Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк,
В. В. Мазуренко, О. О. Власій

УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ДРОГОБИЧ ◦ КОЛО ◦ 2011

ББК 22.161.6
УДК 517.926
MSC 34A30, 34A36, 34A37

Рекомендовано до друку Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №6 від 29.06.2011 р.)

Рецензенти:

Каленюк П. І., доктор фіз.-мат. наук, професор, директор Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська політехніка";

Лазакович М. В., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри функціонального аналізу Білоруського державного університету;

Радино Я. В., член-кореспондент НАН Білорусі, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри функціонального аналізу Білоруського державного університету;

Сухорольський М. А., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного університету "Львівська політехніка".

Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власій. – Дрогобич: Коло, 2011. – 302 с.

ISBN 978-966-2405-84-2

Монографія є першим систематичним викладом теорії узагальнених квазідиференціальних рівнянь, яка активно розвивається впродовж двох-трьох останніх десятиліть. Побудова теорії ведеться на основі розвитку концепції квазіпохідних, що дозволяє звести до мінімуму вимоги на гладкість коефіцієнтів рівнянь. Кращому розумінню теоретичного матеріалу монографії сприяє значна кількість детально розібраних прикладів, окремі з яких мають чітко виражений прикладний характер.

Для науковців, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі диференціальних рівнянь, механіків та інженерів, що мають справу з дискретно-неперервними моделями.

ISBN 978-966-2405-84-2

Зміст

Передмова

Ідея написання цієї монографії виникла у перших двох авторів доволі давно. Однак сама книга в тому вигляді, котрий вона має зараз, з'явилася до певної міри випадково. Навесні 1994 року вийшов з друку препринт з однойменною назвою [97] як результат роботи семінару "Дискретно-неперервні крайові задачі" при кафедрі вищої математики Львівської політехніки. У ньому переважно в декларативній формі була викладена концепція квазіпохідних та побудована загальна теорія скалярних і векторних квазідиференціальних рівнянь з коефіцієнтами-мірами і правими частинами — узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації. Викладена теорія стала основою подальших наукових досліджень в цьому напрямі [17–20, 58–61, 64–68, 70, 71, 89–97, 99–113, 165, 166], результати яких доповідалися на численних наукових конференціях, та була покладена в основу лекцій, котрі у вигляді спеціальних курсів читалися авторами впродовж останніх десяти років в Національному університеті "Львівська політехніка", Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Львівському державному університеті безпеки життєдіяльності, Університеті Казимира Великого (Польща), Люблінській Політехніці (Польща).

Невеликий тираж (100 примірн.) згаданого препринту швидко розійшовся і за якийсь час це видання стало бібліографічною рідкістю. Відтак виникла нагальна потреба опублікувати його розширений варіант. Однак з огляду на причини об'єктивного і суб'єктивного характеру така публікація затримувалась. Водночас за ті 17 років, що промайнули з часу опублікування препринту, викладена в ньому теорія збагатилась новими важливими результатами, котрі гармонійно доповнюють попередні дослідження, з огляду на що не включити їх в цю монографію було б недоречним.

Основну частину монографії складають результати, отримані авторами безпосередньо чи у співавторстві. З решти результатів наведені (часом без строгих математичних доведень, але з вказанням джерел, де їх можна знайти) лише ті результати, котрі мають безпосереднє відношення до питань, що розглядаються в цій монографії. Це стосується насамперед параграфа, присвяченого мірам Стільтьєса і функціям обмеженої варіації, що їх породжують, а також нерівності Гронуолла—Беллмана та її узагальненням.

Монографія складається зі вступу і п'яти розділів. У вступі читач матиме першу нагоду познайомитись з основним об'єктом монографічного дослідження — *квазідиференціальним рівнянням* (КДР). Сподіваємось також, що завдяки зробленому там короткому огляду робіт, присвячених теорії КДР (починаючи від рівнянь з непрервними та сумовними за Лебегом коефіцієнтами і закінчуючи рівняннями з розподілами у коефіцієнтах) читач матиме змогу краще зорієнтуватись в сучасних питаннях цієї теорії. Відразу відзначимо, що з широкого спектру літератури ми зосередили увагу лише на тих роботах, котрі тісно дотикаються або ідейно близькі до тематики цієї монографії.

У першому розділі дається означення некласичного інтеграла Рімана–Стільтьєса і вивчаються його властивості (умова стрибка, теорема про підстановку, формула Діріхле і формула інтегрування частинами), на основі яких досліджуються лінійні матричні інтегральні рівняння та відповідні системи диференціальних рівнянь з мірами. Важливою проблемою, що виникає при дослідженні останніх є той факт, що простір узагальнених функцій не є алгеброю — у ньому не можна визначити множення, яке б успадкувало основні властивості множення неперервних функцій. Саме тому в окремому параграфі (див. §6) обговорюється питання про добуток міри на функцію обмеженої варіації і з'ясовуються умови, за яких такий добуток є коректним в узагальненому сенсі. Безпосереднім наслідком такого обговорення є побудова спеціального допустимого класу функцій, в якому існує єдиний розв'язок початкової задачі для диференціальної системи з мірами, котрий зображається у формі Коші за допомогою фундаментальної матриці і справджує певні умови стрибка в точках розривів коефіцієнтів системи.

Другий розділ присвячений розвиткові концепції квазіпохідних та побудові лінійної (елементарної) теорії КДР з коефіцієнтами-мірами і правими частинами — узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації. Тут, зокрема:

шляхом накладання певних умов на коефіцієнти рівняння виділений широкий клас коректних узагальнених КДР, при дослідженні яких не виникає проблема множення функціоналів, та вказана процедура зведення таких рівнянь до диференціальних систем з мірами;

введене поняття розв'язку вихідного і спряженого до нього КДР та вказаний спосіб визначення їх квазіпохідних, котрі володіють властивістю взаємообумовленості в тому сенсі, що в разі, коли квазіпохідні одного з рівнянь визначені, то квазіпохідні іншого рівняння визначаються однозначно;

для однорідних взаємно спряжених КДР з коефіцієнтами-мірами сформульовані в термінах відповідних квазіпохідних і доведені теореми існування та єдиності розв'язків початкових задач, а також вказана характеристика їх (розв'язків) гладкості;

введене поняття квазівронскіана розв'язків вихідного і спряженого рівнянь, для кожного з рівнянь отриманий аналог формули Ліувілля-Остроградського-Якобі, введене поняття фундаментальної системи розв'язків і з'ясована структура загального розв'язку;

встановлений максимальний порядок узагальненої похідної від функції локально обмеженої варіації у правій частині неоднорідного КДР, при якому рівняння залишається коректним навіть за умови, що точки сингулярностей коефіцієнтів рівняння і правої частини співпадають.

Одним з центральних результатів другого розділу є структура фундаментальної матриці, що відповідає КДР з коефіцієнтами-мірами. Як з'ясувалося, її вдається побудувати за допомогою лише однієї "функції Коші" та її мішаних квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь. Це дозволило встановити тісний зв'язок між розв'язками цих рівнянь, а також отримати зображення функції Коші та її мішаних квазіпохідних через фундаментальну систему розв'язків. Відзначимо, між іншим, що позаяк для звичайних диференціальних рівнянь (так само, як і для квазідиференціальних) має місце той факт, що їх квазіпохідні в сенсі вихідного і спряженого рівнянь, взагалі кажучи, не збігаються, то структура фундаментальної матриці досі не була відома навіть для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Елементи лінійної теорії узагальнених КДР у просторі вектор-функцій читач знайде в третьому розділі монографії.

У четвертому розділі вивчаються узагальнені диференціальні системи з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями та тісно пов'язані з ними два спеціальні класи узагальнених КДР — так звані, вироджені і частково вироджені рівняння. Специфічна структура коефіцієнтів останніх дозволяє не тільки явно знаходити вигляд відповідної матриці Коші, але й конструктивно зображати розв'язки цих рівнянь у вигляді сплайнів. Практичний інтерес до таких рівнянь викликаний, зокрема, їх застосуванням при наближеному розв'язуванні КДР загального вигляду.

Наближеним методам розв'язування узагальнених КДР та диференціальних систем з мірами якраз і присвячено заключний п'ятий розділ монографії. Спершу для КДР з узагальненими коефіцієнтами вводиться поняття і запропонована процедура побудови точних рекурентних співвідношень, котрі є аналогами точних різницевих схем [115,117] для звичайних диференціальних рівнянь. Далі з використанням одного спеціального узагальнення нерівності Гронуолла–Беллмана встановлені умови, за яких наближений розв'язок диференціальної системи з мірами можна отримати апроксимацією функцій, що породжують ці міри. Нарешті, на прикладі узагальненого КДР довільного порядку розглянуті такі два практично важливі способи апроксимації коефіцієнтів, як L-апроксимація (лінеаризація) і D-апроксимація (дискретизація), котрі при відносно незначній обчислювальній трудомісткості дозволяють отримувати результати з потрібною точністю.

Усі розділи монографії автори старались викласти достатньо детально, з повними доведеннями і зауваженнями, ілюстративними, контрольними і модельними прикладами (зокрема, теоретичний матеріал останніх двох розділів постійно ілюструється прикладами) так, щоб зміст монографії був зрозумілий не лише спеціалістам, але й аспірантам і студентам старших курсів, які вже займаються чи лише цікавляться (квазі)диференціальними рівняннями, а також механікам та інженерам, котрі на практиці мають справу з подібними задачами.

Слід відзначити, що викладена в цій монографії загальна теорія узагальнених КДР лягла в основу теорії дискретно-неперервних самоспряжених і несамоспряжених крайових задач [**18–20**, **58–61**, **64–68**, **70**, **71**, **102**, **103**, **106–108**, **111**, **112**, **165**, **166**] та створення наближених методів їх розв'язування [**17**, **90**, **99**, **100**, **109**]. Цим проблемам ми сподіваємося найближчим часом присвятити окремі монографії.

Вважаємо своїм приємним обов'язком висловити щиру подяку академіку НАН України *Анатолію Михайловичу Самойленку* і член-кореспонденту НАН Білорусі *Якову Валентиновичу Радино* за незмінну підтримку цього наукового напрямку.

Львів, лютий 2011 р. *Автори*

Вступ

A major task of mathematics to-day is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both.

Головним завданням математики наших днів є досягнення гармонії між континуальним і дискретним, включення їх в одне математичне ціле і виключення з них всього незрозумілого.

E.T. Bell, Men of Mathematics, I
Penguin Books, London, 1953.

Дослідження різноманітних фізичних процесів, котрі враховують природну єдність дискретного (зосереджені величини) і неперервного (розподілені величини), приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описуються диференціальними рівняннями, що містять доданки вигляду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$ [22, 42, 47, 76]. За умови недостатньої гладкості коефіцієнта $p(x)$ такі рівняння вже не можна звести (за допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цей важливий факт, у науковій літературі їх називають *квазідиференціальними* рівняннями (КДР).

Вперше термін "*квазідиференціальне рівняння*" зустрічається в роботах Д. Шина [124–126]. Власне, йому й належить ідея введення квазіпохідних (хоча сам термін "*квазіпохідна*" він не вживає), яка дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів чи звести їх до мінімуму. У своїх роботах [**127**, **128**] автор розглядав доволі загальні КДР вигляду

$$f^{[n]} - lf = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.1}$$

де

$$f^{[0]} = P_{00} f, \quad f^{[k]} = i P_{kk} \frac{d}{dx} f^{[k-1]} + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu} f^{[\nu]}, \ k = \overline{1, n}, \ i = \sqrt{-1},$$

і спряжені до них

$$g^{\{n\}} - lg = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.2}$$

де

$$g^{\{0\}} = Q_{00} g, \quad g^{\{k\}} = i Q_{kk} \frac{d}{dx} g^{\{k-1\}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{k\nu} g^{\{\nu\}}, \ k = \overline{1, n},$$

$$Q_{k\nu} = \overline{P_{n-\nu,n-k} P^{-1}_{n-\nu,n-\nu} P_{n-k,n-k}}, \quad \nu \leqslant k, \quad k, \nu = \overline{0, n},$$

за умов, що комплекснозначні функції $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k, \nu = \overline{0, n}$, визначені і вимірні на (a, b), а функції $P^{-1}_{kk}(x)$, $k = \overline{0, n}$, та $P_{k\nu}(x)$, $\nu < k$, $k = \overline{1, n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$, квадратично сумовні (за Лебегом[1)]) на кожному скінченному замкненому проміжку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. При цьому функції $f(x)$ і $g(x)$ вважаються розв'язками рівнянь (0.1) і (0.2) відповідно, якщо вирази $f^{[k]}(x)$ і $g^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, n-1}$, є абсолютно неперервними і задовольняють рівності (0.1) і (0.2) майже всюди на (a, b).

В роботі [**127**] для рівнянь (0.1) і (0.2) доведено теореми про існування і єдиність розв'язків початкових задач і встановлено зв'язок між їх розв'язками. Показано також, що диференціальні

[1)] Лебег Анрі Леон (Lebesgue Henri Leon, 1875–1941) — французький математик, професор Паризького університету, член Паризької АН (1922), іноземний чл.-кор. АН СРСР (1929).

вирази $f^{[n]}$ і $g^{\{n\}}$ є самоспряженими (за Лагранжем[2)]), якщо і тільки якщо функції $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu = \overline{0,n}$, майже всюди на (a,b) задовольняють рівності

$$\overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}} = P_{k\nu}, \quad \nu \leqslant k,$$
$$k = \overline{0,n-[n/2]},\ \nu = \overline{0,[n/2]}.$$

Зрозуміло, що за таких умов $Q_{k\nu} = P_{k\nu}$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu = \overline{0,n}$, і $f^{[k]} = g^{\{k\}}$. Узагальнюючи відомі результати Г. Вейля[3)] [**183**] і В. Віндау [**186**] про кількість розв'язків, сумовних з квадратом, для диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків на КДР вигляду (0.1), Д. Шин отримав такі результати:

(A) *кількість m лінійно незалежних розв'зків рівняння* (0.1)*, що належать до $L_2(0,\infty)$, при $n = 2k$ і $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, задовольняє нерівність $m \geqslant k$.*

(B) *має місце альтернатива: або $m = k$, або $m = n$.*

Згодом І. М. Глазман [**23**] показав, що результат (B) як у В. Віндау, так і у Д. Шина є дещо помилковим і що насправді m задовольняє нерівність $k \leqslant m \leqslant n$.

В роботі [**128**] дається застосування теорії необмежених симетричних операторів до КДР (0.1) та (0.2) подібно до того, як

---

2) Лагранж Жозеф Луї (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) — французький математик і механік, професор Артилерійської школи в Турині, Нормальної і Політехнічної шкіл в Парижі, член Берлінської АН (1759), Паризької АН (1772), іноземний член Петербурзької АН (1776).

3) Вейль Герман (Weyl Hermann, 1885–1955) — німецький математик і фізик, учень Д. Гільберта, професор Цюріхського технологічного інституту, Ґьоттінгенського університету, Принстонського інституту перспективних досліджень, член Національної АН США, нагороджений Міжнародною премією ім. М. І. Лобачевського (1927).

це раніше зробив М. Стоун[4)] [**178**] для рівнянь другого порядку. Принагідно відзначимо, що сингулярні КДР є не лише однією з основних областей застосування цієї теорії, але й одним із джерел її виникнення і розвитку. Так, дослідження Вейля вперше дозволило виявити характерні риси майбутньої теорії необмежених симетричних операторів. Після створення цієї теорії результати Вейля були протлумачені з більш загальної точки зору Стоуном. Як відомо, вихідним пунктом теорії Вейля є альтернатива: випадок "граничного круга" (Grenzkreisfall) — випадок "граничної точки" (Grenzpunktfall). Аналогічна альтернатива була виявлена при вивченні проблеми моментів на осі в роботах Н. І. Ахієзера[5)] і М. Г. Крейна[6)] [**4**, **6**]. З погляду ж теорії операторів в гільбертовому просторі обидві ці альтернативи мають спільну природу.

Ідеї Шина виявились достатньо плідними і згодом були розвинені в різних аспектах у працях М. Г. Крейна [**50**, **51**], Н. І. Ахієзера і І. М. Глазмана [**5**, **24**], М. А. Наймарка [**72**], С. А. Орлова [**77**–**79**], А. В. Штрауса [**129**–**132**], В. І. Когана, Ф. С. Рофе-Бекетова і А. М. Холькіна [**44**, **45**, **82**] та інших авторів.

[4)] Стоун Маршалл Гарві (Stone Marshall Harvey, 1903–1989) — американський математик, професор Колумбійського, Гарвардського, Єльського, Чикагського і Массачусетського університетів, член Національної АН США (1938), президент Американського математичного товариства (1943, 1944).

[5)] Ахієзер Наум Ілліч (1901–1980) — український математик, працював в навчальних закладах і науково-дослідних інститутах в Києві, Ніжині, Харкові, Алма-Аті, Москві, професор Харківського університету, чл.-кор. АН УРСР (1934), голова Харківського математичного товариства (з 1947), лауреат премії ім. П. Л. Чебишева АН СРСР (1949), нагороджений медаллю Л. Ейлера АН СРСР (1957).

[6)] Крейн Марк Григорович (1907–1989) — український математик, працював в навчальних закладах і науково-дослідних інститутах в Донецьку, Одесі, Куйбишеві, Харкові, Києві, професор Одеського інженерно-будівельного інституту, член-кор. АН УРСР (1939), член Харківського, Московського і Американського математичних товариств, лауреат премії ім. М. М. Крилова.

Так, окремі розділи фундаментальних робіт [**5**, **50**, **72**] присвячені самоспряженому квазідиференціальному виразу парного порядку

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(p_{n-k}(x)y^{(k)}\right)^{(k)} \tag{0.3}$$

і відповідному КДР

$$l(y) = f(x) \tag{0.4}$$

з вимірними на інтервалі (a,b) і локально сумовними на цьому інтервалі (тобто сумовними на кожному його компактному підінтервалі) коефіцієнтами $p_0^{-1}(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ і правою частиною $f(x)$. Для виразу (0.3) вводяться квазіпохідні

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k},\ k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n};$$
$$y^{[n+k]} = p_k(x)\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}y^{[n+k-1]},\ k = \overline{1, n-1}$$

і ставиться початкова задача

$$y^{[k]}(x_0) = c_k,\ k = \overline{0, 2n-1}, \tag{0.5}$$

що має єдиний розв'язок у класі абсолютно неперервних функцій разом зі своїми похідними до $(2n-1)$-го порядку включно. Доведення цього факту (який залишається правильним також для рівнянь $l(y) - \lambda y = f(x)$ з довільним комплексним параметром λ) грунтується на зведенні задачі (0.4), (0.5) за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right)^{\top}$ до вигляду

$$Y' = A(x)\, Y + f(x), \tag{0.6}$$

$$Y(x_0) = Y_0,\ x_0 \in I,$$

з вимірними та локально сумовними на інтервалі (a,b) функціональними матрицею $A(x)$ і вектором $f(x)$, та подальшим застосуванням методу послідовних наближень Пікара.[7] Крім того, в роботах побудовано теорію самоспряжених розширень симетричних операторів, що породжені самоспряженим квазідиференціальним виразом (0.3), та проведено спектральний аналіз таких операторів.

Відзначимо, що теорія операторів відіграє важливу роль в сучасній математиці і фізиці. Спектральний аналіз диференціальних операторів, тобто дослідження спектра і розвинення заданої функції за власними функціями диференціального оператора, є основним математичним апаратом при розв'язуванні задач теорії коливань, квантової механіки, атомної фізики, акустики, фізики твердого тіла, механіки рідин. При цьому особливо важливим є дослідження сингулярних диференціальних операторів, н-д, операторів, заданих на нескінченному інтервалі. Такі оператори можуть мати не лише дискретний, але й неперервний спектр, внаслідок чого розвинення за їх власними функціями зображається у вигляді інтегралу Стільтьєса[8] (по спектральній функції розподілу оператора).

Питання, пов'язані з конструкцією резольвент і спектральних функцій, а також зі з'ясуванням кратності спектру самоспряжених квазідиференціальних операторів парного порядку, вивчались в роботах [**78**, **79**, **129**–**132**].

---

[7] Пікар Шарль Еміль (Picard Charles Émile, 1856–1941) — французький математик, професор Сорбонни і Вищої нормальної школи в Парижі, член Паризької АН (1889), іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1895), член Лондонського королівського товариства (1909), Французької АН (1924), почесний член АН СРСР (1925).

[8] Стільтьєс Томас Йоаннес (Stieltjes Thomas Joannes, 1856–1894) — голландський математик, працівник Лейденської обсерваторії, професор університету в Тулузі, чл.-кор. Петербурзької АН (1894).

Для диференціальних рівнянь $l(y)=\lambda y$ довільного парного чи непарного порядку m з неперервними операторними коефіцієнтами загальний вигляд самоспряжених крайових задач на скінченному проміжку $[0,b]$ отримано у статті [**82**]. Застосований в ній метод грунтується на понятті ермітового бінарного відношення, що введене у довільному гільбертовому просторі. Виявляється, що задання такого відношення еквівалентне визначенню певних крайових умов, що описують самоспряжені розширення для операції $l(y)$. Операції, що розглядались у цитованій роботі, задаються виразом

$$l(y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big\{\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}-\\ -i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k-1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k-1)}\big)^{(k)}\Big]\Big\}+p_n(x)y$$

у випадку парного m та виразом

$$l(y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big]+\\ +\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\},$$

коли m непарне. До того ж відзначено, що умови неперервності коефіцієнтів можна послабити, якщо розглядати $l(y)$ як квазідиференціальну операцію. Власне, так вона розуміється у роботі Ф. Волкера [**182**], де скалярні коефіцієнти припускаються сумовними, а операція непарного порядку визначається виразом

$$l(y)=(-1)^n\Big\{i\Big[q_0(x)\big(q_0(x)y^{(n)}\big)'\Big]^{(n)}+\big(p_0(x)y^{(n)}\big)^n\Big\}\ +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big]+ \\ +\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\}.$$

Шляхом застосування теорії систем першого порядку в монографії [**3**] отримані двосторонні оцінки для розмірності $N(\lambda)$ лінійного многовиду розв'язків з $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$ рівняння $l(y)=\lambda\omega(x)y$ з локально сумовною на інтервалі (a,b) ваговою функцією $\omega(x)>0$ майже всюди на (a,b), а також встановлено, що, якщо при деякому значенні комплексного параметра λ усі розв'язки цього рівняння належать до $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$, то цей факт має місце для всіх λ. Подібні питання для рівнянь з матричними коефіцієнтами різними методами досліджувались в [**14**,**45**], а для рівнянь з комплексними коефіцієнтами — в [**44**].

Монографія [**172**] присвячена, насамперед, дослідженню зв'язків між спектральними і осциляційними властивостями нескінченних систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які можуть бути представлені у формі диференціального рівняння з операторнозначними (обмеженими) коефіцієнтами. На додачу автори розглядають також багато питань (наприклад, побудова фундаментальної системи розв'язків операторного диференціального рівняння з крайовими умовами на безмежності, опис самоспряжених розширень для нескінченних систем диференціальних рівнянь на скінченному чи нескінченному інтервалі з використанням вже згадуваного методу бінарних відношень, тощо), котрі не тільки відіграють ключову роль при висвітленні головної проблематики книги, але й становлять самостійний інтерес.

Серед робіт зарубіжних математиків з теорії квазідиференціальних операторів, окрім цитованої роботи [**182**], відзначимо також праці К. Кодаіри[9)] [**157**], Й. Вайдмана [**184**, **185**], А. Зеттла, В. Еверітта, Л. Маркуса [**138**–**144**, **187**].

Так, в [**138**] можна знайти огляд ряду результатів стосовно проблеми індексів дефекта операторів, починаючи з фундаментальної роботи Вейля за 1910 р. і до 1976 р. включно. У статті [**184**] в гільбертовому просторі $L^2_r(a,b)$ функцій, інтегровних з квадратом на інтервалі (a,b) відносно ваги $r(x)$, вивчається спектральна теорія операторів, породжених диференціальними виразами вигляду

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Big\{-\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\Big\}$$

з вимірними на (a,b) і локально сумовними на цьому інтервалі коефіцієнтами $p^{-1}(x)$, $q(x)$ і $r(x)$, причому $p(x) > 0$ і $r(x) > 0$ майже всюди на (a,b). В роботі [**185**] ці дослідження розвинені на випадок формально самоспряжених квазідиференціальних виразів довільного порядку

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Bigg\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\big(p_j(x)y^{(j)}\big)^{(j)} + \\ + \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j\Big[\big(q_j(x)y^{(j)}\big)^{(j+1)} - \big(q_j^*(x)y^{(j+1)}\big)^{(j)}\Big]\Bigg\}$$

з вимірними на (a,b) матричними коефіцієнтами $r(x)$, $p_j(x)$ і

9) Кодаіра Куніхіко (Kodaira Kunihiko, 1950 р.н.) — японський математик, професор Токійського, Гарвардського і Стенфордського університетів, професор Принстонського інституту перспективних досліджень, член Національної АН США (1978), лауреат золотої медалі і премії Дж. Філдса (1954).

$q_j(x)$ такими, що $r(x)$ додатно визначена для майже всіх $x \in (a,b)$ матриця, $p_j(x)$ — ермітові матриці. Крім того, у випадку парного $n = 2k$ припускається, що матриця $p_k(x)$ є регулярною для всіх $x \in (a,b)$, а функції $|p_k^{-1}|$, $|p_{k-1} - q_{k-1}^* p_k^{-1} q_{k-1}|$, $|p_k^{-1} q_{k-1}|$, $|p_j|$, $j = \overline{0, k-2}$, $|q_j|$, $j = \overline{0, k-2}$, $|r|$ — локально сумовними на (a,b); у випадку ж непарного $n = 2k+1$ вимагається, щоб матриця $q_k(x)$ була абсолютно неперервною на (a,b), $\hat{q}_k(x) = q_k(x) - q_k^*(x)$ — регулярною для всіх $x \in (a,b)$, а $|\hat{q}_k^{-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1} q_{k-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}(p_k + q_k')|$, $|p_j(x)|$, $j = \overline{0, k-1}$, $|q_j(x)|$, $j = \overline{0, k-1}$, $|r(x)|$ — локально сумовними на (a,b).

Для $m = 1$ подібний клас квазідиференціальних виразів вивчався у роботах [**139**, **143**, **187**], де

$$l(y) = (y^{[n-1]})' - \sum_{i=1}^{n} f_{ni}(x) y^{[i-1]},$$

причому $y^{[0]} = y$, $y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}(x)\Big[(y^{[i-1]})' - \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}(x) y^{[j-1]}\Big]$, а функції $f_{ij}(x)$ визначені і локально сумовні на інтервалі (a,b), $f_{ij}(x) = 0$ майже всюди на (a,b) при $2 \leqslant i+1 < j$, а $f_{i,i+1}(x) \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Деякі додаткові зауваження стосовно лінійних КДР зроблені в [**142**]. Квазідиференціальні вирази, що містять лише члени парного порядку $\left(p_j(x) y^{(j)}\right)^{(j)}$ вивчались в [**157**]. Питання факторизації (розкладу на множники) квазідиференціальних операторів розглянуто в [**141**]. У статті [**144**] досліджені диференціальні вектор-оператори, породжені зліченним числом квазідиференціальних виразів на дійсній осі. Вивченню крайових задач для звичайних диференціальних і квазідиференціальних операторів присвячено роботу [**140**].

В роботах В. Я. Дерра [34–36] досліджуються подібні до (0.1) КДР вигляду

$$q_P^n x \equiv p_{nn}(t)\frac{d}{dt}q_P^{n-1}x + \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk}(t) q_P^k x = f(t), \tag{0.7}$$

де

$$q_P^0 x = p_{00}(t)x, \quad q_P^k x = p_{kk}(t)\frac{d}{dt}q_P^{k-1}x + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(t) q_P^\nu x,\ k = \overline{1,n},$$

$$P = \{p_{ik}\}, \quad p_{ik} = 0,\ k > i,$$

з дійснозначними коефіцієнтами $p_{ik}(t)$, $k \leqslant i$, і локально сумовними на інтервалі (a,b) функціями $p_{ii}^{-1}(t)$, $p_{ik}(t)p_{ii}^{-1}(t)$, $f(t)p_{nn}^{-1}(t)$. На випадок таких рівнянь переносяться основні факти теорії неосциляції, вводиться поняття узагальненої задачі Валле-Пуссена[10)], розв'язок якої шукається в класі функцій з кусково абсолютно неперервними квазіпохідними. В [37] розв'язок звичайного диференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах визначається як розв'язок відповідного КДР.

Відзначимо також, що суттєві результати в теорії КДР на графах отримані Ю. В. Покорним та його учнями. Повне уявлення про їх досягнення і актуальні питання в цьому напрямку можна отримати з монографії [38].

Позаяк ми зачепили вже КДР з узагальненими функціями[11)] в коефіцієнтах, то буде доречним згадати також про роботи зі

[10)] Валле-Пуссен Шарль Жан де Ла (de La Vallee-Poussin Charles Jean, 1866–1962) — бельгійський математик, професор Лувенського університету, член Бельгійської АН (1909).

[11)] Локально інтегровні функції і δ-функції описують розподіли (щільності) мас, зарядів, сил і т. і., тому узагальнені функції називають ще *розподілами* (Л. Шварц, 1950).

звичайних диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами. Як відомо, крайові задачі для таких рівнянь успішно вивчаються математиками і механіками віддавна. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності з'являлись в задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярних носіїв коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільше мали частковий характер, бо стосувались рівнянь конкретного вигляду. Рівняння, коефіцієнти яких містять імпульсні особливості типу δ-функції та її похідних, описують процеси у фізичних системах з дискретно-неперервним розподілом параметрів — стрижні, пластини, оболонки із зосередженими в точках, на лініях, окремих поверхнях масами і моментами інерції, несучими пластами нульової товщини тощо.

Суттєвий поштовх для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М. Г. Крейна та І. С. Каца (див. додаток II монографії [3] і бібліографію там) стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає окрім неперервного, ще й точковий розподіл. З математичної точки зору дослідження пов'язані з узагальненим диференціальним виразом

$$l_{MQ}(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^{+}(x) - \int\limits_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s)\right], \tag{0.8}$$

де $M(x)$ — неспадна на деякому скінченному чи нескінченному інтервалі функція, $Q(x)$ — різниця двох неспадних функцій, $y^{+}(x)$ — правостороння похідна функції $y(x)$. У випадку, коли $M(x)$ та $Q(x)$ абсолютно неперервні і майже всюди на інтервалі $M'(x)=\rho(x)$, $Q'(x)=q(x)$, диференціальне рівняння $l_{MQ}(y)-\lambda y=0$ рівносильне рівнянню

$$-y''+q(x)y-\lambda\rho(x)y=0.$$

Диференціальний вираз (0.8) для $Q(x)=\mathrm{const}$ вивчався В. Феллером[12)] [**146–148**]. Його робота [**146**] цікава тим, що в ній дається внутрішнє аксіоматичне визначення операції $-\dfrac{d}{dM(x)}y^{+}(x)$. Завдяки Феллеру такі диференціальні операції почали застосовуватись в теорії марковських процесів. Однак, автор визначав операцію так, що вона втрачала сенс за наявності у функції $M(x)$ інтервалів постійності. Внаслідок цього його результати виявились недостатньо загальними, бо не охоплювали важливий випадок дискретних марковських процесів таких, як наприклад, процеси розмноження і загибелі [**43**] (їх дослідження приводить до диференціальної операції, пов'язаної зі стільтьєсівською струною [**3**, §13]).

Зі спектральною теорією неоднорідної навантаженої струни тісно пов'язана (див. [**75**]) ще одна спектральна теорія — теорія операторів Шредінґера[13)] з сингулярними (а саме, зосередженими

[12)] Феллер Вільям (Feller William, 1906–1970) — американський математик, працював в Стокгольмі консультантом з математичних методів в статистиці, економіці і біології, професор Корнеллського і Принстонського університетів, член Національної АН США (1960), редактор журналу "Mathematical Reviews"(1939–1945).

[13)] Шредінґер (Шрьодінґер) Ервін (Schrödinger Erwin, 1887–1961) — австрійський фізик-теоретик і математик, один із засновників квантової механіки, працював у Вищих технічних школах в Штутгарті, Бреслау, Цюріху, професор Віденського, Єнського, Берлінського, Оксфордського і Грацького університетів, директор Інституту вищих досліджень в Дубліні, почесний член АН СРСР (1934), лауреат Нобелівської премії (1933).

на дискретній множині точок $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) потенціалами

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x - x_k), \ \ L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x - x_k),$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — інтенсивності точкових взаємодій[14]. Такі оператори є точно розв'язуваними (в тому сенсі, що їх резольвенти будуються явно, відтак вдається обчислити спектри і характеристики розсіяння) математичними моделями квантово-механічних систем [**134**, **180**]. Історію дослідження одновимірних операторів Шредінґера з точковими взаємодіями можна знайти в монографіях [**134**, **135**], які містять також достатньо повну бібліографію з цієї тематики. Пізнішим дослідженням в цьому напрямку присвячені роботи [**26**–**29**, **74**, **149**, **151**, **152**, **156**, **158**, **167**–**169**, **173**–**175**, **188**–**190**].

В останні роки інтенсивно зростає кількість публікацій (як теоретичного, так і прикладного характеру) з теорії диференціальних рівнянь і систем рівнянь з розподілами у коефіцієнтах, що свідчить про актуальність постановок задач, які поєднують континуальність з дискретністю. Багато задач математичної фізики, електротехніки, теорії автоматичного керування, квантової механіки, атомної фізики приводять до необхідності створення достатньо розвиненої теорії таких рівнянь. Інтерес до диференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами пояснюється ще й тим, що в рамках цієї теорії видається можливим з єдиної точки зору досліджувати як звичайні диференціальні рівняння, так і диференціальні рівняння з особливостями імпульсного типу та

[14] В точних моделях квантової механіки стосовно похідної δ' розрізняють два фізичні феномени: δ'-взаємодія і точкова дипольна взаємодія (δ'-потенціал) [**179**].

різницеві рівняння. В монографії О. Ф. Філіппова [**119**] зроблено огляд робіт вітчизняних і зарубіжних авторів, де досліджуються різні класи диференціальних рівнянь з узагальненими функціями, що входять у рівняння у вигляді доданків, в тому числі диференціальні рівняння з імпульсами, лінійні (і найпростіші нелінійні) рівняння з узагальненими функціями в правій частині, лінійні системи, що не розв'язані відносно похідних і володіють розривними розв'язками, розглядаються також диференціальні рівняння, що містять узагальнені функції в коефіцієнтах. Вказано деякі класи рівнянь і систем, які за допомогою заміни змінних зводяться до систем Каратеодорі[15)], що дозволяє довести існування і дослідити властивості розв'язків. Розглядаються різні граничні переходи від диференціальних рівнянь з неперервними правими частинами до рівнянь з узагальненими функціями. В монографії наводиться численна бібліографія, що дає повне уявлення про стан досліджень (зрозуміло на момент опублікування монографії) в цьому напрямку. Що стосується досліджень із загальної і спектральної теорій узагальнених КДР, які з'явились впродовж двох-трьох останніх десятиліть, звернемо увагу на роботи [**17–19**, **30**, **31**, **58**, **61**, **67**, **68**, **70**, **71**, **89**, **90**, **92**, **95**, **97**, **99**, **100**, **102–110**, **113**, **165**, **166**].

Ще одним важливим напрямом в плані узагальнень звичайних диференціальних рівнянь є дослідження динамічних систем з розривними траєкторіями або, як їх ще називають, диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Такі задачі виникли на зорі нелінійної механіки і зацікавили фізиків можливістю адекватно

15) Каратеодорі Констянтин (Caratheodory Constantin, 1873–1950) — німецький математик, професор Ганноверського, Ґьоттінгенського, Берлінського, Мюнхенського і Афінського (ректор з 1939) університетів.

описувати процеси у нелінійних коливальних системах. Система рівнянь з імпульсною дією описується

а) системою диференціальних рівнянь, що характеризує еволюцію розглядуваного процесу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.9}$$

б) деякою множиною $\mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору $M \times \mathbb{R}$;

в) оператором $\mathcal{A}_t$, що визначений на множині $\mathcal{F}_t$ і відображає її на множину $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t$ розширеного фазового простору.

У компактнішій формі це виглядає так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \notin \mathcal{F}_t, \quad \Delta x\big|_{(t,x)\in\mathcal{F}_t} = \mathcal{A}_t x - x. \tag{0.10}$$

Під розв'язком задачі (0.10) розуміється функція $x = \varphi(t)$, яка (у звичайному сенсі) задовольняє систему рівнянь (0.9)) поза множиною $\mathcal{F}_t$ і має розриви першого роду у тих точках t, для яких $(t,x) \in \mathcal{F}_t$. Величина стрибка розв'язку обчислюється за формулою

$$\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = \mathcal{A}_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0).$$

За останні 30 років з'явилась велика кількість робіт із дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією у різних математичних школах як у нашій країні, так і за її межами [**40**, **85**, **122**, **145**, **170**]. Однак, найбільш систематичні й глибокі дослідження було здійснено київською школою нелінійної механіки, представники якої успішно розвивають такі напрямки, як загальні питання, теорія стійкості і теорія керування, крайові і багатоточкові задачі, методи чисельно-аналітичного й асимптотичного інтегрування тощо [**7**, **8**, **80**, **83**–**85**, **87**, **88**, **133**].

Відомо [98], що будь-яке лінійне КДР за допомогою введення квазіпохідних вдається звести до лінійної диференціальної системи першого порядку вигляду

$$Y' = C'(x)\,Y + F'(x). \tag{0.11}$$

Якщо $C(x)$ і $F(x)$ абсолютно неперервні [3], то система (0.11) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0) \tag{0.12}$$

з інтегралом Лебега. Така ситуація має місце для квазідиференціальних рівнянь із сумовними коефіцієнтами; при цьому (0.11) є системою типу Каратеодорі і допускає запис у вигляді (0.6). Еквівалентність зберігається й тоді, коли $C(x)$ абсолютно неперервна, а $F(x)$ має обмежену варіацію [122] або, коли $C(x)$ і $F(x)$ неперервні функції обмеженої варіації [160]. При цьому диференціювання і рівність в (0.11) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій і, крім того, в останньому з цих випадків у рівнянні (0.12) фігуруватиме класичний інтеграл Рімана–Стільтьєса[16)].

Усе це не узагальнюється безпосередньо на випадок, коли $C(x)$ є розривною функцією обмеженої варіації, навіть за умови $F(x) \equiv 0$. У цьому випадку розриви матриці-функції $C(x)$ обов'язково породжують розриви розв'язку $Y(x)$ і до того ж в одних і тих самих точках. Тому інтеграл Стільтьєса у рівнянні (0.12) може не існувати (див. [73, с. 214]). Теорія узагальнених функцій тут також не допомагає, бо, наприклад, добуток δ-функції

[16)] Ріман Ґеорґ Фрідріх Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard, 1826–1866) — німецький математик, професор Ґьоттінгенського університету.

Дірака[17] на її невизначений інтеграл (функцію Гевісайда[18]) не існує (див. §6). В результаті не визначений також добуток матричної міри Стільтьєса [**122**, с. 160] $C'(x)$ на функцію обмеженої варіації.

Однак, якщо для функцій обмеженої варіації розрізняти значення $Y(x)$, $Y(x-0)$, $Y(x+0)$ і окремо розглядати лівий $Y(x)-Y(x-0)$ та правий $Y(x+0)-Y(x)$ стрибки, то вдається визначити інтеграл у рівнянні (0.12), коли $C(x)$ та $Y(x)$ є розривними функціями обмеженої варіації. При різних припущеннях (наприклад, коли $Y(x) = Y(x-0)$ або $Y(x) = Y(x+0)$ чи $Y(x) = [Y(x-0) + Y(x+0)]/2$ тощо) отримуються різні умови існування розв'язку рівняння (0.12) і відповідно системи (0.11), відрізняються й самі розв'язки. У книгах [**40**, **119**] відзначено, що відомі означення розв'язку системи (0.11) у такій ситуації реалізуються в рамках трьох основних підходів.

Перший підхід пов'язаний зі спробами формалізації цієї системи в рамках теорії розподілів і зводиться до проблеми множення узагальнених функцій на розривні. Спочатку на основі секвенціального підходу [**2**] вводиться означення добутку міри на функцію обмеженої варіації, а потім відповідним чином дається означення розв'язку системи (0.11) [**40**, **136**, **160**, **161**]. Вельми

[17] Дірак Поль Адрієн Моріс (Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1984) — англійський фізик-теоретик, один із засновників квантової механіки, професор Кембріджського університету, член Лондонського королівського товариства (1930), іноземний член АН СРСР (1931), лауреат Нобелівської премії (1933).

[18] Гевісайд Олівер (Heaviside Oliver, 1850–1925) — англійський фізик та інженер, член Лондонського королівського товариства (1891).

цікавими є також роботи [**1**, **39**, **81**, **137**, **162**], в яких досліджуються
диференціальні рівняння у просторах "нових"[19)] узагальнених функцій.

Другий підхід започаткований у роботі Я. Курцвейля [**159**] і передбачає формальний перехід до інтегрального рівняння (0.12), в якому інтеграл розуміється у сенсі Перрона–Стільтьєса[20)], Лебега–Стільтьєса чи як некласичний інтеграл Рімана–Стільтьєса [**9**, **154**, **171**, **176**, **177**]. При такому підході, зрозуміло, стрибки розв'язку залежатимуть від значень функції $C(x)$ у точках розриву.

Третій підхід базується на ідеї апроксимації елементів матриці $C(x)$ послідовностями гладких функцій [**56**], [**40**, с. 148]. При цьому розв'язок системи (0.11), що визначається границею своїх гладких наближень, збігається з розв'язком інтегрального рівняння (0.12).

Для ілюстрації описаних вище підходів розглянемо початкову задачу

$$y' = \frac{1}{2}\delta(x)y, \quad y(-1) = y_0, \tag{0.13}$$

де $\delta(x)$ — функція Дірака (див. с. 47). На підставі результатів роботи [**40**] розв'язок задачі (0.13) має вигляд

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\frac{1}{2}H_+(x)\right\}, \tag{0.14}$$

---

19) Нові узагальнені функції, як і розподіли, визначаються як границі послідовностей гладких функцій, однак принципова відмінність їх від розподілів полягає в тому, що при цьому "запам'ятовується" сам спосіб апроксимації.

20) Перрон Оскар (Perron Oscar, 1880–1975?) — німецький математик, професор Мюнхенського і Гейдельберзького університетів.

де $H_+(x)$ — функція Гевісайда неперервна зліва (розривна справа) в точці $x = 0$: $\quad H_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

Розв'язком цієї ж задачі, що розуміється у сенсі робіт [**136**, **160**, **161**] є функція

$$y(x) = y_0\left[\frac{2}{3}H_+(x) + 1\right],$$

яка, очевидно, не збігається з функцією (0.14).

У рамках другого підходу задачі (0.13) слід поставити у відповідність інтегральне рівняння

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} y(t)\, d[\alpha H_+(t) + (1-\alpha)H_-(t)], \tag{0.15}$$

де $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а $H_-(x)$ — функція Гевісайда неперервна справа (розривна зліва) в точці $x = 0$: $\quad H_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$.

Зрозуміло, що при різних значеннях α розв'язки рівняння (0.15) визначаються по-різному: при $\alpha = 1$ (цей випадок відповідає тому, що розв'язки задачі (0.13) apriori є неперервними зліва)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_+(x)\right];$$

при $\alpha = 0$ (розв'язки за означенням повинні бути неперервними справа)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_-(x)\right];$$

якщо вважати, що $\alpha = 1/2$ (наприклад, з міркувань симетрії, або приймаючи за означенням розв'язки такими, що задовольняють умову $y(x) = [y(x-0) + y(x+0)]/2$), то

$$y(x) = y_0\Big\{1 + \frac{1}{4}[H_+(x) + H_-(x)]\Big\}.$$

Нарешті, нехай $H_k(x)$ — послідовність абсолютно неперервних функцій, що поточково збігається на проміжку $[-1, 1]$ до функції $H_+(x)$. Поставимо їй у відповідність послідовність функцій $y_k(x) = y_0 \exp\{\frac{1}{2}H_k(x)\}$, які є розв'язками початкових задач

$$y_k' = \frac{1}{2}H_k'(x)y_k, \quad y_k(-1) = y_0. \tag{0.16}$$

Тут $H_k'(x)$ є δ-послідовністю, що апроксимує δ-функцію Дірака, тому задачу (0.16) можна вважати гладкою апроксимацією початкової задачі (0.13). Очевидно, що послідовність $y_k(x)$ поточково збігається до функції (0.14) і не залежить від вибору апроксимуючої послідовності $H_k(x)$.

Як бачимо, поняття розв'язку для диференціальних рівнянь з розподілами не однозначне і головною причиною цього є той факт, що простір узагальнених функцій не є алгеброю — у ньому не можна визначити множення, яке б успадкувало основні властивості множення неперервних функцій. Відтак, при виборі того чи іншого означення розв'язку потрібно більш повно враховувати характер граничного переходу, що приводить до розглядуваного рівняння. Цього недоліку позбавлений підхід, що прийнятий в роботі [**98**] і якого ми дотримуватимемось тут. В рамках цього підходу під розв'язком системи (0.11) розуміється вектор-функція обмеженої варіації, що задовольняє систему в сенсі теорії розподілів, причому вказуються ефективні (в термінах матриць $C(x)$ і $F(x)$) умови, за яких система (0.11) є коректною, тобто при її дослідженні не виникає проблеми множення функціоналів.

В заключному розділі монографії розглядаються також наближені методи розв'язування узагальнених квазідиференціальних рівнянь і диференціальних систем з мірами. Зокрема, один із підходів полягає у побудові для таких рівнянь точних рекурентних співвідношень (ТРС), що є аналогами точних різницевих схем. Точні різницеві схеми для звичайних диференціальних рівнянь з кусково-гладкими коефіцієнтами вперше були отримані А. М. Тіхоновим[21)] і О. А. Самарським[22)] [**114**–**116**]. Ними ж був апробований алгоритм наближеної реалізації точних різницевих схем — відсічені схеми m-го рангу. Останні мають максимальний порядок точності $O\big(h^{2(m+1)}\big)$, де h — величина кроку сітки, відтак за рахунок вибору достатньо великого m можна отримати триточкові схеми довільного порядку. Згодом ці результати були поширені на системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [**62**], диференціальні рівняння четвертого порядку [**15**], нелінійні звичайні диференціальні рівняння другого

[21)] Тіхонов Андрій Миколайович (Тихонов Андрей Николаевич, 1906–1993) — російський математик і геофізик, професор Московського університету (декан факультету обчислювальної математики і кібернетики з 1970 по 1990), працював в Інституті теоретичної геофізики АН СРСР, заступник директора (з 1953) і директор (з 1978) Інституту прикладної математики АН СРСР, чл.-кор. (1939) і академік (1966) АН СРСР, лауреат Сталінської (1953), Державної (1976) і Ленінської (1966) премій, премії ім. М. В. Ломоносова (1963), нагороджений золотою медаллю М. В. Келдиша (1990).

[22)] Самарський Олександр Андрійович (Самарский Александр Андреевич, 1919–2008) — російський математик, учень А. М. Тіхонова, зав. відділу в Інституті прикладної математики АН СРСР, професор Московського університету, директор Інституту математичного моделювання РАН (з 1990), чл.-кор. (1966) і академік (1976) АН СРСР, лауреат Державної (1954, 1999) і Ленінської (1962) премій.

порядку [53–55, 150], задачі з виродженням і задачі Штурма-Ліувілля[23)] [10, 11, 63].

В цих роботах досліджувались питання існування і єдиність точних схем, їх зведення до дивергентного вигляду і точність відсічених різницевих схем для задач з кусково-гладкими коефіцієнтами. Точні різницеві схеми для звичайного диференціального рівняння $2m$-го порядку вивчались в роботі [49].

В працях [163, 164] розглядається проблема побудови точної двоточкової (компактної) різницевої схеми та її реалізації через двоточкові схеми довільного порядку точності для системи диференціальних рівнянь першого порядку з додатковими двоточковими крайовими умовами.

Роботи [25, 117] присвячені побудові і дослідженню однорідних різницевих схем для одновимірної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \equiv (0;1), \tag{0.17}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{0.18}$$

де $k(x)$ — вимірна функція і $0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2 < \infty$; $q(x) = Q'(x)$, $Q(x) \in W_p^{\lambda}(\Omega)$ $(p \geqslant 2,\ 0 < \lambda \leqslant 1)$, причому $\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx \geqslant 0$ для довільної функції $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$; $f(x) = F'(x)$, $F \in W_q^s(\Omega)$ $(q \geqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1)$. Коефіцієнти $q(x)$ і $f(x)$ рівняння (0.17) є узагальненими похідними від функцій з

23) Штурм Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François, 1803–1885) — швейцарський математик, професор Сорбонни і Політехнічної школи в Парижі, член Паризької АН (1836) та іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1836).

Ліувілль Жозеф (Liouville Joseph, 1809–1882) — французький математик, професор Політехнічної школи і Колеж де Франс в Парижі, член Паризької АН (1839) та іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1840). Засновник журналу "Journal de mathématiques pure et appliquée"(1883).

простору Соболєва[24] W_p^λ $(0<\lambda\leqslant 1,\ 2\leqslant p\leqslant\infty)$. Сюди, зокрема, входять випадки, коли коефіцієнти — δ-функції $(p\lambda<1)$ і кусково-неперервні функції $(p=\infty,\ \lambda=1)$.

На основі властивостей шаблонних функцій, котрі є розв'язками в узагальненому (слабкому) сенсі певних задач Коші для рівняння (0.17), у цих роботах побудовано точну триточкову різницеву схему для задачі (0.17), (0.18), встановлено її єдиність і можливість зображення у дивергентному вигляді, досліджено консервативність різницевої схеми, що є необхідною і достатньою умовою її (схеми) збіжності, запропоновано алгоритм наближеного відшукання шаблонних функцій. Крім того, за допомогою відсічених шаблонних функцій побудована відсічена триточкова різницева схема m-го рангу, що має точність $O\big(h^{2(m+1)-n}\big)$, причому величина n втрати порядку точності залежить від гладкості коефіцієнтів. В міру зростання цієї гладкості зростає також і швидкість збіжності відсіченої схеми. Зокрема, коли коефіцієнти кусково-гладкі, отримані в [**25**, **117**] результати збігаються з результатами робіт [**114**–**116**].

[24] Соболєв Сергій Львович (Соболев Сергей Львович 1908–1989) — російський математик, працював в Сейсмологічному інституті АН СРСР, Математичному інституті ім. В. А. Стєклова АН СРСР, Інституті атомної енергії, професор Московського і Новосибірського університетів, директор Інституту математики Сибірського відділення АН СРСР, академік АН СРСР (1939), почесний член Московського математичного товариства (1987).

Перелік умовних позначень

(i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних, дійсних і комплексних чисел відповідно.

(ii) $[a, b]$, $I = (\alpha, \beta)$ — відповідно замкнений і відкритий інтервали дійсної осі $\mathbb{R}$.

(iii) $\overline{1, n}$ — набір цілих чисел від 1 до n: $\{1, 2, \ldots, n\}$

(iv) $\omega_\nu = \{a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu \leqslant b\}$ — сітка на відрізку $[a, b]$; для рівномірної сітки $x_k = kh$, $k = \overline{0, \nu}$, $h = \frac{b-a}{\nu}$.

(v) $\mathbb{C}^{p \times q}$ — лінійний простір комплексних $(p \times q)$-матриць $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{p,q}$ з нормою $|A| = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$; $\mathbb{C}^{p \times 1} = \mathbb{C}^p$, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$.

(vi) $A^\top$, $\overline{A}$, A^{-1} — матриці відповідно транспонована, комплексно спряжена та обернена до матриці A.

(vii) $A^* = \left(\overline{A}\right)^\top$ — матриця ермітово спряжена до матриці A.

(viii) $\det A$ — визначник (детермінант) квадратної матриці A.

(ix) $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{pp}$ — слід квадратної матриці A.

(x) δ_{ij} — символ Кронекера[25]: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(xi) $E = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{p}$ — одинична матриця розміру $p \times p$. Якщо є потреба вказати порядок матриці, то використовуємо позначення E_p.

---

[25] Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold, 1823–1891) — німецький математик, професор Берлінського університету, член Берлінської АН (1861), іноземний чл.-кор. Петербурзької АН (1872).

(xii) 0 — нульовий елемент: число, вектор чи матриця. При потребі для нульової $(p\times p)$-матриці використовуємо позначення O_p.

(xiii) $\Theta_M(x)$ — характеристична функція множини M:

$$\Theta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M;\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

(xiv) $C_{p\times q}(I)$, $AC_{p\times q}(I)$ — простори матричних функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі елементи $a_{ij}(x)$ яких є відповідно неперервними та обсолютно неперервними на I скалярними функціями; $C_{p\times 1}(I)=C_p(I)$, $AC_{p\times 1}(I)=AC_p(I)$ і $C_1(I)=C(I)$, $AC_1(I)=AC(I)$.

(xv) $\bigvee\limits_a^b(A)$ — повна варіація матриці-функції $A(x)$, що дорівнює сумі повних варіацій усіх її елементів $a_{ij}(x)$:

$$\bigvee_a^b(A)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sup_{\sigma}\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ij}(x_k)-a_{ij}(x_{k-1})\right|$$

(тут $\sigma\colon a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$ — довільне розбиття відрізка $[a;b]$). У випадку відкритого інтервалу I будемо вважати, що $A(x)$ має обмежену варіацію на I, якщо $A(x)$ має обмежену варіацію на довільному замкненому підінтервалі $[a,b]\subset I$ і варіації $\bigvee\limits_a^b(A)$ обмежені в їх сукупності: $\bigvee\limits_I(A)=\sup\limits_{b\geqslant a}\bigvee\limits_a^b(A)<\infty$.

(xvi) $BV_{p\times q}[a,b]$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $a_{ij}(x)$ яких є функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, з нормою $\|A\|_{BV}=|A(a)|+\bigvee\limits_a^b(A)$; $BV_{p\times 1}[a,b]=BV_p[a,b]$ і $BV_1[a,b]=BV[a,b]$. Якщо $A(x)$ додатково неперервна справа, то використовуємо позначення $BV^+_{p\times q}[a,b]$, $BV^+_p[a,b]$, $BV^+[a,b]$.

(xvii) $BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі компоненти $a_{ij}(x)$ яких є неперервними справа функціями локально обмеженої на інтервалі I варіації, тобто $a_{ij}\in BV^{+}[a,b]$ для довільного $[a,b]\subset I$; $BV^{+,loc}_{p\times 1}(I)=BV^{+}_{loc,p}(I)$ і $BV^{+}_{loc,1}(I)=BV^{+}_{loc}(I)$.

(xviii) $\Delta A(x)=A(x)-A(x-0)$ — стрибок матриці-функції $A\in BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ у точці x.

(xix) $L^{2,loc}_{p\times q}(I)$ — простір матриць-функцій $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, усі елементи $a_{ij}(x)$ яких є локально сумовними з квадратом модуля за Лебегом на інтервалі I скалярними функціями; $L^{2,loc}_{p\times 1}(I)=L^{2}_{loc,p}(I)$ і $L^{2}_{loc,1}(I)=L^{2}_{loc}(I)$.

(xx) $A_\nu(x)\rightrightarrows A(x)$ на $[a,b]$ — рівномірна збіжність послідовності матриць-функцій $\{A_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$, яка означає, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|A(x)-A_\nu(x)|=0$.

(xxi) $\overline{\mathcal{D}}_0(I)$ — простір неперервних векторних функцій $I\to\mathbb{C}^{p}$ з компактним носієм (основних функцій), спряжений до якого є простором $\overline{\mathcal{D}}_0'(I)$ векторних розподілів (узагальнених функцій).

(xxii) (f,φ) — значення функціоналу f на основній функції $\varphi(x)$: $(f,\varphi)=\sum_{i=1}^{p}(f_i,\varphi_i)$ для $\varphi\in\overline{\mathcal{D}}_0(I)$, $f\in\overline{\mathcal{D}}_0'(I)$.

(xxiii) $H(x-x_s)$ — зміщена функція Гевісайда:
$$H(x-x_s)=\begin{cases}0, & x<x_s,\\ 1, & x>x_s.\end{cases}$$

(xxiv) $\delta(x-x_s)$ — δ-функція Дірака з носієм у точці x_s.

(xxv) КДР — квазідиференціальне рівняння.

(xxvi) ФСР — фундаментальна система розв'язків.

(xxvii) ТРС — точне рекурентне співвідношення.

(xxviii) ТДФ — точна двоточкова формула.

1

Узагальнені інтегральні і диференціальні системи

§ 1. Функції обмеженої варіації та міри

В цьому параграфі коротко подамо означення і твердження, які стосуються двох важливих класів функцій, що знадобляться нам при викладі основного матеріалу книги, — це функції обмеженої варіації та міри [**3**, **48**, **73**, **122**].

Означення 1.1. Дійсна або комплекснозначна скалярна функція $f(x)$, що визначена на скінченному відрізку $[a, b]$ дійсної осі $\mathbb{R}$, називається *функцією обмеженої варіації* на цьому відрізку, якщо вираз

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1.1}$$

допускає фіксовану верхню межу для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і довільного розбиття σ відрізка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Найменшу спільну верхню межу усіх таких виразів називають *повною варіацією* функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначають

$$\bigvee_a^b (f) = \sup_\sigma \{V_\sigma(f)\}.$$

§ 2. Матричний некласичний інтеграл Рімана–Стільтьєса

Розглянемо матриці-функції $F \in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ і $G \in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Тоді на підставі властивості 7) з §1 правильними є зображення:

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x), \quad G(x) = G_c(x) + G_d(x),$$

де $F_c(x)$ і $G_c(x)$ — неперервні складові функцій $F(x)$ і $G(x)$, а $F_d(x)$ і $G_d(x)$ — їх функції стрибків:

$$F_d(x) = \sum_{y\leqslant x}[F(y) - F(y-0)], \quad y \in I,$$
$$G_d(x) = \sum_{y\leqslant x}[G(y) - G(y-0)].$$

Для довільного замкненого інтервала $[a,b] \subset I$ визначимо інтеграл наступним чином:

$$\int_a^b dF(x)G(x) \overset{df}{=} \int_a^b dF_c(x)G(x) + \sum_{a<x\leqslant b}[F(x) - F(x-0)]G(x-0). \quad (2.1)$$

Легко переконатися, що інтеграл (2.1) можна визначити і як границю інтегральної суми [3], а саме

$$\int_a^b dF(x)G(x) = \lim_{\max|x_k - x_{k-1}|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[F(x_k - F(x_{k-1}))]G(x_{k-1}), \quad (2.2)$$

де $\sigma\colon a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqslant b$ — довільне розбиття відрізка $[a,b]$.

Відзначимо, що у зв'язку з некомутативністю операції множення матриць інтеграл

$$\int_a^b G(x)dF(x) \overset{df}{=} \int_a^b G(x)dF_c(x) + \sum_{a<x\leqslant b} G(x-0)[F(x) - F(x-0)],$$

взагалі кажучи, не співпадає з інтегралом (2.1).

§ 3. Однорідне матричне інтегральне рівняння

Розглянемо інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \tag{3.1}$$

де $Y(x)$ — n-вимірний вектор, $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $x_0 \in I$.

Як відомо [3], це рівняння має єдиний розв'язок $Y(x)$, який належить простору $BV^{+}_{loc,n}(I)$, і стрибки якого визначаються формулою

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) \quad \forall x \in I. \tag{3.2}$$

Це твердження еквівалентне тому, що інтегральне рівняння

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} dC(t)Y(t),$$

має лише нульовий розв'язок.

Введемо матрицю-функцію двох змінних $B(x,s)$ як розв'язок матричного інтегрального рівняння

$$B(x,s) = E + \int_{s}^{x} dC(t)B(t,s). \tag{3.3}$$

Очевидно, що таке матричне рівняння має також єдиний розв'язок за змінною x у просторі $BV^{+}_{loc,n}(I)$, оскільки кожний її стовпець має таку властивість.

Матрицю $B(x,s)$ називатимемо *фундаментальною матрицею*, або *матрицею Коші* [9]), інтегрального рівняння (3.1). Її притаманні властивості, що виражаються такими теоремами.

---

9) Коші Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis, 1789–1857) — французький математик, викладав в Паризькому університеті, в Політехнічній школі і Колеж де Франс, член Паризької АН (1816), іноземний член Петербурзької АН (1831).

Дійсно, за цієї умови справджується тотожність

$$\left[E+\Delta C(x)\right]^{-1}\equiv E-\Delta C(x), \tag{3.9}$$

бо $\left[E+\Delta C(x)\right]\cdot\left[E-\Delta C(x)\right]=E-\left[\Delta C(x)\right]^2\equiv E$. Тому

$$\Delta_s B(x,s)=B(x,s{-}0)\Big\{\left[E-\Delta C(s)\right]-E\Big\}=-B(x,s{-}0)\Delta C(s).$$

§ 4. Неоднорідне матричне інтегральне рівняння

Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння

$$Y(x)=\int\limits_{x_0}^{x}dC(t)\,Y(t)+U(x),\quad U(x_0)=Y(x_0), \tag{4.1}$$

де $C\in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $U\in BV^{+}_{loc,n}(I)$, $x_0\in I$.

Теорема 4.1. *Розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) можна подати у вигляді*

$$Y(x)=B(x,x_0)U(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}B(x,t)dU(t)-$$
$$-\sum_{x_0<y\leqslant x}B(x,y)\Delta C(y)\Delta U(y), \tag{4.2}$$

де сума розповсюджується на ті точки $y\in I$, в яких матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви одночасно.

Доведення. Покажемо, що вираз, який стоїть праворуч в (4.2), справджує інтегральне рівняння (4.1).

Зауваження 4.2. У формулі (4.2) сума зникає не лише у випадку, коли матриці $C(x)$ і $U(x)$ мають розриви в різних точках, але й тоді, коли

$$\Delta C(x)\Delta U(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

§ 5. Спряжене матричне інтегральне рівняння

Як відомо з § 3, функція Коші $B(x,s)$ за змінною x справджує рівняння (3.3). Відповідь на те, яке рівняння справджує функція $B(x,s)$ за змінною s, дає наступна

Теорема 5.1. *Функція $B(x,s)$ за змінною s справджує інтегральне рівняння*

$$B(x,s) = E + \int\limits_s^x B(x,t)d\widehat{C}(t), \tag{5.1}$$

де

$$\widehat{C}(x) = C(x) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \big[E + \Delta C(y)\big]^{-1}\big[\Delta C(y)\big]^2. \tag{5.2}$$

Доведення. Перепишемо рівняння (3.1) у вигляді

$$B(x,s) - E = \int\limits_s^x dC(t)\big[B(t,s) - E\big] + C(x) - C(s). \tag{5.3}$$

Застосовуючи до (5.3) формулу (4.2) розв'язку неоднорідного рівняння, приходимо до рівності

$$B(x,s) = E + \int\limits_s^x B(x,t)dC(t) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} B(x,y)\big[\Delta C(y)\big]^2. \tag{5.4}$$

§ 6. Про добуток розподілів і первісні мір

При дослідженні диференціальних рівнянь з мірами в коефіцієнтах природним чином виникає проблема множення узагальнених функцій (розподілів Шварца). Як відомо [**16**, с. 37], добуток довільних двох узагальнених функцій f і g не завжди існує. Для визначення такого добутку потрібно, щоб функції f і g, грубо кажучи, володіли властивістю: наскільки f "нерегулярна" в околі довільної точки, настільки g повинна бути "регулярною" в цьому околі, і навпаки. З цієї точки зору невизначений (*некоректний*) добуток функції Хевісайда на її узагальнену похідну — міру Дірака.

Відповідно до секвенціального підходу [**2**, с. 274], добуток узагальнених функцій f і g існує на інтервалі I, якщо послідовність добутків згорток $(f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n)$ збігається (в узагальненому сенсі) на I для довільної δ-послідовності δ_n. Ця (слабка) границя й називається добутком узагальнених функцій f і g:

$$(f\cdot g,\varphi)=\lim_{n\to\infty}\big((f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n);\varphi\big),\quad \varphi\in\mathcal{D}(I).$$

В рамках цього означення згаданий добуток $H(x-x_s)\cdot\delta(x-x_s)$ не існує (некоректний), бо його значення залежать від вибору послідовності δ_n.

Для того, щоб дослідити коректність добутків $F'(x)G(x)$ та $F(x)G'(x)$, де $F'(x)$, $G'(x)$ — узагальнені похідні функцій $F(x)$ і $G(x)$, припустимо, що $F\in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ і $G\in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Запишемо дискретні складові F_d і G_d функцій $F(x)$ і $G(x)$ у вигляді

§ 7. Лінійні диференціальні системи з мірами

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad x \in I, \tag{7.1}$$

де $Y(x)$ — невідома n-вимірна вектор-функція, $C(x)$ — матриця-функція з простору $BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $C'(x)$ — її узагальнена похідна (відтак диференціювання і рівність в (7.1) розуміються в узагальненому сенсі).

Слід зауважити, що стрибки матриці-функції $C(x)$ породжують також стрибки розв'язку $Y(x)$ рівняння (7.1) і до того ж в одних і тих самих точках, а тому добуток $C'(x)Y(x)$, взагалі кажучи, неоднозначний (див. §6).

Означення 7.1. Вважатимемо, що вектор Y належить до *допустимого класу*, який позначимо $\mathfrak{D}^n_C(I)$, якщо:

1) $Y \in BV^+_{loc,n}(I)$,

2) $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$.

Означення 7.2. Під *розв'язком рівняння* (7.1) будемо розуміти вектор-функцію $Y(x)$ з допустимого класу $\mathfrak{D}^n_C(I)$, що задовольняє це рівняння в узагальненому сенсі:

$$(\varphi, Y') = (\varphi, C'Y) \quad \forall \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I).$$

Для системи (7.1) поставимо задачу Коші про відшукання розв'язку, який задовольняє початкову умову

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I. \tag{7.2}$$

§ 8. Існування і єдиність розв'язку початкової задачі

Метод зведення початкових задач для (коректних) систем диференціальних рівнянь з мірами до еквівалентних інтегральних рівнянь дозволяє в повній мірі використати отримані в попередніх параграфах результати для побудови елементів лінійної теорії: досить у відповідних формулах покласти $\Delta C(x)\Delta Y(x)=0$, $[\Delta C(x)]^2=0$ та $\Delta C(x)\Delta F(x)=0$ $\forall x\in I$. Такий підхід є певною мірою альтернативним до результатів робіт [**93**], [**98**].

Теорема 8.1. *За умови* (7.5) *існує єдиний розв'язок* $Y\in\mathfrak{D}^n_C(I)$ *початкової задачі* (7.1), (7.2), *стрибок якого виражається формулою*

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x). \tag{8.1}$$

Цей розв'язок допускає зображення у вигляді

$$Y(x) = B(x,x_0)Y(x_0), \tag{8.2}$$

де $B(x,s)$ *— фундаментальна матриця, що за змінною* x *є розв'язком системи* (7.1) *і при* $x=s$ *задовольняє умову* $B(s,s)=E$.

Існування і єдиність розв'язку випливають з теорем 7.3 і 7.4. Представлення розв'язку (8.2) є наслідком теореми 3.1. Умову ж стрибка (8.1) легко отримати, якщо врахувати формули (3.2), (3.7), (3.9) і умову (7.5):

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) = \Delta C(x)\big[E+\Delta C(x)\big]^{-1}Y(x) =$$
$$= \Delta C(x)\big[E-\Delta C(x)\big]Y(x) = \Delta C(x)\Delta Y(x).$$

2

Основи концепції квазіпохідних

§ 9. Попередні зауваження

Перш, ніж перейти до визначення основних понять, розглянемо деякі приклади скалярних диференціальних рівнянь.

1. Диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' - a_1(x)y = 0, \tag{9.1}$$

де $y(x)$ — невідома функція від дійсної змінної $x \in I$, $a_1(x) = b_1'(x)$, причому $b_1 \in BV^+_{loc}(I)$, звичайним чином зводиться до диференціальної системи першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \tag{9.2}$$

де

$$Y = (y, y')^\top, \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Позаяк

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

то, вочевидь, $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$ для довільного $x \in I$ і, таким чином, система (9.2) коректна.

§ 10. Початкова задача для квазідиференціального рівняння з мірами

Розглянемо квазідиференціальний вираз

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}, \quad m,n \in \mathbb{N}, \qquad (10.1)$$

де $y(x)$ — функція, визначена на деякому інтервалі I дійсної осі $\mathbb{R}$. Квазідиференціальні вирази вигляду (10.1) з достатньо гладкими, а також локально сумовними за Лебегом на інтервалі I коефіцієнтами $a_{ij}(x)$ в різних аспектах досліджувались багатьма авторами (див. бібліографію в [**72**]). Ми ж послаблюємо вимоги до коефіцієнтів квазідиференціального виразу (10.1) і всюди далі вважаємо, що виконуються такі припущення:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на I функція;

(II) $a_{i0}, a_{0j} \in L^2_{loc}(I),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$;

(III) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, де $b_{ij} \in BV^+_{loc}(I),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

З наведених умов видно, що у виразі (10.1) виконувати операцію $(m-j)$-кратного диференціювання не можна через недостатню гладкість його коефіцієнтів. Якщо, навіть, спробувати і провести диференціювання в узагальненому сенсі, то від розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння

$$L_{mn}[y] = 0 \qquad (10.2)$$

ми змушені будемо вимагати достатньої гладкості для того, щоб операції множення в лівій частині цього рівняння були законними (а не лише формальними) з точки зору теорії узагальнених функцій. Усіх цих труднощів вдається уникнути, якщо стати на шлях концепції введення квазіпохідних.

§ 11. Спряжене квазідиференціальне рівняння з мірами

Щоб отримати вигляд спряженого до (10.2) КДР, а також вирази для його квазіпохідних, розглянемо згідно означення 9.4 спряжену до (10.7) узагальнену диференціальну систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x). \tag{11.1}$$

Використовуючи конкретний вигляд (стор. 88) матриці $C'(x)$, приходимо до наступних означень.

Означення 11.1. *Спряженим* до (10.1) називається квазідиференціальний вираз

$$L^*_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \big(\overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}\big)^{(n-i)}. \tag{11.2}$$

Означення 11.2. *Квазіпохідними* функції $z(x)$ в сенсі спряженого рівняння (11.2) назвемо функції $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0, q}$, що визначаються виразами

$$\begin{aligned} &z^{\{j\}} = z^{(j)}, \quad j = \overline{0, m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{0j}(x) z^{(m-j)}; \\ &z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m} \overline{a}_{ij}(x) z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

При цьому, легко бачити, що $z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[z]$. Відзначимо також, що в разі, коли визначені квазіпохідні (10.3), то квазіпохідні (11.3) визначаються однозначно із системи (11.1).

Розглянемо тепер початкову задачу

$$L^*_{mn}[z] = 0, \tag{11.4}$$

$$z^{\{k\}}(x_0) = z_0^k, \quad k = \overline{0, q-1}, \tag{11.5}$$

де z_0^k, $k = \overline{0, q-1}$, — задані числа.

§ 12. Лінійна теорія узагальнених квазідиференціальних рівнянь

На основі отриманих вище результатів тепер можна будувати лінійну теорію однорідних КДР з мірами аналогічно тому, як це робиться, наприклад, для певних класів КДР з сумовними коефіцієнтами.

Нехай функції $\varphi_k(x), k = \overline{1, q}$, і $\psi_l(x), l = \overline{1, q}$, є розв'язками вихідного

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{12.1}$$

і спряженого

$$L^*_{mn}[z] = 0 \tag{12.2}$$

КДР відповідно. Складемо матриці-функції

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_q(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[q-1]}(x) & \varphi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_q(x) \\ \psi_1^{\{1\}}(x) & \psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{\{q-1\}}(x) & \psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Визначники

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)] = \det \Phi(x)$$

та

$$V(x) \equiv V[\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_q(x)] = \det \Psi(x)$$

§ 13. Структура фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння з мірами

Наведені в цьому параграфі результати не вимагають конкретного вигляду КДР і є, так би мовити, наслідком деяких загальних положень концепції квазіпохідних. Більше того, встановлена нижче структура фундаментальної матриці, що відповідає абстрактному КДР, переконує в тому, що така концепція — в самій природі звичайних диференціальних рівнянь. Нехай

$$l_n\big[y(x)\big] = 0 \tag{13.1}$$

коректне КДР n-порядку, що зводиться до еквівалентної узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I, \tag{13.2}$$

де $Y = \big(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[n-1]}\big)^{\top}$ — невідома вектор-функція, а $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, — деяким чином введені квазіпохідні.

Означення 13.1. Матрицю-функцію $B(x,s)$, яка за змінною x задовольняє систему (13.2) і в точці $x = s \in I$ початкову умову $B(s,s) = E_n$, назвемо *фундаментальною матрицею, що відповідає КДР* (13.1).

Означення 13.2. *Функцією Коші* КДР (13.1) назвемо функцію $K(x,s)$, котра за змінною x є розв'язком цього рівняння і в точці $x = s \in I$ задовольняє початкові умови

$$K^{[i]}(s,s) = 0, \ \ i = \overline{0, n-2}, \qquad K^{[n-1]}(s,s) = 1. \tag{13.3}$$

Нехай також

$$l_n^*[z(x)] = 0 \tag{13.4}$$

спряжене КДР, а $z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, n-1}$, — відповідні квазіпохідні.

§ 14. Конструкція елементів фундаментальної матриці

У попередньому параграфі для довільного абстрактного КДР ми описали за допомогою однієї лише функції Коші $K(x,s)$ та її змішаних квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь структуру нормальної при $x=s$ фундаментальної матриці $B(x,s)$, що відповідає цьому рівнянню. Однак, при дослідженні задач як прикладного, так і теоретичного характеру не менш важливо знати також конструкцію елементів цієї матриці, тобто вміти конструктивно будувати саму функцію Коші та її мішані квазіпохідні. Спосіб їх побудови через ФСР якраз і є предметом розгляду цього параграфу.

Якщо користуватись означенням (13.2), то для побудови функції Коші $K(x,s)$ КДР (13.1) необхідно розв'язати неоднорідну систему n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[i]}(s) = 0, \quad i = \overline{0, n-2}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[n-1]}(s) = 1, \end{cases}$$

де φ_k, $k = \overline{1,n}$, — довільна ФСР рівняння (13.1). Якщо це робити, н-д, методом Крамера[3)], то потрібно обчислити $n+1$ визначників n-го порядку.

Наступне твердження зводить процес побудови функції Коші (так само її мішаних квазіпохідних) до обчислення лише двох визначників n-го порядку.

[3)] Крамер Ґабріель (Cramer Gabriel, 1704-1752) — швейцарський математик, учень Й. Бернуллі, професор Женевської академії.

§ 15. Неоднорідне квазідиференціальне рівняння з розподілами

Розглянемо неоднорідне КДР

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \tag{15.1}$$

коефіцієнти $a_{ij}(x)$ якого справджують вказані в § 10 припущення (I)–(III), а права частина задовольняє умову

(IV) $f_k \in BV^+_{loc}(I),\ k = \overline{0,l}$.

Найперше поставимо собі за мету з'ясувати, при якому найбільшому значенні l рівняння (15.1) є коректним. Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Теорема 15.1. *Якщо* $l \leqslant m-1$, *то за умов* (*I*)–(*IV*) *КДР* (15.1) *коректне, тобто зводиться до коректної диференціальної системи.*

Доведення. Вважаючи, що $0 \leqslant l \leqslant m{-}1$, введемо квазіпохідні $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = \overline{0,q}$, в сенсі КДР (15.1) у такий спосіб:

$$\begin{aligned} &y^{[i]} = y^{(i)},\ i = \overline{0,n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)};\\ &y^{[n+j]} = -\big(y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)},\ j = \overline{1,m-l-1};\\ &y^{[n+j]} = -\big(y^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)} + f'_{m-j}(x),\\ &\qquad\qquad j = \overline{m-l,m}. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Відзначимо, що при цьому $y^{[q]} \equiv L_{mn}[y] - \sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x)$.

§ 16. Узагальнене звичайне диференціальне рівняння

Для математиків цікавим (як з теоретичної, так і з практичної точок зору) є звичайний диференціальний вираз

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.1}$$

з узагальненими коефіцієнтами

$$a_i(x) = b_i'(x),\ b_i \in BV_{loc}^{+}(I),\ i = \overline{1, n}.$$

На перший погляд видається, що диференціальний вираз $L_n[y]$ є частинним випадком квазідиференціального виразу $L_{mn}[y]$ вигляду (10.1), якщо в останньому покласти $m = 0$, $a_{00}(x) \equiv 1$, $a_{i0}(x) \equiv -a_i(x)\ \forall\, i = \overline{1, n}$. Однак, в такому частинному випадку ми б отримали диференціальний вираз із сумовними[4)] за Лебегом коефіцієнтами, в той час, як у диференціальному виразі (16.1) умови на коефіцієнти суттєво послаблені. Тим не менше, результати §§ 10–15 легко адаптувати для випадку диференціального виразу (16.1), маючи згідно (10.3) на увазі, що квазіпохідні $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, диференціального виразу $L_n[y]$ збігаються зі звичайними похідними $y^{(i)}(x)$.

Найперше з'ясуємо, яке додаткове обмеження потрібно накласти на функцію $b_1(x)$, щоб диференціальне рівняння

$$L_n[y] = 0 \tag{16.2}$$

було коректним.

[4)] Зі структури матриці $C'(x)$ (див. с. 88) видно, що за рахунок гладкості функції $a_{00}(x) \equiv 1$ умову (II) можна замінити на умову $a_{i0} \in L(I)$, $i = \overline{1, n}$.

3

Векторні і матричні узагальнені квазідиференціальні рівняння

§ 17. Початкові задачі для векторних квазідиференціальних рівнянь з мірами

Розглянемо однорідне векторне КДР

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A_{ij}(x) \bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \tag{17.1}$$

де $\bar{Y} : I \to \mathbb{C}^p$ — невідома вектор-функція, $A_{ij} : I \to \mathbb{C}^{p\times p}$ — задані матричні функції, стосовно яких вимагаємо виконання таких умов:

(V) $A_{00}^{-1}(x)$ — локально обмежена і вимірна на інтервалі I;

(VI) $A_{i0}, A_{0j} \in L_{p\times p}^{2,loc}(I)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$;

(VII) $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x)$, де $B_{ij} \in BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Поруч з векторним рівнянням (17.1) розглянемо також операторне (матричне) КДР

$$L_{mn}[Y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(A_{ij}(x) Y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = 0, \tag{17.2}$$

§ 18. Лінійна теорія матричних узагальнених квазідиференціальних рівнянь

Нехай матриці-функції $\Phi_i(x)$, $k=\overline{1,q}$, та матриці-функції $\Psi_j(x)$, $l=\overline{1,q}$, є розв'язками вихідного

$$L_{mn}[Y]=0 \tag{18.1}$$

і спряженого $L^*_{mn}[Z]=0$ матричних КДР відповідно. Складемо блокові матриці

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x) \\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

та

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \cdots & \Psi_q(x) \\ \Psi_1^{\{1\}}(x) & \Psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{\{q-1\}}(x) & \Psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Визначники цих матриць $\mathcal{W}(x)=\det\Phi(x)$ і $\mathcal{V}(x)=\det\Psi(x)$ назвемо *квазівронскіанами* розв'язків $\Phi_k(x)$ і $\Psi_k(x)$ відповідно.

Теорема 18.1. *Для довільної точки $x_0\in I$ квазівронскіани $\mathcal{W}(x)$ і $\mathcal{V}(x)$ справджують рівності*

$$\mathcal{W}(x)=\mathcal{W}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{tr}\left[A_{01}(t)A_{00}^{-1}(t)-A_{00}^{-1}(t)A_{10}(t)\right]dt\right\}, \tag{18.2}$$

$$\mathcal{V}(x)=\mathcal{V}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\mathrm{tr}\left[A_{10}^*(t)A_{00}^{*-1}(t)-A_{00}^{*-1}(t)A_{10}^*(t)\right]dt\right\}. \tag{18.3}$$

§ 19. Структура фундаментальної матриці

Нехай

$$L_{mn}\big[Y(x)\big] = 0 \tag{19.1}$$

та

$$L^*_{mn}\big[Z(x)\big] = 0 \tag{19.2}$$

коректні матричні КДР, які за допомогою деяким чином введених квазіпохідних $Y^{[k]}$, $k = \overline{0,q}$, і однозначно визначених при цьому квазіпохідних $Z^{\{k\}}$ (або навпаки) зводяться до еквівалентних узагальнених диференціальних систем першого порядку

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) \tag{19.3}$$

та

$$\mathcal{Z}'(x) = -\big(\mathcal{C}'(x)\big)^*\mathcal{Z}(x)$$

відповідно, де

$$\mathcal{Y} = \big(Y, Y^{[1]}, \dots, Y^{[q-1]}\big)^\top, \quad \mathcal{Z} = \big(Z^{\{q-1\}}, \dots, Z^{\{1\}}, Z\big)^\top,$$

причому $Y, Z : I \to \mathbb{C}^{p\times p}$.

Означення 19.1. Матрицю-функцію $\mathcal{B}(x, s)$, яка за змінною x задовольняє систему (19.3) і при $x = s \in I$ початкову умову $\mathcal{B}(s, s) = E_{qp}$, називаємо *фундаментальною матрицею, що відповідає матричному КДР* (19.1).

Означення 19.2. *Матричною функцією Коші* операторного КДР (19.1) називаємо матрицю-функцію $\mathcal{K}(x, s)$, котра за змінною x є розв'зком цього рівняння і в точці $x = s \in I$ задовольняє початкові умови

$$\mathcal{K}^{[i]}(s, s) = O_p, \;\; i = \overline{0, n-2}, \qquad \mathcal{K}^{[n-1]}(s, s) = E_p. \tag{19.4}$$

§ 20. Конструкція елементів фундаментальної матриці

Для матричного КДР (19.1) довільного порядку q опишемо аналогічний до запропонованого в §14 спосіб побудови матриці-функції Коші $\mathcal{K}(x,s)$ та її мішаних квазіпохідних через фундаментальну систему розв'язків $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, цього рівняння.

Теорема 20.1. *Нехай* $\varphi_{kl}^{ij}(x)$ *— елемент, розташований на перетині* k*-го рядка та* l*-го стовпця* $(p\times p)$*-матриці* $\Phi_j^{[i-1]}(x)$, $k,l=\overline{1,p}$, $i,j=\overline{1,q}$, *а*

$$\mathcal{W}(x)=\det\left(\Phi_j^{[i-1]}(x)\right)_{i,j=1}^{q}\equiv\det\left(\left(\varphi_{kl}^{ij}(x)\right)_{k,l=1}^{p}\right)_{i,j=1}^{q}$$

— квазівронскіан ФСР. Тоді функція Коші $\mathcal{K}(x,s)$ *матричного КДР (19.1) та її мішані квазіпохідні* $\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)$ *є матрицями розміру* $p\times p$*, кожний елемент яких зображається у вигляді відношення двох функціональних визначників*

$$K_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)},\quad k,l=\overline{1,p},\quad i,j=\overline{0,q-1},$$

де кожен з визначників $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ *відрізняється від квазівронскіана* $\mathcal{W}(s)$ *лише єдиним "нестандартним" рядком*

$$\left(\varphi_{k1}^{i+1,1}(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_{kp}^{i+1,1}(x)\ \ \ldots\ldots\ \ \varphi_{k1}^{i+1,q}(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_{kp}^{i+1,q}(x)\right),$$

котрий має номер $(q-j-1)p+l$.

Доведення. Нехай

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x)\\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x)\end{pmatrix}$$

§ 21. Неоднорідне векторне квазідиференціальне рівняння з розподілами

Розглянемо векторний аналог неоднорідного КДР

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\bar{F}_k^{(k+1)}(x), \tag{21.1}$$

де матричні коефіцієнти $A_{ij}(x)$ задовольняють вказані в §17 умови (V)–(VII), а права частина справджує умову

(VIII) $\bar{F}_k \in BV^+_{loc,p}(I)\,,\ k=\overline{0,m-1}\,.$

Означення 21.1. *Квазіпохідними* векторної функції $\bar{Y}(x)$ в сенсі КДР (21.1) назвемо вектор-функції $\bar{Y}^{[k]}(x)$, $k=\overline{0,q}\,$, що визначаються за правилом

$$\bar{Y}^{[i]} = \bar{Y}^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad \bar{Y}^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}(x)\bar{Y}^{(n-i)};$$

$$\bar{Y}^{[n+j]} = -\big(\bar{Y}^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)} + \big(\bar{F}_{m-j}(x)\big)',\ j = \overline{1, m}.$$

За допомогою квазіпохідних векторне КДР записується в еквівалентному вигляді

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) + \mathcal{F}'(x), \tag{21.2}$$

де $\mathcal{Y} = \big(\bar{Y}, \bar{Y}^{[1]}, \ldots, \bar{Y}^{[q-1]}\big)^\top$, блокова матриця-міра $\mathcal{C}'(x)$ та сама, що й вище (див. с. 133), а

$$\mathcal{F}' = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \bar{F}'_{m-1}(x), \bar{F}'_{m-2}(x), \ldots, \bar{F}'_0(x)\big)^\top.$$

Зрозуміло, що узагальнена диференціальна система (21.2) коректна, бо виконуються умови (17.6) і

$$\Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

4

Структура розв'язків узагальнених квазідиференціальних рівнянь

§ 22. Системи диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями

Нехай на інтервалі I задано деяку скінченну впорядковану множину точок $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Розглянемо неоднорідну узагальнену диференціальну систему вигляду

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x-x_k)\right)Y = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} S_k\delta(x-x_k), \quad (22.1)$$

де $Y(x)$ — невідома p-вимірна вектор-функція, $\Theta_k(x)$ — характеристична функція проміжка $I_k = [x_k, x_{k+1})$, а коефіцієнти задовольняють такі умови:

(I) $A_k(x) \in C_{p\times q}(I_k), \quad k = \overline{0, N-1}$;

(II) $C_k \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad k = \overline{1, N}$;

(III) $R_k(x) \in C_p(I_k), \quad k = \overline{0, N-1}$;

(IV) $S_k \in \mathbb{C}^{p}, \quad k = \overline{1, N}$.

Через ω^* будемо позначати множину носіїв узагальнених коефіцієнтів системи (22.1). Для цієї системи поставимо початкову умову

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{22.2}$$

Відзначимо, що система (22.1) є системою вигляду (7.8). Відтак для неї справджується теорема 8.1, яку тепер можна переформулювати у такий спосіб.

Теорема 22.1. *Для існування єдиного розв'язку $Y(x)$ із допустимого класу $\mathfrak{D}^p_C(I)$ початкової задачі* (22.1), (22.2) *необхідне і достатнє виконання умов*

$$C_k^2 \equiv 0, \quad C_k S_k \equiv 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{22.3}$$

Цей розв'язок допускає зображення у формі Коші (8.2), *а його стрибки в точках $x_k \in \omega^*$ виражаються формулою*

$$\Delta Y(x_k) = C_k Y(x_k - 0) + S_k = C_k Y(x_k) + S_k. \tag{22.4}$$

Надалі будемо розглядати лише коректні системи вигляду (22.1), тобто вважатимемо умови (22.3) виконаними.

§ 23. Побудова фундаментальної матриці

Означення 23.1. Однорідну систему

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) \Theta_k(x) \right) Y(x),$$

що відповідає системі (22.1), називатимемо *визначальною*.

§ 24. Структура розв'язку неоднорідної диференціальної системи

Теорема 24.1. *Розв'язок задачі* (22.1), (22.2) *на проміжку* $[x_0, x_N)$ *подається у вигляді*

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} B_k(x,x_j)Z_j+\int_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds\right\}\Theta_k(x), \quad (24.1)$$

де

$$Z_0=Y_0, \quad Z_j=\widetilde{C}_j\int_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{B}_{j-1}(x_j,s)R_{j-1}(s)ds+S_j, \;\; j\ge 1. \quad (24.2)$$

У точці $x=x_N$ *значення розв'язку обчислюється за формулою*

$$Y(x_N)=\sum_{j=0}^{N}B_N(x_N,x_j)Z_j. \quad (24.3)$$

Доведення. Розв'язок задачі (22.1), (22.2) на проміжку $[x_0, x_N)$ шукаємо у вигляді

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{N-1}Y_k(x)\Theta_k(x), \quad (24.4)$$

де $Y_k(x)$ — розв'язок цієї задачі на проміжку $I_k=[x_k,x_{k+1})$.

На інтервалі (x_k, x_{k+1}) система (22.1) має вигляд

$$Y_k'=A_k(x)Y_k+R_k(x) \quad (24.5)$$

і відповідною їй фундаментальною матрицею є $\widetilde{B}_k(x,s)$. Розв'язок системи (24.5) можна записати у формі Коші (8.4):

$$Y_k(x)=\widetilde{B}_k(x,x_k)P_k+\int_{x_k}^{x}\widetilde{B}_k(x,s)R_k(s)ds, \quad (24.6)$$

де P_k — деякий невідомий p-вимірний вектор.

§ 25. Рекурентне представлення розв'язку

Відзначимо, що на практиці для відшукання розв'язку задачі (22.1), (22.2) замість громіздких формул (24.1)–(24.3) доцільніше користуватися описаними нижче, в теоремі 25.1, рекурентними формулами, котрі для побудови розв'язку на кожному наступному проміжку $[x_k, x_{k+1})$ вимагають додаткового обчислення лише значення розв'язку на попередньому проміжку $[x_{k-1}, x_k)$ в єдиній точці $x_k - 0$.

Теорема 25.1. *Розв'язок задачі* (22.1), (22.2) *можна знайти за такими рекурентними формулами:*

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x, x_0)Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds, \quad x \in [x_0, x_1), \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned} Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\left[\widetilde{C}_k Y_{k-1}(x_k - 0) + S_k\right] + \\ + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds, x \in [x_k, x_{k+1}), \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \tag{25.2}$$

$$Y_N(x_N) = \widetilde{C}_N Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N. \tag{25.3}$$

Доведення. При $k = 0$, тобто на проміжку $[x_0, x_1)$, система (22.1) не містить жодних узагальнених компонент, а є системою із неперевними коефіцієнтами. Відтак для її розв'язку на цьому проміжку справджується формула Коші (25.1).

При $k = 1$, тобто на інтервалі $[x_1, x_2)$, розв'язок системи (22.1) можна записати у формі Коші з невідомим початковим вектором Y_1:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1(x, x_1)Y_1 + \int\limits_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s)R_1(s)ds. \tag{25.4}$$

§ 26. Зведення крайової задачі до початкової

Доведемо твердження, на якому ґрунтується один спеціальний метод розв'язування крайових задач для системи (22.1), що полягає у зведенні крайової задачі до початкової.

Систему (22.1) розглянемо разом з крайовими умовами:

$$PY(x_0) + QY(x_N) = U, \tag{26.1}$$

де $P, Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $U \in \mathbb{C}^p$.

Теорема 26.1. *Якщо*

$$\det\bigl[P + QB_N(x_N, x_0)\bigr] \neq 0, \tag{26.2}$$

то за умов коректності (22.3) *існує єдиний розв'язок крайової задачі* (22.1), (26.1), *який зображається у вигляді* (24.1)–(24.3) *або* (25.1)–(25.3), *де початковий вектор обчислюється за формулою*

$$Y_0 = \Bigl[P + QB_N(x_N, x_0)\Bigr]^{-1}\Bigl[U - Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j\Bigr]. \tag{26.3}$$

Доведення. Згідно (24.3) маємо

$$Y(x_N) = B_N(x_N, x_0)Y_0 + \sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

звідки

$$QY(x_N) = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j.$$

Враховуючи крайову умову (26.1), одержимо рівність:

$$U - PY_0 = QB_N(x_N, x_0)Y_0 + Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j)Z_j,$$

де

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix},$$

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$

▲

§ 27. Квазідиференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами і δ-особливостями

Розглянемо узагальнене КДР

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (27.1)$$

з коефіцієнтами вигляду

1) $a_{00}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x),$

2) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x),\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i\cdot j=0;$

3) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta_k(x),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$

4) $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_r^{\,k}(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\delta_k(x),\ r=\overline{0,m-1},$

де $y\colon I \to \mathbb{C}$ — невідома функція, $\widetilde{a}_{ij}^k(x)$, $\widetilde{f}_r^{\,k}(x)$ — неперервні на проміжку $I_k = [x_k, x_{k+1})$ функції, a_{ij}^k, f_r^k — дійсні числа.

$$-\sum_{j=1}^{N-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{I}_{j-1}(x_j)+\left[\mathcal{I}_{j-1}^{[1]}(x_j)+s_j\right]\sum\limits_{i=j}^{N-1}b_i(x_{i+1},x_i)\end{pmatrix}\Bigg].$$

Після нескладних перетворень, пов'язаних з обчисленням оберненої матриці і матричного добутку, маємо

$$Z_0=\begin{pmatrix} t_0 \\ \dfrac{t_N-t_0-\sum\limits_{j=1}^{N}\mathcal{I}_{j-1}(x_j-0)-\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left(\mathcal{I}_{j-1}^{[1]}(x_j-0)+s_j\right)\sum\limits_{i=j}^{N-1}b_i(x_{i+1}-0,x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1}b_i(x_{i+1}-0,x_i)}\end{pmatrix}. \qquad (27.27)$$

Підставивши вирази (27.25)–(27.27) у формулу (27.24) і спростивши, отримаємо остаточний розв'язок крайової задачі (27.19), (27.20), перша координата якого є розв'язком $y(x)$ крайової задачі (27.17), (27.18), а друга – його квазіпохідною. ▲

§ 28. Частково вироджені квазідиференціальні рівняння

Розглянемо один спеціальний клас квазідиференціальних рівнянь.

Означення 28.1. *Частково виродженим квазідиференціальним рівнянням* назвемо рівняння вигляду (27.1)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \qquad (28.1)$$

з такими припущеннями стосовно коефіцієнтів і правої частини:

1) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}a_{ij}^k\Theta_k(x),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}, i\cdot j=0;$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

§ 29. Вироджені квазідиференціальні рівняння

Слідом за частково виродженими КДР розглянемо ще один спеціальний клас квазідиференціальних рівнянь.

Означення 29.1. *Виродженим квазідиференціальним рівнянням* назвемо рівняння вигляду

$$(-1)^m\Big(a_{00}(x)y^{(n)}\Big)^{(m)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}=$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (29.1)$$

з такими припущеннями стосовно його коефіцієнтів і правої частини:

1) $a_{00}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x), a_{00}^k(x)\in C(I_k),\ k=\overline{0,N-1}$;

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$;

3) $f_r(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\Theta_k(x),\ f_r^k\in\mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1}$.

На основі формул (15.2) запишемо квазіпохідні, відповідні виродженому КДР (29.1), із врахуванням специфіки його коефіцієнтів:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)'+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}. \quad (29.2)$$

За допомогою цих похідних вироджене КДР (29.1) звичайним чином зводиться до узагальненої диференціальної системи вигляду (28.2), причому матриці C_k і вектори S_k залишаються тими ж, а матриці $A_k(x)$ мають таку структуру:

5

Наближене розв'язування узагальнених квазідиференціальних рівнянь

§ 30. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку

Розглянемо початкову задачу

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}(x)y' - a_{11}(x)y = f'(x), \qquad (30.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad \left(a_{00}y' + a_{10}y\right)\Big|_{x=x_0} = y_0^1, \quad x_0 \in I, \qquad (30.2)$$

вважаючи, що коефіцієнти КДР (30.1) задовольняють такі припущення:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна на I функція;

(II) $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$;

(III) $a_{11}(x) = \alpha_{11}'(x)$, де функція $\alpha_{11}(x)$ належить $BV_{loc}^{+}(I)$ і має розриви першого роду у скінченній кількості точок;

(IV) $f(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$.

Введемо довільним чином сітку

$$\omega_\nu = \left\{x_k \in I,\ k = \overline{0,\nu}\ :\ x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu\right\}. \qquad (30.3)$$

§ 31. Точне рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння довільного порядку

Розглянемо початкову задачу для КДР порядку $q\ (=m+n)$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \quad (31.1)$$

$$y^{[r]}(x_0)=y_0^r, \quad r=\overline{0,q-1}, \quad x_0\in I, \quad (31.2)$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і $f_k(x)$ задовольняють вказані в §10 і §15 припущення (I)–(IV), а квазіпохідні $y^{[r]}(x)$ визначаються виразами (15.2).

Введемо сітку ω_ν вигляду (30.3) і побудуємо для початкової задачі (31.1), (31.2) деяке $(q+1)$-точкове рекурентне співвідношення

$$\alpha_k^0u(x_k)+\alpha_k^1u(x_{k+1})+\ldots+\alpha_k^qu(x_{k+q})=\eta_k, \quad k=\overline{0,\nu-q}, \quad (31.3)$$

$$u(x_0)=\varphi_0,\ u(x_1)=\varphi_1,\ \ldots\ ,\ u(x_{q-1})=\varphi_{q-1}, \quad (31.4)$$

де α_k^i, $i=\overline{0,q}$, η_k — деякі фунукціонали на просторі $BV_{loc}^{+}(I)$, а φ_j, $j=\overline{0,q-1}$, — деякі сіткові функції.

Означення 31.1. Співвідношення вигляду (31.3), (31.4) назвемо *точним рекурентним співвідношенням* (ТРС), або еквівалентною рекурентною формулою для початкової задачі (31.1), (31.2), якщо справджуються наступні умови:

1) α_k^j, $j=\overline{0,q}$, η_k — функціонали від коефіцієнтів рівняння (31.1);

2) $u(x)=y(x)$, $x\in\omega_\nu$, де $y(x)$ — точний розв'язок початкової задачі (31.1), (31.2), а $u(x)$ — розв'язок задачі (31.3), (31.2).

$$y_0=0,\ y_1=\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6};\ y_2=2h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{2}+\frac{5h^5}{4}-\frac{h^6}{3}-\frac{h^7}{9};$$
$$y_3=\frac{9h^2}{2}+\frac{9h^3}{2}+15h^4+10h^5+\frac{17h^6}{2}+ \\ +\frac{161h^7}{36}-\frac{25h^8}{6}-\frac{5h^9}{3}+\frac{2h^{10}}{9}+\frac{2h^{11}}{27}.$$

▲

§ 32. Точна двоточкова рекурентна формула

Розглянемо тепер початкову задачу (7.8), (7.9). Вибравши два довільні вузли $x_k < x_{k+1}$ сітки (30.3), на основі зображення (8.4) розв'язку початкової задачі у формі Коші отримаємо двоточкову рекурентну формулу вигляду (31.10):

$$Y_{k+1}=B_{k+1,k}Y_k+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}B(x_{k+1},t)dF(t),\ k=\overline{0,\nu-1}, \tag{32.1}$$

де Y_0 визначається з початкової умови (7.9). Рекурентна формула (32.1) є точною для задачі (7.8), (7.9) у тому сенсі, що обчислені за цією формулою значення Y_k, $k=\overline{0,\nu}$, співпадають зі значеннями точного розв'язку $Y(x)$ початкової задачі (7.8), (7.9) у вузлах x_k, $k=\overline{0,\nu}$, сітки ω_ν.

Очевидно, для однорідної початкової задачі (7.1), (7.2) точна двоточкова (двочленна) формула (ТДФ) має вигляд

$$Y_{k+1}=B_{k+1,k}Y_k,\ k=\overline{0,\nu-1}. \tag{32.2}$$

Зауваження 32.1. Варто відзначити, що двоточкова рекурентна формула (32.1) є точною також для початкової задачі (31.1), (31.2) (яка еквівалентна задачі (7.8), (7.9)), причому

§ 33. Апроксимація розв'язків квазідиференціальних рівнянь

В задачах апроксимації і, зокрема, при наближеному розв'язуванні інтегральних та диференціальних рівнянь важливу роль відіграють теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана–Стільтьєса.

Нагадаємо деякі відомі результати. Як і у випадку інтегралів Рімана, справджується

Теорема 33.1 [155, с. 69]. *Нехай* $g\in BV[a,b]$*, а послідовність функцій* $f_n(x)$ *така, що інтеграл* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *існує для* $n\in\mathbb{N}$ *і* $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$*. Тоді інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *теж існує і*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Інший варіант теореми, що не вимагає рівномірної збіжності $f_n(x)$ на відрізку $[a,b]$ виглядає так.

Теорема 33.2 [155, с. 71]. *Нехай* $g\in BV[a,b]$*, а послідовність функцій* $f_n(x)$ *має рівномірно обмежену варіацію на відрізку* $[a,b]$*, тобто* $\bigvee\limits_a^b(f_n)\leqslant V$ *при* $n\in\mathbb{N}$*, і для кожного* $x\in[a,b]$ *границя* $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$*. Якщо існують інтеграли* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *при* $n\in\mathbb{N}$ *та* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$*, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)=\int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

§ 34. Приклади побудови наближених розв'язків

Приклад 34.1. Для ілюстрації методу D-апроксимації побудуємо наближений розв'язок звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0 \tag{34.1}$$

і початковими умовами

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1, \tag{34.2}$$

та обчислимо наближене значення розв'язку цієї задачі в точці $x = 1$.

▼ *Перший спосіб.* Спочатку знайдемо наближено значення $y(1)$ розв'язку задачі Коші (34.1), (34.2) за допомогою ТДФ, в процесі побудови якої якраз і використаємо D-апроксимацію коефіцієнтів (точніше, їх первісних) диференціального рівняння (34.1).

За допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\top}$, де квазіпохідні введені, як і раніше у прикладі 31.4, — за формулами (31.16), задача Коші (34.1), (34.2) легко зводиться до початкової задачі

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{34.3}$$

$$Y(0) = (0, 0, 1, -1)^{\top}. \tag{34.4}$$

Введемо на відрізку $[0, 1]$ рівномірну сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = 1/\nu$. Застосуємо до коефіцієнтів $C_{32} = 5$ і $C_{41} = 4$ (точніше, до їх первісних $c_{32} = 5x + \text{const}$ і $c_{41} = 4x + \text{const}$) D-апроксимацію. Тоді за формулою (33.20) маємо

$$C_{32} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (5x_k - 5x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 5\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k), \quad x \in [0,1],$$

$$C_{41} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (4x_k - 4x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 4\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k), \quad x \in [0,1].$$

Відтак наближеною до диференціальної системи (34.3) буде узагальнена диференціальна система

$$Y'_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\nu. \tag{34.5}$$

Початковий вектор для наближеної системи вибираємо відповідно до початкової умови (34.4), тобто $Y_\nu(0) = Y(0)$.

Система (34.5) є системою вигляду (31.22) і, отже, для неї справджується ТДФ (див. приклад 32.2)

$$Y_\nu(x_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1 + 5h^2 & -h - \frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1 - \frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_\nu(x_k), \ \ k = \overline{0, \nu-1},$$

причому

$$Y_\nu(0) = (0, 0, 1, -1)^\top. \tag{34.6}$$

Задаючи різну кількість точок поділу, знайдемо наближене значення розв'язку задачі (34.1), (34.2) в точці $x = 1$, яке буде першою координатою вектора $Y_\nu(x_\nu)$. Отримані значення наведені в 2-му стовпці таблиці 1.

Другий спосіб. Розв'яжемо наближено задачу (34.1), (34.2) за допомогою ТРС.

Отриманій в результаті застосування D-апроксимації узагальненій диференціальній системі (34.5) відповідає вироджене КДР

$$y_\nu^{IV} - 5\left(\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*)y_\nu'\right)' + 4\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*)y_\nu = 0, \qquad (34.7)$$

яке є наближеним для рівняння (34.1).

З вигляду квазіпохідних (31.16) і початкового вектора (34.6) легко отримати такі початкові умови для рівняння (34.7):

$$y_\nu(0) = y_\nu'(0) = 0, \quad y_\nu''(0) = y_\nu'''(0) = 1. \qquad (34.8)$$

Використовуючи результати прикладу 31.5, маємо, що ТРС для початкової задачі (34.7), (34.8) виражається формулою (тут $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k),\ k = \overline{0,\nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+4} - \left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+3} + \left(6 + 10h^2 + \frac{8}{3}h^4 + \frac{5}{3}h^6\right)\widetilde{y}_{k+2} - \\ - \left(4 + 5h^2 - \frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+1} + \widetilde{y}_k = 0, \quad k = \overline{0,\nu-4},$$

$$\widetilde{y}_0 = 0,\ y_1 = \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6},\ \widetilde{y}_2 = 2h^2 + \frac{4h^3}{3} + \frac{5h^4}{2} + \frac{5h^5}{4} - \frac{h^6}{3} - \frac{h^7}{9},$$

$$\widetilde{y}_3 = \frac{9h^2}{2} + \frac{9h^3}{2} + 15h^4 + 10h^5 + \frac{17h^6}{2} + \frac{161h^7}{36} - \frac{25h^8}{6} - \frac{5h^9}{3} + \frac{2h^{10}}{9} + \frac{2h^{11}}{27}.$$

Результати, отримані цим способом при різній кількості точок поділу наведені у 4-му стовпці таблиці 1. У цій таблиці для порівняння наведені також результати (див. 6-ий стовпець), отримані при розв'язанні задачі (34.1), (34.2) класичним методом скінченних різниць. Крім того, у 3-му, 5-му і 7-му стовпцях цієї таблиці

Таблиця 1. *Наближене значення* $y(1)$ *розв'язку задачі* (34.1), (34.2)

ν	ТДФ	ε_1	ТРС	ε_2	МСР	ε_3
100	0.95240307	$4.495 \cdot 10^{-5}$	0.95240307	$4.495 \cdot 10^{-5}$	0.94704780	$5.40022 \cdot 10^{-3}$
200	0.95243678	$1.124 \cdot 10^{-5}$	0.95243678	$1.124 \cdot 10^{-5}$	0.94976818	$2.67984 \cdot 10^{-3}$
400	0.95244521	$2.81 \cdot 10^{-6}$	0.95244527	$2.75 \cdot 10^{-6}$	0.95111322	$1.33480 \cdot 10^{-3}$
800	0.95244732	$7.0 \cdot 10^{-7}$	0.95244670	$1.32 \cdot 10^{-6}$	0.95178198	$6.6604 \cdot 10^{-4}$
1600	0.95244785	$1.8 \cdot 10^{-7}$	0.95244996	$1.94 \cdot 10^{-6}$	0.95212856	$3.1946 \cdot 10^{-4}$

для зручності вказані абсолютні похибки ε_1, ε_2, ε_3 відповідно для точної двоточкової формули (ТДФ), точного рекурентного співвідношення (ТРС) і методу скінченних різниць (МСР). Відзначимо, що точне значення розв'язку задачі Коші (34.1), (34.2)

$$y(1) = -\frac{1}{3}e + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{12}e^{-2} = 0.95244802218267.$$

▲

Приклад 34.2. Розглянемо шарнірно обіпертий на двох кінцях $x=0$ і $x=\pi$ стиснутий стрижень довжини $l=\pi$ і змінної жорсткості $g(x) = \frac{c}{1+\sin x}$ $(c>0)$. Для відшукання критичного навантаження $P_{\text{кр}}$ потрібно розв'язати задачу на власні значення

$$y'' + p(1+\sin x)y = 0, \quad p = P/c, \tag{34.9}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{34.10}$$

перше власне значення якої $p_1 = P_{\text{кр}}/c$ якраз і дасть потрібний результат.

▼ *Перший спосіб.* Для відшукання наближеного розв'язку крайової задачі (34.9), (34.10) використаємо D-апроксимацію. На відрізку $[0, \pi]$ введемо рівномірну (для зручності) сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\nu}$.

Застосуємо до первісної $\alpha(x) = x - \cos x + \mathrm{const}$ коефіцієнта $a(x) = 1 + \sin x$ дискретизацію, тобто на півінтервалі $[x_k, x_{k+1})$ апроксимуємо її сталою функцією:

$$\alpha(x) \approx \alpha(x_k) = x_k - \cos x_k + \mathrm{const}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}).$$

Тоді на відрізку $[0, \pi]$ первісна $\alpha(x)$ апроксимується східчастою функцією вигляду (33.18):

$$\alpha(x) \approx \alpha_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} (x_k - \cos x_k + \mathrm{const})\Theta_k(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Знайдемо стрибок функції $\alpha_\nu(x)$ в точці $x_k = kh$ $(k = \overline{1, \nu})$:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_\nu(x_k) = \alpha_\nu(x_k) - \alpha_\nu(x_{k-1}) = x_k - \cos x_k + \mathrm{const} - \\ - (x_{k-1} - \cos x_{k-1} + \mathrm{const}) = h - \cos kh + \cos(k-1)h.\end{aligned}$$

Відтак згідно (33.20) маємо

$$a(x) \approx \alpha_\nu'(x) = \sum_{k=1}^{\nu} [h - \cos kh + \cos(k-1)h]\, \delta(x - x_k). \tag{34.11}$$

Тоді вироджене КДР

$$y_\nu'' + p \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x - x_k) y_\nu = 0,$$

де

$$\alpha_\nu^k = h - \cos kh + \cos(k-1)h = \frac{\pi}{\nu} - \cos\frac{\pi k}{\nu} + \cos\frac{\pi(k-1)}{\nu}, \tag{34.12}$$

є, очевидно, наближеним для рівняння (34.9).

Отримане КДР має вигляд рівняння з прикладу 30.6 (див. задачу (30.22)), в якому

$$c_0 = 0, \quad c_k = p\alpha_\nu^k, \ x_k^* = x_k \ (k = \overline{1, N}, \ N = \nu).$$

Тому ТРС для цього рівняння визначається формулою (30.25), де на підставі (30.24) $M_k = -c_k = -p\alpha_\nu^k$, відтак співвідношення (30.25) запишеться у вигляді (тут $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k), \ k = \overline{0, \nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+1} - (2 - ph\alpha_\nu^k)\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu - 1}. \tag{34.13}$$

З крайової умови на лівому кінці $y(0) = 0$ маємо $\widetilde{y}_0 = 0$. Вибравши $\widetilde{y}_1$ рівним довільній ненульовій константі [4)] (н-д, $\widetilde{y}_1 = 1$), із рекурентної формули (34.13) знайдемо $\widetilde{y}_\nu = y_\nu(\pi)$, яке, очевидно, залежатиме від p, тобто $\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_\nu(p)$. Тоді з крайової умови $y(\pi) = 0$ отримаємо *характеристичне рівняння* $\widetilde{y}_\nu(p) = 0$, корені якого (тобто власні значення p) можна знайти, н-д, методом поділу відрізка навпіл.

У таблиці 2 для порівняння наведені результати, отримані (при $\nu = 1600$) різними методами: МВ — *метод Вайнштейна*, МФ — *метод Фікера*, МР — *метод Рітца*, MD — *метод D-апроксимації.*

Другий спосіб. Для порівняння побудуємо наближений розв'язок крайової задачі (34.9), (34.10), використовуючи інший спосіб апроксимації коефіцієнтів — L-апроксимацію.

Застосуємо до функції $\alpha(x) = x - \cos x + \mathrm{const}$ лінеаризацію, тобто на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ наблизимо її відрізком прямої, що

[4)] Позаяк власні функції визначаються з точністю до сталого множника.

Таблиця 2. *Власні значення задачі* (34.9), (34.10); $\nu=1600$

p	MB	MФ	MP	MD
p_1	0.54031883	0.54031789	0.54031885	0.54031883
p_2	–	–	–	2.37174805
p_3	5.4486360	5.4477473	5.4486362	5.4486358
p_4	–	–	–	9.762195318
p_5	15.312608	15.292913	15.312608	15.3120518

проходить через точки $\big(x_k, \alpha(x_k)\big)$ і $\big(x_{k+1}, \alpha(x_{k+1})\big)$. Тоді на підставі формули (33.17) маємо

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{h - \cos\,(k+1)h + \cos kh}{h}\,\Theta_k(x)$$

або в позначеннях (34.12)

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x). \tag{34.14}$$

Тоді вихідне рівняння (34.9) апроксимується КДР

$$y''_\nu + p\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x) y_\nu = 0, \tag{34.15}$$

Останнє є частинним випадком рівняння (30.1), а тому ТРС для нього матиме вигляд (30.20)–(30.21). Для побудови функції Коші $\widetilde{K}_\nu(x,s)$ КДР (34.15) на проміжку $[x_k, x_{k+1})$, тобто рівняння

$$y''_\nu + p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,y_\nu = 0,$$

скористаємось результатами прикладу 14.2. Оскільки на відрізку $[0,\pi]$ функція $\cos x$ монотонно спадає, то $\cos x_{k+1} < \cos x_k$. Тоді,

$$\widetilde{y}_{k+1} - 2\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu-1},$$

де, як і раніше, $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0, \nu}$.

Далі для відшукання власних значень задачі (34.9), (34.10) так само, як і в першому способі, побудуємо за допомогою аналогічної процедури характеристичне рівняння і використаємо метод поділу відрізка навпіл.

У таблиці 3 наведено результати наближеного відшукання першого власного значення за допомогою L- і D-апроксимації (див. таблицю 2).

Таблиця 3. *Перше власне значення задачі* (34.9), (34.10)

ν	*D-апроксимація*	*L-апроксимація*
100	0.54031183	0.54057761
200	0.54031710	0.54038353
400	0.54031842	0.54033503
800	0.54031875	0.54032290
1600	0.54031883	0.54031987

▲

Зауваження 34.3. Задачу (34.9), (34.10) можна розв'язати також і за допомогою точної двоточкової формули, побудованої для відповідної наближеної системи, котру можна отримати шляхом як D-, так і L-апрокисмації. Пропонуємо читачеві розв'язати задачу цими методами самостійно і порівняти отримані результати зі значеннями, наведеними у таблиці 3.

Наступний модельний приклад ілюструє необхідність використання L-апроксимації.

Приклад 34.4. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описує вал в слабко деформованому стані під дією стиску і скруту [**47**, с. 26]

$$\begin{cases} -g(x)z'' = Pz - My', \\ -g(x)y'' = Py + Mz', \end{cases} \tag{34.16}$$

де $g(x) = (1 + \sin x)^{-1}$ — жорсткість на згин, P — стискаюча сила, M — крутильний момент. Для валу довжини $l = \pi$ із закріпленими кінцями крайові умови для системи (34.16) мають вигляд

$$z(0) = z(\pi) = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{34.17}$$

Відомо, що під дією достатньо великого крутильного моменту M вал може втрачати стійкість у формі гвинтоподібної лінії: зі зростанням крутильного моменту спочатку має місце лише скручування, а далі при певному критичному крутильному моменті вісь гвинтоподібно деформується. Якщо вал до того ж зазнає впливу з боку осьової стискаючої сили $(P > 0)$, то ця гвинтоподібна деформація наступає раніше, тобто при меншій величині крутильного моменту. Навпаки, поява розтягуючої осьової сили $(P < 0)$ збільшує критичний момент, підвищуючи тим самим стійкість валу.

Використовуючи D- і L-апроксимацію, знайдемо співвідношення між параметрами P і M, яке, власне, й слугуватиме умовою стійкості валу.

▼ Введемо матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді крайову задачу (34.16), (34.17) можна записати у векторному вигляді наступним чином:

$$\bar{Y}'' + A(x)\bar{Y}' + B(x)\bar{Y} = 0, \tag{34.18}$$

$$\bar{Y}(0) = \bar{Y}(\pi) = 0,$$

де $\bar{Y} = (z, y)^{\top}$, $A(x) = M(1 + \sin x)J$, $B(x) = P(1 + \sin x)E_2$. Далі розглянемо матричне диференціальне рівняння, асоційоване до рівняння (34.18) (див. §17),

$$Y'' + A(x)Y' + B(x)Y = 0, \tag{34.19}$$

разом з крайовими умовами

$$Y(0) = Y(\pi) = O_2. \tag{34.20}$$

За допомогою вектора $\mathcal{Y} = (Y, Y')^{\top}$ рівняння (34.19) зведемо до узагальненої диференціальної системи першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -B(x) & -A(x) \end{pmatrix} \mathcal{Y}. \tag{34.21}$$

Введемо на відрізку $[0, \pi]$ рівномірну сітку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

з кроком $h = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\nu}$. Щоб знайти наближений розв'язок системи (34.21), застосуємо D-апроксимацію до елемента $B(x)$. Позаяк

$$B(x) = \begin{pmatrix} P(1 + \sin x) & 0 \\ 0 & P(1 + \sin x) \end{pmatrix}$$

і $P = \mathrm{const}$, то дискретизацію застосовуємо до первісної для функції $1+\sin x$. При цьому скористаємось отриманою в прикладі 34.2 апроксимацією (34.11):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=1}^{\nu}[h-\cos kh+\cos(k-1)h]\delta(x-x_k).$$

Тоді

$$B_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) & 0 \\ 0 & P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k)\end{pmatrix} =$$

$$= P\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta_k(x-x_k)\cdot E_2, \quad (34.22)$$

де $\alpha_\nu^k = h-\cos kh+\cos(k-1)h$.

До елемента $A(x)$ застосувати D-апроксимацію не вийде, бо при цьому матриця стрибків наближеної системи мала б вигляд

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -\Delta B_\nu & -\Delta A_\nu \end{pmatrix}$$

і, очевидно, не задовольняла б умову коректності (див. (17.6)):

$$\left[\Delta\mathcal{C}_\nu(x)\right]^2 = 0 \quad \forall\, x\in[0,\pi].$$

Саме тому застосуємо до елемента $A(x)$ L-апроксимацію. Позаяк

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -M(1+\sin x) \\ M(1+\sin x) & 0 \end{pmatrix},$$

то лінеаризувати будемо знову первісну функції $1+\sin x$. Лише тепер застосуємо отриману в прикладі 34.2 апроксимацію (34.14):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x).$$

враховуючи, що $p > 0$, маємо

$$p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h} = p\,\frac{h - \cos(k+1)h + \cos kh}{h} > 0,$$

тому за формулою (14.5) знаходимо

$$\widetilde{K}_\nu(x,s) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Позаяк квазіпохідні в сенсі рівняння (34.15) і спряженого до нього рівняння (див. §11) визначаються за формулами

$$y_\nu^{[1]}(x) = y_\nu'(x), \quad z_\nu^{\{1\}}(s) = -z_\nu'(s),$$

то

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x,s) = \frac{\partial \widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial \widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial s} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial^2 \widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x \partial s} = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Тоді

$$\widetilde{K}_\nu(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu(x_k,x_{k-1}) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_k,x_{k-1}) = \cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = \cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}.$$

Підставивши останні вирази у формулу (30.20) і врахувавши на підставі (30.7), що $M_k = 0$, після спрощення отримаємо

Тоді

$$A_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} 0 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) \\ M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)\cdot J. \quad (34.23)$$

Використовуючи вирази (34.22) та (34.23), запишемо диференціальну систему

$$\mathcal{Y}_\nu' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k)\cdot E_2 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)\cdot J \end{pmatrix}\mathcal{Y}_\nu, \quad (34.24)$$

яка, очевидно, є апроксимацією системи (34.21).

Нехай $\mathcal{B}_\nu(x,s)$ — фундаментальна матриця системи (34.24). За аналогією до (32.2) побудуємо ТДФ

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1})\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), \quad k=\overline{1,\nu}. \quad (34.25)$$

На підставі властивості (d) фундаментальної матриці (див. теорему 3.2) і структури матриці стрибків системи (34.24)

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & O_2 \end{pmatrix}$$

маємо

$$\mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1}) = (E_4 + \Delta\mathcal{C}_\nu(x_k))\,\mathcal{B}_\nu(x_k-0, x_{k-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}), \quad (34.26)$$

де $\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x,s)$ — фундаментальна матриця визначальної системи на проміжку $[x_{k-1},x_k)$, тобто системи

$$\mathcal{Y}'_{\nu}=\begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ O_2 & -M\frac{\alpha_{\nu}^k}{h}\cdot J \end{pmatrix}\mathcal{Y}_{\nu}. \tag{34.27}$$

Підставляючи вираз (34.26) у ТДФ (34.25), отримаємо співвідношення

$$\mathcal{Y}_{\nu}(x_k)=\begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_{\nu}^k E_2 & E_2 \end{pmatrix}\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x_k,x_{k-1})\mathcal{Y}_{\nu}(x_{k-1}),\ k=\overline{1,\nu}. \tag{34.28}$$

Побудуємо фундаментальну матрицю $\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x,s)$, використовуючи теорему 19.4. Для цього знайдемо матрицю-функцію Коші $\widetilde{\mathcal{K}}_{\nu}^{k-1}(x,s)$ КДР

$$Y''_{\nu}+M\frac{\alpha_{\nu}^k}{h}JY'_{\nu}=0, \quad 1\leqslant k\leqslant \nu, \tag{34.29}$$

що еквівалентне системі (34.27). Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що функція Коші цього КДР визначається виразом

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{\nu}^{k-1}(x,s)=\left(J_{\nu}^k\right)^{-1}\left[E_2-e^{-J_{\nu}^k(x-s)}\right],$$

де $J_{\nu}^k=M\frac{\alpha_{\nu}^k}{h}J$, $k=\overline{1,\nu}$. Врахуємо також, що квазіпохідні в сенсі рівняння (34.29) і спряженого до нього рівняння відповідно до (17.3) та (17.13) мають вигляд

$$Y_{\nu}^{[1]}(x)=Y'_{\nu}(x), \quad Z_{\nu}^{\{1\}}(s)=-Z'_{\nu}(s)+J_{\nu}^kZ_{\nu}(s).$$

Тоді на підставі теореми 19.4 фундаментальна матриця системи (34.27) має вигляд

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x,s)=\begin{pmatrix} E_2 & \left(J_{\nu}^k\right)^{-1}\left[E_2-e^{-J_{\nu}^k(x-s)}\right] \\ O_2 & e^{-J_{\nu}^k(x-s)} \end{pmatrix},$$

звідки

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\nu}^{k-1}(x_k, x_{k-1}) = \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix}$$

Підставляючи цю матрицю у формулу (34.28), отримаємо ТДФ для системи (34.24) (яка водночас є наближеною для системи (34.21)):

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k h}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k h} \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}). \quad (34.30)$$

Можна показати (див., н-д, [**33**, с. 54]), що

$$e^{-tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

тому

$$e^{-J_\nu^k h} = e^{-M\alpha_\nu^k J} = \begin{pmatrix} \cos M\alpha_\nu^k & \sin M\alpha_\nu^k \\ -\sin M\alpha_\nu^k & \cos M\alpha_\nu^k \end{pmatrix} =$$

$$= \cos M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - \sin M\alpha_\nu^k \cdot J.$$

Обчислимо також $\left(J_\nu^k\right)^{-1}$:

$$\left(J_\nu^k\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h} \\ M\frac{\alpha_\nu^k}{h} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{M\alpha_\nu^k} \\ -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} J.$$

Якщо ці вирази підставити в (34.30) і виконати множення блокових матриць, то ТДФ набуде вигляду

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & G_\nu^k \\ -P\alpha_\nu^k \cdot E_2 & H_\nu^k \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), k = \overline{1, \nu}, \quad (34.31)$$

де

$$G_\nu^k = \frac{h}{M\alpha_\nu^k} \left[\sin M\alpha_\nu^k \cdot E_2 - (1 - \cos M\alpha_\nu^k) \cdot J\right],$$

$$H_\nu^k = \left[\cos M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}\sin M\alpha_\nu^k\right]E_2 -$$
$$- \left[\sin M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}(1 - \cos M\alpha_\nu^k)\right]J.$$

З крайової умови (34.20) на лівому кінці випливає, що перша компонента блокового вектора $\mathcal{Y}_\nu(0)$ дорівнює O_2. Вибравши другу компоненту цього вектора рівною довільній ненульовій (скажімо, одиничній) матриці, так що $\mathcal{Y}_\nu(0) = (O_2, E_2)^\top$, за рекурентною формулою (34.31) знайдемо $\mathcal{Y}_\nu(\pi)$, яке, очевидно, залежатиме від параметрів P і M. Тоді з крайової умови (34.20) на правому кінці отримаємо рівняння

$$\det \mathcal{Y}_\nu^1(P, M) = 0,$$

де $\mathcal{Y}_\nu^1(P, M)$ — перша блокова компонента вектора $\mathcal{Y}_\nu(\pi; P, M)$. Це і є *характеристичне рівняння* для визначення P та M. Послідовно задаючи значення крутильного моменту M, будемо обчислювати значення осьової стискаючої сили P. При $M = 0$ чи $P = 0$ вихідна задача значно спрощується і тому розв'язується окремо. В таблиці 4 наведені числові результати, а на рис. 1 — крива залежності значень P від значень M.

Наостанок зауважимо, що у випадку, коли вал має сталий поперечний переріз і відтак $g(x) = \mathrm{const}$, задача (34.16), (34.17) досліджувалась у роботі [**13**], де отримано умову стійкості у вигляді співвідношення

$$\frac{M^2}{4g^2} + \frac{P}{g} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

▲

Таблиця 4. *Залежність між параметрами P і M*

M	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
P	0.540	0.539	0.536	0.530	0.522	0.512	0.499	0.484
M	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
P	0.467	0.448	0.426	0.402	0.376	0.347	0.317	0.283
M	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.09	
P	0.248	0.210	0.170	0.128	0.083	0.036	0	

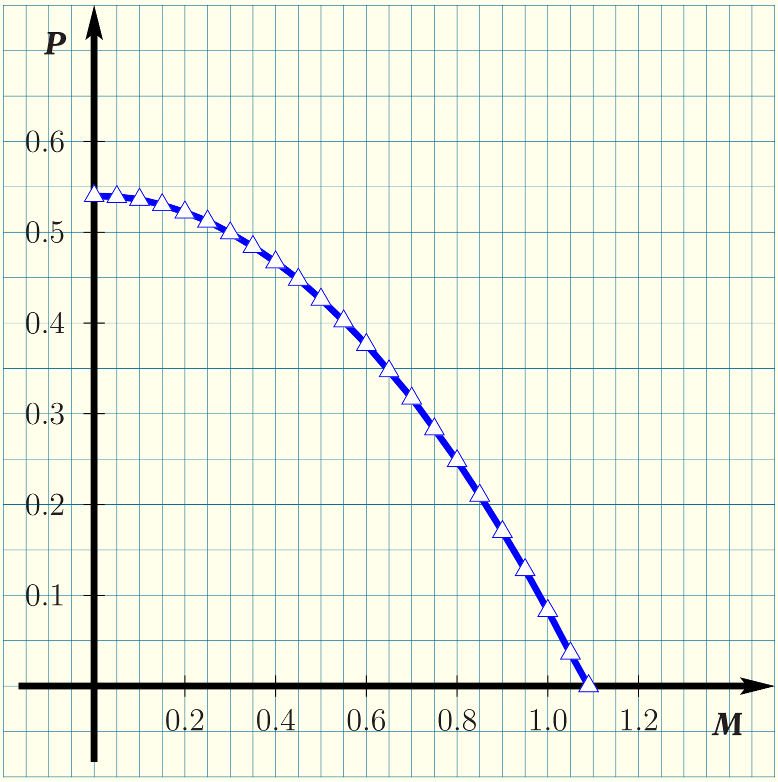

Рис. 1. Крива залежності стискаючої сили від крутильного моменту

Бiблiоґрафiя

[1] Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, №2. – С. 267–270. 30

[2] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 311 с. 29, 45, 67, 236

[3] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с. 19, 23, 24, 28, 39, 48, 51, 54, 56, 71

[4] Ахиезер Н. И. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи мат. наук. – 1941. – №9. – С. 126-–156. 15

[5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 544 с. 15, 16

[6] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. – Х.: ГНТИУ, 1938. – 265 с. 15

[7] Ахметов М. У., Перестюк Н. А., Тлеубергенова М. А. Управление линейными импульсными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 307–314. 27

[8] Ахметов М. У., Сеилова Р. Д. Ранговые признаки управляемости для краевой задачи линейной системы интегродифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №6. – С. 723–730. 27

[9] Ашордиа М. Т. О задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикл. матем. – Тбил. ун., 1987. – №22. – С. 5–41. 30

[10] Багмут И. Г. Разностные схемы высокого порядка точности для уравнений типа Лежандра // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1972. – Т.12, №3.34

[11] Балоян Н. М., Молокович Ю. М. К вопросу о разностных схемах высокого порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особенностью // Изв. ВУЗов. Математ. – 1975. – №7. – С. 10–18. 34

[12] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Изд. ИЛ, 1954. – 216 с.

[13] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: Пер. с нем. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1950. – 900 с. 272

[14] Брук В.М. О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ. – 1975. – 5. – С. 25–33. 19

[15] Бурханов Ш. А., Макаров В. Л. О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, №9. – С. 1502–1514. 33

[16] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с. 45, 67, 236

[17] Власій О. О. Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2005. – №540. – С. 62–64. 6, 11, 26

[18] Власій О. О., Мазуренко В. В. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.73–86. 6, 11, 26

[19] Власий О. О., Мазуренко В. В., Таций Р. М. Об одном классе дискретно-непрерывных краевых задач для векторных квазидифференциальных уравнений // Актуальные проблемы современного анализа: Сб. научн. Трудов. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2009. – С.19–36. 6, 11, 26

[20] Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – №.660 – С.34–38. 6, 11

[21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с. 132

[22] Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технол., 1999. – 372 с. 12

[23] Глазман И. Об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1949. – Т.64, №2. – С. 151–154. 14

[24] Глазман И. М. К теории сингулярных дифференциальных операторов // Успехи. мат. наук. – 1950. – Т.5, №6(40). – С. 102–135. 15

[25] Годев К. Н., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями // Матем. сборник. – 1986. – Т. 131(173), №2(10). – С. 159–184. 34, 35

[26] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАН України. – 2009. – №5. – С. 16–21. 25

[27] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173–207. 25

[28] Голощапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. – 2011. – V. 90, №1. – P. 151–156. 25

[29] Голощапова Н. И., Оридорога Л. Л. Одномерный оператор Шрёдингера с δ- и δ'-взаимодействиями // Мат. заметки. – 2008. – V. 84, №1. – P. 127–131. 25

[30] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №4. – С. 19–24. 26

[31] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №9. – С. 27–31. 26

[32] Гохман Э. Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. – М.: ГИФМИ. – 1958.

[33] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с. 53, 271

[34] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: неосциляция решений. – Ижевск, 1984. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ, №1749. 22

[35] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи. – Ижевск, 1984. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ, №2994. 22

[36] Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №11. – С. 1861–1872. 22

[37] Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэфициентах // Доклады АН СССР. – 1988. – Т.298, №2. – С. 269–272. 22

[38] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с. 22

[39] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5(275). – С. 3–40. 30, 45

[40] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы, модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с. 27, 29, 30

[41] Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. – Львів: Вид.-во НУ"ЛП 2001. – 244 с. 168

[42] Исследование сложных непрерывно-дискретных ситстем / Кухта К.Я. и др. – Киев: Наук. думка, 1981. – 272 с. 12

[43] Кац И. С. Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели // Функц. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, №2. – С. 74–78. 24

[44] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. К вопросу о дефектных числах симметрических дифференциальных операторов с комплексными коэффициентами // Матем. физ. и функц. ан. – 1971. – 2. – С. 45–60. 15, 19

[45] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка: Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур. – Харьков, 1973. – 60 с. 15, 19

[46] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. ИЛ, 1958. – 474 с. 108

[47] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 503 с. 12, 147, 266

[48] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с. 39, 45, 247, 248

[49] Корнеев В. Г. О точных сеточных схемах // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1982. – Т. 22, №3. – С. 646–654. 34

[50] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II // Матем. сборник. – 1947. – Т. 20(62), №3. – С.431–495; Т. 21(63), №3. – С. 365–404. 15, 16

[51] Крейн М. Г. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74, №1. – С. 9–12. 15

[52] Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Г.С. и др. – К.: Вища шк., 1974. – 472 с. 108, 123, 169, 186

[53] Кутнів М. В. Про точність триточкових різницевих схем m-го рангу для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 43–49. 34

[54] Кутнів М. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2002. - Вип. 4. – С. 61–66. 34

[55] Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60. 34

[56] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ярославского унив. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144. 30

[57] Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщенные интегралы. – 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2011. – 280 с. 249

[58] Мазуренко В. Про коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. – 2000. – Т. 2. – С. 255–259. 6, 11, 26

[59] Мазуренко В. В. Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доповіді НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22. 6, 11

[60] Мазуренко В. В., Таций Р. М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. – С. 328–336. 6, 11

[61] Мазуренко В.В., Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Про властивості матриці Ґріна систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Вісник Прикарпатського університету: Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 21–29. 6, 11, 26

[62] Макаров В.Л., Макаров И.Л., Приказчиков В.Г. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, №7. – С. 1194–1205. 33

[63] Макаров В.Л., Гаврилюк И.П., Лужных В.М. Точные и усеченные разностные схемы для задачи Штурма-Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, №7. – С. 1265–1275. 34

[64] Махней О.В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25. 6, 11

[65] Махней О.В. Узагальнений несамоспряжений оператор другого порядку на півосі // Вісник Львів. нац. універ. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 92–101. 6, 11

[66] Махней О.В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 147–156. 6, 11

[67] Махней О.В. Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.64–72. 6, 11, 26

[68] Махней А. В., Таций Р. М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №8. – С. 1044–1051. 6, 11, 26

[69] Махней О. В., Тацій Р. М. Розвинення за власними векторфункціями у випадку простих власних значень сингулярного квазідиференціального оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №3. – С. 16–27. 6, 11, 26

[70] Махней О. В., Тацій Р. М. Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №2. – С. 179–187. 6, 11, 26

[71] Махней О. В., Тацій Р. М. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Математичні студії. – 2007. – Т. 29, №2. – С. 165–174. 6, 11, 26

[72] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1954. – 352 с. (2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 528 с.) 15, 16, 84

[73] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с. 28, 39, 41, 247

[74] Нижник Л. П. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева // Функц. ан. и его прил. – 2006. – V. 40, №2. – С. 74–79. 25

[75] Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием // Функц. ан. и его прил. – 2003. – V. 37, №1. – С. 85–88. 24

[76] Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с. 12, 79

[77] Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 92, №3. – С. 483–486. 15

[78] Орлов С. А. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №3. – С. 538–541. 15, 17

[79] Орлов С. А. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №6. – С. 1175–1177. 15, 17

[80] Перестюк Н. А., Остапенко Е. В. Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №8. – С. 1112–1118. 27

[81] Радыно Н. Я. О решениях линейных дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, содержащих медленно растущие распределения // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. н. – 1999. – №1. – С. 18–22. 30

[82] Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1969. – 8. – С. 3–24. 15, 18

[83] Самойленко А. М., Бойчук А. А. Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 564–568. 27

[84] Самойленко А. М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, №1. – С. 63–67. 27

[85] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Наукова думка, 1987. – 287 с. 27

[86] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с. 156

[87] Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И. Проблема "биений" в импульсных системах: Препр. / АН УССР. Ин-т мат. – 1990. – №11. – С. 1–46. 27

[88] Слюсарчук В. Е. Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №7. – С. 954–964. 27

[89] Стасюк М. Ф. Структура розв'язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 33–36. 6, 26

[90] Стасюк М. Ф., Власій О. О. Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 82–87. 6, 11, 26

[91] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. До дослідженя коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 43–47. 6

[92] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Структура решений обобщенного квазидифференциального уравнения 2-го порядка //

Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1984. – №182. – С. 120–122. 6, 26

[93] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С. 89–90. 6, 74

[94] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1990. – №242. – С. 91–92. 6

[95] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами – узагальненими функціями вищих порядків // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1991. – № 251. – С. 111–113. 6, 26

[96] Стасюк М., Тацій Р. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник НУ "Львів. політех.": Фіз.-мат. науки. – Вип. 566. – 2006. – С. 33–40. 6

[97] Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ. – 1994. – №2-94. – С. 1–54. 6, 26

[98] Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. Держ. ун-т ім. І.Франка. - Львів, 1994. – 37 с. 28, 32, 74

[99] Тацій Р. М., Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №4. – С. 49–55. 6, 11, 26

[100] Тацій Р. М., Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – №9. – С. 17–20. 6, 11, 26

[101] Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165–167. 6

[102] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, №1. – С. 43–53. 6, 11, 26

[103] Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – 16, №1. – С. 61–75. 6, 11, 26

[104] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1989. – №4. – С. 25–28. 6, 26

[105] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1991. – №1. – С. 16–19. 6, 26

[106] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Живічинські М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 18–27. 6, 11, 26

[107] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1996. – №229. – С. 165–170. 6, 11, 26

[108] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1998. – №346. – С. 120–124. 6, 11, 26

[109] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 163–173. 6, 11, 26

[110] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2004. – №518. – С. 30–35. 6, 26

[111] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В., Мазуренко В. В. Узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 21–27. 6, 11

[112] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Про порядок зростання розв'язків звичайного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами як функцій параметра // Вісник НУ "Львів. політех.": Прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 311–317. 6, 11

[113] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2009. – №10. – С. 7–37. 6, 26

[114] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №3. – С. 514–517. 33, 35

[115] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №1. – С. 5–63. 10, 33, 35

[116] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №3. – С. 425–440. 33, 35

[117] Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Уч. пособ. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с. 10, 34, 35

[118] Самарский А. А. Теория разностных схем: Уч. пособ. – М.: Наука, 1977. – 656 с. 221, 228, 236

[119] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с. 26, 29

[120] Фихтегольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2 – М.: Физматлит, 2001. – 810 с. 211

[121] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с. 53

[122] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с. 27, 28, 29, 39, 46, 47

[123] Шилов Г. Е. Математический анализ. 2-й спец. курс. – М.: Изд.МГУ, 1984. – 201 с.

[124] Шин Д. Теорема существования квази-дифференциального уравнения n-го порядка // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 515–518. 12, 82

[125] Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu, I(l) \neq 0$, принадлежащих к

$L_2(0,\infty)$ // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 519–522. 12, 82

[126] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 523–526. 12, 82

[127] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), №3. – С. 479–527. 13, 82

[128] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), №1. – С. 39–70. 13, 14

[129] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов // Известия АН СССР. Серия математ. – 1955. – 19. – С. 201–220. 15, 17

[130] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 115, №1. – С. 67–70. 15, 17

[131] Штраус А. В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Известия АН СССР. Серия математ. – 1957. – 21. – С. 785–808. 15, 17

[132] Штраус А. В. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 155, №4. – С. 771–774. 15, 17

[133] Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №8. – С. 1132–1135. 27

[134] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix

by Pavel Exner. – 2nd revised ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p. 25

[135] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. 25

[136] Antosik P., Ligeza J. Products of measures and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, 1975. Sofia, 1979. – P. 20–26. 29, 31

[137] Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1989. – 372 p. 30

[138] Everitt W. N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910-1976 // Differential Equations (Proceedings of The 1977 Uppsala International Conference). – P. 62–81, 20

[139] Everitt W. N. Linear ordinary quasi-differential expressions. – Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Equations and Differential Geometry. – Science Press, University of Beijing, P.R. China, 1986. – P. 1–28. 20, 21

[140] Everitt W. N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators // Math. Surveys and Monographs. – Vol. 61. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 20, 21

[141] Everitt W. N., Muldowhey I. S., Thandi N. Factorization of quasi-differential operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 113, No. 1. – P. 93–98. 20, 21

[142] Everitt W. N., Race D. Some remarks on linear ordinary quasi-differential expressions // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 3-54, No. 2. – P. 300–320. 20, 21

[143] Everitt W. N., Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1979. – Vol. 27, No. 3. – P. 363–397. 20, 21

[144] Everitt W. N., Zettl A. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line // Proc. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 3-64, No. 3. – P. 524–544. 20, 21

[145] Fang H. The existence of periodic solutions of impulsive differential equations of mixed type // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2000. – Vol. 21, No. 3. – P. 291–296. 27

[146] Feller W. On second order differential operators // Ann. Math. – 1955. – Vol. 61. – P. 90–105. 24

[147] Feller W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions // Ill. J. Math. – 1957. – Vol. 1, No. 4. – P. 459–504. 24

[148] Feller W. The birth and death processes as diffusion processes // Journ. Math. Pur. Appl. – 1959. – Vol. 38. – P. 301–345. 24

[149] Frayer C., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V., Perry P. A. Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, No. 11. – 115007 (25 p). 25

[150] Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L. Three point difference schemes of variable order for nonlinear BVPs on the half axis. Technical Report // Friedrich Schiller University Jena, Department of Mathematics and Computer Science; 05 04, 2005. – P. 1–37. 34

[151] Goloschapova N., Oridoroga L. On the Negative Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators with Point Interactions // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – Vol. 67. – P. 1–14. 25

[152] Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43, No. 15. – 155204 (14 p). 25

[153] Halas Z., Tvrdý M. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter // Funct. Differ. Equ. – 2009. – Vol. 16, No. 2. – P. 299–313. 249

[154] Hildebrandt T. H. On systems of linear differentio-Stiltjes-integral equations // Illinois Journ. Math. – 1959. – Vol. 3, No. 3. – P. 352–373. 30, 52, 58, 98, 138

[155] Hildebrandt T. H. Introduction to the theory of integration. – Academic Press, New York – London, 1963. – 385 p. 43, 246

[156] Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 238, No. 1. – P. 27–57. 25

[157] Kodaira K. On ordinary differential equations of any even order and the correponding eigenfunction expansions // Amer. J. Math. – 1950. – Vol. 72. – P. 502–544. 20, 21

[158] Kostenko A. S., Malamud M. M. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differ. Equatios. – 2010. – Vol. 241, No. 2. – P. 253–304. 25

[159] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. – 1958. – Vol. 8, No. 3. – P. 360–388. 30

[160] Ligeza J. Cauchy's problem for system of linear differential equations with distributional coefficients // Coloq. math. – 1975. – Vol. 33, No. 2. – P. 295–303. 28, 29, 31

[161] Ligeza J. On distributional solution of some systems of linear differential equuatios // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, No. 1. – P. 37–41. 29, 31

[162] Ligeza J. Generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombean algebra // Math. Bochem. – 1993. – Vol. 118, No. 2. – P. 123–146. 30

[163] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, No. 4. – P. 464–493. 34

[164] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Jenaer schriften zur mathematik und informatik. Eingag: 03.03. – 2003. – P. 1–24. 34

[165] Makhney O. V., Tatsiy R. M. The Structure of Cauchy Function of a Vector Quasidifferential Equation // Matematychni Studii. – 2004. – Vol. 21, No. 1. – P. 221–224. 6, 11, 26

[166] Mazurenko V., Stasyuk M., Tatsiy R. On boundary value problem for the system of ordinary differential equations with distributions as coefficients // Matematychni Studii. – 2009. – Vol. 31, No. 1. – P. 65–74. 6, 11, 26

[167] Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, No. 2. – P. 184–200. 25

[168] Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2009. – Vol. 15, No. 1. – P. 31–40. 25

[169] Ogurisu O. On the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator with point interactions // Lett. Math. Phys. – 2008. – Vol. 85. – P. 129–133. 25

[170] Pandit S. G. Differential systems with impulsive perturbations // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 86, No. 2. – P. 553–560. 27

[171] Pandit S. G., Deo S. G. Differential systems involving impulses / Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 954. – Springer-Verlag, Berlin, 1982. – 102 p. 30

[172] Rofe-Beketov F. S., Kholkin A. M. Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties. – USA: World Scientific, 2005. – 438 p. 19

[173] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, No. 6. – P. 814–832. 25

[174] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the properties of mappings associated with inverse Sturm-Liouville problems // Proc. Steklov. Inst. Math. – 2008. – Vol. 261. – P. 218–237. 25

[175] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Inverse Problems for Sturm–Liouville Operators with Potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability // Func. Analysis and Its Applications. – 2010. – Vol. 44, No. 4. – P. 270–285. 25

[176] Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. Differential and Integral Equations. – Praha: Academia, 1979. – 249 p. 30

[177] Stallard S. Functions of bounded variations as solutions of differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 366–373. 30

[178] Stone M. H. Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. – New York: A.M.S., 1932. – 622 p. 15

[179] Šeba P. Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, No. 1. – P. 111–120. 25

[180] Titchmarsh E. C. A problem in relativistic quantum mechanics // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 3-11, No. 1. – P. 169–192. 25

[181] Tvrdý. Differential and integral equations in the space of regulated functions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 25. – P. 1–104. 248

[182] Walker Ph. W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 9, No. 1. – P. 151–159. 18, 20

[183] Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugenhörigen Entwicklungen Willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1910. – 68. – S. 220-269. 14

[184] Weidmann J. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren // Math. Zeitschr. – 1967. – Vol. 98, No. 4. – S. 268–302. 20

[185] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators / Lecture Notes in Mathematics, 1258. – Springer-Verlag, 1987. – 303 p. 20

[186] Windau W. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die dazugehörigen Darstellungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1921. – 83. – S. 256–279. 14

[187] Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mount. Journal of Math. – 1975. – Vol. 5. – P. 453–474. 20, 21

[188] Zolotaryuk A. V., Christiansen P. L., Iermakova S. V. Scattering properties of point dipole interactions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – Vol. 39. – P. 9329–9338. 25

[189] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187–191. 25

[190] Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ'-potential // Phys. Lett. A. – 2010. – Vol. 374, No. 15-16. – P. 1636–1641. 25

Іменний покажчик

Предметний покажчик

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Роман Мар’янович Тацій
Марта Федорівна Стасюк
Віктор Володимирович Мазуренко
Олеся Орестівна Власій

УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Дизайн обкладинки *Олеся Тацій*
Технічні редактори *Віктор Мазуренко, Олеся Власій*
Головний редактор *Василь Слюсарчук*

Підписано до друку 23.08.2011. Формат видання 60×84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ґарнітура «CM PsCyr».
Умовн. друк. арк. 17,4. Наклад 300 прим.

Видавництво «Коло»
Свідоцтво ДК №498 від 20.06.2001
вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Україна, 82100
тел./факс: (03244) 2-90-60
e-mail.: koloopera@gmail.com