Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра диференціальних рівнянь
і прикладної математики

Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В.

КУРС ЛЕКЦІЙ
з навчальної дисципліни
"Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь"

Івано-Франківськ
2008

Лекція 1.
Постановка задачі про наближене розв’язування диференціальних рівнянь. Метод послідовних наближень. Метод степеневих рядів

План.

1. Постановка задачі про наближене розв’язування диференціальних рівнянь.
2. Метод послідовних наближень.
3. Метод степеневих рядів.

1. Постановка задачі про наближене розв’язування диференціальних рівнянь. Відомо, що навіть диференціальні рівняння першого порядку, інтегровані у квадратурах (а в елементарних функціях і поготів), складають лише незначну частину всіх звичайних диференціальних рівнянь. Для більшості ж диференціальних рівнянь відшукати розв’язок, який задовольняє задані умови (наприклад, початкові або крайові), за допомогою скінченної кількості операцій неможливо. Тому природно виникла потреба у створенні методів наближеного розв’язування диференціальних рівнянь. Методи побудови наближених розв’язків диференціальних рівнянь з наперед заданою точністю називають ***наближеними методами*** інтегрування рівнянь. Ці методи залежно від форми представлення розв’язку умовно можна розділити на ***аналітичні, графічні, числові***.

Аналітичні методи дають можливість представити наближені розв’язки диференціальних рівнянь із заданою точністю у вигляді аналітичних виразів (формул), придатних для обчислення значень цих розв’язків в області зміни аргументу. Окремий клас серед аналітичних методів складають ***асимптотичні методи***, де точність отриманого розв’язку зростає із зменшенням проміжку інтегрування чи проміжку зміни деяких параметрів, або ж, навпаки, наближений розв’язок тим точніший, чим більших значень набуває аргумент або деякі інші параметри.

Графічні методи дають наближене представлення шуканого розв’язку на деякому проміжку у вигляді графіка, який можна побудувати за певними правилами, пов’язаними з геометричним тлумаченням умов задачі. Для певних класів диференціальних рівнянь в основу графічних методів наближеного розв’язку можна покласти фізичне (точніше, електротехнічне) тлумачення заданих умов. Реалізовуючи на технічному рівні задані електричні процеси, на екрані осцилографа спостерігають поведінку розв’язків рівнянь, що описують ці процеси.

Найбільш важливими у наш, характерний бурхливим розвитком обчислювальної техніки, час, є ***числові методи*** розв'язування диференціальних рівнянь. Такі методи передбачають отримання числової таблиці наближених значень шуканого розв'язку для певних дискретних значень аргумента, тобто заміну неперервної області зміни аргумента функції дискретною множиною точок (сіткою) та апроксимацію (наближення) диференціального оператора різницевим оператором, визначеним на цій сітці.

2. Метод послідовних наближень. Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Відомо, що задача знаходження розв'язку задачі (1), (2) рівносильна задачі знаходження неперервного розв'язку інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Рівняння (3) будемо розв'язувати ***методом послідовних наближень*** (***методом ітерацій***), який полягає у наступному. Виберемо спочатку деяку функцію $y_0(x)$, яка задовольняє умову (2). Цю функцію назвемо ***нульовим (початковим) наближенням***. Потім підставимо $y_0(x)$ у праву частину формули (3) і матимемо ***перше наближення***:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,\mathrm{d}t.$$

Аналогічно, маючи перше наближення $y_1(x)$, знайдемо друге наближення $y_2(x)$ і так далі. Для *n*-го наближення одержуємо рекурентне співвідношення

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Якщо $f(x, y)$ в області *Q*, яка містить точку (x_0, y_0), задовольняє умови теореми Пікара, то незалежно від вибору нульового наближення функціональна послідовність $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ рівномірно збігається на відрізку $|x - x_0| \le h$ до функції $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$, яка є розв'язком задачі Коші (1), (2).

Оцінимо похибку $\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|$ наближеного розв'язку $y_n(x)$, використовуючи при цьому формули (3), (4) та умову Ліпшіца

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L\,|y_1 - y_2|:$$

$$\varepsilon_n(x) \le \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \right| \mathrm{d}t \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(5)}$$

Враховуючи тепер початкове наближення $y_0(x) \equiv y_0$ та формулу Лагранжа про скінченний приріст, маємо:

$$\varepsilon_0(x) = | y(x) - y_0 | = | y'(\xi) | \cdot | x - x_0 | = | f(\xi, y(\xi)) | \cdot | x - x_0 | \le M \, | x - x_0 |,$$

де $M = \max\limits_{(x,y)\in Q} | f(x,y) |$. Далі з (5) одержуємо

$$\varepsilon_1(x) \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_0(t)\,\mathrm{d}t \le LM \int_{x_0}^{x} | t - x_0 |\,\mathrm{d}t = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Звідси встановлюємо оцінку похибки наближеного розв'язку $y(x)$ на відрізку $| x - x_0 | \le h$:

$$\varepsilon_n(x) \le ML^n \frac{| x - x_0 |^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \textbf{(6)}$$

де $h = \min\{a, b/M\}$.

Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти наближений розв'язок задачі Коші $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3), замінимо задачу Коші інтегральним рівнянням

$$y(x) = \int_0^x (t + 2y^2)\,\mathrm{d}t.$$

За початкове наближення візьмемо $y_0(x) \equiv 0$. За формулою (4) знаходимо наступні послідовні наближення:

$$y_1(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}, \qquad y_2(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{2} \right) \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} \quad \text{і т.д.}$$

Оцінимо похибку цих наближень. Оскільки права частина рівняння визначена і неперервна на всій площині, то в якості чисел a та b (параметрів області Q) можна взяти довільні додатні числа. Візьмемо для визначеності прямокутник $Q = \{(x,y) : | x | \le 0{,}5, \, | y | \le 0{,}5\}$. Тоді

$$M = \max_{(x,y)\in Q} \left| f(x,y) \right| = \max_{(x,y)\in Q} \left| x + 2y^2 \right| \le \max_{(x,y)\in Q} \left(| x | + 2y^2 \right) \le 1,$$

$$L = \max_{(x,y)\in Q} \left| f'_y(x,y) \right| = \max_{(x,y)\in Q} \left| 4y \right| \le 4 \max_{(x,y)\in Q} | y | \le 2.$$

Оскільки $h = \min\{a, b/M\}$, то виберемо $h = 0{,}5$. Таким чином, для знаходження розв'язку на відрізку $[-0,5;0,5]$ з точністю, наприклад, до 0,01, число n необхідно вибрати так, щоб виконувалась нерівність (6), тобто $\frac{2^n(0,5)^{n+1}}{(n+1)!}<0,01.$ Для цього досить взяти $n=4$. ■

Наступний приклад показує, що в окремих випадках методом послідовних наближень розв'язок задачі Коші можна знайти точно.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші $y'=x-y$, $y(0)=1$.

Розв'язання. Нехай $y_0(x)\equiv 1$. За формулою (4) знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x)=1+\int_0^x(t-1)\,\mathrm{d}t=1-x+\frac{x^2}{2},\qquad y_2(x)=1+\int_0^x\left(t-1+t-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t=1-x+x^2-\frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x)=1-x+x^2-x^3/3+x^4/24,\qquad y_4(x)=1-x+x^2-x^3/3+x^4/12-x^5/120.$$

За допомогою методу математичної індукції можна встановити, що

$$y_n(x)=1-x+2\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\quad n=2,3,\ldots$$

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, маємо

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=1-x+2\left(e^{-x}-(1-x)\right)=2e^{-x}-1+x.\ ■$$

Метод послідовних наближень можна застосовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь, а також для розв'язування рівняння n-го порядку, якщо його записати у вигляді системи.

Приклад 3. Методом послідовних наближень на відрізку $[-0,5;0,5]$ з точністю до 0,05 знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} y'=x+yz,\\ z'=x^2-y^2\end{cases}$$

з початковими умовами $y(0)=1,\ z(0)=0,5$.

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді

$$y=1+\int_0^x(t+yz)\,\mathrm{d}t,\qquad z=\frac{1}{2}+\int_0^x(t^2-y^2)\,\mathrm{d}t.$$

Враховуючи початкові умови, з заданої системи знаходимо $y'(0)=0,5$ і $z'(0)=-1$, тому за початкові наближення $y_0(x),\ z_0(x)$ виберемо

$$y_0(x)=1+\frac{x}{2},\quad z_0(x)=\frac{1}{2}-x.$$

Знайдемо наближення $y_1(x)$ і $z_1(x)$:

$$y_1(x)=1+\int_0^x\left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}\,x=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{6}x^3,$$

$$z_1(x)=\frac{1}{2}+\int_0^x\left(x^2-1-x-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3.$$

Аналогічно одержуємо

$$y_2(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3-\frac{5}{96}x^4+\frac{11}{240}x^5+\frac{11}{576}x^6-\frac{1}{168}x^7,$$

$$z_2(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{96}x^4+\frac{29}{960}x^5+\frac{1}{144}x^6-\frac{1}{252}x^7.$$

Оцінимо тепер різниці $y_1(x)-y_2(x)$ і $z_1(x)-z_2(x)$ на відрізку $[-0,5;0,5]$. Будемо мати:

$$|y_1(x)-y_2(x)|=\left|-\frac{7}{48}x^3-\frac{5}{96}x^4+\frac{11}{240}x^5+\frac{11}{576}x^6-\frac{1}{168}x^7\right|\le$$

$$\le\left|x^3\right|\cdot\left|\frac{7}{48}+\frac{5}{96}x+\frac{1}{168}x^4\right|\le 0,03,$$

$$|z_1(x)-z_2(x)|=\left|-\frac{1}{12}x^3+\frac{5}{96}x^4+\frac{29}{960}x^5+\frac{1}{144}x^6-\frac{1}{252}x^7\right|\le$$

$$\le\left|x^3\right|\cdot\left|\frac{1}{12}+\frac{1}{252}x^4\right|\le 0,02.$$

Враховуючи, що доданки, які містять степені x вище третього, на вибраному відрізку є досить малими, то з точністю до 0,05 можна обмежитися лише трьома першими наближеннями, тобто

$$y(x)\approx 1+0,5x+0,125x^2-0,312x^3,\quad z(x)\approx 0,5-x-0,5x^2+0,167x^3.\ \blacksquare$$

До наближеного розв'язування систем рівнянь можна звести розв'язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Приклад 4. Знайти два перші наближення розв'язку задачі Коші $y''=xy$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

Розв'язання. Якщо позначити $y'=z$, то задану задачу Коші можна записати у вигляді системи $\begin{cases}y'=z,\\ z'=xy\end{cases}$ з початковими умовами $y(0)=1,\ \ z(0)=1$. Оскільки з цієї системи випливає, що $z'(0)=0$, то виберемо такі нульові наближення:

$$y_0(x) = 1 + x, \quad z_0(x) = 1.$$

Записуючи систему у вигляді

$$y(x) = 1 + \int_0^x z(t)\,\mathrm{d}t, \qquad z(x) = 1 + \int_0^x t\,y(t)\,\mathrm{d}t,$$

знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot \mathrm{d}t = 1 + x, \qquad z_1(x) = 1 + \int_0^x t(1+t)\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Тоді одержуємо

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4. \ \blacksquare$$

Відзначимо дві характеристики методу послідовних наближень, які можна віднести до його недоліків. По-перше, через проблеми з ефективним знаходженням первісних у явному вигляді рекурентні формули (4) не завжди можуть бути реалізовані. По-друге, цей метод є локальним, тобто придатним для наближеного розв’язку задачі Коші лише у малому околі початкової точки. Більше значення цей метод має для доведення існування та єдиності розв’язку задачі Коші. Окрім цього, метод послідовних наближень буває необхідним для теоретичного дослідження інших методів наближеного розв’язування диференціальних рівнянь, а також є допоміжним засобом для дослідження інших наближених методів, які застосовуються на порівняно більших відрізках інтегрування.

3. Метод степеневих рядів. Розв’язуючи наближено диференціальні рівняння першого порядку, а також рівняння вищих порядків, іноді використовують представлення шуканого розв’язку у вигляді ряду Тейлора, залишаючи у ньому певну кількість доданків.

Розглянемо задачу Коші (1),(2) і припустимо, що функція $f(x, y)$ як функція двох змінних є нескінченно диференційовною у деякому околі точки (x_0, y_0). Тоді розв’язок $y = y(x)$ цієї задачі є аналітичною функцією в деякому околі точки $y'' = f'_x + f'_y \cdot y'$ x_0, тобто може бути розвинений у ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Частинна сума цього ряду буде наближеним розв’язком задачі (1), (2).

Коефіцієнт $y(x_0)$ розвинення (7) одержуємо з початкової умови: $y(x_0)=y_0$. З (1) знаходимо коефіцієнт $y'(x_0)$: $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$.

Диференціюючи рівняння (1) за змінною x, знаходимо, що , а отже, $y''(x_0)=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot f(x_0,y_0)$. Повторюючи цей прийом крок за кроком, зможемо знайти значення наступних похідних у точці $x=x_0$, тобто коефіцієнти $y'''(x_0)$, …, $y^{(n)}(x_0)$, …, а отже, формально побудувати аналітичний розв'язок $y(x)$.

Метод степеневих рядів можна використовувати також для наближеного розв'язування задачі Коші для рівняння n-го порядку:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right) \tag{8}$$

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y'_0,\ \ ...\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{9}$$

у припущенні, що права частина рівняння аналітична в точці $\left(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)}\right)$. При цьому з умов (9) безпосередньо визначаємо значення $y^{(j)}(x_0)$, $j=0,1,...,n-1$, які фігурують у перших n коефіцієнтах розвинення (9), а значення $y^{(n)}(x_0)$ знайдемо з рівняння (8), підставляючи $x=x_0$ і використовуючи початкові умови (9): $y^{(n)}(x_0)=f\left(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)}\right)$. Для знаходження $y^{(n+1)}(x_0)$ потрібно здиференціювати (9):

$$y^{(n+1)}(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,y^{(k)}}{\mathrm{d}\,x}, \tag{10}$$

підставити $x=x_0$ і використати початкові умови (9). Диференціюючи (10), можемо знайти також наступні похідні, а отже, й їх значення у точці x_0.

Приклад 5. Методом степеневих рядів знайти розв'язок задачі Коші $y'=x+2y^2$, $y(0)=0$.

Розв'язання. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді ряду

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

Безпосередньо з початкової умови маємо $y(0)=0$. З рівняння та початкової умови одержуємо, що $y'(0)=0+2y^2(0)=0$. Диференціюючи обидві частини заданого рівняння, одержуємо $y''=1+4yy'$, а отже, $y''(0)=1+4y(0)\cdot y'(0)=1$. Диференціюючи тепер послідовно обидві частини рівняння, знаходимо:

$$y''' = 4(y')^2 + 4yy'', \qquad y'''(0) = 0,$$

$$y^{(IV)} = 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy'' = 12y'y'' + 4yy''', \qquad y^{(IV)}(0) = 0,$$

$$y^{(V)} = 12(y'')^2 + 16y'y''' + 4yy^{(IV)}, \qquad y^{(V)}(0) = 12.$$

Якщо обмежитись першими шістьма членами розвинення, тобто степенями *x* до п'ятого степеня включно, то

$$y(x) \approx \frac{x^2}{2!} + \frac{12x^5}{5!} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10},$$

що згідно з результатами прикладу 2 гарантує точність 0,1 на відрізку $[-0,5;0,5]$. ■

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння методом степеневих рядів можна знайти точно.

Приклад 6. Наближено розв'язати задачу Коші $y' = x - y, \ \ y(0) = 1.$

Розв'язання. З рівняння та початкової умови знаходимо: $y'(0) = 0 - y(0) = -1.$ Диференціюючи рівняння і підставляючи $x = 0$, одержуємо:

$$y'' = 1 - y', \quad y''(0) = 1 - y'(0) = 2, \qquad y''' = -y'', \quad y'''(0) = -y''(0) = -2.$$

У загальному випадку для маємо: $y^{(n)} = -y^{(n-1)}$, $y^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2$.

Таким чином, використовуючи (7), знаходимо шуканий розв'язок

$$y(x) = 1 - x + 2\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - x + 2\left(e^{-x} - (1-x)\right) = 2e^{-x} - 1 + x,$$

який визначений на всій числовій осі. ■

Розв'язок задачі Коші (1), (2) можна також шукати у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами, тобто у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \ . \qquad \textbf{(11)}$$

Проілюструємо застосування такого варіанту методу степеневих рядів до задачі Коші з прикладу 6. Якщо $x_0 = 0$, то з умови $y(0) = 1$ знаходимо $a_0 = 1$. Отже, (11) запишеться у вигляді

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \ . \qquad \textbf{(12)}$$

Тоді $y'(x) = a_1 x + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$. Підставляючи знайдені вирази для *y* та y' у рівняння $y' = x - y$, одержуємо тотожність

$$a_1 x + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots \equiv x - (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, для відшукання коефіцієнтів a_k, $k=1,2,...$, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь: $a_1=-1,2$, $a_2=1-a_1$, $3a_3=-a_2$, ..., $na_n=-a_{n-1}$, ... , з якої послідовно можна знайти усі коефіцієнти розвинення (12) або обмежитися декількома першими членами такого розвинення.

Метод степеневих рядів можна використовувати також для наближеного розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь. У цьому випадку у ряд Тейлора необхідно розвинути кожну з шуканих функцій, а потім послідовно визначити похідні однакового порядку для всіх функцій описаним вище способом. При цьому диференціювати доведеться кожне з рівнянь системи.

Приклад 7. Розв'язати наближено систему рівнянь $y'=x+yz$, $z'=x^2-y^2$ з початковими умовами $y(0)=1$, $z(0)=0,5$, обмежившись для кожної функції чотирма членами розвинення у ряд Тейлора.

Розв'язання. Функції $y(x)$ і $z(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+... \qquad \textbf{(13)}$$

$$z(x)=z(0)+\frac{z'(0)}{1!}\cdot x+\frac{z''(0)}{2!}\cdot x^2+...+\frac{z^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+... \qquad \textbf{(14)}$$

Безпосередньо з початкових умов знаходимо $y(0)=1$, $z(0)=0,5$.

Розв'язуючи задачу (3), було встановлено, що $y'(0)=0,5$, $z'(0)=-1$.

Здиференціюємо тепер обидва рівняння системи за змінною x і підставимо в отримані вирази $x=0$. Будемо мати:

$$y''=1+y'z+yz', \quad y''(0)=1/4, \qquad z''=2x-2yy', \qquad z''(0)=-1.$$

Диференціюючи ще один раз, знаходимо

$$y'''=y''z+2y'z'+yz'', \quad y'''(0)=-15/8, \qquad z'''=2-2(y')^2-2yy'', \quad z'''(0)=7/2.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у ряди (13), (14), одержуємо остаточні наближені формули:

$$y(x)\approx 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3, \qquad z(x)\approx\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{16}x^3. \ \blacksquare$$

Розглянемо застосування степеневих рядів до розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків.

Приклад 8. Знайти перші п'ять членів розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y''=xy$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Розв’язання. Розв’язок шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

З умови $y(0) = 1$ знаходимо, що $a_0 = 1$.

Оскільки $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$, то $a_1 = 1$.

Ще раз здиференціюємо одержану рівність і підставимо y та y'' у задане рівняння. Будемо мати:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots =$$
$$= x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots \right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, для визначення решти коефіцієнтів a_n одержуємо систему

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 1, \quad 12a_4 = 1, \quad \ldots, \quad n(n-1)a_n = a_{n-3}, \quad \ldots$$

з якої, зокрема, знаходимо $a_2 = 0$, $a_3 = 1/6$, $a_4 = 1/12$. Отже,

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4. \ \blacksquare$$

Для деяких числових методів інтегрування диференціальних рівнянь потрібно знайти значення шуканих функцій у декількох точках. Ці значення можуть бути знайдені за допомогою степеневих рядів. Таким чином, метод розвинення розв’язків у степеневі ряди може бути використаний як елемент більш ефективних числових методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, наприклад методу Адамса, методу Мілна та деяких інших, які вивчатимуться на наступних лекціях.

Лекція 2.

Метод Чаплигіна двосторонніх наближень.

Метод Чаплигіна є одним з найбільш точних аналітичних методів наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Ідея цього методу полягає у тому, що шуканий розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння апроксимується двома послідовностями функцій $u_n(x)$ та $v_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, які для $x \in [x_0, X]$ задовольняють нерівності

$$u_n(x) \le y(x) \le v_n(x)$$

і початкові умови

$$u_n(x_0) = v_n(x_0) = y(x_0),$$

причому при $n \to \infty$ різниця $v_n(x) - u_n(x)$ рівномірно на $[x_0, X]$ прямує до нуля.

Геометрично це означає, що для $x \in [x_0, X]$ інтегральна крива потрапляє у деякий криволінійний сектор – вилку. При цьому вказується спосіб, за допомогою якого цю вилку можна звузити до потрібних розмірів.

Якщо покласти, наприклад, $y(x) \approx v_n(x)$, то похибка $\varepsilon_n(x)$ такого наближення

$$\varepsilon_n(x) \le v_n(x) - u_n(x),$$

а отже, на кожному кроці її можна встановити безпосередньо.

Проілюструємо застосування цього методу до розв'язування задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Вважатимемо, що функція $f(x, y)$ неперервна разом з частинними похідними $f'_y(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ у деякому околі початкової точки (x_0, y_0). Для точок з цього околу визначимо диференціальний оператор за формулою

$$A[z] = z' - f(x, z).$$

Лема (Чаплигіна). *Якщо функція* $u = u(x)$ *задовольняє умови*

$$A[u] \le 0, \quad x_0 \le x \le X, \tag{2}$$

$$u(x_0) = y_0, \tag{3}$$

то на відрізку $[x_0, X]$ *виконується нерівність*

$$u(x) \le y(x), \tag{4}$$

де $y(x)$ *– розв'язок задачі (1).*

Доведення. З (1) та (2) маємо

$$(y-u)'-\big(f(x,y)-f(x,u)\big)\ge 0$$

або

$$(y-u)'-p(x)(y-u)\ge 0, \qquad (5)$$

де

$$p(x)=\frac{f(x,y(x))-f(x,u(x))}{y-u}. \qquad (6)$$

Оскільки для тих x, де $y(x)=u(x)$, вираз (6) втрачає зміст, то у цьому випадку покладемо

$$p(x)\equiv\lim_{u\to y}\frac{f(x,y)-f(x,u)}{y-u}=f_y'(x,y(x)).$$

Визначена таким чином функція $p(x)$ є, очевидно, неперервною на всьому відрізку $[x_0,X]$.

Помножимо обидві частини нерівності (5) на

$$\mu(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(x)\,\mathrm{d}x}$$

і запишемо одержану нерівність у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\mu(x)\cdot\big(y(x)-u(x)\big)\Big)\ge 0. \qquad (7)$$

Зінтегруємо (7) у межах від x_0 до x. Будемо мати:

$$\mu(x)\cdot\big(y(x)-u(x)\big)-\mu(x_0)\cdot\big(y(x_0)-u(x_0)\big)\ge 0. \qquad (8)$$

Оскільки $y(x_0)=u(x_0)$ і $\mu(x)>0$, то з (8) одержуємо нерівність (4). ►

Аналогічно можна довести, що якщо $A[v]\ge 0$, де $v=v(x)$, $x_0\le x\le X$, і $v(x_0)=y_0$, то на відрізку $[x_0,X]$ справджується нерівність $y(x)\le v(x)$.

Як наслідок з леми Чаплигіна одержуємо таке твердження.

Теорема 1. *Якщо функції* $y=y(x)$, $u=u(x)$, $v=v(x)$ *на відрізку* $[x_0,X]$ *є розв'язками диференціальних рівнянь*

$$y'=f(x,y),\ u'=f_1(x,u),\ v'=f_2(x,v) \qquad (9)$$

відповідно, де $f_1(x,z)\le f(x,z)\le f_2(x,z)$, *та задовольняють спільну початкову умову*

$$y(x_0)=u(x_0)=v(x_0)=y_0,$$

то

$$u(x)\le y(x)\le v(x),\quad x\in[x_0,X]. \qquad (10)$$

Не завжди вдається такими способами одержати відразу достатньо "вузькі" межі для розв'язку $y(x)$, а тому виникає потреба у покращенні цих меж. Чаплигін запропонував спосіб, як маючи знайдені наближення $u_0(x)$ і $v_0(x)$, одержати покращенні наближення $u_1(x)$ і $v_1(x)$.

Для цього припустимо, що $f''_{y^2}(x,y) \geq 0$, а функції $u_0 = u_0(x)$ і $v_0 = v_0(x)$ є такі, що

$$A[u_0] = -\varphi_0(x) \leq 0, \qquad A[v_0] = \psi_0(x) \geq 0, \tag{11}$$

причому

$$u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0 .$$

Наприклад, для функції $f(x,y)$, яка неперервна в області

$$Q = \{(x,y): x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}, \tag{12}$$

такими функціями можуть бути

$$u_0(x) = y_0 + m \cdot (x - x_0), \quad v_0(x) = y_0 + M \cdot (x - x_0),$$

де

$$m = \min_{(x,y)\in Q} f(x,y), \quad M = \max_{(x,y)\in Q} f(x,y).$$

Якщо при цьому

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{m}, \frac{b}{|M|}\right\},$$

то на відрізку $[x_0, x_0 + h]$ умови (11) будуть виконані.

Перейдемо тепер до уточнення наближень. Для цього позначимо

$$u_1(x) = u_0(x) + \rho_0(x),$$
$$v_1(x) = v_0(x) - \sigma_0(x),$$

де функції $\rho_0 = \rho_0(x)$ та $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ визначимо як розв'язки задач Коші

$$\rho_0' = p_0(x)\rho_0 + \varphi_0(x), \quad \rho_0(x_0) = 0, \tag{13}$$

$$\sigma_0' = q_0(x)\sigma_0 + \psi_0(x), \quad \sigma_0(x_0) = 0, \tag{14}$$

відповідно, де

$$p_0(x) = f_y'(x, u_0(x)), \qquad q_0(x) = \frac{f(x, v_0(x)) - f(x, u_0(x))}{v_0(x) - u_0(x)}. \tag{15}$$

З (13), (14), використовуючи формулу для загального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку, одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p_0(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_0(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p_0(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x, \quad \textbf{(16)}$$

$$\sigma_0(x) = e^{\int_{x_0}^{x} q_0(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \int_{x_0}^{x} \psi_0(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} q_0(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \quad \textbf{(17)}$$

Оскільки функції $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ невід'ємні, то з (16), (17) випливає, що

$$\rho_0(x) \ge 0,\ \sigma_0(x) \ge 0,\ \ x_0 \le x \le X.$$

У [3] (розділ 3, § 13) доведено, що на відрізку $[x_0, X]$ справджуються нерівності

$$A[u_1] \le 0,\ A[v_1] \ge 0.$$

Таким чином, $u_1(x)$ і $v_1(x)$ є відповідно нижнім і верхнім наближенням до точного розв'язку y і утворюють вужчу вилку, ніж функції $u_0(x)$ і $v_0(x)$.

Зрозуміло, що описаний процес може бути продовжений. А саме, якщо відомі функції $u_n(x)$ та $v_n(x)$, то можна покласти

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \rho_n(x), \qquad v_{n+1}(x) = v_n(x) - \sigma_n(x), \quad \textbf{(18)}$$

де функції $\rho_n(x)$, $\sigma_n(x)$ визначаються з задач

$$\rho'(x) = p_n(x)\rho_n + \varphi_n(x), \quad \rho_n(x_0) = 0, \quad \textbf{(19)}$$

$$\sigma'(x) = q_n(x)\sigma_n + \psi_n(x), \quad \sigma_n(x_0) = 0 \quad \textbf{(20)}$$

відповідно, де

$$\varphi_n(x) = -A[u_n],\ \ \psi_n(x) = A[v_n],$$

$$p_n(x) = f_y'(x, u_n), \qquad q_n(x) = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n}.$$

У результаті одержуємо дві функціональні послідовності

$$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le \ldots \le y,$$

$$y \le \ldots \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0.$$

Можна довести, що при $n \to \infty$ різниця $v_n - u_n$ досить швидко прямує до нуля. А отже, якщо $v_n - u_n < \varepsilon$, то наближено можна покласти

$$y \approx \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Якщо оцінювати похибку немає потреби, то можна обмежитися лише однією з послідовностей, покладаючи, наприклад, $y \approx u_n$.

Зауважимо, що у випадку, коли $f''_{y^2}(x,y)\le 0$, функції u_n та v_n у попередніх викладках потрібно поміняти місцями.

Приклад 1. Методом Чаплигіна на відрізку $[0;0,5]$ розв'язати задачу Коші $y'=x+2y^2, \quad y(0)=0.$

Розв'язання. Маємо

$$f(x,y)=x+2y^2, \quad f''_{y^2}(x,y)=4>0,$$

$$A[z]=z'-x-2z^2.$$

Нехай

$$u_0(x)=0, \; v_0(x)=x.$$

Тоді

$$A[u_0]=-x\equiv-\varphi_0(x)\le 0, \quad A[v_0]=1-x-2x^2\equiv\psi_0(x)\ge 0$$

для $x\in[0;0,5]$

Далі знаходимо

$$p_0(x)=f'_y(x,u_0)=4u_0=0,$$

$$q_0(x)=\frac{f(x,v_0)-f(x,u_0)}{v_0-u_0}=\frac{(x+2v_0^2)-(x+u_0^2)}{v_0-u_0}=2(u_0+v_0)=2x.$$

Використовуючи формули (16), (17), одержуємо

$$\rho_0(x)=\int_0^x x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2},$$

$$\sigma_0(x)=e^{\int_0^x 2x\,\mathrm{d}x}\cdot\int_0^x(1-x-2x^2)e^{-\int_0^x 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=e^{x^2}\cdot\int_0^x(1-x-2x^2)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^x xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^x x\,\mathrm{d}(e^{-x^2})\right)=$$

$$=e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}-1\right)+xe^{-x^2}-\int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)=-\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{1}{2}+x.$$

Звідси знаходимо

$$u_1(x)=\frac{x^2}{2}, \qquad v_1(x)=x-\left(\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}e^{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right).$$

Оцінимо різницю

$$v_1(x)-u_1(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x^2}-1\right)-\frac{x^2}{2}.$$

Оскільки

$$\left(v_1(x)-u_1(x)\right)'=x\left(e^{x^2}-1\right)\geq 0$$

для $x\in[0;0,5]$, то

$$\max_{x\in[0;0,5]}\left(v_1(x)-u_1(x)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{4}}-1\right)-\frac{1}{8}\approx 0,017,$$

а отже, функція

$$y(x)\approx\frac{1}{2}\left(u_1(x)+v_1(x)\right)=\frac{1}{4}\left(e^{x^2}-1+x^2\right)$$

на відрізку $[0;0,5]$ є наближенням розв'язку задачі (3.21) з точністю до 0,01. ■

Суттєвим недоліком методу Чаплигіна є те, що він часто приводить до появи інтегралів, які не можуть бути знайдені у скінченному вигляді. У деяких випадках ці труднощі вдається подолати так, як це було зроблено при знаходженні функції $\sigma_0(x)$ з інтегралом $\int_0^x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ у прикладі 1. В інших випадках такі інтеграли доводиться обчислювати наближено.

У наступному прикладі точний розв'язок лінійного рівняння першого порядку методом Чаплигіна знаходимо вже на першому кроці.

Приклад 2. Методом Чаплигіна розв'язати задачу Коші $y'=x-y$, $y(0)=1$ у прямокутнику $Q=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, |y-1|\leq 1\}$.

Розв'язання. Тут

$$f(x,y)=x-y,\;\; f''_{y^2}(x,y)=0,\;\; A[z]=z'-x+z.$$

Оскільки

$$m=\min_{(x,y)\in Q}f(x,y)=-2,\quad M=\max_{(x,y)\in Q}f(x,y)=1,$$

то покладемо

$$u_0(x)=1-2x,\quad v_0(x)=1+x.$$

Тоді для $x\in[0;1]$

$$A[u_0]=-1-3x\equiv-\varphi_0(x)\leq 0,$$

$$A[v_0]=2\equiv\psi_0(x)\geq 0.$$

Далі знаходимо

$$p_0(x)=f'_y(x,u_0)=-1,$$

$$q_0(x) = \frac{f(x,v_0) - f(x,u_0)}{v_0 - u_0} = \frac{(x - v_0) - (x - u_0)}{v_0 - u_0} = -1.$$

Використовуючи формули (16), (17), одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{-\int_0^x \mathrm{d}x} \cdot \int_0^x (3x+1) e^{\int_0^x \mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x = 2e^{-x} + 3x - 1,$$

$$\sigma_0(x) = e^{-\int_0^x \mathrm{d}x} \cdot \int_0^x 2 e^{\int_0^x \mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x = -2e^{-x} + 2.$$

Звідси

$$u_1(x) = 1 - 2x + (2e^{-x} + 3x - 1) = 2e^{-x} + x - 1,$$

$$v_1(x) = 1 + x - (-2e^{-x} + 2) = 2e^{-x} + x - 1.$$

Отже,

$$y(x) = 2e^{-x} + x - 1. \blacksquare$$

Лекція 3.
Метод Ейлера та його модифікації. Різницеві методи.

План.

1. Метод Ейлера та його модифікації.
2. Загальні поняття теорії різницевих схем.
3. Різницева схема Ейлера та її застосування.

1. Метод Ейлера та його модифікації. На попередніх лекціях розглядались аналітичні методи розв'язування задачі Коші. ***Метод Ейлера*** відноситься до числових методів, які дозволяють знайти розв'язок у вигляді таблиці наближених значень шуканої функції.

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Виберемо достатньо малий крок h і побудуємо сукупність рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{2}$$

У методі Ейлера наближені значення $y(x_i) \approx y_i$ обчислюють послідовно за формулами

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{3}$$

При цьому шукану інтегральну криву $y = y(x)$, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, наближено замінюємо ламаною $M_0 M_1 M_2 \dots$ з вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Кожний відрізок $M_i M_{i+1}$ цієї ламаної, яку називатимемо ***ламаною Ейлера***, має напрям, який співпадає з напрямом тієї інтегральної кривої рівняння з (1), яка проходить через точку M_i. У теорії диференціальних рівнянь доведено, що якщо функція $f(x, y)$ неперервна, то послідовність ламаних Ейлера при $h \to 0$ на достатньо малому відрізку $[x_0, x_0 + H]$ рівномірно збігається до шуканої інтегральної кривої $y = y(x)$.

Метод Ейлера легко може бути поширений на системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння вищих порядків, якщо їх попередньо звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Основними недоліками методу Ейлера є його мала точність і систематичне накопичення похибок. У зв'язку з цим розроблені різні модифікації цього методу.

Першою такою модифікацією є ***удосконалений метод Ейлера***, ідея якого полягає у наступному: спочатку обчислюють допоміжні значення $y_{i+1/2}$ шуканої функції в точках

$$x_{i+1/2}=x_i+\frac{h}{2}$$

за допомогою формули

$$y_{i+1/2}=y_i+\frac{h}{2}\cdot f(x_i,y_i), \qquad \textbf{(4)}$$

а потім обчислюють значення правої частини рівняння з (1) у середній точці $\left(x_{i+1/2},y_{i+1/2}\right)$ і покладають

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f\left(x_{i+1/2},y_{i+1/2}\right). \qquad \textbf{(5)}$$

Другою модифікацією методу Ейлера є ***удосконалений метод Ейлера-Коші***, коли спочатку шукають "грубе" наближення

$$\overline{y}_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i), \qquad \textbf{(6)}$$

а потім наближено покладають

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\overline{y}_{i+1})}{2}. \qquad \textbf{(7)}$$

Зауважимо, що позначаючи значення y_{i+1}, знайдене за формулою (6), через $\overline{y}_{i+1}$, ми маємо змогу знову за формулою (7) шукати нове значення для y_{i+1}. Такий процес можна продовжити доти, поки два послідовні наближення y_{i+1} не співпадуть із точністю до відповідних десяткових знаків. Цей процес має назву ***ітераційної обробки***.

Проілюструємо застосування цих методів для розв'язування конкретної задачі.

Приклад 1. За допомогою методу Ейлера та його модифікацій розв'язати задачу Коші $y'=x-y,\ \ y(0)=1$ на відрізку $[0;0,5]$, беручи крок $h=0{,}1$.

Розв'язання. Для кожного з методів складемо програми на мові програмування Basic і наведемо результати їх виконання.

Метод Ейлера

Програма | **Результат виконання програми**

```
1Ø X=Ø: Y=1: H=.1: B=.5
2Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y
3Ø PRINT "X","Y"
4Ø PRINT X,Y
5Ø IF X>=B THEN END
6Ø Y=Y+H*FNF(X,Y): X=X+H
7Ø GOTO 4Ø
```

X	Y
0	1
.1	.9
.2	.82
.3	.758
.4	.7122
.5	.68098

Удосконалений метод Ейлера

Програма | **Результат виконання програми**

```
1Ø X=Ø: Y=1: H=.1: B=.5
2Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y
3Ø PRINT "X","Y"
4Ø PRINT X,Y
5Ø IF X>=B THEN END
6Ø Y1=Y+H*FNF(X,Y)/2: X1=X+H/2
7Ø X=X+H: Y=H*FNF(X1,Y1)+Y
8Ø GOTO 4Ø
```

X	Y
0	1
.1	.91
.2	.83805
.3	.7824352
.4	.7416039
.5	.7141516

Удосконалений метод Ейлера-Коші

Програма | **Результат виконання програми**

```
1Ø X=Ø: Y=1: H=.1: B=.5
2Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y
3Ø PRINT "X","Y"
4Ø PRINT X,Y
5Ø IF X>=B THEN END
6Ø Y1=Y+H*FNF(X,Y)/2
7Ø Y=Y+H*(FNF(X,Y)+FNF(X+H,Y1))/2:X=X+H
8Ø GOTO 4Ø
```

X	Y
0	1
.1	.91
.2	.83805
.3	.7824353
.4	.7416039
.5	.7141515

Для порівняння наведемо точні значення розв’язку

$$y(x) = 2e^{-x} - 1 + x,$$

знайденого у прикладі на лекції 1.

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
1Ø X=Ø: Y=1	0	1
2Ø PRINT “X”,“Y”	.1	.9096748
3Ø FOR K=Ø TO 5	.2	.8374615
4Ø X=.1*K: Y=2*EXP(–X)–1+X	.3	.7816364
5Ø PRINT X,Y: NEXT	.4	.7406401
6Ø END	.5	.7130613

Бачимо, що удосконалені методи більш точні, ніж звичайний метод ламаних Ейлера. Причини цього будуть проаналізовані на наступних лекціях.

Наведені програми можуть бути легко перероблені для розв’язування довільних задач вигляду (1). Для цього необхідно лише ввести зміни у рядки 10, 20 для визначення початкових умов та функції $f(x,y)$.

2. Загальні поняття теорії різницевих схем. Метод Ейлера та його модифікації є найпростішими представниками різницевих методів розв’язування диференціальних рівнянь. Серед наближених методів розв’язування задачі Коші різницеві методи є найбільш точними. Вони використовуються для диференціальних рівнянь першого та вищих порядків.

Для застосування різницевих методів розв’язування задачі Коші разом з заданими початковими умовами необхідно мати значення $y_k = y(x_k)$ шуканого розв’язку у деяких додаткових точках $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, ..., p$. Ці значення доведеться шукати будь-яким з раніше розглянутих методів.

Розглянемо різницеві методи із загальної точки зору. Для більшості з них достатньо вказати алгоритм обчислення наближеного розв’язку у скінченній кількості точок x_i, $i = 0, 1, ..., n$, відрізка $[x_0, X]$, на якому розв’язується задача

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0. \qquad \textbf{(8)}$$

Множину цих точок $\{x_i\}$ називають ***сіткою***, а самі точки x_i цієї множини – ***вузлами сітки***. Відстані

$$h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, ..., n,$$

називають ***кроками сітки***.

У випадку, коли $h_i = h = \text{const}$, кажуть, що сітка є ***рівномірною***. Зрозуміло, що у цьому випадку $h = (X - x_0)/n$. Надалі розглядатимемо тільки рівномірні сітки.

Функцію дискретного аргументу $y(x_i)$, яка визначена у вузлах сітки, називають ***сітковою функцією***. Надалі такі функції позначатимемо через $\bar{y}$, а їхні значення $\bar{y}(x_i)$ – через $\bar{y}_i$.

Основою різницевих методів розв'язування задач для диференціальних рівнянь є заміна відповідної диференціальної задачі для функцій неперервного аргументу на алгебраїчну задачу для сіткової функції. Остання є системою алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує між собою значення сіткової функції, додаткових умов та праві частини рівняння у вузлах сітки $\{x_i\}$.

Але задача визначення сіткових функцій ставиться не довільно. Вона повинна бути сформульована так, щоб при $h \to 0$ сіткові функції у певному сенсі збігалися до точного розв'язку диференціальної задачі.

Поняття такої збіжності можна ввести по-різному. Найчастіше для цього користуються так званою ***рівномірною нормою***:

$$\|u\| = \max_i |u(x_i)|, \quad i = 0,1,\dots,n. \qquad \textbf{(9)}$$

Кажуть, що сім'я сіткових функцій $\{\bar{y}_h\}$ збігається до точного розв'язку $y(x)$ вихідної задачі, якщо

$$\lim_{h\to 0} \|y - \bar{y}_h\| = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Інакше кажучи, $\bar{y}_h \to y$, якщо максимальне відхилення між значеннями цих функцій у вузлах сітки прямує до нуля. Якщо, крім того, виконується нерівність

$$\|y - \bar{y}_h\| \le ch^k, \qquad \textbf{(11)}$$

де c, k – деякі сталі, не залежні від h, то кажуть, що маємо збіжність порядку k за відповідною нормою.

Але у загальному випадку дослідження на таку збіжність та її порядок точності викликають значні труднощі. Вихід з цього полягає у тому, що збіжність різницевої задачі може бути зведена до двох більш доступних для перевірки властивостей – порядку апроксимації та стійкості.

Для визначення порядку апроксимації зауважимо, що точний розв'язок диференціальної задачі, взагалі кажучи, не задовольняє різницеву задачу. Запишемо диференціальну задачу у вигляді

$$Ly = \varphi, \qquad \textbf{(12)}$$

а відповідну їй різницеву задачу, яку ще іноді називають ***різницевою схемою***, у вигляді

$$L_h \bar{y} = \bar{\varphi}_h. \qquad \textbf{(13)}$$

При цьому у вирази L та L_h увійшли сукупності лівої частини диференціального рівняння і додаткових умов для точного розв'язку $y = y(x)$ та відповідно лівих частин різницевих рівнянь та додаткових умов для $\bar{y}$. Праві ж частини φ та $\bar{\varphi}_h$ є сукупностями правих частин відповідних рівнянь та додаткових умов.

Підставимо розв'язок задачі (12) у рівняння (13) і визначимо $\|L_h y - \varphi_h\|_0$ як максимум норм $\|L_h^p y - \varphi_h^p\|$ для кожного з рівнянь системи (13), де p – номер рівняння у цій системі. Якщо для деяких сталих c, k, не залежних від h, виконується нерівність

$$\|L_h y - \varphi_h\|_0 < ch^k, \tag{14}$$

то кажуть, що різницева схема апроксимує задачу (12) з порядком k, а найбільше з таких k називають ***порядком апроксимації схеми***.

Порядок апроксимації схеми можна визначити й інакше. А саме, нехай для кожного p виконуються нерівності

$$\|L_h^p y - \varphi_h^p\| < c_p h^{k_p}, \tag{15}$$

де сталі c_p і k_p не залежать від h. Тоді найбільші з чисел k_p називають ***порядками апроксимації*** відповідних рівнянь, а число $k = \min\{k_p\}$ – ***порядком апроксимації схеми*** (13). Якщо $L_h^p y = \varphi_h^p$, то вважають, що $k_p = \infty$.

Зрозуміло, що чим вищий порядок апроксимації схеми, тим точніше її розв'язок – сіткова функція $\bar{y}$ – наближає розв'язок $y = y(x)$ задачі (12). Але для збіжності $\bar{y}_h$ до y важливим критерієм є також стійкість різницевої схеми, яка фактично означає неперервну залежність розв'язку схеми (13) від початкових умов і правих частин рівняння. Інакше кажучи, схему (13) називають ***стійкою***, якщо існує таке h_0, що для $h < h_0$ виконується нерівність

$$\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| < c^* \|\bar{\varphi}_h - \bar{\bar{\varphi}}_h\|_0, \tag{16}$$

де c^* – деяка стала, яка не залежить від h, а $\bar{\bar{y}}$ – розв'язок різницевої схеми $L_h \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{\varphi}}_h$.

Введені поняття дають можливість довести теорему, яка має фундаментальне значення для дослідження збіжності різницевих схем.

Теорема 1. *Якщо стійка різницева схема (13) апроксимує задачу (12) з порядком апроксимації* k*, то її розв'язок* $\overline{y}_h$ *при* $h \to 0$ *збігається до розв'язку* $y = y(x)$ *задачі (12) з порядком збіжності* k*.*

Доведення. Згідно з (12), (14) маємо нерівність

$$\|y - \overline{y}_h\| < c^* \|\varphi - \overline{\varphi}_h\|_0 = c^* \|L_h y - \overline{\varphi}_h\|_0 < c^* c h^k,$$

з якої й випливає доведення теореми. ►

Зауважимо, що усі різницеві схеми, які розглядаються надалі, є стійкими, і надалі на доведенні їх стійкості зупинятися не будемо.

3. Різницева схема Ейлера та її застосування. Розглянемо з точки зору теорії різницевих схем метод Ейлера для задачі Коші (1).

Рівність (3) разом з початковою умовою можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i}{h} = f(x_i, \overline{y}_i), \quad i = 0,1,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0 = y_0, \end{cases} \tag{17}$$

замінивши наближено значення функції $y(x)$ значеннями сіткової функції $\overline{y}$. Схему (17) називають ***різницевою схемою Ейлера***.

З'ясуємо порядок апроксимації цієї схеми, шукаючи порядок апроксимації кожного з її рівнянь. Для цього додатково припустимо, що функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні за обома змінними у деякому прямокутнику D, в якому існує єдиний розв'язок задачі (1). Тоді розв'язок $y(x)$ цієї задачі буде двічі неперервно диференційовною функцією і за формулою Тейлора одержуємо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Якщо підставити тепер розв'язок задачі (1) у перші n рівнянь схеми (17), то

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f\left(x_i, y(x_i)\right) = y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h) - f\left(x_i, y(x_i)\right) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h).$$

Оскільки при накладених вище умовах функція $y''(x)$ обмежена, то кожне з цих рівнянь має порядок апроксимації $k=1$. Враховуючи, що рівність $y(x_0)=y_0$ є точною, знаходимо, що порядок апроксимації всієї схеми $k=1$.

Доведено, що схема (17) є стійкою ([12], розділ 6, § 1). Таким чином, порядок збіжності схеми Ейлера також дорівнює 1.

Якщо в області D

$$|f(x,y)|\le M, \quad \left|f'_x(x,y)\right|\le K, \quad \left|f'_y(x,y)\right|\le K,$$

то для похибки $\delta(x)$ справджується оцінка ([12], розділ 6, § 1):

$$|\delta(x)|\le h(1+M)\left(e^{K(x-x_0)}-1\right).$$

Як видно з (17), у схемі Ейлера похідна $y'(x_i)$ наближено замінена відношенням $\dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$, що дозволило добитися лише першого порядку апроксимації. Якщо ж наближено взяти

$$y'(x_i)\approx\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h},$$

то одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases}\dfrac{\bar{y}_{i+1}-\bar{y}_{i-1}}{2h}=f(x,\bar{y}_i), \quad i=1,\dots,n-1,\\ \bar{y}_0=y_0,\\ \bar{y}_1=y_1,\end{cases} \qquad \textbf{(18)}$$

де число y_1 буде визначене пізніше.

Припустимо, що розв'язок $y(x)$ задачі (6.1) тричі неперервно диференційовний. Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_i\pm h)=y(x_i)\pm hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3).$$

Якщо підставити тепер точний розв'язок $y(x)$ у (18), то одержуємо для перших $n-1$ рівнянь:

$$\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}-f\left(x_i,y(x_i)\right)=y'(x_i)+O(h^2)-f\left(x_i,y(x_i)\right)=O(h^2),$$

тобто їх порядок апроксимації $k=2$.

Рівність $y(x_0)=y_0$ виконується точно, а з рівності

$$y(x_0+h)=y(x_0)+h\cdot y'(x_0)+O(h^2)$$

знаходимо

$$y(x_1) - y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) - y_1 + O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб схема (18) мала порядок апроксимації $k = 2$, необхідно і достатньо, щоб

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Схему (18) називають ***узагальненням різницевої схеми Ейлера***. На наступній лекції буде встановлений порядок апроксимації різницевих схем, які відповідають модифікаціям методу Ейлера.

Лекція 4.
Метод Рунге-Кутта. Метод Адамса.

План.

1. Метод Рунге-Кутта.
2. Метод Адамса.

1. Метод Рунге-Кутта. Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

але різницеву схему запишемо тепер у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i}{h} = p_1 k_1 + \ldots + p_m k_m, \quad i = 0,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0 = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_i, \overline{y}_i\right), \\ k_2 &= f\left(x_i + \alpha_1 h, \overline{y}_i + \alpha_1 h k_1\right), \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ k_m &= f\left(x_i + \alpha_{m-1} h, \overline{y}_i + \alpha_{m-1} h k_{m-1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а $p_1,\ldots,p_m$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1}$ – деякі параметри, вибір яких забезпечить необхідний порядок апроксимації схеми.

Якщо m=1, то для $p_1 = 1$ схема (2) співпадає із схемою Ейлера (17), порядок апроксимації якої $k = 1$ (лекція 3).

Нехай тепер $m = 2$. Припустимо додатково, що єдиний розв’язок задачі (1) є тричі неперервно диференційовною функцією, для чого достатньо вимагати неперервності усіх частинних похідних другого порядку функції $f(x,y)$. Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_i) + O(h^3).$$

Підставляючи точний розв’язок у перші n рівнянь схеми (2), одержуємо

$$y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) -$$

$$-p_1 f\left(x_i, y(x_i)\right) - p_2 f\left(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 h\, f\left(x_i, y(x_i)\right)\right) =$$

$$= y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - p_1 f\left(x_i, y(x_i)\right) - p_2 f\left(x_i, y(x_i)\right) -$$

$$-p_2\alpha_1 h\cdot\frac{\partial f\left(x_i, y(x_i)\right)}{\partial x}-p_2\alpha_1 h\cdot f\left(x_i, y(x_i)\right)\cdot\frac{\partial f\left(x_i, y(x_i)\right)}{\partial y}+O(h^2).$$

Підставляючи сюди

$$y'(x_i)=f\left(x_i, y(x_i)\right),$$

$$y''(x_i)=\frac{\partial f\left(x_i, y(x_i)\right)}{\partial x}+\frac{\partial f\left(x_i, y(x_i)\right)}{\partial y}\cdot y'(x_i),$$

будемо мати

$$\left(1-p_1-p_2\right)y'(x_i)+h\cdot\left(\frac{1}{2}-\alpha_1 p_2\right)y''(x_i)+O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб задані рівняння мали другий порядок апроксимації, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{cases} p_1+p_2=1, \\ \alpha_1 p_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Умови (4) залишаються необхідними і достатніми для другого порядку апроксимації всієї схеми, оскільки рівність $y(x_0)=y_0$ є точною.

Система (4) складається з двох рівнянь з трьома невідомими, тому один з параметрів можна вибирати довільно. Як правило, довільним вибирають параметр α_1, беручи його з проміжку (0;1] так, щоб не виходити за межі відрізка $[x_i, x_{i+1}]$.

Найчастіше використовують схеми з $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$ та $\alpha_1=1$.

Якщо $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$, то $p_1=1,\ \ p_2=0$ і схема набуває вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}=f\left(x_i+\dfrac{h}{2},\ \overline{y}_i+\dfrac{h}{2}\cdot f\left(x_i,\overline{y}_i\right)\right), \quad i=0,\dots,n-1, \\ \overline{y}_0=y_0. \end{cases}$$

Якщо ж $\alpha_1=1$, то $p_1=p_2=\dfrac{1}{2}$ і одержуємо схему

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}=\dfrac{1}{2}\Big(f\left(x_i,\overline{y}_i\right)+f\left(x_{i+1},\overline{y}_i+h\cdot f\left(x_i,\overline{y}_i\right)\right)\Big), \quad i=0,\dots,n-1, \\ \overline{y}_0=y_0. \end{cases}$$

У цих двох схемах маємо дві модифікації методу ламаних Ейлера, кожна з яких має порядок апроксимації $k=2$.

Аналогічно можна одержати ***схеми Рунге-Кутта*** й для інших значень m. Наприклад, для $m=3$ маємо схеми з порядком апроксимації $k=3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}=\dfrac{1}{6}\left(k_1+4k_2+k_3\right), \quad i=0,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0=y_0, \end{cases}$$

де

$$k_1=f\left(x_i,\overline{y}_i\right),$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{h}{2},\overline{y}_i+\frac{k_1h}{2}\right),$$

$$k_3=f\left(x_i+h,\overline{y}_i+\left(2k_2-k_1\right)h\right),$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}=\dfrac{1}{4}\left(k_1+3k_3\right), \quad i=0,1,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0=y_0, \end{cases}$$

де

$$k_1=f\left(x_i,\overline{y}_i\right),$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{h}{3},\overline{y}_i+\frac{k_1h}{3}\right),$$

$$k_3=f\left(x_i+\frac{2h}{3},\overline{y}_i+\frac{2k_2h}{3}\right).$$

Для $m=4$ маємо схему з порядком апроксимації $k=4$:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h}=\dfrac{1}{8}\left(k_1+3k_2+3k_3+k_4\right), \quad i=0,1,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0=y_0, \end{cases}$$

де

$$k_1=f\left(x_i,\overline{y}_i\right),$$

$$k_2=f\left(x_i+\frac{h}{3},\overline{y}_i+\frac{k_1h}{3}\right),$$

$$k_3=f\left(x_i+\frac{2h}{3},\overline{y}_i+\frac{2k_2-k_1}{3}\cdot h\right),$$

$$k_4=f\left(x_i+h,\overline{y}_i+\left(k_1-k_2+k_3\right)h\right).$$

Але найчастіше для $m=4$ використовують схему

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1}-\overline{y}_i}{h} = \dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right), \quad i=0,1,\ldots,n-1, \\ \overline{y}_0 = y_0, \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

де

$$\left.\begin{aligned} k_1 = f\left(x_i,\overline{y}_i\right), \qquad k_2 = f\left(x_i+\frac{h}{2},\overline{y}_i+\frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(x_i+\frac{h}{2},\overline{y}_i+\frac{h}{2}k_2\right), \qquad k_4 = f\left(x_i+h,\overline{y}_i+hk_3\right). \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(6)}$$

Схема (6) також має четвертий порядок апроксимації. Застосуємо її до розв'язування конкретної задачі.

Приклад 1. Розв'язати методом Рунге-Кутта на відрізку $[0;0,5]$ із кроком $h=0,1$ задачу Коші $y'=x-y, \quad y(0)=1$.

Розв'язання. Для розв'язування цієї задачі складемо програму на мові програмування Basic.

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
1Ø X=Ø: Y=1: H=.1: B=.5	0	1
2Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y	.1	.909675
3Ø PRINT "X", "Y"	.2	.8374618
4Ø PRINT X, Y	.3	.7816369
5Ø IF X>=B THEN END	.4	.7406406
6Ø K1=FNF(X,Y): K2=FNF(X+H/2,Y+H*K1/2)	.5	.7130619
7Ø K3=FNF(X+H/2,Y+H*K2/2): K4=FNF(X+H,Y+H*K3)		
8Ø X=X+H: Y=Y+H*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6		
9Ø GOTO 4Ø		

Порівнюючи одержані результати з тими, які були отримані при розв'язуванні задачі (7) з лекції 3, та точними значеннями розв'язку (приклад 3), бачимо, що точність наближення є вищою.

Наведена програма легко може бути змінена для довільного рівняння з задачі (1). Для цього достатньо внести зміни у команди 10 та 20.

Зазначимо також, що метод Рунге-Кутта можна застосовувати і до нормальних систем диференціальних рівнянь. Для цього у кожній з рівностей (2) функції y та f необхідно розуміти як вектор-функції, а числа $k_1,k_2,\ldots,k_m$ – як вектори.

Для наближеного розв'язування задачі Коші для рівняння другого порядку:

$$y'' = f\left(x, y, y'\right),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

можна скористатися формулами

$$\overline{y}_{i+1} = \overline{y}_i + \overline{y}_i{}' h + \frac{1}{6}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)h^2,$$

$$\overline{y}{}'_{i+1} = \overline{y}_i{}' + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_2 + k_3\right)h,$$

де

$$k_1 = f\left(x_i, \overline{y}_i, \overline{y}_i{}'\right),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \overline{y}_i + \frac{\overline{y}_i{}' h}{2}, \overline{y}_i{}' + \frac{k_1 h}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \overline{y}_i + \frac{\overline{y}_i{}' h}{2} + \frac{k_1 h^2}{4}, \overline{y}_i{}' + \frac{k_2 h}{2}\right),$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, \overline{y}_i + \overline{y}_i{}' h + \frac{k_2 h^2}{2}, \overline{y}_i{}' + k_3 h\right).$$

2. Метод Адамса. Наближено розв'язуючи диференціальне рівняння методом Рунге-Кутта, необхідно виконувати досить багато обчислень для знаходження кожного y_i. У випадку, коли права частина рівняння має складний аналітичний вираз, використання методу Рунге-Кутта приводить до значних труднощів. Тому на практиці у цьому випадку часто використовують ***метод Адамса***, який не вимагає багаторазового підрахунку правої частини рівняння.

Для задачі Коші (1), покладаючи $y_i = y(x_i)$, будемо мати

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{7}$$

Оскільки на підставі другої інтерполяційної формули Ньютона ([10], розділ 3) з точністю до різниць четвертого порядку маємо

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 y'_{i-3},$$

де

$$q = \frac{x - x_i}{h},$$

$$\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

$$\Delta^2\varphi_k = \Delta\varphi_{k+1} - \Delta\varphi_k = \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k,$$

$$\Delta^3\varphi_k = \Delta^2\varphi_{k+1} - \Delta^2\varphi_k = \varphi_{k+3} - 3\varphi_{k+2} + 3\varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

то з (7) одержуємо

$$\Delta y_i = h \cdot \int_0^1 \left(y_i' + q\Delta y_{i-1}' + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_{i-3}' \right) \mathrm{d}\, q =$$

$$= h \cdot \left(y_i' + \frac{1}{2}\Delta y_{i-1}' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_{i-3}' \right) =$$

$$= \frac{h}{24} \cdot \left(55y_i' - 59y_{i-1}' + 37y_{i-2}' - 9y_{i-3}' \right).$$

Таким чином, наближено можемо покласти

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot \big(55 f(x_i, y_i) - 59 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37 f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9 f(x_{i-3}, y_{i-3}) \big). \qquad \mathbf{(8)}$$

Формулу (8) називають ***формулою Адамса.*** Зрозуміло, що для обчислень за формулою Адамса необхідно мати чотири перші наближення y_0, y_1, y_2, y_3, які можна одержати, наприклад, одним із методів Рунге-Кутта або з розвинення у ряд Тейлора:

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + ih\, y_0' + \frac{(ih)^2}{2} y_0'' + \ldots, \qquad i = 1, 2, 3.$$

При цьому

$$y_0' = f(x_0, y_0), \quad y_0'' = f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot y_0' \quad \text{і т. д.}$$

Приклад 2. Розв'язати методом Адамса задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

на відрізку $[0; 0{,}5]$, беручи $h = 0{,}1$.

Розв'язання. Скористаємося знайденими на попередній лекції методом Рунге-Кутта значеннями y_1, y_2, y_3. Для наступних обчислень складемо програму на мові програмування Basic.

Програма

```
1Ø X=Ø: H=.1: B=.5: DIM Y(3): Y(Ø)=1
2Ø INPUT “Y1, Y2, Y3”; Y(1), Y(2), Y(3)
3Ø PRINT  “X”, ”Y”: PRINT
4Ø FOR K=Ø TO 3
5Ø X=K*H: Y=Y(K)
6Ø PRINT X, Y: NEXT
7Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y
8Ø Y=Y(3)+H*(55*FNF(X,Y(3))–59*FNF(X–H,Y(2))+37*
    FNF(X–2*H,Y(1))–FNF(X–3*H,Y(Ø)))/24: X=X+H
9Ø PRINT X, Y
1ØØ IF X>=B THEN END
11Ø Y(0)=Y(1): Y(1)=Y(2): Y(2)=Y(3): Y(3)=Y
12Ø GOTO 8Ø
```

Результат виконання програми

X	Y
0	1
.1	.909675
.2	.8374618
.3	.7816369
.4	.7406463
.5	.7130714

Зауважимо, що для іншої задачі вигляду (1) зміни у наведену програму потрібно внести лише у команди 10 та 70.

Звертаємо увагу на високу точність одержаних результатів. Їх порядок $k = 4$, як і методу Адамса в цілому ([4], розділ 3, § 8).

Метод Адамса можна легко поширити на нормальні системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння *n*-го порядку.

Лекція 5.

Метод послідовних зближень Крилова. Метод Мілна.

План.

1. Метод послідовних зближень Крилова.
2. Метод Мілна
3. Деякі зауваження та узагальнення

1. **Метод послідовних зближень Крилова.** Ефективність методу Адамса значно залежить від точності знайдених перших наближень y_1, y_2 та y_3. Розглянемо спосіб їх знаходження ***методом послідовних зближень Крилова***.

Якщо права частина рівняння

$$y' = f(x, y)$$

задана аналітично, то необхідні перші наближення можна знайти за допомогою, наприклад, методу послідовних наближень, степеневих рядів або Рунге-Кутта. Але якщо функція $f(x, y)$ задана таблично, то жоден з цих методів застосувати не можна. У цьому випадку досить зручним є метод Крилова.

На попередній лекції було наведено формулу Адамса

$$\Delta y_i = h\left(y_i' + \frac{1}{2}\Delta y_{i-1}' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_{i-3}' \right). \qquad \textbf{(1)}$$

Враховуючи, що

$$\Delta y_{i-1}' = \Delta y_i' - \Delta^2 y_{i-1}',$$

$$\Delta^2 y_{i-2}' = \Delta^2 y_{i-1}' - \Delta^3 y_{i-2}',$$

та покладаючи $\Delta^3 y_{i-3}' \approx \Delta^3 y_{i-2}'$, з (1) одержуємо формулу

$$\Delta y_i = h \cdot \left(y_i' + \frac{1}{2}\Delta y_i' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_{i-1}' - \frac{1}{24}\Delta^3 y_{i-2}' \right). \qquad \textbf{(2)}$$

Далі, враховуючи, що

$$\Delta^2 y_{i-1}' = \Delta^2 y_i' - \Delta^3 y_i',$$

$$\Delta^3 y_{i-2}' \approx \Delta^3 y_{i-1}',$$

з формули (2) знаходимо

$$\Delta y_i = h\left(y_i' + \frac{1}{2}\Delta y_i' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_i' + \frac{1}{24}\Delta^3 y_{i-1}' \right). \qquad \textbf{(3)}$$

І, нарешті, покладаючи у (3)

$$\Delta^3 y'_{i-1} \approx \Delta^3 y'_i,$$

будемо мати

$$\Delta y_i = h\left(y'_i + \frac{1}{2}\Delta y'_i - \frac{1}{12}\Delta^2 y'_i + \frac{1}{24}\Delta^3 y'_i \right). \qquad \textbf{(4)}$$

Використовуючи одержані формули, побудуємо зближення таким чином:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad \underline{\Delta y_0} = h y'_0, \quad \underline{y_1} = y_0 + \underline{\Delta y_0}, \quad \underline{y'_1} = f(x_1, \underline{y_1}),$$

$$\underline{\Delta y'_0} = \underline{y'_1} - y'_0, \quad \underline{\underline{\Delta y_0}} = h\left(y'_0 + \frac{1}{2}\underline{\Delta y'_0} \right), \quad \underline{\underline{\Delta y_1}} = h\left(\underline{y'_1} + \frac{1}{2}\underline{\Delta y'_0} \right),$$

$$\underline{\underline{y_1}} = y_0 + \underline{\underline{\Delta y_0}}, \quad \underline{\underline{y_2}} = y_1 + \underline{\underline{\Delta y_1}}, \quad \underline{\underline{y'_1}} = f\left(x_1, \underline{\underline{y_1}}\right), \quad \underline{\underline{y'_2}} = f\left(x_2, \underline{\underline{y_2}}\right),$$

$$\underline{\underline{\Delta y'_0}} = \underline{\underline{y'_1}} - y'_0, \quad \underline{\underline{\Delta y'_1}} = \underline{\underline{y'_2}} - \underline{\underline{y'_1}}, \quad \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} = \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \underline{\underline{\Delta y'_0}},$$

$$\overline{\overline{\Delta y_0}} = h\left(y'_0 + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12}\underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right), \quad \overline{\overline{\Delta y_1}} = h\left(\underline{\underline{y'_1}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12}\underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right),$$

$$\overline{\overline{\Delta y_2}} = h\left(\underline{\underline{y'_2}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12}\underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right),$$

$$\overline{\overline{y_1}} = y_0 + \overline{\overline{\Delta y_0}}, \quad \overline{\overline{y_2}} = \overline{\overline{y_1}} + \overline{\overline{\Delta y_1}}, \quad \overline{\overline{y_3}} = \overline{\overline{y_2}} + \overline{\overline{\Delta y_2}},$$

$$\overline{\overline{y'_1}} = f\left(x_1, \overline{\overline{y_1}}\right), \quad \overline{\overline{y'_2}} = f\left(x_2, \overline{\overline{y_2}}\right), \quad \overline{\overline{y'_3}} = f\left(x_3, \overline{\overline{y_3}}\right),$$

$$\overline{\overline{\Delta y'_0}} = \overline{\overline{y'_1}} - y'_0, \quad \overline{\overline{\Delta y'_1}} = \overline{\overline{y'_2}} - \overline{\overline{y'_1}}, \quad \overline{\overline{\Delta y'_2}} = \overline{\overline{y'_3}} - \overline{\overline{y'_2}},$$

$$\overline{\overline{\Delta^2 y'_0}} = \overline{\overline{\Delta y'_1}} - \overline{\overline{\Delta y'_0}}, \quad \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} = \overline{\overline{\Delta y'_2}} - \overline{\overline{\Delta y'_1}}, \quad \overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} = \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} - \overline{\overline{\Delta^2 y'_0}}.$$

Звідси у підсумку одержуємо

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left(y'_0 + \frac{1}{2}\overline{\overline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12}\overline{\overline{\Delta^2 y'_0}} + \frac{1}{24}\overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} \right),$$

$$y_2 = \overline{\overline{y_1}} + h \cdot \left(\overline{\overline{y'_1}} + \frac{1}{2}\overline{\overline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12}\overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} + \frac{1}{24}\overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} \right),$$

$$y_3 = \overline{\overline{y_2}} + h \cdot \left(\overline{\overline{y'_2}} + \frac{1}{2}\overline{\overline{\Delta y'_2}} - \frac{1}{12}\overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} - \frac{1}{24}\overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} \right).$$

Зауважимо, що якщо знайдені y_1, y_2, y_3 надто відрізняються від $\overline{\overline{y_1}}$, $\overline{\overline{y_2}}$, $\overline{\overline{y_3}}$, то процес зближення не можна вважати завершеним. У такому випадку доцільно зменшити крок h або знову взяти знайдені y_i замість $\overline{\overline{y_i}}$.

Пропонуємо програму для реалізації цього методу для задачі Коші $y' = x - y,\ \ y(0) = 1$.

Програма

```
1Ø X=Ø: YØ=1: H=.1
2Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y
3Ø X1=X+H: X2=X+2*H: X3=X+3*H
4Ø PYØ=FNF(X,YØ): DYØ=H*PYØ: Y1=YØ+DYØ
5Ø PY1= FNF(X1,Y1): DPYØ=PY1–PYØ
6Ø DYØ=H*(PYØ+DPYØ/2): DY1=H*(PY1+DPYØ/2)
7Ø Y1=YØ+DYØ: Y2=Y1+DY1
8Ø PY1=FNF(X1,Y1):  PY2=FNF(X2,Y2)
9Ø DPYØ=PY1–PYØ: DPY1=PY2–PY1:
   D2PYØ=DPY1–DPYØ
1ØØ DYØ=(PYØ+DPYØ/2–D2PYØ/12)*H
11Ø  DY1=(PY1+DPY1/2–D2PYØ/12)*H
12Ø DY2=(PY2+DPY1/2+5*D2PYØ/12)*H
13Ø Y1=YØ+DYØ: Y2=Y1+DY1: Y3=Y2+DY2
14Ø PY1=FNF(X1,Y1): PY2=FNF(X2,Y2): PY3=FNF(X3,Y3)
15Ø DPYØ=PY1–PYØ: DPY1=PY2–PY1: DPY2=PY3–PY2
16Ø D2PYØ=DPY1–DPYØ: D2PY1=DPY2–DPY1
17Ø D3PYØ=D2PY1–D2PYØ
18Ø Y1=YØ+H*(PYØ+DPYØ/2–D2PYØ/12+D3PYØ/24)
19Ø Y2=Y1+H*(PY1+DPY1/2–D2PY1/12+D3PYØ/24)
2ØØ Y3=Y2+H*(PY2+DPY2/2-D2PY1/12–D3PYØ/24)
21Ø LPRINT “X”, “Y”: LPRINT: LPRINT X,YØ
22Ø LPRINT X1,Y1: LPRINT X2,Y2: LPRINT X3,Y3
23Ø END
```

Результат виконання програми

X	Y
0	1
.1	.909675
.2	.837467
.3	.781675

Як бачимо, отримані результати є досить близькими до точних значень, знайдених лекції 4. Для розв’язування інших задач вигляду (1) зміни у програму потрібно внести лише у команди 10 та 20.

2. Метод Мілна. Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

Будемо вважати, що перші чотири значення шуканого розв’язку значення y_0, y_1, y_2, y_3 нам уже відомі. Їх можна одержати з початкової умови та, наприклад, з використанням методу Рунге-Кутта або методу послідовних наближень.

Для виведення формул Мілна скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона ([10], розділ 3, § 1):

$$y' = y'_k + q\Delta y'_k + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y'_k + \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y'_k,$$

де $q = \frac{x - x_k}{h}$. Будемо мати:

$$\int_{x_{i-4}}^{x_i} y' \,\mathrm{d}x =$$

$$= h\cdot\left(y'_{i-4}\int_0^4 \mathrm{d}q + \Delta y'_{i-4}\int_0^4 q\,\mathrm{d}q + \Delta^2 y'_{i-4}\int_0^4 \frac{q^2-q}{2}\mathrm{d}q + \Delta^3 y'_{i-4}\int_0^4 \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\mathrm{d}q \right) =$$

$$= h\cdot\left(4y'_{i-4} + 8\Delta y'_{i-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{i-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{i-4} \right) = \frac{4h}{3}\left(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}\right).$$

Аналогічно знаходимо

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} y' dx = h\cdot\left(2y'_{i-2} + 2\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{i-2} \right) = \frac{h}{3}\cdot\left(y'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}\right).$$

Таким чином, одержуємо ***формули Мілна:***

$$\underline{y_i} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}\right), \qquad \textbf{(6)}$$

$$y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(\underline{y'_i} + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}\right). \qquad \textbf{(7)}$$

Ідея цього методу полягає в тому, що спочатку шукаємо значення $\underline{y_i}$ за формулою (6), а потім, використовуючи його, з формули (7) знаходимо y_i. Як показав Мілн, абсолютна похибка значення y_i приблизно дорівнює

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}\left|y_i - \underline{y_i}\right|.$$

Доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 3, § 10). Там само встановлено, що сумарна похибка методу Мілна є величиною порядку h^4 .

Досить просто виглядає програма на мові програмування Basic для розв'язування задачі Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Програма	**Результат виконання програми**	
	X	Y
1Ø X=Ø: B=.5: H=.1: DIM Y(3): Y(Ø)=1	0	1
2Ø INPUT “Y1,Y2,Y3”; Y(1),Y(2),Y(3)	.1	.909675
3Ø PRINT “X”, “Y”	.2	.837467
4Ø FOR K=Ø TO 3	.3	.781675
5Ø X=K*H: Y=Y(K)	.4	.74064
6Ø LPRINT X, Y: NEXT	.5	.7130982
7Ø DEF FNF(X,Y)=X–Y		

```
8Ø Y=Y(Ø)+4*H*(2*FNF(X,Y(3))–FNF(X–H,Y(2))+
   2*FNF(X–2*H, Y(1)))/3
9Ø Y=Y(2)+H*(FNF(X+H,Y)+4*FNF(X,Y(3))+
   FNF(X–H,Y(2)))/3
1ØØ X=X+H: PRINT X, Y
11Ø IF X>=B THEN END
12Ø Y(0)=Y(1): Y(1)=Y(2): Y(2)=Y(3): Y(3)=Y
13Ø GOTO 8Ø
```

Для розв’язування інших задач вигляду (5) зміни у програмі потрібно внести лише у команди 10 і 70.

Метод Мілна можна використовувати для наближеного розв’язування нормальних систем диференціальних рівнянь, а також для рівнянь вищих порядків, які попередньо потрібно звести до таких систем.

3. Деякі зауваження та узагальнення. До цього ми розглядали методи, в яких використовувалися лише перші похідні шуканого розв’язку. Використання похідних вищих порядків дозволяє добитися більшої точності розв’язку на заданому проміжку ([4], розділ 3, § 11). Використаємо похідні другого порядку для розв’язування задачі Коші (5).

Враховуючи, що

$$y' = f(x,y), \quad y'' = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)\cdot y', \tag{8}$$

можна деяким числовим методом скласти вихідну таблицю значень:

$$\begin{matrix} x_0, & y_0, & y'_0, & y''_0, \\ x_1, & y_1, & y'_1, & y''_1, \\ x_2, & y_2, & y'_2, & y''_2. \end{matrix}$$

Після цього за формулою

$$\underline{y_i} = y_{i-3} + 3\left(y_{i-1} - y_{i-2}\right) + h^2\left(y''_{i-1} - y''_{i-2}\right) \tag{9}$$

з [4] (розділ 3, § 11) для $i=3$ можна обчислити перше наближення $\underline{y_3}$ для y_3. Використовуючи формули (8), далі можна знайти $\underline{y_3'}$, $\underline{y_3''}$. Тоді за формулою

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(y_{i-1}' - \underline{y_i'}\right) + \frac{h^2}{2}\left(y_{i-1}'' - \underline{y_i''}\right) \qquad \textbf{(10)}$$

для $i=3$ знаходимо y_3. Для контролю обчислень можна перерахувати y_3, покладаючи у формулі (10) $i=3$, $\underline{y_3'}=y_3'$, $\underline{y_3''}=y_3''$. Аналогічно можна знайти інші наближення. Порядок точності описаного методу $k=5$.

Ще більшої точності з порядком $k=7$ можна домогтися, якщо використовувати похідні третього порядку і формули

$$\underline{y_i} = y_{i-3} + 3\left(y_{i-1} - y_{i-2}\right) + \frac{h^3}{2}\left(y_{i-1}''' + y_{i-2}'''\right), \qquad \textbf{(11)}$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left(\underline{y_i'} + y_{i-1}'\right) - \frac{h^2}{10}\left(\underline{y_i''} - y_{i-1}''\right) + \frac{h^3}{120}\left(\underline{y_i'''} + y_{i-1}'''\right). \qquad \textbf{(12)}$$

Зауважимо, що використання навіть дуже точних методів не гарантує від спотворення результату, тобто одержаний результат може виявитись надто далеким від точного значення.

Для ілюстрації наведемо приклад з [6] (розділ 2, § 5). Нехай на відрізку [0;3] потрібно наближено розв'язати задачу Коші

$$y'' = 10y' + 11y, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-1. \qquad \textbf{(13)}$$

Загальним розв'язком рівняння з (13) є

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{11x}.$$

Враховуючи початкові умови, знаходимо $y=e^{-x}$, а тому

$$y(3) = e^{-3} \approx 0,0498.$$

Враховуючи похибки заокруглень, застосування числових методів дасть нам розв'язок

$$\overline{y} = \left(1+\varepsilon_1\right)e^{-x} + \varepsilon_2 e^{11x}.$$

Навіть якщо $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 10^{-10}$, то

$$\overline{y}(3) = \left(1 \pm 10^{-10}\right)\cdot e^{-3} \pm 10^{-10} e^{33} \approx \pm 2\cdot 10^4,$$

що надто відрізняється від точного значення.

На практиці подібні ситуації трапляються доволі рідко, але їх існування вказує на необхідність використання контрольних обчислень для перевірки правильності обчислень. Зокрема, можна скористатися перерахунком із подвійним кроком. Якщо $\bar{y}_{2n}$ – наближене значення розв'язку на $2n$-му кроці з кроком h, а $\bar{\bar{y}}_n$ – наближене значення у цій же точці, знайдене із кроком $2h$, то наближено покладають ([4], розділ 3, § 15)

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{\bar{\bar{y}}_n - \bar{y}_{2n}}{2^k - 1}, \tag{14}$$

де k – порядок точності вибраного методу. Наприклад, для методу Рунге-Кутта з $k = 4$ формула (14) набуває вигляду

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{1}{15}\left(\bar{\bar{y}}_n - \bar{y}_{2n}\right).$$

Проте й у цьому випадку не завжди вдається врахувати поточні похибки, пов'язані із заокругленнями на кожному кроці обчислень.

Лекція 6.

Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та наближені методи їх розв'язування.

План.

1. Постановка крайових задач. Функція Гріна.
2. Метод стрільби.
3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі.

1. Постановка крайових задач. Функція Гріна. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \qquad \textbf{(1)}$$

де $g(x),\ h(x),\ f_0(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Якщо помножити обидві частини рівняння (1) на функцію

$$p(x) = e^{\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t},$$

то його можна записати у вигляді

$$L[y] \equiv \left(p(x)y'\right)' - q(x)y = f(x), \qquad \textbf{(2)}$$

де

$$q(x) = -p(x)h(x), \quad f(x) = p(x)f_0(x).$$

Для рівняння (2) розглянемо лінійні ***крайові умови***

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

де $\alpha_1,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta,\ A,\ B$ – задані числа, причому $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$.

Якщо $A = B = 0$, то умови (3) називають ***однорідними***.

Задачу про відшукання розв'язків рівняння (2), які задовольняють умови (3), називають ***крайовою задачею***. Якщо функція $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то задачу (2), (3) називають ***неоднорідною***, а якщо

$$f(x) \equiv 0, \ A = B = 0,$$

то ***однорідною крайовою задачею***.

Розв'язок крайової задачі (2), (3) може бути представлений у вигляді

$$y(x) = z(x) + \varphi(x), \qquad \textbf{(4)}$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$ функція, яка задовольняє умови (3). Підставляючи $y(x)$ з (4) у рівняння (2), одержуємо, що

$$L[z]\equiv\left(p(x)z'\right)'-q(x)z=f(x)-\left(p(x)\varphi'(x)\right)'+q(x)\varphi(x).$$

При цьому функція $z(x)$ повинна задовольняти однорідні крайові умови (3). У зв'язку з цим надалі розглядатимемо лише крайові задачі з однорідними умовами (3).

Для представлення розв'язку таких задач використовують ***функцію Ґріна*** $G(x,t)$, яка визначена для будь-яких x,t з відрізка $[a,b]$ і задовольняє умови:

1) *для кожного фіксованого* $t\in[a,b]$ $G(x,t)$ *як функція змінної x на проміжках* $[a,t)$ *і* $(t,b]$ *є розв'язком однорідного рівняння (1.2);*

2) $G(x,s)$ *для кожного* $t\in[a,b]$ *задовольняє однорідні крайові умови (1.3);*

3) $G(x,s)$ *для кожного* $t\in(a,b)$ *неперервна на* $[a,b]$, *а її похідна в точці* $x=t$ *має розрив першого роду зі стрибком*

$$G'_x(x,t)\big|_{t=+0}-G'_x(x,t)\big|_{t=-0}=\frac{1}{p(t)}.$$

Відомо ([12], розділ 4, § 2), що неоднорідна крайова задача (2), (3) з однорідними крайовими умовами має єдиний розв'язок для будь-якої неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ за умови, якщо однорідна крайова задача (2), (3) має тільки тривіальний розв'язок. Цей розв'язок виражається формулою

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Функція $G(x,t)$ може бути визначена у вигляді

$$G(x,t)=\begin{cases}c_1y_1(x), & a\le x\le t,\\ c_2y_2(x), & t\le x\le b,\end{cases}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (2), які задовольняють однорідні умови

$$\begin{cases}\alpha_1y_1'(a)+\alpha y_1(a)=0,\\ \beta_1y_2'(b)+\beta y_2(b)=0.\end{cases}$$

Коефіцієнти c_1, c_2 при цьому можна однозначно визначити з системи

$$\begin{cases} c_2 y_2(t) - c_1 y_1(t) = 0, \\ c_2 y_2'(t) - c_1 y_1'(t) = \dfrac{1}{p(t)}. \end{cases}$$

Методи наближеного розв’язування крайових задач можна розділити на дві групи: різницеві методи і аналітичні методи. Розгляду цих методів присвячені наступні параграфи.

2. Метод стрільби. Розглянемо крайову задачу для рівняння другого порядку у більш загальному вигляді:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6}$$

$$\varphi_1\big(y(a),\, y'(a)\big) = 0, \tag{7}$$

$$\varphi_2\big(y(b),\, y'(b)\big) = 0, \tag{8}$$

де f, φ_1, φ_2 – задані достатньо гладкі функції своїх аргументів. Окрім того, припустимо, що крайова задача (6)-(8) має єдиний розв’язок, а задача Коші для рівняння (6) має єдиний розв’язок для довільних початкових умов.

Виберемо деяку початкову умову

$$\overline{y}(a) = \overline{y}_0.$$

Тоді з (7) знаходимо

$$\overline{y}'(a) = \overline{y}_1.$$

Маючи ці умови, одержуємо розв’язок рівняння (6) – функцію $\overline{y}(x)$, яка задовольняє крайові умови (7). Якщо

$$\varphi_2\big(\overline{y}(b),\, \overline{y}'(b)\big) = 0,$$

то $\overline{y}(x)$ є розв’язком крайової задачі (6)-(8). Але ймовірність такого “точного влучення” надзвичайно мала. Тому швидше за все пошук розв’язку доведеться продовжити.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що

$$\varphi_2\big(\overline{y}(b), \overline{y}'(b)\big) < 0.$$

Виберемо нове значення $\overline{\overline{y}}(a) = \overline{\overline{y}}_0$ і аналогічно побудуємо функцію $\overline{\overline{y}}(x)$. Оскільки за припущенням задача (8)-(10) має розв’язок, а функції f, φ_1, φ_2 є достатньо гладкими, то знайдуться такі число $\overline{\overline{y}}_0$ і функція $\overline{\overline{y}}(x)$, що

$$\overline{\overline{y}}(a) = \overline{\overline{y}}_0$$

та

$$\varphi_2\big(\overline{\overline{y}}(b),\, \overline{\overline{y}}'(a)\big) \ge 0.$$

Таким чином, пошук $\overline{\overline{y}}_0$ будемо продовжувати, доки не доб'ємося виконання останньої нерівності.

Враховуючи неперервну залежність $y(x)$ від початкового значення y_0, робимо висновок, що число y_0 повинно знаходитись між $\overline{y}_0$ та $\overline{\overline{y}}_0$. Знайти його з потрібною точністю можна, використовуючи, наприклад, метод половинного поділу відрізка $\left[\overline{y}_0, \overline{\overline{y}}_0\right]$ або $\left[\overline{\overline{y}}_0, \overline{y}_0\right]$.

Таким чином, розв'язування крайової задачі зводиться до кількаразового розв'язання задачі Коші з різними початковими умовами.

Для лінійного рівняння (2) з однорідними лінійними умовами (3) достатньо буде розв'язати лише дві задачі Коші. Справді, якщо $z(x)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (2), який задовольняє початкові умови

$$z(a) = \alpha_1,\ z'(a) = -\alpha\,,$$

а $y_0(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння, який задовольняє умови

$$y_0(a) = \alpha_1, \quad y_0'(a) = -\alpha\,,$$

то для довільного значення сталої C функція

$$y(x) = z(x) + C \cdot y_0(x) \tag{9}$$

є розв'язком рівняння (2), який задовольняє крайову умову

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0\,.$$

Тоді для $x = b$ одержуємо співвідношення

$$\beta_1 z'(b) + \beta z(b) + C \cdot \left(\beta_1 y_0'(b) + \beta y_0(b)\right) = 0\,, \tag{10}$$

з якого знаходимо C. При цьому, згідно з припущенням про єдиність розв'язку крайової задачі, коефіцієнт біля C у формулі (9) не перетворюється в нуль.

Таким чином, знаходження розв'язку крайової задачі звелося до розв'язування двох задач Коші, які можна буде розв'язати точно або наближено, використовуючи методи з попередніх лекцій.

3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' - q(x)y = f(x) \tag{11}$$

та крайові умови

$$y(a) = y(b) = 0\,. \tag{12}$$

Задачу (11), (12) називають ***найпростішою крайовою задачею***. Вважатимемо, що функції $q(x)$ та $f(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$. Якщо, крім того,

$q(x) > 0$, то така задача має єдиний розв'язок ([12], розділ 6, § 2).

Замінивши другу похідну відповідним різницевим відношенням, приходимо до різницевої схеми

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1} - 2\overline{y}_i + \overline{y}_{i-1}}{h^2} - q_i \overline{y}_i = f_i, \ \ i = 1, 2, ..., n-1, \\ \overline{y}_0 = 0, \\ \overline{y}_n = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{(13)}$$

де

$$q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i),$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Схема (13) є системою $(n+1)$-го лінійного алгебраїчного рівняння. Для існування та єдиності її розв'язку достатньо встановити, що відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок. Справді, якщо припустити, що ця система має нетривіальний розв'язок

$$\overline{y} = \left(0, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_{n-1}, 0\right),$$

то серед $\overline{y}_i$, $i = 1, ..., n-1$, існує найбільше число $\overline{y}_k = M \geq 0$. Якщо $k = 0$ або $k = n$, то $M = 0$. Якщо ж $0 < k < n$, то з (13) одержуємо

$$\left(2 + h^2 q_k\right) M = \left(2 + h^2 q_k\right) \overline{y}_k = \overline{y}_{k+1} + \overline{y}_{k-1} \leq 2M,$$

що неможливо для $M > 0$, бо

$$2 + h^2 q_k > 2.$$

Отже, $M = 0$. Аналогічно можна встановити, що

$$m \equiv \min\left\{\overline{y}_1, ..., \overline{y}_{n-1}\right\} = 0,$$

а тому розв'язок $\overline{y}$ однорідної системи (13) є тривіальним. Таким чином, різницева схема (13) має єдиний розв'язок для довільної правої частини і для кожного n.

Встановимо порядок апроксимації схеми (13). Припустимо, що функції $q(x)$, $f(x)$ мають на відрізку $[a, b]$ неперервні другі похідні. Тоді, використовуючи формули Тейлора для лівих частин перших $n-1$ рівнянь схеми (13) та підставляючи точний розв'язок задачі (11), (12), будемо мати:

$$\frac{1}{h^2}\left(y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + O(h^4) - 2y(x_i) + \right.$$

$$+y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)-\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+O(h^4)\Big)-q_i y(x_i)=$$

$$=y''(x_i)-q(x_i)y(x_i)+O(h^2)=f(x_i)+O(h^2).$$

Оскільки

$$y(x_0)=y(x_n)=0,$$

то порядок апроксимації схеми (13) $k=2$. Схема (13) є стійкою, а тому порядок збіжності розв'язків $\overline{y}_h$ при $h\to 0$ до розв'язку задачі (11)-(12) також дорівнює 2 ([12], розділ 6, § 2).

Зауважимо, що на відміну від схем, розглянутих на попередніх лекціях, ця схема не дає явного алгоритму для послідовного знаходження $\overline{y}_i$. Методику розв'язування систем вигляду (13) розглянемо на наступній лекції.

Лекція 7.
Наближені методи розв’язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

План.

1. Метод алгебраїчної прогонки розв’язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею.
2. Інший підхід до розв’язування систем з трьохдіагональною матрицею.

1. Метод алгебраїчної прогонки розв’язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \tag{1}$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \end{cases} \tag{2}$$

Замінимо наближено

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2},$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}, \quad i = 1,\ldots,n-1,$$

та

$$y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}, \quad y'(b) = \frac{y(x_{n-1}) - y(x_n)}{-h},$$

де

$$x_0 = a,\ x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

У результаті одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{y}_{i+1} - 2\overline{y}_i + \overline{y}_{i-1}}{h^2} + g_i \dfrac{\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_{i-1}}{2h} + h_i \overline{y}_i = f_i, \quad i = 1,\ldots,n-1, \\ \alpha_1 \dfrac{\overline{y}_1 - \overline{y}_0}{h} + \alpha \overline{y}_0 = A, \\ \beta_1 \dfrac{\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}}{h} + \beta \overline{y}_n = B, \end{cases} \tag{3}$$

де

$$g_i = g(x_i), \quad h_i = h(x_i), \quad f_i = f_0(x_i).$$

Аналогічно, як для найпростішої крайової задачі (лекція 6) можна переконатись, що для неперервних на $[a,b]$ функцій $g'(x), h''(x)$, $f_0''(x)$ схема (3) має порядок апроксимації $k=2$.

Для дослідження розв'язності цієї схеми запишемо її у такому загальному вигляді

$$\begin{cases} A_i\bar{y}_{i-1} - C_i\bar{y}_i + B_i\bar{y}_{i+1} = F_i, \quad i=1,\dots,n-1, \\ \bar{y}_0 = m\bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \tag{4}$$

Зокрема, для схеми (3)

$$A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{g_i}{2h}, \quad C_i = \frac{2}{h^2} - h_i, \quad B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{2h}, \quad F_i = f_i,$$

$$m = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha h}, \quad k = \frac{-Ah}{\alpha_1 - \alpha h},$$

$$\gamma = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta h}, \quad \delta = \frac{Bh}{\beta_1 + \beta h}.$$

Шукатимемо такі коефіцієнти m_i та k_i, щоб виконувалися рівності

$$\bar{y}_{i-1} = m_i\bar{y}_i + k_i, \quad i=1,\dots,n. \tag{5}$$

Тоді з (4) одержуємо

$$(A_i m_i - C_i)\bar{y}_i + B_i\bar{y}_{i+1} + (A_i k_i - F_i) = 0.$$

Підставляючи сюди

$$\bar{y}_i = m_{i+1}\bar{y}_{i+1} + k_{i+1},$$

приходимо до рівності

$$\left[(A_i m_i - C)m_{i+1} + B_i\right]\cdot\bar{y}_{i+1} + \left[(A_i m_i - C)k_{i+1} + A_i k_i - F_i\right] = 0. \tag{6}$$

Для тотожного виконання рівності (6) достатньо прирівняти до нуля вирази у квадратних дужках. Звідси, за умови, що $C_i - A_i m_i \neq 0$, знаходимо

$$m_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i m_i}, \quad k_{i+1} = \frac{A_i k_i - F_i}{C_i - A_i m_i}, \tag{7}$$

де $m_1 = m,\ k_1 = k$. Знайшовши m_n та k_n з системи

$$\begin{cases} \bar{y}_{n-1} = m_n\bar{y}_n + k_n, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta, \end{cases}$$

за умови, що $1-\gamma m_n \neq 0$, одержуємо

$$\bar{y}_n = \frac{\gamma k_n + \delta}{1 - \gamma m_n}. \qquad \textbf{(8)}$$

Маючи $\bar{y}_n$, за формулами (5) можемо послідовно знайти $\bar{y}_{n-1}, \ldots, \bar{y}_1, \bar{y}_0$.

Зазначимо, що для застосування такого методу достатньо, щоб виконувались такі умови:

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i > 0, \quad C_i \ge A_i + B_i, \quad 0 \le m < 1, \quad 0 \le \gamma < 1. \qquad \textbf{(9)}$$

Справді, у цьому випадку для $i = 1, \ldots, n$ будемо мати $0 \le m_i < 1$, а отже, жоден з знаменників у формулах (7) та (8) не перетворюється в нуль.

Для схеми (3) умови (9) виконуються, якщо

$$\begin{cases} h(x) \le 0, \\ h \cdot \max\limits_{x \in [a,b]} |g(x)| < 2, \\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha} \le 0, \\ \dfrac{\beta_1}{\beta} \ge 0. \end{cases} \qquad \textbf{(10)}$$

Приклад 1. Методом алгебраїчної прогонки знайти наближений розв’язок крайової задачі $y'' - 2xy' - 2y = -4x,\ \ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e.$

Розв’язання. Маємо

$$g(x) = -2x,\ h(x) = -2,\ f_0(x) = -4x,$$

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha = -1,\ \beta_1 = 0,\ \beta = 1, \quad A = 0,\ B = 1 + e.$$

Оскільки $\max\limits_{x \in [0;1]} |g(x)| = 2$, то для $h < 1$ умови (10) будуть виконуються.

Наведемо програму на мові програмування Basic для числового розв’язання задачі (4.11), (4.12), вибравши крок $h = 0{,}1$.

Програма	**Результат виконання програми** X	Y	**Значення точного розв'язку**
1Ø X= Ø: N=1Ø : H=.1	X	Y	
2Ø DIM A(N),B(N),C(N),M(N),K(N),X(N),Y(N)	0	1.046537	1
3Ø DEF FNG(X)= –2 *X: DEF FNF (X) = –4*X:	.1	1.151191	1.11005
DEF FNH(X)= –2	.2	1.277175	1.240811
4Ø A1=1: AØ=–1: B1=Ø: BØ=1: A= Ø:	.3	1.426202	1.394174
B=1+EXP(1): X(N)=X+N*H: X(Ø)=X	.4	1.601483	1.573511
5Ø C=B1/ (B1+BØ*H): D=B*H/(B1+BØ*H):	.5	1.808068	1.784025
M(1)=A1/(A1–AØ*H): K(1)=A*H/(AØ*H–A1)	.6	2.053411	2.033329

```
6Ø FOR I = 1 TO N–1
7Ø X(I)=X+I*H: A(I)=(1/H–FNG(X(I))/2)/H:
   B(I)=(1/H+FNG(X(I))/2)/H:
   C(I)=2/H/H–FNH(X(I)): F(I)=FNF(X(I))
8Ø M(I+1)=B(I)/(C(I)–A(I)*M(I)):
    K(I+1)=(A(I)*K(I)–F (I))/(C(I)–A(I)*M(I))
9Ø NEXT I
1ØØ Y(N) = (C*K (N) +D)/(1–C*M (N))
11Ø FOR I=N TO 1 STEP –1
12Ø Y(I–1)=M(I)*Y(I)+K(I): NEXT I
13Ø LPRINT “X”, “Y”: LPRINT
14Ø FOR I=Ø TO 10
15Ø LPRINT X (I), Y (I), X (I) +EXP(X(I)*X(I))
16Ø NEXT I: END
```

.7	2.348233	2.332316
.8	2.707827	2.696481
.9	3.154044	3.147908
1	3.718282	3.718282

Для порівняння в останньому стовпці наведені значення точного розв’язку $y(x) = x + e^{x^2}$ заданої крайової задачі. ■

Запропонована програма може бути використана також для розв’язування інших крайових задач вигляду (1), (2). Для цього зміни необхідно внести лише у команди 10, 30, 40, а також у команді 150 зняти друкування останнього виразу.

Наведемо приклад, який ілюструє, що при розв’язуванні крайових задач цим методом похибки можуть бути й достатньо великими.

Приклад 2. Розв’язати методом алгебраїчної прогонки крайову задачу $y'' - 4y' + 4y = xe^x$, $y'(0) - y(0) = 1$, $y'(1) + y(1) = 7e$.

Розв’язання. Точним розв’язком цієї крайової задачі є $y = e^x(x+2)$.

Тут $g(x) = -4$, $h(x) = 4$, $f_0(x) = xe^x$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta = 1$, $A = 1$, $B = 7e$.

Результат виконання програми X	Y	**Значення точного розв'язку**
0	1.196251	2
.1	1.415876	2.320859
.2	1.675902	2.687086
.3	1.985198	3.104675
.4	2.359945	3.580379

.5	2.799277	4.121803
.6	3.336115	4.737509
.7	3.988233	5.437133
.8	4.784614	6.231515
.9	5.762223	7.132849
1	6.968188	8.154845

3. Інший підхід до розв'язування систем з трьохдіагональною матрицею. Повернемося до системи (4), вважаючи коефіцієнти A_i, B_i, C_i сталими, і запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = F_i, \quad i = 1,\dots,n-1, \\ \bar{y}_0 = m\bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \quad \textbf{(11)}$$

Припустимо, що $A > 0,\ B > 0,\ C > A + B.$ Розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = 0 \quad \textbf{(12)}$$

шукатимемо у вигляді $\bar{y}_i = \lambda^i,\ \lambda \neq 0.$ Якщо підставити $\bar{y}_i = \lambda^i$ у (12), то одержимо характеристичне рівняння $A - C\lambda + B\lambda^2 = 0$ з невід'ємним дискримінантом:

$$D = C^2 - 4AB > \left(A + B\right)^2 - 4AB = \left(A - B\right)^2 \geq 0.$$

Таким чином, існують два прості додатні корені цього характеристичного рівняння, які позначимо λ_1 та λ_2, а отже, загальним розв'язком рівняння (12) є

$$\bar{y}_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i, \quad i = 1,\dots,n-1. \quad \textbf{(13)}$$

Оскільки функція $f_0(x)$ неперервна, то наближено одержуємо

$$F_{i+1} \approx F_i \text{ і } F_{i-1} \approx F_i.$$

Тому за частинний розв'язок рівняння (11) можна взяти

$$\bar{y}_{iч} \approx \frac{F_i}{A + B - C}.$$

Загальний розв'язок системи (11) одержуємо у вигляді

$$\bar{y}_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i + \frac{F_i}{A + B - C}, \quad i = 1,\dots,n-1. \quad \textbf{(14)}$$

Вважаючи, що рівність (14) виконується також для $i = 0$ та $i = n$, з двох останніх рівнянь системи (1) знаходимо значення коефіцієнтів C_1 та C_2. Підставляючи їх у (14), можемо знайти $\bar{y}_i$ для всіх $i = 0,1,\dots,n$.

Приклад 2. Знайти наближений розв'язок крайової задачі $y'' - y = x$, $y(0) = y(1) = 0$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Різницева схема для крайової задачі має вигляд

$$\frac{\bar{y}_{i-1}}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right)\bar{y}_i + \frac{\bar{y}_{i+1}}{h^2} = x_i,$$

причому $A + B - C = -1 \neq 0$. За формулою (14) знаходимо $\bar{y}_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i - x_i$, де λ_1, λ_2 – корені квадратного рівняння

$$\frac{\lambda^2}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right)\lambda + \frac{1}{h^2} = 0.$$

Отже,

$$\lambda_1 = \frac{2 + h^2 + \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2 + h^2 - \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}.$$

Покладемо $n = 10$. Тоді $h = 0,1$, $\lambda_1 \approx 1{,}105$, $\lambda_2 \approx 0{,}905$.

Враховуючи крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1\lambda_1^{10} + C_2\lambda_2^{10} = 1, \end{cases}$$

з якої знаходимо: $C_1 = \dfrac{1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx 0{,}426$, $C_2 = \dfrac{-1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx -0{,}426$.

Отже, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}_i = 0{,}426 \cdot \left(1{,}105^i - 0{,}905^i\right) - x_i, \quad i = 0,1,\ldots,10.$$

Порівняємо одержаний результат з точним розв'язком

$$y(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{e^2 - 1} - x.$$

Результати обчислень наведені у таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_i	– 0,015	– 0,029	– 0,041	– 0,050	– 0,057	– 0,058	– 0,055	– 0,044	– 0,027
$\bar{y}_i$	– 0,015	– 0,029	– 0,041	– 0,051	– 0,057	– 0,059	– 0,055	– 0,045	– 0,027

Бачимо, що у точках x_i значення наближеного розв'язку співпадають зі значеннями $y_i = y(x_i)$ точного розв'язку з точністю до 0,001. ■

Лекція 8.

Наближені методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

План.

1. Метод колокації.
2. Метод найменших квадратів.
3. Метод Гальоркіна.

1. Метод колокації. Розглянемо рівняння

$$L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \qquad \textbf{(1)}$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

де $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0, |\beta_1| + |\beta| \neq 0$. Спробуємо наближений розв'язок задачі (1), (2) знайти у вигляді аналітичного виразу.

Для цього виберемо спочатку сукупність лінійно незалежних функцій $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$, щоб $u_0(x)$ задовольняла умови (2), а інші функції – відповідні однорідні крайові умови. Якщо $A = B = 0$, то вважатимемо, що $u_0(x) \equiv 0$.

Наближений розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x). \qquad \textbf{(3)}$$

Функція $\bar{y}(x)$ задовольняє крайові умови (2) для довільних сталих c_i, $i = 1, \ldots, n$. Підберемо коефіцієнти c_i, $i = 1, \ldots, n$, так, щоб $\bar{y}(x)$ у певному сенсі найбільш точно задовольняла рівняння (1).

Підставляючи (3) у рівняння (1), одержуємо

$$R(x, c_1, \ldots, c_n) \equiv L[\bar{y}] - f_0(x) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i]. \qquad \textbf{(4)}$$

Якщо для деякого набору коефіцієнтів c_i, $i = 1, \ldots, n$, виконується рівність $R(x, c_1, \ldots, c_n) \equiv 0$, $a \le x \le b$, то функція $\bar{y}(x)$ є точним розв'язком. Але так вдало підібрати коефіцієнти, взагалі кажучи, неможливо. Тому будемо вимагати, щоб функція $R(x, c_1, \ldots, c_n)$ перетворювалася в нуль на деякому наборі точок $x_1, \ldots, x_n$ з відрізка $[a, b]$. Ці точки називатимемо ***точками колокації***.

Таким чином, коефіцієнти c_i, $i=1,...,n$, можуть бути визначені з системи лінійних рівнянь

$$R\left(x_1,c_1,...,c_n\right)=0, \quad ... \quad, R\left(x_n,c_1,...,c_n\right)=0, \tag{5}$$

якщо вона є сумісною. З практичної точки зору важливо, щоб система (5) мала ранг $r=n$. Якщо ж $r<n$, то до точок колокації доцільно додати ще $n-r$ нових точок і знову дослідити новоутворену систему на сумісність.

Приклад 1. Розв'язати методом колокації на відрізку $[0;1]$ крайову задачу $y''-2xy'-2y=-4x$, $y'(0)-y(0)=0$, $y(1)=1+e$.

Розв'язання. Розглянемо функції

$$u_0(x)=x^2+e^x,\ u_1(x)=x^3-x^2,\ u_2(x)=x^4-x^3.$$

Функція $u_0(x)$ задовольняє крайові умови, а функції $u_1(x)$ та $u_2(x)$ – відповідні однорідні умови.

Нехай

$$\overline{y}(x)=x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c_2(x^4-x^3).$$

Тоді

$$\overline{y}'(x)=2x+e^x+c_1(3x^2-2x)+c_2(4x^3-3x^2),$$

$$\overline{y}''(x)=2+e^x+c_1(6x-2)+c_2(12x^2-6x).$$

Отже,

$$\begin{gathered}R\left(x,c_1,c_2\right)=2+4x-6x^2-e^x-2xe^x+\\+c_1\cdot(-8x^3+6x^2+6x-2)+c_2\cdot(-10x^4+8x^3+12x^2-6x).\end{gathered} \tag{6}$$

Виберемо точки колокації $x_1=0$ та $x_2=1$. У результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}-2c_1+1=0,\\ 2c_1+4c_2-3e=0,\end{cases}$$

з якої знаходимо: $c_1=\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{3e-1}{4}$. Отже, наближено маємо

$$\overline{y}(x)=x^2+e^x+\frac{1}{2}(x^3-x^2)+\frac{3e-1}{4}(x^4-x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, $\overline{y}(0,5)$ і точне значення $y(0,5)$:

$$\overline{y}(0,5)=0,5^2+e^{0,5}+\frac{1}{2}(0,5^3-0,5^2)+\frac{3e-1}{4}(0,5^4-0,5^3)\approx 1,724427,$$

$$y(0,5)=0,5+e^{0,25}\approx 1,784025. \ \blacksquare$$

Для досягнення більшої точності потрібно взяти значення $n>2$. Але і для $n=2$ добитися кращої точності іноді вдається за рахунок більшої щільності точок колокації. Зокрема, у прикладі 2 доцільніше було вибрати $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ або $x_1=1/3$, $x_2=2/3$.

3. Метод найменших квадратів. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{cases} y''+g(x)y'+h(x)y=f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a)+\alpha y(a)=A, \\ \beta_1 y'(b)+\beta y(b)=B. \end{cases} \tag{7}$$

Дотримуючись позначень попереднього параграфа, розв'язок задачі (7) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x)=u_0(x)+c_1u_1(x)+\ldots+c_nu_n(x), \tag{8}$$

але тепер вимагатимемо, щоб

$$I=\int_a^b R^2\left(x,c_1,\ldots,c_n\right)\mathrm{d}\,x \tag{9}$$

набував мінімуму (***інтегральний метод найменших квадратів***). Для цього необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c_1}=2\displaystyle\int_a^b R\frac{\partial R}{\partial c_1}\mathrm{d}\,x=0, \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \dfrac{\partial I}{\partial c_n}=2\displaystyle\int_a^b R\frac{\partial R}{\partial c_n}\mathrm{d}\,x=0. \end{cases} \tag{10}$$

Приклад 2. Інтегральним методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу $y''-2xy'-2y=-4x,\ \ y'(0)-y(0)=0,\ y(1)=1+e.$

Розв'язання. Візьмемо функції

$$u_0(x)=x^2+e^x,\quad u_1(x)=x^3-x^2,\quad u_2(x)=x^4-x^3,$$

які задовольняють відповідні крайові умови. Тоді

$$R\left(x,c_1,c_2\right)=2+4x-6x^2-e^x-2xe^x+c_1\left(-8x^3+6x^2+6x-2\right)+$$
$$+c_2\left(-10x^4+8x^3+12x^2-6x\right)\equiv g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x).$$

Оскільки

$$\frac{\partial R}{\partial c_1}=-8x^3+6x^2+6x-2\equiv g_1(x),$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_2}=-10x^4+8x^3+12x^2-6x\equiv g_2(x),$$

то система (10) має вигляд

$$\begin{cases}\int_0^1\left(g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x)\right)g_1(x)\,\mathrm{d}\,x=0,\\ \int_0^1\left(g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x)\right)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}c_1\int_0^1 g_1^2(x)\,\mathrm{d}\,x+c_2\int_0^1 g_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 g_0(x)g_1(x)\,\mathrm{d}\,x,\\ c_1\int_0^1 g_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x+c_2\int_0^1 g_2^2(x)\,\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 g_0(x)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x.\end{cases}$$

З цієї системи можна знайти значення коефіцієнтів c_1 і c_2. Для цього обчислимо спочатку визначені інтеграли з цієї системи:

$$\int_0^1 g_1^2(x)dx=\int_0^1\left(-8x^3+6x^2+6x-2\right)^2\mathrm{d}\,x=$$

$$=4\int_0^1\left(16x^6-24x^5-15x^4+26x^3+3x^2-6x+1\right)\mathrm{d}\,x=\frac{22}{7};$$

$$\int_0^1 g_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1\left(-8x^3+6x^2+6x-2\right)\left(-10x^4+8x^3+12x^2-6x\right)\mathrm{d}\,x=$$

$$=4\int_0^1\left(20x^7-31x^6-27x^5+47x^4+5x^3-15x^2+3x\right)\mathrm{d}\,x=\frac{101}{35};$$

$$\int_0^1 g_0(x)g_1(x)dx=\int_0^1\left(2+4x-6x^2-e^x-2xe^x\right)\left(-8x^3+6x^2+6x-2\right)\mathrm{d}\,x=$$

$$=2\int_0^1\left(24x^5-34x^4-14x^3+24x^2+2x-2+e^x\left(8x^4-2x^3-9x^2-x+1\right)\right)\mathrm{d}\,x=$$

$$=-\frac{1873}{5}+136e;$$

$$\int_0^1 g_2^2(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1\left(-10x^4+8x^3+12x^2-6x\right)^2\mathrm{d}\,x=$$

$$=4\int_0^1\left(25x^8-40x^7-44x^6+78x^5+12x^4-36x^3+9x^2\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1124}{315};$$

$$\int_0^1 g_0(x)g_2(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \left(2+4x-6x^2-e^x-2xe^x\right)\left(-10x^4+8x^3+12x^2-6x\right)\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2\int_0^1 \left(30x^6-44x^5-30x^4+50x^3-6x+e^x\left(10x^5-3x^4-16x^3+3x\right)\right)\mathrm{d}\,x =$$

$$= \frac{49537}{21} - 870e.$$

Отже, маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{22}{7}c_1 + \dfrac{101}{35}c_2 = \dfrac{1873}{5} - 136e, \\ \dfrac{101}{35}c_1 + \dfrac{1124}{315}c_2 = -\dfrac{49537}{21} + 870e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{22\cdot 5}{101}c_1 + c_2 = \dfrac{1873\cdot 7}{101} - \dfrac{136\cdot 35}{101}e, \\ \dfrac{101\cdot 9}{4\cdot 281}c_1 + c_2 = -\dfrac{49537\cdot 15}{4\cdot 281} + \dfrac{870\cdot 9\cdot 35}{4\cdot 281}e. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, одержуємо

$$\frac{123640-91809}{101\cdot 4\cdot 281}c_1 = \frac{14736764+75048555}{101\cdot 4\cdot 281} - \frac{5350240+27679050}{101\cdot 4\cdot 281}e,$$

$$31831c_1 = 89785319 - 33029290e \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{89785319-33029290e}{31831} \approx 0{,}075402.$$

Підставляючи значення сталої c_1 в перше рівняння системи, знаходимо

$$c_2 \approx 1{,}620636.$$

Таким чином, наближеним розв'язком крайової задачі (7.5) є

$$\overline{y}(x) = x^2 + e^x + 0{,}075402\cdot(x^3-x^2) + 1{,}620636\cdot(x^4-x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, $\overline{y}(0,5)$ і порівняємо його із точним значенням $y(0,5)$:

$$\overline{y}(0,5) = 0{,}5^2 + e^{0,5} + 0{,}075402\cdot\left(0{,}5^3-0{,}5^2\right) + 1{,}620636\left(0{,}5^4-0{,}5^3\right) \approx 1{,}788006,$$

$$y(0,5) = 0{,}5 + e^{0,25} \approx 1{,}784025. \blacksquare$$

Зауважимо, що для задачі з прикладу 2 інтегральним методом найменших квадратів вдалося отримати точніше значення розв'язку для $x = 0{,}5$, ніж методом колокації (п. 1).

Замість мінімуму інтеграла (9) можна шукати мінімум скінченної суми (***точковий метод найменших квадратів***)

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} R^2\left(x_i, c_1, \dots, c_n\right),$$

де $x_1, \dots, x_n$ – деяка достатньо щільна сукупність точок відрізка $[a,b]$, $N \ge n$. При цьому одержуємо такі необхідні умови мінімуму

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} R_i \frac{\partial R_i}{\partial_1} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{i=1}^{N} R_i \frac{\partial R_i}{\partial c_n} = 0, \end{cases} \qquad \mathbf{(11)}$$

де $R_i = R(x_i, c_1, \dots, c_n)$.

Зокрема, розв'язуючи крайову задачу (10), одержуємо систему

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{N} g_1^2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{N} g_1(x_i) g_2(x_i) = -\sum_{i=1}^{N} g_0(x_i) g_1(x_i), \\ c_1 \sum_{i=1}^{N} g_1(x_i) g_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{N} g_2^2(x_i) = -\sum_{i=1}^{N} g_0(x_i) g_2(x_i). \end{cases}$$

Зауважимо, що для випадку $N = n$ значення сталих $c_1, \dots, c_n$ у системі (11) можна знайти методом колокації.

3. Метод Гальоркіна. Застосування ***методу Гальоркіна*** ґрунтується на відомій теоремі з теорії рядів Фур'є про тотальність повної ортогональної системи, доведення якої можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 4, § 8).

Теорема 1. *Якщо* $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, *– повна ортогональна сукупність функцій на відрізку* $[a, b]$, *а* $f(x)$ *– неперервна на* $[a, b]$ *функція, ортогональна на* $[a, b]$ *до всіх* $u_n(x)$, *тобто*

$$\int_a^b f(x) u_n(x) \, \mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad \mathbf{(12)}$$

то $f(x) \equiv 0$, $a \le x \le b$.

У загальному випадку для повної ортогональної системи $\{u_n(x)\}$ маємо

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

де

$$c_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_a^b f(x) u_n(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x) \, \mathrm{d}x,$$

причому справджується ***рівність Парсеваля***

$$\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2.$$

Припускаючи, що $f(x)$ ортогональна лише до функцій $u_1(x),\dots,u_N(x)$, маємо

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2 \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \qquad \textbf{(13)}$$

Таким чином, функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ виявиться для великих N в середньому квадратичному достатньо малою.

Повернемося до крайової задачі

$$\begin{cases} L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \qquad \textbf{(14)}$$

розв’язок якої знову шукатимемо у вигляді

$$\overline{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \qquad \textbf{(15)}$$

де $u_0(x), u_1(x),\dots,u_n(x)$ задовольняють відповідні крайові умови, описані у п.1. Аналогічно одержуємо

$$R(x, c_1,\dots,c_n) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i L[u_i].$$

Для того, щоб зробити цю нев’язку у середньому квадратичному якомога можна меншою, вимагатимемо ортогональності R до функцій $u_1(x),\dots,u_n(x)$, тобто

$$\begin{cases} \int_a^b R(x, c_1,\dots,c_n)\, u_1(x)\,\mathrm{d}x = 0, \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \int_a^b R(x, c_1,\dots,c_n)\, u_n(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(16)}$$

Систему (16) можна записати також у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b u_j(x) L[u_i]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u_j(x)\big(f(x) - L[u_0]\big)\,\mathrm{d}x, \quad j = 1,\dots,n. \qquad \textbf{(17)}$$

Приклад 3. Розв’язати методом Гальоркіна на відрізку $[0;1]$ крайову задачу $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y(1) = 1 + e$.

Розв’язання. Виберемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3.$$

Виконання відповідних крайових умов для цих функцій було встановлено раніше. Перевіримо ортогональність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$ на відрізку $[0;1]$. Оскільки

$$\int_0^1 u_1(x)u_2(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (x^3 - x^2)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{168} \neq 0,$$

то умова ортогональності не виконується, але відхилення від нуля є досить незначним. Нехтуючи цим відхиленням, шукатимемо розв'язок у вигляді

$$\overline{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3).$$

Враховуючи відповідні позначення з п.1, систему (16) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} c_1\int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x + c_2\int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x, \\ c_1\int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x + c_2\int_0^1 g_2(x)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^1 g_0(x)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо коефіцієнти c_1 та c_2. Для цього обчислимо спочатку значення інтегралів:

$$\int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2\int_0^1 (-4x^6 + 7x^5 - 4x^3 + x^2)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{7};$$

$$\int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2\int_0^1 (-5x^7 + 9x^6 + 2x^5 - 9x^4 + 3x^3)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{47}{420};$$

$$\int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(x^3 - x^2)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \int_0^1 \left(-6x^5 + 10x^4 - 2x^3 - 2x^2 + e^x(-2x^4 + x^3 + x^2)\right)\mathrm{d}\,x = \frac{311}{6} - 19e;$$

$$\int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^4 - x^3)\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= 2\int_0^1 (-4x^7 + 7x^6 - 4x^4 + x^3)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{10};$$

$$\int_0^1 g_2(x)(x^4-x^3)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1(-10x^4+8x^3+12x^2-6x)(x^4-x^3)\,\mathrm{d}\,x=$$

$$=2\int_0^1(-5x^8+9x^7+2x^6-9x^5+3x^4)\,\mathrm{d}\,x=-\frac{113}{1260};$$

$$\int_0^1 g_0(x)(x^4-x^3)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1(2+4x-6x^2-e^x-2xe^x)(x^4-x^3)\,\mathrm{d}\,x=$$

$$=\int_0^1\left(-6x^6+10x^5-2x^4-2x^3+e^x(-2x^5+x^4+x^3)\right)\mathrm{d}\,x=-\frac{54199}{210}+95e.$$

Отже, для знаходження c_1 і c_2 одержуємо систему

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{7}c_1-\dfrac{47}{420}c_2=-\dfrac{311}{6}+19e,\\ -\dfrac{1}{10}c_1-\dfrac{113}{1260}c_2=\dfrac{54199}{210}-95e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-c_1-\dfrac{47}{60}c_2=-\dfrac{2177}{6}+133e,\\ c_1+\dfrac{113}{126}c_2=-\dfrac{54199}{21}+950e.\end{cases}$$

З останньої системи знаходимо: $c_1\approx 0{,}189738$, $c_2\approx -1{,}419717$.

Таким чином, наближеним розв’язком заданої крайової задачі є

$$\overline{y}(x)=x^2+e^x+0{,}189738\cdot(x^3-x^2)+1{,}419717\cdot(x^4-x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, значення $\overline{y}(0{,}5)$:

$$\overline{y}(0{,}5)=0{,}5^2+e^{0{,}5}+0{,}189738\cdot(0{,}5^3-0{,}5^2)+$$

$$+1{,}419717\cdot(0{,}5^4-0{,}5^3)\approx 1{,}786272.\ \blacksquare$$

Одержали точніше значення розв’язку при $x=0{,}5$, ніж іншими методами (приклади з лекції 7). Значенням точного розв'язку при $x=0{,}5$ є

$$y(0{,}5)=0{,}5+e^{0{,}25}=1{,}784025.$$

Для більшої точності кількість функцій $u_i(x)$ необхідно збільшити. Їх можна вибирати серед функцій вигляду

$$u_n(x)=x^{n+2}-x^{n+1},\ n=1,2,...$$

Лекція 9.

Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі.

План.

1. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі.
2. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі.
3. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі.
4. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов.

1. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі. Нехай в області G з межею Γ задано лінійне диференціальне рівняння з неперервними коефіцієнтами (звичайне або з частинними похідними) і потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який на межі Γ задовольняє лінійні крайові умови.

Розглянемо ліву частину цього рівняння як лінійний оператор L, визначений на множині K функцій, які мають неперервні похідні відповідного порядку у $G \cup \Gamma$ та задовольняють задані крайові умови. Функції з класу K називають ***допустимими функціями***.

Таким чином, неоднорідна крайова задача запишеться у вигляді

$$L[u] = f(P), \qquad P \in G, \tag{1}$$

$$R[u] = \varphi(P), \qquad P \in \Gamma, \tag{2}$$

де R – відомий лінійний функціонал або оператор нижчого порядку, ніж L, f та φ – відомі функції, які будемо вважати неперервними.

Зауважимо, що неоднорідну крайову задачу (1), (2) можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, зробивши заміну

$$u = v + u_0,$$

де $v = v(x)$ – нова невідома функція, $u_0 = u_0(x)$ належить області визначення оператора L (а, отже, й оператора R), причому

$$R[u_0] = \varphi(P).$$

Тоді з (1), (2) одержуємо

$$L[v] = f(P) - L[u_0],$$

$$R[v] = 0.$$

Оскільки функцію u_0, як правило, неважко знайти підбором, то надалі будемо вважати, що $\varphi(P)=0$, і розглядатимемо крайову умову (9.2) у вигляді

$$R[u]=0, \quad P\in\Gamma, \qquad (3)$$

а відповідний клас K позначимо через K_0.

Оператор L називають ***симетричним***, якщо для будь-яких допустимих функцій u та v справджується рівність

$$\int_G v\cdot L[u]\,\mathrm{d}\omega=\int_G u\cdot L[v]\,\mathrm{d}\omega$$

або

$$\left(L[u],v\right)=\left(u,L[v]\right).$$

Оператор L називають ***додатним***, якщо для будь-яких допустимих функцій u справджується нерівність

$$\left(L[u],u\right)\geq 0,$$

причому $\left(L[u],u\right)=0$ тоді і тільки тоді, коли $u\equiv 0$.

Приклад 1. Довести, що оператор $L[u]=-u''$, визначений на множині двічі неперервно диференційовних на відрізку $[0;1]$ функцій, для яких $u(0)=0$, $u'(1)=0$, є симетричним і додатним.

Розв'язання. Для будь-яких допустимих функцій u та v маємо

$$\int_0^1\left(v\,L[u]-u\,L[v]\right)\mathrm{d}\,x=\int_0^1\left(-vu''+uv''\right)\mathrm{d}\,x=$$

$$=\int_0^1\left(uv'-vu'\right)'\mathrm{d}\,x=\left(uv'-vu'\right)\Big|_0^1=0.$$

Отже,

$$\int_0^1 v\cdot L[u]\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 u\cdot L[v]\,\mathrm{d}\,x,$$

звідки й випливає симетричність оператора L. Окрім того,

$$\left(L[u],u\right)=\int_0^1\left(u,L[u]\right)\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 uu''\,\mathrm{d}\,x=-uu'\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1(u')^2\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1(u')^2\,\mathrm{d}\,x\geq 0,$$

причому $\left(L[u],u\right)=0$ лише тоді, коли $u\equiv 0$, оскільки це єдина допустима функція, для якої з врахуванням крайових умов виконується тотожність $u'\equiv 0$. Отже, оператор L додатний. ■

Теорема 1. *Нехай L – додатний лінійний оператор, визначений у класі допустимих функцій* K_0. *Тоді, якщо існує розв'язок задачі* (1), (3), *то він єдиний.*

Доведення. Якщо u_1 та u_2 – два розв'язки задачі (1), (3) у класі K_0, тобто

$$L[u_1] \equiv f(P),\ R[u_1] \equiv 0$$

і

$$L[u_2] \equiv f(P),\ R[u_2] \equiv 0,$$

то

$$L[u_1 - u_2] \equiv 0, \quad R[u_1 - u_2] \equiv 0.$$

Отже, $u_1 - u_2 \in K_0$. Домноживши скалярно перше з отриманих рівнянь на $u_1 - u_2$, одержуємо

$$\left(L[u_1 - u_2],\, u_1 - u_2\right) = 0,$$

а оскільки за умовою оператор L додатний у класі K_0, то одержуємо $u_1 - u_2 \equiv 0$, тобто $u_1 \equiv u_2$, що й потрібно було довести. ►

2. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі. Ідея варіаційного методу розв'язування крайових задач полягає у тому, що задача (1), (3) замінюється рівносильною задачею відшукання функції, яка надає екстремуму деякому функціоналу.

Теорема 2. *Нехай L – симетричний лінійний оператор, визначений і додатний у класі допустимих функцій* K_0, *а* $F[u]$ *– функціонал вигляду*

$$F[u] = \left(L[u],u\right) - 2\left(f,u\right) \equiv \int_G \left(L[u] - 2f\right)\cdot u\,\mathrm{d}\omega, \tag{4}$$

де $f = f(P)$ *– права частина рівняння* (1). *Тоді, якщо крайова задача* (1),(3) *має розв'язок* $u = \bar{u}$, *то на цьому розв'язку досягається мінімум функціоналу* $F[u]$.

Доведення. Якщо $\bar{u}$ – розв'язок задачі (1), (3), то

$$L[\bar{u}] \equiv f(P),\ R[\bar{u}] \equiv 0.$$

Крім того, з симетричності оператора L випливає, що

$$\left(L[\bar{u}],u\right) = \left(\bar{u},L[u]\right) = \left(L[u],\bar{u}\right).$$

Отже,

$$F[u] = \left(L[u],u\right) - 2\left(f,u\right) = \left(L[u],u\right) - 2\left(L[\bar{u}],u\right) =$$

$$= \left(L[u],u\right) - \left(L[u],\bar{u}\right) - \left(L[\bar{u}],u\right) =$$

$$=\left(L[u],u-\overline{u}\right)-\left(\left(L[\overline{u}],u\right)-\left(L[\overline{u}],\overline{u}\right)\right)-\left(L[\overline{u}],\overline{u}\right)=$$
$$=\left(L[u],u-\overline{u}\right)-\left(L[\overline{u}],u-\overline{u}\right)-\left(L[u],\overline{u}\right)=$$
$$=\left(L[u-\overline{u}],u-\overline{u}\right)-\left(L[\overline{u}],\overline{u}\right)\geq-\left(L[\overline{u}],\overline{u}\right),$$

причому, оскільки оператор L є додатним, то рівність досягається лише тоді, коли $u-\overline{u}\equiv 0$, тобто $u\equiv\overline{u}$. Таким чином,

$$\min_{u\in K_0}F[u]=F[\overline{u}]=-\left(L[\overline{u}],\overline{u}\right).$$ ►

Зауваження. Теорема 2 дає можливість звести розв'язування крайової задачі (1), (3) до знаходження функції $\overline{u}$, на якій функціонал $F[u]$ набуває мінімуму. Справджується й обернене твердження: *якщо у класі* K_0 *існує функція* $\overline{u}$*, на якій досягається мінімум функціоналу* $F[u]$*, то ця функція є розв'язком рівняння* (1).

З теореми 2 та зауваження до неї випливає, що *крайова задача (1), (3) із симетричним додатним оператором L рівносильна варіаційній задачі відшукання функції* $\overline{u}$*, на якій досягається мінімум функціоналу* $F[u]$*, визначеного рівністю (4).*

3. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі. Розглянемо рівняння

$$y''+g(x)y'+h(x)y=f_0(x) \tag{5}$$

з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)+\alpha y(a)=0,\\ \beta_1 y'(b)+\beta y(b)=0,\end{cases} \tag{6}$$

де $g(x)$, $h(x)$, $f_0(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, $|\alpha_1|+|\alpha|\neq 0$, $|\beta_1|+|\beta|\neq 0$.

Домноживши обидві частини рівняння (5) на функцію

$$p(x)=e^{\int_0^x g(t)\,dt}>0,$$

запишемо це рівняння у вигляді

$$(p(x)y')'-q(x)y=f(x), \tag{7}$$

де

$$q(x)=-h(x)p(x),\quad f(x)=f_0(x)p(x),$$

причому функції $q(x)$, $f(x)$ та $p'(x)$ – неперервні на $[a,b]$.

За допомогою лінійного оператора

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y \qquad \textbf{(8)}$$

рівняння (7) можна записати у вигляді

$$L[y] = -f(x). \qquad \textbf{(9)}$$

Покажемо, що оператор L у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій, які задовольняють крайові умови (6), є симетричним. Справді, якщо $u \in K_0$ та $v \in K_0$, то з (8) одержуємо

$$\left(L[u], v\right) - \left(u, L[v]\right) =$$

$$= \int_a^b \left(\left(-\left(p(x)v'\right)' + q(x)v \right) v - \left(-\left(p(x)v'\right)' + q(x)v \right) u \right) \mathrm{d}\, x =$$

$$= \int_a^b \left(p(x)(uv'' - vu'') + p'(x)(uv' - vu') \right) \mathrm{d}\, x =$$

$$= \int_a^b \left(p(x)(uv' - vu') \right)' \mathrm{d}\, x = p(x)(uv' - vu')\Big|_a^b = p(b)\omega(b) - p(a)\omega(a),$$

де

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}.$$

Оскільки функції $u(x)$ та $v(x)$ задовольняють однорідні крайові умови

$$\alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad \beta_1 u'(b) + \beta u(b) = 0,$$

$$\alpha_1 v'(a) + \alpha v(a) = 0, \quad \beta_1 v'(b) + \beta v(b) = 0$$

відповідно, то

$$\omega(a) = \omega(b) = 0.$$

Отже,

$$\left(L[u], v\right) = \left(u, L[v]\right),$$

тобто оператор L є симетричним у класі K_0.

З’ясуємо, за яких умов цей оператор буде додатним. Для функції $y \in K_0$

$$\left(L[y], y\right) = \int_a^b \left(-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y \right) y \,\mathrm{d}\, x = -\int_a^b \left(p(x)y'\right)' y \,\mathrm{d}\, x + \int_a^b q(x)y^2 \,\mathrm{d}\, x =$$

$$= -p(x)yy'\Big|_a^b + \int_a^b p(x)(y')^2 \,\mathrm{d}\, x + \int_a^b q(x)y^2 \,\mathrm{d}\, x. \qquad \textbf{(10)}$$

Оскільки $p(x) > 0$, то для того, щоб оператор L був додатнім, достатньо, щоб

$$q(x) \geq 0, \quad y(a) \cdot y'(a) \geq 0, \quad y(b) \cdot y'(b) \leq 0. \qquad \mathbf{(11)}$$

Використовуючи рівність (6), умови (11) можна записати у вигляді

$$q(x) \geq 0, \quad \alpha \cdot \alpha_1 \leq 0, \quad \beta \cdot \beta_1 \geq 0. \qquad \mathbf{(12)}$$

Таким чином, якщо справджуються умови (12), то крайова задача (5), (6) рівносильна задачі про мінімум у класі K_0 функціоналу

$$F[y] = \big(L[y], y\big) + 2(f, y). \qquad \mathbf{(13)}$$

Враховуючи (10), одержуємо

$$\begin{aligned} F[y] = {} & p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \\ & + \int_a^b \Big(p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y \Big) \mathrm{d}x. \end{aligned} \qquad \mathbf{(14)}$$

Очевидно, що для дослідження на мінімум функціонала $F[y]$ досить дослідити на мінімум функціоналу інтегральний доданок у виразі (14), який позначимо через $\Phi[y]$.

4. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов. Розглянемо крайову задачу для рівняння (5) з неоднорідними умовами

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta y(a) = B. \qquad \mathbf{(15)}$$

Її розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x) = z(x) + y_0(x),$$

де $y_0(x)$ – двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$ функція, яка задовольняє умови (15), а $z(x)$ – розв'язок рівняння

$$L[z] = -f(x) - L[y_0] \equiv -f_1(x),$$

який задовольняє відповідні однорідні крайові умови. Розв'язок $z(x)$ на підставі формули (14) можна знайти, досліджуючи на мінімум функціонал

$$\begin{aligned} F_1[z] = {} & p(a)z(a)z'(a) - p(b)z(b)z'(b) + \\ & + \int_a^b \Big(p(x)(z')^2 + q(x)z^2 + 2f_1(x)z \Big) \mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \mathbf{(16)}$$

у класі функцій $z \in K_0$.

Зазначимо, що функцію z можна було і не вводити, а замінити її у формулі (9) на $y - y_0$. При цьому мінімум функціонала F_1 потрібно було б шукати у класі K двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій, які задовольняють умови (8).

Оскільки, крім того,

$$F_1[y-y_0]=\left(L[y-y_0],y-y_0\right)+2\left(f+L[y-y_0],y-y_0\right)=$$
$$=\left(L[y],y\right)+2\left(f,y\right)-\left(L[y_0],y_0\right)-2\left(f,y_0\right)+\left(L[y_0],y\right)-\left(L[y],y_0\right)=$$
$$=F[y]-F[y_0]+\int_a^b\left(\left(p(x)y'\right)y_0-\left(p(x)y_0'\right)y\right)\mathrm{d}\,x=$$
$$=F[y]-F[y_0]+p(x)\left(y_0(x)y'(x)-y(x)y_0'(x)\right)\Big|_a^b=F[y]+c\,,$$

то достатньо дослідити на мінімум лише функціонал $\Phi[y]$ у класі K.

Лекція 10.
Методи Рітца.

План.

1. Наближене розв’язування варіаційної задачі методом Рітца.
2. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі.
3. Розв’язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами

1. Наближене розв’язування варіаційної задачі методом Рітца. Розглянемо функціонал

$$F[u]=\left(L[u],u\right)-2(f,u), \qquad \textbf{(1)}$$

який визначений на множині K функцій u, що задовольняють крайову умову

$$R[u]=\varphi(p), \qquad \textbf{(2)}$$

де L – додатний лінійний оператор, R – відомий лінійний оператор, f та φ – неперервні функції.

Нехай $u_0(p), u_1(p),\dots,u_n(p)$ – такі функції з області визначення оператора L, що

$$R[u_0]=\varphi(p), \quad R[u_i]=0, \;\; i=1,\dots,n. \qquad \textbf{(3)}$$

Позначимо

$$u(p)=u_0(p)+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i(p). \qquad \textbf{(4)}$$

Оскільки

$$R[u]=R[u_0]+\sum_{i=1}^{n}c_iR[u_i]=\varphi(p)+\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot 0=\varphi(p),$$

то $u\in K$ для будь-яких значень сталих $c_1,c_2,\dots,c_n$.

Підставимо функцію $u(p)$ у функціонал (1). Тоді

$$F[u]=\left(L\left[u_0+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right],u_0+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right)-2\left(f,u_0+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right)=$$

$$=\left(L[u_0],u_0\right)+\sum_{i=1}^{n}c_i\left(L[u_i],u_0\right)+\sum_{i=1}^{n}c_i\left(L[u_0],u_i\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\left(L[u_i],u_j\right)-2\left(f,u_0\right)-2\sum_{i=1}^{n}c_i\left(f,u_i\right)\equiv\Phi(c_1,c_2,\dots,c_n), \qquad \textbf{(5)}$$

де Φ – відома функція змінних $c_1,c_2,\dots,c_n$.

Таким чином, варіаційна задача (1), (2) зводиться до відшукання точок екстремуму функції $\Phi(c_1, c_2, ..., c_n)$. Це приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0, \tag{6}$$

з якої можна знайти сталі $c_1, c_2, ..., c_n$. Якщо підставити їх у (4), то одержимо функцію $\bar{u} \in K$, на якій функціонал $F[u]$ набуває екстремуму.

Враховуючи (5), систему (6) у випадку симетричного у класі K_0 оператора L можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \left(L[u_0], u_1\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \left(L[u_i], u_1\right) = \left(f, u_1\right), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \left(L[u_0], u_n\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \left(L[u_i], u_n\right) = \left(f, u_n\right). \end{cases} \tag{7}$$

Якщо визначник системи (7) відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок. Зауважимо, що у випадку однорідних крайових умов $R[u]=0$ одержуємо $\varphi(p) \equiv 0$. Тоді також $u_0(p) \equiv 0$, а отже, перший доданок у кожному з рівнянь системи (7) буде відсутнім.

2. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі. Застосуємо метод Рітца до розв'язування крайової задачі

$$y'' - q(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0, \tag{8}$$

де $q(x)$, $f(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, $q(x) \geq 0$.

Як випливає з результатів попереднього пункту лекції, задача (8) зводиться до задачі про мінімум функціоналу $F[y]$, визначеного формулою (14) з попередньої лекції, який для задачі (8) набуває вигляду

$$F[y] = \int_a^b \left(p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y \right) \mathrm{d}x \tag{9}$$

і розглядається у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій, які на кінцях цього відрізка перетворюються у нуль.

Нехай функції $u_1(x), ..., u_n(x)$ належать класу K_0. Розглянемо функцію

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \tag{10}$$

і підставимо її у (9). Будемо мати:

$$F[u]=\int_a^b\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i'(x)\right)^2+q(x)\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i(x)\right)^2+2f(x)\sum_{i=1}^n c_i u_i(x)\right)\mathrm{d}\,x\,.$$

Диференціюючи $F[y]$ за змінними $c_1,c_2,...,c_n$ і прирівнюючи отримані похідні до нуля, для відшукання $c_1,c_2,...,c_n$ одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^n c_i\int_a^b\left(u_i'(x)u_1'(x)+q(x)u_i(x)u_1(x)\right)\mathrm{d}\,x=-\int_a^b f(x)u_1(x)\,\mathrm{d}\,x,\\ \dots\quad\dots\quad\dots\\ \sum_{i=1}^n c_i\int_a^b\left(u'(x)u_n'(x)+q(x)u_i(x)u_n(x)\right)\mathrm{d}\,x=-\int_a^b f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x.\end{cases}\qquad \textbf{(11)}$$

Якщо визначник системи (11) відмінний від нуля, то $c_1,c_2,...,c_n$ з неї можна знайти однозначно. Підставляючи їх у формулу (10), одержимо наближений розв'язок задачі (8).

Приклад 1. Розв'язати методом Рітца на відрізку $[0;1]$ крайову задачу $y''-y=x,\quad y(0)=y(1)=0$.

Розв'язання. Функції $q(x)=1$ і $f(x)=x$ – неперервні на $[0;1]$, причому $q(x)>0$. Обмежившись випадком $n=2$, виберемо функції

$$u_1(x)=x^2-x,\quad u_2(x)=x^3-x^2.$$

Тоді

$$u_1'(x)=2x-1,\, u_2'(x)=3x^2-2x$$

і система (11) має вигляд

$$\begin{cases} c_1\int_0^1\left((2x-1)^2+(x^2-x)^2\right)\mathrm{d}\,x+\\ +c_2\int_0^1\left((3x^2-2x)(2x-1)+(x^3-x^2)(x^2-x)\right)\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 x(x^2-x)\,\mathrm{d}\,x,\\ c_1\int_0^1\left((2x-1)(3x^2-2x)+(x^2-x)(x^3-x^2)\right)\mathrm{d}\,x+\\ +c_2\int_0^1\left((3x^2-2x)^2+(x^3-x^2)^2\right)\mathrm{d}\,x=-\int_0^1 x(x^3-x^2)\,\mathrm{d}\,x.\end{cases}$$

Виконавши необхідні обчислення, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{11}{30}c_1 + \dfrac{11}{60}c_2 = \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{11}{60}c_1 + \dfrac{1}{7}c_2 = \dfrac{1}{20}, \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$c_1 = \frac{69}{473}, \ c_2 = \frac{7}{43}.$$

Таким чином, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) \approx 0{,}163x^3 - 0{,}017x^2 - 0{,}146x.$$

Обчислюючи, наприклад, $\bar{y}(0{,}5) \approx -0{,}057$, переконуємося, що отриманий цим методом результат співпадає зі значенням точного розв'язку $y(0{,}5) = -0{,}057$, знайденим на лекції 2. ■

3. Розв'язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$\left(p(x)y'\right)' - q(x)y = f(x), \qquad \textbf{(12)}$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, і задамо неоднорідні крайові умови

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \qquad \textbf{(13)}$$

Будемо вважати також, що

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0, \quad \alpha_1 \cdot \alpha \le 0, \quad \beta_1 \cdot \beta \ge 0.$$

Тоді, як було встановлено раніше, розв'язання задачі (12), (13) зводиться до дослідження на мінімум функціонала $\Phi[y]$, визначеного у класі *K*.

Приклад 2. Розв'язати методом Рітца на відрізку $[0;1]$ крайову задачу $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e$.

Розв'язання. Спочатку зведемо задане рівняння (15.3) до вигляду (12). Домноживши обидві частини рівняння на функцію

$$p(x) = e^{\int_0^x (-2t)\,dt} = e^{-x^2} > 0,$$

одержуємо

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' - 2e^{-x^2} y = -4xe^{-x^2}.$$

Таким чином, $q(x)=2e^{-x^2}>0,\quad f(x)=-4xe^{-x^2}$, причому функції , $q(x),\ f(x)$ неперервні на відрізку $[0;1]$. Окрім того, оскільки $\alpha_1=1,\ \alpha=-1,\ \beta_1=0,\ \beta=1$, то $\alpha_1\alpha\le 0,\ \beta_1\beta\ge 0$.

Розглянемо оператор

$$L[y]=-\left(e^{-x^2}y'\right)'+2e^{-x^2}y. \qquad \textbf{(14)}$$

Як доведено у попередньому пункті лекції, оператор $L[y]$ є симетричним і додатним у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[0;1]$ функцій, які задовольняють відповідні однорідні крайові умови

$$y'(0)-y(0)=0,\quad y(1)=0. \qquad \textbf{(15)}$$

Легко перевірити, що функція $u_0(x)=x^2+e^x$ задовольняє задані крайові умови, а функції $u_1(x)=x^3-x^2$ та $u_2(x)=x^4-x^3$ задовольняють умови (15), причому обидві ці функції – двічі неперервно диференційовні на відрізку $[0;1]$.

Обмежившись випадком $n=2$, розв'язок заданої крайової задачі шукатимемо у вигляді

$$y(x)=x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c^2(x^4-x^3).$$

При цьому для довільних значень c_1 і c_2 будемо мати

$$y(0)=1,\quad y(1)=1+e.$$

Тоді

$$\Phi[y]=\int_0^1\Big(\left(2x+e^x+c_1(3x^2-2x)+c_2(4x^3-3x^2)\right)^2+$$
$$+2\left(x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c_2(x^4-x^3)\right)^2-$$
$$-8x\left(x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c_2(x^4-x^3)\right)\Big)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Продиференціюємо $\Phi[y]$ за змінними c_1 і c_2:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c_1}=\int_0^1\Big(2\left(2x+e^x+c_1(3x^2-2x)+c_2(4x^3-3x^2)\right)\cdot(3x^2-2x)+$$
$$+4\left(x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c_2(x^4-x^3)\right)(x^3-x^2)-8x(x^3-x^2)\Big)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c_2}=\int_0^1\Big(2\left(2x+e^x+c_1(3x^2-2x)+c_2(4x^3-3x^2)\right)\cdot(4x^3-3x^2)+$$
$$+4\left(x^2+e^x+c_1(x^3-x^2)+c_2(x^4-x^3)\right)(x^4-x^3)-8x(x^4-x^3)\Big)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Прирівнявши знайдені похідні до нуля, для знаходження невідомих c_1, c_2 одержуємо систему

$$\begin{cases} c_1\int\limits_0^1 g_{11}(x)\,\mathrm{d}\,x + c_2\int\limits_0^1 g_{12}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^1 g_1(x)\,\mathrm{d}\,x, \\ c_2\int\limits_0^1 g_{21}(x)\,\mathrm{d}\,x + c_2\int\limits_0^1 g_{22}(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_0^1 g_2(x)\,\mathrm{d}\,x, \end{cases} \qquad \mathbf{(16)}$$

де

$$g_{11}(x) = (2x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 12x^3 + 4x^2)\cdot e^{-x^2},$$

$$g_{12}(x) = (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3)\cdot e^{-x^2},$$

$$g_{21}(x) = (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3)\cdot e^{-x^2},$$

$$g_{22}(x) = (2x^8 - 4x^7 + 18x^6 - 24x^5 + 9x^4)\cdot e^{-x^2},$$

$$g_1(x) = \left(-2x^5 + 6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - (2x^3 + x^2 - 2x)e^x\right)\cdot e^{-x^2},$$

$$g_2(x) = \left(-2x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 6x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 3x^2)e^x\right)\cdot e^{-x^2}.$$

Оскільки інтеграли у системі (16) у скінченному вигляді не беруться, то, обчисливши їх наближено, одержуємо систему

$$\begin{cases} 0{,}876584\cdot c_1 + 0{,}059373\cdot c_2 = 0{,}100804, \\ 0{,}059373\cdot c_1 + 0{,}047755\cdot c_2 = 0{,}078285, \end{cases}$$

з якої знаходимо $c_1 \approx 0{,}251006, \quad c_2 \approx 1{,}327222.$

Отже, шуканий наближений розв'язок має вигляд

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + \ 0{,}251006(x^3 - x^2) + 1{,}327222(x^4 - x^3).$$

Для порівняння його з точним розв'язком $y(x) = x + e^{x^2}$ обчислимо, наприклад, $\bar{y}(0{,}5) = 1{,}784394$. Нагадаємо, що $y(0{,}5) = 1{,}784025$.

Як бачимо, точність є досить високою, а для досягнення більшої точності кількість функцій $u_i(x)$ необхідно збільшити. ■

Зауважимо також, що $u_0(x)$ можна було шукати також у вигляді $u_0(x) = ax + b$ з невизначеними коефіцієнтами, а інші функції $u_k(x)$ – у вигляді многочленів $(k+1)$-го степеня.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина. 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах. – Івано-Франківськ: ЛІК, 2005. – 120 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. – Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
6. Коллатц Л. – Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1953. – 490 с.
7. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
8. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
10. Положий Г.Н. и др. Математический практикум. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
12. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 230 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. – Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
14. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
15. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 516 с.

ЗМІСТ