простором, якщо покласти $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Очевидно, що при цьому $\|x\|=\rho(x,0)$.

Враховуючи ці співвідношення, нормовані простори позначають так само, як і відповідні їм метричні простори. Аналогічні вимоги ставляться і до їх елементів x.

Наведемо приклади норм у деяких із цих просторів:

1. R^1. $\quad \|x\|=|x|$.
2. R_p^n. $\quad \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1$.
3. l_p. $\quad \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1$.
4. $C[a,b]$. $\quad \|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.
5. $C_p[a,b]$. $\quad \|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1$.

Збіжність послідовності точок x_n нормованого простору до елемента x_0 цього простору визначають з умови $\|x_n-x_0\|\to 0$.

Послідовність точок x_n називається *фундаментальною*, якщо для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ для всіх $n>N,\ m>N$.

Нормовані простори, в яких кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називаються *банаховими просторами*.

Одним із способів введення норми в лінійному просторі є її задавання з допомогою скалярного добутку.

Скалярним добутком у дійсному лінійному просторі X називається дійсна функція (x,y), яка визначена для кожної пари елементів $x,y\in X$ і задовольняє такі умови:

1. $(x,x)\geq 0$, причому $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$;
2. $(x,y)=(y,x)$;
3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;
4. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2y)$.

Лінійний простір із заданим у ньому скалярним добутком називається *евклідовим простором*. Такий простір стає нормованим, якщо в ньому визначити норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Повні евклідові простори нескінченної розмірності називаються *гільбертовими просторами*.

Прикладами евклідових просторів є:

1. R^n. $\quad (x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$

2. l_2. $\quad (x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$

3. $C_2[a,b]$. $\quad (x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt.$

З курсу геометрії відомо, що *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.* Аналог цієї властивості для евклідових просторів має вигляд:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Справді, у кожному такому просторі

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$

$$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2(x,y) + (y,y) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Така рівність є не лише необхідною, а й достатньою умовою для того, щоб норму у лінійному просторі можна було задати з допомогою добутку. Тому її називають *характеристичною властивістю* евклідових просторів.

Розглянемо відповідні приклади:

1. R_p^n, $p \ge 1$. Його норма $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ може бути задана скалярним добутком лише при $p = 2$.

Справді, взявши $x = (1,1,0,...,0)$, $y = (1,-1,0,...,0)$, будемо мати

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}, \ \|x+y\| = \|x-y\| = 2.$$

Отже, з характеристичної властивості отримаємо рівняння

$$2^2 + 2^2 = 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right),$$

єдиним коренем якого є $p = 2$.

2. $l_p,\ p\ge 1,\qquad \|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. При $p\ne 2$ елементи $x=(1,1,0,...,0,...),\ y=(1,-1,0,...,0,...)$, також не задовольняють характеристичну властивість евклідових просторів.

3. Доведемо, що і у просторі $C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ норма не може бути задана скалярним добутком.

Справді, у цьому просторі для функцій $x(t)=\cos t,\ \ y=\sin t$ отримуємо:

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=\sqrt{2},\ \|x-y\|=1.$$

Але

$$\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2\ne 2\left(1^2+1^2\right).$$

Аналогічно може бути доведено що норма довільного простору $C[a,b]$ не може бути задана з допомогою скалярного добутку.

Зауважимо, що у комплексному евклідовому просторі аксіому 2 слід записувати у вигляді $(x,y)=\overline{(y,x)}$. Відповідні приклади скалярних добутків у таких просторах мають вигляд:

1. C^n. $\qquad (x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}.$

2. l_2. $\qquad (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}.$

3. $C_2[a,b]$. $\qquad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$

Вправи до п. 4:

1. Доведіть, що множина $C'[a,b]$ неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання і множення на число утворює лінійний підпростір у просторі $C[a,b]$.

2. Перевірте, чи може бути норма у просторі $C'[a,b]$ задана формулою $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$. Вкажіть хоч один підпростір цього простору, у якому така формула визначає норму.

3. Доведіть, що у $C'[a,b]$ норма може бути задана формулою $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$.

4. Знайдіть всі значення коефіцієнтів α та β, при яких функція $\varphi(x,y) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2$ визначає скалярний добуток у просторі R^2.

5. Ортогональні системи. Ряди Фур'є.

Розглянемо при $x \neq 0$, $\lambda \in R$ невід'ємну квадратичну функцію

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2 (x,x) - 2\lambda(x,y) + (y,y) =$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 - 2(x,y)\lambda + \|y\|^2.$$

Її дискримінант

$$D = \left(2(x,y)\right)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

яку називають *нерівністю Коші-Буняковського*. Вона справедлива для всіх елементів x, y евклідового простору.

Нерівність Коші-Буняковського дає змогу ввести поняття *кута* між довільними ненульовими елементами x, y цього простору за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Зокрема, якщо $\cos\varphi = 0$, то такі елементи називаються *ортогональними*. Зрозуміло, що *умова ортогональності ненульових елементів x, y рівносильна рівності* $(x,y) = 0$.

Система $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів x_α евклідового простору E називається *ортогональною*, якщо

$$\forall \alpha \neq \beta \quad (x_\alpha, x_\beta) = 0.$$

Теорема. *Всяка ортогональна система ненульових елементів x_α евклідового простору E є лінійно незалежною.*

Доведення. Нехай

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Оскільки система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то

$$\left(\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}\right) = \lambda_k \left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Але $\left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) \neq 0,$ то $\lambda_k = 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n.$ Тому ця система лінійно незалежна.

Якщо ортогональна система $\{x_\alpha\}$ повна, то вона називається *ортогональним базисом*. Якщо при цьому норма кожного елемента цієї системи дорівнює 1, то її називають *ортогональною нормованою системою*.

Наведемо приклади таких систем, які базисами відповідних евклідових просторів:

1. У просторі R^n ортогональний нормований базис утворюють елементи

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

2. Ортогональний нормований базис простору l_2 складається з нескінченного числа елементів

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \ e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

3. У просторі $C_2[a, b]$ серед різних ортогональних базисів, які можна задати в ньому, найважливішою є тригонометрична система, що складається з функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \sin\frac{2\pi nt}{b-a} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Зокрема, для відрізка $[-1; 1]$ вона набуває вигляду

$$\frac{1}{2}, \cos\pi nt, \sin\pi nt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

4. Іншу важливу ортогональну систему у просторі $C_2[-1; 1]$ утворюють многочлени Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n.$$

Вибираючи у $n-$вимірному просторі R^n ортогональний нормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n,$ ми можемо довільний елемент цього простору записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

де $c_k = (x, e_k).$

Нехай тепер E – нескінченно вимірний евклідовий простір, і $\{\varphi_k\}$ – ортогональна нормована система елементів цього простору. Поставимо у відповідність довільному елементу $x \in E$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k ,$$

де

$$c_k = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Такий ряд називається *рядом Фур'є* елемента x за системою $\{\varphi_k\}$, а числа c_k – *коефіцієнтами Фур'є* цього елемента.

Природно виникають питання про збіжність цього ряду, а у випадку збіжності – про співпадання його суми з елементом x.

Щоб відповісти на них, поставимо завдання при заданому $n \in N$ підібрати коефіцієнти $\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ так, щоб норма

$$\|x - S_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|$$

була найменшою.

Оскільки $\{\varphi_k\}$ – ортогональна нормована система, то

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 .$$

Мінімум такого виразу досягається при

$$\alpha_k = c_k, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

причому у такому разі

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 .$$

Таким чином, ми отримали, що *найкраще наближення елемента x дають часткові суми його ряду Фур'є*.

Оскільки завжди $\|x - S_n\|^2 \geq 0,$ то з останньої рівності випливає, що при кожному $n \in N$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|x\|^2 .$$

Перейшовши тут до границі, отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|x\|^2,$$

яку називають *нерівністю Бесселя*.

При цьому ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ називається *замкненою*, якщо для будь-якого $x \in E$ виконується рівність *Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2.$$

Вправи до п. 5:

1. Доведіть, що в дійсному евклідовому просторі елементи x та y ортогональні тоді і тільки тоді, коли $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Чи вірне це твердження для комплексних просторів?

2. Доведіть, що у просторі l_2 послідовність (e_n) елементів: $e_1 = (1,0,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,0,...)$, $e_3 = (0,0,1,0,...)$, ... утворює базис.

3. Перевірте ортогональність у просторі l_2 системи елементів $x_n = \left(\underbrace{1,...,1}_{2^{n-1}}, \underbrace{-1,...,-1}_{2^{n-1}}, 0, 0, ... \right)$, $n \in N$.

4. Доведіть ортогональність у просторі $C_2[-1;1]$ системи функцій $x_n(t) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n$, $n \in N$.

6. *Простори* $L_p(G)$. *Збіжність в середньому.*

З властивостей інтеграла Лебега випливає, що разом з функцією $f(x)$ інтегрованим за Лебегом на множині A буде і добуток цієї функції на довільну сталу. Крім того, разом з двома такими функціями інтегрованою за Лебегом на множині A буде і їхня сума.

Таким чином, *для довільної вимірної множини* G *сукупність усіх інтегрованих за Лебегом на* G *функцій утворює лінійний простір*. Такий простір позначають $L_1(G)$.

Задамо норму у цьому просторі формулою

$$\|f\| = \int_G |f(x)| d\mu.$$

Але за наслідком з нерівності Чебишова з $\|f\|=0$ отримуємо тільки, що $f(x)\sim 0$. У зв'язку з цим надалі будемо розглядати не самі функції, а класи еквівалентних між собою функцій. Зокрема, клас $f=0$ буде складатися з функцій, які майже скрізь на G дорівнюють нулю. При цьому будемо враховувати, що для кожної інтегрованої за Лебегом функції еквівалентна до неї функція теж інтегрована за Лебегом, причому їх інтеграли Лебега співпадають.

Таким чином, норму кожного такого класу f можна визначити за записаною вище формулою, вибираючи в ролі функції $f(x)$ довільного представника цього класу. Отриманий при цьому нормований простір також позначають $L_1(G)$. Збіжність за нормою такого простору називають *збіжністю у середньому.*

Інший важливий нормований простір отримаємо, розглядаючи функції, *інтегровані з квадратом*, тобто такі, що

$$\int_G f^2(x)d\mu<\infty.$$

Оскільки

$$\left|f(x)g(x)\right|\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+g^2(x)\right],$$

то *добуток довільних інтегрованих з квадратом функцій є інтегрованою за Лебегом на множині G функцією.*

Зокрема, якщо $\mu(G)<\infty$, то, покладаючи $g(x)=1$, звідси отримаємо інтегрованість за Лебегом інтегрованої з квадратом функції $f(x)$.

З рівності

$$\int_G\left(\alpha f(x)\right)^2 d\mu=\alpha^2\int_G f^2(x)d\mu$$

та нерівності

$$\left(f(x)+g(x)\right)^2\le f^2(x)+2\left|f(x)g(x)\right|+g^2(x)$$

отримуємо, що *сукупність усіх інтегрованих з квадратом на вимірній множині G функцій утворює лінійний простір*. Цей простір позначають $L_2(G)$.

Розглядаючи тут, як і у випадку $L_1(G)$, класи еквівалентних між собою функцій, визначимо норму за формулою

$$\|f\| = \sqrt{\int_G f^2(x)d\mu}.$$

В результаті отримаємо нормований простір $L_2(G)$, збіжність за нормою якого називають *збіжністю в середньому квадратичному.*

Відзначимо, що у випадку $\mu(G) < \infty$ з інтегральної нерівності Коші-Буняковського випливає нерівність

$$\left(\int_G f(x)d\mu\right)^2 \le \mu(G)\int_G f^2(x)d\mu.$$

З останньої нерівності, зокрема отримуємо, що *при* $\mu(G) < \infty$ *із збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *у середньому квадратичному випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому.*

Справді, у такому разі із нерівності

$$\sqrt{\int_G (f_n(x) - f(x))^2 d\mu} < \varepsilon$$

випливатиме, що

$$\int_G |f_n(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon\sqrt{\mu(G)}.$$

Нескладно також довести, що *при* $\mu(G) < \infty$ *із рівномірної збіжності послідовності* $f_n(x)$ *до функції* $f(x)$ *випливає її збіжність до* $f(x)$ *і в середньому квадратичному, а значить, і в середньому.*

Проте, *із збіжності в середньому не випливає навіть збіжності хоч в одній точці множини G.*

Але, *якщо послідовність інтегрованих за Лебегом на множині G скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на G до функції* $f(x)$ *в середньому, то вона збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *і за мірою.*

Звідси, зокрема, випливає, що *якщо послідовність інтегрованих за Лебегом на множині G скінченної міри функцій* $f_n(x)$ *збігається на G до функції* $f(x)$ *в середньому, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається на цій множині до функції* $f(x)$ *майже скрізь.*

Зауважимо також, що у загальному випадку можна розглядати функції, інтегровані зі степенем p, і простори $L_p(G)$ при довільному дійсному $p \geq 1$ з нормою

$$\| f \| = \left(\int_G \left| f(x) \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всі такі простори є банаховими. Обґрунтуємо, наприклад, *повноту простору* $L_1(G)$.

З фундаментальності послідовності (f_n) елементів цього простору випливає існування такої зростаючої послідовності індексів n_k, що

$$\left\| f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \right\| = \int_G \left| f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x) \right| d\mu < \frac{1}{2^k}.$$

З цієї нерівності і теореми Леві випливає збіжність майже скрізь на G ряду

$$\left| f_{n_1} \right| + \left| f_{n_1} - f_{n_2} \right| + \ldots + \left| f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \right| + \ldots$$

Але тоді і ряд

$$f_{n_1} + \left(f_{n_2} - f_{n_1} \right) + \ldots + \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \right) + \ldots$$

збігається майже скрізь на G до деякої границі $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$. Оскільки внаслідок фундаментальності послідовності (f_n) при кожному $\varepsilon > 0$ для достатньо великих k та l виконується нерівність

$$\int_G \left| f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x) \right| d\mu < \varepsilon,$$

то перейшовши в ній до границі при $l \to \infty$, за теоремою Фату отримаємо інтегрованість функції $f_{n_k}(x) - f(x)$ та виконання нерівності

$$\int_G \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| d\mu \leq \varepsilon.$$

Але в такому разі функція

$$f(x) = f_{n_k}(x) - \left(f_{n_k}(x) - f(x) \right)$$

теж інтегрована за Лебегом по множині G, і $f_{n_k} \to f$. Тоді з фундаментальності послідовності випливає, що також $f_n \to f$.

Вправи до п. 6:

1. Дослідіть, чи збігаються у просторі $L_2[0;1]$ послідовності:

а) $x_n(t)=\begin{cases} t,\ t\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right), \\ 0,\ t\notin\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$ б) $x_n(t)=\begin{cases} n^2t,\ t\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{nt}{n^2+1},\ t\notin\left[0,\dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

2. Доведіть, що при $\mu(G)<\infty$ із рівномірної збіжності послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ випливає її збіжність до $f(x)$ і в середньому квадратичному.

3. Доведіть, що при $\mu(G)=\infty$ із збіжності послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ у середньому квадратичному не випливає її збіжність до $f(x)$ в середньому.

4. Доведіть, що система функцій $\{\sin nt\}, n\in N,$ ортогональна у просторі $L_2[0;\pi]$. Запишіть для неї відповідну ортогональну нормовану систему і перевірте виконання рівності Парсеваля для функції $x(t)=1.$

7. Простори Соболєва.

Нехай у просторі R^n задана замкнена обмежена однозв'язна область G з достатньо гладкою границею. Розглянемо лінійний простір l раз неперервно диференційовних в області G функцій $u(x)$. Введемо у цьому просторі норму

$$\|u\|=\left(\int_G |u(x)|^p\,dx+\sum_{|\alpha|=1}^{l}\int_G |D^\alpha u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1.$$

Отриманий нормований простір позначають $\overset{\circ}{W}{}^l_p(G)$. Його доповнення – простір $W_p^l(G)$ – називають простором Соболєва.

У прикладних задачах часто зустрічається випадок $p=2$. При цьому загально прийнятим є позначення $W_p^l(G)=H^l(G)$. такий простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(u,v)=\int_G u(x)v(x)dx+\sum_{|\alpha|=1}^{l}\int_G D^\alpha u(x)D^\alpha v(x)dx.$$

У випадку $n=1$ отримуємо гільбертів простір $H^1[a,b]$ зі скалярним добутком

$$(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx+\int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

та нормою, яка відповідає цьому скалярному добутку,

$$\|u\|=\left(\int_a^b u^2(x)dx+\int_a^b u'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Такий простір складається з класів фундаментальних послідовностей $(u_n(x))$, таких, що

$$\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2 dx+\int_a^b |u_n'(x)-u_m'(x)|^2 dx\to 0$$

при $n,m\to\infty$.

Дві такі послідовності $(u_n(x))$ та $(v_n(x))$ належать до одного класу, якщо

$$\int_a^b |u_n(x)-v_n(x)|^2 dx+\int_a^b |u_n'(x)-v_n'(x)|^2 dx\to 0$$

при $n\to\infty$.

З умови фундаментальності випливає, що окремо

$$\int_a^b |u_n(x)-u_m(x)|^2 dx\to 0,\qquad \int_a^b |u_n'(x)-u_m'(x)|^2 dx\to 0$$

при $n,m\to\infty$. Таким чином, існують функції $u(x)\in L_2[a,b]$ та $w(x)\in L_2[a,b]$ такі, що $u_n(x)\to u(x)$, $u_n'(x)\to w(x)$ в середньому квадратичному при $n\to\infty$. Функцію $w(x)$ називають *узагальненою похідною* (в смислі Соболєва) функції $u(x)$.

Теорема. *Простір $H^1[a,b]$ вкладений у $C[a,b]$.*

Доведення. Нехай функція $u(x)$ неперервно диференційовна на $[a,b]$. За теоремою про середнє знайдеться така точка $\xi\in[a,b]$, що

$$u(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)ds.$$

Тому на $[a,b]$ має місце тотожність

$$u(x)=\int\limits_{\xi}^{x}u'(s)ds+\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}u(s)ds.$$

Отже, за нерівністю Коші-Буняковського отримуємо

$$|u(x)|\le\int\limits_{\xi}^{x}|u'(s)|ds+\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}|u(s)|ds\le$$

$$\le\sqrt{b-a}\left(\int\limits_{a}^{b}u'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int\limits_{a}^{b}u^2(x)ds\right)^{\frac{1}{2}}\le k\|u\|_{W_2^1[a,b]},$$

де $k=\max\left\{\sqrt{b-a},\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right\}$. Звідси випливає нерівність

$$\|u_n-u_m\|_{C[a,b]}\le k\|u_n-u_m\|_{W_2^1[a,b]}.$$

Таким чином з фундаментальності послідовності функцій $u_n(x)\in W_2^1[a,b]$ випливає фундаментальність цієї послідовності і у просторі $C[a,b]$, а отже, її рівномірна збіжність до деякої неперервної на $[a,b]$ функції $u(x)$. Тим більше, така послідовність збігатиметься до функції $u(x)$ і в середньому квадратичному, тобто за нормою простору $L_2[a,b]$. Таким чином, кожен елемент простору $H^1[a,b]$ може бути ототожнений з деякою неперервною на $[a,b]$ функцією.

Вправи до п. 7:

1. Перевірте виконання аксіом норми у просторі $W_1^l(G)$.

2. Перевірте виконання аксіом скалярного добутку у просторі $H^1[a,b]$.

3. Доведіть, що якщо $u_1(x)\in H^1[a,b]$, $u_2(x)\in H^1[a,b]$, то $\lambda_1u_1(x)+\lambda_2u_2(x)\in H^1[a,b]$ і $(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)'(x)=\lambda_1u_1'(x)+\lambda_2u_2'(x)$.

4. Доведіть, що узагальнена похідна сталої дорівнює нулю.

8. Спряжені простори.

Числову функцію f, визначену на деякому лінійному просторі L, називають *функціоналом.*

Функціонал f називається адитивним, якщо

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

для всіх $x, y \in L$. Він називається *однорідним*, якщо

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Адитивний однорідний функціонал називається *лінійним* функціоналом.

Функціонал f, визначений у топологічному лінійному просторі L, називається *неперервним*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $x_0 \in L$ існує такий окіл $O(x_0)$, що

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

при $x \in O(x_0)$. Зокрема, у нормованому просторі такий окіл матиме вигляд $\{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ при деякому $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

У $n-$вимірному просторі всякий лінійний функціонал є неперервним. У загальному випадку це не так.

Теорема 1. *Якщо лінійний функціонал f неперервний у деякій одній точці $x_0 \in L$, то він неперервний на всьому L.*

Доведення. Нехай $y_0 -$ довільна точка цього простору. Розглянемо її окіл

$$O(y_0) = \{y : y = y_0 - x_0 + x\},\ x \in O(x_0).$$

З лінійності функціонала f та його неперервності в точці x_0 випливає, що

$$|f(y) - f(y_0)| = |(f(y_0) - f(x_0) + f(x)) - f(y_0)| =$$
$$= |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

для всіх $y \in O(y_0)$, тобто неперервність функціонала f у точці y_0.

Добуток лінійного неперервного функціонала на число та сума двох лінійних неперервних функціоналів також є лінійними неперервними функціоналами, визначеними у тому ж лінійному просторі L. Тому *сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів, визначених у L, утворює лінійний простір*. Його називають *спряженим* до простору L і позначають L^*.

Якщо простір L нормований, то задавши в L^* норму

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|,$$

отримаємо нормований простір L^*.

Наведемо деякі приклади спряжених просторів:

$$\left(R^n\right)^* = R^n; \quad \left(R_0^n\right)^* = R_1^n; \quad \left(R_1^n\right)^* = R_0^n; \quad \left(R_p^n\right)^* = R_q^n, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$c_0^{\ *} = l_1; \quad l_1^{\ *} = m; \quad l_2^{\ *} = l_2; \quad l_p^{\ *} = l_q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

У повному евклідовому просторі всякий лінійний неперервний функціонал має вигляд

$$f(x) = (x, x_0),$$

де x_0 – фіксований елемент цього простору. Лінійність такого функціонала випливає з аксіом скалярного добутку, а обмеженість

$$|f(x)| = |(x, x_0)| \le \|x_0\| \cdot \|x\|$$

отримуємо з нерівності Коші-Буняковського. При $x = x_0$ вона перетворюється в рівність. Тому $\|f\| = \|x_0\|$.

Зауважимо, що *така відповідність між множиною всіх лінійних неперервних функціоналів* f, *визначених у повному евклідовому просторі, і елементами* x_0 *цього простору є взаємно однозначною*. Таким чином, з точністю до ізометрії $E^* = E$. Зокрема, для гільбертових просторів $H^* = H$.

Теорема 2. *Простір* L^*, *спряжений до нормованого простору* L, *повний.*

Доведення. Нехай (f_n) – довільна фундаментальна послідовність у просторі L^*. Це означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, $m > N$. Звідси для кожного $x \in L$ отримаємо

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \le \varepsilon \|x\|.$$

Отже, при кожному фіксованому $x \in L$ числова послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна, а значить, і збіжна. Її границю позначимо $f(x)$. Цим буде визначено деякий функціонал на всьому просторі L. Оскільки

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$
$$= \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

то цей функціонал є лінійним. Крім того, перейшовши до границі при $m \to \infty$ у записаній вище нерівності, отримаємо

$$\| f_n - f \| \le \varepsilon.$$

Отже, лінійний функціонал $f_n - f$ неперервний. Разом з ним неперервним буде і функціонал $f = f_n - (f_n - f)$. При цьому з останньої нерівності випливає, що $f_n \to f$ при $n \to \infty$.

Вправи до п. 8:

1. Доведіть, що функціонал $f : C[0;1] \to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x) = \int\limits_0^1 t^2 x(t)dt - x(0);$ б) $f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right).$

2. Доведіть, що функціонал $f : L_2[0;1] \to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x) = \int\limits_0^1 \sin t x(t)dt;$ б) $f(x) = \int\limits_0^{0,5} x(t)dt - \int\limits_{0,5}^{1} t x(t)dt.$

3. Доведіть, що функціонал $f : l_2 \to R^1$ є лінійним обмеженим функціоналом і знайдіть його норму, якщо:

а) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}};$ б) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{2^k}.$

4. Дослідіть при яких α функціонал $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^\alpha}$ належить до простору l_2^*.

9. Простори основних та узагальнених функцій.

Функцію $\varphi(x)$, визначену на числовій прямій, називають *фінітною*, якщо вона перетворюється в нуль поза деяким скінченим інтервалом. Розглянемо множину D всіх фінітних нескінченно диференційовних функцій.

Така множина утворює лінійний простір зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число. Але у ньому не можна ввести норму, яка відповідала б усім аксіомам норми. Проте у цьому просторі вдається визначити поняття збіжності.

Послідовність (φ_n) елементів із D називають *збіжною до функції* $\varphi \in D$, якщо:

1) існує спільний для всіх функцій послідовності (φ_n) інтервал, поза яким кожна з них перетворюється в нуль;

2) для кожного фіксованого $k = 0,1,2,\dots$ послідовність похідних $\left(\varphi_n^{(k)}(x)\right)$ рівномірно збігається до $\varphi^{(k)}(x)$.

Лінійний простір D із введеною таким чином збіжністю називають *простором основних функцій*, а його елементи – *основними функціями*.

Узагальненою функцією називається всякий лінійний неперервний функціонал, визначений в D. Якщо такий функціонал можна представити у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

то його називають *регулярною узагальненою функцією*. Такі функціонали f ототожнюють з породжуючими їх звичайними функціями $f(x)$. Подібно до скалярного добутку, домовимося записувати значення функціонала f на елементі φ у вигляді

$$\langle f, \varphi \rangle.$$

Узагальнені функції, які не є регулярними, називають *сингулярними узагальненими функціями*. Наприклад, такою є узагальнена функція, визначена рівністю

$$\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Її називають $\delta-$*функцією*. Записують δ або $\delta(x)$.

Якщо ж $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(a)$, то така узагальнена функція називається *зміщеною* $\delta-$*функцією* і позначається δ_a. Використовують також запис $\delta(x-a)$.

Сукупність всіх узагальнених функцій утворює лінійний простір D^*, спряжений до простору D. *Збіжність* у ньому послідовності (f_n) до елемента $f \in D^*$ визначають умовою:

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \text{ для всіх } \varphi \in D.$$

У цьому просторі вводять також поняття *добутку* узагальненої функції f на довільні нескінченно диференційовні функції α, визначаючи його рівністю

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle, \ \varphi \in D.$$

Добуток двох довільних узагальнених функцій не вводять, бо це не можна зробити так, щоб операція множення була неперервною.

Розглянемо тепер довільну неперервно диференційовану на всій числовій прямій функцію $f(x)$. Інтегруванням частинами для неї отримуємо рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx, \quad \varphi(x) \in D.$$

Тому природно похідну узагальненої функції f, породженої такою функцією $f(x)$, визначити умовою

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \; \varphi \in D.$$

Більше того, останню рівність покладають в основу означення *похідної* будь-якої узагальненої функції f. Отриманий при цьому функціонал f' теж буде лінійним неперервним функціоналом, визначеним на D. Зокрема, для похідної $\delta-$функції будемо мати

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0), \; \varphi \in D.$$

Аналогічно можуть бути визначені і похідні вищих порядків. Наприклад,

$$\langle f'', \varphi \rangle = -\langle f', \varphi' \rangle = -\left(-\langle f, \varphi'' \rangle\right) = \langle f, \varphi'' \rangle, \; \varphi \in D.$$

У загальному випадку

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \; \varphi \in D.$$

Таким чином, *всяка узагальнена функція є нескінченно диференційовною*.

Крім того, *із збіжності послідовності (f_n) узагальнених функцій до функції f випливатиме, що $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ при кожному* $k \in N$. Це рівносильне тому, що *всякий збіжний ряд, складений з узагальнених функцій, можна почленно диференціювати скільки завгодно разів.*

Як приклад, обчислимо похідну регулярної узагальненої функції f, породженої функцією

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1, \\ x^2-3x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Оскільки внаслідок інтегрування частинами

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{1} (2x+1)\varphi'(x)\,dx - \int_{1}^{\infty} \left(x^2-3x\right)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -3\varphi(1) + \int\limits_{-\infty}^{1} 2\varphi(x)\,dx - 2\varphi(1) + \int\limits_{1}^{\infty} (2x-3)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -5\varphi(1) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\,dx, \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 2x-3, & x \ge 1, \end{cases}$$

то

$$f' = -5\delta_1 + g,$$

де регулярна узагальнена функція g породжена функцією $g(x)$. Використовується також запис

$$f'(x) = -5\delta(x-1) + g(x).$$

Вправи до п. 9:

1. Нехай $\varphi(x)$ – фінітна нескінченно диференційовна функція. Дослідіть на збіжність у просторі основних функцій послідовності:

а) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(x)}{n}$; б) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(nx)}{n}$; в) $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi(x+n)}{n}$.

2. Нехай (f_n) – послідовність регулярних узагальнених функцій, породжених неперервними функціями $f_n(x)$ такими, що: $f_n(x) \ge 0$; $f_n(x) = 0$ при $|x| > \dfrac{1}{n}$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1$. Доведіть, що у просторі узагальнених функцій дана послідовність збігається до δ – функції.

3. Знайдіть похідні перших трьох порядків від функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \le 1, \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & |x| \le 2, \\ x^2 - 1, & |x| > 2. \end{cases}$

4. Сформулюйте означення просторів основних та узагальнених функцій багатьох змінних і частинних похідних таких узагальнених функцій.

10. Лінійні оператори. Інтегральний оператор Фредгольма.

Нехай маємо два топологічні лінійні простори L та L'. Відображення $A : L \to L'$, яке задовольняє умову

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y,$$

називається *лінійним оператором*.

Зауважимо, що при цьому A не обов'язково вважають визначеним на всьому просторі L. Важливо тільки, щоб його область визначення $D(A)$ була лінійним підпростором в L.

Найпростішими прикладами лінійних операторів є *одиничний оператор* $I : L \to L$ такий, що $Ax = x$ для всіх $x \in L$, та *нульовий оператор* $0 : L \to L'$ такий, що $0x = 0$ для всіх $x \in L$.

Кожен лінійний функціонал є частковим випадком лінійного оператора.

Оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in L$, якщо для кожного околу $O(Ax_0) \subset L'$ існує такий окіл $O(x_0) \subset L$, що $Ax \in O(Ax_0)$ для всіх $x \in O(x_0) \cap D(A)$.

Для нормованих просторів L та L' це означення можна сформулювати так: оператор A називається *неперервним в точці* $x_0 \in L$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D(A)$ таких, що $\|x - x_0\| < \delta$.

Якщо оператор неперервний у кожній точці $x \in D(A)$, то його називають *неперервним оператором*. Як і для лінійних функціоналів, *для неперервності лінійного оператора достатньо, щоб він був неперервним принаймні в одній точці* $x_0 \in D(A)$.

Лінійний оператор $A : L \to L'$, який визначений на всьому просторі L, називається *обмеженим*, якщо він кожну обмежену множину переводить в обмежену.

Всякий неперервний лінійний оператор є обмеженим. Для нормованих просторів справедливе також обернене твердження. Зокрема, для таких просторів обмеженість лінійного оператора A рівносильна існуванню сталої C, що

$$\|Ax\| \le C\|x\|$$

для всіх $x \in L$. Найменшу з таких сталих C називають нормою оператора A і позначають $\|A\|$. Звідси також отримуємо для всіх $x \in L$ нерівність

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Норму лінійного обмеженого оператора можна визначити ще й так:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Для лінійних операторів природним чином вводяться операції додавання та множення на число:

$$(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax,\ (A+B)x = Ax + Bx,\ \ x \in L.$$

При цьому сума та добуток на число лінійних неперервних операторів теж є лінійними неперервними операторами. Отже, сукупність таких операторів утворює лінійний простір.

У випадку нормованих просторів L та L' це випливає з рівності

$$\|(\alpha A)x\| = |\alpha| \cdot \|Ax\|$$

та нерівності

$$\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\|.$$

У такому лінійному просторі може бути введена норма за записаними вище формулами. В результаті отримаємо *нормований простір лінійних обмежених операторів*.

У разі повноти простору L' *простір лінійних обмежених операторів теж є банаховим.* Доводиться дане твердження аналогічно, як і повнота простору, спряженого до нормованого.

Нехай оператор $A: C[a,b] \to C[a,b]$ такий, що

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds,$$

де $K(t,s)$ – неперервна у квадраті $Q = [a,b;a,b]$ функція.

Його називають *інтегральним оператором Фредгольма.*

Лінійність такого оператора випливає з властивостей інтеграла Рімана. Крім того,

$$|Ax(t)| = \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| \le \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \|x\|.$$

Тому

$$\|Ax\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \|x\|.$$

Отже, цей оператор є обмеженим. Його норма

$$\|A\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Зокрема, якщо $|K(t,s)| \le M$ у квадраті $Q,$ то $\|A\| \le M(b-a).$

Зауважимо, що інтегральний оператор Фредгольма можна розглядати і як оператор $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ при умові, що

$$B^2 = \iint\limits_Q K^2(t,s)dtds < \infty.$$

З інтегральної нерівності Коші-Буняковського отримаємо

$$\|Ax\| = \left(\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(t,s)dtds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\| = B \cdot \|x\|.$$

Отже, він також буде обмеженим оператором з нормою $\|A\| \le B.$

Вправи до п. 10:

1. За означенням неперервності доведіть неперервність оператора $A: C[0;1] \to C[0;1],$ якщо $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau.$

2. Обґрунтуйте лінійність та неперервність оператора $A: C[0;1] \to C[0;1],$ якщо: а) $Ax(t) = tx(t);$ б) $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{t-\tau}x(\tau)d\tau.$

3. Обґрунтуйте лінійність та неперервність оператора $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1],$ якщо:

а) $Ax(t) = \int\limits_0^1 t^2\tau x(\tau)d\tau;$ б) $Ax(t) = \int\limits_0^1 \sin(t+\tau)x(\tau)d\tau.$

4. Обґрунтуйте лінійність та неперервність оператора $A: l_2 \to l_2,$ якщо:

а) $Ax = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, ...);$

б) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, ...).$

11. Обернені оператори.

Оператор $A: L \to L'$ називається *оборотним*, якщо для кожного y з множини $E(A)$ значень цього оператора рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок $x \in D(A).$ При цьому відображення $A^{-1}: E(A) \to D(A),$ яке кожному $y \in E(A)$ ставить у відповідність цей єдиний розв'язок $x \in D(A),$ називається оператором, *оберненим до оператора A.*

Таким чином, справедливі рівності:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Теорема 1. *Оператор A^{-1}, обернений до лінійного оператора A, лінійний.*

Доведення. Насамперед відзначимо, що множина значень $E(A)$ є підпростором лінійного простору L'. Нехай $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Тоді

$$x_1 = A^{-1}y_1,\ x_2 = A^{-1}y_2.$$

Внаслідок лінійності оператора A маємо

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Застосувавши до обох частин цієї рівності оператор A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

тобто лінійність оператора A^{-1}.

Зауважимо, що *оператор, обернений до обмеженого оператора, не завжди є обмеженим оператором.* Але справедлива наступна ***теорема Банаха:***

Якщо лінійний обмежений оператор A взаємно однозначно відображає банаховий простір L на банаховий простір L′, то обернений до нього оператор A^{-1} обмежений.

Відзначимо, що *у банаховому просторі всіх лінійних обмежених операторів $A: L \to L'$ множина лінійних операторів, які мають обмежений обернений, є відкритою.* А саме, справедлива наступна теорема:

Теорема 2. *Якщо оператор $A_0 : L \to L'$ – лінійний оператор, який має обмежений обернений, і $\vartriangle A : L \to L'$ – такий лінійний оператор, що $\left\| A_0^{-1} \right\| \cdot \left\| \vartriangle A \right\| < 1$, то оператор $A = A_0 + \vartriangle A$ теж має обмежений обернений.*

Наступна теорема не лише встановлює існування оберненого оператора, а й вказує спосіб його практичного знаходження.

Теорема 3. *Якщо A – лінійний обмежений оператор, який відображає банаховий простір L в себе, причому $\|A\| < 1$, то оператор $(I - A)^{-1}$ існує, є обмеженим і представляється у вигляді*

$$(I - A)^{-1} = I + A + \ldots + A^n + \ldots$$

Доведення. Оскільки $\|A\| < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

З цієї нерівності та повноти простору L випливає, що сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є лінійним обмеженим оператором. Крім того, для кожного $n \in N$ маємо

$$\left(I - A\right)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k \left(I - A\right) = I - A^{n+1}.$$

Перейшовши тут до границі при $n \to \infty$, з врахуванням $\left\|A^{n+1}\right\| \le \left\|A\right\|^{n+1} \to 0$ отримаємо, що

$$\left(I - A\right)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(I - A\right) = I,$$

звідки й випливає рівність

$$\left(I - A\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Вправи до п. 11:

1. Знайдіть оператор, обернений до оператора $A: R^2 \to R^2$, заданого матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Знайдіть обернений оператор до оператора $A: l_2 \to l_2$, якщо:

а) $Ax = \left(x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$;

б) $Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \ldots\right)$.

3. Використовуючи теорему Банаха, обґрунтуйте обмеженість обернених операторів із вправи 1.

4. Нехай X_0 – підпростір простору $X = C\left[0;1\right]$, який складається з неперервно диференційованих на відрізку $\left[0;1\right]$ функцій $x\left(t\right)$ таких, що $x\left(0\right) = 0$. Знайдіть обернений оператор до оператора $A: X_0 \to C\left[0;1\right]$, якщо $Ax\left(t\right) = \left(t^2 + 1\right)x'\left(t\right) - 2tx\left(t\right)$.

12. Розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра методом ітерованих ядер.

Як приклад практичного застосування попередньої теореми розглянемо розв’язування лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt + f(x)$$

у просторі $C[a,b]$.

Нехай $Ay(x) = \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt$ – інтегральний оператор Фредгольма і $|K(x,t)| \le M$. Тоді в операторному вигляді отримуємо рівняння

$$y = \lambda A y + f,$$

єдиним розв'язком якого є

$$y = (I - \lambda A)^{-1} f$$

при умові, що

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| < 1.$$

Оскільки $\|A\| \le M(b-a)$, то для виконання цієї умови достатньо вимагати, щоб виконувалась нерівність

$$|\lambda| M(b-a) < 1.$$

Знайдемо степені інтегрального оператора Фредгольма

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$$

у просторі $C[a,b]$. Оскільки

$$A^2 x(t) = A(Ax(t)) = \int_a^b K(t,s) \int_a^b K(s,\tau)\,x(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)\,K(s,\tau)\,ds \right) x(\tau)\,d\tau = \int_a^b K_2(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

то квадрат такого оператора теж є інтегральним оператором Фредгольма.

У загальному випадку отримаємо

$$A^n x(t) = \int_a^b K_n(t,s)\,x(s)\,ds,$$

$$K_1(t,s) = K(t,s),\ \ K_n(t,s) = \int_a^b K(t,\tau)\,K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau,\ \ n = 2,3,\ldots$$

Такі ядра називають *ітерованими ядрами*.

Таким чином, розв’язок $y = (I - \lambda A)^{-1} f$ операторного рівняння $y = \lambda A y + f$ для інтегрального оператора Фредгольма у просторі $C[a,b]$ при виконанні умови $|\lambda| M(b-a) < 1$ може бути представлений у вигляді

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x,t) f(t)\,dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t) \right] f(t)\,dt = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt.$$

Функцію $R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t)$ називають *резольвентою Фредгольма*. Оскільки

$$\left| \lambda^{n-1} K_n(x,t) \right| \le |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^n$$

і за ознакою Даламбера при $|\lambda| M(b-a) < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^n$ збіжний, то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти збігатиметься рівномірно. Отже, почленне інтегрування у записаній вище рівності було правомірним.

Такий метод розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду називається *методом ітерованих ядер*. У просторі $L_2[a,b]$ він застосовний при виконанні умови $|\lambda| B < 1$.

Зауважимо, що аналогічні формули можна отримати і для *інтегрального оператора Вольтерра*

$$Ax(t) = \int_a^t K(t,s) x(s)\,ds, \ t \in [a,b],$$

мають вигляд

$$A^n x(t) = \int_a^t K_n(t,s) x(s)\,ds,$$

$$K_1(t,s) = K(t,s), \ K_n(t,s) = \int_s^t K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s)\,d\tau, \ \ n = 2,3,\ldots$$

При цьому для такого оператора ряд для його резольвенти збігається рівномірно при кожному λ. Тому *для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду метод ітерованих ядер застосовний при всіх* λ.

Вправи до п. 12:

1. Методом ітерованих ядер розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

а) $y(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2ty(t)dt-x;$ б) $y(x)=2\int_0^1 xt^3y(t)dt-1.$

2. Обґрунтуйте, що степені інтегрального оператора Вольтерра теж є операторами Вольтерра.

3. Доведіть, що ряд резольвенти оператора Вольтерра збігається рівномірно при кожному λ.

4. Методом ітерованих ядер розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерра другого роду:

а) $y(x)=e^x+\int_0^x e^{x-t}y(t)dt;$ б) $y(x)=1+\int_0^x (x-t)y(t)dt.$

13. Додатні оператори. Квадратний корінь із додатного самоспряженого оператора.

Розглянемо оператор A, визначений у гільбертовому просторі H. Якщо $(Ax,y)=(x,Ay)$ при всіх $x,y\in H$, то оператор A називають *самоспряженим*

Величину (Ax,x) називають *квадратичною формою оператора*. Якщо оператор A самоспряжений, то $(Ax,x)=(x,Ax)=\overline{(Ax,x)}$. Отже, *для самоспряженого оператора його квадратична форма набуває лише дійсних значень*. У комплексних гільбертових просторах справедливе і обернене твердження: *якщо квадратична форма оператора набуває лише дійсних значень, то такий оператор самоспряжений*.

Для квадратичної форми будь-якого обмеженого оператора виконується нерівність:

$$|(Ax,x)|\le\|Ax\|\cdot\|x\|\le\|A\|\cdot\|x\|^2.$$

Навпаки, якщо для самоспряженого оператора A при кожному $x\in H$ виконується нерівність

$$|(Ax,x)|\le M\cdot\|x\|^2,$$

то найменша із таких сталих M дорівнює $\|A\|$.

Для самоспряжених операторів можна ввести *відношення порядку*. А саме, вважають, що $A \geq B$, якщо $(Ax, x) \geq (Bx, x)$ для всіх $x \in H$. Зокрема, якщо для кожного $x \in H$ виконується нерівність $(Ax, x) \geq 0$, то оператор A називають *додатним*. При цьому часто у застосуваннях ще додатково вимагають виконання строгої нерівності $(Ax, x) > 0$ при $x \neq 0$.

Для додатних самоспряжених операторів справедлива *узагальнена нерівність Шварца*:

$$\left|(Ax, y)\right|^2 \leq (Ax, x) \cdot (Ay, y).$$

Справді, нехай $z = x + \lambda (Ax, y) y$, де λ – довільне дійсне число. Тоді

$$0 \leq (Az, z) = (Ax, x) + 2\lambda \left|(Ax, y)\right|^2 + \lambda^2 \left|(Ax, y)\right|^2 (Ay, y).$$

З недодатності дискримінанта такого квадратичного виразу і випливає потрібна нерівність.

Якщо при всіх $x \in H$ виконуються нерівності

$$m(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x),$$

то числа m та M називаються *нижньою та верхньою гранями* самоспряженого оператора A. При цьому

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Теорема. *Всяка монотонно зростаюча обмежена послідовність самоспряжених операторів поточково збігається до самоспряженого оператора.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_n \leq \ldots \leq I.$$

Нехай $m > n$. Тоді $A_{mn} = A_m - A_n \geq 0$. Для нього за узагальненою нерівністю Шварца отримуємо

$$\|A_{mn} x\|^4 = (A_{mn} x, A_{mn} x)^2 \leq (A_{mn} x, x) \cdot \left(A_{mn}^2 x, A_{mn} x\right).$$

Оскільки $0 \leq A_{mn} \leq I$, то $\|A_{mn}\| \leq 1$. Отже, з попередньої нерівності отримуємо

$$\|A_m x - A_n x\|^4 \leq \left[(A_m x, x) - (A_n x, x)\right] \cdot \|x\|^2.$$

При цьому числова послідовність $\left((A_n x, x)\right)$ монотонно зростаюча і обмежена, а значить, і збіжна. Тому послідовність $(A_n x)$ є фундаментальною, і оскільки простір H повний, то вона також буде збіжною. Тоді оператор A, визначений для всіх $x \in H$ рівністю

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x,$$

і буде шуканим самоспряженим оператором.

Як ***наслідок*** з цієї теореми, обґрунтуємо існування для кожного додатного самоспряженого оператора A такого додатного самоспряженого оператора $A^{1/2}$, квадрат якого дорівнює A. Його називають *квадратним коренем* з оператора A.

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $0 \le A \le I$. Покладемо $A = I - B,\ X = A^{1/2} = I - Y$. Тоді рівняння $X^2 = A$ можна записати у вигляді

$$Y = \frac{1}{2}\left(B + Y^2\right).$$

Будемо розв'язувати його методом послідовних наближень:

$$Y_0 = 0,\ Y_1 = B,\ Y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(B + Y_n^2\right),\ n \ge 0.$$

Доведемо, що Y_n та $Y_n - Y_{n-1}$ є многочленами від B з невід'ємними коефіцієнтами. При $n = 1$ це очевидно, а можливість індуктивного переходу випливає з рівності

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}\left(B + Y_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(B + Y_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(Y_n + Y_{n-1}\right)\left(Y_n - Y_{n-1}\right).$$

Оскільки для додатного самоспряженого оператора B виконуються нерівності

$$\left(B^{2k}x, x\right) = \left\|B^k x\right\|^2 \ge 0,\ \left(B^{2k+1}x, x\right) = \left(BB^{2k}x, x\right) = \left(BB^k x, B^k x\right) \ge 0,$$

то оператори B^n будуть додатними при кожному $n \in N$. Таким чином, також $Y_n \ge 0$ та $Y_n - Y_{n-1} \ge 0$. Крім того, з рівності

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(B + Y_n^2\right),\ n \ge 0,\ Y_0 = 0,$$

методом математичної індукції отримуємо, що $\left\|Y_n\right\| \le 1$. Отже, за теоремою про границю монотонної обмеженої послідовності самоспряжених операторів отримуємо існування поточкової границі Y для послідовності $\left(Y_n\right)$. При цьому

$$\lim_{n\to\infty} Y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(B + Y_n^2\right),$$

тобто $Y = \frac{1}{2}\left(B + Y^2\right)$. Тоді $X = I - Y$ і буде шуканим квадратним коренем $A^{1/2}$. Зауважимо, що такий корінь єдиний.

Вправи до п. 13:

1. Перевірте чи є самоспряженим оператор $A: l_2 \to l_2$, якщо:

а) $Ax = \left(x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3, x_4, ...\right)$;

б) $Ax = \left(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, ...\right)$.

2. Доведіть, що оператор $A: L_2\left[0;1\right] \to L_2\left[0;1\right]$ такий, що, $Ax\left(t\right) = \int\limits_0^1 \min\left\{t, s\right\} x\left(s\right) ds,\ t \in \left[0;1\right]$, є самоспряженим.

3. Доведіть, що оператор $L[u] = -u''$, визначений на множині двічі неперервно диференційовних на відрізку [0,1] функцій, для яких $u(0) = 0,\ u'(1) = 0$, є самоспряженим і додатним.

4. Доведіть, що оператор $L[u] = -\Delta u$, визначений на множині двічі неперервно диференційовних у плоскій обмеженій області G функцій $u\left(x, y\right)$ таких, що на границі цієї області $u\big|_{\Gamma} = 0$, є самоспряженим і додатним.

14. Спектр оператора.

Розглянемо лінійний оператор $A: L \to L$, визначений у нормованому просторі L. Число λ називається *власним значенням* цього оператора, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв'язок. Такий розв'язок називають *власною функцією* оператора A, яка відповідає власному значенню λ. Сукупність всіх власних значень оператора A називають *точковим спектром* цього оператора і позначають $\sigma_p\left(A\right)$. Якщо $\lambda \in \sigma_p\left(A\right)$, то оператор

$$R_\lambda\left(A\right) = \left(A - \lambda I\right)^{-1},$$

який називають *резольвентою оператора* A, не існує.

Якщо оператор $R_\lambda\left(A\right)$ визначений на всьому просторі L і є обмеженим, то такі значення λ називають *регулярними*. Зокрема, у просторі L скінченної розмірності регулярними є всі $\lambda \notin \sigma_p\left(A\right)$.

Якщо ж простір L нескінченно вимірний, то можлива ситуація, коли $R_\lambda\left(A\right)$ існує, але визначений не на всьому просторі L, або не є обмеженим.

Такі λ відносять до *неперервного спектру* $\sigma_c(A)$ оператора *A*, якщо

$$\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] = L,$$

чи до *залишкового спектру* $\sigma_r(A)$, якщо

$$\left[D\left(R_\lambda(A)\right)\right] \neq L.$$

Множина $\sigma(A) = \sigma_p(A) + \sigma_c(A) + \sigma_r(A)$ називається *спектром оператора A*, а її доповнення складається з регулярних точок цього оператора. За властивістю операторів, які мають обмежений обернений, *множина регулярних точок є відкритою*. Відповідно, *спектр оператора, як доповнення цієї множини, завжди замкнений*.

Теорема 1. *Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L і* $|\lambda| > \|A\|$, *то точка* λ *регулярна.*

Доведення. Справді,

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k.$$

При $\|A\| < |\lambda|$ такий ряд збігається і задає обмежений на всьому просторі L оператор.

Охарактеризуємо властивості власних значень та власних функцій самоспряженого оператора.

Теорема 2. *Власні значення самоспряженого оператора A, визначеного у гільбертовому просторі* H, *дійсні, а його власні функції, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.*

Доведення. Будемо розглядати в загальному випадку H як комплексний гільбертовий простір.

Якщо $Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$ то, враховуючи аксіоми скалярного добутку, отримаємо

$$\lambda(x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) =$$
$$= (x, \lambda x) = \overline{(\lambda x, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(x,x)} = \overline{\lambda}(x,x).$$

Оскільки $(x,x) \neq 0,$ то власне значення $\lambda = \overline{\lambda}$ дійсне.

Якщо тепер $\mu \neq \lambda$ і $Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$ $Ay = \mu y,\ y \neq 0,$ то, враховуючи, що $\overline{\mu} = \mu,$ з рівності

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) =$$

$$=(x,\mu y)=\overline{(\mu y,x)}=\overline{\mu}\cdot\overline{(y,x)}=\mu(x,y)$$
отримаємо $(x,y)=0$, тобто ортогональність власних функцій x та y.

Вправи до п. 14:

1. Обґрунтуйте, що оператор $Ax(t)=tx(t)$, визначений у просторі $C[a,b]$, не має власних значень. Знайдіть неперервний спектр цього оператора.

2. Знайдіть спектр оператора $A:l_2\to l_2$, якщо
$$Ax=(0,x_1,x_2,x_3,x_4,...).$$

3. Знайдіть власні значення та нормовані власні функції операторів $A:l_2\to l_2$, якщо:

а) $Ax=(x_1-2x_2,2x_1+3x_2,x_3,x_4,...)$;

б) $Ax=(x_1+2x_2,x_1-x_2,x_3,x_4,...)$.

4. Оператор $A:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$ визначається формулою $Ax(t)=\int\limits_0^1\min\{t,s\}x(s)ds,\ t\in[0;1]$. Знайдіть власні значення та відповідні їм нормовані власні функції цього оператора.

15. Компактні оператори. Теорема Гільберта-Шмідта.

Оператор A, який відображає банаховий простір L у банаховий простір L', називається *компактним* (*цілком неперервним*), якщо він всяку обмежену множину переводить у передкомпактну.

Теорема. *Інтегральний оператор Фредгольма*
$$Ax(t)=\int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,$$
ядро якого $K(t,s)$ неперервне у квадраті $Q=[a,b;a,b]$, є компактним оператором у просторі $C[a,b]$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що з неперервності функції $K(t,s)$ випливає її обмеженість $|K(t,s)|\le M$ та рівномірна неперервність у квадраті Q. Отже, для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для кожного $s\in[a,b]$ при $|t'-t''|<\delta$ буде виконуватися нерівність

$$\left|K(t',s)-K(t'',s)\right|<\varepsilon.$$

При цьому будемо мати

$$\left|Ax(t')-Ax(t'')\right|\le\int_a^b\left|K(t',s)-K(t'',s)\right|\cdot\left|x(s)\right|ds\le\varepsilon(b-a)\|x\|.$$

Звідси випливає як неперервність функцій $Ax(t)$, так і одностайна неперервність сім'ї таких функцій при умові, що множина функцій $x(t)$ обмежена: $\|x\|\le C$. При цій же умові з нерівності

$$\left|Ax(t)\right|\le\int_a^b\left|K(t,s)\right|\cdot\left|x(s)\right|ds\le M(b-a)\|x\|\le M(b-a)C$$

отримуємо і рівномірну обмеженість такої сім'ї функцій. За теоремою Арцела така сім'я функцій $Ax(t)$ буде передкомпактною у просторі $C[a,b]$. А отже, інтегральний оператор Фредгольма є компактним у цьому просторі.

Зауважимо, що умови даної теореми можна дещо послабити, вимагаючи обмеженість ядра $K(t,s)$ і допускаючи його розриви вздовж скінченого числа неперервних ліній $s=\varphi_k(t),\ k=1,2,\ldots,n.$ З врахуванням цього зауваження отримаємо також компактність у просторі $C[a,b]$ інтегрального оператора Вольтерра з довільним неперервним ядром у трикутнику $a\le s\le t\le b.$

Власні значення та власні функції компактного оператора характеризує наступна властивість:

Всякий компактний оператор A у банаховому просторі L при кожному $\delta>0$ може мати лише скінченне число власних функцій, що відповідають власним значенням, які за модулем перевищують δ.

Розглянемо тепер властивості самоспряжених компактних операторів у гільбертовому просторі H. Для них справедлива наступна теорема:

Теорема Гільберта-Шмідта: *Для будь-якого самоспряженого компактного оператора у гільбертовому просторі H існує ортогональна нормована система $\{\varphi_n\}$ власних функцій, які відповідають власним значенням $\lambda_n\ne 0$, що кожен елемент $x\in H$ єдиним способом записується у вигляді*

$$x=\sum_n c_n\varphi_n+x_0,$$

де $c_n=(x,\varphi_n)$, $Ax_0=0$. При цьому

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n,$$

і якщо система $\{\varphi_n\}$ *нескінченна, то* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$

Зауважимо, що якщо одному і тому ж власному значенню $\lambda \neq 0$ відповідає кілька різних власних функцій системи $\{\varphi_n\}$, то у теоремі Гільберта-Шмідта таке власне значення повторюється з різними індексами стільки разів, якою є його кратність.

Застосуємо дану теорему до розв'язування операторного рівняння другого роду

$$x = \lambda Ax + f$$

з компактним самоспряженим оператором A у гільбертовому просторі H. За теоремою Гільберта-Шмідта це рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_n c_n \varphi_n + x_0 = \lambda \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n + \sum_n f_n \varphi_n + f_0,$$

причому $f_n = (f, \varphi_n)$, $Af_0 = 0$. Помножимо скалярно обидві частини отриманої рівності на функцію φ_k. Оскільки

$$(x_0, \varphi_k) = (f_0, \varphi_k) = 0,$$

бо x_0, f_0, якщо вони не є нулями, можна розглядати як власні функції оператора A, які відповідають власному значенню нуль, та

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

то при кожному k отримаємо рівність

$$c_k = \lambda \lambda_k c_k + f_k,$$

з якої при $\lambda \lambda_k \neq 1$ однозначно знаходимо всі коефіцієнти

$$c_k = \frac{f_k}{1 - \lambda \lambda_k}.$$

Підставляючи їх у записане вище рівняння, знайдемо також $x_0 = f_0$. Таким чином, при $\lambda \lambda_k \neq 1$ єдиний розв'язок заданого операторного рівняння матиме вигляд

$$x = \sum_k \frac{f_k \varphi_k}{1 - \lambda \lambda_k} + f_0 = \sum_k \frac{f_k \varphi_k}{1 - \lambda \lambda_k} + \left(f - \sum_k f_k \varphi_k \right) = f + \lambda \sum_k \frac{\lambda_k f_k \varphi_k}{1 - \lambda \lambda_k}.$$

Якщо ж $\lambda \lambda_k = 1$ при деяких k, то для існування розв'язку цього операторного рівняння необхідно, щоб $f_k = 0$ при всіх таких k, тобто, щоб елемент f був ортогональним до всіх власних функцій оператора *A*, які відповідають таким власним значенням. При виконанні цієї вимоги розв'язок заданого операторного рівняння існує, але він не єдиний.

Вправи до п. 15:

1. Доведіть, що всякий компактний оператор є обмеженим, але не всякий обмежений оператор є компактним.

2. Обґрунтуйте, що добуток компактного і обмеженого оператора є компактним оператором.

3. Доведіть, що оператор, обернений до оператора Фредгольма не є обмеженим.

4. У просторі $L_2\left[0;1\right]$ розв'яжіть рівняння

$$y\left(x\right)=\lambda\int_0^1 \min\left\{x,t\right\}y\left(t\right)dt+1.$$

Список основної літератури

1. *Дороговцев А.Я., Івасишен С.Д., Кондратьєв Ю.Г., Константинов О.Ю.* Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу «Функціональний аналіз та інтегральні рівняння» для студентів спеціальності «математика». – Чернівці: ЧДУ, 1992. – 109с.
2. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
3. *Садовничий В.А*. Теория операторов. М.: Из-во МГУ, 1986. – 368с.
4. *Треногин В.А*. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. – 496с.

Підписано до друку 31 серпня 2010р.
Формат 61x84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 3,0 друк. арк. Наклад 100 пр.
Замовлення № 150 від 20.08.2010

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32