Б.В. Василишин
Т.П. Гой
М.І. Копач
С.В. Шарин

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1.
Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський університет імені Василя Стефаника

Василишин Б.В., Гой Т.П., Копач М.І., Шарин С.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія

Рекомендовано Міністерством освіти та науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
"Плай"
2003

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73
В19

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського університету імені Василя Стефаника як посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (протокол № 7 від 30 квітня 2002 р.).

Рецензенти:

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук (Національний університет "Львівська політехніка")

Благун І.С., доктор економічних наук (Прикарпатський університет ім. Василя Стефаника)

В19 Василишин Б.В., Гой Т.П., Копач М.І., Шарин С.В. Вища математика (Частина 1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія): Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей. – Івано-Франківськ: "Плай", 2003. – 120 с.
ISBN 966-640-117-7

У навчальному посібнику викладено питання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, передбачені програмою з вищої математики для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Теоретичний матеріал супроводжується розв'язуванням типових прикладів та задач з даних розділів вищої математики. Там, де це можливо, розкривається економічний зміст математичних понять, наводяться найпростіші застосування математики в економіці. Особливістю даного посібника є практикум, який може бути основою для контрольної перевірки знань та для самостійної роботи студентів.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 966-640-117-7

Рекомендовано Міністерством освіти та науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист № 14/18.2-102 від 20.01.2003).

РОЗДІЛ І

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

§ 1.1. Матриці. Види матриць

Матрицею порядку $m \times n$ будемо називати прямокутну таблицю чисел, складену з m рядків і n стовпців. Числа, з яких складається матриця, називають ***елементами*** матриці. Елементами матриці можуть бути й інші математичні об'єкти, наприклад, змінні, алгебраїчні та тригонометричні вирази, функції тощо.

Для позначення матриць використовують великі букви латинського алфавіту, а для позначення елементів матриці – малі букви з двома індексами, перший з яких вказує на номер рядка, а другий – на номер стовпця, на перетині яких цей елемент знаходиться. Наприклад, a_{ij} – елемент, який розміщений у i-му рядку та j-му стовпці матриці.

Таким чином, матрицю порядку $m \times n$ можна записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(1.1)}$$

або скорочено –

$$A = (a_{ij}),\ i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n.$$

Для позначення матриць можуть використовуватись й інші позначення, наприклад, $A = [a_{ij}]$, $A = \| a_{ij} \|$.

Матрицю, яка складається з одного рядка (стовпця), називають ***матрицею-рядком*** (***матрицею-стовпцем***). Наприклад,

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \ \text{ – матриця-рядок, } \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \ \text{ – матриця-стовпець.}$$

Матриці-рядки і матриці-стовпці інакше будемо називати ***векторами***.

Якщо в матриці (1.1) число рядків дорівнює числу стовпців і дорівнює n, то її називають ***квадратною*** матрицею n-го порядку. Наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ є квадратною матрицею другого порядку.

Елементи квадратної матриці, в яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, називають ***діагональними***. Вони утворюють ***головну діагональ***. У квадратній матриці n-го порядку головну діагональ, очевидно, утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$. Діагональ, яка містить елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$, називається ***побічною***.

Квадратну матрицю називають ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім діагональних, дорівнюють нулю. Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – діагональні матриці відповідно другого та третього порядків.

Діагональну матрицю, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називають ***одиничною*** і позначають буквою E. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Якщо всі елементи матриці довільного порядку дорівнюють нулю, то її називають ***нульовою матрицею*** (або ***нуль-матрицею***) і позначають символом $\mathbf{O}$. Наприклад, $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова матриця порядку 3×4.

Дві матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакового порядку $m \times n$ називають ***рівними*** (пишуть $A = B$), якщо рівні всі їх відповідні елементи, тобто якщо

$$a_{ij} = b_{ij}, \; i = 1,2,..., m, \; j = 1,2,..., n.$$

За допомогою матриць зручно записувати різноманітні економічні залежності. Наприклад, у вигляді таблиці (матриці порядку 4×3)

	Виріб I *шт.*	Виріб II *кг*	Виріб III *м*
Сировина I типу, *кг*	2	3	6
Сировина II типу, *кг*	1	0,9	0,8
Сировина III типу, *кг*	4	2	1,7
Сировина IV типу, *кг*	1,2	2	1,5

можна задати норми витрат ресурсів на одиницю продукції. Елементи даної матриці мають просту економічну інтерпретацію. Так, елемент $a_{21} = 1$ вказує, що на виготовлення одиниці виробу I витрачається 1 кг сировини II типу; елемент $a_{12} = 3$ – на те, що на виготовлення 1 кг виробу II витрачається 3 кг сировини I типу тощо.

§ 1.2. Дії над матрицями

Розглянемо основні операції, які можна виконувати над матрицями.

1. Множення матриці на число. ***Добутком*** *матриці* $A=(a_{ij})$ *на число* k *називають матрицю* kA, *кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елементу матриці A на число k, тобто*

$$kA=k(a_{ij})=(ka_{ij}),\quad i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, то $3A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 3 & 3\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 9 & -15\end{pmatrix}$.

З даного означення випливає, що *спільний множник усіх елементів матриці можна виносити за знак матриці*. Наприклад, $\begin{pmatrix}16 & 8 & -24\\ -8 & 0 & 8\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Додавання матриць. ***Сумою*** *двох матриць* $A=(a_{ij})$ *і* $B=(b_{ij})$ *однакового порядку* $m\times n$ *називають матрицю* $C=A+B$ *того ж порядку, кожний елемент* c_{ij} *якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=1,2,...,m;\quad j=1,2,...,n.$$

Наприклад, сумою матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix}$ є матриця

$$A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 2+(-2) & 3+1\\ 4+2 & 5+3 & 6+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Віднімання матриць. ***Різницею*** *матриць* $A=(a_{ij})$ *і* $B=(b_{ij})$ *однакового порядку називають матрицю*

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & -5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix}$, то

$$A-B=\begin{pmatrix}1-0 & 3-2 & 4-3\\ 0-1 & -5-5 & 6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -10 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Множення матриць. ***Добутком*** *матриці* $A=(a_{ij})$ *порядку* $m\times k$ *на матрицю* $B=(b_{ij})$ *порядку* $k\times n$ *називають матрицю* $C=AB$ *порядку* $m\times n$, *кожний елемент* c_{ij} *якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто*

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n, \qquad \textbf{(1.2)}$$

або скорочено –

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,...m;\quad j=1,2,...,n.$$

З даного означення випливає, що добуток двох матриць не завжди визначений: потрібно, щоб число стовпців першої матриці дорівнювало числу рядків другої матриці. Матриця-добуток при цьому матиме стільки рядків, скільки рядків у першій матриці, і стільки стовпців, скільки їх у другій матриці.

Приклад 1.1. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Добуток AB можливий, бо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Матриця-добуток матиме порядок 2×3, а її елементи знаходимо за формулами (1.2):

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 1+3\cdot(-2) & 2\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 0 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 & 4\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot(-2) & 4\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Наведемо ***властивості дій над матрицями*** (вважаємо, що всі дії в одній з двох частин кожної рівності мають зміст, тоді дії у другій частині відповідної рівності також матимуть зміст):

1. $1\cdot A=A$,
2. $0\cdot A=\mathbf{O}$,
3. $k\mathbf{O}=\mathbf{O}$,
4. $A+B=B+A$,
5. $k(lA)=(kl)A=l(kA)$,
6. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
7. $(k+l)A=kA+lA$,
8. $k(A+B)=kA+kB$,
9. $A+\mathbf{O}=A$,
10. $A(B+C)=AB+AC$,
11. $(A+B)C=AC+BC$,
12. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$,
13. $A(BC)=(AB)C$,
14. $AE=EA=A$.

Звернемо увагу на деякі ***специфічні властивості операції множення матриць***.

1. Якщо добуток AB існує, то добуток BA може не існувати. У прикладі 1.1 ми знайшли AB, тоді як добуток BA не існує, бо число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A.

2. Якщо обидва добутки AB і BA існують, то вони можуть бути матрицями різного порядку, а тому непорівнянними. Наприклад, для матриць A і B порядків 2×3 і 3×2 відповідно можна знайти добутки AB і BA, але вони будуть матрицями різних порядків (AB – другого, BA – третього).

3. Якщо обидва добутки AB і BA існують та є матрицями однакового порядку, то може бути, що $AB\neq BA$, тобто переставний закон множення матриць, взагалі кажучи, не виконується.

Так, для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ маємо:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 4\\ 3\cdot 2+6\cdot 0 & 3\cdot 3+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 33\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 0+3\cdot 6\\ 0\cdot 1+4\cdot 3 & 0\cdot 0+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 18\\ 12 & 24\end{pmatrix}.$$

4. Якщо добуток двох матриць рівний нуль-матриці, то не обов'язково хоч одна з них є нуль-матрицею, тобто з рівності $AB=\mathbf{O}$, взагалі кажучи, не випливає, що $A=\mathbf{O}$ або $B=\mathbf{O}$. Наприклад, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\neq\mathbf{O}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\neq\mathbf{O}$, але

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{O}.$$

5. Піднесення до степеня. Цілим додатнім ***степенем*** A^m квадратної матриці A називають добуток m матриць, кожна з яких дорівнює A, тобто

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\text{ разів}}.$$

За означенням приймають, що $A^0=E$, $A^1=A$. Неважко показати, що

$$A^mA^k=A^{m+k},\ (A^m)^k=A^{mk}.$$

Зауважимо, що з рівності $A^m=\mathbf{O}$, взагалі кажучи, не випливає, що $A=\mathbf{O}$. Так, квадрат ненульової матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ є нуль-матрицею:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{O}.$$

6. Транспонування матриці. Якщо в матриці A поміняти місцями рядки і стовпці зі збереженням порядку елементів у них, то одержану матрицю називають ***транспонованою*** до A і позначають A^T. Наприклад, транспонованою до матриці (1.1) є матриця

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

З означення випливає, що матриця, транспонована до матриці порядку $m\times n$, має порядок $n\times m$.

Операція транспонування має такі властивості:

1. $(A^T)^T=A$,
2. $(kA)^T=kA^T$,
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$,
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

Розглянуті дії над матрицями дозволяють спростити розв'язання деяких економічних задач, зокрема таких, як розрахунок норм витрат вихідного матеріалу для випуску кінцевої продукції, розрахунок завантаженості технологічного обладнання, транспортна задача тощо.

Вперше на можливість застосування таблиць чисел (матриць) для аналізу економічних задач вказав французький вчений Ф. Кене (1696-1774) у своїх "Економічних таблицях", де запропонував кількісну модель державної економіки.

Приклад 1.2. На виробництво трьох видів продукції P_1, P_2, P_3 підприємство витрачає комплектуючі чотирьох типів K_1, K_2, K_3, K_4, які воно закуповує у суміжників. Норми витрат комплектуючих задано матрицею $A = (a_{ij})$:

$$\begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де кожний елемент $a_{ij,}$ $i = 1, 2, 3, 4;$ $j = 1, 2, 3,$ вказує, скільки комплектуючих i-го типу витрачається на виробництво j-го виду продукції. План випуску видів продукції заданий матрицею-стовпцем $P = (100,\ 80,\ 40)^T$, а вартість одиниці кожного типу комплектуючого – матрицею-рядком $K = (30,\ 50,\ 20,\ 25)$. Визначити потребу в комплектуючих, необхідних для планового випуску продукції, та їх загальну вартість.

Розв'язання. Потреба в комплектуючих типів K_1, K_2, K_3, K_4 становить відповідно $1 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 1 \cdot 40 = 300$ (од.), $2 \cdot 100 + 1 \cdot 80 + 2 \cdot 40 = 360$ (од.), $3 \cdot 100 + {}$ ${} + 4 \cdot 80 + 1 \cdot 40 = 660$ (од.) та $4 \cdot 100 + 0 \cdot 80 + 1 \cdot 40 = 440$ (од.).

Загальна потреба в комплектуючих може бути записана як добуток

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 360 \\ 660 \\ 440 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальна вартість комплектуючих, що закуповуються підприємством, становитиме $30 \cdot 300 + 50 \cdot 360 + 20 \cdot 660 + 25 \cdot 440 = 51200$ (грош. од.), яку можна подати як добуток

$$K \cdot (AP) = (30, 50, 20, 25) \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 360 \\ 660 \\ 440 \end{pmatrix} = (51200) \text{ (грош. од.).} \ \blacksquare$$

§ 1.3. Визначники

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Кожній такій матриці можна поставити у відповідність число, яке обчислюється за певним правилом і називається ***визначником (детермінантом)*** матриці. Визначник матриці A позначають $|A|$ або $\det A$.

Правило, за яким обчислюють визначник, залежить від порядку матриці.

Визначником матриці першого порядку $A=(a_{11})$, або ***визначником першого порядку*** називається елемент a_{11}, тобто $|A|=a_{11}$.

Визначником матриці другого порядку $A=(a_{ij}), i=1,2;\ j=1,2,$ або ***визначником другого порядку*** називається число, яке обчислюють за формулою

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad \textbf{(1.4)}$$

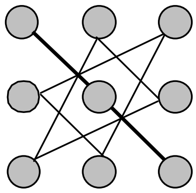
Іншими словами, *визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.* Наприклад, визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ обчислюють так: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-2\cdot 4=7.$

Визначником матриці третього порядку $A=(a_{ij}), i=1,2,3;\ j=1,2,3,$ або ***визначником третього порядку*** називають число, яке обчислюють за формулою

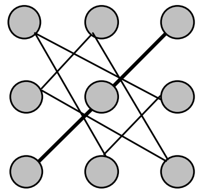
$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Кожний доданок у правій частині формули (1.5) містить по одному елементу з кожного рядка та кожного стовпця матриці A. Три перші доданки є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі ($a_{11}a_{22}a_{33}$), й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі ($a_{12}a_{23}a_{31}$ і $a_{13}a_{21}a_{32}$) (рис. 1.1). Три інші доданки зі знаком "мінус" є добутками елементів побічної діагоналі ($a_{13}a_{22}a_{31}$) й елементів, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі ($a_{12}a_{21}a_{33}$ і $a_{11}a_{23}a_{32}$) (рис. 1.2).



$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$



(+)
Рис.1.1

(–)
Рис. 1.2

Таку схему обчислення визначника третього порядку називають ***правилом трикутників***.

Приклад 1.3. Обчислити визначник третього порядку $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Використовуючи правило трикутників, знаходимо:

$$|A| = 2\cdot 4\cdot 0 + (-3)\cdot 1\cdot(-5) + 1\cdot 5\cdot 0 - (-5)\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 0 - 5\cdot 1\cdot 2 = 5. \ \blacksquare$$

Для того, щоб означити визначник довільного порядку, введемо деякі допоміжні поняття.

Розглянемо квадратну матрицю (1.3). Із загального числа n^2 її елементів виберемо набір, що містить n елементів, щоб у нього входило по одному елементу з кожного рядка та кожного стовпця матриці. Будь-який такий набір можна впорядкувати, якщо записати спочатку елемент з першого рядка, потім з другого і т.д., тобто записати у вигляді $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n})$. Номери стовпців $(j_1, j_2, ..., j_n)$ утворюють при цьому перестановку з чисел $1, 2, ..., n$. Всього з n чисел можна отримати $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ ($n!$ читають "ен-факторіал") різних перестановок. Наприклад, (1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1) – усі можливі перестановки з чисел {1;2;3}.

Інверсією у перестановці називають пару чисел, в якій більше число передує меншому. Число інверсій у перестановці, яка складається з елементів множини $\{1, 2, ..., n\}$, обчислюють так: знаходять число елементів, що стоять ліворуч від 1, потім знаходять число елементів, що стоять ліворуч від 2 і т.д. для всіх елементів. Додаючи отримані результати, визначимо число інверсій заданої перестановки.

Знайдемо, наприклад, число інверсій у перестановці (4;3;5;1;2). Перед числом 1 стоять три числа: 4, 3, 5 – маємо три інверсії. Викреслимо число 1 й отримаємо перестановку (4;3;5;2). Перед числом 2 стоять числа 4, 3, 5 – це ще три інверсії. Викреслимо число 2 й отримаємо перестановку (4;3;5). Перед числом 3 стоять число 4 – це ще одна інверсія. Для чисел 4 і 5 інверсій немає. Отже, в даній перестановці $3 + 3 + 1 = 7$ інверсій.

Визначником матриці n-го порядку $A=(a_{ij})$, $i, j=1,...,n$, або ***визначником n-го порядку*** називають число, яке дорівнює алгебраїчній сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів матриці, взятих по одному з кожного рядка й кожного стовпця, причому знак кожного доданка визначається множником $(-1)^t$, де t – число інверсій у перестановці з номерів стовпців матриці, якщо номери рядків записати у порядку зростання, тобто

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}, \qquad \textbf{(1.6)}$$

де підсумовування здійснюється за усіма перестановками $(j_1, j_2,..., j_n)$.

Проте для обчислення визначників високих порядків формула (1.6) є непрактичною, бо з ростом порядку n матриці A швидко зростає кількість доданків у правій частині (1.6). Наприклад, якщо $n=5$, то ця формула містить 20 доданків по 5 множників у кожному з них.

Як правило, для обчислення визначників високих порядків використовується теорема Лапласа. Для її формулювання введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення елемента матриці.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A порядку n називають визначник порядку $n-1$, утворений з матриці A вилученням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A порядку n називають його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Приклад 1.4. Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{21} та a_{33} матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання***.** Використовуючи формулу (1.7), знаходимо:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}, \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}.$$

Мінори M_{21} та M_{33} обчислимо за означенням:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-1\cdot(-1)=13, \qquad M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1=5.$$

Остаточно одержуємо, що $A_{21}=-13$, $A_{33}=5$. ■

Теорема Лапласа. *Визначник Δ матриці n-го порядку дорівнює сумі добутків всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}, \; i = 1,\ldots,n, \qquad \textbf{(1.8)}$$

або

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}, \; j = 1,\ldots,n. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Формулу (1.8) називають розкладанням визначника Δ за елементами i-го рядка, а формулу (1.9) – розкладанням визначника за елементами j-го стовпця.

Важливість теореми Лапласа полягає в тому, що визначники A_{ij} у формулах (1.8) та (1.9) мають порядок на одиницю менший, ніж порядок визначника Δ. Наприклад, обчислення визначника четвертого порядку зводиться в гіршому випадку (якщо серед його елементів немає нулів) до обчислення чотирьох визначників третього порядку. Таким чином, понижуючи порядок визначника будь-якого порядку кожного разу на одиницю, його обчислення можна звести до обчислення визначників третього або другого порядків.

Приклад 1.5. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Шуканий визначник розкладемо за елементами другого рядка, бо серед його елементів є два нулі. Використовуючи формулу (1.8), знаходимо:

$$\Delta = 0\cdot A_{21} + 5\cdot A_{22} + 4\cdot A_{23} + 0\cdot A_{24} =$$

$$= 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 12 - 4\cdot 9 = 24. \blacksquare$$

Приклад 1.6. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розкладаючи даний визначник за елементами першого стовпця, одержимо:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2\cdot 5\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 2\cdot 5\cdot 1\cdot 2 = 20. \blacksquare$$

З прикладу 1.6 випливає, що *визначник діагональної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.*

§ 1.4. Властивості визначників

Для ефективного обчислення визначника шляхом його розкладу за елементами деякого рядка чи стовпця необхідно вміти виконувати еквівалентні перетворення, що дасть можливість одержувати нулі у потрібному рядку чи стовпці матриці. Виконання таких перетворень здійснюється з використанням властивостей, якими володіє довільний визначник n-го порядку.

1. *Якщо транспонувати матрицю, то її визначник не зміниться, тобто*

$$|A^T| = |A|.$$

2. *Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то він змінить знак на протилежний.*

Доведення цієї властивості випливає з того, що число t у (1.6) при такій перестановці змінить парність, оскільки додається або віднімається одна інверсія.

3. *Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на довільне число k, то визначник також помножиться на число k.*

Іншими словами, *спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.* Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для *доведення* цієї властивості досить зауважити, що за формулою (1.6) визначник виражається у вигляді алгебраїчної суми, кожний член якої містить як множник один елемент з кожного рядка та з кожного стовпця.

4. *Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.*

Ця властивість випливає з попередньої властивості (якщо $k = 0$).

5. *Якщо кожен елемент i-го рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то цей визначник розкладається на суму двох визначників, у одного з яких i-ий рядок (стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові*. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. *Якщо визначник матриці містить два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.*

Доведення. Якщо поміняти місцями два однакові рядки (стовпці), то, з одного боку, визначник не зміниться, а з іншого, за властивістю 2, він змінить знак на протилежний. Отже, $|A| = -|A|$, звідки випливає, що $|A| = 0$.

7. *Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то він дорівнює нулю.*

Доведення. Якщо винести коефіцієнт пропорційності за знак визначника (згідно з властивістю 3), то одержимо визначник з двома однаковими рядками (стовпцями), який за попередньою властивістю дорівнює нулю.

8. *Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) цього визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.*

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_3 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_3 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доведення. Отриманий в результаті такого додавання визначник згідно з властивістю 5 можна розкласти на суму двох визначників, перший з яких співпадає з даним, а інший має два пропорційні рядки (стовпці), а тому за властивістю 7 дорівнює нулю.

Обчислюючи конкретний визначник, використовуючи властивість 8, можна зробити так, щоб в деякому його рядку (стовпці) тільки один елемент був відмінний від нуля. Тоді розклад за елементами цього рядка (стовпця) міститиме один доданок і зведе обчислення визначника n-го порядку до обчислення визначника $(n-1)$-го порядку (мінора, що міститься у вказаному доданку).

Приклад 1.7. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Перетворимо цей визначник так, щоб у першому стовпці, серед елементів якого вже є один нуль, зробити ще два нулі. Використовуючи властивість 8, елементи першого рядка помножимо спочатку на 3 й додамо до відповідних елементів третього рядка, а потім помножимо на –5 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка. Одержимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -8 & 10 \\ 0 & -9 & 14 & -8 \end{vmatrix},$$

який доцільно розкласти за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \\ -9 & 14 & -8 \end{vmatrix} = 64-180+336-216-140+128=-8. \ \blacksquare$$

§ 1.5. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матрицю A^{-1} називають ***оберненою*** до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратну матрицю A називають ***виродженою***, якщо $|A| = 0$, і ***невиродженою***, якщо $|A| \neq 0$.

Не кожна квадратна матриця має обернену матрицю. Необхідну і достатню умову існування оберненої матриці виражає наступна теорема.

Теорема. *Матриця A має обернену матрицю, причому єдину, тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.*

Обернену матриця можна побудувати різними способами. Розглянемо спочатку спосіб її побудови за допомогою ***союзної*** матриці A^*, тобто матриці, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів матриці A^T, транспонованої до A. Для цього виконують такі дії:

1) обчислюють визначник даної матриці A. Якщо $|A| = 0$, то матриця A є виродженою й оберненої до неї матриці не існує;

2) обчислюють всі n^2 алгебраїчних доповнень A_{ij} елементів матриці A;

3) записують союзну матрицю A^*: $\quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$;

4) знаходять обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad |A| \neq 0. \qquad \textbf{(1.10)}$$

5) перевіряють правильність знаходження оберненої матриці, виходячи з її означення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (цей пункт не обов'язковий).

Приклад 1.8. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для побудови матриці A^{-1} скористаємося наведеним алгоритмом.

1. Обчислимо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

тобто матриця A невироджена, а, отже, обернена матриця A^{-1} існує.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4.$$

3. Для матриці A запишемо союзну матрицю A^*: $A^*=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

4. Будуємо обернену матрицю за формулою (1.10):

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 4 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/4 & 3/8 & 1/2\\ 1/2 & -1/4 & 0\\ 1/4 & 1/8 & -1/2\end{pmatrix}. \blacksquare$$

Обернену матрицю можна побудувати також за ***методом Жордана-Гаусса***. Для цього потрібно:

1) справа від даної невиродженої матриці дописати через відокремлювальну риску одиничну матрицю того ж порядку;

2) за допомогою елементарних перетворень рядків матрицю зліва перетворити в одиничну, виконуючи аналогічні перетворення рядків матриці справа.

Матриця справа, яку одержимо після виконання цих перетворень, і буде оберненою до даної.

Приклад 1.9. Методом Жордана-Гаусса знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Дана матриця невироджена, бо $|A|=-3\neq 0$. Виконаємо описані в алгоритмі перетворення рядків матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right):2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\quad\times(-1)\\ +\\ \quad\quad\quad\quad +\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right):(-3)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ \times(-1)\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1\end{array}\right) : 1/2 \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)\begin{array}{c} \\ + \\ \times(-1/6)\end{array}\begin{array}{c} \\ + \\ \times(-1/3)\end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Таким чином, оберненою до матриці A буде матриця

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1/3\\ 2/3 & -1/3 & -2/3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}. \blacksquare$$

Для невироджених матриць виконуються наступні властивості:

1. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$;
2. $(A^{-1})^{-1}=A$;
3. $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$;
4. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;
5. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

§ 1.6. Ранг матриці

Нехай $A=(a_{ij})$, $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$ – прямокутна матриця порядку $m\times n$. Виділимо в ній довільні k рядків і k стовпців, де $k\le\min\{m,n\}$. Визначник k-го порядку, утворений з елементів, розташованих на перетині виділених рядків і стовпців, називають ***мінором k-го порядку*** матриці A (при цьому як рядки, так і стовпці цього визначника мають бути один відносно одного у тому ж порядку, що й в матриці A). Наприклад, з матриці порядку 3×4 можна утворити мінори першого, другого та третього порядків.

Ціле число $r>0$ називають ***рангом матриці*** A, якщо серед її мінорів r-го порядку є принаймні один, відмінний від нуля, а всі мінори, порядок яких більший ніж r, дорівнюють нулю. Ранг нульової матриці за означенням дорівнює нулю. Ранг матриці A позначатимемо $r(A)$.

З означення рангу матриці випливає, що:

1) ранг матриці А порядку $m\times n$ не перевищує меншого з її розмірів, тобто $r(A)\le\min\{m,n\}$;

2) $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, коли $A=\mathbf{O}$;

3) ранг квадратної матриці A n-го порядку дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця A невироджена.

Приклад 1.10. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Для матриці A порядку 3×4 $r(A) \le \min\{3,4\} = 3$. Обчислимо всі мінори третього порядку:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, тому $r(A) \le 2$, а оскільки мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \ne 0$, то $r(A) = 2$. ■

Обчислення рангу матриці в такий спосіб є досить громіздким. Більш зручним для обчислення рангу матриці є метод, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати ***елементарні перетворення***, до яких належать:

1) вилучення нульового рядка (стовпця);

2) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) матриці на число, відмінне від нуля;

3) зміна порядку рядків (стовпців);

4) додавання до кожного елемента деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на будь-яке число;

5) транспонування матриці.

За допомогою елементарних перетворень довільну ненульову матрицю можна звести до східчастого вигляду, тобто до матриці вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1k} \\ \dots & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{ss} & \dots & a_{sk} \end{pmatrix}, \quad \textbf{(1.11)}$$

де $a_{ii} \ne 0, i = 1,2,\dots,s, \; s \le k$.

Очевидно, що ранг східчастої матриці (1.11) дорівнює s, оскільки $r(A) \le s$ й існує мінор s-го порядку, відмінний від нуля, а саме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{ss} \neq 0.$$

Алгоритм обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень може бути таким:

1) якщо $a_{11} = 0$, то поміняємо місцями перший рядок з деяким іншим й досягаємо того, що $a_{11} \neq 0$;

2) якщо $a_{11} \neq 0$, то помноживши послідовно елементи першого рядка на числа $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}, -\dfrac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$, і додаючи їх відповідно до елементів другого, третього, …, m-го рядка, досягаємо, що всі елементи першого стовпця, які розміщені нижче елемента a_{11}, стануть рівними нулю. Якщо деякий елемент першого стовпця, що розміщений нижче a_{11}, вже рівний нулю, то відповідний рядок залишаємо без змін;

3) якщо в результаті таких перетворень всі елементи деякого рядка (стовпця) перетворились в нуль, то цей рядок (стовпець) вилучаємо;

4) дії, описані в пунктах 1-3 для елемента a_{11}, повторюємо для кожного елемента a_{kk}, доки не зведемо матрицю до східчастого вигляду (вигляду (1.11)).

Приклад 1.11. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Символом "~" позначимо знак рівності рангів матриць. Тоді

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \quad \times(-2) \\ + \\ \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ + \quad + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця є східчастого вигляду й має відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Отже, $r(A) = 2$. ■

§ 1.7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

У школі розв'язують системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими і трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. У математиці, фізиці, економіці та інших науках часто доводиться розглядати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з довільним числом невідомих.

Лінійним рівнянням з n невідомими називається рівняння вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – дані дійсні числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, які в це рівняння входять у першому степені (лінійно).

Часто виникає потреба знайти спільні розв'язки кількох лінійних рівнянь, тобто розв'язати ***систему лінійних рівнянь***. У загальному випадку система m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \textbf{(1.12)}$$

де $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n,$ – коефіцієнти біля невідомих (***коефіцієнти системи***), $b_i, i = 1,2,\ldots,m,$ – ***вільні члени***. Кожний коефіцієнт a_{ij} системи має два індекси, перший з яких вказує порядковий номер рівняння, а другий – номер невідомого, біля якого стоїть цей коефіцієнт.

Розв'язком системи (1.12) будемо називати впорядковану множину чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, яка при підставлянні в (1.12) замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює всі рівняння системи у числові тотожності. Розв'язати систему – означає знайти всі її розв'язки або довести, що жодного розв'язку немає.

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має розв'язків. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

Дві системи рівнянь називають ***еквівалентними*** (або ***рівносильними***), якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Будь-які несумісні системи рівнянь з однаковим числом невідомих вважають еквівалентними.

Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

складену з коефіцієнтів біля невідомих системи (1.12), називають ***основною матрицею*** системи.

Матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

складену з усіх коефіцієнтів a_{ij} біля невідомих і вільних членів b_i, називають ***розширеною матрицею*** системи (1.12).

Виявляється, що сумісність чи несумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь залежить виключно від співвідношення між рангами матриць A і A_1. А саме, правильним є таке твердження.

Теорема 1 (Кронекера-Капеллі). *Для того, щоб система (1.12) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранги її основної та розширеної матриці були рівні.*

Спільне значення рангів матриць A і A_1 називають ***рангом*** системи (1.12) лінійних рівнянь. Очевидно, що ранг системи рівнянь не перевищує як числа рівнянь, так і числа невідомих системи.

Важливість теорема Кронекера-Капеллі полягає у тому, що вона дає можливість визначити сумісність або несумісність системи лінійних рівнянь, не розв'язуючи її, а лише знайшовши ранги основної та розширеної матриць системи. Якщо система сумісна, то можна за допомогою її рангу з'ясувати, визначена вона, чи ні.

Теорема 2 (критерій визначеності). *Якщо система лінійних рівнянь з n невідомими сумісна і ранг її основної матриці дорівнює r, то при $r = n$ ця система визначена, а при $r < n$ – невизначена.*

§ 1.8. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему лінійних рівнянь (1.12). Користуючись правилом множення матриць, її можна записати у вигляді матричного рівняння

$$AX = B, \tag{1.13}$$

де A – основна матриця системи (1.12), $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – матриця-стовпець невідомих, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – матриця-стовпець вільних членів (T – символ транспонування). Зображення лінійної системи (1.12) у вигляді матричного рівняння (1.13) називають ***матричною формою*** системи.

Розв'язком матричного рівняння (1.13) є такий вектор-стовпець X, який перетворює всі рівняння системи (1.12) у тотожності.

Якщо основна матриця системи (1.12) квадратна і невироджена, то її розв'язок можна знайти у матричній формі, або, як кажуть, ***матричним методом***. Для цього помножимо зліва обидві частини матричного рівняння (1.13) на матрицю A^{-1}, обернену до матриці A: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то

$$X = A^{-1}B, \tag{1.14}$$

тобто розв'язок системи (1.12) може бути отриманий як добуток двох матриць A^{-1} та B.

Приклад 1.12. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$. Оскільки, як легко перевірити, $|A| = 37 \neq 0$, то матриця A невироджена, а тому має обернену матрицю A^{-1}. Знайдемо її, використовуючи метод Жордана-Гаусса (див. § 1.6).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) : 4 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) \quad \times(-3) \\ + \qquad\quad + \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -13/4 & -3/4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-3) \ \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/12 & 1/12 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -37/12 & -7/12 & -1/3 & 1 \end{array}\right) :\left(-37/12\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7/12 & 1/12 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/37 & 4/37 & -12/37 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \qquad + \\ \times\left(-1/6\right) \ \times\left(-7/12\right) \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/37 & 10/37 & 7/37 \\ 0 & 1 & 0 & 5/37 & -13/37 & 2/37 \\ 0 & 0 & 1 & 7/37 & 4/37 & -12/37 \end{array}\right).$$

Таким чином, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/37 & 10/37 & 7/37 \\ 5/37 & -13/37 & 2/37 \\ 7/37 & 4/37 & -12/37 \end{pmatrix}.$

Тепер за формулою (1.14) знаходимо:

$$X=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} -1 & 10 & 7 \\ 5 & -13 & 2 \\ 7 & 4 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} -1\cdot 5+10\cdot 7+7\cdot(-4) \\ 5\cdot 5-13\cdot 7+2\cdot(-4) \\ 7\cdot 5+4\cdot 7-12\cdot(-4) \end{pmatrix}=\frac{1}{37}\begin{pmatrix} 37 \\ -74 \\ 111 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=3.$ ■

§ 1.9. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Якщо основна матриця A системи (1.12) невироджена, тобто $|A|\neq 0$, то розв'язок цієї системи можна знайти також за допомогою ***методу Крамера***, який виражає наступна теорема.

Теорема (Крамера). *Нехай Δ – визначник основної матриці A системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими, а Δ_j – визначник, який одержуємо заміною елементів j-го стовпця матриці A стовпцем вільних членів. Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається формулами*

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{1.15}$$

Доведення. Підставимо обернену матрицю A^{-1}, знайдену за формулою (1.11), у (1.14). Будемо мати:

$$X=\frac{1}{|A|}A^{*}\cdot B=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Виконавши множення двох матриць у правій частині останньої рівності, одержимо:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

З означення рівності двох матриць випливає, що

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}\right), \ j = 1,2,\ldots,n,$$

де вираз у дужках за теоремою Лапласа є не чим іншим, як визначником Δ_j, одержаним з визначника матриці A заміною в ньому j-го стовпця стовпцем вільних членів. Теорему доведено. ■

Формули (1.15) називаються ***формулами Крамера***.

Приклад 1.13. Розв'язати методом Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $\Delta = 10 \neq 0$, то дана система має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3, замінивши в основній матриці системи відповідно перший, другий та третій стовпець стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тепер, використовуючи формули (1.15), знаходимо:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0. \ ■$$

§ 1.10. Методи Гаусса та Жордана-Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Суттєвим недоліком розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими матричним методом або за методом Крамера є їх велика трудомісткість, пов'язана з обчисленням визначників і знаходженням оберненої матриці. Тому ці методи мають радше теоретичний інтерес і на практиці не можуть бути використані для розв'язування реальних економічних задач, які часто зводяться до систем з великим числом рівнянь та змінних.

Одним з найбільш ефективних методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь є ***метод послідовного виключення невідомих***, або ***метод Гаусса***. Схема обчислення за методом Гаусса досить проста. Важливо також і те, що у ході самих обчислень встановлюються такі властивості системи, як її сумісність і визначеність.

Ґрунтується цей метод на ***елементарних перетвореннях*** системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких належать:

1) переставляння двох рівнянь місцями;

2) множення обох частин одного з рівнянь на одне й те саме число, відмінне від нуля;

3) додавання до обох частин якого-небудь рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) вилучення із системи рівняння, що є тотожністю.

Загальна ідея методу Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь полягає в тому, що з допомогою елементарних перетворень система (1.12) зводиться до еквівалентної їй системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останньої за номером невідомої, знаходяться всі інші невідомі.

Будемо вважати, що у системі (1.12) немає рівнянь вигляду

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b_k,\ b_k\neq 0,$$

та

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0.$$

У першому випадку k-те рівняння не має розв'язку, а тому й вся система несумісна. У другому випадку отримуємо систему з меншим числом рівнянь. Отже, у кожному рівнянні системи (1.12) хоч один з коефіцієнтів біля невідомих відмінний від нуля.

Алгоритм методу Гаусса може бути таким.

1. Нехай $a_{11}\neq 0$. Якщо це не так, то потрібно на перше місце поставити рівняння з відмінним від нуля коефіцієнтом біля x_1 і перепозначити коефіцієнти. Перетворимо систему (1.12), виключаючи невідому x_1 з усіх рівнянь, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння послідовно на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}},\ -\frac{a_{31}}{a_{11}},\ \ldots,\ -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

і додамо одержані рівняння відповідно до другого, третього, …, m-го рівняння. Після скорочень та зведення подібних членів одержимо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2+\ldots+a_{3n}^{(1)}x_n=b_3^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2+\ldots+a_{mn}^{(1)}x_n=b_m^{(1)}, \end{cases} \qquad \textbf{(1.16)}$$

де символами $a_{jk}^{(1)}$ і $b_j^{(1)}$ позначені нові коефіцієнти та нові вільні члени системи:

$$a_{jk}^{(1)}=a_{jk}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1k},\qquad b_j^{(1)}=b_j-\frac{a_{j1}}{a_{11}}b_1,\quad j=2,3,\ldots,m,\quad k=2,3,\ldots,n.$$

2. Припустимо, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (це припущення також не є суттєвим). Помноживши друге рівняння системи (1.16) послідовно на $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots, -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ і додавши одержані рівняння відповідно до третього, четвертого,…, m-го рівняння, вилучимо змінну x_2 з третього та всіх наступних рівнянь.

3. Продовжуючи описаний процес, після (s–1)-го кроку послідовно виключаємо невідомі $x_3, x_4, ..., x_{s-1}$ і приходимо до системи, яка еквівалентна системі (1.12):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2s}^{(1)}x_s + a_{2,s+1}^{(1)}x_{s+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s + a_{s,s+1}^{(s-1)}x_{s+1} + ... + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}, \\ \qquad\qquad 0 = b_{s+1}^{(s-1)}, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad 0 = b_m^{(s-1)}, \end{cases} \qquad \textbf{(1.17)}$$

де $a_{11} \neq 0, \; a_{jj}^{(j-1)} \neq 0, \; j = 2, ..., s, \; s \leq n,$ а через $0 = b_j^{(s-1)}, \; j = s+1, ..., m,$ позначені рівняння, в яких коефіцієнти біля всіх невідомих дорівнюють нулю.

Дослідимо систему (1.17).

1. Якщо хоча б одне з чисел $b_{s+1}^{(s-1)}, \ldots, \; b_m^{(s-1)}$ відмінне від нуля, то відповідне рівняння не має розв'язку, а тому система (1.17) несумісна.

2. Якщо всі $b_{s+1}^{(s-1)}, \ldots, b_m^{(s-1)}$ дорівнюють нулю, то останні $m-s$ рівнянь системи будуть тотожностями і їх можна вилучити. Тоді система (1.17) буде сумісною й матиме вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2s}^{(1)}x_s + a_{2,s+1}^{(1)}x_{s+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{ss}^{(s-1)}x_s + a_{s,s+1}^{(s-1)}x_{s+1} + ... + a_{sn}^{(s-1)}x_n = b_s^{(s-1)}. \end{cases} \qquad \textbf{(1.18)}$$

Якщо число рівнянь у системі (1.18) дорівнює числу невідомих, тобто $s = n$, то ця система має трикутний вигляд і є визначеною. З останнього рівняння знаходимо x_n і, рухаючись по системі угору, знаходимо всі інші невідомі.

Якщо ж число рівнянь системи (1.18) менше, ніж число невідомих, тобто $s < n$, то ця система матиме східчастий вигляд, а тому буде невизначеною. Її розв'язки шукаємо так. Перші s невідомих $x_1, x_2, ..., x_s$, які називають ***базисними***, визначають через інші невідомі $x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n$, які називають ***вільними***:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s = \alpha_{s,s+1}x_{s+1} + \ldots + \alpha_{sn}x_n + \beta_s. \end{cases} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Розв'язок (1.19) називають ***загальним розв'язком*** системи (1.12). Якщо в (1.19) замість $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ підставити конкретні числові значення, то отримаємо ***частинний розв'язок*** системи (1.12). Зокрема, якщо $x_{s+1} = 0,\ x_{s+2} = 0, \ldots,\ x_n = 0$, то одержимо розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, 0, \ldots, 0)$, який називають ***базисним***.

На практиці зручніше зводити до східчастого (трикутного) вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю системи, з'єднуючи послідовно отримувані матриці знаком еквівалентності "~".

Приклад 1.14. Розв'язати методом Гаусса розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо розширену матрицю даної системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-1)\ \times(-2)\ \times(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \times(-5)\ \times(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \times(-3) \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -20 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right).$$

Останній розширеній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ \qquad -x_2 - x_3 + 4x_4 = 5, \\ \qquad\quad -2x_3 - 20x_4 = -20, \\ \qquad\qquad\qquad 57x_4 = 57, \end{cases}$$

починаючи з останнього рівняння якої, послідовно знаходимо всі невідомі:

$$x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1. \blacksquare$$

Приклад 1.15. Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=3, \\ 4x_1-x_2+8x_3-4x_4=-3, \\ 2x_1+x_2+4x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо розширену матрицю даної системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 8 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-3)\ \times(-4)\ \times(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Ранги основної і розширеної матриці рівні 2 і менші числа невідомих. За базисні невідомі можна взяти x_1 і x_2, оскільки мінор з коефіцієнтів біля цих невідомих відмінний від нуля.

Останній розширеній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0, \\ x_2=3, \end{cases},$$

тому загальний розв'язок вихідної системи має вигляд $\begin{cases} x_1=-2x_3+x_4, \\ x_2=3, \end{cases}$ а базисний – $(0,3,0,0)$. ■

Метод Гаусса недостатньо зручний тим, що у східчастій системі рівнянь (1.17) значення x_s, знайдене з s-го рівняння, треба підставляти в (s–1)-е рівняння для знаходження невідомого x_{s-1}, потім значення x_s та x_{s-1} – у (s–2)-е рівняння для знаходження x_{s-2} і так далі.

Зручнішим з цього погляду є ***метод повного виключення невідомих*** або ***метод Жордана-Гаусса***, де невідомі виключаються не лише з наступних, а й з попередніх рівнянь. Проілюструємо метод Жордана-Гаусса на прикладі.

Приклад 1.16. Методом Жордана-Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3=13, \\ x_1+2x_2+3x_3=14. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо елементарні перетворення розширеної матриці даної системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&1&3&13\\1&2&3&14\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-2)\ \times(-1)\\ +\\ \quad\ \ +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-1&1&1\\0&1&2&8\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ :(-1)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&-1&-1\\0&1&2&8\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ \times(-1)\ \ \times(-1)\\ \qquad\quad\ +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&7\\0&1&-1&-1\\0&0&3&9\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ :3\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&7\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\qquad\quad\ +\\ \\ +\ \ \times(-2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2,\\x_3=3.\end{cases}$$

Отже, $x_1=1, x_2=2, x_3=3.$ ■

§ 1.11. Однорідна система рівнянь. Фундаментальна система розв'язків

Якщо в системі (1.12) всі вільні члени b_j, $j=1,...,m,$ дорівнюють нулю, то таку систему називають ***однорідною***, а якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля, то ***неоднорідною***.

Отже, однорідна система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має такий загальний вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\qquad\textbf{(1.20)}$$

Однорідна система рівнянь завжди сумісна, бо її розв'язком, як легко переконатися, є нульовий (тривіальний) розв'язок $x_1=0, x_2=0, ..., x_n=0$. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (1.20) можна знайти методом Гаусса або Жордана-Гаусса.

Якщо у системі (1.20) $m=n$, а її визначник відмінний від нуля, то з теореми Крамера випливає, що така система має лише нульовий розв'язок.

Ранги основної і розширеної матриць системи (1.20) завжди рівні, тому за теоремою Кронекера-Капеллі однорідна система може мати ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг її основної матриці A менший, ніж число невідомих, тобто коли $r(A)<n$.

Довільний розв'язок $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n$ системи (1.20) можна розглядати як вектор (матрицю-рядок) $(t_1; t_2; \ldots; t_n)$, тому мають зміст такі поняття, як сума двох розв'язків, добуток розв'язку на число, лінійна комбінація розв'язків.

Безпосередньою підстановкою розв'язків однорідної системи рівнянь легко переконатись у правильності наступних властивостей:

1) якщо вектор $\vec{e} = (t_1; t_2; \ldots; t_n)$ є розв'язком системи (1.20), то вектор

$$k\vec{e} = (kt_1; kt_2; \ldots; kt_n)$$

для довільного числа k також є розв'язком цієї системи;

2) якщо вектори $\overrightarrow{e_1} = (t_1; t_2; \ldots; t_n)$ і $\overrightarrow{e_2} = (p_1; p_2; \ldots; p_n)$ є розв'язками однорідної системи рівнянь, то їх сума

$$\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = (t_1 + p_1; t_2 + p_2; \ldots; t_n + p_n)$$

також є розв'язком цієї системи.

Із наведених властивостей випливає, що якщо однорідна система рівнянь має хоч один нетривіальний розв'язок, то вона має безліч нетривіальних розв'язків.

Цікавими є такі розв'язки системи (1.20), через які лінійно виражаються всі її інші розв'язки. Лінійно незалежна система розв'язків $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k}$ системи рівнянь (1.20) називається ***фундаментальною***, якщо кожний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією цих розв'язків.

Якщо ранг r системи рівнянь (1.20) дорівнює числу n невідомих, то ця система не буде мати фундаментальної системи розв'язків, бо єдиним розв'язком буде нульовий розв'язок, який складає лінійно залежну систему.

Якщо $r<n$, то система (1.20) має безліч фундаментальних систем розв'язків, причому кожна з них складається з $n-r$ розв'язків і будь-які $n-r$ лінійно незалежних розв'язків складають фундаментальну систему. У цьому випадку загальний розв'язок системи (1.20) має вигляд

$$c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + c_k\overrightarrow{e_k},$$

де $k = n - r$, $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k}$ – будь-яка фундаментальна система розв'язків, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ – довільні дійсні числа.

Можна довести, що загальний розв'язок неоднорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими можна подати у вигляді суми загального розв'язку відповідної їй системи однорідних рівнянь та будь-якого її частинного розв'язку.

§ 1.12. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та економічні задачі (модель міжгалузевої економіки)

Розглянемо задачу побудови моделі багатогалузевої економіки, розробленої у 1936 р. американським економістом В. Леонтьєвим. Цю модель часто ще називають ***балансовим аналізом***.

Мета балансового аналізу – дати відповідь на питання, яке виникає у макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути об'єм виробництва кожної із n галузей, щоб задовольнити всі потреби у продукції кожної з цих галузей? При цьому кожна галузь, з одного боку, є виробником деякої продукції, а з іншого – споживачем продукції (як своєї, так і виробленої іншими галузями).

Нехай маємо n галузей промисловості, кожна з яких виробляє певну продукцію. Частина продукції йде на внутрішні виробничі потреби даної галузі й інших галузей, а інша частина використовується у сфері особистого і суспільного споживання, тобто поза сферою матеріального виробництва.

Розглянемо процес виробництва за певний проміжок часу (наприклад, за рік). Введемо такі позначення:

x_i – валовий об'єм продукції i-ї галузі, $i = 1, 2, \ldots, n$;

x_{ij} – об'єм продукції i-ї галузі, що використовується у процесі виробництва j-ю галуззю, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

y_i – об'єм кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого використання, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Валовий об'єм продукції будь-якої галузі дорівнює сумарному об'єму продукції, який споживається галузями, і кінцевого продукту для невиробничого споживання, тобто

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(1.21)}$$

Рівняння (1.21) називають ***співвідношенням балансу***. Розглянемо вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини у формулі (1.21) мають вартісне вираження.

Коефіцієнтами прямих витрат назвемо числа

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

які характеризують витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі.

Вважатимемо, що на проміжку часу, який ми розглядаємо, коефіцієнти a_{ij} є сталими й залежать виключно від технології виробництва, яка склалась. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i, j = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.22)}$$

Саме тому побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу отримала назву ***лінійної***.

Враховуючи (1.22), співвідношення балансу (1.21) набере вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.23)}$$

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту невиробничого споживання, A – матриця прямих витрат, яку ще називають ***технологічною*** або ***структурною*** матрицею.

Тоді систему (1.23) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$X = AX + Y. \qquad \textbf{(1.24)}$$

Таким чином, основною задачею міжгалузевого балансу є відшукання такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці A прямих витрат забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Матричне рівняння (1.24) так:

$$(E - A)X = Y,$$

де E – одинична матриця. Якщо матриця $(E - A)$ – невироджена, то останнє рівняння можна розв'язати матричним методом за формулою

$$X = (E - A)^{-1} Y. \qquad \textbf{(1.25)}$$

Матрицю $S = (E - A)^{-1}$ називають ***матрицею повних витрат.***

З'ясуємо економічний зміст елементів матриці $S = (s_{ij})$. Задамо одиничні вектори кінцевого продукту: $Y_1 = (1;0;...;0)^T$, $Y_2 = (0;1;...;0)^T$, …, $Y_n = (0;0;...;1)^T$, де T – символ транспонування. З (1.25) одержуємо:

$$X_1 = (s_{11}; s_{21};...; s_{n1})^T, \; X_2 = (s_{12}; s_{22};...; s_{n2})^T, \; \dots, \; X_n = (s_{1n}; s_{2n};...; s_{nn})^T.$$

Отже, кожний елемент s_{ij} матриці S є величиною валового продукту i-ї галузі, необхідного для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі: $y_j = 1, \; j = 1,2,...,n.$

Із економічного змісту задачі випливає, що значення x_i повинні бути невід'ємними для невід'ємних значень y_i і a_{ij}, де $i, j = 1,2,...,n$.

Звідси випливає задача, що є новою математичною проблемою: за яких умов на коефіцієнти a_{ij} і y_i системи (1.23) існує невід'ємний розв'язок $(x_1, x_2,..., x_n)$ цієї системи?

З економічної точки зору існування такого розв'язку системи рівнянь (1.23) означає, що вона "працює", тобто модель Леонтьєва є ***продуктивною***. При цьому матрицю A називають ***продуктивною***. Одним з критеріїв продуктивності матриці A є вимога, щоб максимум сум елементів кожного з її стовпців не перевищував 1, причому принаймні хоча б для одного стовпця сума елементів була менша 1. Іншими словами, матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2,...,n$, $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, та існує номер j такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Приклад 1.17. У таблиці наведені дані про виконання балансу за звітний період в умовних грошових одиницях. Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а машинобудування – залишиться на попередньому рівні.

Галузь		Споживання		Кінцевий продукт	Валовий продукт
		Енергетика	Машинобудування		
Виробництво	Енергетика	7	21	72	100
	Машинобудування	12	15	73	100

Розв'язання. З умови задачі одержуємо, що

$$x_1 = 100,\ x_2 = 100,\ x_{11} = 7,\ x_{12} = 21,\ x_{21} = 12,\ x_{22} = 15,\ y_1 = 72,\ y_2 = 73.$$

З формули (1.22) знаходимо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = 0{,}07,\ a_{12} = 0{,}21,\ a_{21} = 0{,}12,\ a_{22} = 0{,}15.$$

Матриця прямих витрат має вигляд $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix}$. Всі елементи матриці A невід'ємні, а вона задовольняє критерію продуктивності, бо

$$\max\{0{,}07 + 0{,}12; 0{,}21 + 0{,}15\} = \max\{0{,}19; 0{,}36\} = 0{,}36 < 1.$$

Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y за формулою (1.25) можна знайти необхідний обсяг валового продукту X.

Знайдемо для цього матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$.

Оскільки

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}12 & 0{,}85 \end{pmatrix},$$

а $|E - A| = 0{,}7653 \neq 0$, то обернена матриця $(E - A)^{-1}$ має вигляд

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}.$$

За умовою задачі вектор кінцевого продукту $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix}$. Тоді вектор валового продукту X визначається так:

$$X = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}21 \\ 0{,}12 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix} 137{,}73 \\ 85{,}17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179{,}97 \\ 111{,}29 \end{pmatrix}.$$

Отже, валовий випуск у енергетичній галузі треба збільшити до 179,97, а в машинобудуванні – до 111,29 умовних грошових одиниць. ■

§ 1.13. *n*-вимірний векторний простір. Евклідів простір

n-вимірним вектором називають упорядковану сукупність n дійсних чисел, яка записується у вигляді $\vec{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$. Числа $a_1, a_2, ..., a_n$ називають ***компонентами*** вектора $\vec{a}$.

Упорядкованість сукупності чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ означає, що компоненти вектора не можна поміняти місцями, не змінюючи самого вектора. Іншими словами, два n-вимірні вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні компоненти, тобто якщо $a_i = b_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Поняття n-вимірного вектора широко використовується у економічних задачах. Наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\vec{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$, а відповідні ціни одиниці товару – вектором $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$.

Для довільних n-вимірних векторів введемо лінійні операції.

Сумою n-вимірних векторів $\vec{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; ...; b_n)$ називають n-вимірний вектор $\vec{a} + \vec{b}$, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент доданків, тобто $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; ...; a_n + b_n)$.

Добутком n-вимірного вектора $\vec{a} = (a_1; a_2; ...; a_n)$ на дійсне число k називають n-вимірний вектор $k\vec{a}$, компоненти якого дорівнюють добутку числа k на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$, тобто $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ...; ka_n)$.

Введені операції над довільними векторами мають такі властивості ($\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – довільні вектори, *k*, *l* – довільні дійсні числа):

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$;
4) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$;
5) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$;
6) існує нуль-вектор $\vec{\mathbf{0}}=(0;0;...;0)$ такий, що $\vec{a}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{a}$;
7) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
8) для довільного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$ такий, що
$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\mathbf{0}}.$$

Доведення властивостей 1-8 ґрунтується на відповідних властивостях чисел, бо операції додавання векторів і множення вектора на число зводяться до тих самих операцій над числами – компонентами векторів.

Існування для кожного вектора $\vec{a}$ протилежного йому вектора $-\vec{a}$ дає змогу ввести операцію віднімання векторів. ***Різницею*** векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ називають вектор $\vec{b}+(-\vec{a})$, який позначатимемо $\vec{b}-\vec{a}$.

Множину всіх *n*-вимірних векторів, в якій введені операції додавання векторів і множення вектора на число, називають ***n-вимірним векторним простором*** і позначають V_n.

Введемо у просторі V_n операцію скалярного множення векторів. ***Скалярним добутком*** $(\vec{a},\vec{b})$ двох *n*-вимірних векторів $\vec{a}=(a_1;a_2;...;a_n)$ і $\vec{b}=(b_1;b_2;...;b_n)$ називають число $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$.

Скалярний добуток має простий економічний зміст. Якщо $\vec{a}=(a_1;a_2;...;a_n)$ – вектор об'ємів різних товарів, а $\vec{b}=(b_1;b_2;...;b_n)$ – вектор їх цін, то скалярний добуток $(\vec{a},\vec{b})$ виражає сумарну вартість цих товарів.

Скалярний добуток має такі властивості:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$;
2) $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$;
3) $(k\vec{a},\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$ для будь-якого дійсного числа k;
4) $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$, причому $(\vec{a},\vec{a})=0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{\mathbf{0}}$.

Векторний простір, в якому означений скалярний добуток векторів, що задовольняє вказаним властивостям 1-4, називають ***евклідовим простором*** і позначають E_n.

Використовуючи поняття скалярного добутку векторів, введемо тепер в евклідовому просторі E_n поняття довжини вектора та кута між векторами.

Довжиною (нормою) вектора $\vec{a}$ (позначають $|\vec{a}|$) називають невід'ємне значення квадратного кореня з його скалярного квадрату $(\vec{a},\vec{a})$, тобто

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Розглянемо деякі властивості довжини вектора:

1) $|\vec{a}| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$;

2) для будь-якого дійсного числа k $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$;

3) для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору

$$|(\vec{a},\vec{b})| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$ (***нерівність Коші-Буняковського***);

4) для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$ (***нерівність трикутника***).

Кутом між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору E_n називають число $\varphi, 0 \le \varphi \le \pi,$ яке визначається рівністю

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}}.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ простору E_n називають ***ортогональними*** (позначають $\vec{a} \perp \vec{b}$), якщо кут між ними дорівнює $\pi/2$, тобто якщо $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

§ 1.14. Вимірність і базис векторного простору. Зв'язок між базисами

Нехай $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ – вектори з n-вимірного векторного простору V_n, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – деякі дійсні числа.

Вектор

$$\vec{b} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{a_n}$$

називають ***лінійною комбінацією*** векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. При цьому кажуть, що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Наприклад, вектор $\vec{a}=(-2;2;1)$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}=(1;5;-3)$, $\overrightarrow{a_2}=(-2;-3;0)$, $\overrightarrow{a_3}=(-2;-1;-7)$ з коефіцієнтами 2, 3, –1, бо, як легко переконатись, $\vec{a}=2\overrightarrow{a_1}+3\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_3}$.

З поняттям лінійної комбінації пов'язане поняття лінійної залежності векторів. Вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ векторного простору V_n називають ***лінійно залежними***, якщо існують такі дійсні числа $k_1,k_2,...,k_n$, одночасно не рівні нулю, що

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+...+k_n\overrightarrow{a_n}=\vec{\mathbf{0}}.$$

Якщо ця рівність справджується тільки тоді, коли $k_1=k_2=...=k_n=0$, то вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ називаються ***лінійно незалежними***.

Теорема 1. *Вектори $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.*

Лінійний простір V_n називають n-вимірним, якщо у ньому є n лінійно незалежних векторів, а будь-які $(n+1)$ векторів лінійно залежні. Іншими словами, вимірність простору – це максимальна кількість лінійно незалежних векторів, що містяться у ньому.

Будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного лінійного простору V_n називають його ***базисом***.

Теорема 2. *Будь-який вектор $\vec{x}$ з V_n єдиним способом може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів базису.*

Доведення. Нехай $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$ – базис лінійного простору V_n. Тоді існують такі числа $k_1,k_2,...,k_n,k$, одночасно не рівні нулю, що для довільного вектора $\vec{x}$

$$k_1\overrightarrow{e_1}+k_2\overrightarrow{e_2}+...+k_n\overrightarrow{e_n}+k\vec{x}=\vec{\mathbf{0}}. \tag{1.26}$$

При цьому $k\neq 0$, бо інакше $k_1\overrightarrow{e_1}+k_2\overrightarrow{e_2}+...+k_n\overrightarrow{e_n}=\vec{\mathbf{0}}$ і, враховуючи, що хоч одне з чисел k_i відмінне від нуля, вектори $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$ були б лінійно залежні.

Із (1.26) знаходимо, що

$$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+...+x_n\overrightarrow{e_n}, \tag{1.27}$$

де $x_i=-\dfrac{k_i}{k}$, $i=1,2,...,n.$

Припустимо тепер, що вектор $\vec{x}$ можна виразити через вектори базису $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}$ іншим способом, а саме

$$\vec{x} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + ... + y_n\vec{e_n}. \qquad \textbf{(1.28)}$$

Тоді, віднімаючи почленно від (1.28) рівність (1.27), одержимо, що

$$(y_1 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - x_2)\vec{e_2} + ... + (y_n - x_n)\vec{e_n} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Оскільки вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ лінійно незалежні, то $y_1 - x_1 = 0,\ y_2 - x_2 = 0, ...,$ $y_n - x_n = 0$, тобто $y_1 = x_1, y_2 = x_2, ..., y_n = x_n$. Теорему доведено. ■

Рівність (1.27) називають ***розкладом вектора*** $\vec{x}$ ***за базисом*** $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – ***координатами вектора*** $\vec{x}$ у цьому базисі.

Приклад 1.18. Написати розклад вектора $\vec{x} = (2;5;0)$ у базисі $\vec{e_1} = (1;2;-1)$, $\vec{e_2} = (3;6;1)$, $\vec{e_3} = (3;9;3)$.

Розв'язання. Підставляючи координати базисних векторів у рівність (1.28), одержимо матричне рівняння

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix},$$

яке рівносильне системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1/3$. Таким чином, в базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ вектор $\vec{x}$ розкладається наступним чином: $\vec{x} = \vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_3}$. ■

Важливе значення має наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо* $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ *– лінійно незалежні вектори простору* V_n *і будь-який вектор* $\vec{a}$ *цього простору єдиним способом лінійно виражається через вектори* $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$, *то простір* V_n *є n-вимірним, а сукупність векторів* $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ *– його базисом.*

Вище зазначалось, що у n-вимірному просторі V_n кожен базис складається з n векторів. Цілком природно виникає питання: скільки різних базисів можна знайти в V_n і як ці базиси пов'язані між собою? З'ясуємо це.

Нехай у просторі V_n маємо два базиси: старий $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ і новий $\vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, ..., \vec{e_n^*}$. Кожний вектор нового базису, як і будь-який вектор простору V_n, однозначно виражається через вектори старого базису:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1^*} &= \alpha_{11}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{12}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{1n}\overrightarrow{e_n},\\
\overrightarrow{e_2^*} &= \alpha_{21}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{22}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{2n}\overrightarrow{e_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overrightarrow{e_n^*} &= \alpha_{n1}\overrightarrow{e_1} + \alpha_{n2}\overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_{nn}\overrightarrow{e_n}.
\end{aligned} \quad \textbf{(1.29)}$$

Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

рядками якої є коефіцієнти розкладу нових базисних векторів за старим базисом, називають ***матрицею переходу*** від старого базису до нового.

Матриця A невироджена, бо інакше її рядки, а отже, і базисні вектори були б лінійно залежні. Легко бачити, що зворотній перехід від нового до старого базису здійснюється за допомогою оберненої матриці A^{-1}.

З'ясуємо тепер, як пов'язані між собою координати одного й того ж вектора простору V_n у двох різних базисах. Нехай довільний вектор $\vec{x}$ простору V_n у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ має координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а у базисі $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \ldots, \overrightarrow{e_n^*}$ – координати $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, тобто

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n},$$
$$\vec{x} = x_1^*\overrightarrow{e_1^*} + x_2^*\overrightarrow{e_2^*} + \ldots + x_n^*\overrightarrow{e_n^*}.$$

Підставивши в другу з цих рівностей замість векторів $\overrightarrow{e_1^*}, \overrightarrow{e_2^*}, \ldots, \overrightarrow{e_n^*}$ їх вирази через $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$, із співвідношень (1.29) одержимо:

$$\begin{cases}
x_1 = \alpha_{11}x_1^* + \alpha_{21}x_2^* + \ldots + \alpha_{n1}x_n^*,\\
x_2 = \alpha_{12}x_1^* + \alpha_{22}x_2^* + \ldots + \alpha_{n2}x_n^*,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n = \alpha_{1n}x_1^* + \alpha_{2n}x_2^* + \ldots + \alpha_{nn}x_n^*.
\end{cases}$$

Ці рівності і є шуканими формулами перетворення координат вектора при переході від одного базису до іншого. Їх, очевидно, можна записати у вигляді матричної рівності

$$X = A^T X^*,$$

де $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)^T$, $X^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)^T$, з якої випливає, що

$$X^* = (A^T)^{-1} X. \quad \textbf{(1.30)}$$

Приклад 1.19. Вектор $\vec{b}=(2;-1;3)$, заданий у базисі $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$, розкласти за базисом $\vec{a_1}=(1;1;-1),\ \vec{a_2}=(1;-1;0),\ \vec{a_3}=(-1;0;0)$.

Розв'язання. Встановимо зв'язок між двома базисами:

$$\begin{cases}\vec{a_1}=\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3},\\ \vec{a_2}=\vec{e_1}-\vec{e_2},\\ \vec{a_3}=-\vec{e_1}.\end{cases}$$

Матрицею переходу від базису $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ до базису $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ є матриця $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$. Оскільки, як легко перевірити, оберненою до матриці A є матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$, то з (1.30) знаходимо:

$$\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot3\\0\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot3\\-1\cdot2+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-7\end{pmatrix}.$$

Отже, $\vec{b}=-3\vec{a_1}-2\vec{a_2}-7\vec{a_3}$. ■

§ 1.15. Лінійні оператори

Нехай V_n і V_m – лінійні простори вимірності n і m відповідно. Якщо задане правило, за яким кожному вектору $\vec{x}$ простору V_n ставиться у відповідність єдиний вектор $\vec{y}$ простору V_m, то кажуть, що задано ***оператор* A**, який діє з V_n у V_m, і позначають $\vec{y}=\mathbf{A}(\vec{x})$. При цьому вектор $\vec{y}$ називають ***образом*** вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ – ***прообразом*** вектора $\vec{y}$. Сукупність усіх прообразів називають ***областю визначення*** оператора **A**, а сукупність усіх образів – його ***областю значень***.

Оператор **A**, що діє з V_n у V_m, називають ***лінійним***, якщо для довільних векторів $\vec{x},\vec{y}$ простору V_n та довільного дійсного числа k виконуються співвідношення:

1) $\mathbf{A}(\vec{x}+\vec{y})=\mathbf{A}(\vec{x})+\mathbf{A}(\vec{y})$ (*властивість адитивності оператора*);

2) $\mathbf{A}(k\vec{x})=k\mathbf{A}(\vec{x})$ (*властивість однорідності оператора*).

Якщо простори V_n і V_m співпадають, то кажуть, оператор **A** відображає простір V_n в себе. Надалі розглядатимемо саме такі відображення.

Нехай в V_n маємо базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$. Тоді згідно з теоремою 2 § 1.14 довільний вектор $\vec{x}$ простору V_n можна однозначно розкласти за цим базисом у вигляді

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\,\vec{e_n}.$$

Якщо оператор **A** лінійний, то

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = x_1\mathbf{A}(\vec{e_1}) + x_2\mathbf{A}(\vec{e_2}) + ... + x_n\mathbf{A}(\vec{e_n}). \quad \mathbf{(1.31)}$$

Кожен з векторів $\mathbf{A}(\vec{e_i})$, $i = 1,...,n,$ належить простору V_n, а тому їх також можна розкласти за базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$. Нехай

$$\mathbf{A}(\vec{e_i}) = a_{1i}\vec{e_1} + a_{2i}\vec{e_2} + ... + a_{ni}\vec{e_n},\ i = 1,2,...,n. \quad \mathbf{(1.32)}$$

Підставивши (1.32) в (1.31), матимемо:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\vec{x}) &= x_1(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + ... + a_{n1}\vec{e_n}) + x_2(a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2} + ... + a_{n2}\vec{e_n}) + ... + \\ &+ x_n(a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + ... + a_{nn}\vec{e_n}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{e_1} + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{e_2} + ... + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)\vec{e_n}. \end{aligned} \quad \mathbf{(1.33)}$$

З іншого боку, вектор $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$ можна розкласти за тим самим базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ наступним чином:

$$\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x}) = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + ... + y_n\vec{e_n}. \quad \mathbf{(1.34)}$$

Оскільки розклад вектора за даним базисом єдиний, то із (1.33) і (1.34) одержуємо систему

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ .... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad \mathbf{(1.35)}$$

Отже, кожний лінійний оператор при фіксованому базисі породжує співвідношення (1.35), які встановлюють зв'язок між координатами образу і прообразу.

Матрицю $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,...,n,$ складену з коефіцієнтів цієї системи, називають ***матрицею оператора*** **A** у базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$, а ранг цієї матриці – ***рангом оператора*** $\mathbf{A}$. Таким чином, кожному лінійному оператору відповідає матриця у даному базисі, і навпаки, кожній матриці n-го порядку відповідає лінійний оператор n-вимірного простору.

Векторну рівність $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$ можна записати у вигляді матричного рівняння

$$X = AY,$$

де A – матриця лінійного оператора, $X = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$, $Y = (y_1; y_2; ...; y_n)^T$ – матриці-стовпці з координат векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ відповідно.

Дамо означення дій над лінійними операторами.

Сумою лінійних операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називають оператор $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, який визначається рівністю $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\vec{x}) = \mathbf{A}(\vec{x}) + \mathbf{B}(\vec{x})$.

Добутком лінійного оператора $\mathbf{A}$ на число k називають оператор $k\mathbf{A}$, який визначається рівністю $(k\mathbf{A})(\vec{x}) = k\mathbf{A}(\vec{x})$.

Нульовим оператором називають оператор, який переводить всі вектори простору V_n у нуль-вектор і позначається символом $\mathbf{O}$, тобто $\mathbf{O}(\vec{x}) = \vec{0}$. ***Тотожній*** оператор $\mathbf{E}$ означимо як такий, що $\mathbf{E}(\vec{x}) = \vec{x}$, де $\vec{x}$ – довільний вектор простору V_n.

Для кожного оператора $\mathbf{A}$ означимо ***протилежний*** оператор $-\mathbf{A}$ за допомогою співвідношення $-\mathbf{A} = (-1)\cdot\mathbf{A}$.

Добутком лінійних операторів **A** і **B** називають оператор **AB**, який діє за правилом $(\mathbf{AB})(\vec{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\vec{x}))$.

Можна довести, що оператори **A**+**B**, k**A** і **AB** є лінійними, якщо лінійними є оператори **A** і **B**.

Залежність між матрицями одного і того ж оператора у двох різних базисах виражає наступне твердження.

Теорема. *Матриці A і A^* лінійного оператора* **A** *у базисах $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ і $\vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, ..., \vec{e_n^*}$ пов'язані співвідношенням*

$$A^* = C^{-1}AC, \tag{1.36}$$

де C – матриця переходу від першого базису до другого.

Приклад 1.20. У базисі $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ оператор **A** заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A^* оператора **A** у базисі

$$\vec{e_1^*} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}, \quad \vec{e_2^*} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 3\vec{e_3}, \quad \vec{e_3^*} = \vec{e_1} + \vec{e_3}.$$

Розв'язання. Матрицею переходу від базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ до базису $\vec{e_1^*}, \vec{e_2^*}, \vec{e_3^*}$ є матриця $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Оскільки, як легко переконатися, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, то з формули (1.36) одержуємо:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконавши множення матриць, знаходимо, що $A^* = \begin{pmatrix} -13 & -45 & -27 \\ -12 & -25 & -18 \\ 42 & 105 & 68 \end{pmatrix}$. ■

§ 1.16. Власні вектори та власні значення лінійного оператора

Нехай лінійний оператор **A** діє у просторі V_n. Це означає, що кожному вектору $\vec{x} \in V_n$ ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{y} = \mathbf{A}(\vec{x})$ з цього ж простору.

Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ називають ***власним вектором*** лінійного оператора **A**, якщо існує таке число λ, що

$$\mathbf{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \qquad \textbf{(1.37)}$$

Число λ називають ***власним значенням*** оператора **A** (матриці A), що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

З означення власного вектора випливає, що він під дією оператора **A** переходить у колінеарний йому вектор, тобто просто множиться на деяке число, тоді як у загальному випадку перетворення складніші.

Рівність (1.37) можна записати у матричній формі

$$AX = \lambda X,$$

де X – матриця-стовпець з координат вектора $\vec{x}$, або у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Ця система зводиться до однорідної системи

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(1.38)}$$

яка у матричній формі має вигляд

$$(A-\lambda E)X=\mathbf{0}.$$

Однорідна система (1.38) завжди має нульовий розв'язок. Власний вектор за означенням відмінний від нуля, тому шукатимемо ненульові розв'язки системи (1.38). Для існування ненульового розв'язку необхідно і достатньо, щоб визначник основної матриці системи (1.38) дорівнював нулю, тобто щоб

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Визначник $|A-\lambda E|$ є многочленом *n*-го степеня відносно λ. Його називають ***характеристичним многочленом*** оператора **A** (матриці *A*), а рівняння $|A-\lambda E|=0$ – ***характеристичним рівнянням*** оператора **A** (матриці *A*).

Найбільш простого вигляду набуває матриця лінійного оператора **A**, який має *n* лінійно незалежних власних векторів $\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n}$ з власними значеннями $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ відповідно. Якщо власні вектори взяти за базисні, то з одного боку

$$\mathbf{A}(\vec{e_i})=a_{1i}\vec{e_1}+a_{2i}\vec{e_2}+\dots+a_{ni}\vec{e_n},$$

а з іншого –

$$\mathbf{A}(\vec{e_i})=\lambda_i\vec{e_i}.$$

Звідси випливає, що $a_{ij}=0$, якщо $i\neq j$, та $a_{ij}=\lambda_i$, якщо $i=j$. Таким чином, матриця оператора **A** у базисі , що складається з його власних векторів, є діагональною та має вигляд $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Правильне обернене твердження: якщо матриця *A* лінійного оператора є діагональною, то всі вектори цього базису є власними векторами оператора **A**.

Приклад 1.21. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора **A**, заданого матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння оператора **A**:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Далі маємо: $(1-\lambda)\lambda^2+6-6-2\lambda+2\lambda-9(1-\lambda)=0,\quad (1-\lambda)(\lambda^2-9)=0.$

Отже, власними значеннями оператора **A** є $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3.$

Система рівнянь для визначення власних векторів оператора **A** є такою:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо власний вектор $\vec{x}^{(1)}$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 1$. Для цього підставимо в цю систему $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо, наприклад, $x_3 = c_1 \neq 0$, то $x_2 = c_1$, $x_1 = -2c_1$. Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda_1 = 1$, має вигляд

$$\vec{x}^{(1)} = (-2c_1, c_1, c_1),\ c_1 \neq 0.$$

Аналогічно переконуємося, що власним вектором оператора **A** з власним значенням $\lambda_2 = 3$ є вектор $\vec{x}^{(2)} = (0, c_2, c_2)$, $c_2 \neq 0$, а $\vec{x}^{(3)} = (6/5c_3, -7/5c_3, c_3)$, $c_3 \neq 0$, – власний вектор оператора **A** з власним значенням $\lambda_3 = -3$. ■

§ 1.17. Квадратичні форми

Квадратичною формою $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називають суму, кожен доданок якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних, взятих з деяким коефіцієнтом:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \qquad \textbf{(1.39)}$$

Вважатимемо, що коефіцієнти квадратичної форми (1.39) дійсні числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$. Матрицю A складену з коефіцієнтів $a_{ij}, i, j = 1,2,...,n$, називають ***матрицею квадратичної форми***. Матриця квадратичної форми є симетричною відносно головної діагоналі.

Квадратичну форму (1.39) можна записати у матричному вигляді

$$L = X^T AX, \qquad \textbf{(1.40)}$$

де $X = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ – матриця-стовпець змінних. Дійсно,

$$L = X^T AX = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ ... \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j x_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j x_2 + ... + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Таким чином, еквівалентність формул (1.39) і (1.40) доведено.

З'ясуємо тепер, як змінюється квадратична форма при невиродженому лінійному перетворенні змінних.

Нехай матриці-стовпці змінних $X = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ і $Y = (y_1; y_2; ...; y_n)^T$ пов'язані лінійним співвідношенням $X = CY$, де $C = (c_{ij}), i, j = 1,2,..., n,$ – невироджена матриця порядку n. Тоді

$$L = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T C^T A(CY) = Y^T (C^T AC)Y ,$$

тобто при невиродженому лінійному перетворенні $X = CY$ матриця квадратичної форми набуває вигляду

$$A^* = C^T AC . \qquad \textbf{(1.41)}$$

Приклад 1.22. Дано квадратичну форму $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$. Знайти квадратичну форму, отриману з $L(x_1, x_2)$ лінійним перетворенням $x_1 = 2y_1 + 3y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, а матриця лінійного перетворення $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Отже, за формулою (1.41)

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Квадратичну форму називають ***канонічною***, якщо вона не містить попарних добутків змінних, тобто має вигляд:

$$L_1(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 . \qquad \textbf{(1.42)}$$

Деякі з коефіцієнтів a_{ii} у формулі (1.42) можуть дорівнювати нулю. Якщо квадратичні форми (1.39) і (1.42) еквівалентні, тобто одну з них можна отримати з іншої за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних, то форму (1.42) називають ***канонічним виглядом*** квадратичної форми (1.39). Очевидно, що матриця канонічної квадратичної форми є діагональною.

Теорема 1. *Будь-яку квадратичну форму за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних можна звести до канонічного вигляду.*

Приклад 1.23. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$L = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат, наприклад, біля змінної x_1:

$$L = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Тепер виділимо повний біля змінної x_3. Будемо мати:

$$L = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2 + 2x_3\left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right) + \left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x_1 + 4x_2}{2}\right)^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + \left(x_3 + \frac{3}{2}x_1 + 2x_2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x_1 + 2x_2\right)^2 .$$

Отже, невироджене лінійне перетворення змінних

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_3 + \frac{3}{2}x_1 + 2x_2, \quad y_3 = \frac{3}{2}x_1 + 2x_2$$

зводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 . \ \blacksquare$$

До канонічного вигляду квадратичну форму можна зводити різними способами, тому її канонічні вигляди можуть бути різними.

Теорема 2 (закон інерції квадратичних форм). *Кількість доданків з додатними (від'ємними) коефіцієнтами квадратичної форми не залежить від способу зведення її до канонічного вигляду.*

Квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***додатно означеною (від'ємно означеною)***, якщо для всіх значень змінних, з яких хоча б одне відмінне від нуля, виконується нерівність

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0 \quad \left(L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0\right).$$

Наприклад, квадратична форма $L_1 = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2$ – додатно означена, а форма $L_2 = -x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2^2$ – від'ємно означена.

Теорема 3. *Квадратична форма* $L = X^T AX$ *додатно означена (від'ємно означена) тоді і тільки тоді, коли всі власні значення* λ_j *матриці A додатні (від'ємні).*

Для встановлення знаковизначеності квадратичної форми користуються наступною теоремою.

Теорема 4 (критерій Сильвестра). *Квадратична форма додатно означена тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці A цієї форми додатні, тобто* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0,$ *де*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратична форма від'ємно означена тоді і тільки тоді, коли знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знаку "мінус" для головного мінора Δ_1.

Приклад 1.24. Встановити знаковизначеність квадратичної форми

$$L = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Матрицею даної квадратичної форми є матриця $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Розв'язавши характеристичне рівняння матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

знаходимо, що $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2.$ Обидва корені характеристичного рівняння додатні, тому, згідно з теоремою 2, квадратична форма L додатно означена.

Другий спосіб. Оскільки головні мінори матриці A $\Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 16$ додатні, то згідно з теоремою 3 дана квадратична форма є додатно означена. ■

§ 1.18. Лінійна модель обміну

Як приклад математичної моделі економічного процесу, що приводить до понять власного вектора і власного значення матриці, розглянемо ***лінійну модель обміну*** (модель міжнародної торгівлі).

Нехай маємо n країн $S_1, S_2, ..., S_n$, національний дохід кожної з яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i. Вважатимемо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.43)}$$

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яка отримала назву ***структурної матриці торгівлі***. З (1.43) випливає, що сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для кожної країни $S_i, i = 1,2,...,n$, виторг p_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі складає

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n .$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинен бути не менший, ніж її національний дохід, тобто

$$p_i \geq x_i, \ i = 1,2,...,n. \qquad \textbf{(1.44)}$$

Якщо вважати, що $p_i > x_i$, $i = 1,2,...,n$, то одержимо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \geq x_n, \end{cases}$$

почленно додавши всі нерівності якої, будемо мати:

$$x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + ... +$$
$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) > x_1 + x_2 + ... + x_n .$$

З урахуванням (1.43), одержимо

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > x_1 + x_2 + ... + x_n ,$$

що неможливо.

Отже, для кожного $i = 1,2,...,n$ нерівність $p_i > x_i$ неможлива, а тому умова (1.44) набере вигляду

$$p_i = x_i , \ i = 1,2,...,n .$$

Отриманий результат має зрозуміле економічне обґрунтування, адже всі країни не можуть одночасно мати прибуток.

Якщо ввести вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ національних прибутків країн, то одержимо рівняння

$$A\vec{x} = \vec{x},$$

тобто дана задача звелася до відшукання власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 1.25. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні прибутки країн для збалансованої торгівлі між ними.

Розв'язання. Знайдемо власний вектор $\vec{x}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього потрібно розв'язати матричне рівняння $(A-E)\vec{x}=\vec{0}$ або

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Його розв'язком є $x_1 = 3c/2$, $x_2 = 2c$, $x_3 = c$.

Отже, збалансована торгівля трьох країн досягається, якщо вектор національних прибутків $\vec{x}=\left(\frac{3c}{2};2c;c\right)$, тобто якщо відношення їх національних прибутків $3:4:2$. ■

РОЗДІЛ II
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія – розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, фігур тощо) вивчаються з використанням алгебраїчних методів. Основоположником аналітичної геометрії вважають французького математика та філософа Р. Декарта (1596-1650), який розробив метод координат, що є основним апаратом аналітичної геометрії. В основі цього методу лежить поняття системи координат.

§ 2.1. Прямокутні системи координат на площині та у просторі

Нагадаємо поняття числової осі та системи координат. ***Числовою віссю*** називають пряму (рис. 2.1), на якій визначено напрям, початок відліку (точка O) та відрізок, який приймають за одиницю масштабу (одиничний відрізок OE).

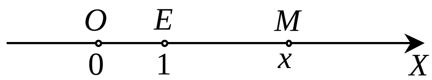


Рис. 2.1

Нехай M – довільна точка числової осі. Поставимо їй у відповідність число x, яке визначається наступним чином: 1) $|x|$ – довжина відрізка OM, виміряного за допомогою одиничного відрізка OE; 2) $x>0$, якщо точки M і E належать одному променю, і $x<0$, якщо точки M і E належать різним променям числової осі відносно точки O.

Це число x називають ***координатою*** точки M і записують так: $M(x)$.

Дві взаємно перпендикулярні числові осі з спільним початком відліку називають ***прямокутною декартовою системою координат*** (або просто ***прямокутною системою координат***) на площині (рис. 2.2).

Горизонтальну вісь називають ***віссю абсцис*** (вісь OX), а вертикальну – ***віссю ординат*** (вісь OY). Точку перетину осей координат називають ***початком координат*** (точка O). Одиниці масштабу на обох осях, як правило, вибирають однаковими.

Тепер довільній точці M площини можна поставити у відповідність два числа x і y – координати її проекцій на осі абсцис і ординат відповідно.

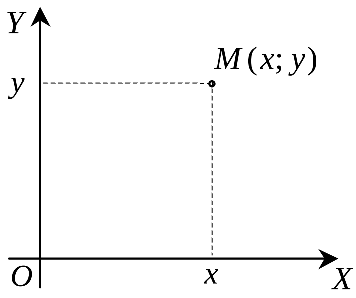


Рис. 2.2

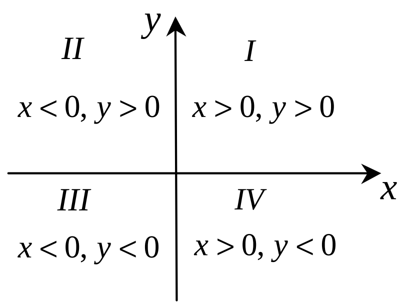


Рис. 2.3

Числа x і y однозначно визначають положення точки M на площині і називаються ***координатами*** точки; при цьому число x називається ***абсцисою***, а число y – ***ординатою*** точки M (пишуть $M(x;y)$). Початок координат має координати (0;0).

Осі координат розбивають площину на чотири частини, які називають ***координатними чвертями*** (або квадрантами). На рис. 2.3 вказані знаки координат точок в залежності від їх розташування в тій чи іншій координатній чверті (вони позначені цифрами I, II, III, IV).

Три взаємно перпендикулярні числові осі із спільним початком відліку називають ***прямокутною системою координат у просторі*** (рис. 2.4). Вісь OX називають ***віссю абсцис***, OY – ***віссю ординат***, OZ – ***віссю аплікат***.

Числа x, y та z, координати проекції точки M на осі абсцис, ординат та аплікат, однозначно визначають положення точки M у просторі і називаються ***координатами*** точки M; при цьому числа x, y та z називаються відповідно ***абсцисою***, ***ординатою*** та ***аплікатою*** точки M (записують $M(x;y;z)$).

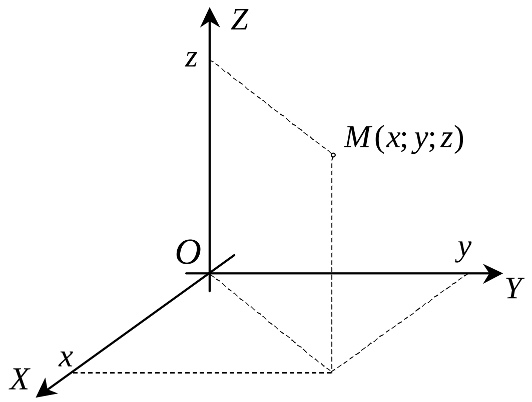


Рис. 2.4

Площини OXY, OYZ та OXZ називаються ***координатними площинами***. Вони ділять простір на 8 частин, які називаються ***октантами***.

Таким чином, введення прямокутної системи координат на площині (у просторі) дозволяє встановити однозначну відповідність між множиною всіх точок площини (простору) та множиною впорядкованих пар (трійок) чисел, що дає можливість при розв'язуванні геометричних задач застосовувати алгебраїчні методи.

§ 2.2. Перетворення прямокутних координат на площині

Як ми вже знаємо, положення точки на площині визначається двома координатами відносно деякої системи координат. Очевидно, координати точки зміняться, якщо ми виберемо іншу систему координат. Задача перетворення координат полягає в тому, щоб знаючи координати точки в одній системі координат, знайти її координати в іншій системі. Розв'язати цю задачу дозволяють формули перетворення координат.

Розглянемо такі перетворення прямокутної системи координат на площині:

1) ***паралельне переміщення*** (коли змінюється положення початку координат, а напрям осей залишається незмінним);
2) ***поворот*** (коли обидві осі повертаються на деякий кут, а початок координат не змінюється);
3) ***поворот і паралельне переміщення***.

1. Паралельне переміщення осей координат. Нехай точка M у старій системі координат OXY має координати $(x; y)$, а у новій системі координат $O'X'Y'$ – координати $(x'; y')$ (рис. 2.5).

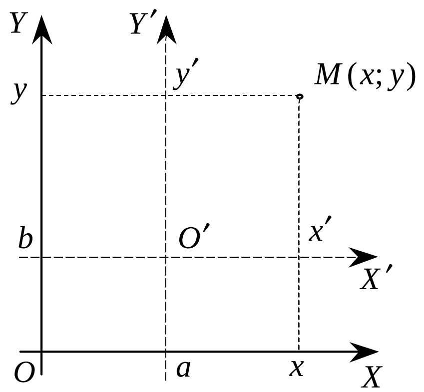


Рис. 2.5

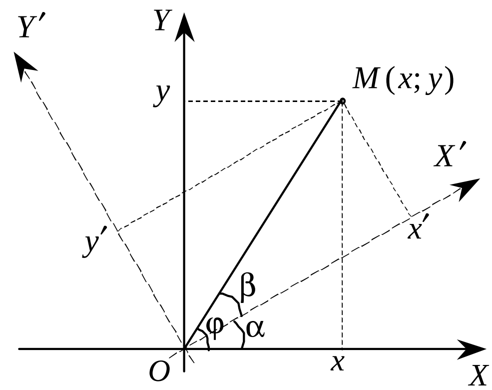


Рис 2.6

Тоді

$$x = x' + a, \ y = y' + b, \tag{2.1}$$

де $(a; b)$ – координати початку системи координат $O'X'Y'$ у системі координат OXY. Розв'язуючи (2.1) відносно x', y', одержимо

$$x' = x - a, \ y' = y - b. \tag{2.2}$$

Формули (2.2) називають *формулами перетворення координат при паралельному переміщенні осей*. Вони виражають координати точок в системі координат $O'X'Y'$ через координати точок в системі OXY.

2. Поворот осей координат. Повернемо систему координат OXY відносно точки O на кут α та одержимо нову систему координат $OX'Y'$ (рис. 2.6). З рис. 2.6 легко знаходимо, що

$$x = OM\cos\varphi,\ \ y = OM\sin\varphi,$$
$$x' = OM\cos\beta,\ \ y' = OM\sin\beta.$$

Оскільки $\varphi = \alpha + \beta$, то

$$x = OM\cos(\alpha+\beta) = OM\cos\alpha\cos\beta - OM\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

Аналогічно одержуємо, що $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. Отже,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Виражаючи з (2.3) x' і y' через x і y, одержимо

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Формули (2.4) називають *формулами перетворення координат при повороті осей*.

Приклад 2.1. У системі координат OXY точка M має координати (2;4). Знайти її координати в системі координат $OX'Y'$, яка утворюється з системи OXY поворотом на кут $\pi/2$.

Розв'язання. Згідно з формулами (2.4) маємо

$$x' = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4,$$
$$y' = -2\sin\frac{\pi}{2} + 4\cos\frac{\pi}{2} = -2.$$

Таки самий результат можна отримати геометрично, побудувавши точку M і системи координат OXY і $OX'Y'$. ■

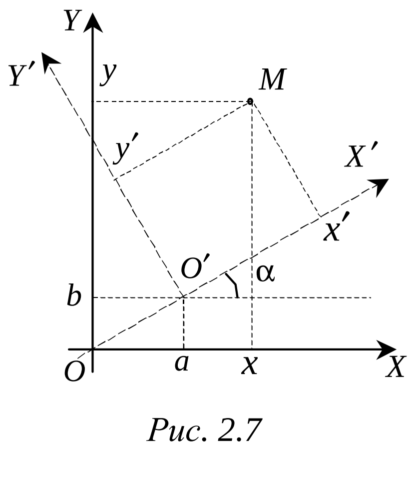


Рис. 2.7

3. Поворот і паралельне переміщення осей координат. При послідовному виконанні паралельного переміщення і повороту (рис. 2.7), використовуючи (2.1) та (2.3), приходимо до співвідношень

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Формули (2.5) містять як частинний випадок формули (2.1) (якщо $\alpha = 0$) та (2.3) (якщо $a = b = 0$).

Виражаючи з (2.5) x' і y' через x і y, остаточно одержимо

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{cases}$$

§ 2.3. Полярна система координат

Для визначення положення точки на площині, крім розглянутої прямокутної системи координат, часто застосовують ***полярну систему координат***. Вона складається з деякої точки *O*, яку називають ***полюсом***, і променя *OP* – ***полярної осі***. Крім того, вказується одиниця масштабу для виміру довжин відрізків.

Нехай задана полярна система координат і *M* – довільна точки площини (рис. 2.8). Позначимо через ρ відстань від точки *M* до точки *O*, а через φ – кут, на який потрібно повернути полярну вісь до її суміщення з променем *OM*. Зауважимо, що за додатні повороти в площині навколо точки *O* вважають повороти проти руху годинникової стрілки.

Числа ρ і φ називають ***полярними координатами*** точки *M*. При цьому число ρ вважають першою координатою і називають ***полярним радіусом***, а число φ – другою координатою і називають ***полярним кутом***.

Точка *M* з полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho,\varphi)$. Очевидно, що полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \le \rho \le +\infty$. Зазвичай вважають, що полярний кут вимірюється в таких межах: $0 \le \varphi < 2\pi$. Однак у деяких випадках розглядають кути, більші, ніж 2π, а також від'ємні кути, тобто кути, які відлічуються від полярної осі за рухом годинникової стрілки.

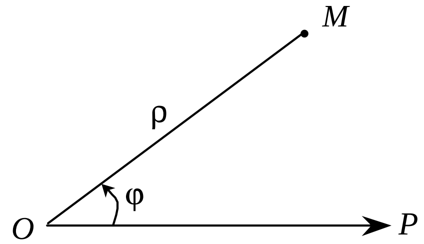


Рис. 2.8

Тепер, очевидно, кожній точці *M* площини відповідає єдина пара чисел ρ і φ (винятком є полюс, для якого $\rho = 0$, а кут φ довільний). І навпаки, кожній парі чисел ρ і φ ($\rho > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$) відповідає єдина точка площини, для якої ρ є полярним радіусом, а φ – полярним кутом.

Встановимо зв'язок між прямокутними і полярними координатами однієї й тієї ж точки. Для цього сумістимо полюс полярної системи координат з початком прямокутної системи координат, а полярну вісь – з додатним напрямком осі абсцис. Нехай точка *M* має прямокутні координати *x* і *y* та полярні координати ρ і φ (рис. 2.9).

З прямокутного трикутника OMN знаходимо:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\sin\varphi. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Формули (2.6) дозволяють знайти прямокутні координати точки, коли відомі її полярні координати.

Виражаючи полярні координати точки через прямокутні, з трикутника OMN знаходимо:

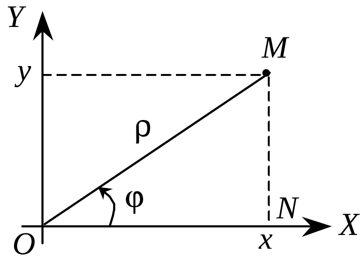


Рис. 2.9

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Формули (2.6) називають ***формулами переходу від полярних координат до декартових***, а формули (2.7) – ***формулами переходу від декартових координат до полярних***.

Зауважимо, що друга з формул (2.7) визначає два значення полярного кута φ (нагадаємо, що $0 \le \varphi < 2\pi$), які лежать в різних чвертях. З цих двох значень кута потрібно вибрати те, для якого задовольняються формули (2.6).

Приклад 2.2. Дано прямокутні координати точки *M*: *M*(2;2). Знайти її полярні координати.

Розв'язання. Згідно з формулами (2.7) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Другу з цих рівностей задовольняють кути $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ та $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. З цих двох значень вибираємо $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, бо $y = 2 > 0$ і у цьому випадку $\sin\varphi$ повинен мати додатний знак. Отже, точка *M* має такі полярні координати: $M\left(2\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$. ■

§ 2.4. Вектори та лінійні операції над ними

Величини, з якими доводиться зустрічатися в повсякденному житті, бувають двох видів. Такі з них, як-от температура, час, маса, ціна, площа тощо повністю визначаються своїм числовим значенням. З іншого боку, такі величини, як швидкість, сила, прискорення, є визначеними тільки тоді, коли крім числових значень відомий їх напрям на площині або у просторі. Величини першого виду називають ***скалярними***, а величини другого виду – ***векторними***.

Таким чином, кожну векторну величину геометрично можна зобразити у вигляді відрізка певної довжини і певного напряму, якщо довжину цього відрізка при вибраній одиниці масштабу вважатимемо рівною числовому значенню векторної величини, а напрям відрізка – таким, що співпадає з її напрямом.

Відрізок, який має певну довжину і певний напрям у просторі (тобто напрямлений відрізок), будемо називати ***вектором***.

Вектор, заданий парою точок A і B, що не співпадають, позначають $\overrightarrow{AB}$, причому у цьому записі A є початком вектора, B – його кінцем. Напрям вектора на рисунку позначають стрілкою (рис. 2.10). Якщо ж не є істотним, які саме початок і кінець вектора, позначатимемо його однією буквою, наприклад, $\vec{a}$.

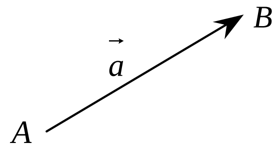


Рис. 2.10

Довжину відрізка, який зображає вектор, називають ***довжиною (модулем)*** вектора і позначають $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***колінеарними*** (пишуть $\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути однаково напрямлені або протилежно напрямлені.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називають ***нульовим*** або ***нуль-вектором*** і позначають $\vec{0}$. Нульовий вектор вважають однаково напрямленим з будь-яким вектором, а його довжина дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***рівними*** (пишуть $\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та мають рівні довжини (рис. 2.11).

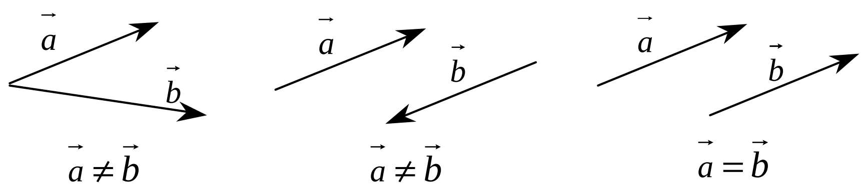


Рис. 2.11

З означення рівності векторів випливає, що якщо даний вектор перенести паралельно, то одержимо вектор, рівний початковому.

Три вектори називають ***компланарними***, якщо вони лежать в одній площині або у паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори вважають компланарними також у тому випадку, коли хоча б один з них нульовий.

Розглянемо лінійні операції над векторами. До них належать множення вектора на число, додавання й віднімання векторів.

1. Множення вектора на число. ***Добутком вектора*** $\vec{a} \neq \vec{0}$ ***на число*** $k \neq 0$ називають вектор $k\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|k||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$, та протилежний йому, якщо $k < 0$ (рис. 2.12).

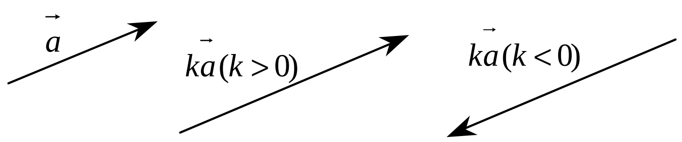


Рис. 2.12

З даного означення випливає геометричний зміст операції множення вектора на число: множення вектора $\vec{a}$ на число k приводить до розтягу вектора $\vec{a}$ в k разів, якщо $|k|>1$, і стиску, якщо $|k|<1$. Якщо ж $k<0$, то вектор $\vec{a}$ змінює напрям на протилежний. На рис. 2.12 зображений випадок $|k|>1$.

З означення множення вектора на число випливає: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує єдине число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$ і, навпаки, якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо $k=0$ або $\vec{a}=0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$. При множенні вектора $\vec{a}$ на (–1) одержуємо ***протилежний*** вектор $-\vec{a}$, який має ту ж довжину, що й вектор $\vec{a}$, але протилежний напрям.

2. Додавання векторів. ***Сумою*** $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.13). Це правило додавання векторів називається ***правилом трикутника***.

Якщо ж вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виходять з однієї точки, то їх сумою буде вектор, що виходить з цієї ж точки і співпадає з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (***правило паралелограма,*** рис. 2.14).

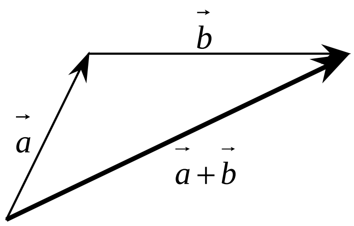


Рис. 2. 13

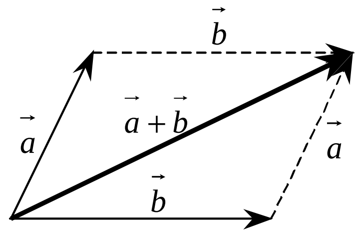


Рис. 2. 14

Для побудови суми будь-якого скінченного числа векторів, потрібно початок другого вектора помістити в кінець першого, початок третього – в кінець другого і т.д. Тоді вектор, що сполучає початок першого і кінець останнього вектора, і буде сумою даних векторів (рис. 2.15).

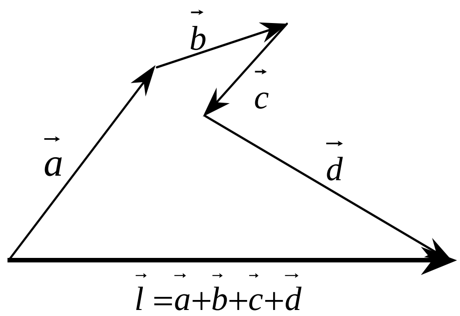


Рис. 2.15

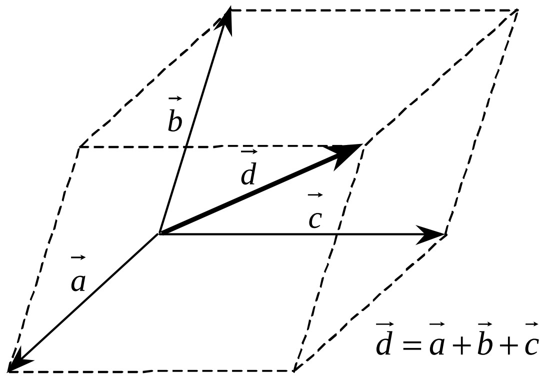


Рис. 2.16

Легко переконатися, що якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні і виходять з однієї точки, то їх сумою буде вектор, що виходить з тієї ж точки і співпадає з діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ як на ребрах (рис. 2.16).

3. Віднімання векторів. ***Різницею*** $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають суму $\vec{a}+(-\vec{b})$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають спільний початок, то різницею $\vec{a}-\vec{b}$ буде вектор, початком якого є кінець вектора $\vec{b}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{a}$ (рис. 2.17).

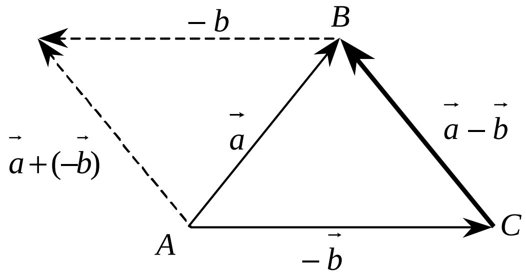


Рис. 2.17

Лінійні операції над векторами мають такі властивості ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільні вектори, k, m – дійсні числа).

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$.
4. $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$.
5. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

Наведені властивості мають фундаментальне значення, бо дають можливість виконувати над векторами звичайні алгебраїчні дії (векторні доданки можна переставляти місцями і сполучати їх у групи, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники).

§ 2.5. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Для того, щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглянемо вектори у прямокутній системі координат. Побудуємо у прямокутній системі координат OXY довільний вектор $\vec{a}$ і вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ (рис. 2.18). Тоді одержимо взаємно однозначну відповідність між точками площини і векторами.

Координатами вектора $\vec{a}$ називають координати тієї точки P, для якої $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$. На площині координатами вектора $\vec{a}$ будуть два числа x і y (рис. 2.18), у просторі – три: x, y і z (рис. 2.19). Пишуть $\vec{a} = (x; y)$ та $\vec{a} = (x; y; z)$ відповідно.

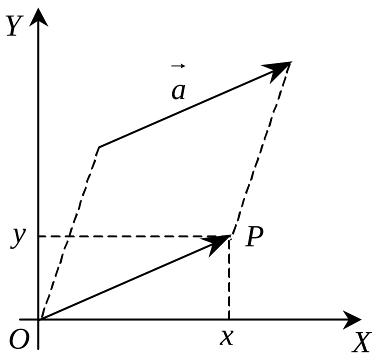


Рис. 2.18

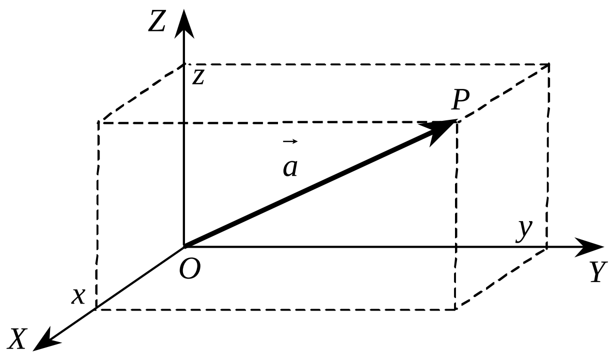


Рис. 2.19

Якщо вектори задані у прямокутній системі координат своїми координатами, то:

1) *при додаванні двох і більшого числа векторів їх однойменні координати додаються: якщо* $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, *то*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \qquad \textbf{(2.8)}$$

2) *при відніманні векторів їх однойменні координати віднімаються: якщо* $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, *то*

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2); \qquad \textbf{(2.9)}$$

3) *при множенні вектора на число кожна координата вектора множиться на це число: якщо* $\vec{a}=(x;y;z)$, *то*

$$k\vec{a}=(kx;ky;kz). \quad \textbf{(2.10)}$$

Сформулюємо ще одне твердження, в якому виражена необхідна і достатня ознака колінеарності двох векторів, заданих своїми координатами:

4) *два вектори* $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ *будуть колінеарними тоді і тільки тоді, якщо їх координати пропорційні, тобто якщо*

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Доведення. Якщо один з векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то доведення очевидне. Розглянемо випадок, коли $\vec{a}\neq\vec{0}$ і $\vec{b}\neq\vec{0}$. Нехай $\vec{a}\parallel\vec{b}$. З означення добутку вектора на число випливає, що якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує єдине число k таке, що $\vec{b}=k\vec{a}$. Тоді згідно з властивістю 3 $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$, $b_3=ka_3$, тобто координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні. Навпаки, нехай координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні, тобто $b_1=ka_1$, $b_2=ka_2$, $b_3=ka_3$. Тоді $\vec{b}=k\vec{a}$, звідки випливає, що $\vec{a}\parallel\vec{b}$. ■

З рис 2.19 легко отримати формулу для обчислення довжини вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \textbf{(2.11)}$$

тобто *довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат*. Довжина вектора $\vec{a}=(x;y)$ на площині обчислюється за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Розглянемо дві важливі задачі, результати яких використовуються при подальшому викладі.

Приклад 2.3. Нехай $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ – дві точки простору. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.20). За означенням $\overrightarrow{OA}=(x_1;y_1;z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2;y_2;z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ як різниця векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ має координати:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1). \blacksquare$$

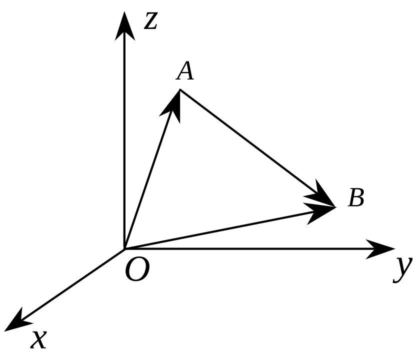


Рис. 2.20

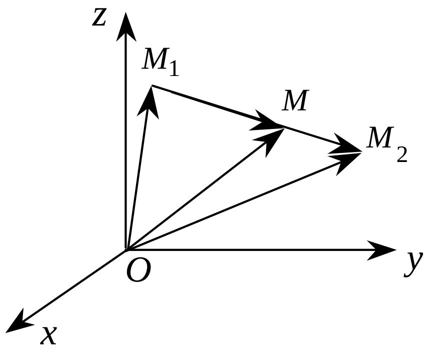


Рис. 2.21

Отже, *кожна координати вектора дорівнює різниці відповідних координат його кінця і початку.* ■

Використовуючи формулу (2.11) і результат задачі 2.3, знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Цією формулою користуються також для знаходження відстані між точками A і B.

Приклад 2.4. Нехай $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – дві точки простору, а λ – деяке дійсне число ($\lambda\neq-1$). Знайти координати точки $M(x;y;z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda=\overrightarrow{M_1M}:\overrightarrow{MM_2}$.

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM}$ (рис. 2.21). Тоді

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM},\quad \overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_2}. \qquad \textbf{(2.13)}$$

З умови задачі випливає, що $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, тому, використовуючи (2.13), будемо мати, що $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\lambda\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_2}\right)$, звідки знаходимо:

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2},\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{OM}=(x;y;z),\ \overrightarrow{OM_1}=(x_1;y_1;z_1),\ \overrightarrow{OM_2}=(x_2;y_2;z_2),$$

то з означення рівності векторів одержуємо остаточні формули

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Зокрема, середина відрізка M_1M_2 має координати ($\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.\ ■ \qquad \textbf{(2.15)}$$

Зауваження. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2, то $\lambda > 0$. У цьому випадку кажуть, що точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ внутрішнім чином. Якщо ж точка M лежить на продовженні відрізка M_1M_2, то $\lambda < 0$. У цьому випадку точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ зовнішнім чином.

Позначимо через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вектори, що за напрямом співпадають з осями Ox, Oy, Oz відповідно, а їх довжини рівні одиниці: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Такі вектори називають ***одиничними*** або ***ортами***. Трійку векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називають ***базисом***. Якщо вектор $\vec{a}$ заданий своїми координатами: $\vec{a}=(x; y; z)$, то

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad \textbf{(2.16)}$$

Формулу (2.16) називають ***розкладом вектора*** $\vec{a}$ ***за базисом*** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

§ 2.6. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульові вектори. Відкладемо від довільної точки O вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ і розглянемо промені OA і OB (рис. 2.22).

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між променями OA і OB, тобто кут AOB, якщо ці промені не співпадають. Якщо промені OA і OB співпадають, то кут між ними вважається рівним нулю. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначатимемо через φ. Оскільки два кути, сторони яких співнапрямлені, рівні (рис. 2.23), то кут між даними векторами не залежить від вибору точки O.

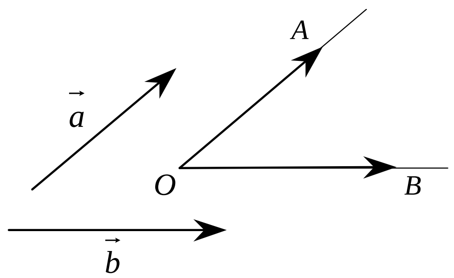


Рис. 2.22

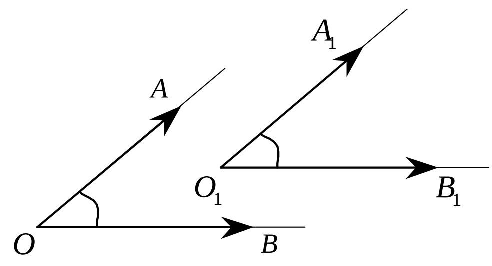


Рис. 2.23

Два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***перпендикулярними*** (позначають $\vec{a} \perp \vec{b}$), якщо $\varphi = \pi/2$. Якщо ж хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то вважають, що $\varphi = \pi/2$. Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо: $0 \le \varphi \le \pi$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають через $(\vec{a},\vec{b})$. Отже, за означенням,

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad \textbf{(2.17)}$$

Якщо хоч один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ є нуль-вектором, то за означенням $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Сформулюємо властивості скалярного добутку та доведемо деякі з них.

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$.

2. $(k\vec{a},\vec{b}) = k(\vec{a},\vec{b})$, k – число.

3. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$.

4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тобто

$$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Доведення. За означенням скалярного добутку $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$, якщо $|\vec{a}| \neq 0$, тобто якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$. Якщо ж $\vec{a} = \vec{0}$, то також, за означенням, $(\vec{a},\vec{a}) = 0$. Але у цьому випадку $|\vec{a}| = 0$ і, значить, рівність (2.18) виконується. ■

5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Доведення. За означенням скалярного добутку $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Якщо $\varphi = \pi/2$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\cos\varphi = 0$. Звідси $(\vec{a},\vec{b}) = 0$. І навпаки, якщо $(\vec{a},\vec{b}) = 0$ і $|\vec{a}||\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. ■

Доведемо наступну теорему, яка дозволяє знайти скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами.

Теорема. *Скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами* $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *виражається формулою*

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Доведення. Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ нульовий, то правдивість формули (2.19) очевидна, тому розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$. Від будь-якої точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ та розглянемо трикутник OAB. За теоремою косинусів $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\angle AOB$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то попередню рівність після перетворень можна записати так:

$$(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2\right). \qquad \textbf{(2.20)}$$

Але оскільки $\vec{b}-\vec{a}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$, то згідно з формулою (2.18)

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Згідно з цією ж формулою $|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $|\vec{b}|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$. Підставляючи ці значення у формулу (2.20), остаточно знаходимо:

$$(\vec{a},\vec{b})=\frac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2\right)=$$

$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \blacksquare$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.*

З формули (2.19) випливають два важливі наслідки.

Наслідок 1. *Два вектори* $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ *перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли*

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

Це твердження безпосередньо випливає із властивості 5 цього параграфа й формули (2.19). ■

Наслідок 2. *Косинус кута* φ *між ненульовими векторами* $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ *визначається формулою*

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Ця формула є наслідком формул (2.17), (2.11) і (2.19). ■

Приклад 2.5. Дано вектори $\vec{a}=(2;-1;3)$ і $\vec{b}=(-2;-4;1)$. Знайти: а) вектори $\vec{c}=3\vec{a}$, $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}$; б) довжини векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$; в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. а) Згідно з формулою (2.10) $\vec{c}=3\vec{a}=(3\cdot 2;3\cdot(-1);3\cdot 3)=(6;-3;9)$, а згідно з (2.9) $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}=(-2-2;-4-(-1);1-3)=(-4;-3;-2)$;

б) використовуючи формулу (2.11), знаходимо:

$$|\vec{c}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}=\sqrt{126}, \quad |\vec{d}|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{29};$$

в) згідно з (2.19) $(\vec{a},\vec{b})=2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+3\cdot 1=3$. Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходимо за формулою (2.21):

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}}=\frac{3}{7\sqrt{6}}\approx 0{,}17496.$$

Отже, $\varphi=\arccos\frac{3}{7\sqrt{6}}\approx 80^0$. ■

§ 2.7. Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (тобто до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$);

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що якщо дивитись з його кінця на площину, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ на найменший кут відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.24).

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають через $\vec{a}\times\vec{b}$.

Розглянемо основні властивості векторного добутку.

1. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, *якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні вектори.*

Доведення. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\varphi=0$, а отже, $\sin\varphi=0$. Таким чином $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$, тобто довжина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює нулю, а значить, і $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

3. $(k\vec{a}\times\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

5. *Модуль векторного добутку неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах* (рис. 2.24).

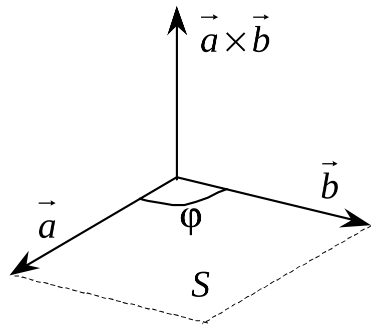


Рис. 2.24

Доведення. Як відомо з елементарної геометрії, площа паралелограма дорівнює добутку його суміжних сторін на синус кута між ними. Звідси $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, тобто $|\vec{a}\times\vec{b}|=S$. ■

Властивість 5 виражає геометричний зміст векторного добутку. Властивість 4 дає право при векторному множенні векторних многочленів виконувати дії "почленно", а властивість 3 – об'єднувати числові коефіцієнти векторних співмножників. Наприклад,

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(4\vec{c}+3\vec{d})=(2\vec{a}+3\vec{b})\times4\vec{c}+(2\vec{a}+3\vec{b})\times3\vec{d}=$$
$$=2\vec{a}\times4\vec{c}+3\vec{b}\times4\vec{c}+2\vec{a}\times3\vec{d}+3\vec{b}\times3\vec{d}=8(\vec{a}\times\vec{c})+12(\vec{b}\times\vec{c})+6(\vec{a}\times\vec{d})+9(\vec{b}\times\vec{d}).$$

Однак порядок співмножників векторного добутку є суттєвим, а тому при перестановці співмножників знак векторного добутку потрібно змінити на протилежний (властивість 2).

Згідно з означенням і властивостями 1, 3 векторного добутку для одиничних векторів (ортів) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ одержуємо такі рівності:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\mathbf{0}, & \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}, \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{j}=\mathbf{0}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, & \vec{k}\times\vec{k}=\mathbf{0}. \end{array} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Теорема. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами:*

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),$$

то їх векторний добуток визначається формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right),$$

або

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1\right). \qquad \textbf{(2.23)}$$

Доведення. Розкладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (див. (2.16)):

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}, \qquad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Використовуючи тепер властивості 3 і 4 векторного добутку, одержимо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2(\vec{i}\times\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\times\vec{j})+x_1z_2(\vec{i}\times\vec{k})+y_1x_2(\vec{j}\times\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\times\vec{j})+$$
$$+y_1z_2(\vec{j}\times\vec{k})+z_1x_2(\vec{k}\times\vec{i})+z_1y_2(\vec{k}\times\vec{j})+z_1z_2(\vec{k}\times\vec{k}).$$

Звідси з (2.22) знаходимо, що

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1)\,\vec{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\vec{k}.$$

Отримали розклад вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; коефіцієнти цього розкладу є координатами вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Теорему доведено. ■

Приклад 2.6. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;6;7)$, $C(2;4;-3)$.

Розв'язання. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(2;4;7)$, $\overrightarrow{AC}=(1;2;-3)$, то за формулою (2.23) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\alpha;\beta;\gamma)$, де $\alpha=\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-26$, $\beta=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=13$, $\gamma=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$, звідки, згідно з властивістю 5 векторного добутку, одержуємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-26)^2+13^2}=\frac{13}{2}\sqrt{5}.\ ■$$

§ 2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$.

Наведемо ***основні властивості мішаного добутку***.

1. $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a})$

2. $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c} \times \vec{b})$.

3. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a}, \vec{b})$.

4. *Модуль мішаного добутку* $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$, *віднесених до спільного початку.*

Доведення. Візьмемо три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Позначимо через V об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, через S – площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{b}$ і $\vec{c}$, а через h – висоту даного паралелепіпеда (рис. 2.25). Тоді $V = Sh$.

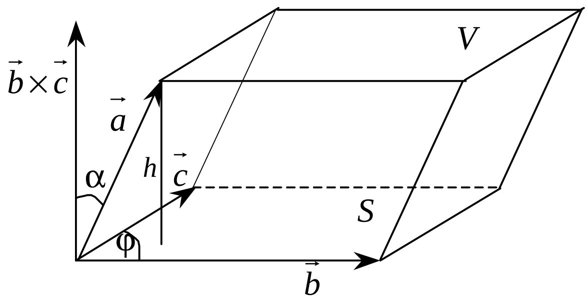


Рис. 2.25

Але оскільки $S = |\vec{b}||\vec{c}|\sin\varphi = |\vec{b} \times \vec{c}|$, $h = |\vec{a}||\cos\varphi|$ [*)], то

$$V = |\vec{b} \times \vec{c}||\vec{a}||\cos\varphi| = |(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})|. \ ■$$

Властивість 4 виражає геометричний зміст мішаного добутку.

5. *Вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

Як знайти мішаний добуток трьох векторів, заданих своїми координатами? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема. *Якщо вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *задані своїми координатами:* $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, *то мішаний добуток* $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ *визначається формулою*

$$(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(2.24)}$$

[*)] Для обчислення висоти h беремо $|\cos\varphi|$, бо кут між напрямом векторного добутку $|\vec{b} \times \vec{c}|$ і вектором $\vec{a}$ може бути й тупим.

Доведення. Згідно з формулою (2.23)

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(y_2z_3-y_3z_2,\ z_2x_3-z_3x_2,\ x_2y_3-x_3y_2\right).$$

Помноживши скалярно вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}\times\vec{c}$ (використовуючи (2.19)), одержимо формулу (2.24). ■

Формулу (2.24) можна записати також у вигляді

$$(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{(2.25)}$$

тобто *мішаний добуток трьох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює значенню визначника третього порядку, складеного з цих координат.*

Використовуючи тепер формулу (2.25) та властивість 5 цього параграфу, умову компланарності трьох векторів

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$$

можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 2.7. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(4;4;2)$, $C(3;2;-2)$, $D(4;0;2)$.

Розв'язання. Як відомо, об'єм тетраедра $ABCD$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Отже, за властивістю 4

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=(2;5;2),\ \overrightarrow{AC}=(1;3;-2),\ \overrightarrow{AD}=(2;1;2).$$

Тепер за формулою (2.25) знаходимо:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-24,$$

а тому $V=\frac{1}{6}|-24|=4$. ■

§ 2.9. Рівняння лінії на площині

Розглянемо співвідношення вигляду

$$F(x, y) = 0, \tag{2.26}$$

яке пов'язує змінні величини x і y. Рівність (2.26) будемо називати *рівнянням з двома змінними* x, y, якщо ця рівність виконується не для всіх пар чисел x і y. Приклади таких рівнянь: $4x + 5y = 0$, $x^2 + y^2 - 20 = 0$, $\cos x + \sin 2y = 1$.

Якщо рівність (2.26) виконується для всіх пар чисел x і y, то вона називається *тотожністю*. Наприклад, тотожностями є співвідношення $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $\sin^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \cos^2 x$.

Найважливішим поняттям аналітичної геометрії є поняття ***рівняння лінії***. Нехай на площині задана декартова прямокутна система координат і деяка лінія L (рис. 2.26).

Рівняння (2.26) називається ***рівнянням лінії*** L (в заданій системі координат на площині), якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії L, і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить цій лінії.

З цього означення випливає, що лінія є множиною всіх тих точок площини, координати яких задовольняють рівняння (2.26). Будемо говорити, що це рівняння визначає (або задає) лінію L.

Лінія, яка задана рівнянням (2.26) відносно певної системи координат на площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння. Отже, якщо деяка лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи ні (якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить).

Поняття рівняння лінії дає можливість розв'язувати геометричні задачі за допомогою алгебраїчних методів. Наприклад, задача знаходження точки перетину ліній, які визначаються рівняннями $x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 - 2x = 1$, зводиться до алгебраїчної задачі розв'язання системи цих рівнянь.

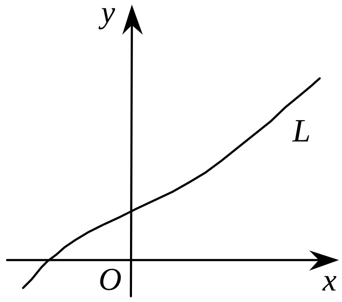


Рис. 2.26

Розглянемо приклади рівнянь ліній.

1) $x - y = 0$. Записавши це рівняння у вигляді $y = x$, робимо висновок, що множиною точок, координати яких задовольняють дане рівняння, є бісектриси I і III координатних кутів. Це і є лінія, визначена рівнянням $x - y = 0$ (рис. 2.27).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Представимо це рівняння у вигляді $(y - x)(y + x) = 0$. Тоді множиною точок, координати яких задовольняють дане рівняння, є дві прямі, які містять бісектриси чотирьох координатних кутів (рис. 2.28).

3) $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то множина точок, координати яких задовольняють дане рівняння, складається з чотирьох точок: (1;2), (–1;2), (1;2), (–1;–2).

4) $x^2 + y^2 + 3 = 0$. Оскільки для будь-яких значень x і y виконується нерівність $x^2 + y^2 + 3 \geq 3 > 0$, то немає жодної точки, координати якої задовольняють дане рівняння, тобто жодного геометричного образу на площині дане рівняння не визначає.

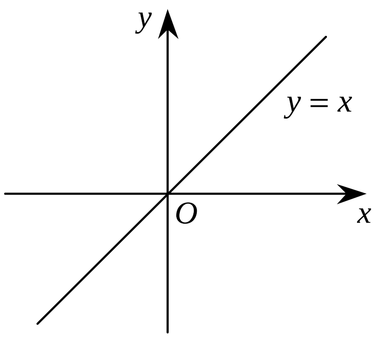


Рис. 2.27

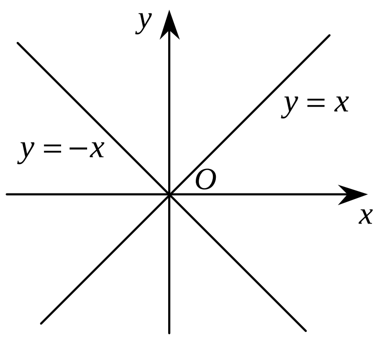


Рис. 2.28

Лінію L можна задати також за допомогою рівняння вигляду $F(\rho;\varphi) = 0$, де $(\rho;\varphi)$ – полярні координати точки.

Розглянемо приклад знаходження рівняння лінії в полярних координатах. Нехай потрібно знайти рівняння кола, що проходить через полюс, центр C якого лежить на полярній осі, а радіус рівний a. З'єднаємо відрізками прямої довільну точку M кола з полюсом і з кінцевою точкою D діаметра, що проходить через полюс (рис. 2.29). Координатами точки M будуть кут φ і

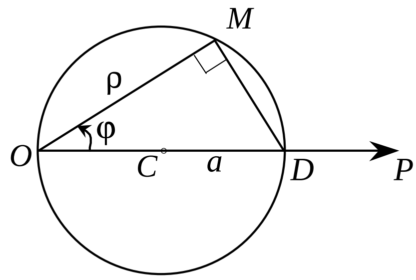


Рис. 2.29

довжина ρ відрізка OM. Тепер пригадаємо, що коло є геометричним місцем вершин прямих кутів, які спираються на його діаметр. Отже, трикутник AMD – прямокутний. Таким чином, одержуємо шукане рівняння кола: $\rho = 2a\cos\varphi$.

Розглянемо інші приклади рівнянь ліній, заданих у полярних координатах.

1) Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi$, де a – додатне число. Позначимо через M точку з полярними координатами $(\rho;\varphi)$. Якщо $\varphi = 0$, то $\rho = 0$. Якщо φ зростає, починаючи від нуля, то ρ зростає пропорційно до φ. Таким чином, точка $M(\rho;\varphi)$, виходячи з полюса, рухається навколо нього з ростом φ, одночасно віддаляючись від нього. Для побудови цієї кривої складемо таблицю відповідних пар $(\rho;\varphi)$:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	0	$a\pi/6$	$a\pi/3$	$a\pi/2$	$a\pi$	$3a\pi/2$	$2a\pi$

Відкладаючи значення ρ на відповідних променях φ, знайдемо точки шуканої кривої. З'єднуючи ці точки плавною лінією, одержимо спіраль Архімеда (рис. 2.30).

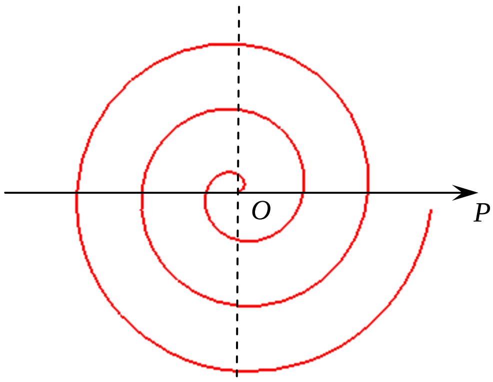


Рис. 2.30

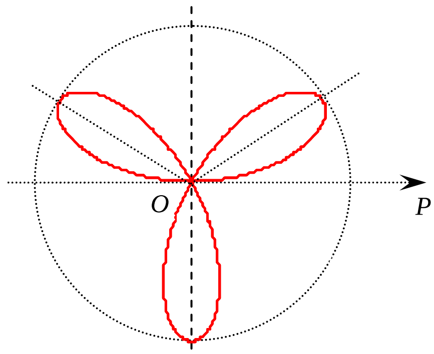


Рис. 2.31

2) Трипелюсткова троянда $\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0$. Побудувати цю криву можна по точках, де φ набуває значень від 0 до 2π (рис. 2.31). Пунктиром проведено коло радіуса a.

У деяких випадках при складанні рівняння лінії координати не пов'язують одним рівнянням, а кожну координату зокрема виражають у вигляді функції нової змінної, наприклад t. Одержують рівняння вигляду

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad \textbf{(2.27)}$$

Ці рівняння складаються так, що значення x і y, які відповідають одному й тому ж значенню t, є координатами точки, яка належить даній лінії.

Якщо параметр t змінюється, то точка на площині, взагалі кажучи, переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається ***параметричним***, а рівняння (2.27) – ***параметричними рівняннями лінії l.***

§ 2.10. Рівняння прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Їй відповідає й найпростіше рівняння – рівняння першого степеня. Щоб скласти рівняння прямої на площині, треба певним чином задати умови, які визначають її положення відносно координатних осей. Розглянемо кожен з таких можливих способів.

1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку і має заданий нормальний вектор. ***Нормальним вектором*** (або ***вектором нормалі***) прямої l називається будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний до цієї прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=(A;B)$ (рис. 2.33). Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{n}$ однозначно визначають положення прямої l на площині. Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x;y)$. Вектори $\vec{n}=(A;B)$ і $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ перпендикулярні, а тому згідно з наслідком 1 § 2.6 будемо мати:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{2.28}$$

Рівняння (2.28) називають ***рівнянням прямої, що проходить через дану точку*** $M_0(x_0;y_0)$ ***і має заданий нормальний вектор*** $\vec{n}=(A;B)$.

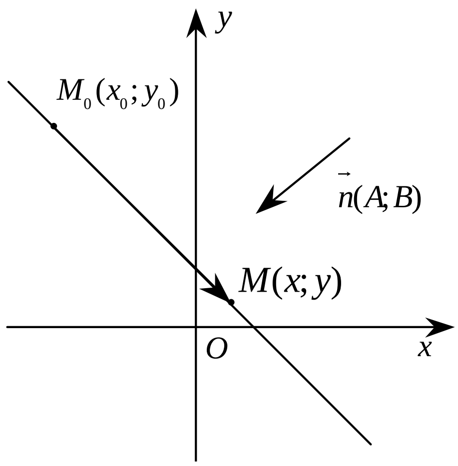


Рис. 2.33

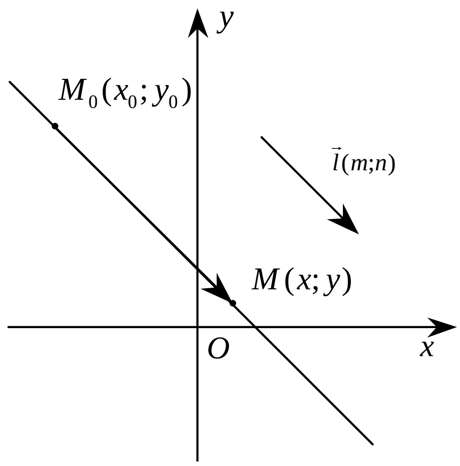


Рис. 2.34

Приклад 2.8. Написати рівняння висоти AD трикутника, заданого точками $A(-5;3)$, $B(3;7)$, $C(4;-1)$.

Розв'язання. Пряма, що містить висоту AD, проходить через вершину $A(-5;3)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(1;-8)$. Згідно з формулою (2.28) рівняння висоти AD матиме вигляд $1\cdot(x-(-5))-8\cdot(y-3)=0$, або

$$x-8y+29=0. \blacksquare$$

2. Рівняння прямої, що проходить через дану точку і має заданий напрямний вектор. ***Напрямним вектором*** прямої *l* називається будь-який ненульовий вектор, який паралельний до цієї прямої.

Нехай пряма *l* проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{l} = (m;n)$ (рис. 2.34). Очевидно, що точка M_0 і вектор $\vec{l}$ однозначно визначають положення прямої *l*. Обравши, як і в попередньому випадку "біжучу" точку $M(x;y)$, що належить прямій, з умови колінеарності векторів $\vec{l} = (m;n)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ отримуємо рівність

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{2.29}$$

Рівняння (2.29) називають ***рівнянням прямої, що проходить через дану точку*** $M_0(x_0;y_0)$ ***і має заданий напрямний вектор*** $\vec{l} = (m;n)$.

Приклад 2.9. Написати рівняння середньої лінії трапеції, заданої точками $A(2;1)$, $B(1;4)$, $C(3;6)$, $D(6;5)$.

Розв'язання. Пряма *l*, що містить середню лінію трапеції *ABCD*, проходить через точку *M* – середину сторони *AB* і має напрямний вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AD} = (4;4)$. Координати точки *M* знайдемо з формул (2.15): $M\left(3/2;5/2\right)$. Тепер з (2.29) знаходимо рівняння шуканої прямої *l*: $\frac{x - 3/2}{4} = \frac{y - 5/2}{4}$ або $x - y + 1 = 0$. ■

3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо за напрямний вектор взяти одиничний вектор, що утворює кути α і β з додатними напрямами координатних осей, тобто $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, то рівняння (2.29) матиме вигляд

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta},$$

звідки, оскільки $\beta = \pi/2 - \alpha$, одержуємо

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.30}$$

де $k = \operatorname{tg}\alpha$. Рівняння (2.30) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через дану точку*** $M_0(x_0, y_0)$.

4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нехай маємо дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, причому $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (рис. 2.35). Через точки M_1 і M_2 проходить єдина пряма *l*. Виберемо на *l* довільну точку $M(x;y)$.

З умови колінеарності векторів

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1) \text{ і } \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$$

одержуємо співвідношення

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Рівняння (2.31) називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1;y_1)$ ***і*** $M_2(x_2;y_2)$.

Якщо дані точки M_1 і M_2 лежать на прямій, яка паралельна до осі Ox ($y_2-y_1=0$) або осі Oy ($x_2-x_1=0$), то рівняння прямої l буде відповідно мати вигляд $y=y_1$ або $x=x_1$.

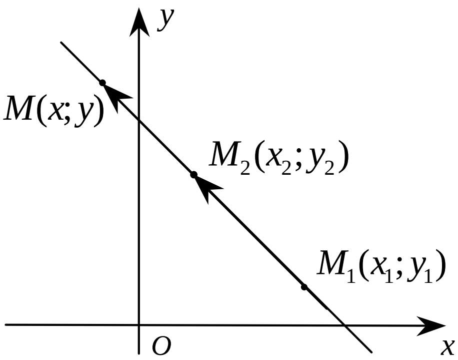


Рис. 2.35

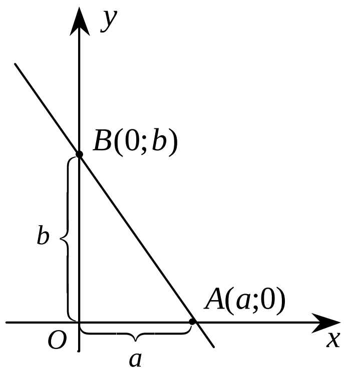


Рис 2.36

Приклад 2.10. Написати рівняння медіани *AM* трикутника *ABC*, заданого координатами своїх вершин $A(7;0)$, $B(3;6)$, $C(-1;1)$.

Розв'язання. Координати точки *M*, середини сторони *BC*, знаходимо за формулами (2.15): $M(1;7/2)$. Тепер згідно з формулою (2.31) рівняння прямої, що містить медіану *AM*, має вигляд $\dfrac{x-7}{1-7}=\dfrac{y-0}{7/2-0}$ або

$$7x+12y-49=0. \blacksquare$$

5. Рівняння прямої у відрізках на осях. Нехай задана пряма l відтинає від координатних осей відрізки довжиною $a\neq 0$ і $b\neq 0$ (рис. 2.36). Очевидно, що точками перетину прямої l з осями координат є точки $A(0,b)$ і $B(a;0)$. Складемо рівняння прямої l, яка проходить через ці дві точки. Згідно з формулою (2.31) одержуємо $\dfrac{x-0}{a-0}=\dfrac{y-b}{0-b}$ або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Рівняння (2.32) називають ***рівнянням прямої у відрізках на осях.***

6. Загальне рівняння прямої. Покажемо, що будь-яке лінійне рівняння з двома змінними x і y

$$Ax + By + C = 0, \qquad \textbf{(2.33)}$$

де коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$, є рівнянням прямої.

Якщо $A^2 + B^2 \neq 0$, то рівняння (2.33) має безліч розв'язків. Нехай $(x_0; y_0)$ – один з цих розв'язків, а тому він перетворює (2.33) в числову тотожність

$$Ax_0 + By_0 + C \equiv 0. \qquad \textbf{(2.34)}$$

Віднімаючи почленно (2.33) і (2.34), одержимо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

еквівалентне (2.33), тобто рівняння, яке характеризує одну й ту ж лінію. Але (2.33) – це рівняння прямої, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (A; B)$ (див. (2.28)). Отже, (2.33) – рівняння прямої.

Рівняння (2.33) називають ***загальним рівнянням прямої***. З нього завжди можна одержати частинні випадки прямих, які розглядались вище. Наприклад, якщо $A = 0$ (тоді $B \neq 0$), то рівняння (2.33) набере вигляду $By + C = 0$ або $y = -C/B$. Отримали рівняння вигляду $y = y_0$ – рівняння прямої, паралельної до осі Ox.

Якщо ж $B = 0$ (тоді $A \neq 0$), то $Ax + C = 0$ або $x = -C/A$. Отримали рівняння вигляду $x = x_0$ – рівняння прямої, паралельної до осі Oy (рис. 2.37).

Пропонуємо читачам самостійно довести, що ***якщо пряма l задана рівнянням (2.33), то вектор $\vec{n} = (A; B)$ є нормальним вектором цієї прямої, а вектор $\vec{l} = (-B; A)$ – її напрямним вектором.***

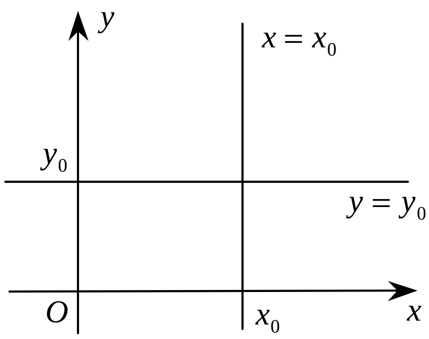


Рис. 2.37

§ 2.11. Кут між двома прямими. Дослідження взаємного розташування прямих

Виведемо формулу для знаходження кута між двома прямими. Розглянемо два випадки.

1. Нехай прямі l_1 і l_2 задані своїми загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad \textbf{(2.35)}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad \textbf{(2.36)}$$

Тоді $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ – нормальні вектори прямих l_1 і l_2 відповідно, а кут φ між цими прямими дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$. Тому з (2.21) випливає, що

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad \textbf{(2.37)}$$

2. Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1x + b_1, \qquad \textbf{(2.38)}$$

$$y = k_2x + b_2, \qquad \textbf{(2.39)}$$

де $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, причому $\alpha_1 \neq \pi/2$, $\alpha_2 \neq \pi/2$ (рис. 2.38). Кут між прямими l_1, l_2 і далі позначатимемо через φ. З геометричних міркувань легко встановлюємо залежність між кутами $\alpha_1, \alpha_2, \varphi$:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \ (\varphi = \alpha_2 - \alpha_1).$$

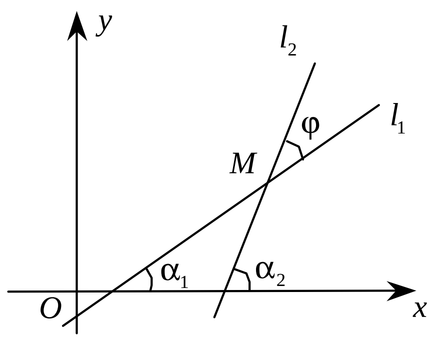


Рис. 2.38

Звідси

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1},$$

або

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad \textbf{(2.40)}$$

Формули (2.37) і (2.40) дають змогу визначити один з двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут, очевидно, дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

Приклад 2.11. Знайти кут між прямими, які задані рівняннями $y = 2x + 3$ і $y = -3x + 2$.

Розв'язання. Маємо $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. Згідно з (2.40)

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = \frac{-5}{-5} = 1,$$

а, отже, $\varphi = \mathrm{arctg}\,1 = \pi/4$. ■

Встановимо умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані у вигляді (2.35) і (2.36). Якщо вони паралельні, то нормальні вектори $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ колінеарні. Умовою колінеарності векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ є рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Прямі l_1 і l_2, зокрема, можуть співпадати. Отже, нехай рівняння (2.35) і (2.36) є рівняннями однієї й тієї ж прямої. Тоді нормальні вектори $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ теж будуть колінеарними, а отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda, \quad A_1 = \lambda A_2, \; B_1 = \lambda B_2.$$

Помножимо тепер ліву частину рівняння (2.36) на λ й віднімемо отриманий результат від лівої частини рівняння (2.35). Будемо мати: $C_1 - \lambda C_2 = 0$.

Таким чином, одержуємо, що

$$A_1 = \lambda A_2, \; B_1 = \lambda B_2, \; C_1 = \lambda C_2. \qquad \mathbf{(2.41)}$$

І навпаки, якщо виконуються умови (2.41), тоді рівняння (2.35) можна записати у вигляді $\lambda(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$, а отже, йому задовольняють координати довільної точки прямої (2.36).

Отже, щоб ***два рівняння (2.35) і (2.36) були рівняннями однієї й тієї ж прямої, необхідно і достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційні.***

Якщо прямі, задані рівнянням (2.35), (2.36) перпендикулярні, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ ортогональні. Тоді $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0$, а, отже,

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Умову паралельності двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 легко отримати безпосередньо з формули (2.40) (якщо $\varphi = 0$):

$$k_1 = k_2.$$

Якщо прямі, задані рівняннями (2.38), (2.39), перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то записавши формулу (2.40) у вигляді $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_2 k_1}{k_2 - k_1}$, знаходимо, що

$$k_2 k_1 + 1 = 0.$$

Отже, ***дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля відповідних координат пропорційні*** $\left(A_1/A_2 = B_1/B_2\right)$***, або коли кутові коефіцієнти прямих рівні між собою*** $\left(k_1 = k_2\right)$***.***

Дві прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля однойменних координат задовольняють рівність $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$***, або коли кутові коефіцієнти цих прямих обернені за величиною й протилежні за знаком*** $\left(k_2 = -1/k_1\right)$***.***

Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що:

1) пари рівнянь $6x + 10y + 3 = 0$, $3x + 5y - 53 = 0$ та $y = 2x + 3$, $y = 2x - 7$ задають паралельні прямі;

2) пари рівнянь $2x + 3y - 7 = 0$, $3x - 2y = 0$ та $y = 2x + 8$, $y = -0{,}5x + 17$ задають перпендикулярні прямі;

3) прямі $3x + y - 2 = 0$ і $6x + 2y - 4 = 0$ співпадають.

Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються, тобто мають одну спільну точку, то координати цієї точки повинні задовольняти обидва рівняння (2.35) і (2.36). Іншими словами, координати точки перетину можна знайти як розв'язок системи

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -C_1, \\ A_2 x + B_2 y = -C_2. \end{cases}$$

Оскільки прямі l_1 і l_2 не паралельні, тобто $A_1/A_2 \neq B_1/B_2$, то розв'язок цієї системи буде єдиним, бо $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$. Розв'язуючи її (наприклад, за формулами Крамера), знаходимо:

$$x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad y = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \qquad \textbf{(2.42)}$$

Формули (2.42) дають змогу знайти координати *x*, *y* точки перетину прямих l_1 і l_2, заданих рівняннями (2.35), (2.36).

При інших способах задання прямих координати точки їх перетину також шукаємо як розв'язок відповідної систем рівнянь.

§ 2.12. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма l задана рівнянням у загальному вигляді $Ax+By+C=0$ і $M_0(x_0;y_0)$ – деяка точка поза нею. Нагадаємо, що довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 до прямої l, називають ***відстанню від точки*** M_0 ***до прямої*** l (рис. 2.39). Позначимо її через $\rho(M_0,l)$. Якщо $M_0\in l$, то будемо вважати, що $\rho(M_0,l)=0$. Очевидно, що для довільної точки $M\in l$ маємо $\rho(M_0,l)\le M_0M$.

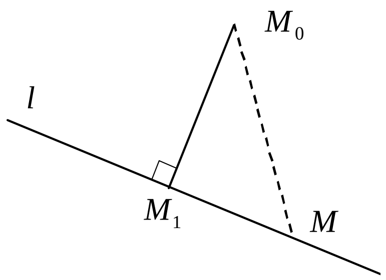


Рис. 2.39

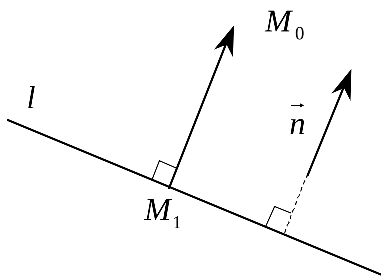


Рис. 2.40

Виведемо формулу для знаходження відстані від точки M_0 до прямої l. Нехай M_0M_1 – перпендикуляр, опущений з точки M_0 на пряму l; тоді $\rho(M_0,l)=|\overrightarrow{M_1M_0}|$ (рис. 2.40). Пряма l має нормальний вектор $\vec{n}=(A;B)$, а тому цей вектор буде колінеарний до вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$. З означення скалярного добутку векторів одержуємо, що

$$(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})=|\overrightarrow{M_1M_0}||\vec{n}|\cos\varphi=\rho(M_0,l)|\vec{n}|\cos 0=\rho(M_0,l)|\vec{n}|.$$

Таким чином,

$$\rho(M_0,l)=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})|}{|\vec{n}|}. \qquad \textbf{(2.43)}$$

Обчислимо $(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})$. Нехай $(x_1;y_1)$ – координати точки M_1, тоді $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1)$ і

$$(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-A(x_1+By_1).$$

Але оскільки $M_1\in l$, то $Ax_1+By_1+C=0$. Таким чином,

$$(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})=Ax_0+By_0+C.$$

Враховуючи, що $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$, з формули (2.43) остаточно знаходимо:

$$\rho(M_0,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad \textbf{(2.44)}$$

Приклад 2.12. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих, заданих рівняннями $3x-4y+1=0$ і $6x-8y+22=0$.

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то довжину b сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до іншої. Легко перевірити, що точка $M_0(1;1)$ належить першій прямій. З формули (2.44) знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої:

$$b=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 1+22|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{20}{10}=2.$$

Отже, площа квадрата $S=b^2=4$. ■

§ 2.13. Криві другого порядку

Кривими другого порядку називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня з двома змінними. Таке рівняння має вигляд

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

У цьому рівнянні коефіцієнти можуть набувати довільних дійсних значень за умови, що коефіцієнти A, B і C одночасно не дорівнюють нулю (інакше дане рівняння не буде рівнянням другого степеня).

Розглянемо деякі криві другого порядку.

1. Коло та його рівняння. ***Колом*** називають множину усіх точок площини, рівновіддалених від деякої заданої точки (центра кола).

Виведемо рівняння кола. Нехай центром кола є точка $M_0(x_0;y_0)$, а відстань від неї до довільної точки $M(x,y)$ кола дорівнює R (рис. 2.41). Тоді $|\overrightarrow{M_0M}|=R$. Але $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$, а тому

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R. \qquad \textbf{(2.45)}$$

Рівняння (2.45) і є шуканим рівнянням кола. Але зручніше користуватись рівнянням, яке одержимо після піднесення обох частин (2.45) до квадрату:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad \textbf{(2.46)}$$

Рівність (2.46) задовольняють координати довільної точки $M(x,y)$, що належить колу і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить йому.

Якщо центром кола є точка $O(0;0)$, то рівняння (2.46) набере вигляду

$$x^2+y^2=R^2.$$

Рівняння (2.46) називають ***канонічним рівнянням кола*** з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R. Якщо в (2.46) розкрити дужки, то одержимо ***загальне рівняння кола***

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

де

$$A = -2x_0, B = -2y_0, C = x_0^2 + y_0^2 - R^2.$$

Отже, коло – крива другого порядку.

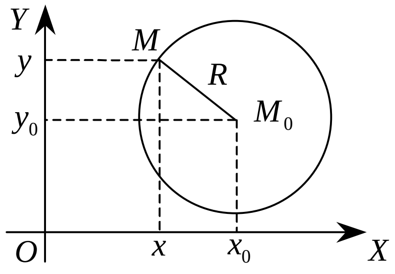


Рис. 2.41

Приклад 2.13. Знати центр та радіус кола $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.

Розв'язання. Для цього виділимо в рівнянні повні квадрати, тобто зведемо дане рівняння до канонічного вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Будемо мати:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = 3, \ (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 3 + 9 + 4,$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

З останнього рівняння випливає, що центром даного кола є точка $O(-3;2)$, а його радіус дорівнює 4. Побудувати коло пропонуємо читачам самостійно. ■

2. Еліпс та його рівняння. ***Еліпсом*** називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називають ***фокусами***, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 (фокуси еліпса) і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вони належали осі абсцис, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 2.42).

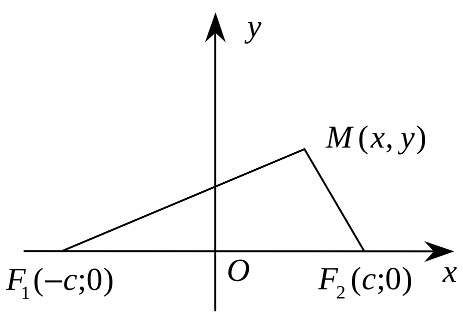


Рис. 2.42

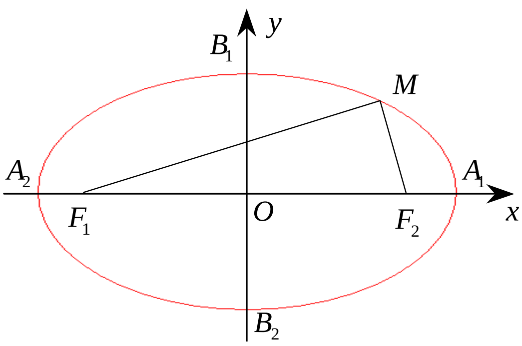


Рис. 2.43

Позначимо відстань між фокусами через 2*c*: $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів – через 2*a*. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. За означенням, $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. З означення еліпса одержуємо $MF_1 + MF_2 = 2a$. Але $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, тому будемо мати

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перенесемо другий корінь в праву частину рівняння, а потім двічі піднесемо його обидві частини до квадрату. Після нескладних перетворень одержимо, що

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $(a^2 - c^2)a^2 \neq 0$, будемо мати

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$, а тому можна позначити

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Таким чином, одержуємо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \textbf{(2.48)}$$

Рівняння (2.48) називають ***канонічним рівнянням еліпса***. Отже, еліпс – крива другого порядку.

Встановимо деякі властивості еліпса та дослідимо його форму.

Рівняння (2.48) містить тільки члени з парними степенями координат *x*, *y*, а тому, якщо точка $(x;y)$ належить еліпсу, то йому також належать точки $(-x;y)$, $(x;-y)$, $(-x;-y)$. Іншими словами, еліпс симетричний відносно осей Ox і Oy, а також відносно початку координат. Отже, для дослідження форми еліпса достатньо побудувати ту його частину, яка розташована в першій чверті.

У першій чверті $x \geq 0$, $y \geq 0$, тому з (2.48) знаходимо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \textbf{(2.50)}$$

звідки випливає, що точки $A_1(a;0)$ і $B_1(0;b)$ належать еліпсу, причому, якщо *x* збільшується від 0 до *a*, то *y* зменшується від *b* до 0. Крім того, не існує точок еліпсу, для яких $x > a$, бо вираз (2.50) має зміст лише тоді, коли $x \leq a$. Таким чином, розміщена в першій чверті частина еліпсу має форму дуги (рис. 2.43).

Відобразивши цю дугу симетрично відносно осей Ox та Oy, одержимо весь еліпс. Він вміщується в прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$. Сторони цього прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями Ox і Oy.

Еліпс перетинає осі координат у точках: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Ці точки називають ***вершинами*** еліпса.

Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, які з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ і $2b$, називають відповідно ***великою*** і ***малою віссю*** еліпса. Довжини a і b називають відповідно ***великою*** і ***малою піввіссю*** еліпса.

Якщо $a = b$, то рівняння (2.48) набере вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто матимемо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса, його можна розглядати як еліпс, фокуси якого збігаються з центром.

Введемо величину, яка характеризує відхилення еліпса від кола. ***Ексцентриситетом*** еліпса називають відношення c/a, де c – половина відстані між фокусами, a – довжина великої півосі еліпса. Ексцентриситет позначають буквою ε. Отже,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad \textbf{(2.50)}$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, бо $0 \le c < a$.

З формул (2.47) і (2.50) знаходимо

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Якщо ε наближається до одиниці, то відношення b/a зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox. Якщо ж ε наближається до нуля, то відношення b/a збільшується, тобто еліпс має більш округлу форму. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0$, то $a = b$, тобто еліпс перетворюється в коло.

Приклад 2.14. Побудувати еліпс, фокуси якого розташовані на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами 16, а ексцентриситет дорівнює 0,8.

Розв'язання. Оскільки $2c = 16$, то $c = 8$. З формул (2.50) і (2.47) знаходимо, що $a = 10$ і $b = 6$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Побудувати даний еліпс пропонуємо читачам самостійно. ■

3. Гіпербола та її рівняння. ***Гіперболою*** називають геометричне місце всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок, які називають ***фокусами***, є величина стала і менша, ніж відстань між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. За означенням, $a < c$.

Щоб вивести рівняння гіперболи, розмістимо прямокутну систему координат так, щоб фокуси гіперболи належали осі абсцис, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 2.42). Тоді точка $M(x;y)$ площини належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли $|MF_1 - MF_2| = 2a$, або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Виконавши аналогічні перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{(2.51)}$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad \textbf{(2.52)}$$

Отже, гіпербола є лінією другого порядку.

Встановимо деякі властивості гіперболи та дослідимо її форму.

Гіпербола симетрична відносно осей координат та початку координат. Для частини гіперболи, яка лежить у першій чверті, з (2.51) знаходимо:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

а тому, очевидно, $x \geq a$.

Точка $A_1(a;0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю Ox. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується.

Можна показати, що, що віддаляючись у нескінченність, довільна точка $M(x;y)$ гіперболи необмежено наближається до прямої $y = \frac{b}{a}x$, яка називається ***асимптотою*** гіперболи.

Таким чином, частина гіперболи, розміщена у першій чверті, має вигляд дуги, яка показана на рис. 2.44. Відобразивши її симетрично відносно координатних осей, отримаємо вигляд усієї гіперболи (рис. 2.45).

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) та має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називають ***осями*** гіперболи, а точку перетину осей – її ***центром***. Вісь Ox перетинає гіперболу у двох точках $A_1(a;0)$ і $A_1(-a;0)$, які називають ***вершинами*** гіперболи. Цю вісь називають ***дійсною віссю*** гіперболи, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою – ***уявною віссю***. Дійсною віссю називають також відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи, та його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки $B_1(0;b)$ і $B_2(0;-b)$, а також його довжину, називають ***уявною віссю***. Величини a і b відповідно називають ***дійсною*** та ***уявною півосями*** гіперболи. Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називають ***основним прямокутником*** гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad \textbf{(2.53)}$$

також визначає гіперболу, яка називається ***спряженою*** до гіперболи (2.51).

Будуючи гіперболу, доцільно спочатку побудувати основний прямокутник гіперболи (рис. 2.45), провести прямі, які проходять через його протилежні вершини – асимптоти гіперболи, і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи. Гіпербола (2.53) зображена на рис. 2.45 штриховою лінією.

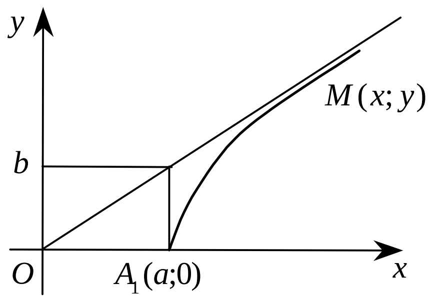


Рис. 2.44

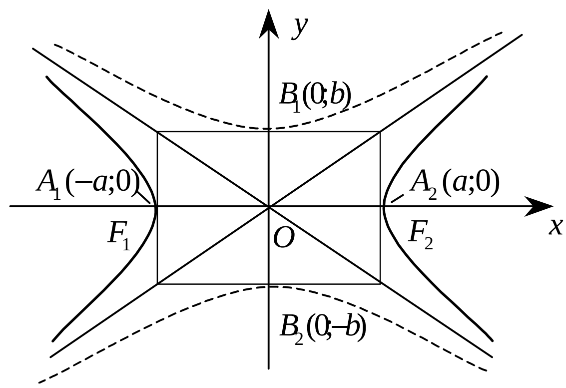


Рис. 2.45

Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається ***рівносторонньою***, а її канонічне рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$.

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення c/a, де c – половина відстані між фокусами, a – довжина її дійсної півосі. Отже,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad \textbf{(2.54)}$$

причому $\varepsilon > 1$, бо $c > a$.

Крім того, з формул (2.52) і (2.54) випливає, що $b/a = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення b/a, тобто тим більше основний прямокутник розтягується вздовж осі Oy, а гіпербола відхиляється від осі Ox; чим ближче ексцентриситет гіперболи до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується вздовж осі Ox, а гіпербола наближається до цієї осі.

Приклад 2.15. Встановити, що рівняння $6x^2-9y^2-36x-72y-141=0$ визначає гіперболу. Знайти її центр, півосі та ексцентриситет.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати біля x та y:

$$6(x^2-6x)-9(y^2+8y)-141=0, \quad 6(x-3)^2-54-9(y+4)^2+144-141=0,$$

$$6(x-3)^2-9(y+4)^2=51, \quad \frac{(x-3)^2}{51/6}-\frac{(y+4)^2}{51/9}=1,$$

$$\frac{(x-3)^2}{17/2}-\frac{(y+4)^2}{17/3}=1.$$

Врахувавши формули паралельного перенесення, робимо висновок, що задане рівняння визначає гіперболу з центром у точці $O_1(3;-4)$ і півосями $a=\sqrt{17/2}$, $b=\sqrt{17/3}$. З формули (2.52) знаходимо $c=\sqrt{85/6}$, а тому з (2.54) одержуємо, що $\varepsilon=\sqrt{5/3}$. ■

4. Парабола та її рівняння. ***Параболою*** називається геометричне місце всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається ***фокусом***, і від даної прямої, яка називається ***директрисою***, і не проходить через фокус.

Виведемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань від фокуса до директриси дорівнює p. Побудуємо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 2.46). Тоді фокус має координати $F(p/2;0)$, а рівняння директриси має вигляд $x=-p/2$.

Довільна точка $M(x;y)$ площини буде належати параболі, якщо $MA=MF$, де MA і MF – відстані від точки M до директриси і фокуса відповідно, тобто якщо $\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=x+p/2$. Після піднесення обох частин цієї рівності до квадрата та зведення подібних доданків одержимо:

$$y^2=2px. \qquad \textbf{(2.55)}$$

Рівняння (2.55) називають ***канонічним рівнянням параболи***. Отже, парабола є лінією другого порядку.

Дослідимо форму параболи. Оскільки рівняння (2.55) містить змінну y у парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox. Тому розглянемо лише ту частину параболи, яка лежить у верхній півплощині ($y \ge 0$). Для цієї частини параболи

$$y = \sqrt{2px}. \qquad \textbf{(2.56)}$$

З рівності (2.56) випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy, тому при $x < 0$ вираз (2.56) не має змісту. Очевидно, також, що парабола проходить через початок координат. Із зростанням x значення y також зростає. Отже, довільна точка $M(x;y)$ параболи, виходячи з початку координат із зростанням x, рухається по ній вправо і вверх.

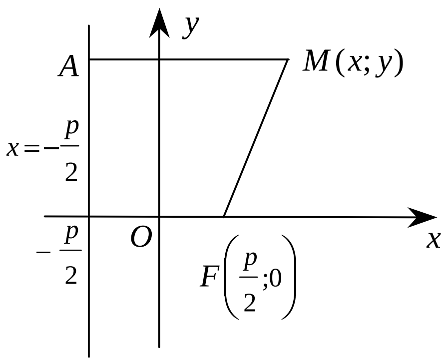


Рис. 2.46

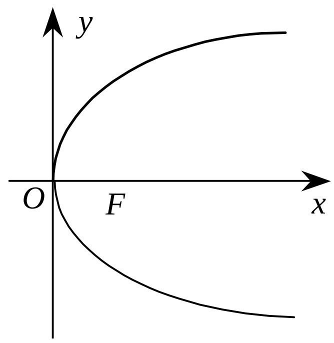


Рис. 2.47

Виконавши симетрію розглянутою частини параболи відносно осі Ox, матимемо всю параболу (рис. 2.47).

Вісь симетрії параболи називається її ***віссю***, а точка перетину осі з параболою – ***вершиною*** параболи. Віссю параболи, заданої рівнянням (2.55), є вісь Ox, а вершиною – точка $O(0;0)$.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, де $p > 0$, визначають параболи, зображені на рис. 2.48.

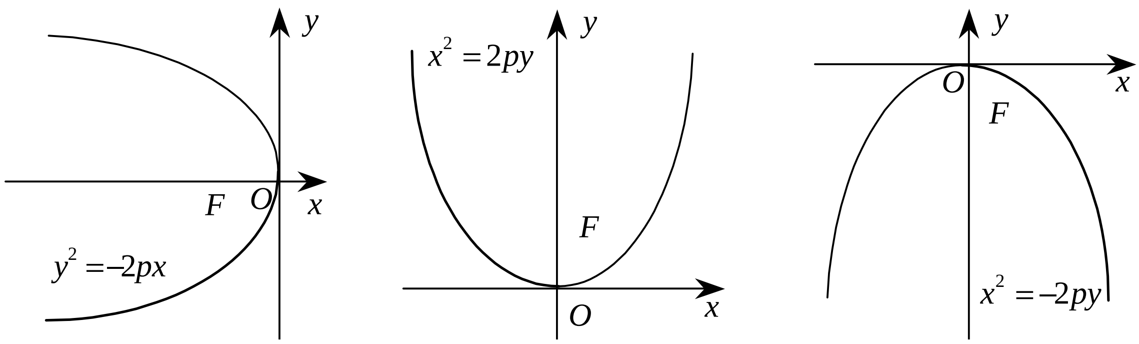


Рис. 2.48

§ 2.14. Рівняння поверхні і лінії в просторі

Співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \textbf{(2.57)}$$

називають ***рівнянням з трьома змінними*** *x*, *y*, *z*, якщо воно виконується не для всіх трійок *x*, *y*, *z*, і тотожністю, якщо воно справджується для будь-яких значень *x*, *y* і *z*.

Припустимо, що парою значень $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (2.57) визначається єдине значення $z = z_0$. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 у заданій прямокутній системі координат $Oxyz$ визначає точку $M(x_0; y_0; z_0)$.

Сукупність усіх розв'язків *z* рівняння (2.57), які відповідають певним значенням *x* та *y*, визначає у просторі деяке геометричне місце точок, яке називається ***поверхнею*** (рис. 2.49), а рівняння (2.57) – ***рівнянням поверхні***.

Отже, рівняння (2.57) є рівнянням поверхні у заданій системі координат, якщо це рівняння задовольняють координати *x*, *y*, *z* будь-якої точки даної поверхні і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

Поверхню у просторі за аналогією з лінією на площині можна задати геометрично й аналітично. Якщо поверхня задана геометрично, то виникає задача про складання рівняння цієї поверхні і, навпаки, якщо поверхня задана рівнянням, то виникає задача про її геометричні властивості.

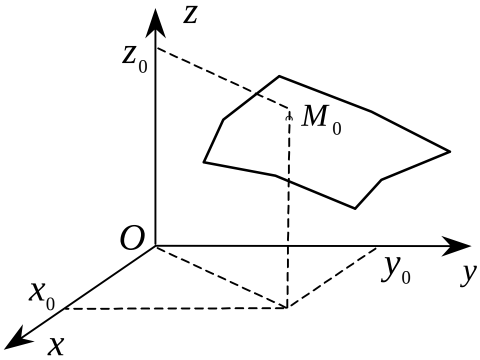


Рис. 2.49

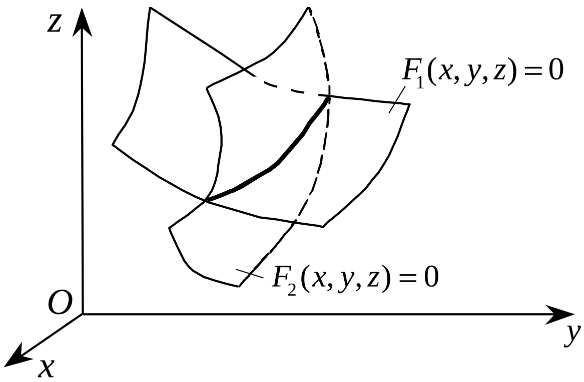


Рис. 2.50

Розглянемо приклад складання рівняння заданої поверхні.

Приклад 2.16. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $A(1;2;3)$ і $B(2;-1;4)$.

Розв'язання. Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на шуканій поверхні. Оскільки за умовою $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$, то, використовуючи формулу (2.11) відстані між двома точками, будемо мати:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

звідки після спрощень одержимо шукане рівняння $2x-6y+2z-7=0$. ■

Приклад 2.17. Скласти рівняння сфери, центром якої є точка $D(a;b;c)$, а радіус дорівнює R.

Розв'язання. Позначаючи через x, y і z – координати довільної точки M сфери, виразимо аналітичну властивість, притаманну всім точкам сфери. З означення сфери випливає, що відстань від точки M до центра D є величина стала, яка дорівнює R, тобто $MD=R$. Використовуючи тепер формулу (2.11), знаходимо:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

Після піднесення обох частин останнього рівняння до квадрату, одержимо рівняння сфери в остаточному вигляді:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad \textbf{(2.58)}$$

Зокрема, якщо центр сфери знаходиться в початку координат, то $a=b=c=0$, і рівняння (2.58) набере більш простого вигляду:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \ ■$$

Лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь, або як геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях, які перетинаються. Отже, якщо $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ – рівняння двох поверхонь, які визначають лінію (рис. 2.50), то координати точок цієї лінії задовольняють систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи сумісно визначають лінію і називаються ***рівняннями лінії у просторі***.

§ 2.15. Рівняння площини

Нехай у прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину σ точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\sigma$ і вектором $\vec{n}=(A;B;C)$, який перпендикулярний до цієї площини (рис. 2.51). Візьмемо на площині σ довільну точку $M(x;y;z)$ та знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Очевидно, що вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, а тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad \textbf{(2.59)}$$

Це і є шукане рівняння площини σ, бо його задовольняють координати *x*, *y*, *z* будь-якої точки *M*, яка належить площині σ, і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить цій площині.

Розкриваючи дужки, зведемо рівняння (2.59) до вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \textbf{(2.60)}$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Рівняння (2.59) називається ***рівнянням площини, яка проходить через точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$***, перпендикулярно до вектора*** $\vec{n} = (A; B; C)$, а рівняння (2.60) – ***загальним рівнянням площини***.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, перпендикулярний до площини, називають ***нормальним*** вектором цієї площини. Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, а їхні координати пропорційні.

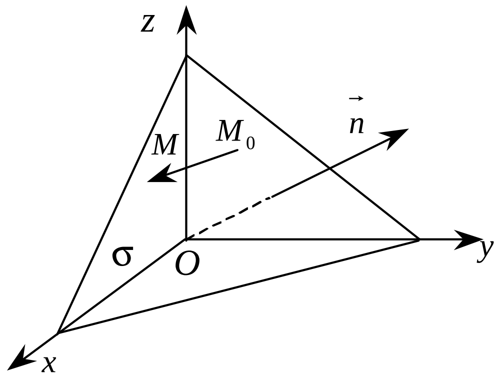


Рис. 2.51

Отже, будь-яка площина є поверхнею першого порядку, бо визначається рівнянням першого степеня. Правильним є й обернене твердження: кожне рівняння першого степеня вигляду (2.60) визначає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівнянні (2.60) $D = 0$, то воно набирає вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Як легко перевірити, це рівняння задовольняє точка $O(0;0;0)$. Отже, якщо у загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A = 0$, то рівняння (2.60) набирає вигляду $By + Cz + D = 0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox. Тому у цьому випадку одержуємо площину, яка паралельна до осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну до осі Oy, а рівняння $Ax + By + D = 0$ – площину, паралельну до осі Oz.

3. Якщо $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння (2.60) набирає вигляду $Cz + D = 0$ або $z = -D/C$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна до осей Ox та Oy, тобто площину, паралельну до площини Oxy.

Аналогічно площина $By + D = 0$ паралельна до площини Oxz, а площина $Ax + D = 0$ паралельна до площини Oyz.

4. Якщо в рівнянні (2.60) $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, якщо $D = 0$, то площина проходить через початок координат, а при $A = 0$ – паралельно до осі Ox, отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $Ax + By = 0$ – через вісь Oz.

5. Якщо $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$ або $z = 0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $x = 0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y = 0$ – з площиною Oxz.

Приклад 2.18. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;2;1)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2;2;5)$.

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (2.59):

$$2(x-1) + 2(y-2) + 5(z-1) = 0, \qquad 2x + 2y + 5z - 11 = 0. \blacksquare$$

Нехай на площині σ задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння. Для цього візьмемо на площині σ довільну точку $M(x; y; z)$ і знайдемо вектори: $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, $\overrightarrow{MM_1} = (x_1 - x; y_1 - y; z_1 - z)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Усі вони компланарні, бо лежать у площині σ. Оскільки мішаний добуток компланарний добуток компланарних векторів дорівнює нулю (див. § 2.8), то

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \textbf{(2.61)}$$

Рівняння (2.61) – ***рівняння площини, що проходить через три точки***.

Зокрема, якщо площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки довжин *a*, *b*, *c* відповідно, тобто проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$, то з (2.61) після розкриття визначника та нескладних спрощень одержимо її рівняння у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad \textbf{(2.62)}$$

Рівняння (2.62) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях***. Ним зручно користуватись при побудові площини.

Приклад 2.19. Побудувати площину $2x-3y+4z-12=0$.

Розв'язання. Рівняння площини запишемо у відрізках на осях. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 12:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1,$$

звідки знаходимо $a=6$, $b=-4$, $c=3$. Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис. 2.52). ■

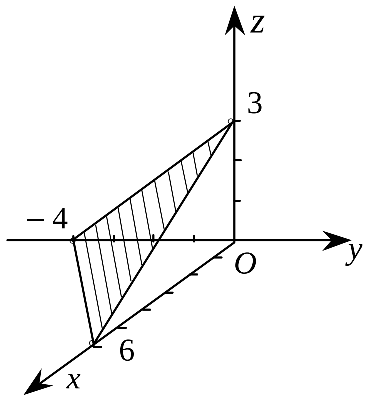


Рис. 2.52

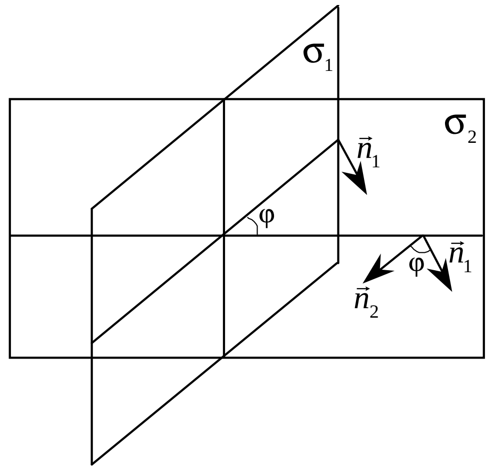


Рис. 2.53

Виведемо формулу для знаходження кута між двома площинами. Нехай задано дві площини σ_1 і σ_2 відповідно рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad \textbf{(2.63)}$$

Двогранний кут φ між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ цих площин (рис. 2.53). Із (2.21) отримуємо шукану формулу

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Якщо площини σ_1 і σ_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

є ***умовою перпендикулярності площин*** (2.63).

Якщо площини σ_1 і σ_2 паралельні, то координати їх нормальних векторів пропорційні, тобто ***умовою паралельності площин*** є рівність

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}.$$

Пропонуємо читачам самостійно довести, що площини $2x+y+3z-1=0$ і $x+y-z+7=0$ перпендикулярні, а площини $2x+y+z-4=0$ і $4x+2y+$ $+2z-1=0$ паралельні.

Якщо площина задана рівнянням (2.60) і $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка, що не належить цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.64}$$

Доведення формули (2.64) аналогічне доведенню формули (2.44).

Приклад 2.20. Знайти довжину висоту AH піраміди, заданої координатами своїх вершин: $A(-1;2;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(2;0;-1)$.

Розв'язання. Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1;2;-1)$ до площини BCD. Рівняння площини BCD знаходимо за формулою (2.61):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

звідки $3x+6y+z-5=0$. Для знаходження довжини висоти AH скористаємося формулою (2.64): $AH=\dfrac{|3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5|}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{46}}$. ■

§ 2.16. Рівняння прямої у просторі

Як зазначалось у § 2.14, лінію у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях. Зокрема, кожну пряму у просторі можна розглядати як перетин двох площин і відповідно до цього визначати заданням двох рівнянь першого степеня (рівнянь цих площин).

Нехай у просторі в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано довільну пряму l. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин σ_1 і σ_2

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{2.65}$$

нормальні вектори яких $\overrightarrow{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ і $\overrightarrow{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ не колінеарні, визначає у просторі пряму лінію.

Рівняння (2.65) називають ***загальними рівняннями прямої*** у просторі.

Для розв'язування задач рівняння (2.65) не завжди зручні, тому використовують спеціальний вигляд рівнянь прямої.

Нехай задано деяку пряму l та ненульовий вектор $\vec{s}$, який колінеарний їй. Вектор $\vec{s}$ називається ***напрямним вектором*** даної прямої. Виведемо рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має заданий напрямний вектор $\vec{s} = (m; n; p)$. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої l. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ колінеарний вектору $\vec{s}$, тобто координати вектора $\overrightarrow{M_0M}$ пропорційні координатам вектора $\vec{s}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad \textbf{(2.66)}$$

Рівняння (2.66) є шуканими і називаються ***канонічними рівняннями прямої*** у просторі.

Для того, щоб скласти канонічні рівняння (2.66) прямої l, яка задана рівняннями (2.65), потрібно знайти будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ та напрямний вектор $\vec{s} = (m; n; p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад $x = x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають з системи

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0, \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 - A_2 x_0. \end{cases}$$

Ця система матиме розв'язок, якщо $B_1/B_2 \neq C_1/C_2$. Якщо ж $B_1/B_2 = C_1/C_2$, то довільне значення в системі (2.65) надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора прямої $\vec{s}$ пригадаємо, що нормальні вектори $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ даних площин перпендикулярні до прямої l (рис.2.54), а тому за напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$, який визначається формулою

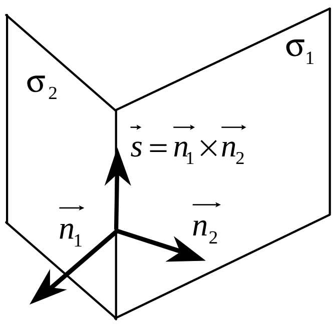


Рис. 2. 54

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \qquad \textbf{(2.67)}$$

Приклад 2.21. Знайти канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + 4z - 11 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на даній прямій. Для цього в обох рівняннях покладемо, наприклад, $x_0 = 1$ і розв'яжемо систему $\begin{cases} y_0 - 3z_0 = -1, \\ 2y_0 + 4z_0 = 8, \end{cases}$ розв'язком якої є $y_0 = 2, z_0 = 1$. Таким чином, точка $M_0(1;2;1)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор $\vec{s}$ знаходимо за формулою (2.67): $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (2;1;-3) \times (3;2;4) = (10;-17;1)$. Отже, $m = 10$, $n = -17$, $p = 1$. Підставляючи значення x_0, y_0, z_0, m, n, p у формулу (2.66), одержуємо канонічні рівняння даної прямої:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}. \blacksquare$$

Інколи пряму зручно задавати не у вигляді канонічних рівнянь (2.66), а інакше. Нехай пряма l задана рівняннями (2.66). Позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, звідки

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \qquad \textbf{(2.68)}$$

Рівності (2.68) називається ***параметричними рівняннями прямої** l*, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m; n; p)$. В рівняннях (2.68) t розглядається як довільний параметр $(-\infty < t < +\infty)$; а x, y, z – як функції від параметра t. При зміні t величини x, y, z змінюються так, що точка $M(x; y; z)$ рухається по даній прямій.

Параметричні рівняння прямої зручні у тих випадках, коли потрібно знайти точку перетину цієї прямої з площиною. Справді, нехай непаралельні площина σ і пряма l задані відповідно рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

і

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

Для визначення точки перетину прямої і площини підставимо вирази для x, y, z з рівняння прямої l в рівняння площини σ. Після нескладних перетворень одержуємо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Підставляючи знайдене значення t в рівняння прямої, знаходимо шукану точку $M(x; y; z)$ перетину прямої l площини σ.

Аналогічно до того, як було отримано формулу (2.31), можна одержати рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad \textbf{(2.69)}$$

У рівняннях (2.68) і (2.69) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m=n=p=0$ або $x_2-x_1=y_2-y_1=$ $=z_2-z_1=0$ неможливі, бо за означенням напрямний вектор ненульовий). Якщо $m=0, n\neq 0, p\neq 0,$ то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ визначає пряму, перпендикулярну до осі абсцис. Аналогічно рівняння, в яких лише $n=0$ або $p=0$, визначають прямі, перпендикулярні до осей Oy та Oz відповідно. Якщо ж $m=n=0, p\neq 0$, або $n=p=0, m\neq 0$, то рівняння (2.68) визначають прямі, паралельні відповідно осям Oz, Oy, Ox.

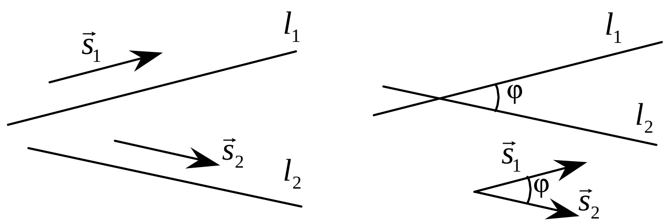


Рис. 2. 55

Виведемо формулу для знаходження кута між двома прямими у просторі. Нехай прямі l_1 і l_2 задано відповідно рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Очевидно, що кут між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту φ між їх напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$ (рис. 2.55), тому аналогічно, як у § 2.11, можна отримати:

1) ***формулу для кута між прямими*** l_1 ***і*** l_2:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}};$$

2) ***умову паралельності прямих*** l_1 ***і*** l_2***:*** $\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{p_2}{p_1}$;

3) ***умову перпендикулярності прямих*** l_1 ***і*** l_2***:*** $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$

Приклад 2.22. Знайти кут між прямими $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ 2x-y+3z+6=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=2t, \\ y=1-t, \\ z=3t-3. \end{cases}$

Розв'язання. За формулами (2.67) і (2.68) знаходимо напрямні вектори даних прямих: $\overrightarrow{s_1}=(2;-8;-4)$ і $\overrightarrow{s_2}=(2;-1;3)$. Оскільки, як легко перевірити, $(\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2})=0$, то $\varphi=90^\circ$, тобто дані прямі перпендикулярні. ■

Виведемо тепер формули для знаходження кута між прямою і площиною та встановимо умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.

Кут між прямою l і площиною σ визначається кутом між прямою l та її проекцією на σ. Нехай площина σ і пряма l задані відповідно рівняннями

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l та її проекцією l_1 на площину σ через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n}=(A;B;C)$ площини σ і напрямний вектором $\vec{s}=(m;n;p)$ прямої l – через δ (рис. 2.56). Якщо $\delta\le 90^\circ$, то $\varphi=90^\circ-\delta$, тому за формулами зведення $\sin\varphi=\cos\delta$. Якщо $\delta>90^\circ$, то $\varphi=\delta-90^\circ$ і $\sin\varphi=-\cos\delta$. Обидва випадки можна описати формулою $\sin\varphi=|\cos\delta|$. Але $\cos\delta=\dfrac{(\vec{n},\vec{s})}{|\vec{n}||\vec{s}|}$, тому кут між прямою і площиною обчислюється за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{n},\vec{s})|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

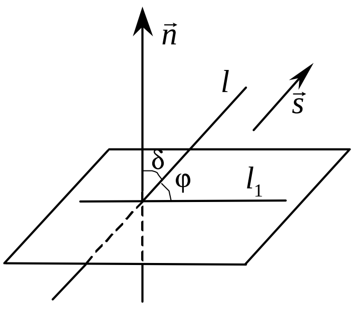


Рис. 2.56

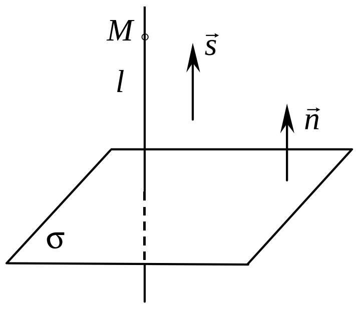


Рис. 2.57

Якщо пряма l паралельна площині σ, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $(\vec{n},\vec{s})=0$, тобто ***умовою паралельності прямої та площини*** є рівність

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Якщо пряма l перпендикулярна до площини σ, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

є ***умовою перпендикулярності прямої та площини.***

Приклад 2.23. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ та перпендикулярна до площини $2x+3y-z+8=0$.

Розв'язання. Оскільки пряма l перпендикулярна до площини σ, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини σ (рис.2.57): $\vec{s}=\vec{n}=(2;1;-1)$. Тепер згідно з формулою (2.66) одержуємо рівняння прямої l:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}. \blacksquare$$

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Задача 1. Задано матриці A і B. Знайти матриці:

1) $2A-3B$; 2) AB; 3) $\left(A^T+B\right)^2$.

1.1. $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -1\\ 6 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

1.2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -2 & 0\\ 5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 5 & 1 & 3\\ 6 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 1 & 5 & 3\\ -5 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

1.4. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 8\\ -6 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ -3 & 0 & -1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 4 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -4 & 0 & 3\\ 3 & -3 & 8\end{pmatrix}$.

1.6. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 6 & 2 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -8\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 8 & -3\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.8. $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 9\\ 0 & -5 & 3\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & 2 & -6\\ 8 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -2\\ -1 & 5 & 3\\ 0 & 7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

1.10. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 5 & 4 & 1\\ -6 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1.11. $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 7 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -4 & 3\\ -3 & 0 & 2\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$.

1.12. $A=\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 6 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

1.13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -5 & 2\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -3\\ -1 & -7 & 0\\ -3 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.15 $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1\\ 4 & -7 & 0\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & 1 & -9\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.16. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.17. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.19. $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.20. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

1.21. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.22. $A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 8 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.23. $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.24. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.25. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & -1 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

1.26. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.27. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

1.28. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

1.29. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.30. $A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Обчислити визначник даної матриці, мінори M_{12}, M_{42} та алгебраїчні доповнення A_{33}, A_{14}.

2.1. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2.3. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & -2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.6. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2.8. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2.9. $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{pmatrix}$.

2.10. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.11. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.14. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

2.15. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.16. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.17. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.18. $\begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2.19. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.20. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 8 & 1 \\ -8 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2.21. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.22. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -3 \\ -7 & -2 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

2.23. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.24. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.25. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.   2.26. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.   2.27. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -6 \\ 5 & -1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.28. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 9 & 6 \\ 5 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.   2.29. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.   2.30. $\begin{pmatrix} 7 & -9 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 9 & 5 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Знайти матрицю, обернену до заданої.

3.1. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.   3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.   3.3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.   3.5. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   3.6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.   3.8. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.   3.9. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

3.10. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.   3.11. $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.   3.12. $\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3.13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.   3.14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.   3.15. $\begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.16. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.   3.17. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.   3.18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.19. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.   3.20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   3.21. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.22. $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.   3.23. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.   3.24. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

3.25. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.26. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 3.27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.28. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$. 3.29. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.30. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти ранг матриці.

4.1. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 11 & 8 & 2 & 5 \\ -12 & -17 & -14 & -8 & -11 \end{pmatrix}$. 4.2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 6 \\ -4 & -12 & 0 & -4 & -17 \end{pmatrix}$.

4.3. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -7 & -4 \\ -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 4.4. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. 4.6. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & -7 & -4 \\ 6 & 1 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

4.7. $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -4 & -1 \\ 9 & 4 & 7 & 13 & 10 \end{pmatrix}$. 4.8. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -2 \\ 7 & 2 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$.

4.9. $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 11 & 8 & 2 & 5 \\ -3 & -8 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 4.10. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

4.11. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & 16 & 13 & 16 & 10 \end{pmatrix}$. 4.12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -9 & 8 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -8 & 9 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$. 4.14. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 18 & 15 & 2 & 12 \end{pmatrix}$.

4.15. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 25 & 22 & 9 & 19 \end{pmatrix}$. 4.16. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -8 & 5 & -10 & 9 & -25 \end{pmatrix}$.

4.17. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -12 & -5 & -20 & 6 & -35 \end{pmatrix}$. 4.18. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 13 & -2 & 24 & -17 \end{pmatrix}$.

4.19. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 9 & -2 \\ -12 & -7 & -10 & -9 & -13 \\ -9 & -2 & -17 & 9 & -32 \end{pmatrix}$.

4.20. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 12 & -3 & 23 & -18 \end{pmatrix}$.

4.21. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 11 & -4 & 22 & -19 \end{pmatrix}$.

4.22. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 & 1 & -10 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & -15 & 11 & -30 \end{pmatrix}$.

4.23. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 13 & -2 & 24 & -17 \end{pmatrix}$.

4.24. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -13 & 3 & -3 & -8 & -9 \end{pmatrix}$.

4.25. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 9 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ -11 & 5 & -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

4.26. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & 10 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4.27. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 12 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.28. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4.29. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 & -5 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -11 & 5 & -1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

4.30. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -10 & 6 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи: а) метод Крамера; б) матричний метод. Виконати перевірку правильності знайденого розв'язку.

5.1. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -7. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Задача 6. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи: а) метод Гаусса; б) метод Жордана-Гаусса. Виконати перевірку.

6.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -8. \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -9, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 17, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -2. \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = -7. \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -1, \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -1, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -12. \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1+3x_3-x_4=-2, \\ 3x_1+x_2-2x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4=4. \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-8, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-9, \\ x_1+2x_2+2x_3-6x_4=1. \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=-9, \\ 2x_1+7x_2+x_3-x_4=-4, \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=7, \\ 5x_1+x_2+4x_3+5x_4=-4. \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_4=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=5, \\ 3x_1+x_2-5x_3-3x_4=7, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=1. \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-5x_4=7, \\ x_1+2x_2-5x_3-2x_4=-8, \\ 3x_1-5x_2+x_4=-1, \\ x_1-x_2-3x_3-2x_4=0. \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=7, \\ 3x_1+2x_2+x_4=-3, \\ 3x_1-2x_2-x_4=-9. \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=5, \\ 4x_1+4x_2+x_3+7x_4=-7, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=17, \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-2, \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=4, \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=-6. \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=10, \\ x_1+3x_2-3x_3-2x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=9, \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=-9. \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3+3x_4=-5, \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4=2, \\ x_1-x_2-2x_3+x_4=-2, \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=-1. \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-8, \\ x_1-4x_2-3x_3+2x_4=-6, \\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1-5x_2-6x_3-3x_4=-10. \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2-x_3-4x_4=-3, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=8, \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+4x_4=10, \\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=-9, \\ 2x_1+3x_2-6x_3-x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-7. \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4=-6, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=-2, \\ x_1+3x_2-x_4=2, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=7. \end{cases}$

Задача 7. Дослідити сумісність системи, у випадку сумісності знайти загальний та базовий розв'язки.

7.1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10. \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

7.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

7.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

7.27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

7.29. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

Задача 8. Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею A.

8.1. $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. 8.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. 8.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8.5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 8.6. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

8.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8.8. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. 8.9. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

8.10. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 8.11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 8.12. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.13. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. 8.14. $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. 8.15. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 8.17. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 8.18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

8.19. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. 8.20. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 8.21. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.22. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8.23. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 8.24. $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8.25. $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. 8.26. $A=\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 8.27. $A=\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

8.28. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 8.29. $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. 8.30. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Точки *A*, *B*, *C* задані своїми координатами. Знайти: 1) $\vec{d} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 0{,}5\overrightarrow{AC}$; 2) $|\vec{d}|$; 3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$; 4) $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})^2$; 5) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; 6) число α таке, щоб вектор $\vec{p} = (2;\alpha;-4)$ був перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{BC}$.

9.1. $A(2;0;-5), B(1;-3;4), C(2;-5;5)$

9.2. $A(4;2;-7), B(5;0;3), C(-3;6;-2)$

9.3. $A(-1;3;4), B(2;-1;0), C(6;-2;-3)$

9.4. $A(5;0;8), B(-3;1;7), C(3;-4;-9)$

9.5. $A(2;-1;6), B(-1;3;8), C(5;-2;2)$

9.6. $A(4;2;9), B(0;-1;3), C(4;-3;4)$

9.7. $A(-9;5;3), B(7;1;-2), C(2;3;5)$

9.8. $A(5;-1;-2), B(6;0;7), C(3;-2;4)$

9.9. $A(2;-1;4), B(3;-7;-6), C(2;-3;3)$

9.10. $A(3;7;0), B(4;6;-1), C(3;2;-7)$

9.11. $A(1;-2;4), B(7;3;5), C(6;-3;-2)$

9.12. $A(3;-1;6), B(5;7;10), C(4;-2;-2)$

9.13. $A(8;3;-1), B(4;1;3), C(2;2;-4)$

9.14. $A(5;0;2), B(6;4;3), C(5;3;6)$

9.15. $A(-1;2;-1), B(2;-7;1), C(6;-2;-3)$

9.16. $A(7;9;-2), B(5;4;3), C(4;4;-1)$

9.17. $A(3;7;0), B(1;-3;4), C(4;-2;-2)$

9.18. $A(-2;7;-1), B(-3;5;2), C(2;3;3)$

9.19. $A(0;3;2), B(1;-2;1), C(5;-2;3)$

9.20. $A(5;0;-1), B(7;2;3), C(2;-1;3)$

9.21. $A(-1;4;2), B(3;-2;6), C(2;3;-6)$

9.22. $A(-2;-3;-2), B(1;0;5), C(3;9;1)$

9.23. $A(3;4;-1), B(2;-1;1), C(6;-3;5)$

9.24. $A(-2;2;5); B(1;0;2); C(1;-5;-2)$

9.25. $A(-3;3;-1), B(1;1;2), C(7;-3;3)$

9.26. $A(4;7;4), B(0;-5;2), C(-2;-3;5)$

9.27. $A(0;3;2), B(3;-5;-2), C(-2;3;-3)$

9.28. $A(6;6;-1), B(-3;5;6), C(-2;0;3)$

9.29. $A(3;7;5), B(0;5;2), C(2;0;3)$

9.30. $A(4;7;-4), B(-4;5;0), C(2;6;3)$

Задача 10. Піраміда *ABCD* задана координатами своїх вершин. Використовуючи властивості векторного та мішаного добутків, знайти: 1) площу грані *ABC*; 2) об'єм піраміди *ABCD*.

10.1. $A(5;0;2), B(6;4;3), C(5;3;6), D(1;4;1)$.

10.2. $A(4;2;-7), B(5;0;3), C(-3;6;-2), D(1;3;4)$.

10.3. $A(-1;3;4), B(2;-1;0), C(6;-2;3), D(0;2;2)$.

10.4. $A(5;0;8), B(-3;1;7), C(3;-4;-9), D(0;1;6)$.

10.5. $A(2;-1;6), B(-1;3;8), C(5;-2;2), D(1;4;4)$.

10.6. $A(4;2;9), B(0;-1;3), C(4;-3;4), D(3;4;-2)$.

10.7. $A(-9;5;3), B(7;1;-2), C(2;3;5), D(0;4;-4)$.

10.8. $A(5;-1;2), B(6;0;7), C(3;-2;4), D(5;2;0)$.

10.9. $A(2;-1;4), B(3;7;-6), C(2;3;3), D(4;2;0)$.

10.10. $A(3;7;0), B(4;6;-1), C(3;2;-7), D(1;4;5)$.

10.11. $A(1;-2;4), B(7;3;5), C(6;-3;2), D(0;2;0)$.

10.12. $A(3;-1;6), B(5;7;8), C(4;-2;2), D(1;1;0)$.

10.13. $A(8;3;-1), B(4;1;3), C(2;2;-4), D(1;2;4)$.

10.14. $A(2;0;-5), B(1;3;4), C(2;-5;5), D(3;4;1)$.

10.15. $A(-1;2;1), B(2;-1;1), C(6;-2;3), D(2;1;4)$.

10.16. $A(7;9;-2), B(5;4;3), C(4;4;-1), D(0;2;0)$.

10.17. $A(3;7;0), B(1;-3;4), C(4;2;2), D(0;1;-4)$.

10.18. $A(-2;7;-1), B(-3;5;2), C(2;3;3), D(1;1;1)$.

10.19. $A(0;3;2), B(1;-2;1), C(5;-2;3), D(4;3;6)$.

10.20. $A(5;0;-1), B(1;2;3), C(2;-1;3), D(0;1;2)$.

10.21. $A(1;4;2), B(3;-2;6), C(2;3;-6), D(0;0;2)$.

10.22. $A(-2;-3;2), B(-1;0;5), C(3;9;1), D(0;0;1)$.

10.23. $A(3;4;-1), B(2;-1;1), C(6;-3;5), D(1;0;1)$.

10.24. $A(-2;2;5), B(1;0;2), C(1;-5;-2), D(8;0;1)$.

10.25. $A(-3;3;1), B(1;1;2), C(7;-3;3), D(6;6;1)$.

10.26. $A(4;7;4), B(0;-5;2), C(-2;3;5), D(0;1;7)$.

10.27. $A(0;3;2), B(3;-1;-2), C(2;3;3), D(0;0;7)$.

10.28. $A(6;6;-1), B(-3;5;6), C(-2;0;3), D(1;0;1)$.

10.29. $A(3;7;5), B(0;5;2), C(2;0;3), D(-3;-2;2)$.

10.30. $A(4;7;-1), B(4;5;0), C(2;6;3), D(0;-4;2)$.

Задача 11. Трикутник *ABC* заданий координатами своїх вершин. Знайти:

1) рівняння прямих, що містять усі сторони трикутника;
2) рівняння прямих *AK* і *AN*, де *K* і *N* – точки, що ділять сторону *BC* на три рівні частини.
3) рівняння прямої, що проходить через точку *C*, паралельно до прямої *AB*;
4) рівняння висоти *BH* та її довжину;
5) рівняння медіани *CM* та її довжину;
6) точку перетину висоти *BH* та медіани *CM*;
7) найбільший внутрішній кут трикутника;
8) периметр трикутника;
9) площу трикутника;
10) рівняння бісектриси *AP*.

11.1. $A(6;6;-1), B(-3;5;6), C(-2;0;3)$.

11.2. $A(4;2;-7), B(5;0;3), C(-3;6;-2)$.

11.3. $A(-1;3;4), B(2;-1;0), C(6;-2;-3)$.

11.4. $A(5;0;8), B(-3;1;7), C(3;-4;-9)$.

11.5. $A(2;-1;6), B(-1;3;8), C(5;-2;2)$.

11.6. $A(4;2;9), B(0;-1;3), C(4;-3;4)$.

11.7. $A(-9;5;3), B(7;1;-2), C(2;3;5)$.

11.8. $A(5;-1;-2), B(6;0;7), C(3;-2;4)$.

11.9. $A(2;-1;4), B(3;-7;-6), C(2;-3;3)$.

11.10. $A(3;7;0), B(4;6;-1), C(3;2;-7)$.

11.11. $A(1;-2;4), B(7;3;5), C(6;-3;-2)$.

11.12. $A(3;-1;6), B(5;7;10), C(4;-2;-2)$.

11.13. $A(8;3;-1), B(4;1;3), C(2;2;-4)$.

11.14. $A(5;0;2), B(6;4;3), C(5;3;6)$.

11.15. $A(-1;2;-1), B(2;-7;1), C(6;-2;-3)$.

11.16. $A(7;9;-2), B(5;4;3), C(4;4;-1)$.

11.17. $A(3;7;0), B(1;-3;4), C(4;-2;-2)$.

11.18. $A(-2;7;-1), B(-3;5;2), C(2;3;3)$.

11.19. $A(0;3;2), B(1;-2;1), C(5;-2;3)$.

11.20. $A(5;0;-1), B(7;2;3), C(2;-1;3)$.

11.21. $A(4;7;-4), B(-4;5;0), C(2;6;3)$.

11.22. $A(-2;-3;-2), B(1;0;5), C(3;9;1)$.

11.23. $A(3;4;-1), B(2;-1;1), C(6;-3;5)$.

11.24. $A(-2;2;5), B(1;0;2), C(1;-5;-2)$.

11.25. $A(-3;3;-1), B(1;1;2), C(7;-3;3)$.

11.26. $A(4;7;4), B(0;-5;2), C(-2;-3;5)$.

11.27. $A(0;3;2), B(3;-5;-2), C(-2;3;-3)$.

11.28. $A(2;0;-5), B(1;-3;4), C(2;-5;5)$.

11.29. $A(3;7;5), B(0;5;2), C(2;0;3)$.

11.30. $A(-1;4;2), B(3;-2;6), C(2;3;-6)$.

Задача 12. Дано координати вершин піраміди *ABCD*. Знайти:

1) рівняння прямої *AB*;
2) рівняння площини, що містить грань *ABC*;
3) рівняння висоти, опущеної з точки *D* на площину *ABC*;
4) рівняння прямої *CL*, паралельної до ребра *AD*;
5) точку *M*, яка симетрична точці *D* відносно грані *ABC*;
6) рівняння площини, яка проходить через точку *D* і перпендикулярна до прямої *AD*;
7) рівняння прямої *AH*, перпендикулярної до площини *ABC*;
8) кут між прямою *AD* і площиною *ABC*;
9) відстань між прямими *AB* і *CD*.

12.1. $A(0;7;1), B(2;-1;5), C(1;6;3), D(3;-9;8)$.

12.2. $A(9;5;5), B(-3;7;1), C(5;7;8), D(6;9;2)$.

12.3. $A(2;3;4), B(1;1;5), C(4;9;3), D(3;6;7)$.

12.4. $A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;2;-2), D(-1;0;2)$.

12.5. $A(3;-1;2), B(-1;0;1), C(1;7;3), D(8;5;8)$.

12.6. $A(3;1;4), B(-1;6;1), C(-1;1;6), D(0;4;-1)$.

12.7. $A(0;4;5), B(3;-2;1), C(4;5;6), D(3;3;2)$.

12.8. $A(2;–1;7)$, $B(6;3;1)$, $C(3;2;8)$, $D(2;–3;7)$.

12.9. $A(2;1;7)$, $B(3;3;6)$, $C(2;–3;9)$, $D(1;2;5)$.

12.10. $A(6;6;5)$, $B(4;9;5)$, $C(4;6;11)$, $D(6;9;3)$.

12.11. $A(7;2;2)$, $B(–5;7;–7)$, $C(5;–3;1)$, $D(2;3;7)$.

12.12. $A(8;–6;4)$, $B(10;5;–5)$, $C(5;6;–8)$, $D(8;10;7)$.

12.13. $A(1;–1;3)$, $B(6;5;8)$, $C(3;5;8)$, $D(8;4;1)$.

12.14. $A(1;–2;7)$, $B(4;2;10)$, $C(2;3;5)$, $D(5;3;7)$.

12.15. $A(4;2;10)$, $B(1;2;0)$, $C(3;5;7)$, $D(2;–3;5)$.

12.16. $A(2;3;5)$, $B(5;3;–7)$, $C(1;2;7)$, $D(4;2;0)$.

12.17. $A(5;3;7)$, $B(–2;3;5)$, $C(4;2;10)$, $D(1;2;7)$.

12.18. $A(4;3;5)$, $B(1;9;7)$, $C(0;2;0)$, $D(5;3;10)$.

12.19. $A(3;2;5)$, $B(4;0;6)$, $C(2;6;5)$, $D(6;4;–1)$.

12.20. $A(2;1;6)$, $B(1;4;9)$, $C(2;–5;8)$, $D(5;4;2)$.

12.21. $A(1;8;2)$, $B(5;2;6)$, $C(5;7;4)$, $D(4;10;9)$.

12.22. $A(10;9;6)$, $B(2;8;2)$, $C(–2;9;–3)$, $D(7;10;3)$.

12.23. $A(3;5;4)$, $B(8;7;4)$, $C(5;10;4)$, $D(4;7;8)$.

12.24. $A(4;6;5)$, $B(6;9;4)$, $C(2;10;10)$, $D(7;5;9)$.

12.25. $A(4;4;10)$, $B(7;10;2)$, $C(2;8;4)$, $D(9;6;9)$.

12.26. $A(4;2;5;)$, $B(0;7;1)$, $C(0;2;7)$, $D(1;5;0)$.

12.27. $A(6;8;2)$, $B(5;4;7)$, $C(2;4;7)$, $D(7;3;7)$.

12.28. $A(7;5;3)$, $B(9;4;4)$, $C(4;5;7)$, $D(7;9;6)$.

12.29. $A(6;1;1)$, $B(4;6;6)$, $C(4;2;0)$, $D(1;2;6)$.

12.30. $A(5;5;4)$, $B(1;–1;4)$, $C(3;5;1)$, $D(5;8;–1)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Вища математика. К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.
3. Бугір М .К. Математика для економістів. Навчальний посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. В 2 ч.: Ч.1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с., ч.2. – М.: Высшая школа, 1980. - 365 с.
5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов, ч.1. М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.
6. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебн. пособие. М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.
7. Красс М.Н. Математика для экономических специальностей: Учебник. М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1969. – 440 с.
9. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г .Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі, Ч.І. К.: Либідь, 1992. – 228 с.
10. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Щандра И.Г. Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. М.: Финансы и статистика, 2000. – 224с; Ч. 2. М.: Финансы и статистика, 1999. – 376 с.
11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. Харків: Рубікон, 1999. – 320 с.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

§ 1.1. Матриці. Види матриць........ 3
§ 1.2. Дії над матрицями........ 5
§ 1.3. Визначники........ 9
§ 1.4. Властивості визначників........ 13
§ 1.5. Обернена матриця........ 15
§ 1.6. Ранг матриці........ 17
§ 1.7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь........ 20
§ 1.8. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь........ 21
§ 1.9. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь........ 23
§ 1.10. Методи Гаусса та Жордана-Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь........ 24
§ 1.11. Однорідна система рівнянь. Фундаментальна система розв'язків........ 29
§ 1.12. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і економічні задачі (модель міжгалузевої економіки)........ 31
§ 1.13. *n*-вимірний векторний простір. Евклідів простір........ 34
§ 1.14. Вимірність і базис векторного простору. Зв'язок між базисами........ 37
§ 1.15. Лінійні оператори........ 40
§ 1.16. Власні вектори та власні значення лінійного оператора........ 43
§ 1.17. Квадратичні форми........ 45
§ 1.18. Лінійна модель обміну........ 48

РОЗДІЛ ІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§ 2.1. Прямокутні системи координат на площині та у просторі........ 51
§ 2.2. Перетворення прямокутних координат на площині........ 53
§ 2.3. Полярна система координат........ 55
§ 2.4. Вектори та лінійні операції над ними........ 57
§ 2.5. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами........ 60
§ 2.6. Скалярний добуток векторів........ 63
§ 2.7. Векторний добуток векторів........ 66
§ 2.8. Мішаний добуток векторів........ 68

§ 2.9. Рівняння лінії на площині.. 70
§ 2.10. Рівняння прямої на площині.. 73
§ 2.11. Кут між двома прямими. Дослідження взаємного розташування прямих.. 77
§ 2.12. Відстань від точки до прямої... 80
§ 2.13. Криві другого порядку... 81
§ 2.14. Рівняння поверхні і лінії в просторі.. 89
§ 2.15. Рівняння площини.. 90
§ 2.16. Рівняння прямої у просторі.. 94
§ 2.17. Практикум з вищої математики... 100
Список рекомендованої літератури... 116