

---

---

---

Т.П. Гой, М.І. Копач, І.В. Федак

**НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ  
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

---

---

---

**Міністерство освіти і науки України**  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

**Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В.**

**НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ  
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Івано-Франківськ  
2008

УДК 519.62: 519.63

ББК 22.193.2

Г 59

*Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів напряму підготовки “математика” вищих навчальних закладів (протокол № 5 від 12 грудня 2007 р.).*

#### **Рецензенти:**

*Каленюк П.І.*, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»).

*Черевко І.М.*, доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича),

*Боднар Д.І.*, доктор фізико-математичних наук, професор (Тернопільський національний економічний університет),

**Г55 Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В.** Наближені методи розв’язування диференціальних рівнянь. Навчальний посібник для студентів напряму підготовки “математика”. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2008. – 157 с.

У посібнику розглядаються основні методи наближеного розв’язування задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, числові та варіаційні методи розв’язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Наведені приклади розв’язування конкретних задач кожним із пропонованих методів. Для числових методів складені відповідні програми, наведені результати реалізації цих програм. Пропонуються також задачі для самостійного розв’язування, які можуть бути використані при проведенні практичних занять.

Для студентів напряму підготовки “математика” вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації.

ISBN 978-966-640-195-6

© Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В., 2008.

© Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2008.

## ВСТУП

Читач, який вже знайомий з теорією звичайних диференціальних рівнянь, знає, що навіть рівняння першого порядку, інтегровані у квадратурах (а в елементарних функціях і поготів), складають лише незначну частину всіх звичайних диференціальних рівнянь. Для більшості ж диференціальних рівнянь відшукати розв'язок, який задовольняє задані умови (наприклад, початкові або крайові), за допомогою скінченної кількості математичних операцій неможливо.

Тому природно виникла потреба у створенні методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. Методи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь з наперед заданою точністю називають *наближеними методами* інтегрування рівнянь. Ці методи залежно від форми представлення розв'язку умовно можна розділити на три групи:

**1) аналітичні методи; 2) графічні методи; 3) числові методи.**

*Аналітичні методи* наближеного інтегрування диференціальних рівнянь дають можливість представити наближені розв'язки рівнянь із заданою точністю у вигляді аналітичних виразів, тобто формул, придатних для обчислення значень цих розв'язків в області зміни аргументу.

Окремий клас серед аналітичних методів утворюють *асимптотичні методи*, де точність отриманого розв'язку зростає із зменшенням проміжку інтегрування чи проміжку зміни деяких параметрів, або ж, навпаки, наближений розв'язок тим точніший, чим більших значень набуває аргумент або деякі інші параметри. Прикладом асимптотичного методу інтегрування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, є відомий з курсу диференціальних рівнянь метод послідовних наближень (див., наприклад, [16], § 1.2).

*Графічні методи* дають наближене представлення шуканого розв'язку на деякому проміжку у вигляді графіка, який можна побудувати за певними правилами, пов'язаними з геометричним тлумаченням умов задачі. Відзначимо, що для певних класів диференціальних рівнянь в основу графічних методів наближеного розв'язку можна покласти фізичне або, якщо точніше, електротехнічне тлумачення заданих умов. Реалізуючи на технічному рівні задані електричні процеси, на екрані осцилографа спостерігають поведінку розв'язків рівнянь, що описують ці процеси.

І нарешті, найбільш важливими у наш, характерний бурхливим розвитком і проникненням в усі сфери людської діяльності обчислювальної техніки, час, є *числові методи* розв'язування диференціальних рівнянь. Такі методи передбачають отримання числової таблиці наближених значень шуканого розв'язку для певних дискретних значень аргумента, тобто заміну неперервної області зміни аргумента функції дискретною множиною точок (сіткою) та апроксимацію (наближення) диференціального оператора різнице-вим оператором, визначеним на цій сітці.

Нагадаємо деякі основні поняття з курсу звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної

$$y' = f(x, y). \quad (0.1)$$

Задача Коші для рівняння (0.1) полягає у знаходженні такого розв'язку  $y = y(x)$ , який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (0.2)$$

Задача Коші (0.1), (0.2) має єдиний розв'язок, наприклад, за виконання умов теореми Пікара (див., наприклад, [16], § 1.2).

**Теорема 1 (Пікара).** Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в замкненому прямокутнику  $Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ ,  $a > 0, b > 0$  і задовольняє у ньому умову Ліпшица за змінною  $y$ , тобто існує така стала  $L > 0$ , що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (0.3)$$

для будь-яких точок  $(x, y_1) \in Q$ ,  $(x, y_2) \in Q$ , то існує єдиний розв'язок  $y = y(x)$  рівняння (0.1), який задовольняє початкову умову (0.2). Цей розв'язок визначений і неперервно диференційовний принаймні на відрізку  $|x - x_0| < h$ , де  $h = \min\{a, b/M\}$ ,  $M = \max_{(x, y) \in Q} |f(x, y)|$ .

Умова (0.3), зокрема, виконується, якщо функція  $f(x, y)$  в прямокутнику  $Q$  має обмежену частинну похідну  $f'_y(x, y)$  ([16], § 1.2).

Задача Коші для диференціального рівняння  $n$ -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (0.4)$$

полягає у знаходженні такого розв'язку  $y = y(x)$ , який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (0.5)$$

де  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  – задані числа.

Більшість числових методів, розроблених для розв'язування одного звичайного диференціального рівняння, легко узагальнюються на системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (0.6)$$

полягає у знаходженні розв'язку  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , який задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}, \quad (0.7)$$

де  $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$  – задані числа.

Систему, яка містить похідні вищих порядків і розв’язана відносно старших похідних шуканих функцій, введенням нових невідомих функцій можна звести до вигляду (0.6).

Зокрема, диференціальне рівняння (0.4) зводиться до системи вигляду (0.6) за допомогою заміन

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

При цьому нові функції  $y_1, y_2, \dots, y_n$  задовольнятимуть систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (0.8)$$

Відповідь на питання про існування та єдиність розв’язку задачі Коші (0.6), (0.7) дає така теорема ([7], розділ 1, § 1).

**Теорема 2.** *Нехай функції  $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , визначені і неперервні в замкненій області*

$$Q = \{(x, y_1, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, \quad |y_1 - y_{10}| \leq b_1, \dots, \quad |y_n - y_{n0}| \leq b_n\},$$

*та задовольняють у ній умови Ліпшица за змінними  $y_1, \dots, y_n$ , тобто*

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \leq L \cdot \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - y_j|, \quad k = 1, \dots, n,$$

*для будь-яких  $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in Q$ ,  $(x, y_1, \dots, y_n) \in Q$ , де  $L$  – деяка додатна стала (стала Ліпшица). Тоді існує єдиний розв’язок задачі Коші (0.6), (0.7)  $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ , який визначений принаймні на інтервалі  $|x - x_0| < h$ , де  $h = \min\{a, b/M\}$ .*

Зауважимо, що замість умов Ліпшица достатньо вимагати обмеженості в області  $Q$  частинних похідних  $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ .

Тоді можна прийняти, що  $L = \max_{k,j} \left| \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \right|$ .

Надалі вважатимемо, що на проміжку, де шукається розв'язок, виконуються всі умови, які забезпечують його існування та єдиність. Водночас, у кожному конкретному випадку можуть накладатися додаткові умови, які враховують специфіку методу.

Враховуючи зв'язок між рівнянням (0.4) та системою (0.8), а також можливість запису системи (0.6) у вигляді векторного рівняння

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (0.9)$$

де  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , надалі обмежимося викладом методів лише для рівняння (0.1). Одержані при цьому формули легко можуть бути перенесені на відповідні векторні рівняння вигляду (0.9).

Окрім того, у посібнику розглядаються наближені методи розв'язування крайових задач як для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, так і для рівнянь з частинними похідними другого порядку. Постановки таких крайових задач та умови існування їх розв'язків розглядаються у другому та третьому розділах посібника.

До більшості числових методів розв'язування задачі Коші, так і крайових задач пропонуються програми реалізації цих методів на мові програмування Basic. Зазначимо, що вибір цієї мови програмування не є обов'язковим, а наведені програми можна розглядати як один з можливих варіантів для отримання конкретних числових значень сіткових функцій.



## РОЗДІЛ І.

# НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### § 1. Метод послідовних наближень

Розглянемо задачу Коші для рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Відомо, що задача знаходження розв'язку задачі (1.1), (1.2) рівносильна задачі знаходження неперервного розв'язку інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) будемо розв'язувати *методом послідовних наближень (методом ітерацій)*, який полягає у наступному.

Виберемо спочатку деяку функцію  $y_0(x)$ , яка задовольняє початкову умову (1.2). Цю функцію назвемо *нульовим (початковим) наближенням*. Потім підставимо  $y_0(x)$  у праву частину формули (1.3) і матимемо *перше наближення*:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt.$$

Аналогічно, маючи перше наближення  $y_1(x)$ , знайдемо друге наближення  $y_2(x)$  і так далі. У загальному випадку для  $n$ -го наближення одержуємо рекурентне співвідношення

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (1.4)$$

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що якщо функція  $f(x, y)$  в області  $Q$ , яка містить точку  $(x_0, y_0)$ , задовольняє умови теореми Пікара, то незалежно від вибору нульового наближення функціональна послідовність  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$  рівномірно збігається на відрізку  $|x - x_0| \leq h$  до функції  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ , яка є розв'язком задачі Коші (1.1), (1.2) (див., наприклад, [16], § 1.2).

Оцінимо похибку  $\varepsilon_n(x)$  наближеного розв'язку  $y_n(x)$

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|,$$

використовуючи при цьому формули (1.3), (1.4) та умову Ліпшица (0.3):

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_{n-1}(t) dt, \quad (1.5)$$

де  $L$  – стала Ліпшица.

Враховуючи тепер початкове наближення  $y_0(x) \equiv y_0$  та формулу Лагранжа про скінченний приріст, маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= |y(x) - y_0| = |y'(\xi)| \cdot |x - x_0| = \\ &= |f(\xi, y(\xi))| \cdot |x - x_0| \leq M |x - x_0|, \end{aligned}$$

де  $M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|$ .

Далі з (1.5) одержуємо

$$\varepsilon_1(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_0(t) dt \leq LM \int_{x_0}^x |t - x_0| dt = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Звідси встановлюємо оцінку похибки наближеного розв'язку  $y(x)$  на відрізку  $|x - x_0| \leq h$ :

$$\varepsilon_n(x) \leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

де

$$h = \min \{a, b/M\}. \quad (1.7)$$

**Приклад 1.1.** Методом послідовних наближень знайти наближений розв'язок задачі Коші  $y' = x + 2y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

**Розв'язання.** Використовуючи формулу (1.3), замінимо задачу Коші інтегральним рівнянням

$$y(x) = \int_0^x (t + 2y^2) dt.$$

За початкове наближення візьмемо  $y_0(x) \equiv 0$ . За формулою (1.4) можемо знайти наступні послідовні наближення:

$$y_1(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \int_0^x \left( t + \frac{t^4}{2} \right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} \quad \text{і т.д.}$$

Оцінимо похибку цих наближень. Оскільки права частина рівняння визначена і неперервна на всій площині, то в якості чисел  $a$  та  $b$  (параметрів області  $Q$ ) можна взяти довільні додатні числа. Візьмемо для визначеності прямокутник

$$Q = \{(x, y) : |x| \leq 0,5, |y| \leq 0,5\}.$$

Тоді

$$M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)| = \max_{(x,y) \in Q} |x + 2y^2| \leq \max_{(x,y) \in Q} (|x| + 2y^2) \leq 1,$$

$$L = \max_{(x,y) \in Q} |f'_y(x, y)| = \max_{(x,y) \in Q} |4y| \leq 4 \max_{(x,y) \in Q} |y| \leq 2.$$

Згідно з умовою (1.7) виберемо  $h = 0,5$ . Таким чином, для знаходження розв'язку на відрізку  $[-0,5; 0,5]$  з точністю, наприклад, до  $0,01$ , число  $n$  необхідно вибрати так, щоб виконувалась нерівність (1.6), тобто

$$\frac{2^n (0,5)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,01.$$

Для цього досить взяти  $n = 4$ . ■

Зауважимо, що в окремих випадках методом послідовних наближень розв'язок задачі Коші можна знайти точно.

**Приклад 1.2.** Розв'язати задачу Коші  $y' = x - y$ ,  $y(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Виберемо  $y_0(x) \equiv 1$ . За формулою (1.4) послідовно знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t-1) dt = 1 - x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left( t-1 + t - \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}, \quad y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}.$$

За допомогою методу математичної індукції можна встановити, що

$$y_n(x) = 1 - x + 2 \left( \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Перейшовши до границі при  $n \rightarrow \infty$ , будемо мати

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 - x + 2(e^{-x} - (1-x)) = 2e^{-x} - 1 + x. \blacksquare$$

Метод послідовних наближень можна застосовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь, а також для розв'язування рівняння  $n$ -го порядку, якщо його записати у вигляді системи.

**Приклад 1.3.** Методом послідовних наближень на відрізку  $[-0,5; 0,5]$  з точністю до 0,05 знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} y' = x + yz, \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 0,5$ .

**Розв'язання.** Запишемо систему у вигляді

$$y = 1 + \int_0^x (t + yz) dt, \quad z = \frac{1}{2} + \int_0^x (t^2 - y^2) dt.$$

Враховуючи початкові умови, з заданої системи знаходимо

$y'(0) = 0,5$  і  $z'(0) = -1$ , тому за початкові наближення  $y_0(x), z_0(x)$

виберемо  $y_0(x) = 1 + \frac{x}{2}$ ,  $z_0(x) = \frac{1}{2} - x$ .

Знайдемо наближення  $y_1(x)$  і  $z_1(x)$ :

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left( x + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3,$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left( x^2 - 1 - x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

Аналогічно одержуємо

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7,$$

$$z_2(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \frac{29}{960}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7.$$

Оцінимо тепер різниці  $y_1(x) - y_2(x)$  і  $z_1(x) - z_2(x)$  на відрізку  $[-0,5; 0,5]$ . Будемо мати:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| -\frac{7}{48}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7 \right| \leq \\ &\leq |x^3| \cdot \left| \frac{7}{48} + \frac{5}{96}x + \frac{1}{168}x^4 \right| \leq 0,03, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_1(x) - z_2(x)| &= \left| -\frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \frac{29}{960}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7 \right| \leq \\ &\leq |x^3| \cdot \left| \frac{1}{12} + \frac{1}{252}x^4 \right| \leq 0,02. \end{aligned}$$

Враховуючи, що доданки, які містять степені  $x$  вище третього, на вибраному відрізку є досить малими, то з точністю до 0,05 можна обмежитися лише трьома першими наближеннями, тобто

$$y(x) \approx 1 + 0,5x + 0,125x^2 - 0,312x^3,$$

$$z(x) \approx 0,5 - x - 0,5x^2 + 0,167x^3. \blacksquare$$

До наближеного розв'язування систем рівнянь можна звести розв'язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

**Приклад 1.4.** Знайти два перші наближення розв'язку задачі Коші

$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

**Розв'язання.** Якщо позначити  $y' = z$ , то задану задачу Коші можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = xy \end{cases}$$

з початковими умовами  $y(0) = 1, z(0) = 1$ . Оскільки з цієї системи випливає, що  $z'(0) = 0$ , то виберемо такі нульові наближення:

$$y_0(x) = 1 + x, \quad z_0(x) = 1.$$

Записуючи систему у вигляді

$$y(x) = 1 + \int_0^x z(t) dt, \quad z(x) = 1 + \int_0^x t y(t) dt,$$

знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x, \quad z_1(x) = 1 + \int_0^x t(1+t) dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Тоді одержуємо

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left( 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right) dt = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4. \blacksquare$$

Відзначимо дві характеристики методу послідовних наближень, які можна віднести до його недоліків. По-перше, через проблеми з ефективним знаходженням первісних у явному вигляді рекурентні формули (1.4) не завжди можуть бути реалізовані. По-друге, цей метод є локальним, тобто придатним для наближеного розв'язку задачі Коші лише у малому околі початкової точки.

Більше значення цей метод має для доведення існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Окрім цього, метод послідовних наближень буває необхідним для теоретичного дослідження інших методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, а також є допоміжним засобом для дослідження інших наближених методів, які застосовуються на порівняно більших відрізках інтегрування. Це, зокрема, відноситься до обчислення початкових значень шуканої функції у декількох точках при інтегруванні методом Адамса (§ 9).

## § 2. Метод степеневих рядів

Розв'язуючи наближено звичайні диференціальні рівняння першого порядку, а також рівняння вищих порядків, іноді використовують представлення шуканого розв'язку у вигляді ряду Тейлора, залишаючи у ньому певну кількість доданків.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Припустимо, що функція  $f(x, y)$  як функція двох змінних є нескінченно диференційовною у деякому околі точки  $(x_0, y_0)$ . Тоді, як відомо ([9], § 17), розв'язок  $y = y(x)$  задачі Коші (2.1), (2.2) є аналітичною функцією в деякому околі точки  $x_0$ , тобто може бути розвинений у ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \tag{2.3}$$

Тоді частинна сума цього ряду буде наближеним розв'язком задачі (2.1), (2.2).

Коефіцієнт  $y(x_0)$  розвинення (2.3) одержуємо безпосередньо з початкової умови:  $y(x_0) = y_0$ . З рівняння (2.1) знаходимо коефіцієнт  $y'(x_0)$ :  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

Диференціюючи рівняння (2.1) за змінною  $x$ , знаходимо, що  $y'' = f'_x + f'_y \cdot y'$ , а отже,

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

Повторюючи цей прийом крок за кроком, зможемо знайти значення наступних похідних у точці  $x = x_0$ , тобто коефіцієнти  $y'''(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0), \dots$ , а отже, формально побудувати аналітичний розв'язок  $y(x)$ .

**Метод степеневих рядів** можна використовувати також для наближеного розв'язування рівняння  $n$ -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.4)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (2.5)$$

у припущенні, що функція  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  аналітична в точці  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ .

При цьому з умов (2.5) безпосередньо визначаємо значення  $y^{(j)}(x_0)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , які фігурують у перших  $n$  коефіцієнтах розвинення (2.3).

Значення  $y^{(n)}(x_0)$  знайдемо з рівняння (2.4), підставляючи  $x = x_0$  і використовуючи початкові умови (2.5):

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}).$$



Для знаходження  $y^{(n+1)}(x_0)$  потрібно продиференціювати (2.4):

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \cdot \frac{d y^{(k)}}{d x}, \quad (2.6)$$

підставити  $x = x_0$  і використати початкові умови (2.5).

Диференціюючи (2.6), можемо знайти також наступні похідні, а отже, й їх значення у точці  $x_0$ .

Метод степеневих рядів можна використовувати також для наближеного розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь. У цьому випадку у ряд Тейлора необхідно розвинути кожен з шуканих функцій, а потім послідовно визначити похідні однакового порядку для всіх функцій описаним вище способом. При цьому диференціювати доведеться кожне з рівнянь системи.

**Приклад 2.1.** Методом степеневих рядів знайти розв'язок задачі Коші

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0. \quad (2.7)$$

**Розв'язання.** Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкової умови маємо  $y(0) = 0$ . З рівняння та початкової умови (2.7) одержуємо, що  $y'(0) = 0 + 2y^2(0) = 0$ .

Диференціюючи обидві частини заданого рівняння, одержуємо

$$y'' = 1 + 4yy', \quad (2.8)$$

а отже,  $y''(0) = 1 + 4y(0) \cdot y'(0) = 1$ .

Диференціюючи тепер послідовно обидві частини рівняння (2.8), знаходимо:

$$\begin{aligned} y''' &= 4(y')^2 + 4yy'', & y'''(0) &= 0, \\ y^{(IV)} &= 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy''' = 12y'y'' + 4yy''', & y^{(IV)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$y^{(V)} = 12(y'')^2 + 16y'y''' + 4yy^{(IV)}, \quad y^{(V)}(0) = 12.$$

Якщо обмежитись першими шістьма членами розвинення, тобто степенями  $x$  до п'ятого степеня включно, то

$$y(x) \approx \frac{1}{2!}x^2 + \frac{12}{5!}x^5 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10},$$

що згідно з результатами прикладу 1.2 гарантує точність 0,1 на відрізку  $[-0,5; 0,5]$ . ■

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння методом степеневих рядів можна знайти точно.

### Приклад 2.2. Наближено розв'язати задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1. \quad (2.9)$$

**Розв'язання.** З рівняння та початкової умови знаходимо:

$$y'(0) = 0 - y(0) = -1.$$

Диференціюючи рівняння з (2.9) і підставляючи  $x = 0$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} y'' &= 1 - y', & y''(0) &= 1 - y'(0) = 2, \\ y''' &= -y'', & y'''(0) &= -y''(0) = -2. \end{aligned}$$

У загальному випадку для  $n \geq 3$  маємо:

$$y^{(n)} = -y^{(n-1)}, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2.$$

Таким чином, використовуючи (2.3), знаходимо шуканий розв'язок

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 - x + 2 \left( \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= 1 - x + 2(e^{-x} - (1 - x)) = 2e^{-x} - 1 + x, \end{aligned}$$

який визначений на всій числовій осі. ■

У багатьох випадках методом степеневих рядів можна знайти точний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

Розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) можна також шукати у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами, тобто у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2.10)$$

Проілюструємо застосування такого варіанту методу степеневих рядів до задачі Коші (2.9).

Якщо  $x_0 = 0$ , то з умови  $y(0) = 1$  знаходимо  $a_0 = 1$ . Отже, рівність (2.10) запишеться у вигляді

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.11)$$

Тоді

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Підставляючи знайдені вирази для  $y$  та  $y'$  у рівняння задачі (2.9), одержуємо тотожність

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \equiv x - (1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів  $x$ , для відшукування коефіцієнтів  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$a_1 = -1, 2, \quad a_2 = 1 - a_1, \quad 3a_3 = -a_2, \quad \dots, \quad na_n = -a_{n-1}, \quad \dots,$$

з якої послідовно можна знайти усі коефіцієнти розвинення (2.11) або обмежитися декількома першими членами такого розвинення.

Розглянемо тепер застосування степеневих рядів до розв'язування систем диференціальних рівнянь та рівнянь вищих порядків.

### **Приклад 2.3. Розв'язати наближено систему рівнянь**

$$\begin{cases} y' = x + yz, \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $y(0) = 1$ ,  $z(0) = 0,5$ , обмежившись для кожної функції чотирма членами розвинення у ряд Тейлора.

**Розв'язання.** Функції  $y(x)$  і  $z(x)$  шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (2.12)$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (2.13)$$

Безпосередньо з початкових умов знаходимо

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0,5.$$

Розв'язуючи задачу (1.3), було встановлено, що

$$y'(0) = 0,5, \quad z'(0) = -1.$$

Продиференціюємо тепер обидва рівняння системи за змінною  $x$  і підставимо в отримані вирази  $x = 0$ . Будемо мати:

$$y'' = 1 + y'z + yz', \quad y''(0) = \frac{1}{4},$$

$$z'' = 2x - 2yy', \quad z''(0) = -1.$$

Диференціюючи ще один раз, знаходимо

$$y''' = y''z + 2y'z' + yz'', \quad y'''(0) = -\frac{15}{8},$$

$$z''' = 2 - 2(y')^2 - 2yy'', \quad z'''(0) = \frac{7}{2}.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у ряди (2.12), (2.13), одержуємо остаточні наближені формули:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3,$$

$$z(x) \approx \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{16}x^3. \blacksquare$$

**Приклад 2.4.** Знайти перші п'ять членів розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

**Розв'язання.** Розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots$$

З умови  $y(0) = 1$  знаходимо, що  $a_0 = 1$ .

Оскільки

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

то  $a_1 = 1$ .

Ще раз продиференціюємо одержану рівність і підставимо у та  $y''$  у задане рівняння. Будемо мати:

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots = \\ & = x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів  $x$ , для визначення решти коефіцієнтів  $a_n$  маємо систему

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 1, \quad 12a_4 = 1, \quad \dots, \quad n(n-1)a_n = a_{n-3}, \quad \dots$$

з якої, зокрема, знаходимо

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}.$$

Отже,

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4. \quad \blacksquare$$

Для деяких числових методів інтегрування диференціальних рівнянь потрібно знайти значення шуканих функцій у декількох точках. Ці значення можуть бути знайдені за допомогою степеневих рядів. Таким чином, метод розвинення розв'язків у степеневі ряди може бути використаний як елемент більш ефективних числових методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, наприклад методу Адамса (§ 9), методу Мілна (§ 11) та деяких інших.

### § 3. Метод Чаплигіна двосторонніх наближень

*Метод Чаплигіна* є одним з найбільш точних аналітичних методів наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Ідея цього методу полягає у тому, що шуканий розв'язок  $y(x)$  диференціального рівняння апроксимується двома послідовностями функцій  $u_n(x)$  та  $v_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , які для  $x \in [x_0, X]$  задовольняють нерівності

$$u_n(x) \leq y(x) \leq v_n(x)$$

і початкові умови

$$u_n(x_0) = v_n(x_0) = y(x_0),$$

причому при  $n \rightarrow \infty$  різниця  $v_n(x) - u_n(x)$  рівномірно на  $[x_0, X]$  прямує до нуля.

Геометрично це означає, що для  $x \in [x_0, X]$  інтегральна крива потрапляє у деякий криволінійний сектор – вилку. При цьому вказується спосіб, за допомогою якого цю вилку можна звузити до потрібних розмірів.

Якщо покласти, наприклад,  $y(x) \approx v_n(x)$ , то похибка  $\varepsilon_n(x)$  такого наближення  $\varepsilon_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x)$ , а отже, на кожному кроці її можна встановити безпосередньо.

Проілюструємо застосування цього методу до розв'язування задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.1)$$

Вважатимемо, що функція  $f(x, y)$  неперервна разом з частинними похідними  $f'_y(x, y)$ ,  $f''_{y^2}(x, y)$  у деякому околі початкової точки  $(x_0, y_0)$ . Для точок з цього околу визначимо диференціальний оператор за формулою

$$A[z] = z' - f(x, z).$$

**Лема (Чаплигіна).** Якщо функція  $u = u(x)$  задовольняє умови

$$A[u] \leq 0, \quad x_0 \leq x \leq X, \quad (3.2)$$

і

$$u(x_0) = y_0, \quad (3.3)$$

то на відрізку  $[x_0, X]$  виконується нерівність

$$u(x) \leq y(x), \quad (3.4)$$

де  $y(x)$  – розв’язок задачі (3.1).

**Доведення.** З (3.1) та (3.2) маємо  $(y - u)' - (f(x, y) - f(x, u)) \geq 0$   
або

$$(y - u)' - p(x)(y - u) \geq 0, \quad (3.5)$$

де

$$p(x) = \frac{f(x, y(x)) - f(x, u(x))}{y - u}. \quad (3.6)$$

Оскільки для тих  $x$ , де  $y(x) = u(x)$ , вираз (3.6) втрачає зміст, то у цьому випадку покладемо  $p(x) \equiv \lim_{u \rightarrow y} \frac{f(x, y) - f(x, u)}{y - u} = f'_y(x, y(x))$ .

Визначена таким чином функція  $p(x)$  є, очевидно, неперервною на всьому відрізку  $[x_0, X]$ .

Помножимо обидві частини нерівності (3.5) на  $\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$  і запишемо одержану нерівність у вигляді

$$\frac{d}{dx} (\mu(x) \cdot (y(x) - u(x))) \geq 0. \quad (3.7)$$

Проінтегруємо (3.7) у межах від  $x_0$  до  $x$ . Будемо мати:

$$\mu(x) \cdot (y(x) - u(x)) - \mu(x_0) \cdot (y(x_0) - u(x_0)) \geq 0. \quad (3.8)$$

Оскільки  $y(x_0) = u(x_0)$  і  $\mu(x) > 0$ , то з (3.8) одержуємо нерівність (3.4). ►

Аналогічно можна довести, що якщо  $A[v] \geq 0$ , де  $v = v(x)$ ,  $x_0 \leq x \leq X$ , і  $v(x_0) = y_0$ , то на відрізку  $[x_0, X]$  справджується нерівність  $y(x) \leq v(x)$ .

Як наслідок з леми Чаплигіна одержуємо таке твердження.

**Теорема 1.1.** *Якщо функції  $y = y(x)$ ,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  на відрізку  $[x_0, X]$  є розв'язками диференціальних рівнянь*

$$y' = f(x, y), \quad u' = f_1(x, u), \quad v' = f_2(x, v) \quad (3.9)$$

*відповідно, де  $f_1(x, z) \leq f(x, z) \leq f_2(x, z)$ , та задовольняють спільну початкову умову  $y(x_0) = u(x_0) = v(x_0) = y_0$ , то*

$$u(x) \leq y(x) \leq v(x), \quad x \in [x_0, X]. \quad (3.10)$$

Не завжди вдається такими способами одержати відразу достатньо “вузькі” межі для розв'язку  $y(x)$ , а тому виникає потреба у покращенні цих меж. Чаплигін запропонував спосіб, як маючи знайдені наближення  $u_0(x)$  і  $v_0(x)$ , одержати покращенні наближення  $u_1(x)$  і  $v_1(x)$ .

Для цього припустимо, що  $f''_{y^2}(x, y) \geq 0$ , а функції  $u_0 = u_0(x)$  і  $v_0 = v_0(x)$  є такі, що

$$A[u_0] = -\varphi_0(x) \leq 0, \quad A[v_0] = \psi_0(x) \geq 0, \quad (3.11)$$

причому

$$u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0.$$

Наприклад, для функції  $f(x, y)$ , яка неперервна в області

$$Q = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}, \quad (3.12)$$

такими функціями можуть бути

$$u_0(x) = y_0 + m \cdot (x - x_0), \quad v_0(x) = y_0 + M \cdot (x - x_0),$$

де

$$m = \min_{(x,y) \in Q} f(x, y), \quad M = \max_{(x,y) \in Q} f(x, y).$$



Якщо при цьому  $h = \min\{a, b/|m|, b/|M|\}$ , то на відрізку  $[x_0, x_0 + h]$  умови (3.11) будуть виконані.

Перейдемо тепер до уточнення наближень. Для цього позначимо

$$u_1(x) = u_0(x) + \rho_0(x), \quad v_1(x) = v_0(x) - \sigma_0(x),$$

де функції  $\rho_0 = \rho_0(x)$  та  $\sigma_0 = \sigma_0(x)$  визначимо як розв'язки задач Коші

$$\rho_0' = p_0(x)\rho_0 + \varphi_0(x), \quad \rho_0(x_0) = 0, \quad (3.13)$$

$$\sigma_0' = q_0(x)\sigma_0 + \psi_0(x), \quad \sigma_0(x_0) = 0, \quad (3.14)$$

відповідно, де

$$p_0(x) = f_y'(x, u_0(x)), \quad q_0(x) = \frac{f(x, v_0(x)) - f(x, u_0(x))}{v_0(x) - u_0(x)}. \quad (3.15)$$

З (3.13), (3.14), використовуючи формулу для загального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку ([16], § 1.6), одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{\int_{x_0}^x p_0(x) dx} \cdot \int_{x_0}^x \varphi_0(x) e^{-\int_{x_0}^x p_0(x) dx} dx, \quad (3.16)$$

$$\sigma_0(x) = e^{\int_{x_0}^x q_0(x) dx} \cdot \int_{x_0}^x \psi_0(x) e^{-\int_{x_0}^x q_0(x) dx} dx. \quad (3.17)$$

Оскільки функції  $\varphi_0(x)$ ,  $\psi_0(x)$  невід'ємні, то з (3.16), (3.17) випливає, що  $\rho_0(x) \geq 0$ ,  $\sigma_0(x) \geq 0$ ,  $x_0 \leq x \leq X$ .

У [3] (розділ 3, § 13) доведено, що на відрізку  $[x_0, X]$  справджуються нерівності  $A[u_1] \leq 0$ ,  $A[v_1] \geq 0$ .

Таким чином,  $u_1(x)$  і  $v_1(x)$  є відповідно нижнім і верхнім наближенням до точного розв'язку  $y$  і утворюють вужчу вилку, ніж функції  $u_0(x)$  і  $v_0(x)$ .

Зрозуміло, що описаний процес може бути продовжений. А саме, якщо відомі функції  $u_n(x)$  та  $v_n(x)$ , то можна покласти

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \rho_n(x), \quad v_{n+1}(x) = v_n(x) - \sigma_n(x), \quad (3.18)$$

де функції  $\rho_n(x)$ ,  $\sigma_n(x)$  визначаються з задач

$$\rho'(x) = p_n(x)\rho_n + \varphi_n(x), \quad \rho_n(x_0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\sigma'(x) = q_n(x)\sigma_n + \psi_n(x), \quad \sigma_n(x_0) = 0 \quad (3.20)$$

відповідно, де  $\varphi_n(x) = -A[u_n]$ ,  $\psi_n(x) = A[v_n]$ ,

$$p_n(x) = f'_y(x, u_n), \quad q_n(x) = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n}.$$

У результаті одержуємо дві функціональні послідовності

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq y, \quad y \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0.$$

Можна довести, що при  $n \rightarrow \infty$  різниця  $v_n - u_n$  досить швидко прямує до нуля. А отже, якщо  $v_n - u_n < \varepsilon$ , то наближено можна покласти  $y \approx \frac{u_n + v_n}{2}$ . Якщо оцінювати похибку немає потреби, то можна обмежитися лише однією з послідовностей, покладаючи, наприклад,  $y \approx u_n$ .

Зауважимо, що у випадку, коли  $f''_{y^2}(x, y) \leq 0$ , функції  $u_n$  та  $v_n$  у попередніх викладках потрібно поміняти місцями.

**Приклад 3.1.** Методом Чаплигіна на відрізку  $[0; 0,5]$  розв'язати задачу Коші

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0. \quad (3.21)$$

**Розв'язання.** Маємо  $f(x, y) = x + 2y^2$ ,  $f''_{y^2}(x, y) = 4 > 0$ ,

$$A[z] = z' - x - 2z^2.$$

Нехай  $u_0(x) = 0$ ,  $v_0(x) = x$ . Тоді  $A[u_0] = -x \equiv -\varphi_0(x) \leq 0$ ,  $A[v_0] = 1 - x - 2x^2 \equiv \psi_0(x) \geq 0$  для  $x \in [0; 0,5]$

Далі знаходимо

$$p_0(x) = f'_y(x, u_0) = 4u_0 = 0,$$

$$q_0(x) = \frac{f(x, v_0) - f(x, u_0)}{v_0 - u_0} = \frac{(x + 2v_0^2) - (x + u_0^2)}{v_0 - u_0} = 2(u_0 + v_0) = 2x.$$

Використовуючи формули (3.16), (3.17), одержуємо

$$\rho_0(x) = \int_0^x x \, dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &= e^{\int_0^x 2x \, dx} \cdot \int_0^x (1 - x - 2x^2) e^{-\int_0^x 2x \, dx} \, dx = e^{x^2} \cdot \int_0^x (1 - x - 2x^2) e^{-x^2} \, dx = \\ &= e^{x^2} \left( \int_0^x e^{-x^2} \, dx - \int_0^x x e^{-x^2} \, dx + \int_0^x x d(e^{-x^2}) \right) = \\ &= e^{x^2} \left( \int_0^x e^{-x^2} \, dx + \frac{1}{2} (e^{-x^2} - 1) + x e^{-x^2} - \int_0^x e^{-x^2} \, dx \right) = -\frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} + x. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v_1(x) = x - \left( \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} e^{x^2} \right) = \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1).$$

Оцінимо різницю

$$v_1(x) - u_1(x) = \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1) - \frac{x^2}{2}.$$

Оскільки  $(v_1(x) - u_1(x))' = x(e^{x^2} - 1) \geq 0$  для  $x \in [0; 0,5]$ , то

$$\max_{x \in [0; 0,5]} (v_1(x) - u_1(x)) = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{4}} - 1 \right) - \frac{1}{8} \approx 0,017,$$

а отже, функція

$$y(x) \approx \frac{1}{2} (u_1(x) + v_1(x)) = \frac{1}{4} (e^{x^2} - 1 + x^2)$$

на відріжку  $[0; 0,5]$  є наближенням розв'язку задачі (3.21) з точністю до 0,01. ■

Недоліком методу Чаплигіна є те, що він часто приводить до появи інтегралів, які не можуть бути знайдені у скінченному вигляді. У деяких випадках ці труднощі вдається подолати так, як це було зроблено при знаходженні функції  $\sigma_0(x)$  з інтегралом  $\int_0^x e^{-x^2} dx$  у прикладі 3.1. В інших випадках такі інтеграли доводиться обчислювати наближено.

У наступному прикладі точний розв'язок лінійного рівняння першого порядку методом Чаплигіна знаходимо вже на першому кроці.

**Приклад 3.2.** Методом Чаплигіна розв'язати задачу Коші  $y' = x - y$ ,  $y(0) = 1$  у прямокутнику  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, |y - 1| \leq 1\}$ .

**Розв'язання.** Тут

$$f(x, y) = x - y, \quad f''_{y^2}(x, y) = 0, \quad A[z] = z' - x + z.$$

Оскільки

$$m = \min_{(x,y) \in Q} f(x, y) = -2, \quad M = \max_{(x,y) \in Q} f(x, y) = 1,$$

то покладемо

$$u_0(x) = 1 - 2x, \quad v_0(x) = 1 + x.$$

Тоді для  $x \in [0; 1]$

$$A[u_0] = -1 - 3x \equiv -\varphi_0(x) \leq 0, \quad A[v_0] = 2 \equiv \psi_0(x) \geq 0.$$

Далі знаходимо

$$p_0(x) = f'_y(x, u_0) = -1,$$

$$q_0(x) = \frac{f(x, v_0) - f(x, u_0)}{v_0 - u_0} = \frac{(x - v_0) - (x - u_0)}{v_0 - u_0} = -1.$$

Використовуючи формули (3.16), (3.17), одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{-\int_0^x dx} \cdot \int_0^x (3x + 1) e^0 dx = 2e^{-x} + 3x - 1,$$

$$\sigma_0(x) = e^{-\int_0^x dx} \cdot \int_0^x 2e^0 dx = -2e^{-x} + 2.$$

Звідси

$$u_1(x) = 1 - 2x + (2e^{-x} + 3x - 1) = 2e^{-x} + x - 1,$$

$$v_1(x) = 1 + x - (-2e^{-x} + 2) = 2e^{-x} + x - 1.$$

Отже,  $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$ . ■

## § 4. Метод Ейлера та його модифікації

У попередніх параграфах розглядалися аналітичні методи розв'язування задачі Коші. **Метод Ейлера** відноситься до числових методів, які дозволяють знайти розв'язок у вигляді таблиці наближених значень шуканої функції.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

з початковою умовою  $y(x_0) = y_0$ .

Виберемо достатньо малий крок  $h$  і побудуємо сукупність рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

У методі Ейлера наближені значення  $y(x_i) \approx y_i$  обчислюють послідовно за формулами

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.3}$$

При цьому шукану інтегральну криву  $y = y(x)$ , яка проходить через точку  $M(x_0, y_0)$ , наближено замінюємо ламаною  $M_0M_1M_2\dots$  з вершинами  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Кожний відрізок  $M_iM_{i+1}$  цієї ламаної, яку називатимемо **ламанною Ейлера**, має напрям, який співпадає з напрямом тієї інтегральної кривої рівняння (4.1), яка проходить через точку  $M_i$ .

Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна, то послідовність ламаних Ейлера при  $h \rightarrow 0$  на достатньо малому відрізку  $[x_0, x_0 + H]$  рівномірно збігається до шуканої інтегральної кривої  $y = y(x)$  ([12], розділ 2, § 2).

Метод Ейлера легко може бути поширений на системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння вищих порядків, якщо їх попередньо звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Основними недоліками методу Ейлера є його мала точність і систематичне накопичення похибок. У зв'язку з цим розроблені різні модифікації цього методу.

Першою такою модифікацією є *удосконалений метод Ейлера*, ідея якого полягає у наступному: спочатку обчислюють допоміжні значення  $y_{i+1/2}$  шуканої функції в точках

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$$

за допомогою формули

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i), \quad (4.4)$$

а потім обчислюють значення правої частини рівняння (4.1) в середній точці  $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$  і покладають

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right). \quad (4.5)$$

Другою модифікацією методу Ейлера є *удосконалений метод Ейлера-Кوشі*, коли спочатку шукають “грубе” наближення

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad (4.6)$$

а потім наближено покладають

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}. \quad (4.7)$$

Зауважимо, що позначаючи значення  $y_{i+1}$ , знайдене за формулою (4.6), через  $\bar{y}_{i+1}$ , ми маємо змогу знову за формулою (4.7) шукати нове значення для  $y_{i+1}$ . Такий процес можна продовжити доти, поки два послідовні наближення  $y_{i+1}$  не співпадуть із точністю до відповідних десяткових знаків. Цей процес має назву *ітераційної обробки*.

Проілюструємо застосування цих методів для розв'язування конкретної задачі.

**Приклад 3.3.** За допомогою методу Ейлера та його модифікацій розв'язати задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad (4.8)$$

на відрізку  $[0; 0,5]$ , беручи крок  $h = 0,1$ .

**Розв'язання.** Для кожного з методів складемо програми на мові програмування Basic і наведемо результати їх виконання.

### Метод Ейлера

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y=1: H=.1: B=.5		
20 DEF FNF(X,Y)=X-Y	0	1
30 PRINT "X", "Y"	.1	.9
40 PRINT X,Y	.2	.82
50 IF X>=B THEN END	.3	.758
60 Y=Y+H*FNF(X,Y): X=X+H	.4	.7122
70 GOTO 40	.5	.68098

## Удосконалений метод Ейлера

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y=1: H=.1: B=.5		
20 DEF FNF(X,Y)=X-Y	0	1
30 PRINT "X", "Y"	.1	.91
40 PRINT X,Y	.2	.83805
50 IF X>=B THEN END	.3	.7824352
60 Y1=Y+H*FNF(X,Y)/2: X1=X+H/2	.4	.7416039
70 X=X+H: Y=H*FNF(X1,Y1)+Y	.5	.7141516
80 GOTO 40		

## Удосконалений метод Ейлера-Коші

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y=1: H=.1: B=.5		
20 DEF FNF(X,Y)=X-Y	0	1
30 PRINT "X", "Y"	.1	.91
40 PRINT X,Y	.2	.83805
50 IF X>=B THEN END	.3	.7824353
60 Y1=Y+H*FNF(X,Y)/2	.4	.7416039
70 Y=Y+H*(FNF(X,Y)+FNF(X+H,Y1))/2: X=X+H	.5	.7141515
80 GOTO 40		

Для порівняння наведемо точні значення розв'язку

$$y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$$

цього рівняння, знайденого у прикладі 1.2.



Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y=1	0	1
20 PRINT "X","Y"	.1	.9096748
30 FOR K=0 TO 5	.2	.8374615
40 X=.1*K: Y=2*EXP(-X)-1+X	.3	.7816364
50 PRINT X,Y: NEXT	.4	.7406401
60 END	.5	.7130613

Бачимо, що удосконалені методи більш точні, ніж звичайний метод ламаних Ейлера. Причини цього будуть проаналізовані у наступних параграфах.

Наведені програми можуть бути легко перероблені для розв'язування довільних задач вигляду (4.1). Для цього необхідно лише ввести зміни у рядки 10, 20 для визначення початкових умов та функції  $f(x, y)$ .

Пропонуємо читачам скористатися наведеними програмами для знаходження на відрізку  $[0; 0,5]$  наближеного розв'язку задачі Коші  $y' = x + 2y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

## § 5. Загальні поняття теорії різницевого схем

Метод Ейлера та його модифікації є найпростішими представниками різницевого методів розв'язування диференціальних рівнянь. Серед наближених методів розв'язування задачі Коші різницево методи є найбільш точними. Вони використовуються для диференціальних рівнянь першого та вищих порядків.

Для застосування різницевого методів розв'язування задачі Коші разом з заданими початковими умовами необхідно мати значення  $y_k = y(x_k)$  шуканого розв'язку у деяких додаткових точках

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Ці значення доведеться шукати будь-яким з раніше розглянутих методів.

Розглянемо різницеві методи із загальної точки зору. Для більшості з них достатньо вказати алгоритм обчислення наближеного розв'язку у скінченній кількості точок  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , відрізка  $[x_0, X]$ , на якому розв'язується задача

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (5.1)$$

Множину цих точок  $\{x_i\}$  називають *сіткою*, а самі точки  $x_i$  цієї множини – *вузлами сітки*. Відстані  $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$ , називають *кроками сітки*.

У випадку, коли  $h_i = h = \text{const}$ , кажуть, що сітка є *рівномірною*. Зрозуміло, що у цьому випадку  $h = \frac{X - x_0}{n}$ .

Надалі розглядатимемо тільки рівномірні сітки.

Функцію дискретного аргументу  $y(x_i)$ , яка визначена у вузлах сітки, називають *сітковою функцією*. Надалі такі функції позначатимемо через  $\bar{y}$ , а їхні значення  $\bar{y}(x_i)$  – через  $\bar{y}_i$ .

Основою різницевих методів розв'язування задач для диференціальних рівнянь є заміна відповідної диференціальної задачі для функцій неперервного аргументу на алгебраїчну задачу для сіткової функції. Остання є системою алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує між собою значення сіткової функції, додаткових умов та праві частини рівняння у вузлах сітки  $\{x_i\}$ .

Але задача визначення сіткових функцій ставиться не довільно. Вона повинна бути сформульована так, щоб при  $h \rightarrow 0$  сіткові функції у певному сенсі збігалися до точного розв'язку диференціальної задачі.

Поняття такої збіжності можна ввести по-різному. Найчастіше для цього користуються так званою *рівномірною нормою*:

$$\|u\| = \max_i |u(x_i)|, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Кажуть, що сім'я сіткових функцій  $\{\bar{y}_h\}$  збігається до точного розв'язку  $y(x)$  вихідної задачі, якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|y - \bar{y}_h\| = 0. \quad (5.3)$$

Інакше кажучи,  $\bar{y}_h \rightarrow y$ , якщо максимальне відхилення між значеннями цих функцій у вузлах сітки прямує до нуля. Якщо, крім того, виконується нерівність

$$\|y - \bar{y}_h\| \leq ch^k, \quad (5.4)$$

де  $c, k$  – деякі сталі, не залежні від  $h$ , то кажуть, що маємо збіжність порядку  $k$  за відповідною нормою.

Але у загальному випадку дослідження на таку збіжність та її порядок точності викликають значні труднощі. Вихід з цього полягає у тому, що збіжність різницевої задачі може бути зведена до двох більш доступних для перевірки властивостей – порядку апроксимації та стійкості.

Для визначення порядку апроксимації зауважимо, що точний розв'язок диференціальної задачі, взагалі кажучи, не задовольняє різницеву задачу. Запишемо диференціальну задачу у вигляді

$$Ly = \varphi, \quad (5.5)$$

а відповідну їй різницеву задачу, яку ще іноді називають *різницевою схемою*, у вигляді

$$L_h \bar{y} = \bar{\varphi}_h. \quad (5.6)$$

При цьому у вирази  $L$  та  $L_h$  увійшли сукупності лівої частини диференціального рівняння і додаткових умов для точного розв'язку  $y = y(x)$  та відповідно лівих частин різницевих рівнянь та

додаткових умов для  $\bar{y}$ . Праві ж частини  $\varphi$  та  $\bar{\varphi}_h$  є сукупностями правих частин відповідних рівнянь та додаткових умов.

Підставимо розв'язок задачі (5.5) у рівняння (5.6) і визначимо  $\|L_h y - \varphi_h\|_0$  як максимум норм  $\|L_h^p y - \varphi_h^p\|$  для кожного з рівнянь системи (5.6), де  $p$  – номер рівняння у цій системі. Якщо для деяких сталих  $c, k$ , не залежних від  $h$ , виконується нерівність

$$\|L_h y - \varphi_h\|_0 < ch^k, \quad (5.7)$$

то кажуть, що різницева схема апроксимує задачу (5.5) з порядком  $k$ , а найбільше з таких  $k$  називають **порядком апроксимації схеми**.

Порядок апроксимації схеми можна визначити й інакше. А саме, нехай для кожного  $p$  виконуються нерівності

$$\|L_h^p y - \varphi_h^p\| < c_p h^{k_p}, \quad (5.8)$$

де сталі  $c_p$  і  $k_p$  не залежать від  $h$ . Тоді найбільші з чисел  $k_p$  називають **порядками апроксимації** відповідних рівнянь, а число  $k = \min\{k_p\}$  – **порядком апроксимації схеми** (5.6). Якщо  $L_h^p y = \varphi_h^p$ , то вважають, що  $k_p = \infty$ .

Зрозуміло, що чим вищий порядок апроксимації схеми, тим точніше її розв'язок – сіткова функція  $\bar{y}$  – наближає розв'язок  $y = y(x)$  задачі (5.5). Але для збіжності  $\bar{y}_h$  до  $y$  важливим критерієм є також стійкість різницевої схеми, яка фактично означає неперервну залежність розв'язку схеми (5.6) від початкових умов і правих частин рівняння. Інакше кажучи, схему (5.6) називають **стійкою**, якщо існує таке  $h_0$ , що для  $h < h_0$  виконується нерівність

$$\|\bar{y} - \bar{y}\| < c^* \|\bar{\varphi}_h - \bar{\varphi}_h\|_0, \quad (5.9)$$

де  $c^*$  – деяка стала, яка не залежить від  $h$ , а  $\bar{y}$  – розв'язок різницевої схеми  $L_h \bar{y} = \bar{\varphi}_h$ .

Введені поняття дають можливість довести теорему, яка має фундаментальне значення для дослідження збіжності різницевих схем.

**Теорема 1.2.** *Якщо стійка різницева схема (5.6) апроксимує задачу (5.5) з порядком апроксимації  $k$ , то її розв'язок  $\bar{y}_h$  при  $h \rightarrow 0$  збігається до розв'язку  $y = y(x)$  задачі (5.5) з порядком збіжності  $k$ .*

**Доведення.** Згідно з (5.5), (5.7) маємо нерівність

$$\|y - \bar{y}_h\| < c^* \|\varphi - \bar{\varphi}_h\|_0 = c^* \|L_h y - \bar{\varphi}_h\|_0 < c^* ch^k,$$

з якої й випливає доведення теореми. ►

Зауважимо, що усі різницеві схеми, які розглядаються надалі, є стійкими, і надалі на доведенні їх стійкості зупинятися не будемо.

## § 6. Різницева схема Ейлера та її застосування

Розглянемо з точки зору теорії різницевих схем метод Ейлера для задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (6.1)$$

Рівність (4.3) разом з початковою умовою можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = f(x_i, \bar{y}_i), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (6.2)$$

замінивши наближено значення функції  $y(x)$  значеннями сіткової функції  $\bar{y}$ . Схему (6.2) називають *різницевою схемою Ейлера*.

З'ясуємо порядок апроксимації цієї схеми, шукаючи порядок апроксимації кожного з її рівнянь. Для цього додатково припустимо, що функція  $f(x, y)$  має неперервні частинні похідні за обома змінними у деякому прямокутнику  $D$ , в якому існує єдиний розв'яз-

зок задачі (6.1). Тоді розв'язок  $y(x)$  цієї задачі буде двічі неперервно диференційовною функцією і за формулою Тейлора одержуємо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Якщо підставити тепер розв'язок задачі (6.1) у перші  $n$  рівнянь схеми (6.2), то

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)) &= y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h) - f(x_i, y(x_i)) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h). \end{aligned}$$

Оскільки при накладених вище умовах функція  $y''(x)$  обмежена, то кожне з цих рівнянь має порядок апроксимації  $k = 1$ . Враховуючи, що рівність  $y(x_0) = y_0$  є точною, знаходимо, що порядок апроксимації всієї схеми  $k = 1$ .

Схема (6.2) є стійкою (див., наприклад, [12], розділ 6, § 1). Таким чином, порядок збіжності схеми Ейлера також дорівнює 1.

Якщо в області  $D$

$$|f(x, y)| \leq M, \quad |f'_x(x, y)| \leq K, \quad |f'_y(x, y)| \leq K,$$

то для похибки  $\delta(x)$  справджується оцінка ([12], розділ 6, § 1):

$$|\delta(x)| \leq h(1 + M)(e^{K(x-x_0)} - 1).$$

Як видно з (6.2), у схемі Ейлера похідна  $y'(x_i)$  наближено замінена відношенням  $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$ , що дозволило добитися лише першого порядку апроксимації. Якщо ж наближено взяти

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h},$$

то одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_{i-1}}{2h} = f(x, \bar{y}_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \\ \bar{y}_1 = y_1, \end{cases} \quad (6.3)$$

де число  $y_1$  буде визначене пізніше.

Припустимо, що розв'язок  $y(x)$  задачі (6.1) тричі неперервно диференційовний. Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_i \pm h) = y(x_i) \pm hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3).$$

Якщо підставити тепер точний розв'язок  $y(x)$  у (6.3), то одержуємо для перших  $n-1$  рівнянь:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - f(x_i, y(x_i)) = y'(x_i) + O(h^2) - f(x_i, y(x_i)) = O(h^2),$$

тобто їх порядок апроксимації  $k = 2$ .

Рівність  $y(x_0) = y_0$  виконується точно, а з рівності

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + O(h^2)$$

знаходимо

$$y(x_1) - y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) - y_1 + O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб схема (6.3) мала порядок апроксимації  $k = 2$ , необхідно і достатньо, щоб

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Схему (6.3) називають **узагальненням різницевої схеми Ейлера**. У наступному параграфі встановимо порядок апроксимації різницевих схем, які відповідають модифікаціям методу Ейлера.

## § 7. Метод Рунге-Кутта

Знову розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (7.1)$$

але різницеву схему запишемо тепер у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = p_1 k_1 + \dots + p_m k_m, & i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (7.2)$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), \\ k_2 &= f(x_i + \alpha_1 h, \bar{y}_i + \alpha_1 h k_1), \\ &\dots \dots \dots \\ k_m &= f(x_i + \alpha_{m-1} h, \bar{y}_i + \alpha_{m-1} h k_{m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

а  $p_1, \dots, p_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  – деякі параметри, вибір яких забезпечить необхідний порядок апроксимації схеми.

Якщо  $m=1$ , то для  $p_1=1$  схема (7.2) співпадає із схемою Ейлера (6.2), порядок апроксимації якої  $k=1$  (§ 6).

Нехай тепер  $m=2$ . Припустимо додатково, що єдиний розв'язок задачі (7.1) є тричі неперервно диференційовною функцією, для чого достатньо вимагати неперервності усіх частинних похідних другого порядку функції  $f(x, y)$ . Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_i) + O(h^3).$$

Підставляючи точний розв'язок у перші  $n$  рівнянь схеми (7.2), одержуємо

$$\begin{aligned} & y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - \\ & - p_1 f(x_i, y(x_i)) - p_2 f(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 h f(x_i, y(x_i))) = \end{aligned}$$



$$= y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - p_1 f(x_i, y(x_i)) - p_2 f(x_i, y(x_i)) - \\ - p_2 \alpha_1 h \cdot \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} - p_2 \alpha_1 h \cdot f(x_i, y(x_i)) \cdot \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} + O(h^2).$$

Підставляючи сюди

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad y''(x_i) = \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} \cdot y'(x_i),$$

будемо мати

$$(1 - p_1 - p_2) y'(x_i) + h \cdot (1/2 - \alpha_1 p_2) y''(x_i) + O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб задані рівняння мали другий порядок апроксимації, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ \alpha_1 p_2 = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Умови (7.4) залишаються необхідними і достатніми для другого порядку апроксимації всієї схеми, оскільки рівність  $y(x_0) = y_0$  є точною.

Система (7.4) складається з двох рівнянь з трьома невідомими, тому один з параметрів можна вибирати довільно. Як правило, довільним вибирають параметр  $\alpha_1$ , беручи його з проміжку  $(0; 1]$  так, щоб не виходити за межі відрізка  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Найчастіше використовують схеми з  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  та  $\alpha_1 = 1$ .

Якщо  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ , то  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0$  і схема набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, \bar{y}_i)\right), & i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0. \end{cases}$$

Якщо ж  $\alpha_1 = 1$ , то  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  і одержуємо схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{2} \left( f(x_i, \bar{y}_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_i + h \cdot f(x_i, \bar{y}_i)) \right), & i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0. \end{cases}$$

У цих двох схемах маємо дві модифікації методу ламаних Ейлера, кожна з яких має порядок апроксимації  $k = 2$ .

Аналогічно можна одержати **схеми Рунге-Кутта** й для інших значень  $m$ . Наприклад, для  $m = 3$  маємо схеми з порядком апроксимації  $k = 3$ :

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3), & i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + h, \bar{y}_i + (2k_2 - k_1)h\right), \end{aligned}$$

та

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{4} (k_1 + 3k_3), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{3}\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{2h}{3}, \bar{y}_i + \frac{2k_2 h}{3}\right). \end{aligned}$$

Для  $m = 4$  маємо схему з порядком апроксимації  $k = 4$ :

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{3}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{3}\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{2h}{3}, \bar{y}_i + \frac{2k_2 - k_1}{3} \cdot h\right), \\ k_4 &= f\left(x_i + h, \bar{y}_i + (k_1 - k_2 + k_3)h\right). \end{aligned}$$

Але найчастіше для  $m = 4$  використовують схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (7.5)$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}k_2\right), & k_4 &= f\left(x_i + h, \bar{y}_i + hk_3\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Схема (7.6) також має четвертий порядок апроксимації. Застосуємо її до розв'язування конкретної задачі.

**Приклад 7.1.** Розв'язати методом Рунге-Кутта на відрізку  $[0; 0,5]$  із кроком  $h = 0,1$  задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

**Розв'язання.** Для розв'язування цієї задачі складемо програму на мові програмування Basic.

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y=1: H=.1: B=.5	0	1
20 DEF FNF(X,Y)=X-Y	.1	.909675
30 PRINT "X", "Y"	.2	.8374618
40 PRINT X, Y	.3	.7816369
50 IF X>=B THEN END	.4	.7406406
60 K1=FNF(X,Y): K2=FNF(X+H/2,Y+H*K1/2)	.5	.7130619
70 K3=FNF(X+H/2,Y+H*K2/2): K4=FNF(X+H,Y+H*K3)		
80 X=X+H: Y=Y+H*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6		
90 GOTO 40		

Порівнюючи одержані результати з тими, які були отримані при розв'язуванні задачі (4.7), та точними значеннями розв'язку (див. приклад 3.3), бачимо, що точність наближення є вищою.

Наведена програма легко може бути змінена для довільного рівняння вигляду (7.1). Для цього достатньо внести зміни у команди 10 та 20.

Зазначимо також, що метод Рунге-Кутта можна застосовувати і до нормальних систем диференціальних рівнянь. Для цього у кожній з рівностей (7.2) функції  $y$  та  $f$  необхідно розуміти як вектор-функції, а числа  $k_1, k_2, \dots, k_m$  – як вектори.

Для наближеного розв'язування задачі Коші для рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

можна скористатися формулами

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \bar{y}'_i h + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)h^2,$$

$$\bar{y}'_{i+1} = \bar{y}'_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h,$$

де

$$k_1 = f\left(x_i, \bar{y}_i, \bar{y}'_i\right),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{y}'_i h}{2}, \bar{y}'_i + \frac{k_1 h}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{y}'_i h}{2} + \frac{k_1 h^2}{4}, \bar{y}'_i + \frac{k_2 h}{2}\right),$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, \bar{y}_i + \bar{y}'_i h + \frac{k_2 h^2}{2}, \bar{y}'_i + k_3 h\right).$$

Пропонуємо читачам самостійно скористатися методом Рунге-Кутта для наближеного розв'язування задачі Коші

$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

## **§ 8. Застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів**

У схемах Рунге-Кутта, які розглядалися у § 7, порядок апроксимації співпадає з числом  $m$ . Але, наприклад, для  $m = 2$  була отримана система двох рівнянь з трьома невідомими. Для  $m = 3$  маємо 3 рівняння і 5 невідомих, для  $m = 4$  – 4 рівняння і 7 невідомих. Тому виникає питання: чи можна у випадку більшої гладкості розв'язку добитися порядку апроксимації більшого, ніж  $m$ . Проаналізуємо таку можливість для  $m = 2$ .

Отже, розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{8.1}$$

та різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = p_1 k_1 + p_2 k_2, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (8.2)$$

де  $k_1 = f(x_i, \bar{y}_i)$ ,  $k_2 = f(x_i + \alpha h, \bar{y}_i + \alpha h k_1)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Вважаємо, що функція  $f(x, y)$  має неперервні частинні похідні третього порядку за обома змінними, що гарантує неперервність четвертої похідної розв'язку  $y(x)$  задачі Коші. Тоді за формулою Тейлора одержуємо

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i'' h^2}{2} + \frac{y_i''' h^3}{6} + O(h^4).$$

Підставляючи точний розв'язок у перші  $n$  рівнянь схеми (8.2), знаходимо різницю між її лівою і правою частинами у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_i(h) = & y_i' + \frac{1}{2} y_i'' h + \frac{1}{6} y_i''' h^3 + O(h^3) - p_1 f_i - \\ & - p_2 \left( f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \alpha h + \frac{\partial f_i}{\partial y} \alpha h f_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 \right) \cdot (\alpha h)^2 + O(h^3) \right), \end{aligned}$$

де позначено  $f_i \equiv f(x_i, y_i)$ .

Оскільки з (8.1) випливають рівності

$$\begin{aligned} y_i' &= f_i, & y_i'' &= \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} f_i, \\ y_i''' &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 + \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i'', \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_i(h) = & (1 - p_1 - p_2) y_i' + \left( \frac{1}{2} \alpha p_2 \right) y_i'' h + \\ & + \left( \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \right) y_i''' + \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i'' \right) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

Отже, третій порядок апроксимації матимемо лише тоді, коли

$$\begin{cases} 1 - p_1 - p_2 = 0, \\ \frac{1}{2} - \alpha p_2 = 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 = 0, \\ \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Із системи (8.3) знаходимо

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \quad (8.4)$$

Таким чином, якщо права частина рівняння (8.1) не залежить від змінної  $y$ , то, поклавши  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , одержуємо задачу Коші

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = 0. \quad (8.5)$$

Звідси

$$y(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (8.6)$$

і якщо функція  $f(x)$  тричі неперервно диференційовна на відрізку  $[a, b]$ , то враховуючи (8.4), з точністю до  $O(h^3)$  знаходимо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{4} \cdot \left( f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) \right), \quad (8.7)$$

де  $h = (b - a)/n$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Зокрема, для  $i = n - 1$

$$y(x_n) = \int_a^b f(x) dx. \quad (8.8)$$

Зауважимо, що якщо  $f(x)$  є квадратичною функцією, тобто

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

то за формулою (8.7) інтеграл (8.8) буде обчислений точно, причому

незалежно від  $n$  та величини  $h$ . Справді, для будь-якого  $h$

$$\begin{aligned} \int_0^h (ax^2 + bx + c) dx &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \\ &= 0 + \frac{h}{4} \left( c + 3 \left( a \left( \frac{2}{3}h \right)^2 + b \left( \frac{2}{3}h \right) + c \right) \right) = y(h). \end{aligned}$$

З'ясуємо зв'язок отриманого результату з іншими формулами числового інтегрування. Для цього запишемо (8.7) у вигляді

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{4} \cdot \left( f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) \right). \quad (8.9)$$

Зрозуміло, що з міркувань симетрії справджується також рівність

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{4} \cdot \left( f(x_{i+1}) + 3f\left(x_{i+1} - \frac{2h}{3}\right) \right). \quad (8.10)$$

Додавши рівності (8.9) і (8.10), одержуємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{8} \cdot \left( f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) + f(x_{i+1}) \right). \quad (8.11)$$

Формула (8.11) співпадає з відомою формулою методу кубічних парабол. Аналогічно можна одержати відому формулу Сімпсона ([10], розділ 4, § 2) – для цього потрібно підставити у (8.2)

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{2}{3}.$$

Але легко переконатися, що схема (8.2) матиме при цьому лише перший порядок апроксимації, а відповідні її формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{3} \cdot \left( f(x_i) + 2f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right) \quad (8.12)$$

при однаковій кількості обчислень, що і у (8.7), призведуть до значно гірших результатів. Зокрема, вже для лінійної функції

$$f(x) = ax + b$$



з (8.12) не впливає рівності

$$y(h) = \int_0^h (ax + b) dx.$$

Отже, при вказаній кількості обчислень формула (8.8), запропонована в [14], є найбільш оптимальною формулою числового інтегрування функцій однієї змінної.

Пропонуємо читачам самостійно порівняти формули (8.9) і (8.11) із схемами Рунге-Кутта для  $m = 3$  та  $m = 4$ , наведеними у § 7.

## § 9. Метод Адамса

Наближено розв'язуючи диференціальне рівняння методом Рунге-Кутта, необхідно виконувати досить багато обчислень для знаходження кожного  $y_i$ . У випадку, коли права частина рівняння має складний аналітичний вираз, використання методу Рунге-Кутта приводить до значних труднощів. Тому на практиці у цьому випадку часто використовують *метод Адамса*, який не вимагає багаторазового підрахунку правої частини рівняння.

Для задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (9.1)$$

покладаючи  $y_i = y(x_i)$ , будемо мати

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx. \quad (9.2)$$

Оскільки на підставі другої інтерполяційної формули Ньютона ([10], розділ 3, § 1) з точністю до різниць четвертого порядку маємо

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 y'_{i-3},$$

де

$$q = \frac{x - x_i}{h},$$

$$\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

$$\Delta^2\varphi_k = \Delta\varphi_{k+1} - \Delta\varphi_k = \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k,$$

$$\Delta^3\varphi_k = \Delta^2\varphi_{k+1} - \Delta^2\varphi_k = \varphi_{k+3} - 3\varphi_{k+2} + 3\varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

то з (9.2) одержуємо

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h \cdot \int_0^1 \left( y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6} \Delta^3 y'_{i-3} \right) dq = \\ &= h \cdot \left( y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{i-3} \right) = \\ &= \frac{h}{24} \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}). \end{aligned}$$

Таким чином, наближено можемо покласти

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24} \cdot (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \\ &+ 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Формулу (9.3) називають **формулою Адамса**. Зрозуміло, що для обчислень за формулою Адамса необхідно мати чотири перші наближення  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , які можна одержати, наприклад, одним із методів Рунге-Кутта або з розвинення у ряд Тейлора:

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + ih y'_0 + \frac{(ih)^2}{2} y''_0 + \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

При цьому

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y'_0 \quad \text{і т. д.}$$

**Приклад 9.1.** Розв'язати методом Адамса задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad (9.4)$$

на відрізку  $[0; 0,5]$ , беручи  $h = 0,1$ .

**Розв'язання.** Скористаємося знайденими у § 7 методом Рунге-Кутта значеннями  $y_1, y_2, y_3$ . Для наступних обчислень складемо програму на мові програмування Basic.

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: H=.1: B=.5: DIM Y(3): Y(0)=1	0	1
20 INPUT "Y1, Y2, Y3"; Y(1), Y(2), Y(3)	.1	.909675
30 PRINT "X", "Y": PRINT	.2	.8374618
40 FOR K=0 TO 3	.3	.7816369
50 X=K*H: Y=Y(K)	.4	.7406463
60 PRINT X, Y: NEXT	.5	.7130714
70 DEF FNF(X,Y)=X-Y		
80 Y=Y(3)+H*(55*FNF(X,Y(3))-59* FNF(X-H,Y(2))+37*FNF(X-2*H,Y(1))- FNF(X-3*H,Y(0)))/24: X=X+H		
90 PRINT X, Y		
100 IF X>=B THEN END		
110 Y(0)=Y(1): Y(1)=Y(2): Y(2)=Y(3): Y(3)=Y		
120 GOTO 80		

Зауважимо, що для іншої задачі вигляду (9.1) зміни у наведену програму потрібно внести лише у команди 10 та 70.

Звертаємо увагу на високу точність одержаних результатів. Їх порядок  $k = 4$ , як і методу Адамса в цілому ([4], розділ 3, § 8).

Метод Адамса можна легко поширити на нормальні системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння  $n$ -го порядку.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати методом Адамса на відрізку  $[0; 0,5]$  задачу Коші

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0.$$

## § 10. Метод послідовних зближень Крилова

Ефективність методу Адамса значно залежить від точності знайдених перших наближень  $y_1$ ,  $y_2$  та  $y_3$ . Розглянемо спосіб їх знаходження *методом послідовних зближень Крилова*.

Якщо права частина рівняння  $y' = f(x, y)$  задана аналітично, то необхідні перші наближення можна знайти за допомогою, наприклад, методу послідовних наближень, степеневих рядів або Рунге-Кутта. Але якщо функція  $f(x, y)$  задана таблично, то жоден з цих методів застосувати не можна. У цьому випадку досить зручним є метод Крилова.

У § 9 було наведено формулу Адамса

$$\Delta y_i = h \left( y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{i-3} \right). \quad (10.1)$$

Враховуючи, що  $\Delta y'_{i-1} = \Delta y'_i - \Delta^2 y'_{i-1}$ ,  $\Delta^2 y'_{i-2} = \Delta^2 y'_{i-1} - \Delta^3 y'_{i-2}$ , та покладаючи  $\Delta^3 y'_{i-3} \approx \Delta^3 y'_{i-2}$ , з (10.1) одержуємо формулу

$$\Delta y_i = h \cdot \left( y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{i-2} \right). \quad (10.2)$$

Далі, враховуючи, що  $\Delta^2 y'_{i-1} = \Delta^2 y'_i - \Delta^3 y'_i$ ,  $\Delta^3 y'_{i-2} \approx \Delta^3 y'_{i-1}$ , з формули (10.2) знаходимо

$$\Delta y_i = h \left( y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_i + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{i-1} \right). \quad (10.3)$$

І, нарешті, покладаючи у (10.3)  $\Delta^3 y'_{i-1} \approx \Delta^3 y'_i$ , будемо мати

$$\Delta y_i = h \left( y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_i + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_i \right). \quad (10.4)$$

Використовуючи одержані формули, побудуємо зближення таким чином:

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad \underline{\Delta y_0} = h y'_0, \quad \underline{y_1} = y_0 + \underline{\Delta y_0}, \quad \underline{y'_1} = f(x_1, \underline{y_1}),$$

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta y'_0} &= \underline{y'_1} - y'_0, & \underline{\underline{\Delta y_0}} &= h \left( y'_0 + \frac{1}{2} \underline{\Delta y'_0} \right), & \underline{\underline{\Delta y_1}} &= h \left( \underline{y'_1} + \frac{1}{2} \underline{\Delta y'_0} \right), \\
\underline{y_1} &= y_0 + \underline{\Delta y_0}, & \underline{y_2} &= y_1 + \underline{\Delta y_1}, & \underline{y'_1} &= f \left( x_1, \underline{y_1} \right), & \underline{y'_2} &= f \left( x_2, \underline{y_2} \right), \\
\underline{\underline{\Delta y'_0}} &= \underline{y'_1} - y'_0, & \underline{\underline{\Delta y'_1}} &= \underline{y'_2} - \underline{y'_1}, & \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} &= \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \underline{\underline{\Delta y'_0}}, \\
\underline{\underline{\Delta y_0}} &= h \left( y'_0 + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right), & \underline{\underline{\Delta y_1}} &= h \left( \underline{y'_1} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right), \\
\underline{\underline{\Delta y_2}} &= h \left( \underline{y'_2} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} \right), \\
\underline{y_1} &= y_0 + \underline{\underline{\Delta y_0}}, & \underline{y_2} &= \underline{y_1} + \underline{\underline{\Delta y_1}}, & \underline{y_3} &= \underline{y_2} + \underline{\underline{\Delta y_2}}, \\
\underline{y'_1} &= f \left( x_1, \underline{y_1} \right), & \underline{y'_2} &= f \left( x_2, \underline{y_2} \right), & \underline{y'_3} &= f \left( x_3, \underline{y_3} \right), \\
\underline{\underline{\Delta y'_0}} &= \underline{y'_1} - y'_0, & \underline{\underline{\Delta y'_1}} &= \underline{y'_2} - \underline{y'_1}, & \underline{\underline{\Delta y'_2}} &= \underline{y'_3} - \underline{y'_2}, \\
\underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} &= \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \underline{\underline{\Delta y'_0}}, & \underline{\underline{\Delta^2 y'_1}} &= \underline{\underline{\Delta y'_2}} - \underline{\underline{\Delta y'_1}}, & \underline{\underline{\Delta^3 y'_0}} &= \underline{\underline{\Delta^2 y'_1}} - \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}}.
\end{aligned}$$

Звідси у підсумку одержуємо

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot \left( y'_0 + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_0}} + \frac{1}{24} \underline{\underline{\Delta^3 y'_0}} \right), \\
y_2 &= \underline{y_1} + h \cdot \left( \underline{y'_1} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_1}} + \frac{1}{24} \underline{\underline{\Delta^3 y'_0}} \right), \\
y_3 &= \underline{y_2} + h \cdot \left( \underline{y'_2} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y'_2}} - \frac{1}{12} \underline{\underline{\Delta^2 y'_1}} - \frac{1}{24} \underline{\underline{\Delta^3 y'_0}} \right).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо знайдені  $y_1, y_2, y_3$  надто відрізняються від  $\underline{y_1}, \underline{y_2}, \underline{y_3}$ , то процес зближення не можна вважати завершеним. У такому випадку доцільно зменшити крок  $h$  або знову взяти знайдені  $y_i$  замість  $\underline{y_i}$ .

Пропонуємо програму для реалізації цього методу на прикладі задачі Коші  $y' = x - y, y(0) = 1$ .

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: Y0=1: H=.1		
20 DEF FNF(X,Y)=X-Y	0	1
30 X1=X+H: X2=X+2*H: X3=X+3*H	.1	.909675
40 PY0=FNF(X,Y0): DY0=H*PY0: Y1=Y0+DY0	.2	.837467
50 PY1= FNF(X1,Y1): DPY0=PY1-PY0	.3	.781675
60 DY0=H*(PY0+DPY0/2): DY1=H*(PY1+DPY0/2)		
70 Y1=Y0+DY0: Y2=Y1+DY1		
80 PY1=FNF(X1,Y1): PY2=FNF(X2,Y2)		
90 DPY0=PY1-PY0: DPY1=PY2-PY1: D2PY0=DPY1-DPY0		
100 DY0=(PY0+DPY0/2-D2PY0/12)*H		
110 DY1=(PY1+DPY1/2-D2PY0/12)*H		
120 DY2=(PY2+DPY1/2+5*D2PY0/12)*H		
130 Y1=Y0+DY0: Y2=Y1+DY1: Y3=Y2+DY2		
140 PY1=FNF(X1,Y1): PY2=FNF(X2,Y2): PY3=FNF(X3,Y3)		
150 DPY0=PY1-PY0: DPY1=PY2-PY1: DPY2=PY3-PY2		
160 D2PY0=DPY1-DPY0: D2PY1=DPY2-DPY1		
170 D3PY0=D2PY1-D2PY0		
180 Y1=Y0+H*(PY0+DPY0/2- D2PY0/12+D3PY0/24)		
190 Y2=Y1+H*(PY1+DPY1/2- D2PY1/12+D3PY0/24)		
200 Y3=Y2+H*(PY2+DPY2/2-D2PY1/12- D3PY0/24)		
210 LPRINT "X", "Y": LPRINT: LPRINT X,Y0		
220 LPRINT X1,Y1: LPRINT X2,Y2: LPRINT X3,Y3		
230 END		

Як бачимо, отримані результати є досить близькими до точних значень, знайдених у § 4. Для розв'язування інших задач вигляду (9.1) зміни у програму потрібно внести лише у команди 10 та 20.

## § 11. Метод Мілна

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (11.1)$$

Будемо вважати, що перші чотири значення шуканого розв'язку значення  $y_0, y_1, y_2, y_3$  нам уже відомі. Їх можна одержати з початкової умови та, наприклад, з використанням методу Рунге-Кутта або методу послідовних наближень.

Для виведення формул Мілна скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона ([10], розділ 3, § 1):

$$y' = y'_k + q\Delta y'_k + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y'_k + \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y'_k,$$

де  $q = (x - x_k)/h$ . Будемо мати:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-4}}^{x_i} y' dx = \\ & = h \cdot \left( y'_{i-4} \int_0^4 dq + \Delta y'_{i-4} \int_0^4 q dq + \Delta^2 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^2 - q}{2} dq + \Delta^3 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} dq \right) = \\ & = h \cdot \left( 4y'_{i-4} + 8\Delta y'_{i-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{i-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{i-4} \right) = \frac{4h}{3}(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} y' dx = h \cdot \left( 2y'_{i-2} + 2\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{i-2} \right) = \frac{h}{3} \cdot (y'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}).$$

Таким чином, одержуємо **формули Мілна**:

$$\underline{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}), \quad (11.2)$$

$$y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\underline{y}'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}). \quad (11.3)$$

Ідея цього методу полягає в тому, що спочатку шукаємо значення  $\underline{y}_i$  за формулою (11.2), а потім, використовуючи його, з формули (11.3) знаходимо  $y_i$ . Як показав Мілн, абсолютна похибка значення  $y_i$  приблизно дорівнює  $\varepsilon_i = \frac{1}{29} |y_i - \underline{y}_i|$ . Доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 3, § 10). Там само встановлено, що сумарна похибка методу Мілна є величиною порядку  $h^4$ .

Досить просто виглядає програма на мові програмування Basic для розв'язування задачі Коші  $y' = x - y$ ,  $y(0) = 1$ .

Програма	Результат виконання програми	
	X	Y
10 X=0: B=.5: H=.1: DIM Y(3): Y(0)=1	0	1
20 INPUT "Y1,Y2,Y3"; Y(1),Y(2),Y(3)	.1	.909675
30 PRINT "X", "Y"	.2	.837467
40 FOR K=0 TO 3	.3	.781675
50 X=K*H: Y=Y(K)	.4	.74064
60 LPRINT X, Y: NEXT	.5	.7130982
70 DEF FNF(X,Y)=X-Y		
80 Y=Y(0)+4*H*(2*FNF(X,Y(3))- FNF(X-H,Y(2))+2*FNF(X-2*H, Y(1)))/3		
90 Y=Y(2)+H*(FNF(X+H,Y)+4*FNF(X,Y(3))+ FNF(X-H, Y(2)))/3		
100 X=X+H: PRINT X, Y		
110 IF X>=B THEN END		
120 Y(0)=Y(1): Y(1)=Y(2): Y(2)=Y(3): Y(3)=Y		
130 GOTO 80		

Для розв'язування інших задач вигляду (11.1) зміни у програмі потрібно внести лише у команди 10 і 70.



Метод Мілна можна використовувати для наближеного розв'язування нормальних систем диференціальних рівнянь, а також для рівнянь вищих порядків, які попередньо потрібно звести до таких систем.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати методом Мілна на відрізку  $[0; 0,5]$  задачу Коші  $y' = x + 2y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

## § 12. Деякі зауваження та узагальнення

До цього ми розглядали методи, в яких використовувалися лише перші похідні шуканого розв'язку. Використання похідних вищих порядків дозволяє добитися більшої точності розв'язку на заданому проміжку (див., наприклад, [4], розділ 3, § 11). Використаємо похідні другого порядку для розв'язування задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (12.1)$$

Враховуючи, що

$$y' = f(x, y), \quad y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y', \quad (12.2)$$

можна деяким числовим методом скласти вихідну таблицю значень:

$$\begin{array}{cccc} x_0, & y_0, & y'_0, & y''_0, \\ x_1, & y_1, & y'_1, & y''_1, \\ x_2, & y_2, & y'_2, & y''_2. \end{array}$$

Після цього за формулою

$$\underline{y}_i = y_{i-3} + 3(y_{i-1} - y_{i-2}) + h^2(y''_{i-1} - y''_{i-2}) \quad (12.3)$$

з [4] (розділ 3, § 11) для  $i = 3$  можна обчислити перше наближення  $\underline{y}_3$  для  $y_3$ . Використовуючи формули (12.2), далі можна знайти  $\underline{y}'_3, \underline{y}''_3$ . Тоді за формулою

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(y'_{i-1} - \underline{y}'_i) + \frac{h^2}{2}(y''_{i-1} - \underline{y}''_i) \quad (12.4)$$

для  $i = 3$  знаходимо  $y_3$ . Для контролю обчислень можна перерахувати  $y_3$ , покладаючи у формулі (12.4)  $i = 3$ ,  $\underline{y}'_3 = y'_3$ ,  $\underline{y}''_3 = y''_3$ . Аналогічно можна знайти інші наближення. Порядок точності описаного методу  $k = 5$ .

Ще більшої точності з порядком  $k = 7$  можна домогтися, якщо використовувати похідні третього порядку і формули

$$\underline{y}_i = y_{i-3} + 3(y_{i-1} - y_{i-2}) + \frac{h^3}{2}(y'''_{i-1} + y'''_{i-2}), \quad (12.5)$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(\underline{y}'_i + y'_{i-1}) - \frac{h^2}{10}(\underline{y}''_i - y''_{i-1}) + \frac{h^3}{120}(\underline{y}'''_i + y'''_{i-1}). \quad (12.6)$$

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати вказаними методами на відрізку  $[0; 0,5]$  дві задачі Коші:  $y' = x - y$ ,  $y(0) = 1$  і  $y' = x + 2y^2$ ,  $y(0) = 0$ .

Зауважимо, що використання навіть дуже точних методів не гарантує від спотворення результату, тобто одержаний результат може виявитись надто далеким від точного значення.

Для ілюстрації наведемо приклад з [6] (розділ 2, § 5). Нехай на відрізку  $[0; 3]$  потрібно наближено розв'язати задачу Коші

$$y'' = 10y' + 11y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (12.7)$$

Загальним розв'язком рівняння з (12.7) є  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{11x}$ . Враховуючи початкові умови, знаходимо  $y = e^{-x}$ , а тому

$$y(3) = e^{-3} \approx 0,0498.$$

Враховуючи похибки заокруглень, застосування числових методів дасть нам розв'язок  $\bar{y} = (1 + \varepsilon_1) e^{-x} + \varepsilon_2 e^{11x}$ .

Навіть якщо  $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 10^{-10}$ , то

$$\bar{y}(3) = (1 \pm 10^{-10}) \cdot e^{-3} \pm 10^{-10} e^{33} \approx \pm 2 \cdot 10^4,$$

що надто відрізняється від точного значення.

На практиці подібні ситуації трапляються доволі рідко, але їх існування вказує на необхідність використання контрольних обчислень для перевірки правильності обчислень. Зокрема, можна скористатися перерахунком із подвійним кроком. Якщо  $\bar{y}_{2n}$  – наближене значення розв’язку на  $2n$ -му кроці з кроком  $h$ , а  $\bar{y}_n$  – наближене значення у цій же точці, знайдене із кроком  $2h$ , то наближено покладають ([4], розділ 3, § 15)

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{2n}}{2^k - 1}, \quad (12.8)$$

де  $k$  – порядок точності вибраного методу. Наприклад, для методу Рунге-Кутта з  $k = 4$  формула (12.8) набуває вигляду

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{1}{15}(\bar{y}_n - \bar{y}_{2n}).$$

Проте й у цьому випадку не завжди вдається врахувати поточні похибки, пов’язані із заокругленнями на кожному кроці обчислень.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ I

Задано задачу Коші. Потрібно:

- 1) знайти її точний розв’язок методом послідовних наближень;
- 2) дослідити, для якого найменшого  $n$  похибка наближення  $\bar{y}(x) = y_n(x)$  в прямокутнику  $Q = \{(x, y) : |x| \leq 0,5, |y| \leq 5\}$  не перевищує 0,01;
- 3) знайти точний розв’язок методом степеневих рядів;
- 4) для  $n = 1$  знайти наближений розв’язок на відрізку  $[0; 0,5]$  методом Чаплигіна;
- 5) знайти наближений розв’язок на відрізку  $[0; 0,5]$  методом ламаних Ейлера з кроком  $h = 0,1$ ;

6) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  за першою модифікацією методу ламаних Ейлера з кроком  $h = 0,1$ ;

7) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  за другою модифікацією методу ламаних Ейлера з кроком  $h = 0,1$ ;

8) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  за узагальненою схемою Ейлера з кроком  $h = 0,1$ ;

9) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  за схемою Рунге-Кутта для  $m = 4$  з кроком  $h = 0,1$ ;

10) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  методом Адамса з кроком  $h = 0,1$ ;

11) знайти наближений розв'язок на відрізку  $[0;0,5]$  методом Мілна з кроком  $h = 0,1$ .

Обчислення проводити з точністю до чотирьох знаків після коми. Результати наближених обчислень оформити у вигляді таблиці:

Метод	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,2$	$x_3 = 0,3$	$x_4 = 0,4$	$x_5 = 0,5$

1. 
$$\begin{cases} y' = y - 2x + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} y' = -y - 2x - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} y' = -y - x + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} y' = y - x - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} y' = y + x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} y' = -y + x - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} y' = -y + 2x - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} y' = y + 2x + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y' = y + 3x - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y' = -y + 3x + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} y' = -y - 2x - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} y' = y - 2x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y' = y - x + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} y' = -y - x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} y' = -y + x + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} y' = y + x - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} y' = y + 2x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} y' = -y + 2x - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} y' = -y + 3x - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} y' = y + 3x + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} y' = y - 2x - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} y' = -y - 2x + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} y' = -y - x - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} y' = -y + x - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} y' = y + x + 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} y' = y - x + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} y' = -y + 2x - 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} y' = y + 2x - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} y' = y + 3x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} y' = -y + 3x - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

## РОЗДІЛ II.

### НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

#### § 1. Постановка крайових задач. Функція Гріна

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \quad (1.1)$$

де  $g(x)$ ,  $h(x)$ ,  $f_0(x)$  – неперервні на відрізку  $[a, b]$  функції. Якщо помножити обидві частини рівняння (1.1) на функцію

$$p(x) = e^{\int_a^x g(t) dt},$$

то рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$L[y] \equiv (p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (1.2)$$

де  $q(x) = -p(x)h(x)$ ,  $f(x) = p(x)f_0(x)$ .

Для рівняння (1.2) розглянемо лінійні **крайові умови**

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (1.3)$$

де  $\alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $B$  – задані числа, причому  $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$ .

Якщо  $A = B = 0$ , то умови (1.3) називають **однорідними**.

Задачу про відшукання розв'язків рівняння (1.2), які задовольняють умови (1.3), називають **крайовою задачею**. Якщо функція  $f(x)$  тотожно не дорівнює нулю, то задачу (1.2), (1.3) називають **неоднорідною**, а якщо  $f(x) \equiv 0$ ,  $A = B = 0$ , то **однорідною крайовою задачею**.

Розв'язок крайової задачі (1.2), (1.3) може бути представлений у вигляді

$$y(x) = z(x) + \varphi(x), \quad (1.4)$$

де  $\varphi(x)$  – довільна двічі неперервно диференційовна на відрізку  $[a, b]$  функція, яка задовольняє умови (1.3). Підставляючи  $y(x)$  з (1.4) у рівняння (1.2), одержуємо, що

$$L[z] \equiv (p(x)z')' - q(x)z = f(x) - (p(x)\varphi'(x))' + q(x)\varphi(x).$$

При цьому функція  $z(x)$  повинна задовольняти однорідні крайові умови (1.3). У зв'язку з цим надалі розглядатимемо лише крайові задачі з однорідними умовами (1.3).

Для представлення розв'язку таких задач використовують **функцію Гріна**  $G(x, t)$ , яка визначена для  $\forall x, t \in [a, b]$  і задовольняє умови:

1) для кожного фіксованого  $t \in [a, b]$   $G(x, t)$  як функція змінної  $x$  на проміжках  $[a, t]$  і  $(t, b]$  є розв'язком однорідного рівняння (1.2);

2)  $G(x, s)$  для кожного  $t \in [a, b]$  задовольняє однорідні крайові умови (1.3);

3)  $G(x, s)$  для кожного  $t \in (a, b)$  неперервна на  $[a, b]$ , а її похідна в точці  $x = t$  має розрив першого роду зі стрибком

$$G'_x(x, t)|_{t=+0} - G'_x(x, t)|_{t=-0} = \frac{1}{p(t)}.$$

Відомо ([12], розділ 4, § 2), що неоднорідна крайова задача (1.2), (1.3) з однорідними крайовими умовами має єдиний розв'язок для будь-якої неперервної на  $[a, b]$  функції  $f(x)$  за умови, якщо однорідна крайова задача (1.2), (1.3) має тільки тривіальний розв'язок. Цей розв'язок виражається формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt. \quad (1.5)$$

Функція  $G(x, t)$  може бути визначена у вигляді

$$G(x,t) = \begin{cases} c_1 y_1(x), & a \leq x \leq t, \\ c_2 y_2(x), & t \leq x \leq b, \end{cases}$$

де  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  – розв’язки рівняння (1.2), які задовольняють однорідні умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1'(a) + \alpha y_1(a) = 0, \\ \beta_1 y_2'(b) + \beta y_2(b) = 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти  $c_1$ ,  $c_2$  при цьому можна однозначно визначити з системи

$$\begin{cases} c_2 y_2(t) - c_1 y_1(t) = 0, \\ c_2 y_2'(t) - c_1 y_1'(t) = \frac{1}{p(t)}. \end{cases}$$

Методи наближеного розв’язування крайових задач можна розділити на дві групи: різницеві методи і аналітичні методи. Розгляду цих методів присвячені наступні параграфи.

## § 2. Метод стрільби

Розглянемо крайову задачу для рівняння другого порядку у більш загальному вигляді:

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{2.1}$$

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \tag{2.2}$$

$$\varphi_2(y(b), y'(b)) = 0, \tag{2.3}$$

де  $f$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – задані достатньо гладкі функції своїх аргументів. Окрім того, припустимо, що крайова задача (2.1)-(2.3) має єдиний розв’язок, а задача Коші для рівняння (2.1) має єдиний розв’язок для довільних початкових умов.

Виберемо деяку початкову умову  $\bar{y}(a) = \bar{y}_0$ . Тоді з (2.2) знаходимо  $\bar{y}'(a) = \bar{y}_1$ . Маючи ці умови, одержуємо розв’язок рівняння



(2.1) – функцію  $\bar{y}(x)$ , яка задовольняє крайові умови (2.2). Якщо  $\varphi_2(\bar{y}(b), \bar{y}'(b)) = 0$ , то  $\bar{y}(x)$  є розв'язком крайової задачі (2.1)-(2.3). Але ймовірність такого “точного влучення” надзвичайно мала. Тому швидше за все пошук розв'язку доведеться продовжити.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що

$$\varphi_2(\bar{y}(b), \bar{y}'(b)) < 0.$$

Виберемо нове значення  $\bar{y}(a) = \bar{y}_0$  і аналогічно побудуємо функцію  $\bar{\bar{y}}(x)$ . Оскільки за припущенням задача (2.1)-(2.3) має розв'язок, а функції  $f, \varphi_1, \varphi_2$  є достатньо гладкими, то знайдуться такі число  $\bar{y}_0$  і функція  $\bar{\bar{y}}(x)$ , що  $\bar{\bar{y}}(a) = \bar{y}_0$  та  $\varphi_2(\bar{\bar{y}}(b), \bar{\bar{y}}'(a)) \geq 0$ . Таким чином, пошук  $\bar{y}_0$  будемо продовжувати, доки не доб'ємося виконання останньої нерівності.

Враховуючи неперервну залежність  $y(x)$  від початкового значення  $y_0$ , робимо висновок, що число  $y_0$  повинно знаходитись між  $\bar{y}_0$  та  $\bar{\bar{y}}_0$ . Знайти його з потрібною точністю можна, використовуючи, наприклад, метод половинного поділу відрізка  $[\bar{y}_0, \bar{\bar{y}}_0]$  або  $[\bar{\bar{y}}_0, \bar{y}_0]$ .

Таким чином, розв'язування крайової задачі зводиться до кількаразового розв'язання задачі Коші з різними початковими умовами.

Для лінійного рівняння (1.2) з однорідними лінійними умовами (1.3) достатньо буде розв'язати лише дві задачі Коші. Справді, якщо  $z(x)$  – розв'язок неоднорідного рівняння (1.2), який задовольняє початкові умови

$$z(a) = \alpha_1, z'(a) = -\alpha,$$

а  $y_0(x)$  – розв’язок відповідного однорідного рівняння, який задовольняє умови

$$y_0(a) = \alpha_1, \quad y_0'(a) = -\alpha,$$

то для довільного значення сталої  $C$  функція

$$y(x) = z(x) + C \cdot y_0(x) \quad (1.4)$$

є розв’язком рівняння (1.2), який задовольняє крайову умову

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0.$$

Тоді для  $x = b$  одержуємо співвідношення

$$\beta_1 z'(b) + \beta z(b) + C \cdot (\beta_1 y_0'(b) + \beta y_0(b)) = 0, \quad (1.5)$$

з якого знаходимо  $C$ . При цьому, згідно з припущенням про єдиність розв’язку крайової задачі, коефіцієнт біля  $C$  у формулі (1.5) не перетворюється в нуль.

Таким чином, знаходження розв’язку крайової задачі звелось до розв’язування двох задач Коші, які можна буде розв’язати точно або наближено, використовуючи методи з розділу I.

### § 3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' - q(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

та крайові умови

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (3.2)$$

Задачу (3.1), (3.2) називають **найпростішою крайовою задачею**. Вважатимемо, що функції  $q(x)$  та  $f(x)$  неперервні на відрізку  $[a, b]$ . Якщо, крім того,  $q(x) > 0$ , то така задача має єдиний розв’язок ([12], розділ 6, § 2).

Замінивши другу похідну відповідним різницеvim відношенням, приходимо до різницевої схеми

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i-1}}{h^2} - q_i \bar{y}_i = f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = 0, \\ \bar{y}_n = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

де

$$q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Схема (3.3) є системою  $(n+1)$ -го лінійного алгебраїчного рівняння. Для існування та єдиності її розв'язку достатньо встановити, що відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок. Справді, якщо припустити, що ця система має нетривіальний розв'язок

$$\bar{y} = (0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, 0),$$

то серед  $\bar{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , існує найбільше число  $\bar{y}_k = M \geq 0$ . Якщо  $k = 0$  або  $k = n$ , то  $M = 0$ . Якщо ж  $0 < k < n$ , то з (3.3) одержуємо

$$(2 + h^2 q_k) M = (2 + h^2 q_k) \bar{y}_k = \bar{y}_{k+1} + \bar{y}_{k-1} \leq 2M,$$

що неможливо для  $M > 0$ , бо  $2 + h^2 q_k > 2$ . Отже,  $M = 0$ . Аналогічно можна встановити, що

$$m \equiv \min \{ \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1} \} = 0,$$

а тому розв'язок  $\bar{y}$  однорідної системи (3.3) є тривіальним. Таким чином, різницева схема (3.3) має єдиний розв'язок для довільної правої частини і для кожного  $n$ .

Встановимо порядок апроксимації схеми (3.3). Припустимо, що функції  $q(x)$ ,  $f(x)$  мають на відрізку  $[a, b]$  неперервні другі похідні. Тоді, використовуючи формули Тейлора для лівих частин перших  $n-1$  рівнянь схеми (3.3) та підставляючи точний розв'язок задачі (3.1), (3.2), будемо мати:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left( y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + O(h^4) - 2y(x_i) + \right. \\ & \left. + y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + O(h^4) \right) - q_i y(x_i) = \\ & = y''(x_i) - q(x_i) y(x_i) + O(h^2) = f(x_i) + O(h^2). \end{aligned}$$

Оскільки  $y(x_0) = y(x_n) = 0$ , то порядок апроксимації схеми (3.3)  $k = 2$ . Схема (3.3) є стійкою, а тому порядок збіжності розв'язків  $\bar{y}_h$  при  $h \rightarrow 0$  до розв'язку задачі (3.1)-(3.2) також дорівнює 2 ([12], розділ 6, § 2).

Зауважимо, що на відміну від схем, розглянутих у § 2, ця схема не дає явного алгоритму для послідовного знаходження  $\bar{y}_i$ . Методику розв'язування систем вигляду (3.3) розглянемо у наступному параграфі.

#### **§ 4. Метод алгебраїчної прогонки розв'язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею**

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \quad (4.1)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \end{cases} \quad (4.2)$$

Замінімо наближено

$$\begin{aligned} y''(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2}, \\ y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

та

$$y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}, \quad y'(b) = \frac{y(x_{n-1}) - y(x_n)}{-h},$$

де

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

У результаті одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i-1}}{h^2} + g_i \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_{i-1}}{2h} + h_i \bar{y}_i = f_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \alpha_1 \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{h} + \alpha \bar{y}_0 = A, \\ \beta_1 \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n-1}}{h} + \beta \bar{y}_n = B, \end{cases} \quad (4.3)$$

де

$$g_i = g(x_i), \quad h_i = h(x_i), \quad f_i = f_0(x_i).$$

Аналогічно, як для найпростішої крайової задачі (§ 3) можна переконатись, що для неперервних на  $[a, b]$  функцій  $g'(x)$ ,  $h''(x)$ ,  $f_0''(x)$  схема (4.3) має порядок апроксимації  $k = 2$ .

Для дослідження розв'язності цієї схеми запишемо її у такому загальному вигляді

$$\begin{cases} A_i \bar{y}_{i-1} - C_i \bar{y}_i + B_i \bar{y}_{i+1} = F_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = m \bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma \bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \quad (4.4)$$

Зокрема, для схеми (4.3)

$$A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{g_i}{2h}, \quad C_i = \frac{2}{h^2} - h_i, \quad B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{2h}, \quad F_i = f_i,$$

$$m = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha h}, \quad k = \frac{-Ah}{\alpha_1 - \alpha h},$$

$$\gamma = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta h}, \quad \delta = \frac{Bh}{\beta_1 + \beta h}.$$

Шукатимемо такі коефіцієнти  $m_i$  та  $k_i$ , щоб виконувалися рівності

$$\bar{y}_{i-1} = m_i \bar{y}_i + k_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Тоді з (4.4) одержуємо

$$(A_i m_i - C_i) \bar{y}_i + B_i \bar{y}_{i+1} + (A_i k_i - F_i) = 0.$$

Підставляючи сюди

$$\bar{y}_i = m_{i+1} \bar{y}_{i+1} + k_{i+1},$$

приходимо до рівності

$$\left[ (A_i m_i - C_i) m_{i+1} + B_i \right] \cdot \bar{y}_{i+1} + \left[ (A_i m_i - C_i) k_{i+1} + A_i k_i - F_i \right] = 0. \quad (4.6)$$

Для тотожного виконання рівності (4.6) достатньо прирівняти до нуля вирази у квадратних дужках. Звідси, за умови, що  $C_i - A_i m_i \neq 0$ , знаходимо

$$m_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i m_i}, \quad k_{i+1} = \frac{A_i k_i - F_i}{C_i - A_i m_i}, \quad (4.7)$$

де  $m_1 = m$ ,  $k_1 = k$ . Знайшовши  $m_n$  та  $k_n$  з системи

$$\begin{cases} \bar{y}_{n-1} = m_n \bar{y}_n + k_n, \\ \bar{y}_n = \gamma \bar{y}_{n-1} + \delta, \end{cases}$$

за умови, що  $1 - \gamma m_n \neq 0$ , одержуємо

$$\bar{y}_n = \frac{\gamma k_n + \delta}{1 - \gamma m_n}. \quad (4.8)$$

Маючи  $\bar{y}_n$ , за формулами (4.5) можемо послідовно знайти  $\bar{y}_{n-1}, \dots, \bar{y}_1, \bar{y}_0$ .

Зазначимо, що для застосування такого методу достатньо, щоб виконувались такі умови:

$$A_i > 0, B_i > 0, C_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 0 \leq m < 1, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (4.9)$$

Справді, у цьому випадку для  $i = 1, \dots, n$  будемо мати  $0 \leq m_i < 1$ , а отже, жоден з знаменників у формулах (4.7) та (4.8) не перетворюється в нуль.

Для схеми (4.3) умови (4.9) виконуються, якщо

$$\begin{cases} h(x) \leq 0, \\ h \cdot \max_{x \in [a,b]} |g(x)| < 2, \\ \frac{\alpha_1}{\alpha} \leq 0, \\ \frac{\beta_1}{\beta} \geq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

**Приклад 2.1.** Методом алгебраїчної прогонки знайти наближений розв'язок рівняння

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (4.11)$$

який задовольняє крайові умови

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (4.12)$$

**Розв'язання.** Маємо  $g(x) = -2x$ ,  $h(x) = -2$ ,  $f_0(x) = -4x$ ,

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta = 1, \quad A = 0, \quad B = 1 + e.$$

Оскільки  $\max_{x \in [0,1]} |g(x)| = 2$ , то для  $h < 1$  умови (4.10) будуть виконуються.

Наведемо програму на мові програмування Basic для числового розв'язання задачі (4.11), (4.12), вибравши крок  $h = 0,1$ .

Програма	Результат виконання програми		Значення точного розв'язку
	X	Y	
10 X=0: N=10: H=.1			
20 DIM A(N),B(N),C(N),M(N),K(N),X(N),Y(N)	0	1.046537	1
30 DEF FNG(X)= -2 *X: DEF FNF (X) = -4*X:	.1	1.151191	1.11005
DEF FNH(X)= -2	.2	1.277175	1.240811
40 A1=1: A0=-1: B1=0: B0=1: A=0:	.3	1.426202	1.394174
B=1+EXP(1): X(N)=X+N*H: X(0)=X	.4	1.601483	1.573511
50 C=B1/ (B1+B0*H): D=B*H/(B1+B0*H):	.5	1.808068	1.784025
M(1)=A1/(A1-A0*H): K(1)=A*H/(A0*H-A1)	.6	2.053411	2.033329

```

60 FOR I = 1 TO N-1 .7 2.348233 2.332316
70 X(I)=X+I*H: A(I)=(1/H-FNG(X(I))/2)/H: .8 2.707827 2.696481
    B(I)=(1/H+FNG(X(I))/2)/H: .9 3.154044 3.147908
    C(I)=2/H/H-FNH(X(I)): F(I)=FNF(X(I)) 1 3.718282 3.718282
80 M(I+1)=B(I)/(C(I)-A(I)*M(I)):
    K(I+1)=(A(I)*K(I)-F(I))/(C(I)-A(I)*M(I))
90 NEXT I
100 Y(N) = (C*K(N) + D)/(1-C*M(N))
110 FOR I=N TO 1 STEP -1
120 Y(I-1)=M(I)*Y(I)+K(I): NEXT I
130 LPRINT "X", "Y": LPRINT
140 FOR I=0 TO 10
150 LPRINT X(I), Y(I), X(I)+EXP(X(I)*X(I))
160 NEXT I: END

```

Для порівняння в останньому стовпці наведені значення точного розв'язку  $y(x) = x + e^{x^2}$  крайової задачі (4.11), (4.12). ■

Запропонована програма може бути використана також для розв'язування інших крайових задач вигляду (4.1), (4.2). Для цього зміни необхідно внести лише у команди 10, 30, 40, а також у команді 150 зняти друкування останнього виразу.

Наведемо приклад, який ілюструє, що при розв'язуванні крайових задач цим методом похибки можуть бути й достатньо великими.

**Приклад 2.2.** Розв'язати методом алгебраїчної прогонки крайову задачу  $y'' - 4y' + 4y = xe^x$ ,  $y'(0) - y(0) = 1$ ,  $y'(1) + y(1) = 7e$ .

**Розв'язання.** Точним розв'язком цієї крайової задачі є  $y = e^x(x + 2)$ . Тут  $g(x) = -4$ ,  $h(x) = 4$ ,  $f_0(x) = xe^x$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = 7e$ .



Результат виконання програми		Значення точного розв'язку
X	Y	
0	1.196251	2
.1	1.415876	2.320859
.2	1.675902	2.687086
.3	1.985198	3.104675
.4	2.359945	3.580379
.5	2.799277	4.121803
.6	3.336115	4.737509
.7	3.988233	5.437133
.8	4.784614	6.231515
.9	5.762223	7.132849
1	6.968188	8.154845

## § 5. Інший підхід до розв'язування систем з трьохдіагональною матрицею

Повернемося до системи (4.4), вважаючи коефіцієнти  $A_i, B_i, C_i$  сталими, і запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = F_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = m\bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \quad (5.1)$$

Припустимо, що  $A > 0, B > 0, C > A + B$ . Розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = 0 \quad (5.2)$$

шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}_i = \lambda^i, \quad \lambda \neq 0.$$

Якщо підставити  $\bar{y}_i = \lambda^i u$  (5.2), то одержимо характеристичне рівняння  $A - C\lambda + B\lambda^2 = 0$  з невід'ємним дискримінантом:

$$D = C^2 - 4AB > (A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2 \geq 0.$$

Таким чином, існують два прості додатні корені цього характеристичного рівняння, які позначимо  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ , а отже, загальним розв'язком рівняння (5.2) є

$$\bar{y}_i = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.3)$$

Оскільки функція  $f_0(x)$  неперервна, то наближено одержуємо

$$F_{i+1} \approx F_i \text{ і } F_{i-1} \approx F_i.$$

Тому за частинний розв'язок рівняння (5.1) можна взяти

$$\bar{y}_{iu} \approx \frac{F_i}{A + B - C}.$$

Загальний розв'язок системи (5.1) одержуємо у вигляді

$$\bar{y}_i = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i + \frac{F_i}{A + B - C}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.4)$$

Вважаючи, що рівність (5.4) виконується також для  $i = 0$  та  $i = n$ , з двох останніх рівнянь системи (5.1) знаходимо значення коефіцієнтів  $C_1$  та  $C_2$ . Підставляючи їх у (5.4), можемо знайти  $\bar{y}_i$  для всіх  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Приклад 2.3.** Знайти наближений розв'язок крайової задачі  $y'' - y = x$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  на відрізку  $[0; 1]$ .

**Розв'язання.** Різницева схема для крайової задачі має вигляд

$$\frac{\bar{y}_{i-1}}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right) \bar{y}_i + \frac{\bar{y}_{i+1}}{h^2} = x_i,$$

причому  $A + B - C = -1 \neq 0$ . За формулою (5.4) знаходимо

$$\bar{y}_i = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i - x_i,$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  – корені квадратного рівняння

$$\frac{\lambda^2}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right)\lambda + \frac{1}{h^2} = 0.$$

Отже,

$$\lambda_1 = \frac{2 + h^2 + \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2 + h^2 - \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}.$$

Покладемо  $n = 10$ . Тоді

$$h = 0,1, \quad \lambda_1 \approx 1,105, \quad \lambda_2 \approx 0,905.$$

Враховуючи крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1\lambda_1^{10} + C_2\lambda_2^{10} = 1, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx 0,426, \quad C_2 = \frac{-1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx -0,426.$$

Отже, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}_i = 0,426 \cdot (1,105^i - 0,905^i) - x_i, \quad i = 0,1,\dots,10.$$

Порівняємо одержаний результат з точним розв'язком

$$y(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{e^2 - 1} - x.$$

Результати обчислень наведені у таблиці:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$y_i$	-0,015	-0,029	-0,041	-0,050	-0,057	-0,058	-0,055	-0,044	-0,027
$\bar{y}_i$	-0,015	-0,029	-0,041	-0,051	-0,057	-0,059	-0,055	-0,045	-0,027

Бачимо, що у точках  $x_i$  значення наближеного розв'язку співпадають зі значеннями  $y_i = y(x_i)$  точного розв'язку з точністю до 0,001. ■

## § 6. Метод колокації

Розглянемо рівняння

$$L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \quad (6.1)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (6.2)$$

де  $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$ . Спробуємо наближений розв'язок задачі (6.1), (6.2) знайти у вигляді аналітичного виразу.

Для цього виберемо спочатку сукупність лінійно незалежних функцій  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ , щоб  $u_0(x)$  задовольняла умови (6.2), а інші функції – відповідні однорідні крайові умови. Якщо  $A = B = 0$ , то вважатимемо, що  $u_0(x) \equiv 0$ .

Наближений розв'язок задачі (6.1), (6.2) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x). \quad (6.3)$$

Функція  $\bar{y}(x)$  задовольняє крайові умови (6.2) для довільних сталих  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Підберемо коефіцієнти  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , так, щоб  $\bar{y}(x)$  у певному сенсі найбільш точно задовольняла рівняння (6.1).

Підставляючи (6.3) у рівняння (6.1), одержуємо

$$R(x, c_1, \dots, c_n) \equiv L[\bar{y}] - f_0(x) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i]. \quad (6.4)$$

Якщо для деякого набору коефіцієнтів  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , виконується рівність  $R(x, c_1, \dots, c_n) \equiv 0$ ,  $a \leq x \leq b$ , то функція  $\bar{y}(x)$  є точним розв'язком. Але так вдало підібрати коефіцієнти, взагалі кажучи, неможливо. Тому будемо вимагати, щоб функція  $R(x, c_1, \dots, c_n)$  перетворювалася в нуль на деякому наборі точок  $x_1, \dots, x_n$  з відрізка  $[a, b]$ . Ці точки називатимемо **точками колокації**.

Таким чином, коефіцієнти  $c_i, i = 1, \dots, n$ , можуть бути визначені з системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, \dots, c_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ R(x_n, c_1, \dots, c_n) = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

якщо вона є сумісною. З практичної точки зору важливо, щоб система (6.5) мала ранг  $r = n$ . Якщо ж  $r < n$ , то до точок колокації доцільно додати ще  $n - r$  нових точок і знову дослідити новоутворену систему на сумісність.

**Приклад 2.4.** Розв'язати методом колокації на відрізку  $[0;1]$  крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (6.6)$$

**Розв'язання.** Розглянемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3.$$

Функція  $u_0(x)$  задовольняє крайові умови з (6.6), а функції  $u_1(x)$  та  $u_2(x)$  – відповідні однорідні умови.

Нехай

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3).$$

Тоді

$$\bar{y}'(x) = 2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2),$$

$$\bar{y}''(x) = 2 + e^x + c_1(6x - 2) + c_2(12x^2 - 6x).$$

Отже,

$$\begin{aligned} R(x, c_1, c_2) = & 2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x + \\ & + c_1 \cdot (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2) + c_2 \cdot (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Виберемо точки колокації  $x_1 = 0$  та  $x_2 = 1$ . У результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2c_1 + 1 = 0, \\ 2c_1 + 4c_2 - 3e = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо:  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{3e-1}{4}$ .

Отже, наближено маємо

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2) + \frac{3e-1}{4}(x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад,  $\bar{y}(0,5)$  і точне значення  $y(0,5)$ :

$$\bar{y}(0,5) = 0,5^2 + e^{0,5} + \frac{1}{2}(0,5^3 - 0,5^2) + \frac{3e-1}{4}(0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,724427,$$

$$y(0,5) = 0,5 + e^{0,25} \approx 1,784025. \blacksquare$$

Для досягнення більшої точності потрібно взяти значення  $n > 2$ . Але і для  $n = 2$  добитися кращої точності іноді вдається за рахунок більшої щільності точок колокації. Зокрема, у прикладі 2.4 доцільніше було вибрати  $x_1 = 1/4$ ,  $x_2 = 3/4$  або  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 2/3$ .

## § 7. Метод найменших квадратів

Розглянемо крайову задачу

$$\begin{cases} y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \end{cases} \quad (7.1)$$

Дотримуючись позначень попереднього параграфа, розв'язок задачі (7.1) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x), \quad (7.2)$$

але тепер вимагатимемо, щоб

$$I = \int_a^b R^2(x, c_1, \dots, c_n) dx \quad (7.3)$$

набував мінімуму (*інтегральний метод найменших квадратів*).

Для цього необхідно, щоб виконувались умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial c_1} = 2 \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial I}{\partial c_n} = 2 \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_n} dx = 0. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

**Приклад 2.5.** Інтегральним методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (7.5)$$

**Розв'язання.** Візьмемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3,$$

які задовольняють відповідні крайові умови. Тоді

$$R(x, c_1, c_2) = 2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x + c_1(-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2) + c_2(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x) \equiv g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x).$$

Оскільки

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -8x^3 + 6x^2 + 6x - 2 \equiv g_1(x),$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_2} = -10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x \equiv g_2(x),$$

то система (7.4) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 (g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x))g_1(x) dx = 0, \\ \int_0^1 (g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x))g_2(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

або

$$\begin{cases} c_1 \int_0^1 g_1^2(x) dx + c_2 \int_0^1 g_1(x)g_2(x) dx = -\int_0^1 g_0(x)g_1(x) dx, \\ c_1 \int_0^1 g_1(x)g_2(x) dx + c_2 \int_0^1 g_2^2(x) dx = -\int_0^1 g_0(x)g_2(x) dx. \end{cases}$$

З цієї системи можна знайти значення коефіцієнтів  $c_1$  і  $c_2$ . Для цього обчислимо спочатку визначені інтеграли з цієї системи:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1^2(x) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)^2 dx = \\ &= 4 \int_0^1 (16x^6 - 24x^5 - 15x^4 + 26x^3 + 3x^2 - 6x + 1) dx = \frac{22}{7}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1(x)g_2(x) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x) dx = \\ &= 4 \int_0^1 (20x^7 - 31x^6 - 27x^5 + 47x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 3x) dx = \frac{101}{35}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_0(x)g_1(x) dx &= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (24x^5 - 34x^4 - 14x^3 + 24x^2 + 2x - 2 + e^x(8x^4 - 2x^3 - 9x^2 - x + 1)) dx = \\ &= -\frac{1873}{5} + 136e; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_2^2(x) dx &= \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)^2 dx = \\ &= 4 \int_0^1 (25x^8 - 40x^7 - 44x^6 + 78x^5 + 12x^4 - 36x^3 + 9x^2) dx = \frac{1124}{315}; \end{aligned}$$

$$\int_0^1 g_0(x)g_2(x) dx =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x) dx = \\
&= 2 \int_0^1 (30x^6 - 44x^5 - 30x^4 + 50x^3 - 6x + e^x(10x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 3x)) dx = \\
&= \frac{49537}{21} - 870e.
\end{aligned}$$

Отже, маємо систему

$$\begin{cases} \frac{22}{7}c_1 + \frac{101}{35}c_2 = \frac{1873}{5} - 136e, \\ \frac{101}{35}c_1 + \frac{1124}{315}c_2 = -\frac{49537}{21} + 870e \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{22 \cdot 5}{101}c_1 + c_2 = \frac{1873 \cdot 7}{101} - \frac{136 \cdot 35}{101}e, \\ \frac{101 \cdot 9}{4 \cdot 281}c_1 + c_2 = -\frac{49537 \cdot 15}{4 \cdot 281} + \frac{870 \cdot 9 \cdot 35}{4 \cdot 281}e. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, одержуємо

$$\frac{123640 - 91809}{101 \cdot 4 \cdot 281}c_1 = \frac{14736764 + 75048555}{101 \cdot 4 \cdot 281} - \frac{5350240 + 27679050}{101 \cdot 4 \cdot 281}e,$$

$$31831c_1 = 89785319 - 33029290e,$$

$$c_1 = \frac{89785319 - 33029290e}{31831} \approx 0,075402.$$

Підставляючи значення сталої  $c_1$  в перше рівняння системи, знаходимо

$$c_2 \approx 1,620636.$$

Таким чином, наближеним розв'язком крайової задачі (7.5) є

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,075402 \cdot (x^3 - x^2) + 1,620636 \cdot (x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад,  $\bar{y}(0,5)$  і порівняємо його із точним значенням  $y(0,5)$ :

$$\begin{aligned}\bar{y}(0,5) &= 0,5^2 + e^{0,5} + 0,075402 \cdot (0,5^3 - 0,5^2) + \\ &+ 1,620636(0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,788006, \\ y(0,5) &= 0,5 + e^{0,25} \approx 1,784025. \blacksquare\end{aligned}$$

Зауважимо, що для задачі з прикладу 2.5 інтегральним методом найменших квадратів вдалося отримати точніше значення розв'язку для  $x = 0,5$ , ніж методом колокації у § 6.

Замість мінімуму інтеграла (7.3) можна шукати мінімум скінченної суми (*точковий метод найменших квадратів*)

$$I_N = \sum_{i=1}^N R^2(x_i, c_1, \dots, c_n),$$

де  $x_1, \dots, x_n$  – деяка достатньо щільна сукупність точок відрізка  $[a, b]$ ,  $N \geq n$ . При цьому одержуємо такі необхідні умови мінімуму

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N R_i \frac{\partial R_i}{\partial c_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N R_i \frac{\partial R_i}{\partial c_n} = 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

де  $R_i = R(x_i, c_1, \dots, c_n)$ .

Зокрема, розв'язуючи крайову задачу (7.5), одержуємо систему

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^N g_1^2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N g_1(x_i)g_2(x_i) = -\sum_{i=1}^N g_0(x_i)g_1(x_i), \\ c_1 \sum_{i=1}^N g_1(x_i)g_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N g_2^2(x_i) = -\sum_{i=1}^N g_0(x_i)g_2(x_i). \end{cases}$$

Зауважимо, що для випадку  $N = n$  значення сталих  $c_1, \dots, c_n$  у системі (7.6) можна знайти методом колокації.

## § 8. Метод Гальоркіна

Застосування *методу Гальоркіна* ґрунтується на відомій теоремі з теорії рядів Фур'є про тотальність повної ортогональної системи, доведення якої можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 4, § 8).

**Теорема 2.1.** *Якщо  $\{u_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – повна ортогональна сукупність функцій на відрізку  $[a, b]$ , а  $f(x)$  – неперервна на  $[a, b]$  функція, ортогональна на  $[a, b]$  до всіх  $u_n(x)$ , тобто*

$$\int_a^b f(x)u_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

*то  $f(x) \equiv 0$ ,  $a \leq x \leq b$ .*

У загальному випадку для повної ортогональної системи  $\{u_n(x)\}$  маємо

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

де

$$c_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_a^b f(x)u_n(x)dx, \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x)dx,$$

причому справджується *рівність Парсеваля*

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2.$$

Припускаючи, що  $f(x)$  ортогональна лише до функцій  $u_1(x), \dots, u_N(x)$ , маємо

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Таким чином, функція  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  виявиться для великих  $N$  в середньому квадратичному достатньо малою.

Повернемося до крайової задачі

$$\begin{cases} L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (8.3)$$

розв'язок якої знову шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (8.4)$$

де  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$  задовольняють відповідні крайові умови, описані у § 6. Аналогічно одержуємо

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i].$$

Для того, щоб зробити цю нев'язку у середньому квадратичному якомога меншою, вимагатимемо ортогональності  $R$  до функцій  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ , тобто

$$\begin{cases} \int_a^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_1(x) dx = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \int_a^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_n(x) dx = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Систему (8.5) можна записати також у вигляді

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b u_j(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_j(x) (f(x) - L[u_0]) dx, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.6)$$

**Приклад 2.6.** Розв'язати методом Гальоркіна на відрізку  $[0;1]$  крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (8.7)$$

**Розв'язання.** Виберемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3.$$

Виконання відповідних крайових умов для цих функцій було встановлено раніше. Перевіримо ортогональність функцій  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  на відрізку  $[0;1]$ . Оскільки

$$\int_0^1 u_1(x)u_2(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)(x^4 - x^3) dx = \frac{1}{168} \neq 0,$$

то умова ортогональності не виконується, але відхилення від нуля є досить незначним. Нехтуючи цим відхиленням, шукатимемо розв'язок у вигляді

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3).$$

Враховуючи (6.7) та відповідні позначення з § 7, систему (8.5) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} c_1 \int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2) dx + c_2 \int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2) dx = - \int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2) dx, \\ c_1 \int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3) dx + c_2 \int_0^1 g_2(x)(x^4 - x^3) dx = - \int_0^1 g_0(x)(x^4 - x^3) dx. \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо коефіцієнти  $c_1$  та  $c_2$ . Для цього обчислимо спочатку значення інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^3 - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^6 + 7x^5 - 4x^3 + x^2) dx = -\frac{1}{7}; \\ \int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)(x^3 - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-5x^7 + 9x^6 + 2x^5 - 9x^4 + 3x^3) dx = -\frac{47}{420}; \\ \int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(x^3 - x^2) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (-6x^5 + 10x^4 - 2x^3 - 2x^2 + e^x(-2x^4 + x^3 + x^2)) dx = \frac{311}{6} - 19e;$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^4 - x^3) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^7 + 7x^6 - 4x^4 + x^3) dx = -\frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_2(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)(x^4 - x^3) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-5x^8 + 9x^7 + 2x^6 - 9x^5 + 3x^4) dx = -\frac{113}{1260}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_0(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(x^4 - x^3) dx = \\ &= \int_0^1 (-6x^6 + 10x^5 - 2x^4 - 2x^3 + e^x(-2x^5 + x^4 + x^3)) dx = -\frac{54199}{210} + 95e. \end{aligned}$$

Отже, для знаходження  $c_1$  і  $c_2$  одержуємо систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{7}c_1 - \frac{47}{420}c_2 = -\frac{311}{6} + 19e, \\ -\frac{1}{10}c_1 - \frac{113}{1260}c_2 = \frac{54199}{210} - 95e \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} -c_1 - \frac{47}{60}c_2 = -\frac{2177}{6} + 133e, \\ c_1 + \frac{113}{126}c_2 = -\frac{54199}{21} + 950e. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо

$$c_1 \approx 0,189738, \quad c_2 \approx -1,419717.$$

Таким чином, наближеним розв'язком крайової задачі (8.7) є

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,189738 \cdot (x^3 - x^2) + 1,419717 \cdot (x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, значення  $\bar{y}(0,5)$ :

$$\begin{aligned}\bar{y}(0,5) &= 0,5^2 + e^{0,5} + 0,189738 \cdot (0,5^3 - 0,5^2) + \\ &+ 1,419717 \cdot (0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,786272. \blacksquare\end{aligned}$$

Одержали точніше значення розв'язку при  $x = 0,5$ , ніж у §§ 6, 7 (прикладі 2.4, 2.5). Значенням точного розв'язку при  $x = 0,5$  є

$$y(0,5) = 0,5 + e^{0,25} = 1,784025.$$

Зауважимо, що для більшої точності кількість функцій  $u_i(x)$  необхідно збільшити. Їх можна вибирати серед функцій вигляду

$$u_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## **§ 9. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі**

Нехай в області  $G$  з межею  $\Gamma$  задано лінійне диференціальне рівняння з неперервними коефіцієнтами (звичайне або з частинними похідними) і потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який на межі  $\Gamma$  задовольняє лінійні крайові умови.

Розглянемо ліву частину цього рівняння як лінійний оператор  $L$ , визначений на множині  $K$  функцій, які мають неперервні похідні відповідного порядку у  $G \cup \Gamma$  та задовольняють задані крайові умови. Функції з класу  $K$  називають **допустимими функціями**.

Таким чином, неоднорідна крайова задача запишеться у вигляді

$$L[u] = f(P), \quad P \in G, \quad (9.1)$$

$$R[u] = \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (9.2)$$

де  $R$  – відомий лінійний функціонал або оператор нижчого порядку, ніж  $L$ ,  $f$  та  $\varphi$  – відомі функції, які будемо вважати неперервними.

Зауважимо, що неоднорідну крайову задачу (9.1), (9.2) можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, зробивши заміну

$$u = v + u_0,$$

де  $v = v(x)$  – нова невідома функція,  $u_0 = u_0(x)$  належить області визначення оператора  $L$  (а, отже, й оператора  $R$ ), причому  $R[u_0] = \varphi(P)$ . Тоді з (9.1), (9.2) одержуємо

$$L[v] = f(P) - L[u_0], \quad R[v] = 0.$$

Оскільки функцію  $u_0$ , як правило, неважко знайти підбором, то надалі будемо вважати, що  $\varphi(P) = 0$ , і розглядатимемо крайову умову (9.2) у вигляді

$$R[u] = 0, \quad P \in \Gamma, \quad (9.3)$$

а відповідний клас  $K$  позначимо через  $K_0$ .

Оператор  $L$  називають **симетричним**, якщо для будь-яких допустимих функцій  $u$  та  $v$  справджується рівність

$$\int_G v \cdot L[u] d\omega = \int_G u \cdot L[v] d\omega$$

або

$$(L[u], v) = (u, L[v]).$$

Оператор  $L$  називають **додатним**, якщо для будь-яких допустимих функцій  $u$  справджується нерівність  $(L[u], u) \geq 0$ , причому  $(L[u], u) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $u \equiv 0$ .

**Приклад 2.7.** Довести, що оператор  $L[u] = -u''$ , визначений на множині двічі неперервно диференційовних на відрізку  $[0;1]$  функцій, для яких  $u(0) = 0$ ,  $u'(1) = 0$ , є симетричним і додатним.

**Розв'язання.** Для будь-яких допустимих функцій  $u$  та  $v$  маємо



$$\begin{aligned} \int_0^1 (vL[u] - uL[v]) dx &= \int_0^1 (-vu'' + uv'') dx = \\ &= \int_0^1 (uv' - vu')' dx = (uv' - vu') \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_0^1 v \cdot L[u] dx = \int_0^1 u \cdot L[v] dx,$$

звідки й випливає симетричність оператора  $L$ . Окрім того,

$$\begin{aligned} (L[u], u) &= \int_0^1 (u, L[u]) dx = - \int_0^1 uu'' dx = -uu' \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

причому  $(L[u], u) = 0$  лише тоді, коли  $u \equiv 0$ , оскільки це єдина допустима функція, для якої з врахуванням крайових умов виконується тотожність  $u' \equiv 0$ . Отже, оператор  $L$  додатний. ■

**Теорема 2.2.** *Нехай  $L$  – додатний лінійний оператор, визначений у класі допустимих функцій  $K_0$ . Тоді, якщо існує розв'язок задачі (9.1), (9.3), то він єдиний.*

**Доведення.** Якщо  $u_1$  та  $u_2$  – два розв'язки задачі (9.1), (9.3) у класі  $K_0$ , тобто

$$L[u_1] \equiv f(P), R[u_1] \equiv 0 \text{ і } L[u_2] \equiv f(P), R[u_2] \equiv 0,$$

то  $L[u_1 - u_2] \equiv 0$ ,  $R[u_1 - u_2] \equiv 0$ . Отже,  $u_1 - u_2 \in K_0$ . Домноживши скалярно перше з отриманих рівнянь на  $u_1 - u_2$ , одержуємо

$$(L[u_1 - u_2], u_1 - u_2) = 0,$$

а оскільки за умовою оператор  $L$  додатний у класі  $K_0$ , то одержуємо  $u_1 - u_2 \equiv 0$ , тобто  $u_1 \equiv u_2$ , що й потрібно було довести. ►

## § 10. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі

Ідея варіаційного методу розв'язування крайових задач полягає у тому, що задача (9.1), (9.3) замінюється рівносильною задачею відшукування функції, яка надає екстремуму деякому функціоналу.

**Теорема 2.3.** *Нехай  $L$  – симетричний лінійний оператор, визначений і додатний у класі допустимих функцій  $K_0$ , а  $F[u]$  – функціонал вигляду*

$$F[u] = (L[u], u) - 2(f, u) \equiv \int_G (L[u] - 2f) \cdot u \, d\omega, \quad (10.1)$$

де  $f = f(P)$  – права частина рівняння (9.1). Тоді, якщо крайова задача (9.1), (9.3) має розв'язок  $u = \bar{u}$ , то на цьому розв'язку досягається мінімум функціоналу  $F[u]$ .

**Доведення.** Якщо  $\bar{u}$  – розв'язок задачі (9.1), (9.3), то  $L[\bar{u}] \equiv f(P)$ ,  $R[\bar{u}] \equiv 0$ . Крім того, з симетричності оператора  $L$  випливає, що

$$(L[\bar{u}], u) = (\bar{u}, L[u]) = (L[u], \bar{u}).$$

Отже,

$$\begin{aligned} F[u] &= (L[u], u) - 2(f, u) = (L[u], u) - 2(L[\bar{u}], u) = \\ &= (L[u], u) - (L[u], \bar{u}) - (L[\bar{u}], u) = \\ &= (L[u], u - \bar{u}) - ((L[\bar{u}], u) - (L[\bar{u}], \bar{u})) - (L[\bar{u}], \bar{u}) = \\ &= (L[u], u - \bar{u}) - (L[\bar{u}], u - \bar{u}) - (L[u], \bar{u}) = \\ &= (L[u - \bar{u}], u - \bar{u}) - (L[\bar{u}], \bar{u}) \geq - (L[\bar{u}], \bar{u}), \end{aligned}$$

причому, оскільки оператор  $L$  є додатним, то рівність досягається лише тоді, коли  $u - \bar{u} \equiv 0$ , тобто  $u \equiv \bar{u}$ . Таким чином,

$$\min_{u \in K_0} F[u] = F[\bar{u}] = - (L[\bar{u}], \bar{u}). \quad \blacktriangleright$$

**Зауваження.** Теорема 2.3 дає можливість звести розв'язування крайової задачі (9.1), (9.3) до знаходження функції  $\bar{u}$ , на якій функціонал  $F[u]$  набуває мінімуму. Справджується й обернене твердження: *якщо у класі  $K_0$  існує функція  $\bar{u}$ , на якій досягається мінімум функціоналу  $F[u]$ , то ця функція є розв'язком рівняння (9.1).*

З теореми 2.3 та зауваження до неї випливає, що *крайова задача (9.1), (9.3) із симетричним додатним оператором  $L$  рівносильна варіаційній задачі відшукування функції  $\bar{u}$ , на якій досягається мінімум функціоналу  $F[u]$ , визначеного рівністю (10.1).*

## **§ 11. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі**

Розглянемо рівняння

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \quad (11.1)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

де  $g(x)$ ,  $h(x)$ ,  $f_0(x)$  – неперервні на відрізку  $[a, b]$  функції,  $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$ ,  $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$ .

Домноживши обидві частини рівняння (11.1) на функцію

$$p(x) = e^{\int_0^x g(t) dt} > 0,$$

запишемо це рівняння у вигляді

$$(p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (11.3)$$

де

$$q(x) = -h(x)p(x), \quad f(x) = f_0(x)p(x),$$

причому функції  $q(x)$ ,  $f(x)$  та  $p'(x)$  – неперервні на  $[a, b]$ .

За допомогою лінійного оператора

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y \quad (11.4)$$

рівняння (11.3) можна записати у вигляді

$$L[y] = -f(x). \quad (11.5)$$

Покажемо, що оператор  $L$  у класі  $K_0$  двічі неперервно диференційовних на відрізку  $[a, b]$  функцій, які задовольняють крайові умови (11.2), є симетричним. Справді, якщо  $u \in K_0$  та  $v \in K_0$ , то з (11.4) одержуємо

$$\begin{aligned} (L[u], v) - (u, L[v]) &= \\ &= \int_a^b \left( \left( -(p(x)v')' + q(x)v \right) v - \left( -(p(x)v')' + q(x)v \right) u \right) dx = \\ &= \int_a^b (p(x)(uv'' - vu'') + p'(x)(uv' - vu')) dx = \\ &= \int_a^b (p(x)(uv' - vu'))' dx = p(x)(uv' - vu') \Big|_a^b = \\ &= p(b)\omega(b) - p(a)\omega(a), \end{aligned}$$

де

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}.$$

Оскільки функції  $u(x)$  та  $v(x)$  задовольняють однорідні крайові умови

$$\alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad \beta_1 u'(b) + \beta u(b) = 0,$$

$$\alpha_1 v'(a) + \alpha v(a) = 0, \quad \beta_1 v'(b) + \beta v(b) = 0$$

відповідно, то  $\omega(a) = \omega(b) = 0$ . Отже,  $(L[u], v) = (u, L[v])$ , тобто оператор  $L$  є симетричним у класі  $K_0$ .

З'ясуємо, за яких умов цей оператор буде додатним. Для функції  $y \in K_0$

$$\begin{aligned}
(L[y], y) &= \int_a^b \left( -(p(x)y')' + q(x)y \right) y dx = - \int_a^b (p(x)y')' y dx + \int_a^b q(x)y^2 dx = \\
&= -p(x)yy'|_a^b + \int_a^b p(x)(y')^2 dx + \int_a^b q(x)y^2 dx. \quad (11.6)
\end{aligned}$$

Оскільки  $p(x) > 0$ , то для того, щоб оператор  $L$  був додатнім, достатньо, щоб

$$q(x) \geq 0, \quad y(a) \cdot y'(a) \geq 0, \quad y(b) \cdot y'(b) \leq 0. \quad (11.7)$$

Використовуючи рівність (11.2), умови (11.7) можна записати у вигляді

$$q(x) \geq 0, \quad \alpha \cdot \alpha_1 \leq 0, \quad \beta \cdot \beta_1 \geq 0. \quad (11.8)$$

Таким чином, якщо справджуються умови (11.8), то крайова задача (11.1), (11.2) рівносильна задачі про мінімум у класі  $K_0$  функціоналу

$$F[y] = (L[y], y) + 2(f, y). \quad (11.9)$$

Враховуючи (11.6), одержуємо

$$\begin{aligned}
F[y] &= p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \\
&+ \int_a^b \left( p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y \right) dx. \quad (11.10)
\end{aligned}$$

Очевидно, що для дослідження на мінімум функціонала  $F[y]$  досить дослідити на мінімум функціоналу інтегральний доданок у виразі (11.10), який позначимо через  $\Phi[y]$ .

## § 12. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов

Розглянемо крайову задачу для рівняння (11.1) з неоднорідними умовами

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \quad (12.1)$$

Її розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x) = z(x) + y_0(x),$$

де  $y_0(x)$  – двічі неперервно диференційовна на відрізку  $[a, b]$  функція, яка задовольняє умови (12.1), а  $z(x)$  – розв'язок рівняння

$$L[z] = -f(x) - L[y_0] \equiv -f_1(x),$$

який задовольняє відповідні однорідні крайові умови. Розв'язок  $z(x)$  на підставі формули (11.10) можна знайти, досліджуючи на мінімум функціонал

$$\begin{aligned} F_1[z] = & p(a)z(a)z'(a) - p(b)z(b)z'(b) + \\ & + \int_a^b (p(x)(z')^2 + q(x)z^2 + 2f_1(x)z) dx \end{aligned} \quad (12.2)$$

у класі функцій  $z \in K_0$ .

Зазначимо, що функцію  $z$  можна було і не вводити, а замінити її у формулі (12.2) на  $y - y_0$ . При цьому мінімум функціонала  $F_1$  потрібно було б шукати у класі  $K$  двічі неперервно диференційовних на відрізку  $[a, b]$  функцій, які задовольняють умови (12.1).

Оскільки, крім того,

$$\begin{aligned} F_1[y - y_0] &= (L[y - y_0], y - y_0) + 2(f + L[y - y_0], y - y_0) = \\ &= (L[y], y) + 2(f, y) - (L[y_0], y_0) - 2(f, y_0) + (L[y_0], y) - (L[y], y_0) = \\ &= F[y] - F[y_0] + \int_a^b ((p(x)y')y_0 - (p(x)y'_0)y) dx = \\ &= F[y] - F[y_0] + p(x)(y_0(x)y'(x) - y(x)y'_0(x)) \Big|_a^b = F[y] + c, \end{aligned}$$

то достатньо дослідити на мінімум лише функціонал  $\Phi[y]$  у класі  $K$ .

### § 13. Наближене розв'язування варіаційної задачі методом Рітца

Розглянемо функціонал

$$F[u] = (L[u], u) - 2(f, u), \quad (13.1)$$

який визначений на множині  $K$  функцій  $u$ , що задовольняють крайову умову

$$R[u] = \varphi(p), \quad (13.2)$$

де  $L$  – додатний лінійний оператор,  $R$  – відомий лінійний оператор,  $f$  та  $\varphi$  – неперервні функції.

Нехай  $u_0(p), u_1(p), \dots, u_n(p)$  – такі функції з області визначення оператора  $L$ , що

$$R[u_0] = \varphi(p), \quad R[u_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.3)$$

Позначимо

$$u(p) = u_0(p) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(p). \quad (13.4)$$

Оскільки

$$R[u] = R[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i R[u_i] = \varphi(p) + \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = \varphi(p),$$

то  $u \in K$  для будь-яких значень сталих  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Підставимо функцію  $u(p)$  у функціонал (13.1). Будемо мати

$$\begin{aligned} F[u] &= \left( L \left[ u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right], u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right) - 2 \left( f, u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right) = \\ &= (L[u_0], u_0) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_0) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_0], u_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} (L[u_i], u_j) - 2(f, u_0) - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, u_i) \equiv \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (13.5) \end{aligned}$$

де  $\Phi$  – відома функція змінних  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Таким чином, варіаційна задача (13.1), (13.2) зводиться до відшукування точок екстремуму функції  $\Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Це приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0, \quad (13.6)$$

з якої можна знайти сталі  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Якщо підставити їх у (13.4), то одержимо функцію  $\bar{u} \in K$ , на якій функціонал  $F[u]$  набуває екстремуму.

Враховуючи (13.5), систему (13.6) у випадку симетричного у класі  $K_0$  оператора  $L$  можна записати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} (L[u_0], u_1) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_1) = (f, u_1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (L[u_0], u_n) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_n) = (f, u_n). \end{array} \right. \quad (13.7)$$

Якщо визначник системи (13.7) відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок. Зауважимо, що у випадку однорідних крайових умов  $R[u] = 0$  одержуємо  $\varphi(p) \equiv 0$ . Тоді також  $u_0(p) \equiv 0$ , а отже, перший доданок у кожному з рівнянь системи (13.7) буде відсутнім.

## § 14. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі

Застосуємо метод Рітца до розв'язування крайової задачі

$$y'' - q(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (14.1)$$

де  $q(x)$ ,  $f(x)$  – неперервні на відрізку  $[a, b]$  функції,  $q(x) \geq 0$ .

Як впливає з результатів § 11, задача (14.1) зводиться до задачі про мінімум функціоналу  $F[y]$ , визначеного формулою (11.10), який для задачі (14.1) набуває вигляду



$$F[y] = \int_a^b (p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y) dx \quad (14.2)$$

і розглядається у класі  $K_0$  двічі неперервно диференційовних на відрізьку  $[a, b]$  функцій, які на кінцях цього відрізьку перетворюються у нуль.

Нехай функції  $u_1(x), \dots, u_n(x)$  належать класу  $K_0$ . Розглянемо функцію

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (14.3)$$

і підставимо її у (14.2). Будемо мати:

$$F[u] = \int_a^b \left( \left( \sum_{i=1}^n c_i u_i'(x) \right)^2 + q(x) \left( \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right)^2 + 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right) dx.$$

Диференціюючи  $F[y]$  за змінними  $c_1, c_2, \dots, c_n$  і прирівнюючи отримані похідні до нуля, для відшукання  $c_1, c_2, \dots, c_n$  одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (u_i'(x)u_1'(x) + q(x)u_i(x)u_1(x)) dx = -\int_a^b f(x)u_1(x) dx, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (u_i'(x)u_n'(x) + q(x)u_i(x)u_n(x)) dx = -\int_a^b f(x)u_n(x) dx. \end{cases} \quad (14.4)$$

Якщо визначник системи (14.4) відмінний від нуля, то  $c_1, c_2, \dots, c_n$  з неї можна знайти однозначно. Підставляючи їх у формулу (14.3), одержимо наближений розв'язок задачі (14.1).

**Приклад 2.8.** Розв'язати методом Рітца на відрізьку  $[0;1]$  крайову задачу

$$y'' - y = x, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (14.5)$$

**Розв'язання.** Функції  $q(x) = 1$  і  $f(x) = x$  – неперервні на  $[0;1]$ , причому  $q(x) > 0$ . Обмежившись випадком  $n = 2$ , виберемо функції

$$u_1(x) = x^2 - x, \quad u_2(x) = x^3 - x^2.$$

Тоді

$$u_1'(x) = 2x - 1, \quad u_2'(x) = 3x^2 - 2x$$

і система (14.4) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \int_0^1 ((2x-1)^2 + (x^2-x)^2) dx + \\ + c_2 \int_0^1 ((3x^2-2x)(2x-1) + (x^3-x^2)(x^2-x)) dx = - \int_0^1 x(x^2-x) dx, \\ c_1 \int_0^1 ((2x-1)(3x^2-2x) + (x^2-x)(x^3-x^2)) dx + \\ + c_2 \int_0^1 ((3x^2-2x)^2 + (x^3-x^2)^2) dx = - \int_0^1 x(x^3-x^2) dx. \end{array} \right.$$

Виконавши необхідні обчислення, одержуємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{11}{30}c_1 + \frac{11}{60}c_2 = \frac{1}{12}, \\ \frac{11}{60}c_1 + \frac{1}{7}c_2 = \frac{1}{20}, \end{array} \right.$$

з якої знаходимо

$$c_1 = \frac{69}{473}, \quad c_2 = \frac{7}{43}.$$

Таким чином, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) \approx 0,163x^3 - 0,017x^2 - 0,146x.$$

Обчислюючи, наприклад,  $\bar{y}(0,5) \approx -0,057$ , переконуємося, що отриманий цим методом результат співпадає зі значенням точного розв'язку  $y(0,5) = -0,057$ , знайденим у § 5. ■

## § 15. Розв'язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$(p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (15.1)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  – неперервні на відрізку  $[a, b]$  функції, і задамо неоднорідні крайові умови

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \quad (15.2)$$

Будемо вважати також, що

$$p(x) > 0, \quad q(x) > 0, \quad \alpha_1 \cdot \alpha \leq 0, \quad \beta_1 \cdot \beta \geq 0.$$

Тоді, як було встановлено у § 12, розв'язання задачі (15.1), (15.2) зводиться до дослідження на мінімум функціонала  $\Phi[y]$ , визначеного у класі  $K$ .

**Приклад 2.9.** Розв'язати методом Рітца на відрізку  $[0; 1]$  крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (15.3)$$

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (15.4)$$

**Розв'язання.** Спочатку зведемо рівняння (15.3) до вигляду (15.1). Домноживши обидві частини рівняння (15.3) на функцію

$$p(x) = e^{\int_0^x (-2t) dt} = e^{-x^2} > 0,$$

одержуємо

$$(e^{-x^2} y')' - 2e^{-x^2} y = -4xe^{-x^2}. \quad (15.5)$$

Таким чином,  $q(x) = 2e^{-x^2} > 0$ ,  $f(x) = -4xe^{-x^2}$ , причому функції  $p'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  неперервні на відрізку  $[0; 1]$ . Окрім того, оскільки  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta = 1$ , то  $\alpha_1 \alpha \leq 0$ ,  $\beta_1 \beta \geq 0$ .

Розглянемо оператор

$$L[y] = -\left(e^{-x^2} y'\right)' + 2e^{-x^2} y. \quad (15.6)$$

Як доведено у § 11, оператор  $L[y]$  є симетричним і додатним у класі  $K_0$  двічі неперервно диференційовних на відрізку  $[0;1]$  функцій, які задовольняють відповідні однорідні крайові умови

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (15.7)$$

Легко перевірити, що функція  $u_0(x) = x^2 + e^x$  задовольняє умови (15.4), а функції  $u_1(x) = x^3 - x^2$  та  $u_2(x) = x^4 - x^3$  задовольняють умови (15.7), причому обидві ці функції – двічі неперервно диференційовні на відрізку  $[0;1]$ .

Обмежившись випадком  $n = 2$ , розв'язок крайової задачі (15.3), (15.4) шукатимемо у вигляді

$$y(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3). \quad (15.8)$$

При цьому для довільних значень  $c_1$  і  $c_2$  будемо мати

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e. \quad (15.9)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & \int_0^1 \left( (2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2))^2 + \right. \\ & \left. + 2(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3))^2 - \right. \\ & \left. - 8x(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)) \right) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Продиференціюємо  $\Phi[y]$  за змінними  $c_1$  і  $c_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = & \int_0^1 \left( 2(2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2)) \cdot (3x^2 - 2x) + \right. \\ & \left. + 4(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3))(x^3 - x^2) - 8x(x^3 - x^2) \right) e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = \int_0^1 \left( 2(2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2)) \cdot (4x^3 - 3x^2) + \right. \\ \left. + 4(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3))(x^4 - x^3) - 8x(x^4 - x^3) \right) e^{-x^2} dx.$$

Прирівнявши знайдені похідні до нуля, для знаходження невідомих  $c_1, c_2$  одержуємо систему

$$\begin{cases} c_1 \int_0^1 g_{11}(x) dx + c_2 \int_0^1 g_{12}(x) dx = \int_0^1 g_1(x) dx, \\ c_1 \int_0^1 g_{21}(x) dx + c_2 \int_0^1 g_{22}(x) dx = \int_0^1 g_2(x) dx, \end{cases} \quad (15.10)$$

де

$$\begin{aligned} g_{11}(x) &= (2x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 12x^3 + 4x^2) \cdot e^{-x^2}, \\ g_{12}(x) &= (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3) \cdot e^{-x^2}, \\ g_{21}(x) &= (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3) \cdot e^{-x^2}, \\ g_{22}(x) &= (2x^8 - 4x^7 + 18x^6 - 24x^5 + 9x^4) \cdot e^{-x^2}, \\ g_1(x) &= (-2x^5 + 6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - (2x^3 + x^2 - 2x)e^x) \cdot e^{-x^2}, \\ g_2(x) &= (-2x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 6x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 3x^2)e^x) \cdot e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Оскільки інтеграли у системі (15.10) у скінченному вигляді не беруться, то, обчисливши їх наближено, одержуємо систему

$$\begin{cases} 0,876584 \cdot c_1 + 0,059373 \cdot c_2 = 0,100804, \\ 0,059373 \cdot c_1 + 0,047755 \cdot c_2 = 0,078285, \end{cases}$$

з якої знаходимо  $c_1 \approx 0,251006$ ,  $c_2 \approx 1,327222$ .

Отже, шуканий наближений розв'язок має вигляд

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,251006(x^3 - x^2) + 1,327222(x^4 - x^3). \quad (15.11)$$

Для порівняння його з точним розв'язком  $y(x) = x + e^{x^2}$  обчислимо, наприклад,  $\bar{y}(0,5) = 1,784394$ . Нагадаємо, що  $y(0,5) = 1,784025$ .

Як бачимо, точність є досить високою, а для досягнення більшої точності кількість функцій  $u_i(x)$  необхідно збільшити. ■

Зауважимо також, що  $u_0(x)$  можна було шукати також у вигляді  $u_0(x) = ax + b$  з невизначеними коефіцієнтами, а інші функції  $u_k(x)$  – у вигляді многочленів  $(k + 1)$ -го степеня.

## ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II

Розв'язати крайові задачі:

- 1) методом алгебраїчної прогонки з кроком  $h = 0,2$ ;
- 2) методом колокації ( $x_1 = 0,2$ ,  $x_2 = 0,4$ ,  $x_3 = 0,6$ ,  $x_4 = 0,8$ );
- 3) методом Рітца ( $n = 2$ )

Обчислення проводити з точністю до чотирьох знаків після коми.

Результати обчислень оформити у вигляді таблиці:

Метод	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$	$x_5 = 1$

$$1. \quad y'' + \frac{2x}{x^2 + 4} y' - xy = x + 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 3y(0) = 3, \\ y'(1) + 3y(1) = 2. \end{cases}$$

$$2. \quad y'' + \frac{1}{x+1} y' - xy = x^2 + 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = -3, \\ y'(1) + 3y(1) = -2. \end{cases}$$

$$3. \quad y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' - xy = 2x - 3,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = 3, \\ y'(1) + 3y(1) = 1. \end{cases}$$

$$4. \quad y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 - 1,$$

$$\begin{cases} 6y'(0) - 2y(0) = 4, \\ y'(1) + 5y(1) = 6. \end{cases}$$

$$5. \quad y'' + \frac{2x}{x^2 + 3} y' - xy = x - 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = 5, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 2. \end{cases}$$

$$6. \quad y'' + \frac{1}{x+3} y' - xy = x^2 + 2,$$

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = 3, \\ y'(1) + y(1) = 2. \end{cases}$$

$$7. y'' + \frac{2x}{x^2 + 2} y' - xy = x - 2,$$

$$\begin{cases} 3y'(0) - 2y(0) = 1, \\ y'(1) + 2y(1) = 2. \end{cases}$$

$$8. y'' + \frac{2}{x+1} y' - xy = x - 2,$$

$$\begin{cases} 2y'(0) - 5y(0) = 3, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 5. \end{cases}$$

$$9. y'' + \frac{2x}{x^2 + 5} y' - xy = x + 2,$$

$$\begin{cases} 4y'(0) - 2y(0) = 1, \\ y'(1) + 4y(1) = 3. \end{cases}$$

$$10. y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 + x,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 5y(0) = -4, \\ y'(1) + 3y(1) = 4. \end{cases}$$

$$11. y'' + \frac{2x}{x^2 + 2} y' - xy = 2x - 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = 3, \\ y'(1) + 5y(1) = 6. \end{cases}$$

$$12. y'' + \frac{1}{x+3} y' - xy = x^2 + 1,$$

$$\begin{cases} 3y'(0) - 2y(0) = -3, \\ y'(1) + 3y(1) = 4. \end{cases}$$

$$13. y'' + \frac{2x}{x^2 + 4} y' - xy = 2x + 3,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = -3, \\ y'(1) + 3y(1) = 5. \end{cases}$$

$$14. y'' + \frac{2}{x+1} y' - xy = x - 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 5y(0) = 3, \\ y'(1) + 2y(1) = 2. \end{cases}$$

$$15. y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' - xy = 2x - 1,$$

$$\begin{cases} 5y'(0) - 2y(0) = 3, \\ y'(1) + 3y(1) = 4. \end{cases}$$

$$16. y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 + 2,$$

$$\begin{cases} 4y'(0) - 2y(0) = 3, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 3. \end{cases}$$

$$17. y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 + 2,$$

$$\begin{cases} 4y'(0) - 2y(0) = 3, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 3. \end{cases}$$

$$18. y'' + \frac{2x}{x^2 + 5} y' - xy = x + 3,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = 6, \\ y'(1) + 3y(1) = -2. \end{cases}$$

$$19. y'' + \frac{1}{x+3} y' - xy = x^2 - 2,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = -3, \\ y'(1) + 3y(1) = -2. \end{cases}$$

$$20. y'' + \frac{2x}{x^2 + 3} y' - xy = 2x + 5,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 4y(0) = -3, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 5. \end{cases}$$

$$21. y'' + \frac{1}{x+1}y' - xy = x^2 - x,$$

$$\begin{cases} 3y'(0) - 2y(0) = 6, \\ 4y'(1) + 3y(1) = 5. \end{cases}$$

$$22. y'' + \frac{2x}{x^2+4}y' - xy = x - 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 3y(0) = 3, \\ y'(1) + 3y(1) = 2. \end{cases}$$

$$23. y'' + \frac{1}{x+1}y' - xy = x^2 - 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = -3, \\ y'(1) + 3y(1) = -2. \end{cases}$$

$$24. y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' - xy = 2x + 3,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = 3, \\ y'(1) + 3y(1) = 1. \end{cases}$$

$$25. y'' + \frac{1}{x+2}y' - xy = x^2 + 1,$$

$$\begin{cases} 6y'(0) - 2y(0) = 4, \\ y'(1) + 5y(1) = 6. \end{cases}$$

$$26. y'' + \frac{2x}{x^2+3}y' - xy = x + 1,$$

$$\begin{cases} y'(0) - 2y(0) = 5, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 2. \end{cases}$$

$$27. y'' + \frac{1}{x+3}y' - xy = x^2 - 2,$$

$$\begin{cases} y'(0) - y(0) = 3, \\ y'(1) + y(1) = 2. \end{cases}$$

$$28. y'' + \frac{2x}{x^2+2}y' - xy = x + 2,$$

$$\begin{cases} 3y'(0) - 2y(0) = 1, \\ y'(1) + 2y(1) = 2. \end{cases}$$

$$29. y'' + \frac{2}{x+1}y' - xy = x + 2,$$

$$\begin{cases} 2y'(0) - 5y(0) = 3, \\ 2y'(1) + 3y(1) = 5. \end{cases}$$

$$30. y'' + \frac{2x}{x^2+5}y' - xy = x - 2,$$

$$\begin{cases} 4y'(0) - 2y(0) = 1, \\ y'(1) + 4y(1) = 3. \end{cases}$$



## РОЗДІЛ ІІІ.

# НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

### § 1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними

Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку для функції двох змінних

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Функцію  $u(x, y)$ , яка перетворює рівняння (1.1) у тотожність у деякій області  $G \subset \mathbf{R}^2$ , називають **розв'язком** цього рівняння в області  $G$ .

Рівняння (1.1) називають **лінійним**, якщо функція  $F$  лінійно залежить від шуканої функції  $u$  та її похідних, тобто якщо це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вираз

$$D(x, y) \equiv A(x, y) \cdot C(x, y) - B^2(x, y)$$

називають **дискримінантом** рівняння (1.2).

Залежно від знаку  $D(x, y)$  виділяють такі типи рівнянь:

$$D(x, y) > 0 - \text{еліптичний тип,}$$

$$D(x, y) = 0 - \text{параболічний тип,}$$

$$D(x, y) < 0 - \text{гіперболічний тип,}$$

$$D(x, y) \text{ не зберігає свій знак} - \text{змішаний тип.}$$

Наведемо приклади рівнянь перших трьох типів:

1.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$  – рівняння Пуассона. Якщо  $f(x, y) \equiv 0$ ,

то це рівняння називають рівнянням Лапласа;

2.  $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$  – рівняння теплопровідності;

3.  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$  – хвильове рівняння.

Як і для звичайних диференціальних рівнянь, для визначення конкретного розв'язку із сім'ї всіх розв'язків рівняння з частинними похідними доводиться накладати певні додаткові умови (див. наприклад, [13]). У найпростішому випадку ними є початкові та крайові умови.

Задачу, яка полягає у відшуванні розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} u(x, y_0) = \varphi(x), \\ u'_y(x, y_0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

називають *задачею Коші*.

У загальному випадку початкові умови можуть задаватися не на прямій  $y = y_0$ , а на довільній гладкій кривій  $\gamma$ , яка описується рівнянням  $\Phi(x, y) = 0$ . Такі умови будемо записувати у вигляді

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\gamma} = \varphi(x, y), \\ u'_y(x, y)|_{\gamma} = \varphi_1(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

Задача Коші переважно ставиться для рівнянь (1.2) параболічного та гіперболічного типів, причому в останньому випадку лінія  $\gamma$  не повинна бути характеристикою, тобто інтегральною кривою характеристичного рівняння

$$A(x, y) dy^2 - 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dx^2 = 0. \quad (1.5)$$

В окремих випадках, окрім початкових умов, необхідно задавати ще й додаткові крайові умови. Наприклад, для знаходження розв'язку рівняння (1.2) у півсмузі  $K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y < +\infty\}$  можуть задаватися початкові умови

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_y(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.6)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u'_x(a, y) = \psi(y), \\ \beta_0 u(b, y) + \beta_1 u'_x(b, y) = \psi_1(y), \end{cases} \quad (1.7)$$

де  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ,  $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ ,  $0 \leq y < +\infty$ .

Задачу, в якій поєднуються обидва типи додаткових умов, називають **змішаною** задачею. У загальному випадку початкові умови можна трактувати як частковий випадок крайових умов. Для необмеженої області іноді накладають додаткові обмеження на функцію  $u(x, y)$  на нескінченності.

Оскільки, вивчаючи фізичні проблеми, початкові та крайові умови встановлюють, як правило, емпірично, то природно вимагати, щоб невеликі похибки в цих умовах не приводили до великих відхилень відповідних розв'язків. Якщо ця вимога виконана, то кажуть, що задача поставлена коректно.

Саме через некоректність для рівнянь еліптичного типу не розглядають задачу Коші. Наприклад, для рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.8)$$

де  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  – **оператор Лапласа**, при  $y > 0$  шукатимемо розв'язок  $u(x, y)$ , який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u'_y(x, 0) = \frac{1}{n} \cos nx, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Легко перевірити, що

$$u(x, y) = \frac{\cos nx \cdot \operatorname{sh} ny}{n^2}.$$

Отже,

$$u(0, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} ny \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $y > 0$ , не зважаючи на те, що для великих  $n$  початкові умови можна зробити як завгодно малими. Оскільки нульовим початковим умовам

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = 0$$

відповідає розв'язок  $u_0(x, y) \equiv 0$ , то навіть малим змінам початкових умов відповідатимуть нескінченно великі розбіжності розв'язків.

## § 2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Розглянемо рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (2.1)$$

та першу крайову задачу для нього, яка полягає у відшуканні розв'язку  $u(x, y)$ , який в обмеженій області  $G \subset \mathbf{R}^2$  задовольняє рівняння (2.1), а на межі цієї області  $\Gamma$  співпадає із заданою неперервною функцією  $\varphi(x, y)$ . Таку задачу для рівняння (2.1) називають *задачею Діріхле*.

Нагадаємо, що функцію  $u(x, y)$ , яка має неперервні частинні похідні другого порядку в області  $G$  і задовольняє рівняння Лапласа всередині цієї області, називають *гармонійною*.

Для таких функцій справджується **принцип максимуму**: гармонійна в обмеженій області  $G$  функція, неперервна у замкненій області  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ , не може набувати всередині цієї області значень, більших, ніж максимум її значень на межі  $\Gamma$ , і менших, ніж мінімум її значень на  $\Gamma$  ([13], розділ 4, § 2).

Справджується також сильніше твердження: гармонійна в обмеженій і замкненій області функція, відмінна від сталої, не набуває всередині цієї області свого найбільшого та найменшого значень.

З принципу максимуму для гармонійних функцій випливають такі два важливі наслідки.

**Наслідок 1 (єдиність розв'язку задачі Діріхле).** *Задача Діріхле для замкненої і обмеженої області має не більше одного розв'язку.*

**Доведення.** Нехай  $u_1(x, y)$  та  $u_2(x, y)$  – дві гармонійні в області  $G$  функції, які співпадають на межі  $\Gamma$ . Тоді гармонійна функція

$$u(x, y) \equiv u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

на межі  $\Gamma$  перетворюється в нуль. З принципу максимуму випливає, що  $u(x, y) \equiv 0$ , тобто  $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$  всередині  $G$ . ►

**Зауваження.** З наслідку 1 не випливає, що задача Діріхле в області  $G$  обов'язково має розв'язок. Але якщо область  $G$  опукла, а межа кусково гладка, то розв'язок задачі Діріхле з неперервними даними на межі  $\Gamma$  існує та єдиний (**теорема Неймана**).

**Наслідок 2 (коректність задачі Діріхле).** *Розв'язок задачі Діріхле для замкненої і обмеженої області неперервно залежить від крайових умов.*

**Доведення.** Нехай  $u_1(x, y)$  та  $u_2(x, y)$  – два розв'язки задачі Діріхле, які на межі  $\Gamma$  співпадають з функціями  $\varphi_1(x, y)$  та  $\varphi_2(x, y)$

відповідно. Припустимо, що на  $\Gamma$  виконується нерівність

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)| < \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число. Тоді гармонійна функція

$$u(x, y) \equiv u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

на межі  $\Gamma$  набуватиме значення  $\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)$ , причому  $|\varphi(x, y)| < \varepsilon$ . З принципу максимуму отримуємо, що і

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon,$$

тобто задача Діріхле є коректною. ►

### § 3. Різницеві схеми для рівняння Лапласа

Повернемося до рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{3.1}$$

і замінимо в ньому наближено

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}.$$

Підставляючи у рівняння (3.1), одержуємо

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)). \tag{3.2}$$

Для оцінки точності такого наближення скористаємось формулою Тейлора для функції двох змінних:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + d f(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k), \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.3}$$

Розглянемо дві основні схеми.

**Перша основна схема.** Виберемо точки

$$A(x, y), B(x+h, y), C(x-h, y), D(x, y+h), E(x, y-h)$$

і обчислимо значення функції  $u(x, y)$  у точках  $B, C, D, E$  за формулою (3.3), поклавши в ній  $n = 3$ . При цьому вважатимемо, що розв'язок  $u(x, y)$  – чотири рази неперервно диференційовна функцією. Тоді

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4),$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4),$$

$$u(x, y+h) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + O(h^4),$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + O(h^4).$$

Додавши всі ці рівності, одержуємо

$$\begin{aligned} u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) &= \\ &= 4u(x, y) + h^2 \Delta u + O(h^4), \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{h^2} (u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + \\ &+ u(x, y-h) - 4u(x, y)) + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Відкинувши в (3.4)  $O(h^2)$  і врахувавши (3.1), приходимо до першої основної схеми (3.2), порядок апроксимації якої згідно з (3.4), дорівнює двом.

**Друга основна схема.** Виберемо точки

$$A(x, y), B(x+h, y+h), C(x-h, y+h), D(x+h, y-h), E(x-h, y-h)$$

і при тих самих припущеннях обчислимо значення функції  $u(x, y)$  у точках  $B, C, D, E$ . Будемо мати:

$$u(x+h, y+h) = u(x, y) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} h^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4), \\
u(x-h, y+h) &= u(x, y) + h \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{6} h^3 \left( -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4), \\
u(x+h, y-h) &= u(x, y) + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{6} h^3 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4), \\
u(x-h, y-h) &= u(x, y) + h \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{6} h^3 \left( -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4).
\end{aligned}$$

Додавши всі ці рівності, одержуємо

$$\begin{aligned}
u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) &= \\
&= 4u(x, y) + 2h^2 \Delta u + O(h^4),
\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{2h^2} (u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + \\
& + u(x-h, y-h) - 4u(x, y)) + O(h^2). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Відкинувши  $O(h^2)$  і врахувавши (3.1), одержуємо другу основну схему для рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned}
& u(x, y) = \\
& = \frac{1}{4} (u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h)), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

порядок апроксимації якої згідно з (3.5) дорівнює двом.



## § 4. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле

Розглянемо задачу Діріхле

$$\begin{cases} \Delta = 0, & (x, y) \in G, \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $\varphi(x, y)$  – задана неперервна функція,  $\Gamma$  – простий кусково-гладкий контур, який обмежує опуклу область  $G$ .

Побудуємо квадратну сітку  $(S_h)$  з кроком  $h$  і вузлами

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y_0 + jh, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Вузли цієї сітки, віддалені один від одного на відстань  $h$ , називають *сусідніми*. Ті вузли, які знаходяться всередині  $G$ , називають *внутрішніми*. Усі інші вузли, для яких хоч один із чотирьох сусідніх з ним є внутрішнім, називатимемо *межевими*.

Якщо межовий вузол лежить поза  $G \cup \Gamma$ , то значення функції  $u(x, y)$  у ньому вважають рівним значенню функції  $\varphi(x, y)$  у найближчій до цього вузла точці межі  $\Gamma$ . Решту вузлів сітки  $(S_h)$  у наступних обчисленнях враховуватимемо не будемо.

Позначимо  $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$  і на основі формул (3.2) для кожної внутрішньої точки сітки  $(S_h)$  запишемо різницеве рівняння

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (4.2)$$

Враховуючи задані вище значення функції  $u(x, y)$  у межових вузлах, одержимо, що у системі (4.2) кількість невідомих співпадає з кількістю внутрішніх вузлів сітки  $(S_h)$ .

Доведемо, що така система є сумісною і має єдиний розв'язок. Справді, оскільки (4.2) є неоднорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, то достатньо довести, що відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок.

Припустимо, що у деякому внутрішньому вузлі значення функції  $u(x, y)$  додатне. Тоді з усіх значень  $u(x, y)$  у внутрішніх вузлах виберемо найбільше значення  $u_{i,j}$ . Зрозуміло, що

$$u_{i,j} \geq u_{i+1,j}, \quad u_{i,j} \geq u_{i-1,j}, \quad u_{i,j} \geq u_{i,j+1}, \quad u_{i,j} \geq u_{i,j-1}.$$

Додавши всі ці нерівності, одержуємо нерівність

$$u_{i,j} \geq \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}).$$

Звідси, враховуючи (4.2), знаходимо, що значення  $u(x, y)$  в усіх вузлах, сусідніх з  $(x_i, y_i)$ , має дорівнювати  $u_{i,j}$ .

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки  $(S_h)$  значення  $u(x, y)$  мають співпадати з  $u_{i,j}$ , а отже, мають бути додатними. Але однорідна система (4.2) була одержана за умови, що в усіх межових вузлах виконується рівність  $u(x, y) = 0$ . Маємо протиріччя, яке доводить, що у внутрішніх вузлах  $u_{i,j}$  не може набувати додатних значень. Аналогічно можна довести, що  $u_{i,j}$  не набуває від'ємних значень. Отже, відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок, а неоднорідна система (4.2) має єдиний розв'язок.

**Зауваження.** Розв'язавши систему (4.2), одержуємо наближений розв'язок задачі Діріхле в області  $G$  з точністю  $O(h)$ . При цьому кількість рівнянь системи можна зменшити, покладаючи у внутрішніх вузлах, які знаходяться від межі  $\Gamma$  на відстані, меншій  $\frac{h}{2}$ , значення, які дорівнюють значенням  $\varphi(x, y)$  у найближчих до цих вузлів точках межі.

## § 5. Ітераційний процес Лібмана

Безпосереднє розв'язування системи (4.2) викликає певні труднощі для великої кількості внутрішніх вузлів. З іншого боку, зменшення їх кількості негативно позначиться на точності знайденого розв'язку. Вихід із такої ситуації полягає у поєднанні методу сіток з ітераційним процесом Лібмана. При цьому наближене розв'язання задачі Діріхле складається з таких трьох етапів:

1. Розглянемо сітку ( $S_{2h}$ ) з кроком  $2h$  і розв'яжемо для неї систему вигляду (4.2).

2. Візьмемо дрібнішу сітку ( $S_h$ ) з кроком  $h$ , частину вузлів якої складають вузли попередньої сітки, і, використовуючи знайдені значення у вузлах сітки ( $S_{2h}$ ) та першу і другу основні різницеві схеми для оператора Лапласа, знайдемо наближені значення функції  $u(x, y)$  в усіх внутрішніх вузлах сітки ( $S_h$ ) (ці значення позначимо через  $u_{i,j}^{(0)}$ ).

3. Уточнимо значення функції  $u(x, y)$  у межових вузлах  $A_h$  та внутрішніх вузлах  $(x_i, y_j)$  сітки ( $S_h$ ), по чергово користуючись формулами

$$u^{(k)}(A_h) = \frac{u(Z)h - u^{(k-1)}(V)\delta}{h - \delta} \quad (5.1)$$

та

$$u_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4} \left( u_{i+1,j}^{(k-1)} + u_{i-1,j}^{(k-1)} + u_{i,j+1}^{(k-1)} + u_{i,j-1}^{(k-1)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

де

$$u^{(0)}(A_h) = u(Z),$$

$Z$  – найближча до вузла  $A_h$  точка межі,  $V$  – найближчий до нього внутрішній вузол,  $\delta$  – відстань від  $A_h$  до  $Z$ .

**Зауваження.** Процес обчислення за формулами (5.1), (5.2) необхідно продовжувати доти, поки у межах заданої точності не співпадуть два послідовні наближення для всіх внутрішніх вузлів сітки ( $S_h$ ). При цьому похибка наближеного розв'язку

$$u_{i,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{i,j}^{(k)}$$

має порядок  $O(h^2)$ .

**Приклад 3.1.** Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\},$$

яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

**Розв'язання.** 1. Побудуємо сітку з кроком  $2h = 0,4$ . Для неї єдиним внутрішнім вузлом є точка  $A(0,4;0,4)$ , а сусідніми до нього межовими вузлами – точки  $B(0;0,4)$ ,  $C(0,4;0,8)$ ,  $D(0,8;0,4)$ ,  $E(0,4;0)$ . Відповідно,  $C_1(0,4;0,6)$  та  $D_1(0,6;0,4)$  – найближчі точки межі до вузлів  $C$  та  $D$  у напрямі вузла  $A$ . Отже,

$$u(B) = u(E) = 0,16, \quad u(C) = u(D) \approx u(C_1) = u(D_1) = 0,52.$$

Тоді за формулою (3.2) знаходимо:

$$u(A) = \frac{1}{4}(u(B) + u(C) + u(D) + u(E)) = 0,34.$$

2. Розглянемо тепер сітку з кроком  $h = 0,2$ , для якої вже 6 вузлів є внутрішніми, а всі межові вузли лежать на межі  $\Gamma$ . Для зручності покладемо  $x_0 = y_0 = 0$  і обчислимо значення  $u_{i,j}$  в усіх внутрішніх вузлах сітки, використовуючи значення, знайдені на першому етапі:

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(u(0) + u(B) + u(A) + u(E)) = 0,165 \approx 0,17,$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}(u(E) + u(A) + u(D) + u(F)) = 0,415 \approx 0,42,$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}(u_{1,1} + u(A) + u_{3,1} + u(E)) = 0,27.$$

З міркувань симетрії одержуємо, що  $u_{1,3} = u_{3,1} \approx 0,42$ ,  $u_{1,2} = u_{2,1} \approx 0,27$ . Окрім того,  $u_{2,2} = u(A) = 0,34$ .

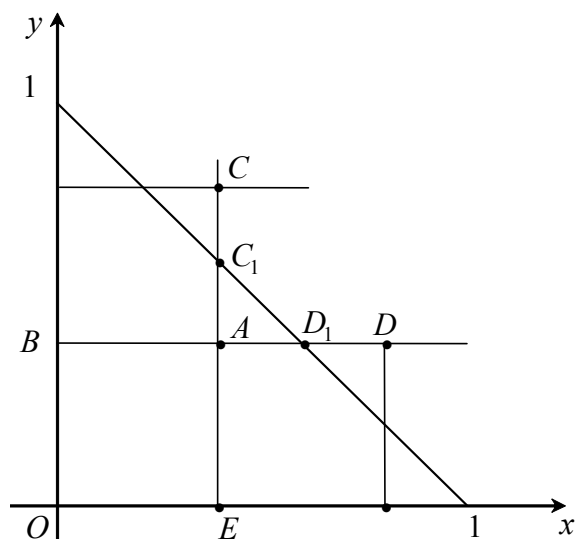


Рис. 1

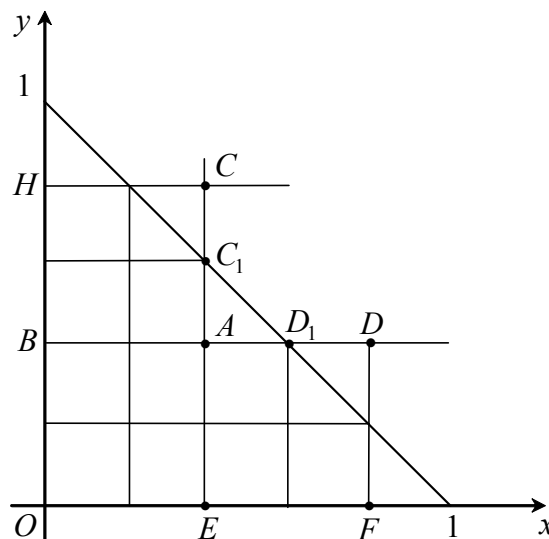


Рис. 2

3. Оскільки всі межові вузли лежать на межі  $\Gamma$ , то уточнювати їх значення немає потреби. Запишемо тільки значення функції  $u(x, y)$  у цих вузлах:

$$u_{0,0} = 0, \quad u_{1,0} = u_{0,1} = 0,04, \quad u_{2,0} = u_{0,2} = 0,16, \quad u_{3,0} = u_{0,3} = 0,36, \\ u_{4,0} = u_{0,4} = 0,64, \quad u_{5,0} = u_{0,5} = 1,00, \quad u_{4,1} = u_{1,4} = 0,68, \quad u_{3,2} = u_{2,3} = 0,52.$$

Зауважимо, що саме ці значення ми отримували б при кожному  $k \geq 1$  за формулою (5.1) при  $\delta = 0$ .

Тому залишається перевірити значення функції  $u(x, y)$  у внутрішніх вузлах сітки. Для наочності обчислень складемо шаблон-таблицю, в якій записані вже знайдені нами значення функції  $u(x, y)$  у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки. Надалі зміни значень відбуватимуться тільки у внутрішніх вузлах, тому наступні шаблони будуватимемо лише для цих вузлів, користуючись формулами (5.2):



Якщо припустити, що опір провідника довжини  $h$  дорівнює  $R > 0$ , то із законів Кірхгофа та Ома для потенціалів  $u_{i,j}$  внутрішніх вузлів одержуємо

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{R} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{R} = 0, \quad (6.1)$$

звідки випливає, що

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (6.2)$$

Порівнюючи одержаний результат з формулою (4.2), приходимо до висновку, що потенціали  $u_{i,j}$  дорівнюють наближеним значенням розв'язку функції  $\varphi(x, y)$  задачі Діріхле.

Отже, для знаходження такого розв'язку залишається тільки виміряти вказані потенціали, налаштувавши попередньо прилад так, щоб потенціали у межах вузлах дорівнювали відповідним значенням функції  $\varphi(x, y)$ .

**Зауваження.** Враховуючи лінійність виразу (6.2), числові значення потенціалів  $u_{p,q}$  можна задавати пропорційно значенням функції  $\varphi(x, y)$ . Відповідно, з таким самим коефіцієнтом пропорції матимемо і значення потенціалів  $u_{i,j}$ .

## § 7. Метод Монте-Карло

Припустимо, що точка  $M$  здійснює рівномірні випадкові блукання вузлами сітки ( $S_h$ ). Це означає, що з довільного внутрішнього вузла  $M_{i,j}$  вона з ймовірністю  $1/4$  може переміститися у будь-який з чотирьох сусідніх вузлів. При цьому з ймовірністю  $1$  вона через скінченну кількість кроків опиниться у межевому вузлі. Будемо вважати, що тоді блукання точки  $M$  закінчується.

Позначимо через  $P(i, j; p, q)$  ймовірність того, що точка, яка почала свій рух з внутрішнього вузла  $M_{i,j}$ , закінчить блукання у межевому вузлі  $M_{p,q}$ . Зрозуміло, що

$$\sum_{p,q} P(i, j; p, q) = 1, \quad (7.1)$$

оскільки точка гарантовано закінчить свій рух за скінченну кількість кроків.

Зауважимо також, що для межевих вузлів  $M_{p',q'}$  виконується рівність

$$P(p', q'; p, q) = \begin{cases} 1, & p' = p, \quad q' = q, \\ 0, & |p' - p| + |q' - q| \neq 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Покладемо у межевих вузлах  $M_{p,q}$  значення  $\varphi_{p,q} = \varphi(Z)$ , де  $Z$  – найближча до  $M_{p,q}$  точка межі  $\Gamma$ , і розглянемо суму

$$u_{i,j} = \sum_{p,q} P(i, j; p, q) \cdot \varphi_{p,q}, \quad (7.3)$$

яку можна трактувати як математичне сподівання функції  $\varphi(x, y)$  за сукупністю межевих вузлів сітки для траєкторій точки  $M$ , що розпочинаються з внутрішнього вузла  $M_{i,j}$ .

Відзначимо, що всі блукання, які виходять з цього вузла, розпадаються на чотири рівноймовірні групи блукань:

1.  $M_{i,j}, M_{i+1,j}, \dots$ ,
2.  $M_{i,j}, M_{i-1,j}, \dots$ ,
3.  $M_{i,j}, M_{i,j+1}, \dots$ ,
4.  $M_{i,j}, M_{i,j-1}, \dots$ .

Тому за формулою повної ймовірності одержуємо:

$$P(i, j; p, q) = \frac{1}{4} P(i+1, j; p, q) + \frac{1}{4} P(i-1, j; p, q) + \frac{1}{4} P(i, j+1; p, q) + \frac{1}{4} P(i, j-1; p, q). \quad (7.4)$$



Якщо помножити обидві частини рівності (7.4) на  $\varphi_{p,q}$  і підсумувати за усіма  $(p, q)$ , то матимемо

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}), \quad (7.5)$$

причому  $u_{p,q} = \varphi_{p,q}$ .

Таким чином, знову приходимо до першої основної схеми методу сіток для розв'язування задачі Діріхле.

Покажемо, як практично можна скористатися отриманим результатом. Для цього розглянемо набір випадкових чисел, який легко отримати з допомогою ЕОМ. Наприклад,

57705, 71618, 73710, 70131, 16961, 53324,  
43166, 26275, 05926, 66289, ...

Будемо вибирати послідовно по одній цифрі з цього набору і здійснюватимемо блукання за наступною схемою:

Цифра	Напрямок переміщення
0 або 1	крок вліво
2 або 3	крок вгору
4 або 5	крок вправо
6 або 7	крок вниз
8 або 9	“тупцювання на місці”

Зауважимо, що суттєве значення має не конкретна схема вибору напрямку руху, а рівноймовірність вибору кожного з чотирьох можливих напрямків.

Зафіксувавши внутрішній вузол  $M_{i,j}$ , починаємо блукання точки  $M$  з цього вузла. При влученні у межевий вузол  $M_{p,q}$  обчислюємо значення  $\varphi_{p,q}$ . Якщо таких блукань, які починались з вузла  $M_{i,j}$ , було здійснено  $n$ , то наближено вважаємо, що

$$u_{i,j} \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \varphi_{p_k, q_k}, \quad (7.6)$$

де  $M_{p_k, q_k}$  – межовий вузол, у якому точка  $M$  завершила свій рух при  $k$ -му блуканні.

Такий спосіб розв’язування задачі Діріхле називається **методом Монте-Карло**.

Зауважимо, що з його допомогою можна знайти наближене значення розв’язку у довільному внутрішньому вузлі, не знаючи значень в інших внутрішніх вузлах. Але недоліком цього методу є повільна збіжність за ймовірністю при  $n \rightarrow \infty$ .

**Приклад 3.2.** Методом Монте-Карло знайти значення  $u(0,4;0,2)$  гармонійної в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$  функції  $u(x, y)$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову

$$u|_{\Gamma} = x^2 + y^2.$$

**Розв’язання.** Побудуємо сітку  $(S_h)$  з кроком  $h = 0,2$  і запишемо значення  $\varphi_{p,q}$  у тих вузлах, в яких можуть закінчуватись траєкторії, що виходять з точки (рис. 3).

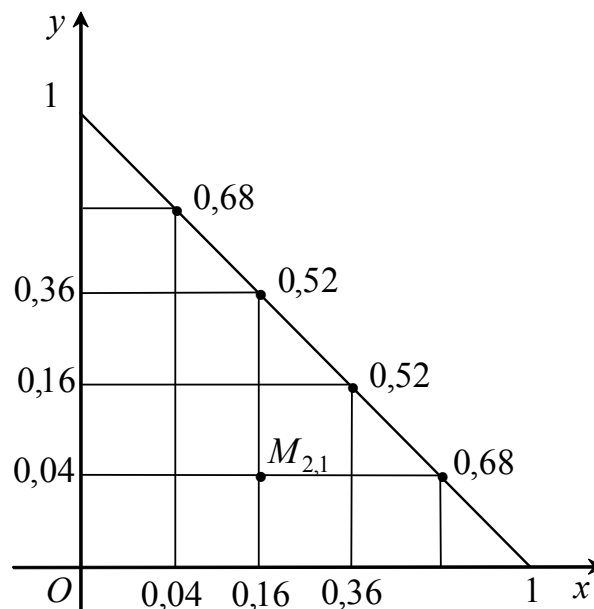


Рис.3

Обмежившись п’ятнадцятьма випадковими блуканнями, одержуємо:

№	Траскторія блукання	$\varphi_{p,q}$
1.	$(2,1) \xrightarrow{5} (3,1) \xrightarrow{7} (3,0)$	0,36
2.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
3.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
4.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
5.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{8} (1,1) \xrightarrow{7} (1,0)$	0,04
6.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{7} (2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{0} (0,1)$	0,04
7.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
8.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{1} (0,1)$	0,04
9.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{1} (1,2) \xrightarrow{1} (0,2)$	0,16
10.	$(2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
11.	$(2,1) \xrightarrow{9} (2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
12.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{3} (2,3)$	0,52
13.	$(2,1) \xrightarrow{2} (2,2) \xrightarrow{4} (3,2)$	0,52
14.	$(2,1) \xrightarrow{4} (3,1) \xrightarrow{3} (3,2)$	0,52
15.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
<b>Сума</b>		<b>3,08</b>

Отже,  $u_{2,1} = u(0,4;0,2) \approx 0,21$ . Зауважимо, що у порівнянні з результатом, отриманим ітераційним процесом Лібмана, похибка становить 0,09, тобто майже 30%. Для досягнення точності 0,01 потрібно вибрати  $n$  значно більшим, ніж 15. ■

## § 8. Метод сіток для рівняння теплопровідності

В області  $G = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$  розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

з початковою та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = \varphi(t), \\ u(l, t) = \psi(t), \end{cases} \quad (8.2)$$

де  $f(x)$  – неперервна на  $[0, l]$ , а  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  – неперервні на  $[0, +\infty)$  функції, причому  $f(0) = \varphi(0)$ ,  $f(l) = \psi(0)$ .

Для наближеного розв'язування задачі (8.1), (8.2) побудуємо прямокутну сітку з вузлами  $(x_i, t_j)$ :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

де  $h = \frac{l}{n}$ ,  $k = \frac{\sigma h^2}{a^2}$ ,  $\sigma$  – деяка стала, допустимі значення якої будуть встановлені далі.

Рівняння (8.1) наближено замінимо різницевою схемою

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (8.3)$$

з якої одержуємо

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}, \quad (8.4)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ .

Зазначимо також, що  $u_{i,0} = f(x_i)$ ,  $u_{0,j} = \varphi(t_j)$ ,  $u_{n,j} = \psi(t_j)$ .

Таким чином, за формулою (8.4) вдається послідовно знайти значення наближеного розв'язку в усіх внутрішніх вузлах, які знаходяться на прямих  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

Оцінимо порядок апроксимації схеми (8.3).

Припускаючи, що точний розв'язок  $u(x,t)$  має неперервні похідні за змінною  $x$  до шостого, а за змінною  $t$  – до третього порядку включно. Тоді, обмежувачись у формулі Тейлора для функції  $u(x,t)$  в околі точки  $(x_i, t_j)$  доданками до  $h^6$  включно, і враховуючи, що  $k = \sigma h^2/a^2$ , одержуємо, що для точного розв'язку різниця  $\Delta_h$  між лівою і правою частинами рівності (8.3) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_h = & \\ = \frac{a^2}{h^2} & \left[ \frac{1}{\sigma} \left( u_{i,j} + \frac{\sigma h^2}{a^2} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2!} \left( \frac{\sigma h^2}{a^2} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\sigma h^2}{a^2} \right)^3 \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} - u_{i,j} \right) - \right. \\ & - \left( \left( u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} \right) - \right. \\ & \left. \left. + \left( u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 u_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} \right) \right) + \right. \\ & \left. + o(h^6) \right] = \left( \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} - \frac{1}{12} a^4 \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} \right) h^2 + \\ & + \frac{1}{a^4} \left( \frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} - \frac{1}{360} a^6 \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6} \right) h^4 + o(h^4). \end{aligned}$$

Оскільки функція  $u(x,t)$  є розв'язком рівняння (8.1), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \right) = \\ &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \right) = a^4 \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

і аналогічно встановлюємо, що

$$\frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} = a^6 \frac{\partial^6 u_{i,j}}{\partial x^6}.$$

Отже,

$$\Delta_h = \frac{1}{2a^2} \left( \sigma - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} h^2 + \frac{1}{6a^4} \left( \sigma^2 - \frac{1}{60} \right) \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial t^3} h^4 + o(h^4),$$

звідки одержуємо, що  $\Delta_h = O(h^4)$  для  $\sigma = 1/6$  та  $\Delta_h = O(h^2)$  для всіх інших значень  $\sigma$ .

Для  $\sigma = 1/6$  формула (8.4) набуває вигляду

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (8.5)$$

Зазначимо також, що вже при  $h = 0,1$  одержуємо значення кроку  $k = \frac{1}{600a^2}$ , що є дуже незручно, оскільки вимагає великої кількості обчислень навіть для просування на  $t = 1$ .

### Приклад 3.3. Розв'язати методом сіток рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.6)$$

з початковими та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & 0 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (8.7)$$

**Розв'язання.** Виберемо  $h = 0,1$ . Тоді

$$k = \frac{1}{600}, \quad n = 10, \quad x_i = \frac{i}{10}, \quad t_j = \frac{j}{600}.$$

Результати обчислень оформимо у вигляді таблиці, перший рядок якої при  $j = 0$  одержуємо з початкової умови, а стовпці  $i = 0$  та  $i = 10$  – з крайових умов. Оскільки всі значення у цих стовпцях дорівнюють нулю, то у таблицю вони не включені. Решту комірок таблиці заповнюємо на основі формули (8.5):

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,360	0,64	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
1	0,347	0,62	0,827	0,947	0,987	0,947	0,827	0,627	0,347
2	0,336	0,61	0,813	0,933	0,973	0,933	0,813	0,613	0,336
3	0,326	0,60	0,800	0,920	0,960	0,920	0,800	0,600	0,326
4	0,317	0,58	0,787	0,907	0,947	0,907	0,787	0,588	0,317
5	0,309	0,57	0,774	0,894	0,934	0,894	0,774	0,576	0,309
6	0,302	0,56	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
7	0,295	0,55	0,748	0,868	0,908	0,868	0,748	0,553	0,295
8	0,289	0,54	0,736	0,854	0,894	0,854	0,736	0,543	0,289
9	0,283	0,53	0,723	0,841	0,881	0,841	0,723	0,533	0,283
10	0,278	0,52	0,711	0,828	0,868	0,828	0,711	0,523	0,278
11	0,272	0,51	0,699	0,815	0,855	0,815	0,699	0,513	0,272
12	0,267	0,50	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267
13	0,262	0,49	0,676	0,790	0,829	0,790	0,676	0,495	0,262
14	0,257	0,48	0,665	0,777	0,816	0,777	0,665	0,486	0,257
15	0,253	0,47	0,654	0,765	0,803	0,765	0,654	0,478	0,253
16	0,248	0,47	0,643	0,753	0,790	0,753	0,643	0,470	0,248
17	0,244	0,46	0,633	0,741	0,778	0,741	0,633	0,462	0,244
18	0,239	0,45	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
19	0,235	0,44	0,612	0,717	0,753	0,717	0,612	0,446	0,235
20	0,231	0,43	0,602	0,706	0,741	0,706	0,602	0,439	0,231
21	0,227	0,43	0,592	0,694	0,729	0,694	0,592	0,431	0,227
22	0,223	0,42	0,582	0,683	0,718	0,683	0,582	0,424	0,223
23	0,220	0,41	0,573	0,672	0,706	0,672	0,573	0,417	0,220
24	0,216	0,41	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
25	0,212	0,40	0,554	0,650	0,684	0,650	0,554	0,403	0,212
26	0,209	0,39	0,545	0,640	0,673	0,640	0,545	0,396	0,209
27	0,205	0,39	0,536	0,630	0,662	0,630	0,536	0,390	0,205
28	0,202	0,38	0,527	0,619	0,651	0,619	0,527	0,384	0,202
29	0,198	0,37	0,519	0,609	0,640	0,609	0,519	0,377	0,198
30	0,195	0,37	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Останній рядок таблиці відповідає значенню  $t = 0,05$ .

## § 9. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності

Після розв'язування прикладу 3.3 могло виникнути питання: чи не можна відразу покласти  $k = 0,05$  і обмежитись лише одним кроком обчислень? Такому  $k$  відповідає значення  $\sigma = 5$ , для якого  $\Delta_h = O(h^2)$ . Зрозуміло, що при цьому дещо втрачається порядок апроксимації схеми (8.3). Але не тільки! Справа у тому, що гарантувати стійкість цієї схеми можна лише для  $\sigma \leq 0,5$ . А тому для  $\sigma = 5$  не одержуємо порядку 2 апроксимації розв'язку. Використання значення  $\sigma = 0,5$  хоч і зменшує кількість обчислень втричі при втраті точності на два порядки, також не вирішує всіх проблем. А отже, вихід з цієї ситуації полягає у використанні замість (8.3) іншої різницевої схеми, яка буде стійкою для досить великих значень  $k$ . Прикладом такої схеми є схема

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \cdot \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2}, \quad (9.1)$$

яку можна одержати з рівняння (8.1), вважаючи наближено, що

$$\frac{\partial^2 u_{i,j+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}.$$

Запишемо схему (9.1) у вигляді системи рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - (2 + s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.2)$$

де  $s = \frac{h^2}{ka^2}$ ,  $u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1})$ ,  $u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1})$ ,  $u_{i,0} = f(x_i)$ .

Система (9.2) для кожного фіксованого  $j$  є лінійною алгебраїчною системою з трьохдіагональною матрицею. Оскільки методика розв'язування таких систем уже розглядалася у §§ 4,5 розділу 2, то обмежимося лише готовими формулами методу алгебраїчної прогонки:



$$\begin{cases} u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \\ u_{i,j+1} = (u_{i+1,j+1} + b_{i,j+1})a_{i,j+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \end{cases} \quad (9.3)$$

де

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + su_{1,j},$$

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}}, \quad b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1} \cdot b_{i-1,j+1} + su_{i,j}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Зауважимо, що для  $s > 0$  схема (9.2) є стійкою, а отже, наближений розв'язок задачі (8.1), (8.2) може бути знайдений цим способом для будь-якого кроку  $k$ , не залежного від  $h$ . При цьому порядок апроксимації розв'язку буде  $O(h^2 + k)$ .

Повертаючись до прикладу 3.3, одержимо таблицю, яка відповідає значенням  $h = 0,1$ ,  $k = 0,01$ ,  $s = 1$ . Для проведення відповідних підрахунків пропонуємо програму на мові програмування Basic:

```

10 N = 10: M = 5: H = 0.1: S = 1
20 DIM X(N), A(N, M), B(N, M), U( N, M)
30 DEF FNK(T) = 0: DEF FNP(T) = 0: DEF FNF(X) = 4*X*(1-X)
40 FOR I = 0 TO N
50 X(I) = I*H: U(I, 0) = FNF(X(I))
60 NEXT I
70 FOR J = 0 TO M-1
80 U(0, J+1) = FNK(T): U(10, J+1) = FNP(T)
90 NEXT J
100 FOR J = 0 TO M-1
110 A(1, J+1) = 1/(2+S): B(1, J+1) = FNK(T)+S*U(1, J)
120 FOR I = 2 TO N-1
130 A(I, J+1) = 1/(2+S-A(I-1, J+1)):
      B(I, J+1) = A(I-1, J+1)*B(I-1,J+1)+S*U(I,J)
140 NEXT I
150 FOR I = N-1 TO 1 STEP -1

```

```

160 U(I, J+1) = (U(I+1, J+1)+B(I, J+1))*A(I, J+1)
170 NEXT I: NEXT J
180 FOR I = 0 TO N
190 FOR J = 0 TO M
200 PRINT " U("; I; ", "; J; ") = "; U(I, J)
210 NEXT J: PRINT
220 NEXT I
230 FOR I = 1 TO N-1: FOR J = 1 TO M
240 PRINT " A("; I; ", "; J; ") = "; A(I, J), " B("; I; ", "; J; ") = "; B(I, J)
250 NEXT J: PRINT
260 NEXT I: END

```

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_{i,0}$	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
$a_{i,1}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,1}$	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813
$u_{i,1}$	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310
$u_{i,1}^*$	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
$a_{i,2}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,2}$	0,310	0,675	1,018	1,270	1,406	1,419	1,306	1,071	0,719
$u_{i,2}$	0,275	0,514	0,695	0,808	0,845	0,808	0,695	0,514	0,275
$u_{i,2}^*$	0,267	0,504	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267
$a_{i,3}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,3}$	0,275	0,605	0,922	1,159	1,288	1,300	1,192	0,969	0,645
$u_{i,3}$	0,246	0,464	0,632	0,738	0,774	0,738	0,632	0,464	0,246
$u_{i,3}^*$	0,239	0,454	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
$a_{i,4}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382

$b_{i,4}$	0,246	0,546	0,837	1,057	1,177	1,188	1,086	0,879	0,582
$u_{i,4}$	0,222	0,421	0,576	0,673	0,707	0,673	0,576	0,421	0,222
$u_{i,4}^*$	0,216	0,410	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
$a_{i,5}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,5}$	0,222	0,495	0,761	0,963	1,075	1,084	0,990	0,799	0,527
$u_{i,5}$	0,201	0,382	0,524	0,614	0,645	0,614	0,524	0,382	0,201
$u_{i,5}^*$	0,195	0,371	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Для порівняння в таблиці наведені значення  $u_{i,1}^*$ ,  $u_{i,2}^*$ ,  $u_{i,3}^*$ ,  $u_{i,4}^*$ ,  $u_{i,5}^*$ , які відповідають рядкам  $j = 6$ ,  $j = 12$ ,  $j = 18$ ,  $j = 24$ ,  $j = 30$  попередньої таблиці. Як бачимо, відхилення одержаних значень для  $t = 0,05$  становлять приблизно 0,01.

## § 10. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння теплопровідності

Система рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - (2 + s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -su_{i,j}, \quad (10.1)$$

де

$$s = \frac{h^2}{ka^2}, \quad u_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad u_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \quad u_{i,0} = f(x_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

у § 9 була розв'язана методом алгебраїчної прогонки. Розглянемо інший підхід до розв'язування системи (10.1), враховуючи, що її коефіцієнти є сталими ([15]).

На основі міркувань, викладених у § 5 розділу 2 для більш загальної системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = F_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = m\bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta, \end{cases}$$

шукатимемо розв'язок рівняння (10.1) наступним чином. Оскільки  $A, B > 0$  і  $C > A + B$  ( $A = 1, B = 1, C = 2 + s, s > 0$ ), то розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$u_{i-1,j+1} - (2 + s)u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = 0 \quad (10.2)$$

запишемо у вигляді

$$u_{i,j+1} = \lambda^i, \lambda \neq 0.$$

Підставляючи  $u_{i,j+1} = \lambda^i$  у (10.2), одержуємо характеристичне рівняння

$$1 - (2 + s)\lambda + \lambda^2 = 0,$$

дискримінант якого  $D = s(4 + s) > 0$ .

Таким чином, існують два різні додатні корені характеристичного рівняння, які позначимо  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$ . Отже, загальний розв'язок рівняння (10.2) має вигляд

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (10.3)$$

Частинний розв'язок системи рівнянь (10.1) вважатимемо наближено рівним

$$u_{i,j+1}^c \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи (10.1) у вигляді

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (10.4)$$

Будемо вважати, що рівність (10.4) виконується для  $i = 0$  та  $i = n$ , при цьому наближено замінимо  $u_{n+1,j} \approx u_{n,j}$  та  $u_{-1,j} \approx u_{0,j}$ . Тоді, враховуючи крайові умови, запишемо систему

$$\begin{cases} C_{1,j+1} + C_{2,j+1} + \frac{u_{1,j} + u_{0,j}}{2} = \varphi(t_{j+1}), \\ C_{1,j+1}\lambda_1^n + C_{2,j+1}\lambda_2^n + \frac{u_{n,j} + u_{n-1,j}}{2} = \psi(t_{j+1}). \end{cases} \quad (10.5)$$

Якщо знайти з системи (10.5) коефіцієнти  $C_{1,j+1}$ ,  $C_{2,j+1}$  і підставити їх у формулу (10.4), то одержимо  $u_{i,j+1}$  для всіх  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Приклад 3.4.** Знайти розв'язок рівняння  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , який задовольняє початкову та крайові умови

$$\begin{cases} u(x, 0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Візьмемо  $h = 0,1$ ,  $k = 0,01$ ,  $s = 1$  і  $t = 0,05$ . Запишемо різницеву схему у вигляді системи рівнянь

$$u_{i-1,j+1} - 3u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} = -u_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

а також її загальний розв'язок

$$u_{i,j+1} = C_{1,j+1}\lambda_1^i + C_{2,j+1}\lambda_2^i + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

З характеристичного рівняння  $1 - 3\lambda + \lambda^2 = 0$  знаходимо

$$\lambda_1 \approx 2,618034, \quad \lambda_2 \approx 0,381966.$$

Нехай  $n = 10$ . Тоді, згідно з (10.5), для визначення коефіцієнтів  $C_{1,j+1}$ ,  $C_{2,j+1}$  маємо систему

$$\begin{cases} C_{1,j+1} + C_{2,j+1} + \frac{1}{2}u_{1,j} = 0, \\ C_{1,j+1}\lambda_1^{10} + C_{2,j+1}\lambda_2^{10} + \frac{1}{2}u_{9,j} = 0, \end{cases}$$

з якої одержуємо:

$$C_{1,j+1} = -\frac{1}{2}u_{1,j} - C_{2,j+1}, \quad C_{2,j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1^{10}u_{1,j} - u_{9,j}}{\lambda_2^{10} - \lambda_1^{10}}.$$

Для одержання результатів обчислень пропонуємо програму на мові програмування Basic:

```

10 N = 10: H = .1: M = 5: A1 = 2.618034: A2 = .381966
20 DIM C1(M), C2(M), X(N), U(N, M)
30 DEF FNK(T) = 0: DEF FNP(T) = 0: DEF FNF(T) = 4*X*(1-X)
40 FOR I = 0 TO N
50 X(I) = I*H: U(I, 0) = FNF(X(I))
60 NEXT I
70 FOR J = 0 TO M
80 U(0, J) = FNK(T): U(10, J) = FNP(T)
90 NEXT J
100 FOR J = 0 TO M-1
110 C2(J+1) = (A1^N*U(1,J)-U(N-1, J)/(2*A2^N-2*A1^N):
      C1(J+1) = -U(1, J)/2-C2(J+1)
120 FOR I = 1 TO N-1
130 U(I, J+1) = C1(J+1)*A1^I+C2(J+1)*A2^I+(U(I+1, J)+U(I-1, J))/2
140 NEXT I: NEXT J
150 FOR I = 0 TO N: FOR J = 0 TO M
160 PRINT "U( "; I; ", "; J; ") = "; U(I, J)
170 NEXT J: PRINT
180 NEXT I
190 FOR J = 1 TO M
200 PRINT "C1( "; J; ") = "; C1(J), "C2( "; J; ") = "; C2(J)
210 NEXT J
220 END

```

Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_{i,0}$	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
$u_{i,1}$	0,251	0,574	0,790	0,916	0,957	0,916	0,790	0,574	0,251
$u_{i,2}$	0,239	0,502	0,737	0,870	0,914	0,870	0,737	0,502	0,239
$u_{i,3}$	0,205	0,471	0,679	0,823	0,868	0,823	0,679	0,471	0,205
$u_{i,4}$	0,196	0,427	0,641	0,771	0,821	0,771	0,641	0,427	0,196
$u_{i,5}$	0,176	0,404	0,594	0,728	0,770	0,728	0,594	0,404	0,176

Зазначимо, що більшої точності можна досягнути, використовуючи наближену формулу

$$u_{i,j+1}^* \approx \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}),$$

яка відповідає  $\sigma = \frac{1}{6}$ .

## § 11. Метод сіток для хвильового рівняння

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.1)$$

і шукатимемо його розв'язок, який задовольняє умови

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & u'_t(x,0) = F(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = \varphi(t), & u(l,t) = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

причому  $f(0) = \varphi(0)$ ,  $f(l) = \psi(0)$ .

Покладаючи

$$x_i = ih, \quad t_j = jk, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $h = l/n$ ,  $k > 0$ , замінимо рівняння (11.1) різницевою схемою

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (11.3)$$

з якої при  $k = h/a$  одержуємо

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (11.4)$$

Оскільки  $u_{i,0} = f(x_i)$ ,  $u_{0,j} = \varphi(t_j)$ ,  $u_{n,j} = \psi(t_j)$ , то, задавши фіктивно  $j = -1$ , маємо

$$\frac{u_{i,-1} - u_{i,0}}{-k} \approx F(x_i),$$

звідки

$$u_{i,-1} \approx f(x_i) - kF(x_i).$$

Враховуючи ці рівності, зможемо застосувати формулу (11.4) для всіх  $i = 1, \dots, n-1$  та  $j \geq 0$ .

Зауважимо, що можна було також покласти

$$u_{i,1} \approx f(x_i) + kF(x_i),$$

а якщо функція  $f(x)$  задана аналітично, то отримати більш точне наближення

$$u_{i,1} \approx f(x_i) + kF(x_i) + \frac{a^2 k^2}{2} f''(x_i), \quad (11.5)$$

і після цього формулу (11.4) використовувати для  $j \geq 1$ .

**Приклад 3.5.** Методом сіток знайти наближений розв'язок

рівняння  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , який задовольняє умови

$$u(x, 0) = x \cdot (\pi - x), \quad u'_x(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

**Розв'язання.** Оскільки  $a = 1$ , то покладемо  $k = h$  і виберемо  $h = \pi/18$ . Для всіх  $i$  маємо  $F(x_i) = 0$ ,  $f''(x_i) = -2$ , а отже, за формулою (11.5) знаходимо  $u_{i,1} = f(x_i) - h^2 = f(x_i) - 0,030$ .

Зауважимо, що з міркувань симетрії відносно прямої  $x = \pi/2$  достатньо буде знайти розв'язок лише для  $0 \leq x \leq \pi/2$ . Обмежувачись, крім того, значеннями  $t \leq 5\pi/18$ , одержуємо такі результати обчислень за формулою (11.4):

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
1	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
2	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
3	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
4	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
5	0,244	0,487	0,731	0,945	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706



## § 12. Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона

В області  $G$ , яка обмежена лініями

$$y = \alpha, \quad y = \beta, \quad x = g_1(y), \quad x = g_2(y) \quad (\alpha \leq y \leq \beta),$$

та повністю знаходиться всередині прямокутника

$$Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\},$$

розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \end{aligned} \quad (12.1)$$

з аналітичними у  $Q$  коефіцієнтами та функцією  $f(x, y)$ .

Шукатимемо розв'язок рівняння (12.1), який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, \alpha) = \varphi_1(x), \quad u(x, \beta) = \varphi_2(x), \\ u(g_1(y), y) = \psi_1(y), \quad u(g_2(y), y) = \psi_2(y). \end{aligned} \quad (12.2)$$

Припустимо, що в області  $Q$  виконується умова еліптичності, тобто

$$A(x, y) \cdot C(x, y) - B^2(x, y) > 0,$$

а отже,  $A(x, y) \neq 0$ ,  $C(x, y) \neq 0$ .

Окрім того, вважатимемо, що функції  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  аналітичні на відрізку  $[a, b]$ , функції  $\psi_1(y)$ ,  $\psi_2(y)$  аналітичні на  $[\alpha, \beta]$ , і виконуються умови узгодження

$$\begin{aligned} \varphi_1(g_1(\alpha)) = \psi_1(\alpha), \quad \varphi_1(g_2(\alpha)) = \psi_2(\alpha), \\ \varphi_2(g_1(\beta)) = \psi_1(\beta), \quad \varphi_2(g_2(\beta)) = \psi_2(\beta). \end{aligned}$$

Позначимо  $h = (\beta - \alpha)/n$  і проведемо в області  $G$  прямі  $y = y_j$ , де  $y_j = \alpha + jh$ .

Для кожного фіксованого  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  рівняння (12.1) наближено замінимо на

$$\begin{aligned}
 & A_j(x)u_j''(x) + 2B_j(x)\frac{u'_{j+1}(x) - u'_{j-1}(x)}{2h} + \\
 & + C_j(x)\frac{u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)}{h^2} + \\
 & + a_j(x)u'_j(x) + b_j(x)\frac{u_{j+1}(x) - u_{j-1}(x)}{2h} + c_j(x)u_j(x) = f_j(x),
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

де

$$\begin{aligned}
 u_j(x) &= u(x, y_j), \quad u'_j(x) = \frac{\partial u(x, y_j)}{\partial x}, \quad u''_j(x) = \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial x^2}, \\
 A_j(x) &= A(x, y_j), \quad B_j(x) = B(x, y_j), \quad C_j(x) = C(x, y_j), \\
 a_j(x) &= a(x, y_j), \quad b_j(x) = b(x, y_j), \quad c_j(x) = c(x, y_j).
 \end{aligned}$$

У результаті одержимо систему  $n - 1$  лінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих функцій

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_{n-1}(x).$$

Зауважимо, що  $u_0(x) = \varphi_1(x)$ ,  $u_n(x) = \varphi_2(x)$ , а отже,

$$u'_0(x) = \varphi'_1(x), \quad u''_0(x) = \varphi''_1(x),$$

$$u'_n(x) = \varphi'_2(x), \quad u''_n(x) = \varphi''_2(x).$$

Загальний розв'язок системи (12.3) залежить від  $2n - 2$  сталих, які можна визначити, враховуючи крайові умови, а саме

$$\begin{cases} u_j(g_1(y_j)) = \psi_1(y_j), \\ u_j(g_2(y_j)) = \psi_2(y_j), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \tag{12.4}$$

Таким чином, ми зможемо знайти значення наближеного розв'язку на всіх прямих  $t = t_j$ . Такий метод розв'язування називають **методом прямих**. Порядок апроксимації отриманого розв'язку дорівнює двом.

Система (12.3) у загальному випадку є системою лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а її розв'язання зазвичай викликатиме значні труднощі. Тому метод прямих, взагалі кажучи, буде ефективним лише тоді, коли коефіцієнти цієї системи є сталими.

Наприклад, для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (12.5)$$

яке розглядаємо у прямокутнику  $Q$ , шукаємо розв'язок, який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, \alpha) &= \varphi_1(x), & u(x, \beta) &= \varphi_2(x), \\ u(a, y) &= \psi_1(y), & u(b, y) &= \psi_2(y), \end{aligned} \quad (12.6)$$

де функція  $f(x, y)$  неперервна у  $Q$ ,  $\psi_1(y)$  та  $\psi_2(y)$  – неперервні на  $[\alpha, \beta]$ , а  $\varphi_1(x)$  та  $\varphi_2(x)$  – двічі неперервно диференційовні на  $[a, b]$ , причому

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) &= \psi_1(\alpha), & \varphi_1(b) &= \psi_2(\alpha), \\ \varphi_2(a) &= \psi_1(\beta), & \varphi_2(b) &= \psi_2(\beta). \end{aligned}$$

З (11.3) одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$u_j''(x) + \frac{u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)}{h^2} = f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12.7)$$

де  $u_0(x) = \varphi_1(x)$ ,  $u_n(x) = \varphi_2(x)$ .

Але використання такого підходу дає похибку порядку  $O(h^2)$ . У зв'язку з цим встановимо більш точні формули чисельного інтегрування рівняння (12.5).

Знову розглянемо задачу (12.5), (12.6) і припустимо, що її розв'язок  $u(x, y)$  має неперервні частинні похідні за змінною  $y$  до шостого порядку включно. Тоді за формулою Тейлора

$$u_{j+1}(x) + u_{j-1}(x) = 2u_j(x) + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} h^4 + O(h^6). \quad (12.8)$$

Якщо у рівності (12.8) замінити всі  $u_k(x)$  на  $\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2}$ , то з

точністю до  $O(h^4)$  будемо мати:

$$\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} h^2 + O(h^4). \quad (12.9)$$

Поділимо (12.8) на  $h^2$ , а (12.9) на 12 і віднімемо від першої з одержаних рівностей другу. Результат запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)}{h^2} = \\ & = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + 10 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right) + O(h^4). \end{aligned} \quad (12.10)$$

З (11.5) випливає, що

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x),$$

а тому то з точністю до  $O(h^4)$  з (12.10) одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} u_{j+1}''(x) + 10u_j''(x) + u_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2} (u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)) &= \\ = f_{j+1}(x) + 10f_j(x) + f_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \varphi_1(x), & u_n(x) &= \varphi_2(x), \\ u_0''(x) &= \varphi_1''(x), & u_n''(x) &= \varphi_2''(x) \end{aligned}$$

та

$$u_j(a) = \psi_1(y_j), \quad u_j(b) = \psi_2(y_j). \quad (12.12)$$

Відомо, що загальний розв'язок відповідної (12.11) однорідної системи має вигляд

$$v_j(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left( A_k e^{\lambda_j x} + B_k e^{-\lambda_j x} \right) \cdot \sin \frac{\pi k j}{n}, \quad (12.13)$$

де

$$\lambda_j^2 = \frac{12}{h^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\pi j}{n}}{5 + \cos \frac{\pi j}{n}}.$$

Частинний розв'язок системи (12.11) можна знайти, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів або метод варіації довільних сталих. Коефіцієнти  $A_k$  та  $B_k$  можна визначити з умов (12.12).

### Приклад 3.6. Розв'язати методом прямих рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y \quad (12.14)$$

в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ , якщо

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & u(x, 2) = x + 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, y) = y, & u(2, y) = 2y, & 0 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (12.15)$$

**Розв'язання.** Для спрощення міркувань обмежимося випадком  $n = 2$ . Тоді  $h = 1$ , а система вигляду (12.11) складатиметься з одного рівняння

$$\begin{aligned} u_2''(x) + 10u_1''(x) + u_0''(x) + 12(u_2(x) - 2u_1(x) + u_0(x)) &= \\ &= f_2(x) + 10f_1(x) + f_0(x). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Оскільки

$$u_0(x) = 0, \quad u_0''(x) = 0, \quad u_2(x) = x + 2, \quad u_2''(x) = 0,$$

$$f(x, y) = x + y, \quad f_0(x) = x, \quad f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = x + 2,$$

то рівняння (12.16) можна записати у вигляді

$$5u_1''(x) - 12u_1(x) = -6. \quad (12.17)$$

За формулою (12.13) або безпосередньо розв'язуючи рівняння (12.17), знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$u_1(x) = Ae^{\sqrt{2,4}x} + Be^{-\sqrt{2,4}x}.$$

Підставляючи  $u_{1c} = c$  у рівняння (12.7), маємо  $c = 0,5$ .

Отже,

$$u_1(x) = Ae^{\sqrt{2,4}x} + Be^{-\sqrt{2,4}x} + 0,5.$$

Оскільки  $u(0;1) = 1$ ,  $u(2;1) = 2$ , то коефіцієнти  $A$  та  $B$  визначимо з системи

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{2} = 1, \\ Ae^{2\sqrt{2,4}} + Be^{-2\sqrt{2,4}} + \frac{1}{2} = 2. \end{cases}$$

Провівши необхідні обчислення, знаходимо

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e^{2\sqrt{2,4}} - 1}{e^{4\sqrt{2,4}} - 1} \approx 0,067,$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{4\sqrt{2,4}} - 3e^{2\sqrt{2,4}}}{e^{4\sqrt{2,4}} - 1} \approx 0,433.$$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$u_1(x) \approx 0,067e^{1,549x} + 0,433e^{-1,549x} + 0,5.$$

Зауважимо, що для наближеного знаходження розв'язку при  $n = 4$  можна було скористатися вже отриманим результатом і розв'язати рівняння (12.14) окремо в областях

$$Q_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$Q_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\},$$

покладаючи кожного разу  $n = 2$ .

### § 13. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі

В області  $G \subset R^2$  з межею  $\Gamma$  розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (13.1)$$

де  $f(x, y)$  – неперервна в області  $G$  функція, і будемо шукати його розв’язок у класі  $K_0$  неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  функцій, які на межі задовольняють умову

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (13.2)$$

Доведемо спочатку, що у класі  $K_0$  оператор

$$L[u] = -\Delta u$$

є симетричним і додатним. Справді, якщо  $u \in K_0$ ,  $v \in K_0$ , то

$$\begin{aligned} (L[u], v) - (u, L[v]) &= \iint_G \left( -v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) dx dy = \\ &= \iint_G \left( \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) dx dy = \\ &= \iint_G \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Застосувавши формулу Гріна

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

і врахувавши, що  $u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0$ , одержуємо

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = \int_{\Gamma} \left( - \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) = 0.$$

Отже,  $(L[u], v) = (u, L[v])$ , що й доводить симетричність оператора  $L$ .

Покажемо тепер, що оператор  $L$  додатний. Маємо

$$\begin{aligned} (L[u], u) &= -\iint_G u \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= -\iint_G \left( \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) dx dy = \\ &= -\iint_G \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy + \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \end{aligned}$$

Застосувавши до першого з інтегралів формулу Гріна і врахувавши (13.2), одержуємо:

$$\begin{aligned} (L[u], u) &= -\int_{\Gamma} \left( -u \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \\ &+ \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \geq 0, \end{aligned}$$

причому  $(L[u], u) = 0$  лише тоді, коли

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Звідси випливає, що  $u(x, y) = \text{const}$ , а враховуючи неперервність функції  $u(x, y)$  в області  $\bar{G}$  і умову (13.2), одержуємо, що  $u(x, y) \equiv 0$ . Отже, оператор  $L$  є додатним.

Таким чином, враховуючи результати § 9 розділу 2, приходимо до важливого висновку: *задача (13.1), (13.2) у класі  $K_0$  еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала*

$$F[u] = \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2f u \right) dx dy. \quad (13.3)$$



Зазначимо, що у класі  $K$  неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області  $\bar{G}$  функцій  $u(x, y)$ , які на межі  $\Gamma$  задовольняють умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (13.4)$$

де  $\varphi(x, y)$  – неперервна на  $\Gamma$  функція, крайова задача (13.1), (13.4) також еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала (13.3).

Для рівняння Лапласа цей функціонал набуває вигляду

$$F[u] = \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \quad (13.5)$$

а інтеграл у правій частині цієї рівності називають *інтегралом Діріхле*.

## § 14. Метод Рітца для задачі Діріхле

Шукатимемо розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (14.1)$$

в області  $G$ , обмеженій кусково-гладким контуром  $\Gamma$ , за умови

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (14.2)$$

де  $\varphi(x, y)$  – неперервна на  $\Gamma$  функція.

Як показано у § 13, задача (14.1), (14.2) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум для функціонала

$$F[u] = \iint_G \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (14.3)$$

у класі  $K$  функцій, які мають неперервні похідні до другого порядку включно в області  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  і задовольняють умову (14.2).

Нехай  $u_0(x, y) \in K$ ,  $u_1(x, y) \in K_0$ , ...,  $u_n(x, y) \in K_0$ . Тоді

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad u_i(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і лінійна комбінація

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x, y), \quad (14.4)$$

де  $c_0 = 1$ , належить до класу  $K$  для будь-яких значень сталих  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Підставивши вираз (14.4) у функціонал (14.3), одержуємо:

$$F[u] = \iint_G \left( \left( \sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (14.5)$$

Підберемо коефіцієнти  $c_1, c_2, \dots, c_n$  так, щоб функціонал  $F[u]$  набував мінімуму. Для цього необхідно, щоб

$$\frac{\partial F[u]}{\partial c_j} = 2 \iint_G \left( \left( \sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left( \sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (14.6)$$

для  $j = 1, 2, \dots, n$ , або

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + c_1 [u_1, u_1] + \dots + c_n [u_n, u_1] = 0, \\ [u_0, u_2] + c_1 [u_1, u_2] + \dots + c_n [u_n, u_2] = 0, \\ \dots \dots \dots \\ [u_0, u_n] + c_1 [u_1, u_n] + \dots + c_n [u_n, u_n] = 0, \end{cases} \quad (14.7)$$

де

$$[u_i, u_j] = \iint_G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

причому  $[u_i, u_j] = [u_j, u_i]$ .

Функція  $u(x, y)$  з коефіцієнтами, визначеними з системи (14.7), є наближеним розв'язком задачі Діріхле. Точність наближення залежить від вибору координатних функцій  $u_k(x, y)$ , а також від кількості цих функцій.

**Приклад 3.7.** Знайти функцію  $u(x, y)$ , гармонійну в області  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$ , яка на межі  $\Gamma$  цієї області задовольняє умову  $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$ .

**Розв'язання.** Виберемо функції

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy \cdot (1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2 y \cdot (1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2 \cdot (1 - x - y)$$

і утворимо лінійну комбінацію

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + c_1 xy \cdot (1 - x - y) + c_2 x^2 y \cdot (1 - x - y) + c_3 xy^2 \cdot (1 - x - y). \quad (14.8)$$

Легко перевірити, що функція  $u(x, y)$  з (14.8) задовольняє задану крайову умову для довільних значень сталих  $c_1, c_2, c_3$ .

Для складання системи (14.7) обчислимо коефіцієнти біля невідомих  $c_1, c_2, c_3$  та вільні члени. Результати обчислень (значення коефіцієнтів біля невідомих) наведені у таблиці.

$j$	$[u_0, u_j]$	$[u_1, u_j]$	$[u_2, u_j]$	$[u_3, u_j]$
1	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Таким чином, для відшукування  $c_1, c_2, c_3$  одержали систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{90}c_1 + \frac{1}{252}c_2 + \frac{1}{252}c_3 = \frac{1}{30}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{3}{1120}c_2 + \frac{1}{70}c_3 = \frac{1}{90}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{70}c_2 + \frac{3}{1120}c_3 = \frac{1}{90}, \end{cases}$$

розв'язком якої є

$$c_1 = \frac{3031}{997} \approx 3,0401, \quad c_2 = c_3 = -\frac{56}{997} \approx -0,0562.$$

Підставляючи знайдені значення  $c_1, c_2, c_3$  у формулу (14.8), одержуємо наближений розв'язок задачі:

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + (3,0401 - 0,0562(x + y)) \cdot xy(1 - x - y).$$

Для порівняння з результатом, отриманим методом Лібмана, обчислимо

$$u(0,4; 0,2) = 0,2962 \approx 0,30. \blacksquare$$

## § 15. Метод Рітца для рівняння Пуассона

Метод Рітца, який у § 14 ми застосовували до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа, можна використати також для розв'язування рівняння Пуассона. Тільки при цьому доведеться досліджувати на мінімум функціонал, визначений формулою (13.3). Проілюструємо застосування цього методу на прикладі.

**Приклад 3.8.** В області  $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$  знайти методом Рітца розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y, \quad (15.1)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = x + 2, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, y) = y, \quad u(2, y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 2. \end{aligned} \quad (15.2)$$

**Розв'язання.** Оскільки  $G$  є прямокутником, а крайові умови на її межі задані лінійними функціями, то шукатимемо функцію  $u_0(x, y)$  з невизначеними коефіцієнтами у вигляді

$$u_0(x, y) = Axy + Bx + Cy + D.$$

Підставляючи  $u_0(x, y)$  у крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} Bx + D = 0, \\ 2Ax + Bx + 2C + D = x + 2, \\ Cy + D = y, \\ 2Ay + 2B + Cy + D = 2y, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$A = 0,5, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Таким чином,  $u_0(x, y) = 0,5xy + y$ .

У якості функцій  $u_k(x, y)$  можна вибрати, наприклад, функції

$$u_1(x, y) = xy(x-2)(y-2), \quad u_2(x, y) = x^2y(x-2)(y-2),$$

$$u_3(x, y) = xy^2(x-2)(y-2), \quad u_4(x, y) = xy(x-2)^2(y-2),$$

$$u_5(x, y) = xy(x-2)(y-2)^2, \quad \dots$$

Обмежуючись випадком  $n = 1$ , шукатимемо наближений розв'язок задачі (15.1), (15.2) у вигляді

$$u(x, y) = 0,5xy + y + C_1xy(x-2)(y-2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} F[u] = & \iint_G \left( (0,5y + 2C_1(x-1)y(y-2))^2 + \right. \\ & \left. + (0,5x + 1 + 2C_1x(x-2)(y-1))^2 + \right. \\ & \left. + 2(x+y)(0,5xy + C_1xy(x-2)(y-2)) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{\partial F[u]}{\partial C_1} = \frac{512}{45} C_1 + \frac{64}{9}.$$

Прирівнюючи знайдену похідну до нуля, одержуємо  $C_1 = -0,625$ . А отже, наближеним розв'язком задачі (15.1), (15.2) є

$$u(x, y) = 0,5xy + y - 0,625xy(x-2)(y-2). \quad \blacksquare$$

Для порівняння цього розв'язку з розв'язком, отриманим методом прямих, обчислимо наближене значення функції  $u(x, y)$  в центрі області  $G$  – точці  $M(1;1)$ . За методом Рітца  $u(1;1) \approx 0,875$ , а за методом прямих  $u(1;1) \approx 0,907$ . Різниця у  $0,03$  вказує, що обома з цих методів ми доволі точно знайшли наближений розв'язок заданої крайової задачі. Зрозуміло, що для досягнення більшої точності у кожному з методів значення  $n$  необхідно збільшити.

### ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ III

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в області  $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ :

- а) методом сіток з кроком  $h = 0,5$ ;
- б) методом прямих з кроком  $h = 1$ ;
- в) методом Рітца при  $n = 1$ .

Усі обчислення проводити з точністю до трьох знаків після коми. Порівняти отримані значення в центрі квадрата  $Q$ . Обчислити значення наближеного розв'язку у центрі квадрата  $Q$  методом Монте-Карло при  $h = 0,5, n = 20$ .

1.  $u(x, 0) = 2 + x^2, u(x, 2) = 4 - x,$     2.  $u(x, 0) = -2 + x, u(x, 2) = 2 - 2x,$   
 $u(0, y) = 2 + y, u(2, y) = 6 - 2y.$      $u(0, y) = -2 + y^2, u(2, y) = -y.$
3.  $u(x, 0) = 1 + x^2, u(x, 2) = 5 - x^2,$     4.  $u(x, 0) = -1 + x^2, u(x, 2) = 1 - x,$   
 $u(0, y) = 1 + y^2, u(2, y) = 5 - y^2.$      $u(0, y) = -1 + y, u(2, y) = 3 - y^2.$
5.  $u(x, 0) = 2 + x, u(x, 2) = 6 - x^2,$     6.  $u(x, 0) = -2 + x^2, u(x, 2) = -x,$   
 $u(0, y) = 2 + y^2, u(2, y) = 4 - y.$      $u(0, y) = -2 + y, u(2, y) = 2 - 2y.$

7.  $u(x,0) = 1 + x$ ,  $u(x,2) = 5 - 2x$ ,  $u(0,y) = 1 + y^2$ ,  $u(2,y) = 3 - y$ .
8.  $u(x,0) = -1 + x^2$ ,  $u(x,2) = 3 - x^2$ ,  $u(0,y) = -1 + y^2$ ,  $u(2,y) = 3 - y^2$ .
9.  $u(x,0) = 2 + x^2$ ,  $u(x,2) = 4 - x$ ,  $u(0,y) = 2 + y$ ,  $u(2,y) = 6 - y^2$ .
10.  $u(x,0) = -2 + x$ ,  $u(x,2) = 2 - x^2$ ,  $u(0,y) = -2 + y^2$ ,  $u(2,y) = -y$ .
11.  $u(x,0) = 1 + x^2$ ,  $u(x,2) = 3 - x$ ,  $u(0,y) = 1 + y$ ,  $u(2,y) = 5 - 2y$ .
12.  $u(x,0) = -1 + x$ ,  $u(x,2) = 3 - 2x$ ,  $u(0,y) = -1 + y^2$ ,  $u(2,y) = 1 - y$ .
13.  $u(x,0) = 2 + x^2$ ,  $u(x,2) = 6 - x^2$ ,  $u(0,y) = 2 + y^2$ ,  $u(2,y) = 6 - y^2$ .
14.  $u(x,0) = -2 + x^2$ ,  $u(x,2) = -x$ ,  $u(0,y) = -2 + y$ ,  $u(2,y) = 2 - y^2$ .
15.  $u(x,0) = 1 + x$ ,  $u(x,2) = 5 - x^2$ ,  $u(0,y) = 1 + y^2$ ,  $u(2,y) = 3 - y$ .
16.  $u(x,0) = -1 + x^2$ ,  $u(x,2) = 1 - x$ ,  $u(0,y) = -1 + y$ ,  $u(2,y) = 3 - 2y$ .
17.  $u(x,0) = 2 + x$ ,  $u(x,2) = 6 - 2x$ ,  $u(0,y) = 2 + y^2$ ,  $u(2,y) = 4 - y$ .
18.  $u(x,0) = -2 + x^2$ ,  $u(x,2) = 2 - x^2$ ,  $u(0,y) = -2 + y^2$ ,  $u(2,y) = 2 - y^2$ .
19.  $u(x,0) = 1 + x^2$ ,  $u(x,2) = 3 - x$ ,  $u(0,y) = 1 + y$ ,  $u(2,y) = 5 - y^2$ .
20.  $u(x,0) = -1 + x$ ,  $u(x,2) = 3 - x^2$ ,  $u(0,y) = -1 + y^2$ ,  $u(2,y) = 1 - y$ .

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

- вузол
  - внутрішній, 112
  - межовий, 112
  - сітки, 33, 112
  - сусідній, 112
- задача
  - варіаційна, 89, 90
  - Діріхле, 107, 108
  - змішана, 106
  - Коші, 4, 5, 6, 105
  - крайова, 61
    - неоднорідна, 61
    - однорідна, 61
  - різницева, 34
- інтеграл Діріхле, 144
- крок сітки, 33
- ламана Ейлера, 28
- лема Чаплигіна, 22
- метод
  - Адамса, 48
  - алгебраїчної прогонки, 67
    - для рівняння теплопровідності, 127
  - Гальоркіна, 72
  - Ейлера, 28
  - Ейлера удосконалений, 28
  - Ейлера-Коші удосконалений, 28
  - ітерацій, 8
  - колокації, 75
  - Мілна, 54
  - моделювання, 117
  - Монте-Карло, 118
  - найменших квадратів, 77
    - інтегральний, 78
    - точковий, 81
  - послідовних зближень Крылова, 51
  - послідовних наближень, 8
  - прямих, 137
    - для рівняння Пуассона, 136
  - Рітца
    - для варіаційної задачі, 94,
    - для задачі Діріхле, 144
    - для найпростішої крайової задачі, 95
    - для неоднорідної крайової задачі, 98
    - для рівняння Пуассона, 147
  - Рунге-Кутта, 39
  - сіток
    - для задачі Діріхле, 112
    - для рівняння теплопровідності, 123
    - для хвильового рівняння, 134
  - степеневих рядів, 14
  - стрільби, 63
  - Чаплигіна, 21
- методи інтегрування диференціальних рівнянь (наближені)
  - асимптотичні, 3
  - графічні, 3
  - числові, 3
- норма рівномірна, 34
- оператор
  - додатний, 87
  - Лапласа, 106
  - симетричний, 87
- порядок
  - апроксимації рівняння, 35
  - апроксимації різницевої схеми, 35
- принцип максимуму, 108



- процес
  - ітераційний Лібмана, 114
  - ітераційної обробки, 30
- рівність Парсевалю, 82
- рівняння
  - Лапласа, 105, 107
  - Пуассона, 105
  - теплопровідності, 105
  - хвильове, 105
- сітка, 33
  - рівномірна, 33
- схема
  - різницева, 34
    - для найпростішої крайової задачі, 65
    - для рівняння Лапласа, 109
      - перша основна, 110
      - друга основна, 110
  - Ейлера, 36
    - узагальнена, 38
- Рунге-Кутта, 41, 42
- стійка, 35
- теорема
  - Неймана, 108
  - Пікара, 5
- точка колокації, 75
- умова
  - крайова, 61, 106
  - Ліпшица, 5, 6
  - початкова, 4, 5, 106
- формула
  - Адамса, 49
  - Мілна, 54
- функція
  - гармонійна, 107
  - допустима, 86
  - Гріна, 62
  - сіткова, 33

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В. Звичайні диференціальні рівняння. Частина. 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах. – Івано-Франківськ: ЛПК, 2005. – 120 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. – Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
6. Коллатц Л. – Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1953. – 490 с.
7. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
8. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
10. Положий Г.Н. и др. Математический практикум. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
12. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 230 с.

13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. – Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
14. Федак І.В. Про одне застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів//Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Серія “Прикладна математика”. – 2000. – № 411. – С. 326-328.
15. Федак І.В. Застосування властивостей різницевих функціональних рівнянь до наближеного розв’язування рівняння теплопровідності//Вісник Прикарпатського університету. Серія “Математика. Фізика”. Вип. 1. – 2000. – С. 23-25.
16. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
17. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 516 с.

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	3
<b>Розділ I. Наближені методи розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь</b> .....	8
§ 1. Метод послідовних наближень.....	8
§ 2. Метод степеневих рядів.....	14
§ 3. Метод Чаплигіна двосторонніх наближень.....	21
§ 4. Метод ламаних Ейлера та його модифікації.....	28
§ 5. Загальні поняття теорії різницевого схем.....	32
§ 6. Різницева схема Ейлера та її узагальнення.....	36
§ 7. Метод Рунге-Кутта.....	39
§ 8. Застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів.....	44
§ 9. Метод Адамса.....	48
§ 10. Метод послідовних зближень Крилова.....	51
§ 11. Метод Мілна.....	54
§ 12. Деякі зауваження та узагальнення.....	56
Задачі до розділу I.....	58
<b>Розділ II. Наближені методи розв’язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку</b> .....	61
§ 1. Постановка крайових задач. Функція Гріна.....	61
§ 2. Метод стрільби.....	63
§ 3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі.....	65
§ 4. Метод алгебраїчної прогонки розв’язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею.....	67
§ 5. Інший підхід до розв’язування систем з трьохдіагональною матрицею.....	72
§ 6. Метод колокації.....	75
§ 7. Метод найменших квадратів.....	77
§ 8. Метод Гальоркіна.....	82

§ 9. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі.....	86
§ 10. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі.....	89
§ 11. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі.....	90
§ 12. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов.....	92
§ 13. Наближене розв'язування варіаційної задачі методом Рітца.....	94
§ 14. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі.....	95
§ 15. Розв'язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами.....	98
Задачі до розділу II.....	101
<b>Розділ III. Наближені методи розв'язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними.....</b>	<b>104</b>
§ 1. Постановка крайових задач для рівнянь з частинними похідними.....	104
§ 2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.....	107
§ 3. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.....	109
§ 4. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.....	112
§ 5. Ітераційний процес Лібмана.....	114
§ 6. Розв'язування задачі Діріхле методом моделювання.....	117
§ 7. Метод Монте-Карло.....	118
§ 8. Метод сіток для рівняння теплопровідності.....	123
§ 9. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності.....	127
§ 10. Інший підхід до наближеного розв'язування рівняння теплопровідності.....	130
§ 11. Метод сіток для хвильового рівняння.....	134

§ 12. Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона.....	136
§ 13. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі.....	142
§ 14. Метод Рітца для задачі Діріхле.....	144
§ 15. Метод Рітца для рівняння Пуассона.....	147
Задачі до розділу III.....	149
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>151</b>
<b>Список літератури.....</b>	<b>153</b>
<b>Зміст.....</b>	<b>155</b>