Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра диференціальних рівнянь
і прикладної математики

ГОЙ ТАРАС ПЕТРОВИЧ

КУРС ЛЕКЦІЙ
з навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння" для студентів напряму підготовки "Прикладна математика"

2008

ЗМІСТ

Лекція 1.

Вступ. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.

Сучасна теорія диференціальних рівнянь займає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Гармонійне поєднання як теоретичного, так і прикладного аспектів робить її однаково привабливою й цікавою як для суто математиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань. Механіка, радіоелектроніка, хімія, біологія, економіка – це далеко не повний перелік наук, у яких знаходять найширше застосування диференціальні рівняння.

Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

де F – задана функція своїх аргументів, яка визначена в деякій області G простору R^{n+2} та задовольняє в ній певні умови неперервності й диференційовності; x – незалежна скалярна змінна, y – шукана функція цієї змінної, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ – її похідні. Область G називають ***областю визначення*** рівняння (1).

Враховуючи співвідношення

$$\mathrm{d}^j y = y^{(j)} \mathrm{d} x^j$$

між диференціалами і похідними функції $y = y(x)$, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\Phi\left(x, y, \mathrm{d} x, \mathrm{d} y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо область визначення рівнянь (1) та (2) при цьому та сама, то ці рівняння еквівалентні.

Порядок старшої похідної, яка входить в (1), називають ***порядком*** цього рівняння.

У рівняннях n-го порядку (1) і (2) вважається, що похідна або диференціал n-го порядку функції y справді входить у рівняння, тоді як наявність у ньому решти аргументів, тобто $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, не обов'язкова.

Аналогічне співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, \ldots, x_m$, функцією u цих змінних та її частинними похідними за цими змінними до порядку n включно називається ***диференціальним рівнянням з частинними похідними n-го порядку***. Наприклад, рівняння з частинними похідними першого порядку має такий загальний вигляд:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0,$$

причому хоч одна з частинних похідних входить у це співвідношення обов'язково.

Приклади диференціальних рівнянь:

$$y' + ky = x, \quad (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\,x + xy\,\mathrm{d}\,y = 0, \quad y' - y' = 0,$$

$$y''^2 + 1 = 0, \quad y''' + 2y' + y = e^x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Перші п'ять рівнянь з наведених є звичайними диференціальними рівняннями, шосте рівняння – диференціальне рівняння з частинними похідними.

Усюди надалі, якщо не сказано про інше, розглядатимемо саме звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними. З огляду на це можемо, наприклад, стверджувати, що четверте з наведених рівнянь не має дійсних розв'язків.

Будь-яку функцію, визначену разом з відповідними похідними у деякій області, називають ***розв'язком*** диференціального рівняння в цій області, якщо вона перетворює його в тотожність, яка справджується для всіх точок згаданої області. Зокрема, ***розв'язком*** рівняння (1) називатимемо функцію $y = y(x)$, яка має на деякому проміжку (a,b), $a \ge -\infty$, $b \le +\infty$, похідні $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ та задовольняє тотожність

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \quad x \in (a,b).$$

Наприклад, функція $y = \cos x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ (і на кожному скінченному інтервалі). Але, крім неї, розв'язками цього рівняння є також функції $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Отже, це диференціальне рівняння має безліч розв'язків (при кожному значенні C одержуємо свій розв'язок). У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних параметрів (сталих). Наприклад, всі розв'язки рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + \; + C_{n-1} x + C_n,$$

де C_j, $j = 1, \ldots, n$, – довільні сталі.

Процес знаходження розв'язків називають ***інтегруванням*** диференціального рівняння. Розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження властивостей їхніх розв'язків є предметом теорії диференціальних рівнянь.

При цьому рівняння вважається розв'язаним, якщо воно зведене до квадратур, тобто до скінченного числа операцій знаходження невизначених інтегралів. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y' = \dfrac{\sin x}{x}$ можуть бути записані за допомогою формули $y = \displaystyle\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + C$. Тут і надалі під символом $\displaystyle\int f(x) \mathrm{d}x$ будемо розуміти будь-яку фіксовану первісну, а сталу інтегрування писатимемо окремо.

Маючи задану сім'ю функцій (кривих), яка залежить від n довільних сталих, можна скласти диференціальне рівняння, для якого ці функції будуть розв'язками (інтегральними кривими). Для цього потрібно здиференціювати рівняння сім'ї n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих n рівнянь довільні сталі. Одержане при цьому рівняння називатимемо ***диференціальним рівнянням заданої сім'ї кривих***.

Однак, відзначимо, що рівняння, інтегровані у квадратурах, складають лише незначну частину всіх диференціальних рівнянь і на початок двадцятого століття задача відшукання тих диференціальних рівнянь, які можуть бути зінтегровані, була в основному розв'язана. На перший план виходить завдання встановлення за властивостями рівнянь тих чи інших властивостей їх розв'язків. Ці дві задачі – вивчення методів інтегрування диференціальних рівнянь і дослідження різноманітних властивостей їх розв'язків є предметом теорії диференціальних рівнянь як самостійної галузі математики.

До диференціальних рівнянь приводять багато задач з механіки, фізики та інших природничих наук. Розглянемо декілька з них.

Задача 1. ***Знайти диференціальне рівняння сім'ї усіх кіл на площині.***

Розв'язання. Задану сім'ю кривих можна описати так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{3}$$

де a, b, R – параметри. Здиференціюємо це рівняння тричі за змінною x, враховуючи, що y є функцією від x:

$$\begin{cases} x-a+(y-b)y'=0, \\ 1+y'^2+(y-b)y''=0, \\ 3y'y''+(y-b)y'''=0. \end{cases} \tag{4}$$

Виключивши з рівнянь (3), (4) усі параметри, одержимо шукане диференціальне рівняння

$$3y'y''^2-\left(1+y'^2\right)y'''=0.$$

Це є звичайне диференціальне рівняння третього порядку. ■

Задача 2. ***Знайти сім'ю кривих, які мають таку властивість: відрізок дотичної, розміщений між осями координат, у точці дотику до кожної з кривих цієї сім'ї, ділиться навпіл.***

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка кривої, AB – відрізок дотичної, проведеної через точку $M(x,y)$, розміщений між осями координат, α – кут між згаданою дотичною і віссю Ox (рис. 1). Як відомо, $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (геометричний зміст похідної). Розглянемо ΔAOB. В ньому $BO = 2y$, $AO = 2x$. Далі маємо такий очевидний ланцюжок перетворень:

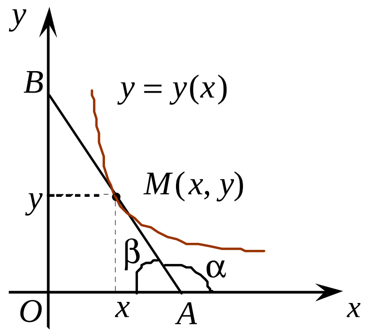

Рис. 1

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi-\beta) = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{BO}{AO} = -\frac{y}{x}.$$

Отже, для знаходження шуканої сім'ї кривих маємо диференціальне рівняння $y' = -y/x$. Розв'яжемо його:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \;\Rightarrow\; d\left(\ln|y| + \ln|x|\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C \;\Rightarrow\; \ln|y| + \ln|x| = \ln C_1,\; \text{де}\; C = \ln C_1 \;\Rightarrow$$

$$yx = C, \quad C \neq 0.$$

Отже, шуканою сім'єю кривих є сім'я гіпербол. ■

Задача 3. ***Визначити форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку.***

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною xOy, щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox – паралельною до променів, які падають на дзеркало (рис. 2). Одержуємо в перерізі деяку криву $y = f(x)$. Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (кут α). Нехай $M(x,y)$ – довільна точка дзеркала. Проведемо дотичну MA в точці M.

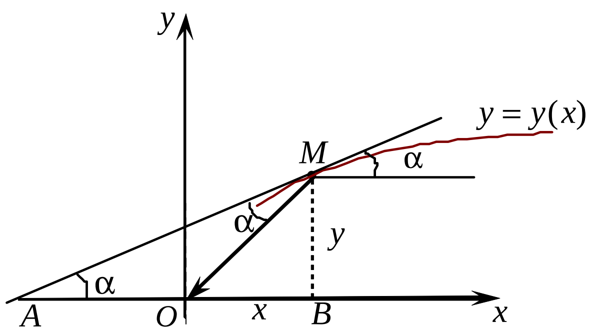

Рис. 2

Трикутник MOA рівнобедрений. Далі маємо:

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{MB}{AB}, \quad AB = AO + OB = \sqrt{x^2 + y^2} + x.$$

Отже, одержали звичайне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

яке описує форму перерізу дзеркала площиною xOy. Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ (}\textbf{\textit{довести самостійно!}}\text{)}.$$

Позначивши $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, одержимо рівняння $u' = 1$. Зінтегрувавши його, маємо, що

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} = x + C,$$

де C – довільна стала. Таким чином, одержали рівняння осьового перерізу у площині xOy:

$$y^2 = 2Cx + C^2 \text{ (сім'я парабол з фокусом } (-C/2;0)\text{)}.$$

Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осьового перерізу навколо осі Ox матиме вигляд

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2.$$

Таким чином, шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

Задача 4. ***Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років маса радію зменшиться вдвічі.***

Розв'язання. Нехай $x(t)$ – кількість радію в момент часу t. Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідна. Отже, закон розпаду можна записати у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$x'(t) = -kx(t), \; k > 0,$$

де k – коефіцієнт пропорційності (знак мінус означає, що маса радію з часом зменшується, а тому $x'(t) < 0$). Далі маємо:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,x}{x} + k\,\mathrm{d}\,t = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\left(\ln|\,x\,| + kt\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\,x\,| + kt = \ln|\,C\,| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\,x/C\,\right| = -kt \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = Ce^{-kt}.$$

Нехай початкова маса радію x_0, тобто $x(0) = x_0$. Використовуючи це, знайдемо сталу C: $C = x_0$.

Враховуючи тепер умову, що

$$x(1600) = \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2}x_0,$$

знайдемо коефіцієнт k:

$$x(1600) = x_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow$$

$$k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0{,}00043.$$

Отже, закон зміни початкової маси радію залежно від зміни часу має вигляд $x(t) = x_0\, e^{-0{,}00043t}$. ■

Задача 5. ***Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною до пройденого шляху. У початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість v_0=20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.***

Розв'язання. Позначимо через $s = s(t)$ відстань точки від початку відліку в момент часу t. Тоді $s(0) = 5$. За умовою зміна величини s від часу описується диференціальним рівнянням

$$s'(t) = \frac{k}{s(t)},$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Далі маємо:

$$s's = k \quad \Rightarrow \quad (s^2)' = (2kt)' \quad \Rightarrow \quad s^2 = 2kt + C \quad \Rightarrow$$

$$s(t) = \sqrt{2kt + C}\ .$$

З умови $s(0) = 5$ знайдемо сталу інтегрування *C*: $5 = \sqrt{C}$, *C* = 25. Отже,

$$s(t) = \sqrt{2kt + 25}.$$

Знайдемо швидкість руху точки в момент *t*:

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{2kt + 25}}.$$

Використовуючи умову $v(0) = v_0 = 20$ м/с, визначимо коефіцієнт пропорційності *k*:

$$v(0) = \frac{k}{5} = 20 \text{ м/с.}$$

Отже,

$$v(t) = \frac{100}{\sqrt{200t + 25}}.$$

Після 10 с після руху маємо:

$$s(10) = \sqrt{200 \cdot 10 + 25} = 45 \text{ (м),}$$

$$v(10) = \frac{100}{45} = \frac{20}{9} \text{ (м/с).}$$

Отже, через 10 с після початку руху швидкість становила $20/9$ м/с. За цей час точка пройшла відстань

$$s(10) - s(0) = 45 - 5 = 40 \text{(м/с).} \ ■$$

Лекція 2.
Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної.

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Задача Коші. Існування та єдиність розв'язку.
3. Класифікація розв'язків.

1. Основні поняття й означення. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку можна записати у такому загальному вигляді:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y), \qquad \textbf{(2)}$$

де f – неперервна функція, задана у кожній точці деякої області G.

Використовують й інші форми запису диференціального рівняння першого порядку, наприклад, у багатьох випадках разом з рівнянням (2) розглядатимемо "перевернуте" рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x, y)}. \qquad \textbf{(3)}$$

Рівняння (3) використовують в околі тих точок площини, де функція $f(x, y)$ є необмеженою. Його також доцільно розглядати також тоді, коли воно розв'язується легше, ніж рівняння (2). Якщо функція $f(x, y)$ в області G не перетворюється в нескінченність, то рівняння (2) і (3) рівносильні в цій області.

Рівняння (2), (3) можна замінити одним рівносильним рівнянням

$$\mathrm{d}y - f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0,$$

яке є частковим випадком рівняння

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

У рівнянні (2) шуканою функцією вважається $y(x)$, у рівнянні (3) – $x(y)$, у рівняння (4) змінні x і y входять рівноправно.

Розв'язуючи диференціальне рівняння, можна використовувати різні форми його запису, розглядаючи в якості шуканої функції $y = y(x)$ або $x = x(y)$.

Функцію $y = y(x)$, визначену на деякому інтервалі (a,b), називають ***розв'язком*** рівняння (2), якщо для всіх $x \in (a,b)$:

1) існує похідна $y'(x)$;
2) $\big(x, y(x)\big) \in G$;
3) $y'(x) \equiv f\big(x, y(x)\big)$.

Розв'язок рівняння (2) може бути заданий також у неявному вигляді, тобто у вигляді, не розв'язаному відносно *y*. Вважають, що співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ задає розв'язок рівняння (2), якщо:

1) воно визначає *y* як неявну функцію від *x*, тобто $y = y(x)$;

2) функція $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (2), тобто для всіх $x \in (a,b)$ маємо тотожність

$$\Phi'_x\big(x, y(x)\big) + \Phi'_y\big(x, y(x)\big) \cdot f\big(x, y(x)\big) \equiv 0.$$

У багатьох випадках розв'язок рівняння (2) можна одержати у параметричній формі, тобто як

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Це означає, що на інтервалі (t_0, t_1) маємо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

2. Задача Коші. Існування та єдиність розв'язку. Однією з найважливіших задач у теорії диференціальних рівнянь є ***задача Коші*** [1)] ***(початкова задача)***.

Для рівняння (2) вона формулюється таким чином: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, для якого функція $y(x)$ набуває заданого значення y_0 при $x = x_0$, тобто

[1)] **КОШІ** (Cauchy) Огюстен Луї (1789-1857) – видатний французький математик.

$$y(x_0) = y_0. \qquad (5)$$

При цьому числа x_0, y_0 називають ***початковими даними***, а умову (5) – ***початковою умовою***. З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуканні серед усіх інтегральних кривих рівняння (2) тієї кривої, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) площини.

У кожному конкретному випадку задача Коші може мати розв'язок або не мати його. Якщо вона має розв'язок, то важливо з'ясувати, чи він єдиний.

Розглянемо задачу Коші (2), (5) у прямокутнику

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\right\},\ a > 0,\ b > 0,$$

і припустимо, що функція $f(x, y)$ у цій області неперервна та задовольняє ***умову Ліпшіца*** [1)] за змінною y, тобто

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L\, |y_1 - y_2|,$$

де L – стала Ліпшіца, $L > 0$, $(x, y_1), (x, y_2)$ – дві довільні точки з Q.

Очевидно, що функція $f(x, y)$ є обмеженою в області Q, тобто

$$|f(x, y)| \le M$$

для всіх точок $(x, y) \in Q$.

Теорема 1 (Пікара [2)]). *Якщо функція $f(x, y)$ у прямокутнику Q неперервна та задовольняє умову Ліпшіца за змінною y, то принаймні на відрізку $G_1 = \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| \le h\}$, де*

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі (2),(5).

Є декілька способів доведення теореми 1. Найбільш конструктивним є ***метод Пікара***, який дає можливість побудувати розв'язок задачі Коші як границю послідовних наближень $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, визначених формулами

[1)] **ЛІПШІЦ** (Lipchitz) Рудольф Отто (1832-1903) – німецький математик.
[2)] **ПІКАР** (Picard) Шарль Еміль (1856-1941) – французький математик.

$$y_0(x) \equiv y_0, \qquad y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Можна довести, що ці наближення гарантовано збігаються до розв’язку задачі Коші (2), (5) на відрізку G_1.

Теорема Пікара має велике значення як для теорії звичайних диференціальних рівнянь, так і для її численних застосувань, бо дозволяє за виглядом рівняння відповісти про існування та єдиність розв’язку для заданих початкових умов. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу для розв’язку рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв’язування.

Зауваження. Умову Ліпшіца доволі складно перевіряти для багатьох функцій. Покажемо, що цю умову можна замінити на більш просту. А саме: *умова Ліпшіца завжди виконується, якщо функція* $f(x, y)$ *має в області Q обмежену частинну похідну* $f'_y(x, y)$. Для доведення цього твердження застосуємо теорему Лагранжа [1)] про скінченні прирости до різниці $f(x, y_1) - f(x, y_2)$:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y\left(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2)\right) \cdot (y_1 - y_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Якщо $\left| f'_y(x, y) \right| \le N$, то, очевидно, $\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|$.

Але з умови Ліпшіца не випливає умова обмеженості $f'_y(x, y)$, більш того, ця похідна може навіть не існувати. Наприклад, функція

$$f(x, y) = 2\,|\,y\,|\cos x$$

недиференційовна за змінною y в точці $(x_0, 0)$, $x_0 \ne \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, але умова Ліпшіца в околі цієї точки виконується. Справді,

$$\left| f(x, y_2) - f(x, y_1) \right| = 2\,|\cos x| \cdot \big|\,|\,y_2\,| - |\,y_1\,|\,\big| \le 2\,|\,y_2 - y_1\,|,$$

оскільки $|\cos x| \le 1$, а $\big|\,|\,y_2\,| - |\,y_1\,|\,\big| \le |\,y_2 - y_1\,|$. Таким чином, задана функція задовольняє умову Ліпшіца зі сталою $L = 2$.

[1)] **ЛАГРАНЖ** (Lagrange) Жозеф Луї (1736-1813) – французький математик і механік.

Відзначимо, що теорема Пікара дає достатні умови існування єдиного розв’язку задачі Коші для рівняння (2), але ці умови не є необхідними. А саме: *може існувати єдиний розв’язок задачі (2),(5), але у точці* (x_0, y_0) *не виконується одна з двох умов, які накладаються на праву частину рівняння (2), або обидві ці умови.*

Розглянемо приклади.

1. $y' = y\sin x + e^x$. Функція $f(x, y) = y\sin x + e^x$ неперервна, а похідна $f'_y = \sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy. Отже, згідно з теоремою Пікара та зауваження до неї через кожну точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. Права частина рівняння визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy. Похідна $f'_y = 2y^{-\frac{1}{3}}$ стає необмеженою, якщо $y = 0$, тому в точках осі Ox може порушуватись єдиність розв’язку. Легко бачити, що $y = (x + C)^3$ – розв’язок. Окрім того, маємо очевидний розв’язок $y = 0$. Таким чином, через кожну точку осі Ox проходить принаймні дві інтегральні криві і, отже, у точках цієї осі порушується єдиність розв’язку. Інтегральними кривими рівняння будуть також лінії, складені з кусків кубічних парабол $y = (x + C)^3$ і відрізків осі Ox, тому через кожну точку осі Ox проходить безліч інтегральних кривих.

3. $y' = \dfrac{1}{y^2}$. У точках $(x_0, 0)$ осі Ox функції $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$, $f'_y = -\dfrac{2}{y^3}$ розривні і необмежені при $y \to 0$, але через кожну точку цієї осі проходить єдина інтегральна крива $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$.

Якщо на функцію $f(x, y)$ у рівнянні (2) накладати менш жорсткі умови, ніж у теоремі Пікара, то може виявитись, що розв’язок задачі Коші хоча й буде існувати, але його єдиність не гарантуватиметься.

Наведемо теорему Пеано[1)], яка за умови неперервності функції $f(x,y)$ в області Q гарантує існування, але не єдиність розв'язку задачі Коші (це ілюструє наведений вище приклад 2).

Теорема 2 (Пеано). *Якщо функція $f(x,y)$ з рівняння (2) неперервна в області Q, то принаймні на відрізку G_1 існує щонайменше один розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші (2),(5).*

3. Класифікація розв'язків. На прикладах, які розглядалися раніше, переконалися, що рівняння (2) може мати безліч розв'язків.

Сім'ю розв'язків диференціального рівняння (2), залежну від однієї довільної сталої C:

$$y = \varphi(x,C) \tag{6}$$

називають ***загальним розв'язком*** цього рівняння. Формула (6) дозволяє розв'язати задачу Коші для рівняння (2). Для цього потрібно визначити $C = C_0$ з рівності $y_0 = \varphi(x_0,C)$ і підставити знайдене значення у (6). Тоді $y = \varphi(x,C_0)$ буде розв'язком задачі Коші.

Загальний розв'язок рівняння (2), записаний у неявному вигляді (вигляді, не розв'язному відносно шуканої функції y):

$$\Phi(x,y,C) = 0 \tag{7}$$

називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння. При цьому вважають, що рівність (7) визначає загальний розв'язок

$$y = \varphi(x,C)$$

рівняння (2) в області G.

Часто загальний інтеграл одержують у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C, тобто

$$\Psi(x,y) = C.$$

Ліву частину цієї рівності називають ***інтегралом*** рівняння (2).

Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння (2), залежну від довільної сталої C, у параметричній формі:

[1)] **ПЕАНО** (Peano) Джузеппе (1858-1932) – італійський математик.

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C) \end{cases}$$

як ***загальний розв'язок у параметричній формі.***

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2) називають ***частинним***, якщо у кожній його точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші. Розв'язок, який міститься у формулі (6) загального розв'язку, тобто одержується з нього при конкретному значенні довільної сталої *C*, є, очевидно, частинним розв'язком.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***. Його не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) при жодному конкретному значенні сталої *C*. З геометричної точки зору особливому розв'язку відповідає інтегральна крива, яка не міститься в сім'ї інтегральних кривих, що складають загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

З теореми Пікара та зауваження до неї випливає, що особливі розв'язки рівняння (2) потрібно шукати серед тих кривих, уздовж яких похідна $f_y'(x, y)$ необмежена. Такі криві називають ***підозрілими на особливий розв'язок***. Ця крива буде особливим розв'язком, якщо вона є інтегральною кривою і в кожній її точці порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y \ge 0.$$

Розв'язання. При $y \ne 0$ одержуємо

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{y}\right)' = 1.$$

Звідси $\sqrt{y} = x + C$, де $x > -C$. Отже,

$$y = (x + C)^2 \ \ (x \ge -C)$$

є загальним розв'язком (точка $x=-C$ включена, бо у ній також виконується рівність $y'=2\sqrt{y}$).

З геометричної точки зору маємо праві вітки парабол, в яких вісь симетрії паралельна до осі Oy, а вершини знаходяться на осі Ox (рис. 1).

Легко бачити, що $y=0$ (вісь Ox) також є розв'язком рівняння, причому особливим. Справді, через будь-яку точку

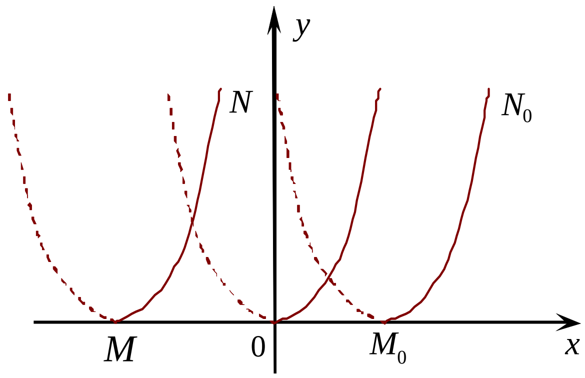

Рис. 1

$M(x_0,0)$ проходить розв'язок $y=0$, півпарабола MN:

$$y=(x-x_0)^2,\ x\ge x_0,$$

і, крім того, безліч розв'язків вигляду MM_0N_0, які можна скласти з відрізків MM_0 $(M_0\equiv M_0(x_1,0))$ особливого розв'язку $y=0$ і частинних розв'язків – півпарабол M_0N_0:

$$y=(x-x_1)^2,\ x>x_1.$$

Зауважимо, що розв'язки вигляду MM_0N_0, тобто функції

$$y=\begin{cases}0, & -\infty<x\le x_0,\\ (x-x_0)^2, & x_0\le x<+\infty,\end{cases}$$

не є ні частинними, ні особливими, оскільки умова єдиності задачі Коші порушується лише для $x\le x_0$. ■

Надалі розв'язки, які одержуються "склеюванням" частинних і особливих розв'язків, вивчати не будемо.

Лекція 3.
Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, інтегровані у квадратурах.

План.

1. Неповні диференціальні рівняння та звідні до них.
2. Рівняння з відокремленими змінними.
3. Рівняння з відокремлюваними змінними.
4. Однорідні рівняння.

1. Неповні диференціальні рівняння та звідні до них. Диференціальне рівняння першого порядку, яке явно не містить шуканої функції

$$y' = f(x), \tag{1}$$

у припущенні, що його права частина неперервна на інтервалі (a,b), завжди інтегрується у квадратурах: його загальним розв'язком є

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{2}$$

де C – довільна стала. Усі інтегральні криві (2) отримуються з однієї інтегральної кривої цієї сім'ї зсувом уздовж осі Oy.

Якщо в якості первісної взяти визначений інтеграл зі змінною верхньою межею x, тобто $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$, де x_0 – деяке число з інтервалу (a,b), то формула (2) матиме вигляд

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{3}$$

До неповних диференціальних рівнянь першого порядку належить також рівняння вигляду

$$y' = f(y), \tag{4}$$

яке явно не містить незалежної змінної x. Припустимо, що функція $f(y)$ неперервна на деякому інтервалі (c,d) і відмінна на ньому від нуля. Тоді рівняння (4) рівносильне рівнянню

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},$$

яке не містить явно шуканої функції $x = x(y)$, а отже, одержуємо загальний інтеграл рівняння (4):

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \qquad \textbf{(5)}$$

Усі інтегральні криві сім'ї (5) отримуються з однієї інтегральної кривої цієї сім'ї зсувом уздовж осі Ox.

Якщо права частина рівняння (4) перетворюється в нуль при $y = m$, причому $c < m < d$, то функція $y = m$, очевидно, буде розв'язком цього рівняння, можливо особливим.

До рівняння, яке явно не містить незалежної змінної, зводиться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \qquad \textbf{(6)}$$

де a, b, c – деякі числа. Справді, зробимо заміну

$$z = ax + by + c,$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{b}(z' - a),$$

а тому

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z) \quad \Rightarrow \quad z' = bf(z) + a.$$

Отримали неповне рівняння вигляду (4), яке легко розв'язується.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \cos(x - y).$$

Розв'язання. Нехай $z = x - y$. Тоді

$$z' = 1 - y' \quad \Rightarrow \quad z' = 1 - \cos z.$$

Звідси, якщо $1 - \cos z \neq 0$, то

$$\frac{dz}{1 - \cos z} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{1 - \cos z} = x + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,z}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = x + C \qquad \Rightarrow \qquad -\mathrm{ctg}\frac{z}{2} = x + C.$$

Отже, загальним інтегралом є

$$x + \mathrm{ctg}\frac{x-y}{2} = C\,.$$

Якщо $1 - \cos z = 0$, тобто $z = 2\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$, то

$$y = x - 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}\,.$$

Ці розв'язки є особливим, бо їх не можна отримати з загального розв'язку жодному значенні сталої C. ■

2. Рівняння з відокремленими змінними. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$f_1(x)\mathrm{d}\,x + f_2(y)\mathrm{d}\,y = 0 \tag{7}$$

називають ***рівнянням з відокремленими змінними***. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ неперервні, то рівняння (7) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}\left(\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\mathrm{d}\,x + \int\limits_{y_0}^{y} f_2(y)\mathrm{d}\,y\right) = 0,$$

а тому загальний інтеграл цього рівняння запишеться у квадратурах:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\mathrm{d}\,x + \int\limits_{y_0}^{y} f_2(y)\mathrm{d}\,y = C, \tag{8}$$

де C – довільна стала, x_0, y_0 – деякі числа з області неперервності функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$. Особливих розв'язків рівняння (7) немає.

У формулі (8) можна не писати меж інтегрування, бо числа, які отримуються після підставляння нижніх меж у формулу Ньютона-Лейбніца, можна включити у сталу C. Тому загальний інтеграл рівняння (7) можна також записати у вигляді

$$\int f_1(x)\mathrm{d}\,x + \int f_2(y)\mathrm{d}\,y = C\,.$$

Формула (8) дає можливість знайти розв'язок $y = y(x)$ (або $x = x(y)$) рівняння (7), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0 \text{ (або } x(y_0) = x_0\text{)}.$$

Для цього досить підставити у цю формулу $C = 0$, після чого матимемо

$$\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} f_2(y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{9}$$

Якщо $f_1(x_0)$ і $f_2(y_0)$ одночасно не дорівнюють нулю, то формула (9) визначає розв'язок задачі Коші, причому він, при зроблених припущеннях відносно функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$, буде єдиним.

Приклад 2. Знайти інтегральну криву рівняння

$$(x-1)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0,$$

яка проходить через початок координат.

Розв'язання. Скористаємося формулою (9). Якщо замінити числа x_0 і y_0 початковими даними шуканого розв'язку $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то

$$\int_0^x (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^y y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2/2 - x + y^2/2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Отже, шуканою інтегральною кривою є коло радіуса 1 з центром у точці (1,0). ■

3. Рівняння з відокремлюваними змінними. До рівняння з відокремленими змінними зводяться рівняння вигляду

$$f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x + f_1(x)\,g_1(y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{10}$$

яке називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***. Стосовно функцій $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ вважатимемо, що вони є неперервними для всіх x, y з області визначення рівняння.

Якщо $g(y)\cdot f_1(x) \neq 0$, то поділивши на цей добуток обидві частини рівняння (10), одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{g_1(y)}{g(y)}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Загальним інтегралом цього рівняння, а отже, й рівняння (10), є

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)} \mathrm{d}\, x + \int \frac{g_1(y)}{g(y)} \mathrm{d}\, y = C$$

або

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{f_1(x)} \mathrm{d}\, x + \int_{y_0}^{y} \frac{g_1(y)}{g(y)} \mathrm{d}\, y = C, \qquad \textbf{(11)}$$

де $f_1(x_0) \neq 0,\ g(y_0) \neq 0.$

Розв’язок задачі Коші з початковими даними x_0, y_0 задається формулою

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x)}{f_1(x)} \mathrm{d}\, x + \int_{y_0}^{y} \frac{g_1(y)}{g(y)} \mathrm{d}\, y = 0,$$

де $f(x_0)$ і $g_1(y_0)$ одночасно не дорівнюють нулю.

Відокремлюючи змінні, ми поділили обидві частини рівняння (10) на $f_1(x)g(y)$. При цьому можуть бути втрачені розв’язки $y = b$, де $g(b) = 0$, або $x = a$, де $f_1(a) = 0$. Ці розв’язки можуть бути особливими.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}\, x + y\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}\, y = 0$$

та знайти інтегральну криву, яка проходить через точку (0,1).

Розв’язання. Відокремлюючи змінні, одержуємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x\,\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y\,\mathrm{d}\, y}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (y \neq \pm 1) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{y\,\mathrm{d}\, y}{\sqrt{1-y^2}} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = C \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-y^2} = C.$$

Розв’язки $y = \pm 1$ є особливими, бо їх не можна одержати із загального інтегралу при жодному значенні сталої *C*. Легко перевірити, що через точку (0,1) проходять дві інтегральні криві, а саме $y = 1$ та $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1.$ ■

4. Однорідні рівняння. Функцію $f(x,y)$ називають ***однорідною виміру m***, якщо для довільних $x,\ y$ і t справджується тотожність

$$f(tx,ty)=t^m\cdot f(x,y). \qquad \textbf{(12)}$$

Якщо (12) виконується лише для $t\geq 0$, то функцію $f(x,y)$ називають *додатно однорідною*. Наприклад, функції

$$\frac{x-y}{x+y},\quad \sqrt[3]{2x^3+x^2y+y^3},\quad x^{k-1}y+y^k$$

є однорідними вимірів 0, 1, k відповідно, а $\sqrt{x+y}$ – додатно однорідна функція виміру $0{,}5$.

Якщо в (12) підставити $t=1/x$, то

$$f(1,y/x)=\frac{1}{x^m}f(x,y),$$

звідки

$$f(x,y)=x^m\cdot f(1,y/x). \qquad \textbf{(13)}$$

Якщо диференціальне рівняння першого порядку записане у вигляді

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x+N(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0, \qquad \textbf{(14)}$$

то воно буде ***однорідним***, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ однорідні однакового виміру m (m може бути довільним дійсним числом).

Використовуючи (13), однорідне рівняння (14) тепер можна записати у вигляді

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

де функція φ є однорідною виміру 0. Справді, використовуючи (14), (13), маємо:

$$y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=-\frac{M\left(x,x\cdot\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(x,x\cdot\dfrac{y}{x}\right)}=-\frac{x^m\cdot M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{x^m\cdot N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}=-\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}\equiv\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Покажемо, що однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Для цього зробимо заміну

$$y = zx,$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді

$$\mathrm{d}\,y = \mathrm{d}(zx) = x\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,x$$

і рівняння (9) набирає вигляду

$$M(x, zx)\,\mathrm{d}\,x + N(x, zx)(\,z\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,z\,) = 0. \qquad \textbf{(15)}$$

Але оскільки функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ однорідні виміру m, то згідно з (13) маємо, що

$$M(x, zx) = x^m \cdot M(1, z),$$

$$N(x, zx) = x^m \cdot N(1, z).$$

Враховуючи це, рівняння (14) можна записати у вигляді

$$x^m \cdot M(1, z)\,\mathrm{d}\,x + x^m \cdot N(1, z)(\,z\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,z\,) = 0$$

або, після скорочення x^m $(x \neq 0)$ і перегрупування доданків, як

$$(\,M(1, z) + z \cdot N(1, z)\,)\,\mathrm{d}\,x + x \cdot N(1, z)\,\mathrm{d}\,z = 0. \qquad \textbf{(16)}$$

Інтегруючи рівняння (16) (це рівняння з відокремлюваними змінними), одержуємо

$$\ln|\,x\,| + \int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z \cdot N(1, z)}\,\mathrm{d}\,z = \ln|\,C\,| \quad \Rightarrow$$

$$x = C\,e^{-\int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+z\cdot N(1,z)}\mathrm{d}\,z},$$

а тому

$$x = C\,e^{\varphi(z)}, \qquad \textbf{(17)}$$

де

$$\varphi(z) = -\int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + z \cdot N(1, z)}\,\mathrm{d}\,z.$$

Замінивши в (17) z на частку y/x, одержуємо загальний інтеграл однорідного рівняння (14) у вигляді

$$x = C\,e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Відокремлюючи змінні у рівнянні (16), можна втратити розв'язки вигляду $z = a$, де a – корінь рівняння

$$M(1,z) + z\,N(1,z) = 0.$$

Підставляючи ці значення z у формулу $y = xz$, одержуємо, що півпрямі $y = ax$, $x \neq 0$, які примикають до початку координат, є розв'язками однорідного рівняння. Ці розв'язки можуть бути особливими. Особливими розв'язками також можуть бути півосі Oy: $x = 0$ $(y \neq 0)$. Інших особливих розв'язків немає.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Розв'язання. Рівняння є однорідним, бо його права частина є однорідною функцією виміру 0. Зробимо заміну

$$y = zx.$$

Тоді

$$y' = z'x + z$$

і для знаходження функції $z = z(x)$ маємо рівняння

$$z' = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{z + z^3}{1 - z^2}\right),$$

інтегруючи яке, одержуємо:

$$\int \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)}\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad -\ln(z^2 + 1) + \ln|z| - \ln|x| = -\ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x(z^2 + 1)}{z} = C.$$

Окрім того, відокремлюючи змінні, був втрачений розв'язок $z = 0$, тобто $y = 0$. Отже, повертаючись до функції y, одержуємо всі розв'язки заданого рівняння:

$$x^2 + y^2 = Cy, \quad y = 0. \ ■$$

Лекція 4.
Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах.

План.

1. Рівняння, звідні до однорідних.
2. Лінійні рівняння.
3. Рівняння Бернуллі.

1. Рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо рівняння

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \qquad \textbf{(1)}$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – деякі числа. Будемо вважати, що $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, тобто хоч одне з чисел c_1, c_2 не дорівнює нулю, бо інакше права частина рівняння (1) буде однорідною функцією виміру 0, а саме рівняння – однорідним (такі рівняння вивчались на лекції 3).

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Зробимо заміну змінних

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta, \qquad \textbf{(2)}$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – поки що довільні сталі. Якщо підставити (2) в рівняння (1) та врахувати, що

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\eta+\beta)}{\mathrm{d}(\xi+\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi},$$

то одержимо рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}. \qquad \textbf{(3)}$$

Виберемо тепер сталі α, β так, щоб вони були розв’язком неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки за припущенням $\Delta \neq 0$, то ця система має єдиний розв’язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера.

Тоді з (3) одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}, \qquad \mathbf{(4)}$$

яке є однорідним. Зінтегрувавши рівняння (4) за допомогою заміни

$$\eta=z\xi,$$

де $z=z(\xi)$ – нова функція, і повернувшись до змінних x і y за формулами $\xi=x-\alpha$, $\eta=y-\beta$, які випливають з (2), знайдемо загальний інтеграл рівняння (1).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$(x+2y-3)\,dx-(2x+y-3)\,dy=0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна, очевидно, записати у вигляді

$$y'=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}.$$

Оскільки $c_1^2+c_2^2\neq 0$, $\Delta\neq 0$, то сталі α, β можна однозначно знайти з системи

$$\begin{cases}\alpha+2\beta-3=0,\\ 2\alpha+\beta-3=0.\end{cases}$$

Легко перевірити, що $\alpha=\beta=1$. Після заміни $x=\xi+1$, $y=\eta+1$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+2\eta}{2\xi+\eta},$$

яке розв'язується за допомогою заміни $\eta=z\xi$, де $z=z(\xi)$ – нова функція. Далі маємо:

$$z'\xi+z=\frac{1+2z}{2+z} \quad\Rightarrow\quad \frac{2+z}{1-z^2}\,dz=\frac{d\xi}{\xi} \quad \left(z\neq\pm1,\ \xi\neq 0\right) \quad\Rightarrow$$

$$2\int\frac{dz}{1-z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-z^2)}{1-z^2}=\int\frac{d\xi}{\xi} \quad\Rightarrow\quad -\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|-\frac{1}{2}\ln|1-z^2|=\ln|\xi|+C \quad\Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^2+\ln|1-z^2|=\ln|\xi|^{-2}+\ln|C| \quad\Rightarrow\quad \frac{(z-1)^3}{z+1}=\frac{C}{\xi^2} \quad\Rightarrow$$

$$z+1=C\xi^2(1-z)^3.$$

Оскільки $z=\eta/\xi$, то

$$\frac{\eta}{\xi}+1=C\xi^2\left(1-\frac{\eta}{\xi}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad \xi+\eta=C(\xi-\eta)^3.$$

Враховуючи, що $\xi=x-1$, $\eta=y-1$, одержуємо загальний інтеграл

$$x+y-2=C(x-y)^3 .$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків. Якщо $z=1$, то $\eta=\xi$, $\xi\neq 0$, тобто $y=x$, $x\neq 1$. Якщо $z=-1$, то $\eta=-\xi$, $\xi\neq 0$, тобто $y=-x+2$, $x\neq 1$. Перший розв'язок особливий, а другий – частинний для вихідного рівняння. І нарешті, $\xi=0$, тобто $x=1$, не є розв'язком рівняння. ■

Випадок 2. Нехай $\Delta\equiv\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$. Тоді

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

Якщо позначити $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$, то $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, а тому рівняння (1) запишеться у вигляді

$$y'=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\equiv f_1(a_2x+b_2y). \qquad \textbf{(5)}$$

Рівняння (5) – це рівняння вигляду $y'=f(ax+by+c)$, яке вивчалось на лекції 3 і інтегрується за допомогою заміни $z=ax+by+c$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$(x+y+1)\,\mathrm{d}x+(2x+2y-1)\,\mathrm{d}y=0.$$

Розв'язання. Задане рівняння легко записати у вигляді (1), але робити це не обов'язково. Оскільки $\Delta=0$, то виконаємо заміну $z=x+y$. Тоді $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z-\mathrm{d}x$ і підставляючи у задане рівняння, одержуємо:

$$(z+1)\,\mathrm{d}\,x+(2z-1)(\mathrm{d}\,z-\mathrm{d}\,x)=0 \quad\Rightarrow\quad (2-z)\,\mathrm{d}\,x+(2z-1)\,\mathrm{d}\,z=0 \quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\,x=\frac{2z-1}{z-2}\mathrm{d}\,z \quad (z\neq 2) \quad\Rightarrow\quad \int \mathrm{d}\,x=\int\frac{2z-4}{z-2}\mathrm{d}\,z+3\int\frac{\mathrm{d}\,z}{z-2} \quad\Rightarrow$$

$$x=2z+3\ln|z-2|+C.$$

Повертаючись до змінних x, y за формулою $z=x+y$, знаходимо загальний інтеграл $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

Якщо $z=2$, то $y=2-x$ – особливий розв'язок. ■

Зауваження. Аналогічно до рівняння (1) інтегрується рівняння більш загального вигляду:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Деякі диференціальні рівняння можна звести до однорідних за допомогою заміни $y=z^m$, де $z=z(x)$ – нова функція, m – число, принцип вибору якого буде з'ясований згодом. Наприклад, у рівнянні $y'=x+y^2/x^3$ зробимо згадану заміну ($y=z^m \;\Rightarrow\; y'=mz^{m-1}z'$) і виберемо число m таким, щоб одержане рівняння

$$mz^{m-1}z'=x+\frac{z^{2m}}{x^3} \quad\Rightarrow\quad m\,z'=\frac{x}{z^{m-1}}+\frac{z^{m+1}}{x^3}$$

було однорідним. Для цього потрібно, щоб права частина рівняння була однорідною функцією виміру 0, тобто число m повинне задовольняти рівняння $m-1=1$ і $m+1=3$, звідки одержуємо, що $m=2$. Отже, за допомогою підстановки $y=z^2$ задане рівняння вдається звести до однорідного рівняння $2z'=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z^3}{x^3}$.

2. Лінійні рівняння. Диференціальне рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{6}$$

називають ***лінійним***. Будемо вважати, що функції $p(x)$, $q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a,b). Тоді з теореми Пікара та зауваження до неї (лекція 2) випливає, що рівняння (1) має єдиний розв'язок

$y = y(x)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, де x_0 – будь-яке число з інтервалу (a,b), а y_0 можна вибрати довільно, тобто через довільну точку (x_0, y_0) смуги $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива рівняння (1) (***вміти пояснити це твердження***). Таким чином, при зроблених припущеннях лінійне рівняння (6) не має особливих розв’язків.

Якщо в (6) $q(x) \equiv 0$ для всіх $x \in (a,b)$, то воно має вигляд

$$y' + p(x)y = 0 \tag{7}$$

і його називають ***лінійним однорідним*** (не потрібно плутати лінійне однорідне рівняння з однорідним рівнянням, яке розглядалось на лекції 3; термін “однорідне” стосовно лінійного рівняння використовується тому, що вираз $y' + p(x)y$ є однорідною функцією першого виміру відносно y і y'). Рівняння (6), в якому $q(x)$ тотожно не дорівнює нулю, називають ***лінійним неоднорідним***.

Покажемо, що лінійне неоднорідне рівняння інтегрується у квадратурах. Для цього використаємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***), ідея якого полягає у наступному. Зінтегруємо спочатку лінійне однорідне рівняння (7). Відокремлюючи у ньому змінні, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} + p(x)\mathrm{d}\,x = 0 \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + \int p(x)dx = \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}\,x}\,, \tag{8}$$

де C – довільна стала. Формула (8) описує всі розв’язки рівняння (7), бо розв’язок $y = 0$, який міг бути втраченим при відокремленні змінних, міститься в загальному розв’язку (8) (якщо $C = 0$).

Розв’язок лінійного однорідного рівняння (6) шукатимемо у вигляді (8), замінивши сталу C неперервно диференційовною функцією $C(x)$, тобто у вигляді

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}\,x}. \tag{9}$$

Для знаходження функції $C(x)$ підставимо (9) у (6). Тоді

$$C'(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x) \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C.$$

Підставляючи знайдене значення $C(x)$ в формулу (9), одержуємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння:

$$y = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)\cdot e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(10)}$$

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y' - \frac{2y}{x} = x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y' - \frac{2y}{x} = 0$, як легко перевірити, має вигляд $y = Cx^2$. Тому розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Тоді

$$C'(x)x^2 + C(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = \ln|x| + C.$$

Підставляючи знайдене $C(x)$ у формулу $y = C(x)x^2$, одержуємо шуканий загальний розв'язок $y = x^2\cdot(\ln|x| + C)$. ■

Зазначимо, що описані вище методи розв'язування лінійних рівнянь можуть бути застосовні також до рівнянь вигляду

$$\left(q(y) + p(y)x\right)y' = 1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $y = (x + y^3)\cdot y'$, в якому y – функція змінної x, – не є лінійним. Але його можна записати інакше, а саме у вигляді

$$y = (x + y^3)\cdot\frac{1}{x'} \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{x}{y} = y^2.$$

Останнє рівняння є лінійним, якщо x вважати шуканою функцією незалежної змінної y.

3. Рівняння Бернуллі. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (m \neq 0,\ m \neq 1), \tag{11}$$

називають ***рівнянням Бернуллі***[1]. Випадки $m = 0$ та $m = 1$ не розглядаємо, бо для цих значень m рівняння (11) є лінійним. Вважатимемо, що функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Покажемо, що рівняння Бернуллі завжди може бути зведене до лінійного рівняння. Для цього, так само, як і для лінійного рівняння, використаємо ***метод варіації довільної сталої***.

Зінтегруємо спочатку рівняння $y' + p(x)y = 0$. Його загальний розв'язок задається формулою

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{12}$$

де $C(x)$ – деяка функція. Підставляючи (12) у (11), одержуємо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,dx} =$$

$$= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{C^m} = q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dC}{C^m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\frac{C^{1-m}(x)}{1-m} = \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C_1 \Rightarrow$$

$$C(x) = \left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у (12), одержуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

[1] **БЕРНУЛЛІ** Якоб (1654-1705) – швейцарський математик.

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left((1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y=0$, якщо $m>0$. Якщо ж $0<m<1$, то цей розв'язок буде особливим, а якщо $m>1$, то частинним. Для $m<0$ функція $y=0$ не є розв'язком рівняння (11).

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$y' - \frac{2y}{x} = -xy^3.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $y' - 2y/x = 0$ був знайдений під час розв'язування лінійного рівняння з прикладу 3: $y = Cx^2$. Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Підставляючи у задане рівняння, одержуємо:

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - 2C(x)x = -C^3(x)x^7 \quad\Rightarrow\quad C'(x) = -C^3(x)x^5 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{C^3(x)} = -x^5\,dx \quad \left(C(x)\neq 0\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{C^{-2}(x)}{-2} = -\frac{x^6}{6} + C \quad\Rightarrow$$

$$C(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{x^6 + C}} \quad\Rightarrow\quad y = \pm x^2\cdot\sqrt{\frac{3}{x^6+C}} \quad\Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6+C}} \quad \text{– загальний розв'язок.}$$

Якщо $C(x)=0$, то $y=0$ – особливий розв'язок. ■

Наведений метод розв'язування рівняння Бернуллі можна застосовувати також до рівнянь вигляду

$$\left(p(y)x + q(y)x^m\right)\cdot y' = 1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x – за функцію цієї змінної. Наприклад, якщо рівняння $(2x - y^2x^3)\cdot y' = y$ записати у вигляді

$$y' = \frac{y}{2x - y^2x^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x'} = \frac{y}{2x-y^2x^3} \quad\Rightarrow\quad x' - \frac{2}{y}x = -yx^3,$$

то маємо рівняння Бернуллі для знаходження $x = x(y)$ (це рівняння розв'язане у прикладі 4).

Лекція 5.

Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

План.

1. Рівняння у повних диференціалах.
2. Інтегрувальний множник.

1. Рівняння у повних диференціалах. Рівняння вигляду

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \qquad (1)$$

називають ***рівнянням у повних диференціалах***, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто якщо

$$\mathrm{d}U(x,y) = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (2)$$

Відносно функцій M і N будемо припускати, що вони неперервні за обома змінними в деякій однозв'язній області G (однозв'язна область – це область без “дірок”, наприклад, прямокутник) і в жодній точці цієї області не перетворюються одночасно в нуль.

З (1), (2) випливає, що рівняння у повних диференціалах можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}U(x,y) = 0,$$

а тому його загальним інтегралом є $U(x,y) = C$. Особливих розв'язків рівняння у повних диференціалах, очевидно, не має.

Наприклад, розглянемо рівняння $(x^3 + y)\,\mathrm{d}x + (x - y)\,\mathrm{d}y = 0$. Розкриємо дужки і згрупуємо доданки так, щоб кожна група була повним диференціалом:

$$x^3\,\mathrm{d}x + (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) - y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \mathrm{d}(xy) - \mathrm{d}\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}\right) = 0.$$

Отже, $U(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + xy - \dfrac{y^2}{2}$, а загальним інтегралом є

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

Зрозуміло, що відшукання функції U за допомогою групування доданків можливе лише тоді, коли наперед відомо, що ліва частина рівняння є повним диференціалом. Але якщо це й відомо, то не завжди вдається легко підібрати відповідне групування доданків. Тому важливо знати:

1) як за виглядом рівняння (1) визначити, чи є воно рівнянням у повних диференціалах;

2) у випадку ствердної відповіді на перше питання як побудувати функцію U і, отже, загальний інтеграл рівняння (1).

Припустимо, що функції M, N мають неперервні похідні $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Нехай (1) – рівняння у повних диференціалах, тобто виконується (2). З іншого боку, використовуючи означення диференціалу, маємо:

$$\mathrm{d}U(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Порівнюючи цю формулу з (2), одержуємо, що

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y),\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y). \tag{3}$$

Диференціюючи першу рівність з (3) за змінною y, а другу – за x (ці операції можливі, бо $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ – неперервні в G), одержуємо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

З цих рівностей, а також з теореми про рівність мішаних похідних випливає, що

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

Умова (4) є необхідною для того, щоб ліва частина рівняння (1) була повним диференціалом. Покажемо, що ця умова є також достатньою. Дійсно, нехай виконується умова (4). Побудуємо функцію $U(x,y)$, для якої справджується рівність (2). Для цього розглянемо першу з рівностей (3). Очевидно, для кожного фіксованого y вона є найпростішим диференціальним рівнянням. Його загальним інтегралом буде

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi(y), \tag{5}$$

де $\varphi(y)$– довільна диференційовна функція. Виберемо функцію $\varphi(y)$ такою, щоб вона задовольняла також другу рівність з (3):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y) \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y).$$

Враховуючи (4), далі маємо

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=$$

$$=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,y)=N(x_0,y).$$

Отже, $\varphi'(y)=N(x_0,y)$, а тому

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y+C.$$

Підставляючи знайдену функцію $\varphi(y)$ в (5), знаходимо функцію $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y+C, \tag{6}$$

де (x_0,y_0) – довільна точка з G.

Отже, *тотожне виконання рівності (4) є необхідною і достатньою ознакою рівняння у повних диференціалах.*

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,\mathrm{d}y = C. \qquad \textbf{(7)}$$

Якщо, будуючи функцію $U(x,y)$, взяти за вихідну другу з рівностей (3), то одержимо інший вираз для загального інтеграла рівняння (1), а саме

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} N(x,y)\,\mathrm{d}y = C. \qquad \textbf{(8)}$$

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$(x+y+\sin x)\,\mathrm{d}x + (x+\cos y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Розв’язання. Оскільки $M(x,y) = x+y+\sin x$, $N(x,y) = x+\cos y$, то $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$, тобто умова (4) виконується. Для знаходження функції $U(x,y)$ маємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x+y+\sin x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x+\cos y.$$

З першого рівняння цієї системи знаходимо

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \cos x + \varphi(y).$$

Підставляючи в друге рівняння системи, одержуємо:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + \cos y \;\;\Rightarrow\;\; \varphi'(y) = \cos y \;\;\Rightarrow\;\; \varphi(y) = \sin y.$$

Отже, $U(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - \cos x + \sin y$, а тому загальним інтегралом є

$$\frac{x^2}{2} + xy - \cos x + \sin y = C. \qquad \textbf{(9)}$$

До цього ж результату приходимо, безпосередньо використовуючи формули (7) або (8). Скористаємося, наприклад, формулою (7):

$$\int_{x_0}^{x} (x+y+\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} (x_0+\cos y)\,\mathrm{d}y = C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + xy - \cos x - \frac{x_0^2}{2} - x_0 y - \cos x_0 + y x_0 + \sin y - y_0 x_0 - \sin y_0 = C.$$

Оскільки x_0 і y_0 – сталі, то загальний інтеграл заданого рівняння після перепозначення сталої також запишеться у вигляді (9). ■

2. Інтегрувальний множник. У п.1 лекції доведено, що рівняння у повних диференціалах завжди інтегрується в квадратурах. Тому виникає питання: чи можна рівняння не у повних диференціалах звести до рівняння у повних диференціалах домноженням на деяку функцію $\mu(x, y)$? Відповідь на це питання в багатьох випадках ствердна.

Наприклад, рівняння $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$, для якого умова (4), як легко перевірити, не виконується, стане рівнянням у повних диференціалах, якщо обидві його частини помножити на x^{-2}. Справді, тоді

$$\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

тобто його ліва частина є повним диференціалом функції

$$U(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Функцію $\mu = \mu(x, y)$ називають ***інтегрувальним множником*** рівняння (1), якщо рівняння

$$\mu M(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

в області G є рівнянням у повних диференціалах.

Умови на функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$: вони неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial y}$ в деякій однозв'язній області G і у жодній точці цієї області одночасно не перетворюються в нуль. Від інтегрувального множника вимагатимемо, щоб від не перетворювався в нуль і мав неперервні частинні похідні першого порядку.

Спробуємо знайти інтегрувальний множник рівняння (1). Застосовуючи ознаку повного диференціала до рівняння (10), одержуємо, що для функції μ повинна виконуватись рівність:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \qquad \textbf{(11)}$$

Отже, для знаходження функції μ одержали рівняння (11), задача інтегрування якого є досить складною. Однак у деяких випадках рівняння (11) вдається легко розв'язати. Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. Нехай $\mu = \mu(x)$ – інтегрувальний множник рівняння (1). Тоді $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$ і рівняння (11) набуває вигляду

$$N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

або (у припущенні, що $N(x, y) \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{N}.$$

Оскільки ліва частина є функцією від *x*, то й права частина повинна бути функцією тільки від *x*. Таким чином, для існування інтегрувального множника вигляду $\mu = \mu(x)$ необхідно, щоб

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv \varphi(x).$$

Тоді $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, звідки знаходимо інтегрувальний множник

$$\mu(x) = Ce^{\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x}.$$

де, наприклад, можна покласти $C = 1$.

Випадок 2. Нехай $\mu = \mu(y)$ – інтегрувальний множник рівняння (1). Аналогічно, як і у випадку 1, можна показати, що за умови

$$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv \psi(y)$$

інтегрувальний множник задається формулою

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,\mathrm{d}\,y}.$$

Приклад 2. Знайти інтегрувальний множник та зінтегрувати рівняння $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}\,x + (y^2 + x + y)\,\mathrm{d}\,y = 0$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Тоді

$$\frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4xy - 1 - 1}{y - 2xy^2} = -\frac{2}{y} \equiv \psi(y).$$

Скориставшись формулою (11), знаходимо інтегрувальний множник

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y}} = e^{-2\ln|y|} = y^{-2}.$$

Домноживши обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}$, одержуємо

$$\left(2x - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}\,x + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}\,y = 0.$$

Отримали рівняння в повних диференціалах, бо $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$.

Загальний інтеграл знаходимо за формулою (8):

$$\int_0^x \left(2x - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}\,x + \int_1^y \left(1 + \frac{0}{y^2} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}\,y = C \quad \Rightarrow$$

$$\left(x^2 - \frac{x}{y}\right)\Bigg|_0^x + \left(y + \ln|y|\right)\Big|_1^y = C \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| - 1 = C \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C. \blacksquare$$

Знаючи інтегрувальний множник, можна знайти не тільки загальний інтеграл рівняння, але й всі його особливі розв’язки. Дійсно, нехай $\mu = \mu(x, y)$ – інтегрувальний множник рівняння (1), тоді

$$\mathrm{d}U = \mu\left(M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y\right).$$

Оскільки

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{d}U = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0,$$

то це рівняння можна переписати так:

$$\mathrm{d}U = 0,\ \frac{1}{\mu} = 0.$$

Перше з цих рівнянь приводить до загального інтеграла

$$U = C,$$

а інше може привести до особливого розв’язку. Отже, особливим розв’язком рівняння (1) може бути тільки такий розв’язок, вздовж якого інтегрувальний множник перетворюється в нуль (тобто такий розв’язок, при наближенні до якого $\mu \to \infty$).

Звідси одержуємо просте правило для знаходження особливих розв’язків:

1) знайти лінії, вздовж яких μ перетворюється в ∞;

2) перевірити, чи є знайдені лінії інтегральними кривими, тобто чи є вони розв’язками рівняння;

3) перевірити, чи містяться знайдені розв’язки в загальному розв’язку.

Ті з знайдених розв’язків, які не містяться в загальному розв’язку, будуть особливими. Якщо з’ясується, що μ не перетворюється в ∞ (або перетворюється в ∞ лише в окремих точках), то рівняння не має особливих розв’язків.

Лекція 6.
Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної (I частина).

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Рівняння степеня n.

1. Основні поняття й означення. На попередніх лекціях вивчалися диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної, тобто рівняння вигляду

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Такі рівняння є частковим випадком більш загального диференціального рівняння

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) називають ***диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної*** або ***неявним диференціальним рівнянням першого порядку.***

Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі (a,b) називають функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на цьому інтервалі і перетворює рівняння (2) у тотожність

$$F\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big) \equiv 0, \quad x \in (a,b).$$

Якщо диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної, тобто рівняння вигляду (1), інтегрувались в явному вигляді лише у найпростіших випадках, то рівняння вигляду (2) в явному вигляді інтегруються ще рідше.

Зауважимо також, що розв'язки рівнянь (2) значно частіше одержуватимемо у неявному вигляді або у параметричній формі. При цьому під розв'язком рівняння (2) у неявному вигляді, як і для рівняння (1), розуміють розв'язок $y = y(x)$, який заданий співвідношенням

$$\Phi(x, y) = 0,$$

яке визначає y як неявну функцію від x.

Функцію, яка задана параметрично,

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ t\in(t_1,t_2),$$

називають розв'язком рівняння (2) на проміжку (t_1,t_2), якщо для всіх $t\in(t_1,t_2)$ виконується тотожність

$$F\left(\varphi(t),\,\psi(t),\,\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\equiv 0,$$

причому $\varphi'(t)\neq 0$, $t\in(t_1,t_2)$.

Таким чином, як для диференціального рівняння (2), так і для рівняння (1), розв'язок можна записати в одному з трьох виглядів:

$$y=y(x);\quad \Phi(x,y)=0;\quad x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t).$$

Кожному з цих випадків на площині Oxy відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою***.

Так само, як і для рівняння (1), однією з найважливіших задач інтегрування рівняння (2) є ***задача Коші***, яка полягає у знаходженні такого розв'язку $y=y(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0)=y_0. \tag{3}$$

З геометричної точки зору розв'язати задачу Коші (2), (3) означає, що серед інтегральних кривих рівняння (2) потрібно знайти ту криву, яка проходить через задану точку (x_0,y_0) площини Oxy.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y'^2+(x+y)y'+xy=0.$$

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння відносно y' (як квадратне рівняння), маємо два диференціальні рівняння, розв'язані відносно похідної:

$$y'=-x,\qquad y'=-y.$$

Інтегруючи, знаходимо дві сім'ї інтегральних кривих:

$$y=-\frac{x^2}{2}+C,\qquad y=Ce^{-x}.$$

Отже, через кожну точку площини *Oxy* проходять дві інтегральні криві. При цьому в кожній точці інтегральної кривої з сім'ї

$$y = -\frac{x^2}{2} + C$$

коефіцієнт дотичної дорівнює абсцисі цієї точки, взятої з протилежним знаком, а у кожній точці інтегральної кривої з сім'ї

$$y = Ce^{-x}$$

кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює ординаті точки, взятої з протилежним знаком. ■

Важливо знати, які умови повинна задовольняти функція $F(x, y, y')$, щоб через задану точку (x_0, y_0) в заданому напрямі y_0' проходила одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (2). Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай функція $F(x, y, y')$ у рівнянні (2) задовольняє такі три умови:*

1) вона визначена і неперервно диференційовна разом з своїми частинними похідними в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$.

Тоді рівняння (2) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційовний у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і для якого

$$y'(x_0) = y_0'.$$

Доведення. Згідно з теоремою про існування неявної функції від декількох змінних рівняння (2) при зроблених припущеннях визначає y' як однозначну функцію від *x*, *y*:

$$y' = f(x, y),$$

причому функція $f(x, y)$ – неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку і така, що

$$f(x_0, y_0) = y_0'.$$

Застосовуючи тепер до рівняння $y' = f(x, y)$ з початковими даними x_0, y_0 теорему Пікара (лекція 2), можемо стверджувати, що воно має єдиний розв’язок $y = y(x)$, який визначений та неперервно диференційовний в деякому околі точки $x = x_0$ та задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Оскільки при цьому

$$y'(x_0) = f\left(x_0, y(x_0)\right) = f(x_0, y_0) = y_0',$$

тобто

$$y'(x_0) = y_0',$$

то знайдений розв’язок $y = y(x)$ є шуканим розв’язком рівняння (2). Теорему доведено. ►

Припустимо, що рівняння (2) можна розв’язати відносно похідної. Тоді в деякому околі точки (x_0, y_0) для y' у загальному випадку матимемо декілька дійсних значень:

$$y' = f_k(x, y), \ \ k = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

тобто m рівнянь першого порядку, розв’язаних відносно похідної. При цьому, якщо кожна з функцій $f_k(x, y)$ з (4) задовольняє умови теореми Пікара про існування та єдиність розв’язку, то через точку (x_0, y_0) буде проходити m інтегральних кривих рівняння (2). Якщо кожна інтегральна крива має нахил дотичної, який не збігається з нахилом дотичної інших інтегральних кривих, то кажуть, що задача Коші має єдиний розв’язок.

Розглянемо тепер такі поняття, як загальний, частинний та особливий розв’язки рівняння (2). Для цього припустимо, що рівняння (2) в околі точки (x_0, y_0) можна розв’язати відносно похідної, тобто воно розпадається на сукупність рівнянь (4). Нехай кожне з цих рівнянь має загальний розв’язок

$$y = \varphi_k(x, C), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

або загальний інтеграл

$$\Phi_k(x,y,C)=0,\ k=1,2,...,m, \quad (6)$$

де C – довільна стала. Сукупність загальних розв'язків (5) або загальних інтегралів (6) називають ***загальним інтегралом*** рівняння (2) (це означення можна використовувати також тоді, коли (2) відносно y' має нескінченну кількість розв'язків).

Розв'язок рівняння (2), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають ***частинним розв'язком*** цього рівняння.

Особливим розв'язком рівняння (2) називають розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується властивість єдиності, тобто через кожну точку якого проходить щонайменше дві інтегральні криві, що мають однаковий напрям дотичної.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y'^3-4x^2y'=0. \quad (7)$$

Розв'язання. Легко показати, що рівняння (7) еквівалентне сукупності трьох диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y'=0, \quad y'=2x, \quad y'=-2x.$$

Загальними розв'язками цих рівнянь відповідно є

$$y=C, \quad y=x^2+C, \quad y=-x^2+C. \quad (8)$$

Сукупність загальних розв'язків (8) є загальним інтегралом рівняння (7), причому розв'язок задачі Коші у кожній точці площини Oxy, що не належить осі Oy, єдиний. Справді, через кожну точку (x_0,y_0), де $x_0\neq 0$, проходять три інтегральні криві, а саме:

$$y=y_0, \quad y=x^2+y_0-x_0^2, \quad y=x^2+y_0+x_0^2,$$

дотичні до яких у цій точці утворюють з додатним напрямом осі Ox кути 0, $\operatorname{arctg}(2x_0)$, $-\operatorname{arctg}(2x_0)$ відповідно.

Щодо точок, які належать осі Oy, то хоча через кожну таку точку проходять три інтегральні криві з сім'ї (8), в цих точках задача Коші має не єдиний розв'язок (через кожну точку проходять три інтегральні криві, що мають однаковий напрям дотичної). ■

2. Рівняння степеня *n*. Найбільш важливим частковим випадком рівняння (1) є ***рівняння першого порядку n-го степеня*.** Так називають рівняння вигляду

$$a_0(x,y)\left(y'\right)^n + a_1(x,y)\left(y'\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0, \qquad \textbf{(9)}$$

де $a_j(x,y),\ j=0,1,\ldots,n,$ – функції, неперервні у деякій області $G \subset \mathbf{R}^2$, причому $a_0(x,y) \neq 0$.

Згідно з основною теоремою алгебри рівняння (9) визначає n значень для y' (дійсних або комплексних). Відкидаючи комплексні значення, матимемо m $(m \le n)$ диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_k(x,y),\ \ k=1,2,\ldots,m. \qquad \textbf{(10)}$$

Припустимо, що в кожній точці (x,y) області G інтегральні криві різних рівнянь (10) не дотикаються одна до одної. Тоді сукупність загальних розв'язків

$$y = \varphi_k(x,C),\ \ k=1,2,\ldots,m,$$

або загальних інтегралів

$$\Phi_k(x,y,C)=0,\ \ k=1,2,\ldots,m,$$

рівнянь (10) є загальним інтегралом рівняння (9). Його можна записати також у вигляді

$$\left(y-\varphi_1(x,C)\right)\left(y-\varphi_2(x,C)\right)\cdot\ldots\cdot\left(y-\varphi_m(x,C)\right)=0$$

або як

$$\Phi_1(x,y,C)\cdot\Phi_2(x,y,C)\cdot\ldots\cdot\Phi_m(x,y,C)=0.$$

Якщо хоч одне з рівнянь (10) має особливі розв'язки, то вони будуть особливими розв'язками і для рівняння (9).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y'^2 + (y^2-1)y' - y^2 = 0. \qquad \textbf{(11)}$$

Розв'язання. Рівняння (11) рівносильне сукупності двох диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y'=1, \quad y'=-y^2,$$

загальними розв'язками яких є

$$y = x + C \quad \text{та} \quad y = \frac{1}{x + C}$$

відповідно. Отже, співвідношення

$$(y - x - C)\cdot\left(y - \frac{1}{x + C}\right) = 0$$

є загальним інтегралом рівняння (11). ■

Зауважимо, що через точку (x_0, y_0) проходять дві інтегральні криві рівняння (11), а саме

$$y = x + y_0 - x_0, \qquad y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{y_0} - x_0} \quad (y_0 \neq 0),$$

тобто розв'язок задачі Коші буде єдиним. Але у випадку, коли вздовж деяких ліній значення деяких з функцій $\varphi_k(x, y)$ співпадають, то в точках цих ліній може відбуватися порушення єдиності розв'язку задачі Коші. Такі лінії будуть підозрілими на особливі розв'язки.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y'^2 - 2xy' = 0. \tag{12}$$

Розв'язуючи рівняння (12) відносно y', одержуємо два диференціальні рівняння

$$y' = 0, \quad y' = 2x.$$

Отже, $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 2x$. Тому підозрілою на особливий розв'язок буде вісь Oy $(x = 0)$. Проте, очевидно, вона не є інтегральною кривою.

Зауважимо, що вздовж таких ліній можливе так зване "склеювання" розв'язків. Так, через кожну точку $(0, y_0)$ осі Oy, окрім розв'язків $y = y_0$, $y = y_0 + x^2$ рівняння (12), проходять також інтегральні криві

$$y = \begin{cases} x^2 + y_0, & x \le 0, \\ y_0, & x \ge 0, \end{cases} \quad \text{та} \quad y = \begin{cases} y_0, & x \le 0, \\ y_0 + x^2, & x \ge 0. \end{cases}$$

Лекція 7.
Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно похідної (ІІ частина).

План.

1. Неповні рівняння, не розв’язані відносно похідної.
2. Рівняння Лагранжа, Клеро.

1. Неповні рівняння, не розв’язані відносно похідної. Завдання інтегрування рівняння

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

полегшується, якщо його ліва частина не містить незалежної змінної або шуканої функції (або і незалежної змінної, і шуканої функції). Такі рівняння називають ***неповними***. Найпростішим з них є ***рівняння, яке містить тільки похідну***, тобто рівняння вигляду

$$F(y')=0. \tag{2}$$

Припустимо, що рівняння (2) має деяку (скінченну або не скінченну) кількість дійсних розв’язків

$$y'=k_j \quad (j=1,2,\ldots), \tag{3}$$

де k_j – деякі сталі. Інтегруючи (3), знаходимо

$$y=k_jx+C \qquad \Rightarrow \qquad k_j=\frac{y-C}{x}.$$

Підставляючи знайдені значення k_j у рівняння (2), одержуємо загальний інтеграл цього рівняння:

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0. \tag{4}$$

Наприклад, рівняння $y'^3-3y'^2+1=0$ має такий загальний інтеграл:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3-3\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+1=0.$$

Розглянемо тепер ***рівняння, яке явно не містить шуканої функції***, тобто рівняння вигляду

$$F\left(x, y'\right)=0 \qquad \textbf{(5)}$$

Якщо рівняння (5) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y' = f_k(x) \quad (k=1,2,...), \qquad \textbf{(6)}$$

де $f_k(x)$ – неперервні функції, то сукупність загальних розв'язків рівнянь (6)

$$y=\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x+C \quad (k=1,2,...)$$

визначає загальний інтеграл рівняння (5).

Якщо ж рівняння (5) не розв'язується в елементарних функціях відносно y', але можна знайти такі функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, що

$$F\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\equiv 0,$$

то це рівняння можна записати у вигляді

$$x=\varphi(t),\;\; y'=\psi(t). \qquad \textbf{(7)}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}\,y=y'\mathrm{d}\,x$, а також формули (7), легко знайти загальний розв'язок рівняння (5) у параметричній формі. Параметричний вираз для x маємо з (7): $x=\varphi(t)$. Знайдемо параметричний вираз для y. Оскільки

$$\mathrm{d}\,y=\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

то

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t+C.$$

Таким чином, загальним розв'язком у параметричній формі рівняння (5) є

$$x=\varphi(t),\;\; y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t+C. \qquad \textbf{(8)}$$

Якщо з (8) вдається вилучити параметр t, то можна одержати загальний розв'язок (загальний інтеграл) у явному чи неявному вигляді.

Якщо рівняння (5) розв'язне відносно x, тобто $x=\varphi(y')$, то

$$y'=t,\;\; x=\varphi(t),$$

а тому його загальний розв'язок можна записати у параметричній формі:

$$x=\varphi(t),\ \ y=\int t\varphi'(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$e^{y'}-y'-x=0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна розв'язати відносно *x*:

$$x=e^{y'}-y'.$$

Представимо тепер його у параметричній формі, поклавши $y'=t$:

$$x=e^{t}-t,\qquad y'=t.$$

Тоді

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=t(e^{t}-t)\mathrm{d}t\quad\Rightarrow\quad y=\int t(e^{t}-t)\mathrm{d}t+C=(t-1)e^{t}-\frac{t^{2}}{2}+C.$$

Таким чином, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x=e^{t}-t,\qquad y=(t-1)e^{t}-\frac{t^{2}}{2}+C.\ \blacksquare$$

І, нарешті, розглянемо останнього представника неявних рівнянь, а саме ***рівняння, яке явно не містить незалежної змінної***. Отже, нехай рівняння (1) має такий загальний вигляд

$$F\left(y,y'\right)=0. \tag{9}$$

Якщо рівняння (9) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y'=f_k(y)\quad(k=1,2,\ldots) \tag{10}$$

і $f_k(y)\neq 0,\ k=1,2,\ldots,$ то сукупність рівностей

$$x=\int\frac{\mathrm{d}y}{f_k(y)}=C,\qquad k=1,2,\ldots,$$

визначає його загальний розв'язок. Розв'язками рівняння (9) є також

$$y=b_j,\quad j=1,2,\ldots,$$

де b_j– корені рівняння $f_k(y)=0$. Ці розв'язки можуть виявитися особливими.

Якщо рівняння (9) не розв'язується відносно y', але допускає параметричне представлення

$$F\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\equiv 0,$$

то

$$y=\varphi(t),\;\; y'=\psi(t),$$

а тому залишається знайти параметричний вираз для x. Оскільки

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}{\psi(t)},$$

то

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C.$$

Таким чином, загальним розв’язком у параметричній формі рівняння (9) є

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C,\;\; y=\varphi(t). \qquad \textbf{(11)}$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$\ln y'+y'^2-y=0.$$

Розв’язання. Нехай $y'=t$. Тоді $y=t^2+\ln t$. Далі маємо

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{\mathrm{d}(t^2+\ln t)}{t}=\left(2+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Отже, загальним розв’язком у параметричній формі рівняння є

$$x=2t-\frac{1}{t}+C,\quad y=t^2+\ln t. \;\blacksquare$$

2. Рівняння Лагранжа, рівняння Клеро. ***Рівнянням Лагранжа***[1)] називають рівняння вигляду

$$y=\varphi(y')\cdot x+\psi(y'), \qquad \textbf{(12)}$$

де φ і ψ – диференційовані функції змінної y'.

Покажемо, що рівняння Лагранжа завжди інтегрується в квадратурах. Для цього позначимо

$$y'=p.$$

[1)] Див. зноску на стор. 12.

Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad \textbf{(13)}$$

Диференціюючи (13) за змінною x, одержуємо

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{dx} + \psi'(p)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{dx} \qquad \Rightarrow$$

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,x}. \qquad \textbf{(14)}$$

Якщо $\varphi(p) - p \neq 0$, то рівняння (14) можна записати у вигляді лінійного рівняння відносно функції $x(p)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Нехай загальним інтегралом цього рівняння є

$$F\left(p, x, C\right) = 0. \qquad \textbf{(15)}$$

Тоді співвідношення (13) і (15) утворюють загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі (параметром є величина p).

Виключаючи, якщо це можливо, параметр p з системи

$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p), \\ F\left(p, x, C\right) = 0, \end{cases}$$

Одержимо загальний інтеграл у явному вигляді, тобто $\Phi\left(x, y, C\right) = 0$.

Якщо числа p_k, $k = 1, 2, \ldots,$ – корені рівняння $\varphi(p) - p = 0$, то відповідно одержимо розв'язки

$$y = p_k x + \psi(p_k),$$

які можуть виявитися особливими.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = xp^2 + p^2. \qquad \textbf{(16)}$$

Диференціюючи (16), знаходимо

$$p\,\mathrm{d}\,x = p^2\,\mathrm{d}\,x + 2xp\,\mathrm{d}\,p + 2p\,\mathrm{d}\,p \quad \Rightarrow$$

$$p\,\mathrm{d}x = p^2\,\mathrm{d}x + (2xp + 2p)\,\mathrm{d}p \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{1-p} \quad \left(p^2 - p \neq 0\right).$$

Інтегруючи одержане рівняння (воно є лінійним), знаходимо:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1.$$

Тоді з (16) одержуємо параметричний вираз для y:

$$y = \left(\frac{C}{(p-1)^2 - 1} - 1\right)p^2 + p^2 = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння у параметричній формі є

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \qquad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Вилучаючи параметр p, одержуємо загальний розв'язок у явному вигляді:

$$y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2.$$

І, нарешті, кореням $p_1 = 0$ та $p_2 = 1$ рівняння $p^2 - p = 0$ відповідатимуть розв'язки $y = 0$, $y = x + 1$ відповідно. Перший з них є особливим, а другий – частинним. ■

Розглянемо тепер випадок, коли в рівнянні Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$. Тоді це рівняння має вигляд

$$y = xy' + \psi(y') \tag{17}$$

і його називають ***рівнянням Клеро***[1].

Позначимо $y' = p$. Тоді

$$y = px + \psi(p). \tag{18}$$

Диференціюючи рівняння (18), одержуємо:

$$p' \cdot \left(x + \psi'(p)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p' = 0 \quad \text{або} \quad x + \psi'(p) = 0.$$

---

[1] **КЛЕРО** (Clairaut) Алексі Клод (1713-1765) – французький математик.

Розв’язком першого рівняння є $p = C$, що разом з (18) дає загальний розв’язок рівняння Клеро:

$$y = Cx + \psi(C). \tag{19}$$

Запис цього розв’язку легко запам’ятати: потрібно у рівнянні Клеро замінити y' на C (порівняйте з (17)).

Рівняння $x + \psi'(p) = 0$ разом з

$$y = px + \psi(p)$$

також є розв’язком рівняння Клеро, але у параметричному вигляді.

Вилучаючи з системи

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p), \end{cases}$$

параметр p, одержимо $F(x, y) = 0$. Це рівняння кривої, яка не належить сім’ї (19), а отже є особливим розв’язком рівняння Клеро.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння Клеро

$$y = xy' - \frac{1}{2}y'^2.$$

Розв’язання. Нехай $y' = p$, тоді

$$y = xp - \frac{1}{2}p^2.$$

Диференціюючи цю рівність, одержуємо

$$(x - p)p' = 0.$$

Якщо $p' = 0$, то $p = C$, а тому загальним розв’язком є

$$y = Cx - \frac{1}{2}C^2.$$

З рівняння $x - p = 0$ знаходимо розв’язок

$$x = p, \quad y = px - \frac{1}{2}p^2.$$

у параметричній формі, який є особливим. Виключаючи p, цей розв’язок можна записати у вигляді $y = \dfrac{x^2}{2}$. ■

Лекція 8.
Деякі геометричні аспекти теорії диференціальних рівнянь першого порядку.

План.

1. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку.
2. Метод ізоклін.
3. Ізогональні та ортогональні траєкторії.

1. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Розглянемо рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної:

$$y' = f(x, y), \qquad \textbf{(1)}$$

де f – неперервна функція, задана у кожній точці області G.

Якщо розглядати x, y як декартові координати, то, як відомо, розв'язку $y = \varphi(x)$, $\Phi(x, y) = 0$ або $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, рівняння (1) на площині Oxy відповідає деяка крива, яку називають ***інтегральною кривою*** цього рівняння. З'ясуємо геометричний зміст інтегральних кривих. Чим вони відрізняються від інших кривих на площині?

Зауважимо, що рівняння (1) встановлює відповідність між кожною точкою $M(x, y) \in G$ і кутовим коефіцієнтом y' дотичної до інтегральної кривої у цій точці (рис. 1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(x, y).$$

Іншими словами, якщо функція $f(x, y)$ визначена і скінченна у кожній точці області G, то кожній точці $M \in G$ відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Таким чином, в області G одержуємо ***поле напрямів (векторне поле)***. Це поле можна зобразити, якщо помістити у відповідних точках області G вектори (наприклад, одиничні), які утворюють з віссю Ox кут $\operatorname{arctg}(y')$ (додатний напрям вектора можна взяти довільним, бо арктангенс визначає кут лише з точністю до кратного π, рис. 2).

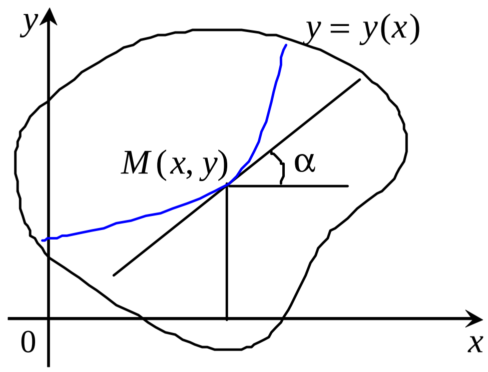

Рис. 1

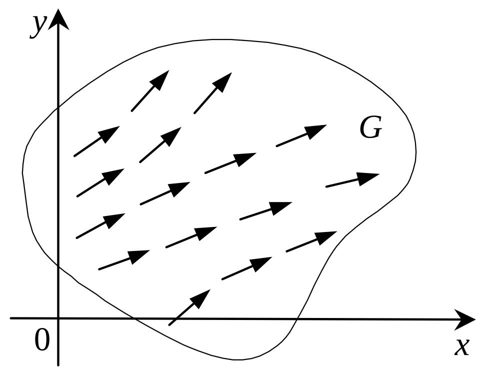

Рис. 2

У такій постановці інтегральні криві рівняння (1) – це криві, для яких згадані напрями є напрямами дотичних. З геометричної точки зору зінтегрувати диференціальне рівняння першого порядку означає знайти криві, напрями дотичних до яких у кожній точці співпадають з напрямом поля у цій точці. Ця властивість і вирізняє інтегральні криві серед усіх інших кривих. Простіше кажучи, потрібно провести криву так, щоб розставлені на полі вектори співпадали у кожній точці з напрямом дотичної до шуканої кривої.

2. Метод ізоклін. Криву, у кожній точці якої нахил векторного поля, що визначає диференціальне рівняння (1), є сталим, називають ***ізокліною*** (з грецької isos – рівний, однаковий, klino – нахиляю). Отже, рівняння ізоклін має вигляд

$$f(x, y) = k, \tag{2}$$

де k – довільна стала. Змінюючи в (2) значення k, матимемо множину ізоклін на площині Oxy. За допомогою цих ізоклін і сталих кутів $\alpha = \operatorname{arctg} k$ нахилу дотичних до інтегральних кривих, які їх перетинають, можна наближено відтворити картину поля інтегральних кривих рівняння (1). Такий метод дослідження диференціального рівняння називають ***методом ізоклін***.

Для точнішої побудови інтегральних кривих потрібно враховувати області знакосталості похідних y' (монотонність інтегральних кривих) і y'' (опуклість інтегральних кривих). Зокрема, якщо права частина рівняння (2) зберігає додатній (від'ємний) знак, то будь-який розв’язок цього рівняння зростає (спадає) в кожній своїй точці, тому всі інтегральні криві напрямлені вверх (вниз). Лінію, через кожну точку якої проходить інтегральна крива, яка має в цій точці екстремум, називають ***лінією екстремумів*** (це ізокліна з $k=0$).

Якщо похідна y'', тобто функція $y''=f'_x+f'_y\cdot f$ зберігає додатній (від’ємний) знак, то будь-яка інтегральна крива вгнута догори (донизу). Лінія, у точках якої інтегральні криві мають перегин, називається ***лінією точок перегину***.

Якщо в деякій точці (x_0,y_0) функція $f(x,y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy; тоді замість рівняння (1) потрібно розглянути “перевернуте” рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f(x,y)}=f_1(x,y). \qquad \mathbf{(1')}$$

Якщо функція $f(x,y)$ в деякій точці (x_0,y_0) набирає вигляду $0/0$ і ця невизначеність “не розкривається”, то і права частина рівняння $(1')$ матиме у цій точці таку ж невизначеність. У цьому випадку будемо говорити, що в точці (x_0,y_0) поле напрямів не визначене і через цю точку не проходить жодна інтегральна крива, однак це не виключає можливості існування інтегральних кривих вигляду $y=y(x)$ або $x=x(y)$, які володіють відповідно властивістю

$$y(x)\to y_0 \text{ при } x\to x_0 \quad \text{або} \quad x(y)\to x_0 \text{ при } y\to y_0.$$

Приклад 1. Використовуючи метод ізоклін, наближено побудувати інтегральні криві рівняння $y'=2x(1-y)$.

Розв’язання. Згідно з (2) маємо сім’ю ізоклін $2x(1-y)=k$, де k – дійсний параметр. Це рівняння задає дві прямі: $x=0$ і $y=1$ при $k=0$ та сім’ю гіпербол $y=1-\dfrac{k}{2x}$ при $k\neq 0$. Пряма $y=1$ – інтегральна крива, оскільки функція $y=1$ є розв’язком рівняння. Інтегральні криві перетинають вісь ординат (ізокліну при $k=0$) під прямими кутом, тобто дотичні до них паралельні до осі абсцис. Це означає, що точки прямої $x = 0$ є точками екстремуму розв'язків.

Для з'ясування характеру екстремальних точок знайдемо другу похідну функції $y = y(x)$:

$$y'' = 2(1 - y) - 2xy' = 2(1 - y) - 2x \cdot 2x(1 - y) = 2(1 - y)(1 - 2x^2).$$

Бачимо, що точки осі ординат, для яких $y > 1$, є точками максимуму, а точки осі ординат, для яких $y < 1$, – точками мінімуму інтегральних кривих (якщо $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то при $f'(x_0) > 0$ точка x_0 – точка мінімуму, а при $f'(x_0) < 0$ x_0 – точка максимуму).

З виразу для другої похідної випливає також, що точки прямих $x = \pm\sqrt{2}/2$ є точками перегину інтегральних кривих, бо у них $y'' = 0$.

Ізокліни $x = 0$ і $y = 1$ розбиває координатну площину на чотири частини, у кожній з яких похідна y' зберігає знак (рис. 3). Отже, перетинаючи пряму $x = 0$, інтегральні криві переходять з області зростання функції $y(x)$ в область спадання, якщо $y > 1$, і з області спадання функції $y(x)$ в область зростання, якщо $y < 1$.

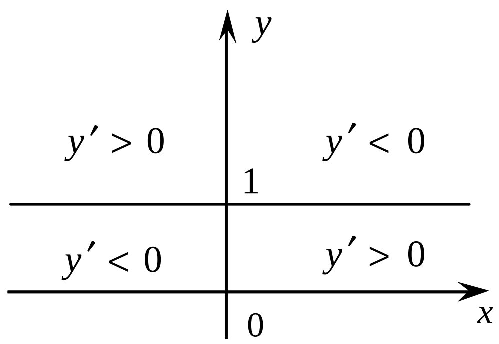

Рис. 3

Розглянемо ще дві ізокліни: $y = 1 - \dfrac{1}{2x}$ при $k = 1$ і $y = 1 + \dfrac{1}{2x}$ при $k = -1$. Дотичні, проведені до інтегральних кривих в точках перетину з цими ізоклінами, утворюють з віссю абсцис кути 45 і 135° відповідно.

Наближено інтегральні криві побудовані на рис. 4.

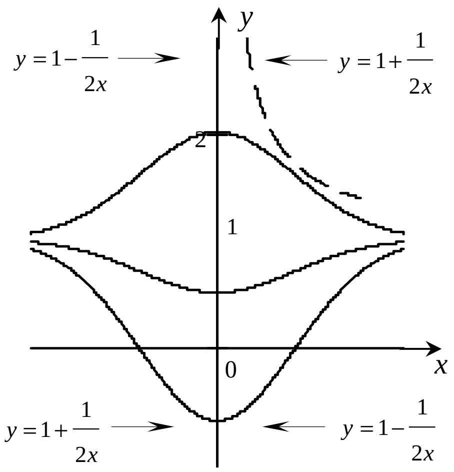

Рис 4.

3. Ізогональні та ортогональні траєкторії. Як ще один приклад геометричного застосування диференціальних рівнянь першого порядку, розглянемо так звану ***задачу про траєкторії***.

Нехай на площині Oxy маємо однопараметричну сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{3}$$

Лінії, які перетинають криві цієї сім'ї під сталим кутом[1] α, називають ***ізогональними траєкторіями*** сім'ї кривих. Якщо $\alpha = \pi/2$, то ізогональну траєкторію називають ***ортогональною***.

Покажемо, що задача відшукання ізогональних (ортогональних) траєкторій зводиться до інтегрування диференціального рівняння першого порядку.

Нехай $M(\xi, \eta)$ – довільна точка шуканої ізогональної траєкторії l_1, а φ і μ – кути, які утворюють з віссю Ox дотичні до деякої кривої l сім'ї (3) в точці M та до ізогональної траєкторії у цій самій точці відповідно (рис. 5).

Очевидно, що $\mu = \varphi + \alpha = \text{const}$. Припустимо, що $\alpha \neq \pi/2$ і позначимо $k = \operatorname{tg}\varphi$. Враховуючи, що $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\mu$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, одержуємо:

[1] Кут між двома кривими у точці їх перетину – це кут між дотичними до них у цій точці.

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\mu - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\mu}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - k}{1 + k \cdot \dfrac{d\eta}{d\xi}}. \qquad \textbf{(4)}$$

Рівність (4) встановлює зв’язок між напрямом дотичної у довільній точці M траєкторії l_1 і напрямом дотичної до кривої l сім’ї (3), яка проходить через цю точку.

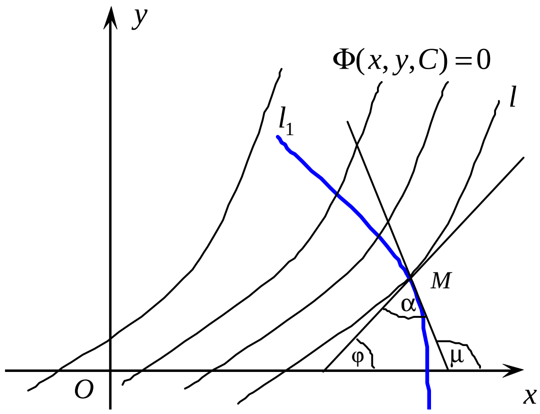

Рис. 5

Складемо тепер диференціальне рівняння сім’ї (3). Для цього, як відомо з лекції 1, потрібно виключити параметр C з системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' = 0. \end{cases}$$

Тоді отримаємо рівність

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

яка виконується для всіх точок області, заповненої кривими сім’ї (3), у тому числі й у точці M. Але у цій точці ми можемо замінити x і y на ξ і η, а y' – на її значення з рівності (2). Одержуємо співвідношення

$$F\left(\xi, \eta, \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} - k}{1 + k \cdot \dfrac{d\eta}{d\xi}}\right) = 0, \qquad \textbf{(6)}$$

яке пов'язує координати довільної точки M траєкторії l_1 з напрямом дотичної до неї у цій точці. Отже, (4) – рівняння сім'ї ізогональних траєкторій.

Якщо $\alpha=\pi/2$, то одержуємо

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\mu-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)=-\operatorname{ctg}\mu=-\frac{1}{\operatorname{tg}\mu},$$

і, отже, замість співвідношення (4) будемо мати:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}.$$

Замінюючи тепер в (3) x, y і y' відповідно на ξ, η, $-\left(\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1}$, одержуємо шукане диференціальне рівняння сім'ї ортогональних траєкторій:

$$F\left(\xi,\eta,-\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1}\right)=0. \qquad \textbf{(7)}$$

Отримавши диференціальне рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій, ми звичайно можемо переписати його, замінивши ξ і η на x і y. Таким чином, приходимо до наступного ***правила знаходження диференціального рівняння сім'ї ізогональних (ортогональних) траєкторій*****:**

1) скласти диференціальне рівняння заданої сім'ї;

2) замінити в отриманому рівнянні y' на:

$$\frac{y'-k}{1+ky'},\ \text{якщо}\ \varphi\neq\frac{\pi}{2}\quad (k=\operatorname{tg}\varphi),$$

або на

$$-\frac{1}{y'},\ \text{якщо}\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 2. Скласти диференціальне рівняння ортогональних траєкторій сім'ї кривих $\Phi(x,y,C)\equiv y^2-Cx^3=0$.

Розв'язання. Складемо диференціальне рівняння цієї сім'ї. Маємо

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'\equiv 2yy'-3Cx^2=0.$$

Вилучаючи параметр C, одержуємо диференціальне рівняння

$$2yy'-\frac{3y^2}{x}=0.$$

З формули (7) випливає, що шуканим рівнянням ортогональних траєкторій є

$$-\frac{2}{y'}-\frac{3y}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x\,\mathrm{d}x+3y\,\mathrm{d}y=0. \ ■$$

Приклад 3. Знайти траєкторії, які перетинають концентричні кола $x^2+y^2=R^2$ під кутом α.

Розв'язання. Диференціальним рівнянням сім'ї кіл, як легко переконатись, є $x+yy'=0$. Диференціальним рівнянням траєкторій (на підставі формули (6)) є

$$\xi+\eta\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}-m}{1+m\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}=0 \quad\Rightarrow\quad (m\xi+\eta)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}+\xi-m\eta=0 \quad (m=\mathrm{tg}\,\varphi).$$

Якщо позначити змінні через $x,\ y$, то рівняння траєкторій запишеться так:

$$(x-my)\,\mathrm{d}x+(mx+y)\,\mathrm{d}y=0.$$

Отримане рівняння є однорідним. Його загальним інтегралом є

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}+m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln C \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-m\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Останнє рівняння є рівнянням шуканої сім'ї ізогональних траєкторій. Якщо перейти до полярної системи координат ($x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$), то рівняння траєкторій запишеться у вигляді $\rho=Ce^{-m\varphi}$. Отже, шуканими траєкторіями є логарифмічні спіралі. ■

Лекція 9.
Диференціальні рівняння вищих порядків.

План.

1. Основні поняття й означення. Задача Коші.
2. Класифікація розв'язків.
3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку n.

1. Основні поняття й означення. Задача Коші. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Вважатимемо, що його можна розв'язати відносно старшої похідної, тобто

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a,b) (a і b можуть бути і невласними числами), називають ***розв'язком*** рівняння (1) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a,b)$ перетворює це рівняння в тотожність.

Кожному розв'язку рівняння (1), так само, як і розв'язку рівняння першого порядку, на площині (x, y) відповідає деяка крива, яку, як і раніше, називатимемо ***інтегральною кривою***.

Для рівняння (2) ***задача Коші***[1)] формулюється так: серед усіх розв'язків рівняння (2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який для $x = x_0$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ \ldots\ ,\ \ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad \textbf{(3)}$$

де x_0 – довільна точка з (a,b), $y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – довільні наперед задані числа. Сукупність чисел $x_0, y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ називають ***початковими даними***, а умови (3) – ***початковими умовами*** рівняння (2).

Для диференціального рівняння другого порядку

[1)] Див. зноску на стор. 10.

$$y'' = f(x, y, y') \qquad \textbf{(4)}$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 . \qquad \textbf{(5)}$$

З геометричної точки зору задача Коші у випадку $n = 2$ полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має у цій точці заданий напрям дотичної y'_0, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_0 .$$

Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння *n*-го порядку не означає, що через задану точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної. Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (4), (5) потрібно розуміти в тому сенсі, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (4) така, що дотична до неї в цій точці утворює з додатним напрямом осі *Ox* кут α_0, тангенс якого дорівнює заданому початковому значенню першої похідної y'_0, $\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_0$. У той же час разом з цією інтегральною кривою через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з інакшим нахилом дотичної у цій точці.

Приклад 1. Знайти розв'язки рівняння $y'' + y = 0$, які задовольняють початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Легко довести, що всі розв'язки рівняння містяться в формулі $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Звідси $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Виберемо C_1 і C_2, щоб задовольнити початкові умови. Очевидно, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Отже, шуканим розв'язком буде $y = \cos x$. Цей розв'язок єдиний, однак через точку (0,1), крім кривої $y = \cos x$, проходить безліч інтегральних кривих $y = \cos x + C_2 \sin x$, де $C_2 \neq 0$ – довільна стала, але жодна з дотичних до них в точці (0,1) не співпадає з дотичною до кривої $y = \cos x$ у цій точці. ■

Розглянемо тепер питання про механічне трактування рівняння другого порядку, його розв'язків та задачі Коші. Нехай матеріальна точка маси m рухається по прямій, яку приймемо за вісь Ox, під дією сили $F\left(t,x,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$, залежної від часу t, положення x і швидкості $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ у момент часу t. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, маємо:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right), \tag{6}$$

де $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ – прискорення точки в момент часу t. Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right). \tag{7}$$

Кожному розв'язку $x=x(t)$ відповідає певний ***закон руху***. Тому часто розв'язок $x=x(t)$ називають ***рухом***, який визначений рівнянням (7). Задача інтегрування рівняння (7) полягає у знаходженні усіх рухів, які визначені цим рівнянням, та у вивченні їх властивостей.

Дамо механічне тлумачення задачі Коші для рівняння (7). Ця задача полягає у знаходженні такого руху $x=x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0)=x_0,\ \ x'(t_0)=x_0',$$

тобто в початковий момент часу $t=t_0$ точка повинна займати задане положення x_0 і мати задану швидкість x_0'.

Достатня умова існування розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку, поширюється і на випадок рівняння n-го порядку. А саме: для існування (неперервного разом з похідними до порядку n включно) розв'язку задачі Коші для рівняння (2) досить припустити, що права частина цього рівняння є неперервною в околі початкових даних (***теорема Пеано***).

Наведемо основну теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші у спрощеному формулюванні (без умови Ліпшіца на функцію $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$).

Теорема (Пікара). *Нехай функція* $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ *з рівняння (2) визначена у деякій замкненій обмеженій області*

$$Q: \quad |x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b, \quad |y' - y_0'| \le b, \ \dots, \ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \le b,$$

де $a > 0$, $b > 0$, *і задовольняє у Q такі дві умови:*

1) *вона неперервна за усіма своїми аргументами, а отже, й обмежена, тобто*

$$\left|f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)\right| \le M, \quad M > 0;$$

2) *вона має обмежені частинні похідні за змінними* $y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (2), (3), визначений і неперервний разом з похідними до порядку n включно на відрізку $|x - x_0| \le h$, *де*

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_{Q}\left\{M, |y'|, ..., |y^{(n-1)}|\right\}}\right\}.$$

2. Класифікація розв'язків. ***Загальним розв'язком*** рівняння (2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від *n* довільних сталих:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right). \qquad \textbf{(8)}$$

З геометричної точки зору маємо сім'ю інтегральних кривих на площині (x, y), залежну від *n* параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, причому рівняння цієї сім'ї розв'язане відносно *y*.

Загальний розв'язок рівняння (2) у неявному вигляді (у вигляді, не розв'язаному відносно *y*)

$$\Phi\left(x, y, C_1, ..., C_n\right) = 0$$

називають ***загальним інтегралом*** цього рівняння.

У деяких випадках знаходження загального розв'язку рівняння (2) у явній чи неявній формі є досить проблематичним. У таких випадках, інтегруючи рівняння (2), шукають сім'ю інтегральних кривих, яка залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, ..., C_n), \\ y = \psi(p, C_1, ..., C_n). \end{cases}$$

Таку сім'ю інтегральних кривих називають ***загальним розв'язком рівняння*** (2) ***у параметричній формі.*** Якщо вдається виключити параметр p, то одержуємо загальний розв'язок в неявному чи навіть у явному вигляді.

Поняття частинних та особливих розв'язків для диференціальних рівнянь вищих порядків вводяться аналогічно, як і для рівняння першого порядку. Наприклад, розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2) називають ***частинним***, якщо він складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння. Розв'язок, який можна одержати з формули загального розв'язку для довільних числових значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, буде, очевидно, частинним. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***.

Аналогія спостерігається також і у постановці задачі Коші для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної. Зауважимо тільки, що диференціальне рівняння n-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, і кількість цих може бути $n-1$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Розв'язання. Позначимо $y' = z$, де z – нова шукана функція. Тоді

$$z' = 2\sqrt{z} \quad \Rightarrow \quad z = (x + C_1)^2, \;\; x > -C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = (x + C_1)^2, \quad x > -C_1, \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2, \quad x > -C_1.$$

Рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ має особливий розв'язок $z = 0$. Йому відповідає сім'я особливих розв'язків рівняння Кожен з них є особливим. *Відповідь:* $y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ y = C.$ ■

3. Рівняння, яке містить тільки незалежну змінну і похідну порядку *n*. Розглянемо деякі класи диференціальних рівнянь вигляду (1), загальний розв'язок (загальний інтеграл) яких можна знайти за допомогою квадратур. Зауважимо, що зведення до квадратур виконується або за допомогою спеціальних прийомів, або шляхом попереднього зниження порядку рівняння (якщо отримане при цьому рівняння інтегрується в квадратурах).

Розглянемо спочатку ***неповні рівняння***. Найпростішими з них є рівняння, які містять тільки незалежну змінну і похідну порядку n, тобто рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0. \tag{9}$$

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. *Рівняння (9) можна розв'язати відносно* $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f(x), \tag{10}$$

де $f(x)$ – неперервна функція на інтервалі (a,b). У цьому випадку рівняння (9) легко інтегрується у квадратурах. Справді, тоді

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, а x_0 – довільне фіксоване число з проміжку (a,b). Далі, послідовно інтегруючи, знаходимо:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,dx\,dx + \frac{C_1}{2}(x-x_0)^2 + C_2(x-x_0) + C_3, \quad \dots$$

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{dx\dots dx}_{n\ \text{разів}} + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \dots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n. \qquad \textbf{(11)}$$

Формула (11) визначає загальний розв'язок рівняння (10) і дозволяє знайти розв'язок задачі Коші з будь-якими початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in (a,b).$$

Справді, підставляючи у знайдені формули для $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y$ $x = x_0$, будемо мати:

$$y_0^{(n-1)} = C_1,\ y_0^{(n-2)} = C_2,\ \dots,\ y_0' = C_{n-1},\ y_0 = C_n.$$

Підставляючи тепер отримані значення у формулу (11), одержуємо:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{dx\dots dx}_{n\ \text{разів}} +$$

$$+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \dots + y_0'(x-x_0) + y_0. \qquad \textbf{(12)}$$

Перший доданок у правій частині формули (12) містить n квадратур, однак їх можна замінити однією квадратурою, оскільки справджується ***формула Коші***

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{разів}} f(x)\underbrace{dx\dots dx}_{n\ \text{разів}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Тепер з урахуванням цієї формули загальний розв'язок (12) можна записати у вигляді

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t+ \\ +\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \qquad \textbf{(13)}$$

Загальний розв’язок рівняння (10) можна знайти також послідовним інтегруванням цього рівняння, якщо замість визначених інтегралів зі змінною верхньою межею використати невизначені інтеграли. Тоді

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\equiv f_1(x)+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int f_1(x)\,\mathrm{d}x+C_1x+C_2\equiv f_2(x)+C_1x+C_2,\quad \ldots$$

$$y=\int f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y''=e^{-x^2}.$$

Розв’язання. Використовуючи формулу (13) (у якій $x_0=0$), одержуємо, що

$$y=\int_0^x e^{-t^2}(x-t)\,\mathrm{d}t+C_1x+C_2.\ \blacksquare$$

Випадок 2. *Рівняння (9) не можна розв’язати через елементарні функції відносно $y^{(n)}$ або вираз для $y^{(n)}$ є надто складним.* Припустимо, що рівняння (9) допускає параметричне представлення

$$x=\varphi(t),\ \ y^{(n)}=\psi(t),$$

тобто

$$F\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\equiv 0.$$

Виразимо *y* через параметр *t*. Оскільки

$$\mathrm{d}\,y^{(n-1)}=y^{(n)}\,\mathrm{d}\,x=\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

то

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1) \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}y^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,\mathrm{d}x = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t + C_2 \equiv \psi_2(t, C_1, C_2).$$

Аналогічно міркуючи, знаходимо

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Отже, маємо загальний розв'язок рівняння (9) у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Зауважимо однак, що не завжди доцільно приймати за параметр похідну, інколи доцільніше скористатися більш загальним представленням, вдало вибравши функцію $\psi(t)$.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$e^{y''} + 2y'' = x.$$

Розв'язання. Покладемо

$$y'' = t.$$

Тоді $x = e^t + 2t$, а, отже, рівняння допускає параметричне представлення

$$x = e^t + 2t, \; y'' = t.$$

Виразимо тепер функцію y через параметр t:

$$\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x = t(e^t + 2)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$y' = \int t(e^t + 2)\,\mathrm{d}t + C_1 = (t-1)e^t + t^2 + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y = \int \left((t-1)e^t + t^2 + C_1\right)(e^t + 2)\,\mathrm{d}t + C_2 =$$

$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + (t^2 + C_1 - 2)e^t + \frac{2}{3}t^3 + 2C_1 t + C_2.$$

Відповідь:

$$x = e^t + t,$$

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + (t^2 + C_1 - 2)e^t + \frac{2}{3}t^3 + 2C_1 t + C_2.$$

Лекція 10.
Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.

План.

1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних.
2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної.
3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних.
4. Рівняння, ліва частина якого є точною похідною.

1. Рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох послідовних похідних. Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \quad 1 \le k < n. \tag{1}$$

Якщо ввести нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою

$$y^{(k)} = z, \tag{2}$$

то рівняння (1) запишеться у вигляді

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{3}$$

Диференціальне рівняння (3) має $(n-k)$-ий порядок, тобто за допомогою заміни (2) вдалося знизити порядок рівняння (1) на k одиниць.

Припустимо, що розв'язуючи рівняння (3), нам вдалося знайти його загальний розв'язок

$$z = \omega\left(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}\right).$$

Тоді, враховуючи (2), для знаходження функції $y(x)$ одержуємо диференціальне рівняння k-го порядку

$$y^{(k)} = \omega\left(x, C_1, \dots, C_{n-k}\right), \tag{4}$$

яке розглядалось на лекції 8 (формула (10)). Інтегруючи рівняння (4), одержимо ще k довільних сталих. Таким чином, матимемо

$$y = \varphi\left(x, C_1, \dots, C_n\right).$$

Якщо $w\left(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}\right) = 0$ є загальним інтегралом рівняння (3), то приходимо до рівняння вигляду

$$w\left(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}\right) = 0,$$

яке вивчалось раніше (лекція 8, формула (9)). Якщо це рівняння допускає параметричне представлення, то одержимо загальний розв'язок у параметричній формі за допомогою k довільних сталих.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$4y' + (y'')^2 = 2xy''.$$

Розв'язання. Підставимо $y' = z$. Тоді маємо рівняння Клеро

$$z = xz' - \frac{z'^2}{2},$$

загальним розв'язком якого є $z = Cx - C^2/2$. Звідси

$$y' = Cx - \frac{C^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = C_1 x(x - 2C_1) + C_2,$$

де $C_1 = C/2$, є загальним розв'язком заданого рівняння. Особливому розв'язку $z = x^2/2$ відповідає рівняння $y' = x^2/2$, звідки одержуємо сім'ю особливих розв'язків $y = x^3/6 + C$ (кубічні параболи).

Відповідь: $y = C_1 x(x - 2C_1) + C_2$, $y = x^3/6 + C$.

Розглянемо деякі часткові випадки рівняння (1).

Випадок 1. Рівняння (1) має вигляд

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \tag{5}$$

Припустимо, що рівняння (5) можна розв'язати відносно старшої похідної, тобто

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right).$$

Нехай

$$y^{(n-1)} = z.$$

Тоді послідовно одержуємо

$$z' = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{f(z)} = \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad z = \omega(x, C_1) \quad \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \omega(x, C_1).$$

Останнє рівняння є рівнянням вигляду $y^{(n)} = f(x)$, яке вивчалось на лекції 8 (формула (10)).

Нехай рівняння (5) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але існують такі функції

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), \;\; y^{(n)} = \psi(t),$$

що $F(\varphi(t),\psi(t)) \equiv 0$. Тоді, враховуючи формулу $\mathrm{d}\,y^{(n-1)} = y^{(n)}\,\mathrm{d}\,x$, одержуємо

$$\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,y^{(n-1)}}{\mathrm{d}\,y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t + C_1.$$

Параметричний вираз для y легко знайти з рівності $y^{(n-1)} = \varphi(t)$. Нехай при цьому $y = \psi\left(t, C_2, ..., C_n\right)$. Отже, x і y виражаються через параметр t і n довільних сталих, тобто вдалося отримати загальний розв'язок у параметричній формі:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}\,t + C_1, \quad y = \psi\left(t, C_2, ..., C_n\right).$$

Випадок 2. Рівняння (1) має вигляд

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0. \tag{6}$$

Припустимо, що (6) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right).$$

Нехай

$$y^{(n-2)} = z.$$

Тоді послідовно одержуємо

$$z'' = f(z) \quad \Rightarrow \quad 2z'z''\mathrm{d}\,x = 2f(z)z'\mathrm{d}\,x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}(z')^2 = 2f(z)\mathrm{d}\,z \quad \Rightarrow$$

$$(z')^2 = 2\int f(z)\mathrm{d}\,z + C_1 \quad \Rightarrow \quad z' = \pm\sqrt{2\int f(z)\mathrm{d}z + C_1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = \pm\mathrm{d}\,x \quad \Rightarrow \quad z = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Отже, $y^{(n-2)}=\varphi(x,C_1,C_2)$ і маємо рівняння вигляду $y^{(n)}=f(x)$ з лекції 8.

Нехай рівняння (6) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але існує параметричне представлення

$$y^{(n-2)}=\varphi(t),\quad y^{(n)}=\psi(t).$$

Очевидними є формули

$$\mathrm{d}\,y^{(n-1)}=y^{(n)}\,\mathrm{d}\,x,\qquad \mathrm{d}\,y^{(n-2)}=y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,x. \tag{7}$$

Помножимо обидві частини першої формули з (7) на $y^{(n-1)}$ і замінимо справа $y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,x$ на $\mathrm{d}\,y^{(n-2)}$. Будемо мати

$$y^{(n-1)}\,\mathrm{d}\,y^{(n-1)}=y^{(n)}\,\mathrm{d}\,y^{(n-2)}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)^2=2\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t\quad\Rightarrow$$

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t+C_1}\equiv\psi_1(t,C_1).$$

Приєднуючи рівність $y^{(n-2)}=\varphi(t)$, одержуємо формули вигляду

$$y^{(n-1)}=\psi_1(t,C_1),\ y^{(n-2)}=\varphi(t),$$

які розглядались у випадку 1 (коли є вирази для двох сусідніх похідних). Подальше інтегрування приведе по появи ще $(n-1)$-ї довільної сталої.

2. Рівняння, яке не містить незалежної змінної. Розглянемо рівняння вигляду

$$F\left(y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \tag{8}$$

Введемо нову функцію z за формулою $y'=z$, вважаючи y новою незалежною змінною, тобто $z=z(y)$. Виразимо похідні $y'',y''',\ldots,y^{(n)}$ через функцію z та її похідні за змінною y. Будемо мати:

$$y''=\frac{\mathrm{d}\,y'}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}\cdot\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=z'\cdot z,$$

$$y'''=\frac{\mathrm{d}\,y''}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}z\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}z\right)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\left(z''z+z'^2\right)z,\quad\ldots\ ,$$

$$y^{(n)}=\omega\left(z,z',\ldots,z^{(n-1)}\right).$$

Тому рівняння (8) набере вигляду

$$F\left(y,z,z'z,\ldots,\omega\left(z,z',\ldots,z^{(n-1)}\right)\right)=0. \qquad \textbf{(9)}$$

Отримали рівняння $(n-1)$-го порядку. Якщо $z=\varphi\left(y,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}\right)$ – його загальний розв'язок, то з рівняння

$$y'=\varphi\left(y,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}\right)$$

знайдемо загальний інтеграл рівняння (8). При цьому як і рівняння (9), так і останнє рівняння можуть мати особливі розв'язки, що може привести до особливих розв'язків рівняння (8).

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$(1+y^2)yy''=(3y^2-1)y'^2.$$

Розв'язання. Нехай $y'=z$, де $z=z(y)$ – нова функція. Тоді $y''=z'z$ і з заданого рівняння після підстановки одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$(1+y^2)yz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=(3y^2-1)z^2 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{3y^2-1}{(1+y^2)y}\mathrm{d}y \quad \left(z\neq 0, y\neq 0\right) \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int\frac{3y^2-1}{(1+y^2)y}\mathrm{d}y \;\Rightarrow\; \ln|z|=2\ln|1+y^2|-\ln|y|+\ln|C_1| \;\Rightarrow$$

$$\frac{zy}{(1+y^2)^2}=C_1 \;\Rightarrow\; \frac{yy'}{(1+y^2)^2}=C_1.$$

Інтегруючи ще один раз, одержуємо загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{1}{1+y^2}=-2C_1x+C_2 \;\Rightarrow\; y^2=\frac{1}{-2C_1x+C_2}-1.$$

Із $z=0$ знаходимо розв'язок $y=C$. Але він є частинним, бо його можна одержати з загального розв'язку, якщо $C_1=0$, $C_2=(1+C^2)^{-1}$. ■

3. Рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних. Так називають рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \qquad \textbf{(10)}$$

де функція F однорідна відносно $y,y',\ldots,y^{(n)}$, тобто для кожного t

задовольняє тотожність

$$F\left(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m \cdot F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right). \qquad \textbf{(11)}$$

Введемо нову невідому функцію z за формулою

$$z = \frac{y'}{y}.$$

Тоді

$$y' = yz, \qquad y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y \cdot (z^3 + 3zz' + z''), \quad \dots, \quad y^{(n)} = y \cdot \omega\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right).$$

Тому рівняння (10) набере вигляду

$$F\left(x, y, yz, y \cdot (z^2 + z'), \dots, y \cdot \omega\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Скористаємось тепер однорідністю функції F. З (11) випливає, що

$$y^m \cdot F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega\left(z, z', \dots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Скорочуючи на y^m ($y \neq 0$), одержуємо рівняння $(n-1)$-го порядку з шуканою функцією z. Якщо $z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right)$ – його загальний розв’язок, то

$$\frac{y'}{y} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо загальний розв’язок рівняння (10):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi\left(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) \mathrm{d}x}.$$

Розв’язок $y = 0$ є частинний, бо його одержуємо з загального при $C_n = 0$.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0.$$

Розв’язання. Нехай $y'/y = z$, тоді $y' = zy$, $y'' = y(z^2 + z')$. Підставляючи у рівняння, одержуємо

$$x^2y^2(z'+z^2)-y^2(1-xz)^2=0 \quad \Rightarrow \quad z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}.$$

Останнє рівняння є лінійним. Його загальним розв'язком є $z=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$. З

$$\frac{y'}{y}=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

знаходимо загальний розв'язок $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$. ■

4. Рівняння, ліва частина яких є точною похідною. Так називають рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0, \tag{12}$$

де

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right).$$

Зрозуміло, що при цьому одержуємо рівняння

$$\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=C_1, \tag{13}$$

тобто порядок рівняння (12) вдалося знизити на одиницю.

Рівність (13) називають ***першим інтегралом*** рівняння (12).

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+y'^2}=0.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+y'^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln\left(1+y'^2\right)\right),$$

тобто ліва частина є точною похідною. Отже, задане рівняння має перший інтеграл

$$\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln\left(1+y'^2\right)=\ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad y''\left(1+y'^2\right)^{-3/2}-C_1=0.$$

Ліва частина останнього рівняння так само є точною похідною, бо

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}-C_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x\right).$$

Отже,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-C_1x=C_2.$$

Інтегруючи це рівняння, одержуємо загальний інтеграл у вигляді

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad \left(a=-\frac{C_2}{C_1},\ b=\frac{C_3}{C_1},\ R=\frac{1}{C_1}\right). \ ■$$

Якщо ліва частина рівняння (12) не є точною похідною, то у деяких випадках вдається знайти таку функцію $\mu=\mu\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$, після множення на яку ліва частина цього рівняння буде точною похідною. Цю функцію називають ***інтегрувальним множником*** рівняння (12).

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння

$$yy''-y'^2=y'.$$

Розв'язання. Поділимо рівняння на y^2 ($y\neq 0$). Тоді

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}-\frac{y'}{y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}\right)'=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}+\frac{1}{y}=C_1 \quad \Rightarrow \quad y'-C_1y=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{C_1y-1}=\mathrm{d}x.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Його загальний розв'язок:

$$y=C_2e^{C_1x}+\frac{1}{C_1},\quad C_1\neq 0.$$

Якщо $C_1=0$, то одержуємо

$$y=-x+C.$$

Окрім того, задане рівняння має особливий розв'язок $y=0$. ■

Лекція 11.

Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку (частина 1).

План.

1. Основні поняття та означення.
2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції.
4. Формула Остроградського-Ліувілля.

1. Основні поняття та означення. ***Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку*** називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad \textbf{(1)}$$

Припустимо, що функції $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ (їх називають ***коефіцієнтами***) і права частина $f(x)$ неперервні на інтервалі (a,b). Тоді, згідно з теоремою Пікара, рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ \ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a,b)$, а $y_0,\ y_0',\ \ldots\ , y_0^{(n-1)}$ – довільні задані числа. Цей розв'язок n разів диференційовний на інтервалі (a,b). Особливих розв'язків рівняння (1) не має.

Якщо $f(x) \equiv 0$ на інтервалі (a,b), то рівняння (1) називають ***лінійним однорідним***. Воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a,b), то рівняння (1) називають ***лінійним неоднорідним***.

Позначимо через $L(y)$ диференціальний оператор

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad \textbf{(3)}$$

і відзначимо його основні властивості (***вміти довести самостійно!***):

1. $L(ky) = kL(y)$.
2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

3. $L(C_1y_1+\ldots+C_ky_k)=C_1L(y_1)+\ldots+C_kL(y_k)$.

Тепер лінійне неоднорідне рівняння (2) можна записати у вигляді $L(y)=f(x)$, а лінійне однорідне рівняння – як $L(y)=0$.

Введемо поняття комплексного розв'язку диференціального рівняння. Комплексну функцію $y(x)=y_1(x)+iy_2(x)$ дійсної змінної x називають ***комплексним розв'язком*** однорідного лінійного рівняння (2) на інтервалі (a,b), якщо її підстановка перетворює це рівняння у тотожність, тобто $L\big(y(x)\big)\equiv 0$ для кожного $x\in(a,b)$. Покажемо, що будь-який комплексний розв'язок рівняння (2) породжує два дійсні розв'язки цього рівняння, а саме: *якщо комплексна функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (2), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього ж рівняння.*

Дійсно, нехай функція $y(x)=y_1(x)+iy_2(x)$ є розв'язком рівняння (2). Тоді $L\big(y(x)\big)\equiv 0$. Використовуючи властивості 1, 2 оператора L, одержуємо:

$$L\big(y(x)\big)=L\big(y_1(x)+iy_2(x)\big)=L\big(y_1(x)\big)+iL\big(y_2(x)\big).$$

Тому $L\big(y_1(x)\big)+iL\big(y_2(x)\big)\equiv 0$, звідки випливає, що

$$L\big(y_1(x)\big)\equiv 0,\ L\big(y_2(x)\big)\equiv 0,\ \ a<x<b.$$

Отже, функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (2) на інтервалі $a<x<b$. Наприклад, рівняння $y''+y=0$, як легко переконатись, має комплексний розв'язок $y(x)=e^{ix}$, а оскільки

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \text{ (}\textbf{\textit{формула Ейлера}}^{1)}\text{)},$$

то функції $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$ є дійсними розв'язками цього рівняння.

---

1) **ЕЙЛЕР** (Euler) Леонард (1707-1783) – видатний математик, механік та фізик. За походженням швейцарець.

2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь. Використовуючи властивості 1-3 оператора L з пункту 1, легко отримати такі твердження про розв'язки однорідного лінійного рівняння (2).

Властивість 1. *Якщо y_1 і y_2 – два частинні розв'язки рівняння (2), то їх сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.*

Дійсно, оскільки y_1 і y_2 – розв'язки рівняння (2), то $L(y_1)=0$, $L(y_2)=0$. Але згідно з властивістю 2 оператора L

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0,$$

а отже, $y_1 + y_2$ є розв'язком рівняння (2).

Властивість 2. *Якщо y_1 – розв'язок рівняння (2), то Cy_1, де C – довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.*

Дійсно, оскільки y_1 є розв'язком рівняння (2), то $L(y_1)=0$. А згідно з властивістю 1 оператора L маємо $L(Cy_1) = CL(y_1) = 0$.

Властивість 3. *Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ – розв'язки рівняння (2), то їх лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі, також є розв'язком рівняння (2).*

Властивість 3 випливає з властивостей 1, 2.

Наприклад, рівняння $y'' + y = 0$, яке розглядалось раніше, має розв'язки $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$, а отже, його розв'язком є також усі функції вигляду $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1, C_2 – довільні сталі, також є розв'язком рівняння (2), у чому легко переконатись за допомогою підстановки.

Важливо відповісти на питання: якими повинні бути n частинних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$, щоб їх лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

була загальним розв'язком рівняння (2)? Для відповіді на це питання введемо поняття лінійної залежності та лінійної незалежності функцій.

3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Функції $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$ називають ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a,b), якщо співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad \textbf{(4)}$$

справджується тільки тоді, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю. Якщо у (4) хоча б одна із сталих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ відмінна від нуля, то функції $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$ називають ***лінійно залежними*** на (a,b).

Розглянемо приклади.

1. Функції $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ \ldots,\ y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ і, взагалі, на довільному інтервалі. Дійсно, співвідношення

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \ \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0,$$

у якому не всі α_j дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно, бо воно є алгебраїчним рівнянням $(n-1)$-го степеня, яке, як відомо, не може мати більше $n-1$ різних коренів.

2. Функції $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}$ лінійно незалежні на довільному інтервалі, бо співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, виконується не більш, ніж в одній точці.

3. Функції $y_1 = \cos x,\ \ y_2 = \sin x$ лінійно незалежні на довільному інтервалі, бо співвідношення

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0,$$

де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, не може виконуватись в на жодному інтервалі (воно може виконуватись лише в окремих точках).

4. Функції $y_1 = \sin^2 x,\ \ y_2 = \cos^2 x,\ y_3 = 1$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, бо $1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 1 = 0$.

Розглянемо тепер довільні функції $y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n$, які мають похідні до порядку $n-1$ включно. Позначимо через $W(x)$ визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

який називають ***визначником Вронського***[1)] або ***вронскіаном*** функцій $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$.

Теорема 1 (необхідна умова лінійної залежності функцій). *Якщо функції* $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ *лінійно залежні на деякому інтервалі* (a,b)*, то їх вронскіан тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з умовою теореми для $a<x<b$ маємо

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0,$$

де не всі α_j дорівнюють нулю. Нехай, наприклад, $\alpha_n\neq 0$. Тоді

$$y_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1},\quad a<x<b.$$

Продиференціюємо цю тотожність $n-1$ разів і підставимо y_n, а також знайдені значення $y_n',\, y_n'',\, \dots, y_n^{(n-1)}$, в останній стовпець вронскіана:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти визначник $W(x)$ на суму визначників, то у кожному з них будемо мати два пропорційні стовпці, а тому усі ці визначники (а отже, і $W(x)$) дорівнюють нулю в усіх точках інтервалу (a,b). ►

[1)] **ВРОНСЬКИЙ** (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (1776-1853) – польський математик.

Зауважимо, що доведена необхідна умова лінійної залежності функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ не є, взагалі кажучи, достатньою. Наприклад, вронскіан функцій

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

тотожно дорівнює нулю для всіх *x*, однак y_1 і y_2 лінійно незалежні на $(-\infty;+\infty)$ (***вміти довести самостійно***).

Нехай тепер кожна з функцій $y_1,...,y_n$ є розв'язком рівняння (2).

Теорема 2. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *є лінійно незалежними розв'язками рівняння (2), всі коефіцієнти якого неперервні на інтервалі* (a,b)*, то вронскіан цих розв'язків* $W(x)$ *не дорівнює нулю в жодній точці з* (a,b).

Доведення теореми проведемо від супротивного. Нехай $W(x_0)=0$, $a < x_0 < b$. Складемо алгебраїчну систему *n* рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \qquad ... \quad ... \quad ... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є $W(x_0)$, а оскільки він за припущенням дорівнює нулю, то система має ненульовий розв'язок

$$C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ ...\ , C_n = C_n^{(0)},$$

а тому

$$\left.\begin{aligned} C_1^{(0)} y_1(x_0) + C_2^{(0)} y_2(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n(x_0) = 0, \\ C_1^{(0)} y_1'(x_0) + C_2^{(0)} y_2'(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n'(x_0) = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \\ C_1^{(0)} y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2^{(0)} y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n^{(0)} y_n^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причому не всі $C_j^{(0)}$ дорівнюють нулю.

Утворимо тепер лінійну комбінацію розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$:

$$y = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ ... + C_n^{(0)} y_n. \tag{6}$$

Згідно з властивістю 3 пункту 2 цієї лекції, ця комбінація також є розв'язком рівняння (2). Рівності (5) показують, що у точці $x = x_0$ розв'язок (6) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до порядку $n-1$ включно. Але ці самі умови задовольняє також розв'язок $y \equiv 0$, а тому згідно з теоремою Пікара (про єдиність розв'язку) ці розв'язки співпадають, тобто

$$C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \ \dots + C_n^{(0)} y_n \equiv 0,$$

де не всі $C_j^{(0)}$ дорівнюють нулю, а це означає, що розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні в інтервалі (a,b), що суперечить умові теореми. ►

З теорем 1, 2 випливає таке твердження: *для того, щоб n розв'язків рівняння (2) були лінійно незалежними на інтервалі* (a,b), ***необхідно і достатньо****, щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

4. Формула Остроградського[1)]-Ліувілля[2)]. Вронскіан розв'язків рівняння (2) можна з точністю до сталого множника виразити через коефіцієнт біля похідної $y^{(n-1)}$, а саме справджується ***формула Остроградського-Ліувілля***:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \textbf{(7)}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a,b). Доведемо формулу (7). Для цього продиференціюємо вронсікан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

---

1) **ОСТРОГРАДСЬКИЙ** Михайло Васильович (1801-1862) – видатний український математик. Академік Петербурзької Академії наук. Учень Коші, Лапласа, Фур'є.
2) **ЛІУВІЛЛЬ** Жозеф (1809-1882) – французький математик.

застосовуючи правило диференціювання: *похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримуємо з нього почерговою заміною елементів першого, другого, …, n-го рядка їх похідними*.

Усі ці визначники, крім останнього, дорівнюють нулю (бо мають пропорційні рядки), а тому

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Помножимо елементи перших $n-1$ рядків останнього визначника відповідно на $p_n(x)$, $p_{n-1}(x),..., p_2(x)$, і додамо до елементів останнього рядка:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1(x)\cdot y_1^{(n)} & -p_1(x)\cdot y_2^{(n)} & \dots & -p_1(x)\cdot y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=-p_1(x)\cdot W(x)$$

або $W'(x)+p_1(x)\cdot W(x)=0$, звідки легко отримати формулу (7).

З формули Остроградського-Ліувілля випливають такі властивості вронскіана розв’язків однорідного лінійного рівняння (2):

1. *Якщо вронскіан n розв’язків* $y_1, y_2, ..., y_n$ *дорівнює нулю в одній точці* $x=x_0$ *з інтервалу* (a,b)*, в якому всі коефіцієнти рівняння (2) неперервні, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо вронскіан n розв’язків рівняння (2) відмінний від нуля хоч в одній точці* $x=x_0$ *інтервалу* (a,b)*, то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Таким чином: *для лінійної незалежності n розв’язків рівняння (2) на інтервалі* (a,b) ***необхідно і достатньо****, щоб їх вронскіан був відмінний від нуля хоча б в одній точці цього інтервалу.*

Лекція 12.

Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку (частина 2).

План.

1. Фундаментальна система розв’язків. Основна теорема.
2. Використання формули Остроградського-Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку.
3. Побудова однорідного лінійного рівняння, яке має задану фундаментальну систему розв’язків.
4. Зниження порядку однорідного лінійного рівняння за допомогою лінійно незалежних частинних розв’язків.

1. Фундаментальна система розв’язків. Основна теорема. Сукупність n розв’язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0, \qquad \textbf{(1)}$$

визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a,b), називають ***фундаментальною системою розв’язків (ФСР)*** на цьому інтервалі.

З попередньої лекції (останній абзац) випливає таке твердження: *для того, щоб сукупність n розв’язків рівняння (1) була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв’язків був відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів рівняння (1).*

Наприклад, функції $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ утворюють ФСР рівняння $y''+y=0$ на інтервалі $(-\infty,+\infty)$, бо вони є розв’язками цього рівняння і лінійно незалежні на $(-\infty,+\infty)$. Наведене рівняння має й інші ФСР, наприклад, кожна пара функцій вигляду $y_1=k\cos x$, $y_2=k\sin x$, де k – довільна стала, відмінна від нуля, також є ФСР.

Як видно з цього прикладу, однорідне лінійне рівняння може мати безліч ФСР. Знання n лінійно незалежних розв’язків, тобто фундаментальної системи розв’язків, дає можливість побудувати розв’язок рівняння (1), який містить n довільних сталих, причому цей розв’язок буде загальним.

Теорема 1 (Основна теорема). *Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ – ФСР рівняння (1), то формула*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \qquad \textbf{(2)}$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні числа, визначає загальний розв'язок в усій області задання рівняння (1).

Доведення. За означенням, розв'язок, який містить n довільних сталих, буде загальним, якщо з нього при певних числових значеннях цих сталих можна одержати довільний частинний розв'язок. А згідно з теоремою Пікара довільний частинний розв'язок однозначно визначається початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0',\ ...\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad \textbf{(3)}$$

де $y_0,\ y_0', ...,\ y_0^{(n-1)}$ – довільні числа, $a < x_0 < b$. Таким чином, буде доведено, що розв'язок (2) є загальним, якщо покажемо, що у (2) можна визначити сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб задовольнити умови (3). Для визначення сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \qquad\qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки $y_1, y_2, ..., y_n$ – ФСР рівняння (1), то $W(x_0) \neq 0$ (теорема 2 лекції 10). Отже, система (4) має єдиний розв'язок $C_1, C_2, ..., C_n$. Функція (2) є розв'язком рівняння (1) як лінійна комбінація розв'язків однорідного лінійного рівняння (див. лекцію 10, п.2, властивість 3). Вираз (2), в якому C_i набувають отримані таким чином значення, очевидно, задовольняє початкові умови (3). ►

Теорема 1 дає відповідь на питання про те, якими повинні бути розв'язки $y_1, y_2, ..., y_n$, щоб формула (2) визначала загальний розв'язок рівняння (1): ці розв'язки повинні бути ***лінійно незалежними***, тобто утворювати ФСР.

Розглянемо, наприклад, диференціальне рівняння $y'' + y = 0$. Вже було доведено, що функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють ФСР на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, а тому, згідно з теоремою 1, формула

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

є загальним розв'язком рівняння $y'' + y = 0$.

2. Використання формули Остроградського-Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку. Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

і нехай $y_1(x) \neq 0$ – частинний розв'язок цього рівняння. Для знаходження загального розв'язку рівняння (5) згідно з теоремою 1 потрібно знайти ФСР цього рівняння. Нехай $y_2(x)$ – інший розв'язок рівняння (5), причому функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ – лінійно незалежні, тобто утворюють ФСР. Застосуємо формулу Остроградського-Ліувілля (формула (7) з лекції 10) до рівняння (5):

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \textbf{(6)}$$

де $W(x)$ – вронскіан функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, а $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a,b) неперервності коефіцієнтів $p_1(x)$, $p_2(x)$. На попередній лекції було показано, що формулу (6) можна записати також у вигляді

$$W(x) = C \cdot e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x},$$

де C – деяка стала, а отже,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \cdot e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x} \qquad \textbf{(7)}$$

або, якщо розкласти визначник і підставити $C = 1$:

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}. \qquad \textbf{(8)}$$

Таким чином, для знаходження невідомої функції $y_2(x)$

отримали рівняння (8), яке є лінійним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо це рівняння. Для цього поділимо обидві частини (8) на y_1^2. Тоді

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x.$$

Оскільки функції $y_1(x), y_2(x)$ – ФСР рівняння (5), то його загальний розв'язок згідно з теоремою 1 має вигляд

$$y(x) = y_1(x)\cdot\left(C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x\right). \qquad \textbf{(9)}$$

Формулу (9) називають ***формулою Абеля*** [1)].

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $y_1(x) = x$ – частинний розв'язок. Оскільки $p_1(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, то, використовуючи формулу Остроградського-Ліувілля, записану у вигляді (7), одержуємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} \quad \Rightarrow \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = x^2+1 \quad (\text{якщо } C=1).$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на x^2. Тоді

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

або, підставляючи $y_1(x) = x$:

$$\frac{y_2}{x} = \int\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y_2 = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

Таким чином, шуканим загальним розв'язком згідно з теоремою 1 є $y = C_1x + C_2(x^2-1)$. ■

[1)] **АБЕЛЬ** Нільс Генрік (1802-1829) – норвезький математик

3. Побудова однорідного лінійного рівняння, яке має задану ФСР. Покажемо, що кожній сукупності n разів неперервно диференційовних і лінійно незалежних на (a,b) функцій $y_1, y_2, ..., y_n$, вронскіан яких не дорівнює нулю у жодній точці цього інтервалу, відповідає одне і тільки одне однорідне лінійне рівняння n-го порядку вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \qquad \textbf{(10)}$$

для якого згадана сукупність функцій буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі (a,b).

Справді, коефіцієнти $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ шуканого рівняння повинні задовольняти систему

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 = 0, \\ y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + p_2(x)y_2^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2 = 0, \\ \qquad\qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n^{(n)} + p_1(x)y_n^{(n-1)} + p_2(x)y_n^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y_n' + p_n(x)y_n = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

Визначником системи (11), як легко переконатись, є $\pm W(x)$. Оскільки $W(x) \neq 0$, то коефіцієнти $p_1(x), ..., p_n(x)$ зможемо знайти однозначно.

Шукане рівняння можна отримати й інакше. Для цього зауважимо, для сумісності рівняння (10) і системи (11) повинна виконуватись рівність

$$\begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \\ y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad \textbf{(12)}$$

Якщо розкласти визначник (12) за елементами останнього стовпця і поділити всі члени отриманого рівняння на $W(x)$, то отримаємо шукане рівняння. Справді, з (12) випливає, що функції $y_1, y_2, ..., y_n$ є розв'язками цього рівняння (бо, замінюючи y відповідно на $y_1, y_2, ..., y_n$, будемо завжди отримувати визначник з двома однаковими стовпцями), а оскільки цими розв'язками рівняння (10) визначається єдиними чином, то рівняння (12) є шуканим.

Приклад 2. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (якомога меншого порядку), яке має частинні розв'язки

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \cos x.$$

Розв'язання. Легко показати, що функції y_1, y_2 лінійно незалежні, а тому згідно з формулою (12), одержуємо рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y''\sin x - y'\cos x = 0. \blacksquare$$

Отже, коефіцієнти рівняння (10) єдиним чином виражаються через його фундаментальну систему розв'язків. Виразимо, зокрема, коефіцієнти однорідного лінійного рівняння другого порядку (1) через його фундаментальну систему розв'язків y_1, y_2. У цьому випадку система (11) має такий вигляд:

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему (наприклад, методом Крамера), знаходимо:

$$p(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}, \qquad q(x) = -\frac{y_1''}{y_1} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

Отже, фундаментальна система розв'язків y_1, y_2 відповідає рівнянню

$$y'' - \frac{W'(x)}{W(x)}y' + \left(\frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{W'(x)}{W(x)} - \frac{y_1''}{y_1}\right)y = 0.$$

4. Зниження порядку однорідного лінійного рівняння за допомогою лінійно незалежних частинних розв'язків. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (10) неперервні на інтервалі (a,b). Покажемо, що знаючи один ненульовий частинний розв'язок цього рівняння, ми можемо знизити порядок рівняння на одиницю.

Це досягається за допомогою заміни

$$y = y_1 \int u \, \mathrm{d}\, x, \tag{13}$$

де y_1 – частинний розв'язок рівняння (10), $u = u(x)$ – нова функція. Тоді

$$y' = y_1' \int u \, \mathrm{d}\, x + y_1 u \quad \Rightarrow \quad y'' = y_1'' \int u \, \mathrm{d}\, x + 2 y_1' u + y_1 u', \quad \ldots \quad ,$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u \, \mathrm{d}\, x + n y_1^{(n-1)} u + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)}.$$

Підставляючи знайдені вирази для похідних у рівняння (10), одержуємо рівняння

$$L(y_1) \cdot \int u \, \mathrm{d}\, x + b_{n-1}(x) u + b_{n-2}(x) u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)} = 0.$$

Але оскільки $L(y_1) \equiv 0$, то для знаходження функції u маємо таке однорідне лінійне рівняння $(n-1)$-го порядку з перепозначеними коефіцієнтами:

$$u^{(n-1)} + \tilde{b}_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + \tilde{b}_{n-2}(x) u' + \tilde{b}_{n-1}(x) u = 0. \tag{14}$$

Покажемо, що якщо $u_2, \ldots, u_n$ є ФСР рівняння (14), то функції

$$y_1, \;\; y_1 \int u_2 \, \mathrm{d}\, x, \; \ldots, \; y_1 \int u_n \, \mathrm{d}\, x \tag{15}$$

утворюють ФСР рівняння (10). З заміни (13) випливає, що всі функції (11) є розв'язками рівняння (10). Припустимо, що вони не утворюють ФСР, тобто є лінійно залежні. Тоді, за означенням, маємо тотожність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1 \int u_2 \, \mathrm{d}\, x + \ldots + \alpha_n y_1 \int u_n \, \mathrm{d}\, x \equiv 0,$$

у якій не всі числа $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю, бо якщо всі вони дорівнюють нулю, то тоді й $\alpha_1 = 0$, оскільки $y_1 \neq 0$. Скорочуючи останню рівність на y_1 і диференціюючи, одержуємо, що

$$\alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0,$$

тобто функції $u_2, \ldots, u_n$ лінійно залежні, а це суперечить припущенню.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0,$$

знаючи його частинний розв'язок $y_1 = x$**.**

Розв'язання. Згідно з формулою (13) зробимо заміну

$$y = x \int u \,\mathrm{d}x.$$

Тоді

$$y' = \int u \,\mathrm{d}x + xu, \qquad y'' = 2u + xu',$$

$$y''' = 3u' + xu''.$$

Підставляючи y, y', y'', y''' у задане рівняння, маємо:

$$3u' + xu'' - \frac{3}{x}(2u + xu') + \frac{6}{x^2}\left(\int u \,\mathrm{d}x + xu\right) - \frac{6}{x^3} x \int u \,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3u' + xu'' - \frac{6u}{x} - 3u' + \frac{6}{x^2}\int u \,\mathrm{d}x + \frac{6u}{x} - \frac{6}{x^2}\int u \,\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$xu'' = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = 0.$$

Для останнього рівняння легко знайти два лінійно незалежні частинні розв'язки, наприклад, $u_1 = 1$, $u_2 = x$. Тому лінійно незалежними частинними розв'язками заданого рівняння будуть

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x\int 1 \,\mathrm{d}x = x^2, \quad y_3 = x\int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{2}.$$

Згідно з теоремою 1

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

є загальним розв'язком. ■

Можна показати, що якщо відомо k лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (10) $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то порядок цього рівняння можна знизити на k одиниць, причому отримане рівняння $(n-k)$-го порядку залишиться лінійним однорідним.

Лекція 13.
Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Метод Ейлера побудови ФСР і загального розв’язку однорідного лінійного рівняння у випадку простих характеристичних чисел.
3. Метод Ейлера побудови ФСР і загального розв’язку однорідного лінійного рівняння у випадку кратних характеристичних чисел.
4. Рівняння, звідні до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1. Основні поняття й означення. Розглянемо рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad \textbf{(1)}$$

де коефіцієнти $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ – сталі дійсні числа, а $f(x)$ – неперервна на інтервалі (a,b) функція (зокрема, вона може бути сталою на цьому інтервалі).

Вивчимо спочатку питання про побудову загального розв’язку відповідного однорідного лінійного рівняння

$$L(y) = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Згідно з Основною теоремою (лекція 11) для побудови загального розв’язку рівняння (2) потрібно знайти хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ цього рівняння. Тоді загальним розв’язком буде лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ \ldots + C_n y_n(x),$$

де $C_1, C_2,\ \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Легко переконатися, що однорідне лінійне рівняння першого порядку $y' + ay = 0$, де a – дійсна стала, має частинний розв’язок $y_1 = e^{-ax}$. Спробуємо й для рівняння (2) відшукати частинний розв’язок у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad \textbf{(3)}$$

де k – деяка, поки що невизначена, стала (дійсна або комплексна). Для цього підставимо функцію (3) в (2). Будемо мати:

$$L(e^{kx}) = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n) \cdot e^{kx} = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

Тепер зрозуміло, що функція (3) буде розв'язком диференціального рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли число k є коренем алгебраїчного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Рівняння (5) називають ***характеристичним рівнянням***, яке відповідає диференціальному рівнянню (2), його корені – ***характеристичними числами*** рівняння (2), вираз у лівій частині (5) – ***характеристичним многочленом***. Легко бачити, що при складанні характеристичного рівняння (5) потрібно замінити в (2) похідні різних порядків відповідними степенями k.

2. Метод Ейлера[1] побудови ФСР і загального розв'язку однорідного лінійного рівняння у випадку простих характеристичних чисел.

Випадок 1. Усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ рівняння (5) прості (різні) і дійсні. Тоді, за доведеним у п.1, функції

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots,\ y_2 = e^{k_n x}$$

є частинними розв'язками рівняння (2). Покажемо, що ці розв'язки є лінійно незалежними, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків. Це випливає з того, що вронскіан функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ відмінний від нуля. Справді:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

---

[1] Див. зноску на стор. 73.

$$= e^{(k_1+k_2+\ldots+k_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що $W(x) \neq 0$, бо другий множник є визначником Вандермонда, а він, як відомо з курсу лінійної алгебри, не дорівнює нулю, коли всі числа $k_1, k_2, ..., k_n$ різні.

Таким чином, згідно з Основною теоремою (лекція 11)

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x},$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (2).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$ має прості корені $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 3$. Тому функції e^x, e^{2x}, e^{3x} утворюють ФСР, а загальним розв'язком є $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$. ■

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 2k = 0$ має прості корені: $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$. Отже, загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}. \ ■$$

Випадок 2. Усі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні. Нехай $a + bi$ – комплексне характеристичне число рівняння (5). Оскільки всі коефіцієнти рівняння (5) дійсні, то як відомо з курсу алгебри, характеристичним числом цього ж рівняння буде також комплексно спряжене число $a - bi$. Числу $a + bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x}$. Але за ***формулою Ейлера***

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

а тому дійсна та уявна частини, тобто функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ є дійсними розв'язками рівняння (2) (лекція 10, п.2), причому ці розв'язки, як легко показати, є лінійно незалежними на $(-\infty;+\infty)$.

Аналогічно, спряженому характеристичному числу $a-bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$, але розв'язок $-e^{ax}\sin bx$ лінійно залежний з $e^{ax}\sin bx$, а отже, спряжене характеристичне число не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, *якщо всі характеристичні числа рівняння (5) різні, але серед них є комплексні, то кожному дійсному числу k_j відповідає розв'язок $e^{k_j x}$, а кожній парі комплексно-спряжених чисел $a\pm bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки $e^{ax}\cos bx$ і $e^{ax}\sin bx$. Всього одержуємо n дійсних частинних розв'язків вигляду*

$$e^{k_j x},\ e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx, \qquad \textbf{(6)}$$

які утворюють ФСР.

Тоді згідно з Основною теоремою загальний розв'язок рівняння (2) одержуємо у вигляді лінійної комбінації всіх частинних розв'язків (6) з довільними сталими $C_1, C_2, \ldots, C_n$. При цьому дійсному характеристичному числу k_j у загальному розв'язку відповідає вираз $C_j e^{k_j x}$, а спряженим числам $a\pm bi$ – вираз $e^{ax}\cdot\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right)$.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3-3k^2+9k+13=0$ має один дійсний і два комплексно спряжені корені: $k_1=-1$, $k_2=2+3i$, $k_3=2-3i$. Тому функції e^{-x}, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$ утворюють ФСР, а загальним розв'язком є $y=C_1e^{-x}+e^{2x}\cdot\left(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x\right)$. ■

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичними числами є $k_1=1$, $k_2=2i$, $k_3=-2i$, а тому загальний розв'язок має вигляд $y=C_1e^{x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$. ■

3. Метод Ейлера побудови ФСР і загального розв'язку однорідного лінійного рівняння у випадку кратних характеристичних чисел. Нехай k_1 – характеристичне число рівняння (5) (дійсне або комплексне) кратності *s*. Тоді, як відомо з курсу алгебри,

$$P(k_1) = P'(k_1) = \ldots = P^{(s-1)}(k_1) = 0, \quad \text{але} \quad P^{(s)}(k_1) \neq 0, \tag{7}$$

де $P(k)$ – характеристичний многочлен:

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n .$$

Для того, щоб знайти розв'язки, які відповідають характеристичному числу k_1, продиференціюємо тотожність[1)]

$$L(e^{kx}) = P(k) \cdot e^{kx} \tag{8}$$

m разів за змінною *k*, використовуючи відому з математичного аналізу формулу Лейбніца для *m*-ї похідної від добутку двох функцій:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j u^{(j)} v^{(m-j)} ,$$

де C_m^j – кількість комбінацій (сполучень) з *m* елементів по *j*. Будемо мати:

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j P^{(j)}(k) x^{m-j} e^{kx} .$$

Тепер, враховуючи (7), одержуємо, що

$$L(x^m e^{k_1 x}) \equiv 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, s-1 .$$

Це означає, що функції

$$e^{k_1 x},\ x e^{k_1 x},\ x^2 e^{k_1 x},\ x^{s-1} e^{k_1 x} \tag{9}$$

є розв'язками рівняння (2). Розв'язки (9), як легко показати, є лінійно незалежними на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому k_1 є дійсним числом, то функції (9) також будуть дійсними.

Таким чином, кожному дійсному характеристичному числу k_1 кратності *s* відповідає *s* дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (9).

[1)] Формула (8) – це формула (4), записана у дещо іншому вигляді.

Якщо характеристичне рівняння (5) має комплексний корінь $a+bi$ кратності s, то воно має спряжений комплексний корінь $a-bi$ тієї ж кратності. Згідно з (9), кореню $a+bi$ відповідають s розв'язків

$$e^{(a+ib)x},\ xe^{(a+ib)x},\ x^2e^{(a+ib)x},\ \dots,\ x^{s-1}e^{(a+ib)x}.$$

Ці розв'язки комплексні. Відокремлюючи в них дійсні та уявні частини, одержуємо $2s$ дійсних розв'язків:

$$\left.\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx,\ \ xe^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{s-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx,\ \ xe^{ax}\sin bx,\ \dots,\ x^{s-1}e^{ax}\sin bx. \end{array}\right\} \qquad \textbf{(10)}$$

Ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty,+\infty)$.

Так само, як і для випадку простого комплексного кореня, легко бачити, що спряжений корінь $a-bi$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Таким чином, *кожній парі спряжених комплексних коренів* $a\pm bi$ *кратності s відповідають 2s дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (10).*

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння

$$y'''-3y''+3y'-y=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3-3k^2+3k-1=0$ має кратний дійсний корінь $k_1=k_2=k_3=1$. Тому задане рівняння має три лінійно незалежні розв'язки e^x, xe^x, x^2e^x, а загальним розв'язком є

$$y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2).\ ■$$

Приклад 6. Зінтегрувати рівняння

$$y'''-7y''+16y'-12y=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3-7k^2+16k-12=0$ має один простий корінь $k_1=3$ і один кратний корінь $k_2=k_3=2$. Цим кореням відповідають розв'язки e^{3x}, e^{2x}, xe^{2x}, а загальним розв'язком є $y=C_1e^{3x}+(C_2+C_3x)e^{2x}$. ■

Приклад 7. Зінтегрувати рівняння

$$y^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}+8y'''-8y''+16y''-16y=0.$$

Розв'язання. Характеристичні числа: $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2i$, $k_4 = k_5 = -2i$. Отже, загальним розв'язком є

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x. \blacksquare$$

4. Рівняння, звідні до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо деякі диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які за допомогою заміни незалежної змінної можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівнянням Ейлера називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad \textbf{(11)}$$

де a_1, $a_2, \ldots,$ a_n – сталі дійсні числа. Побудуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера для $x > 0$ (якщо $x < 0$, то потрібно замінити x на $-x$). Для цього зробимо заміну $t = \ln x$ або, що те саме,

$$x = e^t.$$

Оскільки

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t},$$

$$y''_{x^2} = \left(y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}\right) e^{-t} = \left(y''_{t^2} - y'_t\right) e^{-2t},$$

$$y'''_{x^3} = \left(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t\right) e^{-3t}, \ \ldots\ , \ y^{(n)}_{x^n} = \left(y^{(n)}_{t^n} + \ldots + (-1)^n (n-1)!\, y'_t\right) e^{-nt},$$

то підставляючи знайдені вирази, а також $x = e^t$, в (11), одержимо однорідне лінійне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння, і покладаючи в ньому $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Приклад 8. Зінтегрувати рівняння Ейлера

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $x = e^t$. Тоді, як було доведено,

$$y'_x = y'_t e^{-t}, \qquad y''_{x^2} = \left(y''_{t^2} - y'_t\right) e^{-2t}.$$

Підставляючи у рівняння, маємо

$$e^{2t}\left(y''_{t^2} - y'_t\right)e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y''_{t^2} - 3y'_t + 2y = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо $y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$. Оскільки $t = \ln x$, то загальним розв'язком заданого рівняння є $y = C_1 x + C_2 x^2$. ■

Узагальненням рівняння Ейлера є ***рівняння Лагранжа***[1)] (не плутати з рівнянням Лагранжа, яке розглядалось на лекції 7). Так називають диференціальне рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(ax+b)y' + p_n y = 0,$$

де $a, b, p_1, \ldots, p_n$ – деякі числа. Якщо позначити $ax + b = u$ і покласти $u = e^t$, або відразу зробити заміну $ax + b = e^t$, то одержимо лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

До рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться також ***рівняння Чебишова***[2)], тобто рівняння вигляду

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \qquad \textbf{(12)}$$

Побудуємо загальний розв'язок рівняння (12) на інтервалі $(-1;1)$. Виконаємо підстановку $t = \arccos x$ ($x = \cos t$). Далі маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t},$$

$$y''_{x^2} = -\left(y''_{t^2} \frac{1}{\sin t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right)\left(-\frac{1}{\sin t} \right) = y''_{t^2} \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^3 t}.$$

Підставляючи y'_x і y''_{x^2} у рівнянні (12) і замінюючи x через $\cos t$, одержуємо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0.$$

Загальним розв'язком останнього рівняння є $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$. Після повернення до початкової змінної x маємо

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

[1)] Див. зноску на стор. 12.

[2)] **ЧЕБИШОВ** Пафнутій Львович (1821-1894) – російський математик, засновник петербурзької наукової школи, академік Петербурзької Академії наук.

Лекція 14.
Неоднорідні лінійні рівняння *n*-порядку.

План.

1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.
2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).
3. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \textbf{(1)}$$

і відповідне йому однорідне рівняння

$$L(y) = 0. \quad \textbf{(2)}$$

Теорема 1. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цього рівняння та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2).*

Доведення. Нехай Y – частинний розв'язок рівняння (1), тобто $L(Y) \equiv f(x)$. Введемо нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою

$$y = z + Y. \quad \textbf{(3)}$$

Підставляючи (3) в (1) та враховуючи лінійність оператора L, одержуємо

$$L(y) = L(z+Y) = L(z) + L(Y) = f(x).$$

Оскільки $L(Y) = f(x)$, то

$$L(z) = 0, \quad \textbf{(4)}$$

тобто z – розв'язок лінійного однорідного рівняння (2). Тоді, згідно з Основною теоремою, загальним розв'язком рівняння (4) є

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_j, $j = 1, \ldots, n$, – довільні сталі.

Підставимо цей розв'язок в (3). Будемо мати:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + Y. \quad \textbf{(5)}$$

Формула (5) містить *n* довільних сталих. Покажемо, що вона визначає загальний розв'язок рівняння (1). Для цього, згідно з означенням загального розв'язку, потрібно показати, що з (5) при належному виборі сталих $C_1,...,C_n$ можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Послідовним диференціюванням виразу (5) знаходимо

$$\begin{cases} y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n+Y, \\ y'=C_1y_1'+C_2y_2'+\ldots+C_ny_n'+Y', \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+C_2y_2^{(n-1)}+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}+Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Підставимо в цю систему $x=x_0$. У результаті одержимо неоднорідну систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими $C_1,...,C_n$, визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки $y_1,y_2,...,y_n$ – фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0)\neq 0$. Таким чином, $C_1,...,C_n$ з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (5) є загальним. ►

Теорема 2. *Нехай права частина неоднорідного рівняння (1) є сумою двох доданків, тобто це рівняння має вигляд*

$$L(y)=f_1(x)+f_2(x). \qquad \textbf{(6)}$$

Якщо y_1 *– частинний розв'язок рівняння* $L(y)=f_1(x)$*, а* y_2 *– частинний розв'язок рівняння* $L(y)=f_2(x)$*, то сума* y_1+y_2 *є частинним розв'язком рівняння (6).*

Доведення. Оскільки

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\equiv f_1(x)+f_2(x),$$

то y_1+y_2 є частинним розв'язком рівняння (6). ►

Зауваження. Теорема 2 поширюється і на випадок *n* доданків у правій частині рівняння (1).

2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). З теореми 1 випливає, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння

(1) завжди можна знайти, якщо відомі загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (1). Існує загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (1) – ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лагранжа***[1)]). З'ясуємо суть цього методу.

Нехай маємо загальний розв'язок однорідного рівняння (2):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ \ldots + C_n y_n, \qquad \textbf{(7)}$$

де $y_1, \ \ldots \ , y_n$ – деяка ФСР рівняння (2), а $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Частинний розв'язок $Y(x)$ рівняння (1) шукаємо у вигляді (7), але розглядаємо $C_1, \ldots, C_n$ як деякі функції змінної x:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ \ldots + C_n(x) y_n. \qquad \textbf{(8)}$$

Виберемо тепер функції $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ такими, щоб вираз (8) був загальним розв'язком рівняння (1). Диференціюючи (8), одержуємо

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n.$$

Виберемо функції $C_1, \ldots, C_n$ такими, щоб

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0.$$

Тоді

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n'.$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n'.$$

Нехай

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,$$

тоді

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n''.$$

Продовжуючи диференціювати далі і вибираючи функції $C_1, \ldots, C_n$ так, щоб

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

одержуємо

[1)] Див. зноску на стор. 12.

$$y^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+C_2y_2^{(n-1)}+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}.$$

Диференціюючи останній раз, знаходимо:

$$y^{(n)}=C_1y_1^{(n)}+C_2y_2^{(n)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}.$$

Підставимо тепер у рівняння (1) вираз для y і знайдені вирази для $y',y'',\ldots,y^{(n)}$:

$$C_1\left(y_1^{(n)}+p_1y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1'+p_ny_1\right)+$$

$$+C_2\left(y_2^{(n)}+p_1y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_2'+p_ny_2\right)+\ldots+$$

$$+C_n\left(y_n^{(n)}+p_1y_n^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_n'+p_ny_n\right)+$$

$$C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).$$

Множники в дужках тотожно дорівнюють нулю, оскільки функції $y_1,y_2,\ldots,y_n$ є частинними розв’язками рівняння (2). Отже, останнє рівняння запишеться так:

$$C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).$$

Таким чином, шукані функції $C_1,\ldots,C_n$ задовольняють систему

$$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0,\\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ C_1'y_1^{(n-2)}+C_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-2)}=0,\\ C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).\end{cases}$$

Маємо неоднорідну систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $C_1',\ldots,C_n'$. Оскільки її визначником є вронскіан $W(x)\neq 0$, то ця система має єдиний розв’язок $C_1'(x),\ldots,C_n'(x)$. Інтегруючи, знаходимо функції $C_1(x),\ldots,C_n(x)$, після чого їх залишиться підставити у формулу (8).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

Розв’язання. Розв’яжемо відповідне однорідне рівняння. Маємо:

$$y''/y' = 1/x \quad \Rightarrow \quad (\ln y' - \ln x)' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 x \quad \Rightarrow$$

$$y = C_1 x^2 + C_2. \tag{9}$$

Нехай тепер $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. З системи

$$\begin{cases} C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \\ 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x \end{cases}$$

знаходимо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}, \quad C_2'(x) = -\frac{x^2}{2},$$

а отже,

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1, \; C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2.$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (9), одержуємо загальний розв'язок

$$y = C_1 x^2 + C_2 - \frac{x^3}{3}. \;\blacksquare$$

3. Метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо неоднорідне лінійне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{10}$$

де a_j – сталі дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на (a,b).

Розглянемо деякі випадки, пов'язані у виглядом функції $f(x)$.

Випадок 1. Права частина $f(x)$ рівняння (10) є добутком многочлена на показникову функцію, тобто:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \tag{11}$$

де

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m \tag{12}$$

є многочленом з дійсними або комплексними коефіцієнтами (він може бути й сталою), α – стале дійсне або комплексне число.

Будуючи частинний розв'язок рівняння (11), виділятимемо два випадки.

Випадок 1.1. Число α не є коренем характеристичного рівняння, тобто $P(\alpha)\neq 0$ ($P(\alpha)$ – характеристичний многочлен (лекція 12)). Тоді частинний розв'язок Y шукаємо у вигляді

$$Y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \qquad \textbf{(13)}$$

де $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m$ – многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ визначаються підстановкою (13) в (11) і прирівнюванням коефіцієнтів біля однакових степенів x у обох частинах отриманої рівності. Переконаємось, що коефіцієнти многочлена $Q_m(x)$ знайдуться однозначно. Підставляючи функцію (13) в (11) та враховуючи властивості оператора L, одержуємо:

$$L(Y) = L\left(Q_m(x)\cdot e^{\alpha x}\right) = L\left((q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m)\cdot e^{\alpha x}\right) =$$
$$= q_0L(x^me^{\alpha x}) + q_1L(x^{m-1}e^{\alpha x}) + \ldots + q_{m-1}L(xe^{\alpha x}) + q_mL(e^{\alpha x}) =$$
$$= (p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m)e^{\alpha x}. \qquad \textbf{(14)}$$

Скористаємось тепер формулами (***вміти довести самостійно!***)

$$L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}, \quad L(x^se^{\alpha x}) = \sum_{j=0}^{s} C_s^j P^{(j)}(\alpha)x^{s-j}e^{\alpha x}. \qquad \textbf{(15)}$$

Будемо мати:

$$q_0\sum_{j=0}^{m} C_m^j P^{(j)}(\alpha)x^{m-j}e^{\alpha x} + q_1\sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j P^{(j)}(\alpha)x^{m-1-j}e^{\alpha x} + \ldots +$$
$$+q_{m-1}\sum_{j=0}^{1} C_1^j P^{(j)}(\alpha)x^{1-j}e^{\alpha x} + q_mP(\alpha)e^{\alpha x}.$$

Скоротимо на $e^{\alpha x}$ і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x:

$$\begin{array}{ll}
x^m: & q_0P(\alpha) = p_0,\\
x^{m-1}: & q_0C_m^1P'(\alpha) + q_1P(\alpha) = p_1,\\
 & \ldots\ \ldots\ \ldots\\
x^1: & q_0C_m^{m-1}P^{(m-1)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-2}P^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P(\alpha) = p_{m-1},\\
x^0: & q_0C_m^mP^{(m)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-1}P^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P'(\alpha) + q_mP(\alpha) = p_m.
\end{array} \qquad \textbf{(16)}$$

Оскільки $P(\alpha)\neq 0$, то з системи (16) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$, і причому однозначно.

Випадок 1.2. Число α є коренем кратності k характеристичного рівняння, тобто

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=\ldots=P^{(k-1)}(\alpha)=0, \quad \text{але} \quad P^{(k)}(\alpha)\neq 0. \qquad \textbf{(17)}$$

У цьому випадку частинний розв'язок Y у вигляді (13) не побудувати, бо $P(\alpha)\neq 0$. Тепер шукатимемо його у вигляді

$$Y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}, \qquad \textbf{(18)}$$

де $Q_m(x)$ – многочлен m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, які визначаються так само, як і випадку 1.1. Підставляючи (18) в (11), одержуємо:

$$L(Y)=L\left(x^k Q_m(x)e^{\alpha x}\right)=L\left(\sum\nolimits_{j=0}^{m} q_j x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right)=\sum\nolimits_{j=0}^{m} q_j L(x^{k+m-s}e^{\alpha x})=$$

$$=\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=k}^{k+m-s} C_{k+m-j}^{l} P^{(l)}(\alpha) e^{\alpha x} x^{k+m-s-l} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j} e^{\alpha x} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=k}^{m-s} C_{k+m-j}^{k+l} P^{(k+l)}(\alpha) e^{\alpha x} x^{m-s-l} = \sum_{j=0}^{m} p_j x^{m-j}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x, одержуємо:

$$\begin{aligned}
x^m &: \quad q_0 C_{k+m}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_0, \\
x^{m-1} &: \quad q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_1, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x^1 &: \quad q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P^{(k+m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} C_{k+1}^{k} P^{(k)}(\alpha) = p_{m-1}, \\
x^0 &: \quad q_0 C_{k+m}^{k+m} P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} P^{(k+m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} C_{k+1}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + \\
&\qquad + q_m C_k^k P^{(k)}(\alpha) = p_m.
\end{aligned}$$

Оскільки $P^{(k)}(\alpha)\neq 0$, то з цих рівностей можна послідовно визначити всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Випадок 2. Права частина рівняння (11) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}\left(P_m^{(1)}(x)\cos bx + P_m^{(2)}(x)\sin bx\right), \qquad \textbf{(19)}$$

де $P_m^{(1)}(x)$ та $P_m^{(2)}(x)$ – многочлени степенів не вищих від m, причому хоча б один з них має степінь m (вони можуть бути й сталими числами, один з них може бути тотожно рівний нулю).

Якщо замінити $\cos bx$ і $\sin bx$ за ***формулами Ейлера***:

$$\cos bx = \frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}, \qquad \sin bx = \frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i},$$

то (19) можемо записати у вигляді

$$f(x) = P_m^{(1)}(x)e^{ax}\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2} + P_m^{(2)}(x)e^{ax}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i} =$$
$$= \tilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \tilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x},$$

де $\tilde{P}_m^{(1)}(x)$, $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m, тобто $f(x)$ є сумою двох доданків, які розглядались у випадку 1.

Випадок 2.1. Число $a+bi$ не є коренем характеристичного рівняння. У цьому випадку частинний розв'язок знайдеться у вигляді

$$Y = \tilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x},$$

де $\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m із невизначеними коефіцієнтами. Перейшовши до дійсного вигляду, одержуємо остаточне правило знаходження частинного розв'язку, коли права частина рівняння (11) має вигляд (19): *якщо $a+bi$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок знайдеться у вигляді*

$$Y = e^{ax}\left(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\right),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ – многочлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2.2. Число $a+bi$ є k-кратним характеристичним числом. У цьому випадку частинний розв'язок знайдеться у вигляді

$$Y(x) = x^s\left(\tilde{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}\right)$$

або

$$Y(x) = x^s e^{ax}\left(Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\right).$$

В обох випадках коефіцієнти многочленів $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ визначаються після підстановки $Y(x)$ у рівняння (1).

Важливо пам'ятати! Схема обчислення частинного розв'язку $Y(x)$ не зміниться, якщо $P_m^{(1)}(x) \equiv 0$ або $P_m^{(2)}(x) \equiv 0$.

Випадок 3. Якщо $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x)$, де функції $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ мають вигляд (13) або (19) із різними α, $a + bi$, то $Y = Y_1 + \ldots + Y_k$, де Y_j – частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_j(x)$.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$y''' - 2y'' = -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x.$$

Розв'язання. Характеристичні числа: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 2$, тому загальним розв'язком y_0 відповідного однорідного рівняння є

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}.$$

Праву частину запишемо у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = (-24x^2 + 24x - 4)e^{0x}$, $f_2(x) = -2e^x$. Оскільки $\alpha = 0$ є характеристичним числом кратності 2, а $\alpha = 2$ не є його коренем, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Підставляючи його у рівняння, одержуємо тотожність

$$-24Ax^2 + (24A - 12B)x + (6B - 4C) - De^x \equiv -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенях x, одержуємо

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -24A = -24, \\ x^1 & 24A - 12B = 24, \\ x^0 & 6B - 4C = -4, \\ e^x & -D = -2, \end{array}$$

звідки знаходимо: $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 2$. Отже,

$$Y = x^4 + x^2 + 2e^x,$$

а загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + x^4 + x^2 + 2e^x. \blacksquare$$

Лекція 15.
Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку.

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Однорідна крайова задача.
3. Неоднорідна крайова задача. Функція Ґріна.

1. Основні поняття й означення. Початкові умови не єдині додаткові умови, за допомогою яких можна виділити певний частинний розв'язок диференціального рівняння. У багатьох задачах в якості додаткових умов задаються умови на невідому функцію та її похідні на кінцях того проміжку, на якому розглядається диференціальне рівняння. Такі умови називаються ***крайовими***. Задачу визначення розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє крайові умови, називають ***крайовою***.

Крайові задачі часто виникають з потреб практики. Наприклад, у задачі про рух матеріальної точки маси m під дією заданої сили F у багатьох випадках потрібно знайти закон руху $s(t)$, якщо в початковий момент часу $t = t_0$ точка знаходилась в положенні 1, а момент часу $t = t_1$ вона повинна потрапити у точку 2. Використовуючи закон Ньютона $F = ma$, де a – прискорення, ця задача зводиться до інтегрування диференціального рівняння

$$ms'' = F(t, s, s')$$

з крайовими умовами

$$s(t_0) = s_0,\ s(t_1) = s_1.$$

Надалі обмежимось розглядом крайових задач тільки для диференціальних рівнянь другого порядку. Для рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \qquad \textbf{(1)}$$

де $p_1(x), p_2(x), f(x)$ – задані неперервні на відрізку $[a,b]$ функції, крайові умови означимо наступним чином:

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = y_0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = y_1, \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, y_0, y_1 – задані числа, причому $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0,\ j = 1,2.$

Якщо $y_0 = y_1 = 0$, тобто

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \\ \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

то такі крайові умови називають ***однорідними***.

Якщо $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то задачу (1), (2) називають ***неоднорідною крайовою задачею***, а якщо $f(x) \equiv 0$ і $y_0 = y_1 = 0$, то ***однорідною крайовою задачею***.

Надалі обмежимось випадком однорідних крайових умов, бо у випадку неоднорідних умов розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1), (2) можна шукати у вигляді

$$y(x) = \overline{y}(x) + z(x),$$

де $\overline{y}(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$ функція, яка задовольняє неоднорідні крайові умови. Тоді для функції $z(x)$ одержуємо крайову задачу з однорідними крайовими умовами і правою частиною $f(x) - L(\overline{y})$.

Наприклад, крайові умови

$$y(a) = y_0,\ y(b) = y_1$$

за допомогою заміни

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{b - a}(x - a) - y_0$$

зводимо до однорідних умов

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0.$$

Розв'язком крайової задачі (1), (2) називають функцію $y(x)$, яка двічі неперервно диференційовна на (a,b), неперервно диференційовна на $[a,b]$ і задовольняє рівняння (1) на (a,b) та крайові умови (2).

2. Однорідна крайова задача. Як відомо, розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \in [a,b], \end{cases}$$

де $p_1(x), p_2(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$, згідно з теоремою Пікара існує та єдиний на $[a,b]$. Для крайової задачі (1), (2) це зовсім не обов'язково, тобто її розв'язок може не існувати або не бути єдиним. Для детальнішого розгляду цього питання позначимо через $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ФСР відповідного однорідного рівняння

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{4}$$

а через $y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (1). Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (лекція 13) загальним розв'язком рівняння (1) буде

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + y_1(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Для отримання розв'язку крайової задачі (1), (3) сталі C_1, C_2 необхідно визначити з однорідних крайових умов (3). Підставляючи загальний розв'язок рівняння (1) в (3), одержуємо лінійну алгебраїчну систему:

$$\begin{cases} \left(\alpha_1\varphi_1(a) + \beta_1\varphi_1'(a)\right)C_1 + \left(\alpha_1\varphi_2(a) + \beta_1\varphi_2'(a)\right)C_2 = -\alpha_1 y_1(a) - \beta_1 y_1'(a), \\ \left(\alpha_2\varphi_1(b) + \beta_2\varphi_1'(b)\right)C_1 + \left(\alpha_2\varphi_2(b) + \beta_2\varphi_2'(b)\right)C_2 = -\alpha_2 y_1(b) - \beta_2 y_1'(b). \end{cases}$$

Позначимо через U і $\tilde{U}$ відповідно матрицю і розширену матрицю цієї системи. Використовуючи відому з курсу алгебри теорему про розв'язність лінійної системи рівнянь, одержуємо важливий результат.

Теорема 1. *Якщо* $\det U \neq 0$, *то розв'язок крайової задачі (1), (3) існує і єдиний на* $[a,b]$. *Якщо* $\det U = 0$, *то розв'язок крайової задачі (1), (3) не існує, якщо ранг матриці U не дорівнює рангу розширеної матриці* $\tilde{U}$, *і розв'язок задачі (1),(3) існує, але не єдиний, якщо ранг матриці U дорівнює рангу матриці* $\tilde{U}$.

Ранг матриці U називають ***рангом крайової задачі*** (1), (2). Однорідна крайова задача (1), (3) має лише тривіальний розв'язок, якщо ранг матриці U дорівнює двом, і має один розв'язок, якщо ранг матриці U дорівнює одиниці.

Приклад 1. Дослідити на розв'язність крайову задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = b, \qquad l > 0, b \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння є

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

З крайової умови $y(0) = 0$ знаходимо $C_1 = 0$, а крайова умова $y(l) = b$ приводить до рівняння $C_2 \sin l = b$. Якщо $\sin l \neq 0$, тобто $l \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, то

$$C_2 = \frac{b}{\sin l}$$

і одержуємо єдиний розв'язок задачі

$$y = \frac{b \sin x}{\sin l}.$$

Якщо ж $\sin l = 0$, тобто $l = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, то можливі два випадки. Якщо $b \neq 0$, то рівняння $C_2 \sin l = b$, а значить, і крайова задача, розв'язків немає. Якщо $b = 0$, то рівняння $C_2 \sin l = b$ перетворюється у тотожність і крайова задача має безліч розв'язків вигляду

$$y = C_2 \sin x,$$

де C_2 – довільна стала. ■

3. Неоднорідна крайова задача. Покажемо тепер, що розв'язок рівняння (1), який задовольняє однорідні крайові умови (3), однозначно представляється через так звану функцію Ґріна[1)] крайової задачі, якщо однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

[1)] **ГРІН** Джордж (1793-1841) – англійський математик і фізик.

Функцією Ґріна крайової задачі (1), (3) називають функцію $G(x,s)$, яка визначена для довільних $x,s\in[a,b]$ і задовольняє такі три умови:

1. для кожного фіксованого $s\in[a,b]$ $G(x,s)$ як функція змінної x на кожному з проміжків $[a,s)$ і $(s,b]$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (4);
2. $G(x,s)$ задовольняє однорідні крайові умови (3);
3. $G(x,s)$ – неперервна для всіх $x,s\in[a,b]$, а її похідна $G'_x(x,s)$ має при $x=s$ розрив першого роду зі стрибком

$$\frac{\partial G(s+0,s)}{\partial x}-\frac{\partial G(s-0,s)}{\partial x}=1.$$

Теорема 2. *Якщо однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок, то функція Ґріна крайової задачі (1),(2) існує і єдина.*

Доведення. Нехай $\varphi_1(x)$ – розв'язок рівняння (4) з початковими умовами

$$y(a)=\beta_1,\quad y'(a)=-\alpha_1,$$

а $\varphi_2(x)$ – розв'язок рівняння (4) з початковими умовами

$$y(b)=\beta_2,\quad y'(b)=-\alpha_2.$$

Очевидно, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ тотожно не дорівнюють нулю на $[a,b]$, і що $\varphi_1(x)$ задовольняє першу крайову умову з (3) $(y_0=0)$, а $\varphi_2(x)$ – другу крайову умову з (3) $(y_1=0)$, бо $\alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0,\ j=1,2$. Крім того, функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно незалежні на $[a,b]$, бо інакше

$$\varphi_2(x)=C\varphi_1(x),\ C\neq 0,$$

і тоді $\varphi_2(x)$ задовольняє обидві крайові умови (3), що суперечить умові теореми. Таким чином, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4). Нехай $W(x)$ – вронскіан цієї системи.

Функцію $G(x,s)$ шукаємо у вигляді

$$G(x,s)=\begin{cases} c_1(s)\varphi_1(x), & a\le x<s,\\ c_2(s)\varphi_2(x), & s<x\le b.\end{cases}$$

За побудовою функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ функція $G(x,s)$ задовольняє пункти 1, 2 означення функції Ґріна. Для того, щоб вона задовольняла пункт 3 цього означення, залишається знайти $c_1(s)$, $c_2(s)$ з системи

$$\begin{cases} c_2(s)\varphi_2(s)-c_1(s)\varphi_1(s)=0,\\ c_2(s)\varphi_2'(s)-c_1(s)\varphi_1'(s)=1.\end{cases}$$

Ця система однозначно розв'язна відносно $c_1(s)$, $c_2(s)$, бо її визначником є $W(s)$, який відмінний від нуля на $[a,b]$. Остаточно одержуємо:

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{W(s)}\cdot\varphi_2(s)\varphi_1(x), & a\le x\le s,\\ \dfrac{1}{W(s)}\cdot\varphi_1(s)\varphi_2(x), & s\le x\le b.\end{cases} \qquad \blacktriangleright \qquad \mathbf{(5)}$$

Із формули (5) випливає, що функція Ґріна є симетричною функцією своїх аргументів, тобто

$$G(x,s)=G(s,x).$$

Теорема 3. *Якщо однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок, то розв'язок рівняння (1) з однорідними крайовими умовами (3) існує, єдиний і виражається формулою*

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \mathbf{(6)}$$

де $G(x,s)$ *– функція Ґріна крайової задачі (1),(2).*

Доведення. Запишемо формулу (6) у вигляді

$$y(x)=\int_a^x G(x,s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+\int_x^b G(x,s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s.$$

На кожному з проміжків $[a,x)$ і $(x,b]$ функції $G(x,s)$ і $\dfrac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ неперервні, тому кожний з інтегралів можна диференціювати за змінною x. Будемо мати:

$$y'(x)=\int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+G(x,x-0)f(x)+$$

$$+\int_x^b G(x,s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s-G(x,x+0)f(x).$$

Оскільки функція $G(x,s)$ є неперервною при $s=x$, то неінтегральні доданки взаємознищуються, а тому

$$y'(x)=\int_a^x \frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+\int_x^b \frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s. \qquad \textbf{(7)}$$

Формулу (7) здиференціюємо за x ще один раз:

$$y''(x)=\int_a^x \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+\frac{\partial G(x,x-0)}{\partial x}f(x)+$$

$$+\int_x^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s-\frac{\partial G(x,x+0)}{\partial x}\cdot f(x).$$

Використовуючи пункт 3 з означення функції $G(x,s)$, останню формулу можна записати у вигляді

$$y''(x)=\int_a^b \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s+f(x). \qquad \textbf{(8)}$$

З формул (6), (7), (8), враховуючи властивості функції $G(x,s)$, одержуємо, що (6) – розв’язок задачі (1), (3). Цей розв’язок єдиний, бо якщо припустити існування іншого розв’язку $\tilde{y}(x)$, то

$$z(x)=y(x)-\tilde{y}(x)$$

буде нетривіальним розв’язком однорідної крайової задачі, що суперечить умові теореми. ►

Приклад 2. Побудувати функцію Ґріна крайової задачі

$$y'' + y = f(x), \qquad y(0) = y(\pi), \ \ y'(0) = y'(\pi).$$

Розв'язання. Розв'язуючи рівняння

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + G = 1, \ \ x \neq s,$$

знаходимо

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x, & \text{якщо } 0 \le x < s, \\ C_3 \sin x + C_4 \cos x, & \text{якщо } s < x \le \pi. \end{cases}$$

З крайових умов для функції G отримуємо:

$$C_2 = -C_4, \quad C_1 = -C_3.$$

З неперервності функції $G(x,s)$ при $x = s$, а також стрибка похідної $G'_x(x,s)$ при $x = s$, випливають співвідношення

$$C_1 \sin s + C_2 \cos s = C_3 \sin s + C_4 \cos s,$$

$$C_3 \cos s - C_4 \sin s - C_1 \cos s + C_2 \sin s = 1.$$

Звідси знаходимо, що

$$C_2 = -C_4 = \frac{1}{2} \sin s,$$

$$C_1 = -C_3 = -\frac{1}{2} \cos s.$$

Таким чином, шукана функція Ґріна має вигляд

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(s - x), & \text{якщо } 0 \le x \le s, \\ \frac{1}{2} \sin(x - s), & \text{якщо } s \le x \le \pi, \end{cases}$$

або

$$G(x,s) = \frac{1}{2} \sin |x - s|, \quad 0 \le x \le \pi. \ \blacksquare$$

Лекція 16.
Системи звичайних диференціальних рівнянь.

План.

1. Основні поняття й означення.
2. Задача Коші. Класифікація розв’язків системи.
3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до системи рівнянь першого порядку і обернена задача.

1. Основні поняття й означення. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \\ F_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_k\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}\right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де кількість шуканих функцій $y_1, y_2, \dots, y_k$ дорівнює кількості рівнянь.

Якщо систему (1) можна розв’язати відносно старших похідних усіх функцій, що містяться в ній, тобто

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ y_1^{(m_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_1^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}\right), \end{cases} \quad (2)$$

то систему (2) називають ***канонічною***.

Сукупність функцій $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_k = y_k(x)$, які на проміжку (a,b) мають похідні $m_1, m_2, \dots, m_k$-го порядку відповідно, називають ***розв’язком*** системи (2) на цьому проміжку, якщо вона перетворює всі рівняння системи (2) у тотожності.

Покажемо, що систему (2) можна замінити еквівалентною їй системою $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ рівнянь першого порядку, розв’язаних відносно похідних усіх шуканих функцій. Для цього введемо нові функції за формулами:

$$y_{10}=y_1,\ y_{11}=y_1',\ y_{12}=y_1'',\ \ldots,\ y_{1,m_1-1}=y_1^{(m_1-1)},$$

$$y_{20}=y_2,\ y_{21}=y_2',\ y_{22}=y_2'',\ \ldots\ ,\ y_{2,m_2-1}=y_2^{(m_2-1)},$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$y_{k0}=y_k,\ y_{k1}=y_k',\ y_{k2}=y_k'',\ \ldots,\ y_{k,m_k-1}=y_k^{(m_k-1)}.$$

Отже, маємо $n=m_1+m_2+\ldots+m_k$ нових функцій y_{ij}. Для них система (2) заміниться такою системою:

$$\begin{cases} y_{10}'=y_{11},\ y_{11}'=y_{12},\ \ldots\ ,y_{1,m_1-2}'=y_{1,m_1-1}, \\ y_{1,m_1-1}'=f_1\left(x,y_{10},y_{11},\ldots,y_{1,m_1-1},\ldots,y_{k0},y_{k1},\ldots,y_{k,m_k-1}\right), \\ y_{20}'=y_{21},\ y_{21}'=y_{22},\ \ldots\ ,y_{2,m_2-2}'=y_{2,m_2-1}, \\ y_{2,m_2-1}'=f_2\left(x,y_{10},y_{11},\ldots,y_{1,m_1-1},\ldots,y_{k0},y_{k1},\ldots,y_{k,m_k-1}\right), \\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ y_{k0}'=y_{k1},\ y_{k1}'=y_{k2},\ \ldots\ ,y_{k,m_k-2}'=y_{k,m_k-1}, \\ y_{k,m_k-1}'=f_k\left(x,y_{10},y_{11},\ldots,y_{1,m_1-1},\ldots,y_{k0},y_{k1},\ldots,y_{k,m_k-1}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Якщо у системі (3) перепозначити функції

$$y_{10},y_{11},\ \ldots\ ,y_{1,m_1-1},\ \ldots\ ,y_{k0},y_{k1},\ \ldots\ ,y_{k,m_k-1}$$

через $y_1,y_2,\ldots,y_n$, то вона буде частковим випадком системи

$$\begin{cases} y_1'=f_1\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \\ y_2'=f_2\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ y_n'=f_n\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \end{cases} \tag{4}$$

яку називають ***нормальною*** системою звичайних диференціальних рівнянь.

Якщо праві частини системи (4) не залежать від x, тобто

$$\begin{cases} y_1'=f_1\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \\ y_2'=f_2\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \\ \qquad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ y_n'=f_n\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right), \end{cases}$$

то її називають ***автономною (стаціонарною)***.

2. Задача Коші. Класифікація розв'язків системи. ***Задача Коші*** для системи (4) формулюється так: серед усіх розв'язків системи (4) знайти такий розв'язок

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x),$$

який задовольняє умови:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \dots\ ,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{5}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з проміжку (a,b), а $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ – довільні наперед задані дійсні числа (їх називають ***початковими даними розв'язку***). Сукупність чисел $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ називають ***початковими даними*** системи (4), а умови (5) – ***початковими***.

Розглядаючи задачу Коші для системи (4), природно виникає питання про існування та єдиність її розв'язку. Виявляється, що для існування неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші (4), (5) досить припустити, щоб праві частини системи були неперервними в деякому околі початкових даних (***теорема Пеано***).

Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (4), (5).

Теорема (Пікара). *Нехай функції* $f_j\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right)$ *у системі (4):*

1) неперервні, а, отже, й обмежені $\left(|\ f_j\ | \le M\right)$ *в області*

$$G: \ \ |\ x - x_0\ | \le a,\ |\ y_j - y_j^{(0)}\ | \le b,\ \ j = 1, \dots, n;$$

2) справджують в G умови Ліпшиця зі сталою L, тобто для будь-яких $\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n\right) \in G,\ \left(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\right) \in G$ *виконуються нерівності*

$$\left| f_j\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n\right) - f_j\left(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\right)\right| \le L \sum_{s=1}^{n} \left| y_s - \bar{y}_s \right|,\ \ \ j = 1, \dots, n,$$

де L – стала Ліпшиця. Тоді задача Коші (4), (5) має єдиний розв'язок принаймні на інтервалі $\left| x - x_0 \right| \le h$, *де* $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

Зауважимо, що умова Ліпшіца виконується завжди, якщо функції $f_j(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ мають в області G обмежені частинні похідні першого порядку за змінними $y_1, ..., y_n$, тобто якщо

$$\left|\frac{\partial f_j(x, y_1, ..., y_n)}{\partial y_j}\right| \le M, \; j = 1, ..., n.$$

Нехай тепер G – це область простору $x, y_1, ..., y_n$, в кожній точці якої задача Коші (4), (5) має єдиний розв'язок. Сукупність функцій

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad j = 1, ..., n, \tag{6}$$

які визначені в деякій області зміни змінних $x, C_1, C_2, ..., C_n$ і мають неперервні частинні похідні за змінною x, називають ***загальним розв'язком*** системи (4) в області G, якщо:

1) систему (6) можна розв'язати відносно довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ в області G, тобто

$$C_j = \psi_j(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad j = 1, ..., n; \tag{7}$$

2) для всіх значень $x, y_1, ..., y_n$ з області G формули (7) визначають такі значення $C_1, C_2, ..., C_n$, для яких сукупність функцій (6) є розв'язком системи (4).

Розв'язок системи (4), в кожній точці графіка якого виконується умова єдиності, називають ***частинним***. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються з загального для конкретних значень довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, є частинними розв'язками. Розв'язок, у кожній точці графіка якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають ***особливим***.

Приклад 1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = x + 2y/x - \sqrt{z}, \\ z' = 2\sqrt{z}. \end{cases}$$

Розв'язання. Інтегруючи друге рівняння системи, знаходимо

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}}=dx\ \ (z=0?)\ \Rightarrow\ \sqrt{z}=x+C_1\ \ \Rightarrow\ \ z=(x+C_1)^2.$$

Функцію z підставимо в перше рівняння системи:

$$y'=x+2y/x-x+C_1\ \ \Rightarrow\ \ y'=2y/x+C_1.$$

Розв'язуючи останнє рівняння (воно є лінійним), знаходимо

$$y=C_1x+C_2x^2.$$

Отже, загальним розв'язком заданої системи є

$$y=C_1x+C_2x^2,\quad z=(x+C_1)^2.$$

Друге рівняння має особливий розв'язок $z=0$. Підставляючи його в перше рівняння, одержуємо ще одне лінійне рівняння першого порядку $y'=x+\dfrac{2y}{x}$, інтегруючи яке, знаходимо $y=x^2\left(\ln|x|+C\right)$.

Отже, $y=x^2(\ln|x|+C),\quad z=0$ – особливий розв'язок системи. ■

3. Зведення рівняння *n*-го порядку до системи рівнянь першого порядку і обернена задача. Нехай маємо диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right). \qquad \textbf{(8)}$$

Позначимо:

$$y=y_1,\ \ y'=y_2,\ \ y''=y_3,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}=y_n.$$

Тоді

$$y_1'=y'=y_2,\quad y_2'=y''=y_3,\ \ \dots,\ \ y_{n-1}'=y^{(n-1)}=y_n,$$

$$y_n'=y^{(n)}=f\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right),$$

тобто $y_1,...,y_n$ задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'=y_2,\\ y_2'=y_3,\\ \quad\dots\\ y_{n-1}'=y_n,\\ y_n'=f(x,y_1,y_2,...,y_n). \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

Система (9) – це нормальна система диференціальних рівнянь, рівносильна рівнянню (8). Звичайно, можна побудувати й інші нормальні систем, рівносильні рівнянню (8), якщо вводити нові функції за допомогою співвідношень, відмінних від наведених вище.

Таким чином, задача інтегрування рівняння (8) рівносильна задачі інтегрування системи (9). Зведення одного рівняння довільного порядку, розв'язаного відносно старшої похідної, до рівносильної нормальної системи рівнянь у деяких випадках спрощує задачу знаходження загального розв'язку або розв'язку задачі Коші, а найголовніше позбавляє проводити доведення деяких теорем окремо для рівнянь вищого порядку і для систем рівнянь першого порядку.

Розглянемо тепер ***обернену задачу*** про зведення нормальної системи до одного диференціального рівняння. Отже, нехай маємо нормальну систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{10}$$

де f_j – $(n-1)$-разів диференційовні функції. Здиференціюємо перше рівняння системи (10) $(n-1)$-разів за змінною x, замінюючи після кожного диференціювання похідні $y_1', y_2', ..., y_n'$ з цієї ж системи:

$$\begin{cases} y_1'' = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \\ \qquad \equiv \Phi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1''' = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} f_1 + ... + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_3(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_1^{(n-1)} = \dfrac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_1} f_1 + ... + \dfrac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1^{(n)} = \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} f_1 + ... + \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{11}$$

Припустимо, що систему, складену з першого рівняння системи (10) і перших $(n-2)$-х рівнянь системи (11), можна розв'язати відносно $y_2,\dots,y_n$ (при цьому $y_2,\dots,y_n$ виражаються через $x, y_1, y_1',\dots,y_1^{(n-1)}$). Замінивши в останньому рівнянні системи (11) функції $y_2,\dots,y_n$ знайденими для них виразами, одержимо рівняння n-го порядку

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1',\dots,y_1^{(n-1)}\right).$$

Метод розв'язування нормальної системи рівнянь зведенням її до одного лінійного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної, називають ***методом виключення***.

Приклад 2. Застосовуючи метод виключення, зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи перше рівняння системи відносно y і підставляючи в друге рівняння, будемо мати

$$z = y' - 2y,$$

$$\left(y' - 2y\right)' = 3y + 4\left(y' - 2y\right) \quad \Rightarrow \quad y'' - 6y' + 5x = 0.$$

Загальним розв'язком останнього рівняння є

$$y = C_1e^x + C_2e^{5x}.$$

Підставляючи вираз для y в перше рівняння системи, знаходимо

$$z = \left(C_1e^x + C_2e^{5x}\right)' - 2\left(C_1e^x + C_2e^{5x}\right) = -C_1e^x + 3C_2e^{5x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{5x}, \quad z = -C_1e^x + 3C_2e^{5x}.$

Приклад 3. Застосовуючи метод виключення, зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 + 2y_1, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо третє рівняння системи і використаємо всі рівняння системи:

$$y_3'' = y_1' - y_2' + 2y_3' = 2y_1 - y_2 + y_3 - (y_1 + 2y_2 - y_3) + 2(y_1 - y_2 + 2y_3) =$$
$$= 3y_1 - 5y_2 + 6y_3.$$

Диференціюючи отримане співвідношення і знову використовуючи рівняння системи, приходимо до рівняння

$$y_3''' = 3y_1' - 5y_2' + 6y_3' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3.$$

Залишається виключити функції y_1, y_2 з системи рівнянь

$$\begin{cases} y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3'' = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3, \\ y_3''' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3. \end{cases}$$

Легко перевірити, що

$$y_1 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{5}{2}y_3' - 2y_3, \qquad y_2 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{3}{2}y_3', \tag{12}$$

при цьому

$$y_3''' - 6y_3'' + 11y_3' - 6y_3 = 0.$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

є $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_2 = 3$, то

$$y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}. \tag{13}$$

Підставляючи (13) в (12), одержуємо

$$y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x}, \qquad y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Відповідь:

$$y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x},\ \ y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x},\ \ y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Лекція 17.
Системи лінійних диференціальних рівнянь

План.

1. Лінійні однорідні системи.
2. Лінійна незалежність систем функцій.
3. Формула Остроградського-Якобі.
4. Фундаментальна система функцій. Основна теорема.

1. Лінійні однорідні системи. ***Лінійною*** системою диференціальних рівнянь першого порядку називають систему вигляду

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

або

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1$'$}$$

Вважатимемо, що коефіцієнти $p_{kj}(x)$, $k, j = 1, \ldots, n$, і праві частини $f_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, системи (1) неперервні на деякому інтервалі (a, b). Тоді згідно з теоремою Пікара (лекція 15), система (1) має єдиний розв'язок $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... , $y_n = y_n(x)$, який задовольняє початкові умови:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \; y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \; \ldots \; , \; y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a, b) (***вміти пояснити це твердження самостійно***). Цей розв'язок буде визначений на всьому інтервалі (a, b) неперервності функцій $p_{kj}(x)$ і $f_k(x)$. Особливих розв'язків система (1) не має.

Якщо всі $f_k(x) \equiv 0$ на інтервалі (a, b), то систему (1) називають ***лінійною однорідною***. Вона має вигляд

$$y_k' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Якщо у системі (1) не всі функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю, то її називають ***лінійною неоднорідною***.

Розглянемо лінійну однорідну систему (2). Основним завданням є знаходження всіх дійсних розв'язків цієї системи, однак для цього інколи зручно мати її комплексні розв'язки. Введемо поняття комплексного розв'язку однорідної системи (2).

Розглянемо сукупність комплексних функцій дійсної змінної *x*:

$$y_j(x) = u_j(x) + iv_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

де $u_j(x), v_j(x), \ j = 1, \dots, n,$ – дійсні функції. Сукупність функцій (3) називають ***комплексним розв'язком*** однорідної системи (2) на інтервалі (a,b), якщо ці функції перетворюють усі рівняння системи (2) у тотожності для $a < x < b$, тобто якщо

$$\begin{cases} u_1' + iv_1' = p_{11}(x)(u_1 + iv_1) + p_{12}(x)(u_2 + iv_2) + \dots + p_{1n}(x)(u_n + iv_n), \\ u_2' + iv_2' = p_{21}(x)(u_1 + iv_1) + p_{22}(x)(u_2 + iv_2) + \dots + p_{2n}(x)(u_n + iv_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_n' + iv_n' = p_{n1}(x)(u_1 + iv_1) + p_{n2}(x)(u_2 + iv_2) + \dots + p_{nn}(x)(u_n + iv_n). \end{cases} \tag{4}$$

Оскільки дві комплексні функції співпадають тоді і тільки тоді, коли співпадають відповідно їхні дійсні й уявні частини, то, прирівнюючи у (4) дійсні та уявні частини, бачимо, що якщо система (2) має комплексний розв'язок (3), то вона має також два дійсні розв'язки:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \quad \text{і} \quad v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x),$$

тобто дійсні та уявні частини комплексного розв'язку системи (2) утворюють два дійсні розв'язки цієї ж системи.

Розв'язки однорідної системи (2) мають деякі характерні властивості, аналогічні до відповідних властивостей розв'язків лінійного однорідного рівняння *n*-го порядку (лекція 10, п.2).

Властивість 1. *Якщо* $y_1 = \varphi_1(x), \ y_2 = \varphi_2(x), \ \dots, \ y_n = \varphi_n(x)$ *– розв'язок системи (2), то* $y_1 = C\varphi_1(x), \ y_2 = C\varphi_2(x), \ \dots, \ y_n = C\varphi_n(x)$, *де C – довільна стала, також розв'язок цієї системи.* ***(Вміти довести самостійно!)***.

Властивість 2. *Нехай задано m розв'язків системи (2):*

$$\begin{gathered} 1\text{-й розв'язок}: \quad y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}, \\ 2\text{-й розв'язок}: \quad y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ m\text{-й розв'язок}: \quad y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mn}. \end{gathered}$$

Тоді лінійна комбінація цих розв'язків з довільними сталими коефіцієнтами $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто сукупність функцій

$$\begin{gathered} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \ldots + C_m y_{m1}, \\ y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \ldots + C_m y_{m2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \ldots + C_m y_{mn}, \end{gathered}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі числа, або коротше,

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad \textbf{(5)}$$

також є розв'язком системи (2).

Доведення. Підставляючи (5) в $(1')$, одержуємо:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik} \right)' = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_{il} \right), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y'_{ik} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=1}^{n} p_{kl}(x) y_{il}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення властивості випливає з тотожного виконання рівностей

$$y'_{ik} \equiv \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) y_{ij}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \textbf{(6)}$$

які є результатом підставляння i-го розв'язку у систему (2).

2. Лінійна незалежність систем функцій. Припустимо, що нам відомо n частинних розв'язків однорідної системи (2). Важливо відповісти на питання: за яких умов лінійна комбінація (5) цих розв'язків визначатиме загальний розв'язок однорідної системи. Для відповіді на це питання введемо поняття лінійної незалежності систем функцій.

Нехай задано m сукупностей функцій:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{m1},\ y_{m2},\ldots,\ y_{mn}. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Ці сукупності називають ***лінійно незалежними*** на інтервалі (a,b), якщо не існує чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, одночасно не рівних нулю, для яких виконувались би співвідношення:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_{11}+\alpha_2 y_{21}+\ldots+\alpha_m y_{m1}\equiv 0, \\ \alpha_1 y_{12}+\alpha_2 y_{22}+\ldots+\alpha_m y_{m2}\equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{1n}+\alpha_2 y_{2n}+\ldots+\alpha_m y_{mn}\equiv 0. \end{array}\right\} \quad \forall x\in(a,b) \qquad (8)$$

В інакшому випадку сукупності (7) називають ***лінійно залежними*** на (a,b).

Встановимо необхідну умову лінійної залежності n сукупностей функцій. Нехай маємо n сукупностей функцій:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \ldots,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Визначником Вронського[1)] або ***вронскіаном*** системи функцій (9) називають визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

[1)] Див. зноску на стор. 76.

Теорема 1 (Необхідна умова лінійної залежності *n* сукупностей функцій). *Якщо n сукупностей функцій (9) лінійно залежні на інтервалі* (a,b)*, то* $W(x)\equiv 0$ *на цьому інтервалі.*

Доведення. Оскільки сукупності функцій (9) лінійно залежні, то за означенням

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{ik}=0,\quad k=1,2,\dots,n;\ a<x<b, \tag{10}$$

де не всі α_i дорівнюють нулю. Розглядаючи систему (10) як однорідну лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, бачимо, що вона має ненульовий розв'язок, а тому визначник цієї системи дорівнює нулю. Але цим визначником є вронскіан, отже $W(x)\equiv 0$ в усіх точках інтервалу (a,b). ►

Нехай тепер кожна з сукупностей функцій (9) є розв'язком системи (2), тобто маємо *n* розв'язків

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\dots,\ y_{1n},\\ y_{21},\ y_{22},\dots,\ y_{2n},\\ \quad\dots\ \ \dots\ \ \dots\\ y_{n1},\ y_{n2},\dots,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Теорема 2 (Необхідна умова лінійної незалежності *n* розв'язків лінійної однорідної системи *n* рівнянь). *Якщо n розв'язків (11) лінійно незалежні на інтервалі* (a,b) *неперервності коефіцієнтів* $p_{kj}(x)$*, то вронскіан цих розв'язків не перетворюється в нуль у жодній точці* (a,b).

Доведення. Доведення теореми проведемо від супротивного. Нехай $W(x_0)=0$, де $x_0\in(a,b)$. Побудуємо систему *n* алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}C_i y_{ik}(x_0)=0,\quad k=1,2,\dots,n. \tag{12}$$

Оскільки визначник системи (12) дорівнює нулю (ним є $W(x_0)$), то однорідна система (12) має ненульовий розв'язок

$$C_1=C_1^{(0)},\ C_2=C_2^{(0)},\ \dots,\ C_n=C_n^{(0)}.$$

Побудуємо тепер розв'язок

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad \textbf{(13)}$$

Оскільки $C_i^{(0)}$ задовольняють систему (12), то розв'язок (13) має нульові початкові значення у точці $x = x_0$, тобто

$$y_1(x_0) = 0, \; y_2(x_0) = 0, \ldots, \; y_n(x_0) = 0.$$

Але оскільки ці самі умови задовольняє нульовий розв'язок, то згідно з теоремою Пікара розв'язок (13) співпадає з розв'язком $y \equiv 0$, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Отримали, що розв'язки (11) лінійно залежні на інтервалі (a, b), що суперечить припущенню. ►

З теорем 1 і 2 випливає: *для того, щоб n розв'язків системи (2) були лінійно незалежними на інтервалі* (a, b)*, необхідно і достатньо, щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль в жодній точці з* (a, b).

3. Формула Остроградського[1)]-Якобі[2)]. Ця формула дозволяє з точністю до сталого множника виразити вронскіан розв'язків системи (3) через діагональні коефіцієнти цієї системи, а саме:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} (p_{11}(x) + p_{22}(x) + \ldots + p_{nn}(x)) \, \mathrm{d}x}, \qquad \textbf{(14)}$$

де $x = x_0$ – довільна точка з інтервалу (a, b). Для доведення формули (14) знайдемо похідну від вронскіана, диференціюючи його за стовпцями. Відомо, що в цьому випадку похідна від визначника n-го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримуються з нього почерговою заміною елементів першого, другого, ... , n-го стовпця їх похідними, тобто

[1)] Див. зноску на стор. 78.
[2)] ЯКОБІ (Jacoby) Карл Густав Якоб (1804-1851 –- німецький математик.

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & y'_{1k} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & y'_{2k} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & y'_{nk} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінимо справа похідні $y'_{1k}, y'_{2k},..., y'_{nk}$ їх виразами з (6):

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & \sum_{j=1}^{n} p_{kj}y_{1j} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & \sum_{j=1}^{n} p_{kj}y_{2j} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & \sum_{j=1}^{n} p_{kj}y_{nj} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти визначник справа на суму n визначників, то всі вони дорівнюватимуть нулю (кожний з них матиме два пропорційні стовпці), крім визначника, який відповідає $j=k$. У цьому випадку визначник справа дорівнює $p_{kk}(x)W(x)$, а тому

$$W'(x)=\sum_{k=1}^{n} p_{kk}(x)W(x),$$

звідки легко отримати формулу (14) (***вміти зробити це самостійно***).

З формули Остроградського-Якобі, зокрема, випливають такі властивості:

1. *Якщо* $W(x)=0$ *хоч у одній точці інтервалу* (a,b), *тобто інтервалі неперервності коефіцієнтів системи (2), то* $W(x)=0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

2. *Якщо* $W(x)\neq 0$ *у одній точці інтервалу* (a,b), *то* $W(x)\neq 0$ *в усіх точках цього інтервалу.*

4. Фундаментальна система функцій. Основна теорема. Сукупність n розв'язків однорідної системи (2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a,b), називають ***фундаментальною системою розв'язків*** на цьому інтервалі.

З п.3 лекції випливає таке твердження: *сукупність n розв'язків буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі (a,b) тоді і тільки тоді, коли вронскіан цих розв'язків відмінний від нуля хоч в одній точці цього інтервалу.*

Так само, як і для випадку однорідного лінійного рівняння n-го порядку, знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок системи (2).

Теорема 3 (Основна теорема). *Якщо*

$$\left.\begin{array}{c} y_{11},\ y_{12},\dots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\dots,\ y_{2n}, \\ \dots\dots\dots \\ y_{n1},\ y_{n2},\dots,\ y_{nn} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи (2) на інтервалі (a,b), то формули

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \dots + C_n y_{nn}, \end{array}\right\} \qquad (16)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі числа, визначають загальний розв'язок системи (2) в усій її області задання.

Доведення. Систему (16) можна розв'язати відносно $C_1, C_2, \dots, C_n$, бо вона є лінійною системою, причому її визначник відмінним від нуля (ним є $W(x)$). Крім того, сукупність функцій (16) є розв'язком системи (2) для всіх значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ (див. властивість 2 з п.1 цієї лекції). Тому згідно з означенням загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь сукупність функцій (16) є загальним розв'язком системи (2). ►

Лекція 18.
Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

План.

1. Основні означення й поняття.
2. Побудова ФСР і загального розв'язку однорідної лінійної системи у випадку простих корнів характеристичного рівняння.
3. Побудова ФСР і загального розв'язку однорідної лінійної системи у випадку кратних корнів характеристичного рівняння.

1. Основні означення й поняття. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (1)$$

де a_{ij}, $i, j = 1,\ldots,n$, – сталі дійсні числа, функції $f_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$, – неперервні на деякому інтервалі (a,b). Покажемо, що систему (1) завжди можна зінтегрувати у скінченному вигляді (тобто або в елементарних функціях, або у квадратурах).

Розглянемо спочатку питання про побудову загального розв'язку відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \quad (2)$$

Згідно з теоремою 3 лекції 16 для побудови загального розв'язку системи (2) досить знайти хоча б одну її фундаментальну систему розв'язків.

За аналогією з однорідним лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами частинний розв'язок системи (2) шукатимемо у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{kx}, \ \ldots\ , \quad y_n = \gamma_n e^{kx}, \quad (3)$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ і k – деякі сталі, причому $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не дорівнюють нулю одночасно (інакше одержимо очевидний нульовий розв'язок, який не може належати фундаментальній системі розв'язків).

Підставимо (3) в систему (2), скоротимо e^{kx} і перенесемо всі доданки у ліву частину. Одержуємо систему алгебраїчних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-k)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\gamma_n = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Як відомо з курсу алгебри, ненульовий розв'язок системи (4) існує лише тоді, коли її визначник, який позначимо через $\Delta(k)$, дорівнює нулю, тобто

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Рівняння (5) називають ***характеристичним рівнянням*** системи (2), його корені – ***характеристичними числами***, а визначник $\Delta(k)$ – ***характеристичним визначником***.

2. Побудова ФСР і загального розв'язку однорідної лінійної системи у випадку простих корнів характеристичного рівняння. Нехай усі характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ прості (різні). Тоді, як відомо,

$$\Delta(k_j) = 0, \text{ але } \Delta'(k_j) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Покажемо, що ранг матриці, складеної з коефіцієнтів системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}-k_j & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k_j & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k_j \end{pmatrix},$$

яку отримуємо з системи (4) після заміни у ній k на k_j, дорівнює $n-1$. Справді, обчислюючи $\Delta'(k)$, будемо мати:

$$\Delta'(k)=\begin{vmatrix}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}-k & 0 & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & -1 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & 0 & \ldots & a_{nn}-k\end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & -1\end{vmatrix}=-\Delta_{11}(k)-\Delta_{22}(k)-\ldots-\Delta_{nn}(k), \qquad \textbf{(6)}$$

де $\Delta_{jj}(k)$ – алгебраїчне доповнення елемента $a_{jj}-k$ визначника $\Delta(k)$.

Оскільки $\Delta'(k_j)\neq 0,\ \ j=1,\ldots,n$, то з (6) робимо висновок, що хоча б з визначників $(n-1)$-го порядку, а саме один з визначників $\Delta_{jj}(k_i)$, відмінний від нуля, тому ранг матриці A дорівнює $n-1$. Отже, одне з рівнянь системи (4) є наслідком інших, а тому ця система має ненульовий розв'язок, який визначений з точністю до довільного множника пропорційності P_i:

$$\gamma_{i1}=P_i m_{i1},\ \ \gamma_{i2}=P_i m_{i2},\ \ldots,\ \gamma_{in}=P_i m_{in},\qquad i=1,\ldots,n. \qquad \textbf{(7)}$$

Якщо зафіксувати у формулах (7) множник P_i, то одержимо певний розв'язок системи (4).

Підставляючи тепер в (3) замість k послідовно характеристичні числа $k_1,k_2,\ldots,k_n$, а замість $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ – відповідні їм розв'язки системи (4), які визначені формулами (7) при фіксованих множниках P_i, одержуємо n розв'язків:

$$\left.\begin{array}{c} y_{11}=\gamma_{11}e^{k_1x},\ y_{12}=\gamma_{12}e^{k_1x},\ \ldots,\ y_{1n}=\gamma_{1n}e^{k_1x},\\ y_{21}=\gamma_{21}e^{k_1x},\ y_{22}=\gamma_{22}e^{k_1x},\ \ldots,\ y_{2n}=\gamma_{2n}e^{k_1x},\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ y_{n1}=\gamma_{n1}e^{k_1x},\ y_{n2}=\gamma_{n2}e^{k_1x},\ \ldots,\ y_{nn}=\gamma_{nn}e^{k_1x}.\end{array}\right\} \qquad \textbf{(8)}$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty;+\infty)$ (***вміти довести самостійно***). Якщо при цьому всі $k_1,k_2,\ldots,k_n$ дійсні, то всі розв'язки (8) також будуть дійсними. Таким чином, у випадку простих дійсних характеристичних чисел система (2) має n дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду (8), а тому вони утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Тому згідно з теоремою 3 лекції 16 формули

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1\gamma_{11}e^{k_1x} + C_2\gamma_{21}e^{k_2x} + \ldots + C_n\gamma_{n1}e^{k_nx}, \\ y_2 = C_1\gamma_{12}e^{k_1x} + C_2\gamma_{22}e^{k_2x} + \ldots + C_n\gamma_{n2}e^{k_nx}, \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1\gamma_{1n}e^{k_1x} + C_2\gamma_{2n}e^{k_2x} + \ldots + C_n\gamma_{nn}e^{k_nx} \end{array}\right\} \tag{9}$$

визначають загальний розв'язок системи (2).

Якщо характеристичні числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ різні, але серед них є комплексні, то вони входять спряженими парами. Нехай $a+ib$ і $a-ib$ – прості характеристичні числа. Кореню $a+ib$ згідно з формулою (3) відповідає розв'язок

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x}, \ \ldots\ , \ y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – комплексні числа. Покладаючи $\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}$, $\gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}$, ..., $\gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}$, одержуємо комплексний розв'язок

$$y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(a+ib)x}, \ldots, \ y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(a+ib)x}.$$

Якщо відокремити у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, то матимемо два дійсних розв'язки:

$$y_{11} = e^{ax}(\gamma_{11}\cos bx - \gamma_{21}\sin bx),\ y_{12} = e^{ax}(\gamma_{12}\cos bx - \gamma_{22}\sin bx), \ldots,$$

$$y_{1n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\cos bx - \gamma_{2n}\sin bx),$$

$$y_{21} = e^{ax}(\gamma_{11}\sin bx + \gamma_{21}\cos bx),\ y_{22} = e^{ax}(\gamma_{12}\sin bx + \gamma_{22}\cos bx), \ldots,$$

$$y_{2n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\sin bx + \gamma_{2n}\cos bx).$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty; +\infty)$, а спряжений корінь $a-ib$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад 1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$$

Розв'язування. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 - 10k + 9 = 0,$$

знаходимо: $k_1 = 1$, $k_2 = 9$, отже, характеристичні числа дійсні і прості.

Складемо систему для знаходження чисел γ_1 і γ_2, які відповідають k_1. Матриця коефіцієнтів цієї системи отримується з матриці $\begin{pmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{pmatrix}$ заміною k на k_1. Отже, шукана система має вигляд

$$\begin{cases} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_1 = -\gamma_2.$$

Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Таким чином, характеристичному числу $k_1 = 1$ відповідає розв'язок $y_1 = e^x$, $z_1 = -e^x$.

Аналогічно, розв'язуючи систему, яка відповідає $k_2 = 9$:

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

знаходимо, що $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, а тому цьому характеристичному числу $k_2 = 9$ відповідає розв'язок $y_2 = e^{9x}$, $z_2 = e^{9x}$.

Загальний розв'язок записуємо згідно з основною теоремою:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \qquad z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язування. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 - 4k + 5 = 0$$

має комплексно-спряжені корені $k_1 = 2+i$, $k_2 = 2-i$. Розв'язок, який відповідає k_1, має вигляд $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де числа γ_1, γ_2 знаходимо з системи $\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$ Покладаючи $\gamma_1 = 1$, знаходимо $\gamma_2 = -i$, а тому розв'язком буде $y = e^{(2+i)x}$, $z = -i\,e^{(2+i)x}$. Відокремлюючи дійсні та уявні частини, одержуємо два дійсні розв'язки: $y_1 = e^{2x}\cos x$, $z_1 = e^{2x}\sin x$ і $y_2 = e^{2x}\sin x$, $z_2 = -e^{2x}\cos x$, які утворюють ФСР. Отже, $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$, $z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x)$. $\blacksquare$

3. Побудова ФСР і загального розв’язку однорідної лінійної системи у випадку кратних корнів характеристичного рівняння. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні корені, то метод побудови ФСР, викладений в п.2, очевидно, не застосовний. Однак і у цьому випадку вдається побудувати ФСР в елементарних функціях. Зауважимо перш за все, що якщо k_1 – просте характеристичне число, то, незалежно від того, чи будуть серед інших характеристичних чисел зустрічатися кратні чи ні, йому завжди відповідає один частинний розв’язок вигляду

$$y_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{k_1 x}, \ \ldots \ , \ y_n = \gamma_n e^{k_1 x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ – деякі сталі, які визначаються з точністю до сталого множника (див. п.2).

Таким чином, задача зводиться до того, щоб знайти частинні розв’язки, які відповідають кратному кореню. При цьому, так само як і для лінійного однорідного рівняння n-го порядку, одному характеристичному числу кратності s відповідає s лінійно незалежних частинних розв’язків.

Теорема. *Якщо k_1 – характеристичне число кратності s, то йому відповідає розв’язок вигляду*

$$y_1 = P_1(x) e^{k_1 x}, \ y_2 = P_2(x) e^{k_1 x}, \ldots, y_n = P_n(x) e^{k_1 x}, \qquad \textbf{(10)}$$

де $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ – многочлени степеня не вищого, ніж $s-1$, які мають у сукупності s довільних коефіцієнтів, тому серед всіх коефіцієнтів всіх цих многочленів s коефіцієнтів є довільними, а усі інші виражаються через них. Зокрема, якщо всі многочлени вироджуються у сталі, то s-кратному характеристичному числу k_1 відповідатиме розв’язок вигляду

$$y_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \ y_2 = \gamma_2 e^{k_1 x}, \ldots, y_n = \gamma_n e^{k_1 x},$$

де s з коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ є довільними (для простого характеристичного числа довільним є тільки один з них).

З практичної точки зору для знаходження розв’язку, що відповідає характеристичному числу k_1, потрібно шукати розв’язок у вигляді (10), вважаючи $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ многочленами $(s-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами і, підставляючи їх в (2), виразити усі коефіцієнти через s з них, які залишаються довільними.

Покладаючи по черзі один з цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а решта рівними нулю, ми побудуємо s лінійно незалежних розв’язків, які відповідають характеристичному числу k_1. Усі ці частинні розв’язки будуть утворені з добутків функції $e^{k_1 x}$ на многочлени від x, степені яких не перевищують $s-1$. Якщо многочлени $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ у формулі (10) вироджуються у сталі, то одержимо s лінійно незалежних частинних розв’язків такого ж вигляду, як і для випадку простого характеристичного числа.

Якщо k_1 – дійсне характеристичне число, то побудовані s лінійно незалежних розв’язків будуть дійсними. Якщо ж система (2) має комплексне характеристичне число $a+bi$ кратності s, то вона має спряжене характеристичне число $a-bi$ тієї ж кратності. Побудувавши s лінійно незалежних комплексних розв’язків, які відповідають характеристичному числу $a+bi$ і відділивши в них дійсні та уявні частини, одержимо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків.

У загальному випадку кожному простому дійсному характеристичному числу відповідає один частинний розв’язок, кожній парі спряжених комплексних характеристичних чисел – два дійсні лінійно незалежні розв’язки, дійсному характеристичному числу кратності s – s дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків, а кожній парі спряжених комплексних характеристичних чисел кратності s – $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв’язків. Всього одержуємо n дійсних розв’язків, які є лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тобто утворюють ФСР. Якщо взяти лінійні комбінації розв’язків цієї

ФСР за стовпцями з одними й тими ж довільними сталими $C_1, C_2, ..., C_n$, то згідно з теоремою 3 (лекція 16) матимемо загальний розв'язок системи (2).

Приклад 3. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв'язування. Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0, \qquad k^3 - 3k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2, k_{2,3} = -1.$$

Кореню $k_1 = 2$ відповідає система двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Один з її розв'язків цієї системи $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 1$. Тому

$$y_1^{(1)} = e^{2x}, \; y_2^{(1)} = e^{2x}, \; y_3^{(1)} = e^{2x}$$

є розв'язком системи.

Кореням $k_{2,3} = -1$ відповідає одне рівняння (друге і третє співпадають з ним): $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Виберемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, наприклад, $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1$ і $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 1$. Кожному з них відповідає один розв'язок:

$$y_1^{(2)} = e^{-x}, \; y_2^{(2)} = 0, \; y_3^{(2)} = -e^{-x}, \qquad y_1^{(3)} = 0, \; y_2^{(3)} = -e^{-x}, \; y_3^{(3)} = e^{-x}.$$

Оскільки вронскіан

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & -e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

то розв'язки утворюють ФСР. Загальним розв'язком є

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x}, \quad y_3 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}. \; ■$$

Лекція 19.

Неоднорідні лінійні системи диференціальних рівнянь.

План.

1. Структура загального розв’язку неоднорідної системи.
2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).
3. Метод невизначених коефіцієнтів розв’язування неоднорідних лінійних систем зі сталими коефіцієнтами.

1. Структура загального розв’язку неоднорідної системи. Розглянемо неоднорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

або, у скороченому запису:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{1'}$$

Припустимо, що нам відомий деякий частинний розв’язок цієї системи

$$y_1 = y_1^{(1)}, \; y_2 = y_2^{(1)}, \; \ldots, \; y_n = y_n^{(1)}, \tag{2}$$

а отже, справджуються тотожності

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j^{(1)} + f_k(x), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Введемо нові невідомі функції $z_1 = z_1(x),\; z_2 = z_2(x),\; \ldots,\; z_n = z_n(x)$ за допомогою формул

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

Підставляючи (4) в (1), одержуємо

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)z_j + f_k(x), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

Враховуючи (3), з (5) для відшукання функцій $z_1, z_2, \ldots, z_n$ маємо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\, z_k}{\mathrm{d}\, x} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x) z_j, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Систему (6) називатимемо ***однорідною системою, яка відповідає неоднорідній системі (1)***.

Згідно з основною теоремою загальний розв'язок однорідної системи (6) визначається формулою

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

де $\{z_{jk}\}$ – деяка ФСР цієї системи, а C_j, $j = 1, \ldots, n$, – довільні сталі.

Підставляючи (7) в (4), одержуємо

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Формула (8) визначає загальний розв'язок системи (1) в усій області її задання.

Таким чином, *для знаходження загального розв'язку неоднорідної системи (1) достатньо знайти будь-який частинний розв'язок цієї системи і додати до нього загальний розв'язок відповідної однорідної системи (6).*

2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Загальний спосіб знаходження частинного розв'язку, а разом з тим і побудови загального розв'язку неоднорідної системи у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, визначається такою теоремою.

Теорема. *Якщо відома ФСР однорідної системи (6), то загальний розв'язок неоднорідної системи (1) може бути знайдений у квадратурах.*

Доведення. Для доведення теореми використаємо ***метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)***.

Розв’язок неоднорідної системи (1) шукаємо у вигляді

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}, \quad k = 1,\dots,n, \qquad \textbf{(9)}$$

де $\{z_{jk}\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (6), а $C_j(x),\ j = 1,\dots,n,$ – деякі неперервно диференційовні функції.

Виберемо функції $C_j(x),\ j = 1,\dots,n,$ так, щоб формула (9) визначала розв’язок системи (1). Підставляючи (9) в (1), будемо мати:

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' = \\ \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1,2,\dots,n, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(10)}$$

або

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}' = \\ \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1,2,\dots,n \end{array}\right\}. \qquad \textbf{(11)}$$

Якщо записати (11) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \left(z_{jk}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{jl} \right) = f_k(x), \quad k = 1,2,\dots,n, \qquad \textbf{(12)}$$

і прийняти до уваги, що $\{z_{jk}\}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи (6), то вираз в дужках дорівнює нулю, а тому для знаходження функцій $C_j(x)$, $j = 1,\dots,n$, одержуємо систему з n рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) z_{jk} = f_k(x), \quad k = 1,2,\dots,n. \qquad \textbf{(13)}$$

Оскільки визначник системи (13) відмінний від нуля для всіх $x \in (a,b)$ (ним, як легко перевірити, є вронскіан $W(x)$), то вона має єдиний розв’язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера:

$$C_j'(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\frac{W_{kj}(x)}{W(x)},\quad j=1,\ldots,n, \qquad \textbf{(14)}$$

де $W_{kj}(x)$ – алгебраїчне доповнення елемента z_{kj} у вронскіані $W(x)$. Інтегруючи (14), знаходимо:

$$C_j(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_k(x)\frac{W_{kj}(x)}{W(x)}\mathrm{d}x+C_j,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

де C_j – довільні сталі, а x_0 – довільна точка з інтервалу (a,b).

Підставляючи ці значення $C_j(x)$ у формулу (8), одержуємо

$$y_k=\sum_{j=1}^{n} z_{jk}\sum_{s=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_s(x)\frac{W_{sj}(x)}{W(x)}\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n} C_j z_{jk},\quad k=1,\ldots,n.$$

Якщо підставити $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$, то одержуємо розв'язок

$$y_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{n} z_{jk}\sum_{s=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_s(x)\frac{W_{sj}(x)}{W(x)}\mathrm{d}x,\quad k=1,\ldots,n, \qquad \textbf{(15)}$$

а тому (15) можна записати у вигляді (8) і, отже, розв'язок, який визначається формулою (15), є загальним розв'язком неоднорідної системи (1). ►

З наведеної теореми випливає, що завдання інтегрування неоднорідної лінійної системи зводиться до необхідності побудови фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи.

Тому особливий інтерес мають такі лінійні системи рівнянь, у яких фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи виражається через елементарні функції. До таких систем відносяться перш за все системи зі сталими коефіцієнтами.

3. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язування лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j+f_k(x),\qquad k=1,\ldots,n. \qquad \textbf{(16)}$$

Якщо праві частини системи (16) складаються з сум і добутків многочленів $P_m(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m$, функцій $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, то розв'язок цієї системи можна шукати ***методом невизначених коефіцієнтів***. Це робиться за тими ж правилами, що і для одного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, але з певними змінами. А саме:

Випадок 1. Якщо

$$f_k(x) = P_{m_k}(x) e^{\alpha x},$$

де $P_{m_k}(x)$ – многочлен степеня m_k, то частинний розв'язок системи (16) шукається не у вигляді $x^s Q_m(x) e^{\alpha x}$ (як це було для лінійного рівняння), а у вигляді

$$y_i = Q^i_{m+s}(x) e^{\alpha x}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad \textbf{(17)}$$

де $Q^i_{m+s}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, – многочлени степеня $m + s$ з невідомими коефіцієнтами,

$$m = \max_{k=1,\ldots,n} m_k,$$

$s = 0$, якщо α – не корінь характеристичного рівняння; якщо ж α є коренем характеристичного рівняння, то замість s можна взяти кратність цього кореня (або, якщо точніше, число s на одиницю більше найвищого з степенів многочленів, на які множаться $e^{\alpha x}$ в загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q^i_{m+s}(x)$ визначаються прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставляння виразів (17) у систему (16).

Випадок 2. Аналогічно визначаються степені многочленів й у випадку, коли праві частини $f_k(x)$ містять функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ є характеристичним.

Приклад 1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = y - 2z + e^x, \\ z' = y + 4z + e^{2x}. \end{cases} \qquad \textbf{(18)}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = 2, \quad k_2 = 3$.

Кореню $k_1 = 2$, як легко показати, відповідає частинний розв'язок

$$y_1 = 2e^{2x}, \;\; z_1 = -e^{2x},$$

а кореню $k_2 = 3$ – частинний розв'язок

$$y_2 = e^{3x}, \;\; z_2 = -e^{3x}.$$

Отже, загальним розв'язком однорідної системи є:

$$y_0 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x}, \qquad z_0 = -C_1e^{2x} - C_2e^{3x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи (18) знайдемо методом невизначених коефіцієнтів.

Враховуючи вигляд правих частин $f_1(x) = e^x$ і $f_2(x) = e^{2x}$, шуканий частинний розв'язок через невизначені коефіцієнти запишеться таким чином:

$$y_ч = Ke^x + (Lx + M)e^{2x}, \qquad z_ч = Ne^x + (Px + Q)e^{2x}. \qquad \textbf{(19)}$$

Підставляючи (19) в (18), будемо мати

$$Ke^x + 2(Lx + M)e^{2x} + Le^{2x} =$$

$$= Ke^x + (Lx + M)e^{2x} - 2Ne^x - 2(Px + Q)e^{2x} + e^x,$$

$$Ne^{x}+2(Px+Q)e^{2x}+Pe^{2x}=$$
$$=Ke^{x}+(Lx+M)e^{2x}+4Ne^{x}+4(Px+Q)e^{2x}+e^{2x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля e^{x}, e^{2x} і xe^{2x} в обох частинах цих тотожностей, одержуємо з першої тотожності:

$$\begin{array}{r|l} e^{x} & K=K-2N+1, \\ e^{2x} & 2M+L=M-2Q, \\ xe^{2x} & 2L=L-2P, \end{array}$$

а з другої:

$$\begin{array}{r|l} e^{x} & N=K+4N, \\ e^{2x} & 2Q+P=M+4Q+1, \\ xe^{2x} & 2P=L+4P. \end{array}$$

Розв’язуючи ці системи, знаходимо

$$K=-\frac{3}{2},\quad L=2,\quad M=0,\quad N=\frac{1}{2},\quad P=-1,\quad Q=-1.$$

Таким чином, частинний розв’язок системи (18) має вигляд

$$y_{ч}=-\frac{3}{2}e^{x}+2xe^{2x},\qquad z_{ч}=\frac{1}{2}e^{x}-(x+1)e^{2x}.$$

Загальний розв’язок заданої системи:

$$y=2C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\frac{3}{2}e^{x}+2xe^{2x},$$

$$z=-C_1e^{2x}-C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^{x}-(x+1)e^{2x}.\ ■$$

Приклад 2. Записати загальний розв’язок з невизначеними коефіцієнтами системи

$$\begin{cases} y'=4y-z+e^{3x}x+e^{3x}\sin x, \\ z'=y+2z+xe^{3x}\cos x. \end{cases} \tag{20}$$

Розв’язання. Спочатку для відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = 4y - z, \\ z' = y + 2z, \end{cases}$$

знаходимо характеристичні числа $k_1 = k_2 = 3$ і загальний розв'язок

$$y_0 = (C_1 x + C_2)e^{3x},$$

$$z_0 = (C_1 x + C_2 - C_1)e^{3x}.$$

У системі (20) для функцій xe^{3x}, $e^{3x}\sin x$, $xe^{3x}\cos x$ числа $\alpha + \beta i$ відповідно дорівнюють 3, $3+i$, $3+i$. Тому потрібно окремо знайти частинні розв'язки систем

$$\begin{cases} y' = 4y - z + xe^{3x}, \\ z' = y + 2z \end{cases} \quad \textbf{(21)}$$

і

$$\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x}\sin x, \\ z' = y + 2z + xe^{3x}\cos x. \end{cases} \quad \textbf{(22)}$$

Для системи (21) $\alpha + \beta i = 3 = k_1 = k_2$, $s = 2$, $m = 1$. Згідно з (19) її частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x},$$

$$z_1 = (fx^3 + gx^2 + hx + p)e^{3x}.$$

Для системи (22) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq k_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$, а тому її частинний розв'язок має вигляд

$$y_2 = (kx + l)e^{3x}\sin x + (mx + n)e^{3x}\cos x,$$

$$z_2 = (px + q)e^{3x}\sin x + (rx + s)e^{3x}\cos x.$$

Після відшукання невизначених коефіцієнтів a, b, c, ... загальний розв'язок системи (22) запишеться у вигляді:

$$y = y_0 + y_1 + y_2, \qquad z = z_0 + z_1 + z_2. \ \blacksquare$$

Лекція 20.
Загальний розв’язок і загальний інтеграл нормальної системи. Перші інтеграли.

План.

1. Загальний розв’язок нормальної системи.
2. Інтеграл нормальної системи. Перші інтеграли. Загальний інтеграл.

1. Загальний розв’язок нормальної системи. Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x} = f_j(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad j = 1,...,n. \qquad \textbf{(1)}$$

Як відомо (див. лекцію 23), сім’ю розв’язків системи (1), залежну від n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad j = 1,...,n, \qquad \textbf{(2)}$$

називають ***загальним розв’язком*** цієї системи.

З геометричної точки зору загальним розв’язком є сім’я інтегральних кривих у $(n+1)$-вимірному просторі $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, яка залежить від n параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$, причому рівняння цієї сім’ї розв’язані відносно $y_1, y_2, ..., y_n$

Дамо означення загального розв’язку системи (1) в області D просторору $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, у кожній точці якої виконуються умови існування та єдиності розв’язку задачі Коші для системи (1).

Сукупність n функцій

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, ..., C_n), \quad j = 1,...,n,$$

які визначені в деякій області зміни $x, C_1, C_2, ..., C_n$ та мають неперервні частинні похідні за змінною x, називатимемо ***загальним розв’язком*** системи (1) в області D, якщо систему (2) можна розв’язати відносно довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ в області D, тобто для довільних значень $x, y_1, y_2, ..., y_n$, що належать D, з системи (2) визначаються значення $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$C_j = \Psi_j(x, y_1, y_2, ..., y_n), \qquad j = 1, ..., n, \tag{3}$$

і якщо сукупність n функцій (2) є розв'язком системи (1) для всіх значень довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ з формул (3), коли точка $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ "пробігає" область D.

2. Інтеграл нормальної системи. Перші інтеграли. Загальний інтеграл. Розглянемо одну з рівностей (3):

$$\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C_i. \tag{4}$$

Кожна з функцій $\psi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ у (4) має характерну особливість: вона перетворюється в сталу, якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ замінити будь-яким частинним розв'язком системи (2), тобто маємо тотожність

$$\psi_i\left(x, \varphi_1(x, C_1, ..., C_n), ..., \varphi_n(x, C_1, ..., C_n)\right) \equiv C_i.$$

Кожну функцію $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, яка має таку властивість, називають ***інтегралом*** системи (1).

Нижче йтиметься про системи, для яких вся область існування та єдиності розв'язку співпадає з областю D визначення загального розв'язку.

Перше означення інтеграла. Функцію $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, яка не зводиться до сталої, називають ***інтегралом*** системи (1), якщо після заміни $y_1, y_2, ..., y_n$ довільним частинним розв'язком цієї системи вона перетворюється у сталу.

Якщо функція $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ є інтегралом системи (1) і має неперервні частинні похідні за змінними $x, y_1, y_2, ..., y_n$, то внаслідок того, що вона вздовж довільного частинного розв'язку перетворюється в сталу, її повний диференціал $\mathrm{d}\psi$ повинен перетворюватись тотожно (відносно x) у нуль вздовж цього розв'язку, тобто

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\mathrm{d}y_n \equiv 0 \qquad \textbf{(5)}$$

вздовж довільного частинного розв'язку. Згідно з (1) вздовж розв'язку маємо:

$$\mathrm{d}y_k \equiv f_k(x, y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тому тотожність (5) можна переписати так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}x + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}x \equiv 0.$$

Таким чином, якщо інтеграл $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ має неперервні частинні похідні за усіма аргументами, то його повний диференціал перетворюється тотожно в нуль при заміні $\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_n$ їх значеннями з системи (1).

Друге означення інтеграла. Функцію $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка має неперервні частинні похідні за змінними $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ і таку, що її похідні $\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ не перетворюються одночасно в нуль, називають ***інтегралом*** системи (1), якщо повний диференціал цієї функції перетворюється тотожно в нуль згідно з (1), тобто якщо виконується тотожність

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}x + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\mathrm{d}x \equiv 0.$$

Зрозуміло, що функція $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка є інтегралом системи (1) в сенсі другого означення, буде інтегралом цієї системи й в сенсі першого означення. Обернене твердження невірне, бо функція $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка є інтегралом системи (1) в сенсі першого означення, може не мати частинних похідних за усіма своїми аргументами.

Рівність $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$, де $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – інтеграл системи (1) в сенсі першого або другого означення, а C – довільна стала, називають ***першим інтегралом*** системи (1). Наприклад, кожна з рівностей (3) є першим інтегралом системи (1).

Сукупність *n* перших інтегралів (3) має таку властивість: її можна розв'язати відносно шуканих функцій $y_1, y_2, ..., y_n$, причому у результаті цього одержимо загальний розв'язок (2) системи (1) в області *D*. Кожну сукупність *n* перших інтегралів, яка має таку властивість, називатимемо ***загальним інтегралом*** системи (1) в області *D*.

Перші інтеграли (2), що утворюють загальний інтеграл системи (1), мають таку властивістю, що інтеграли $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ ***незалежні***, тобто між функціями $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ не існує співвідношення вигляду $\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = 0$ при жодному виборі функції Φ. Насправді, якщо б таке співвідношення існувало, то з системи (2) неможливо було б знайти функції $y_1, y_2, ..., y_n$.

З математичного аналізу відомо, що для незалежності функцій $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ (за умови, що вони мають неперервні частинні похідні) необхідно і достатньо, щоб якобіан цих функцій за змінними $y_1, y_2, ..., y_n$ не перетворювався тотожно в нуль, тобто

$$\frac{\mathrm{D}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)}{\mathrm{D}(y_1, y_2, ..., y_n)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Будь-які *n* перших інтегралів будемо називати ***незалежними***, якщо відповідні їм інтеграли незалежні.

Зі наведеного вище випливає, що задача побудови загального інтеграла системи буде розв'язаною, якщо ми знайдемо *n* незалежних перших інтегралів.

Загального способу знаходження перших інтегралів немає. Зауважимо однак, що у багатьох випадках вдається знайти перший інтеграл шляхом деяких перетворень системи, у результаті чого отримується диференціальне рівняння, яке легко інтегрується. Кожне таке рівняння будемо називати ***інтегрованою комбінацією***. Кожна інтегрована комбінація породжує перший інтеграл. Однак серед них можуть виявитись і залежні інтеграли. Тому кожного разу, одержуючи новий перший інтеграл, потрібно перевірити, чи буде від незалежним з раніше отриманим.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Її загальним розв'язком, як легко переконатись, є

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{9x}, \qquad z = -C_1 e^{x} + C_2 e^{9x}. \qquad \textbf{(7)}$$

Розв'язуючи (7) відносно C_1 і C_2, одержуємо:

$$\frac{1}{2}(y - z)e^{-x} = C_1, \qquad \frac{1}{2}(y + z)e^{-9x} = C_2. \qquad \textbf{(8)}$$

(8) – загальний інтеграл системи (6). Кожна з рівностей (8) є першим інтегралом системи (6), а функції в лівих частинах цих рівностей є інтегралами цієї системи.

Очевидно, що функції

$$\psi_1 = (y - z)e^{-x}, \quad \psi_2 = (y + z)e^{-9x}$$

також будуть інтегралами системи (6). Переконаємось у цьому безпосередньо за другим означенням інтеграла. Знайдемо повні диференціали ψ_1, ψ_2:

$$\mathrm{d}\psi_1 = \left(\mathrm{d}y - \mathrm{d}z + (z - y)\mathrm{d}x\right) e^{-x}, \qquad \mathrm{d}\psi_2 = \left(\mathrm{d}y + \mathrm{d}z - 9(z + y)\mathrm{d}x\right) e^{-9x}.$$

Підставляючи сюди замість $\mathrm{d}y$ і $\mathrm{d}z$ їх значення з системи (6), будемо мати:

$$\mathrm{d}\psi_1 = \left(5y + 4z - (4y + 5z) + z - y\right)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \equiv 0,$$

$$d\psi_2 = \left(5y + 4z + 4y + 5z - 9(y+z)\right) \cdot e^{-9x}\,dx \equiv 0.$$

Отже, ψ_1 і ψ_2 є інтегралами системи (6).

Ці інтеграли можна отримати і безпосередньо шляхом перетворення системи (6). Дійсно, віднімаючи від першого рівняння системи (6) друге, матимемо інтегровану комбінацію $(y-z)' = y - z$, звідки

$$y - z = C_1 e^x \quad \Rightarrow \quad (y-z)e^{-x} = C_1.$$

Отже, $\psi_1 = (y-z)e^{-x}$ є інтегралом системи (6).

Додаючи тепер до першого рівняння системи (6) друге, аналогічно одержуємо, що $\psi_2 = (y+z)e^{-9x}$ є інтегралом системи (6).

Інтеграли ψ_1 і ψ_2, очевидно, незалежні (у цьому можна переконатись за означенням або за допомогою якобіана – ***зробити самостійно!***). ■

Розглянемо систему більш загального вигляду

$$\begin{cases} y' = p(x)y + q(x)z, \\ z' = q(x)y + p(x)z. \end{cases} \qquad \textbf{(9)}$$

Аналогічно до того, як це робилось при розв'язуванні прикладу 1, легко знаходяться два перші інтеграли. Додаючи почленно до першого рівняння системи (9) друге, одержуємо:

$$(y+z)' = \left(p(x) + q(x)\right) \cdot (y+z) \quad \Rightarrow \quad y + z = C_1 e^{\int (p(x)+q(x))\,dx}.$$

Віднімаючи тепер почленно від другого рівняння перше, матимемо:

$$(y-z)' = \left(p(x) - q(x)\right)(y-z) \quad \Rightarrow \quad y - z = C_2 e^{\int (p(x)-q(x))\,dx}.$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь

$$y + z = C_1 e^{\int (p(x)+q(x))\,dx}, \qquad y - z = C_2 e^{\int (p(x)-q(x))\,dx}$$

відносно C_1, C_2, одержуємо два незалежних інтеграла системи (9), тобто загальний інтеграл. Розв'язуючи ту саму систему відносно y і z, знайдемо загальний розв'язок системи (9). ■

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл системи

$$\begin{cases} y_1' = y_3 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_3, \\ y_3' = y_2 - y_1. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язання. Додамо всі рівняння системи:

$$(y_1 + y_2 + y_3)' = 0,$$

тобто

$$\psi_1 \equiv y_1 + y_2 + y_3 = C_1$$

є першим інтегралом системи (10).

Далі, домножимо рівняння системи відповідно на y_1, y_2, y_3 і додамо одержані результати:

$$(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)' = 0.$$

Отже, $\psi_2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$ також є першим інтегралом системи. Очевидно, що ψ_1 і ψ_2 – незалежні інтеграли (бо ψ_1 не може бути представлена як жодна функція від ψ_2).

Далі домножимо перше з рівнянь (10) на y_2, друге – на y_1 і додамо результати. Одержимо:

$$(y_1 y_2)' = y_2 y_3 - y_2^2 + y_1^2 - y_1 y_3. \tag{11}$$

Домножимо перше з рівнянь (10) на y_3, третє – на y_1 і додамо:

$$(y_1 y_3)' = y_3^2 - y_2 y_3 + y_1 y_2 - y_1^2. \tag{12}$$

Домножимо тепер друге рівнянь (10) на y_3, третє – на y_2 і додамо:

$$(y_2 y_3)' = y_1 y_3 - y_3^2 + y_2^2 - y_1 y_2. \tag{13}$$

Якщо додати рівняння (11)-(13), то

$$(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)' = 0,$$

а отже, $\psi \equiv y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = C$ також є першим інтегралом системи (10).

Легко показати, що

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2,\psi)}{D(y_1,y_2,y_3)} \equiv 0,$$

а тому інтеграли ψ_1,ψ_2,ψ, а разом з ними і перші інтеграли $\psi_1 = C_1$, $\psi_2 = C_2$, $\psi = C$ не будуть незалежними. Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що між інтегралами ψ_1,ψ_2 і ψ існує така залежність:

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\psi_1^2 - \psi_2\right).$$

Для знаходження першого інтеграла, якого не вистачає, скористаємось знайденими першими інтегралами $\psi_1 = C_1$ і $\psi_2 = C_2$. Складемо систему:

$$\psi_1 \equiv y_1 + y_2 + y_3 = C_1, \qquad \psi_2 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2. \qquad \textbf{(14)}$$

Розв'язуючи її відносно y_1 і y_2, одержуємо:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}\left(C_1 - y_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1y_3 - 3y_3^2}\right), \\ y_2 = \dfrac{1}{2}\left(C_1 - y_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1y_3 - 3y_3^2}\right). \end{cases}$$

Підставляючи знайдені вирази для y_1 і y_2 в останнє з рівнянь системи (10), будемо мати:

$$y_3' = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1y_3 - 3y_3^2}\ .$$

Отримали одне рівняння з однією невідомою функцією. Розв'язуючи його, знаходимо

$$\arcsin\frac{3y_3 - C_1}{\sqrt{6C_2 - C_1^2}} - \sqrt{3}x = C_3.$$

Замінюючи тут C_1 і C_2 їх значеннями з системи (14), одержуємо перший інтеграл

$$\psi_3 \equiv \arcsin\frac{2y_3 - y_1 - y_2}{2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3}} - \sqrt{3}x = C_3. \qquad \textbf{(15)}$$

Рівності (14) і (15) визначають загальний інтеграл системи (10). ■

Лекція 21.
Елементи теорії стійкості.

План.

1. Основні означення й поняття.
2. Дослідження на стійкість точок спокою.

1. Основні означення й поняття. Досліджуючи реальні процеси і явища, які моделюються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь або систем, часто виникає необхідність не тільки у відшуканні розв’язків, а й у виявленні їх різних властивостей. Оскільки задача знаходження розв’язків диференціального рівняння у загальному випадку нерозв’язна, то виникає проблема вивчення властивостей розв’язків диференціальних рівнянь або систем, не маючи цих розв’язків, за деякими ознаками розв’язків і властивостями рівнянь.

Майже завжди, розв’язуючи конкретну практичну задачу, цікавляться не загальним, а частинним розв’язком диференціального рівняння, що задовольняє певні додаткові умови (початкові або крайові). Останні є зазвичай результатами експериментальних вимірів і тому за їх абсолютну точність ручатися не можна. Маючи це на увазі, мовчазно припускають, що незначні зміни початкових умов викликають незначну зміну самого розв’язку, інакше кажучи, що розв’язок неперервно залежить від початкових умов.

На лекції 2 було показано, що так є для розв’язків рівняння $y' = f(x, y)$, права частина якого задовольняє умови теореми Пікара, але тільки для достатньо малих *x*, тобто для всіх *x* з відрізка $|x - x_0| \le h$.

Для розв’язків нормальної системи

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \qquad (1)$$

де *t* – незалежна змінна (час), $y_1,...,y_n$ – шукані функції змінної *t*, в деякій замкненій області *G* зміни аргументів, за умови, що функції f_j, $j=1,...,n$, неперервні за усіма змінними і задовольняють умову Ліпшіца, також виконується неперервна залежність їх від початкових умов, але так само для обмежених значень *t*. Отже, коли аргумент необмежено зростає (а у практичних задачах час, як правило, може набувати як завгодно великих значень), згадані теореми не гарантують неперервної залежності розв'язків від початкових умов, тобто незначна зміна початкових умов може викликати істотні зміни в поведінці розв'язку при необмеженому зростанні значення аргумента. Подібні розв'язки не мають практичної цінності, бо навіть наближено не описують досліджуване явище чи процес. Такі розв'язки називають ***нестійкими***.

Отже, важливо знати, коли малі зміни початкових умов призводять до малих відхилень розв'язків диференціального рівняння або системи. Це питання розглядається в якісній теорії диференціальних рівнянь, одним з основних розділів якої є ***теорія стійкості розв'язків*** (***теорія стійкості руху***).

Наведемо визначення основних понять цієї теорії. Нехай деяке явище або деякий процес описується нормальною системою (1) з початковими умовами

$$y_1(t_0)=y_{10},\quad y_2(t_0)=y_{20},\ \dots,\ y_n(t_0)=y_{n0}. \tag{2}$$

Якщо систему (1) розглядати на скінченному проміжку $|t-t_0|<T$, то відповідь на питання про вплив малих змін початкових умов (2) на відхилення розв'язків системи дає така теорема.

Теорема 1. *Якщо функції* $f_j(t,y_1,...,y_n)$, $j=1,...,n$*, з системи (1) у деякому замкненому прямокутнику* $G\subset \mathrm{R}^{n+1}$ *задовольняють умови теореми Пікара, то розв'язок* $y=y(t)$ *задачі (1), (2) у деякій області* $G_1\subset G$ *неперервно залежить від початкових даних.*

Нехай тепер $t \in [T, +\infty)$, тобто час може необмежено зростати.

Розв'язок

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t),\ t \in [T, +\infty),$$

системи (1) називають ***стійким*** (***стійким за Ляпуновим***[1]), якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq T$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що для довільного розв'язку

$$y_1(t), \ldots, y_n(t),\ t \in [T, +\infty),$$

цієї ж системи, який задовольняє умову

$$| y_j(t_0) - \varphi_j(t_0) | < \delta, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

справджуються нерівності

$$| y_j(t) - \varphi_j(t) | < \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad t \geq t_0. \tag{4}$$

Таким чином, розв'язок $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ стійкий, якщо близькі до нього за початковими умовами розв'язки залишаються близькими і для всіх $t \geq t_0$ (рис. 1).

Якщо розв'язок $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ стійкий за Ляпуновим і, крім того,

$$\lim_{t \to \infty} | y_j(t) - \varphi_j(t) | = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

то його називають ***асимптотично стійким*** (***за Ляпуновим***).

Зауважимо, що з (5) не випливає стійкість за Ляпуновим.

Розв'язок $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ називають ***нестійким***, якщо він не є стійким. Це означає, що існують $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq T$ такі, що для будь-якого як завгодно малого $\delta > 0$ знайдеться розв'язок системи (1), для якого при виконанні нерівностей (3), принаймні для якогось одного значення j матимемо нерівності

$$| y_j(t) - \varphi_j(t) | \geq \varepsilon.$$

Наведемо геометричне тлумачення введених понять (рис. 1).

[1] **ЛЯПУНОВ** Олександр (1857-1918) – російський математик і механік.

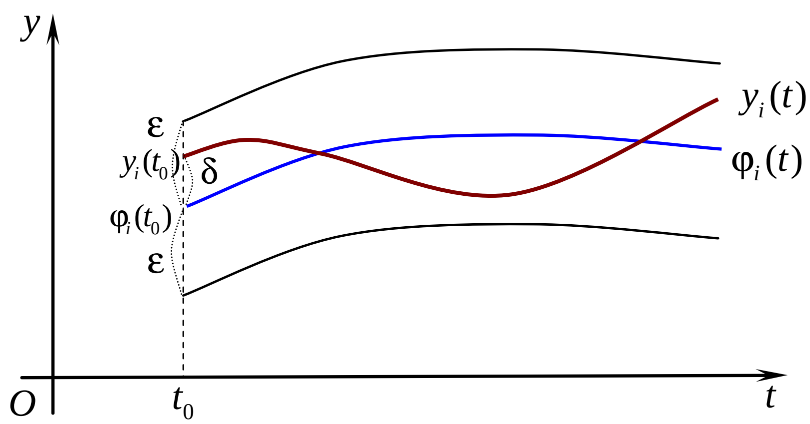

Рис. 1

Отже, розв'язок $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ системи (1):

- ***стійкий***, якщо будь-яка інтегральна крива $y = y_i(t)$ системи (1), яка проходить при $t = t_0$ через точку, достатньо близьку до $\varphi_i(t_0)$, повністю належить до як завгодно вузької ε-трубки, побудованої навколо кривої $y = \varphi_i(t)$;
- ***асимптотично стійкий***, якщо крива $y = y_i(t)$ наближається до кривої $y = \varphi_i(t)$ при $t \to \infty$;
- ***нестійкий***, якщо знайдеться інтегральна крива $y = y_i(t)$ системи (1), яка проходить при $t = t_0$ через точку, достатньо близьку до $\varphi_i(t_0)$, і при деякому $t(\delta) > t_0$ потрапляє за межу як завгодно малої згаданої ε-трубки.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв'язки задачі Коші

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -y, \quad y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання. Відокремлюючи змінні, легко знаходимо загальний розв'язок рівняння $y' = -y$:

$$y(t) = Ce^{-t}.$$

Враховуючи початкову умову $y(t_0) = y_0$, одержуємо розв'язок задачі Коші:

$$y = y_0 e^{t_0 - t}.$$

Якщо тепер задати іншу початкову умову $\bar{y}(t_0)=\bar{y}_0$, то розв'язком задачі Коші буде $\bar{y}=\bar{y}_0 e^{t_0-t}$. Звідси

$$|y-\bar{y}|=|y_0-\bar{y}_0|e^{t_0-t}\le|y_0-\bar{y}_0|$$

для $t\ge t_0$. Тому, якщо $|y-\bar{y}_0|<\delta=\varepsilon$, то

$$|y-\bar{y}|\le\varepsilon,$$

тобто розв'язок

$$y=y_0 e^{t_0-t}$$

стійкий за Ляпуновим для $t\ge t_0$. Цей розв'язок є й асимптотично стійким, бо

$$\lim_{t\to+\infty}|y-\bar{y}|=\lim_{t\to+\infty}|y_0-\bar{y}_0|\cdot e^{t_0-t}=0. \blacksquare$$

Приклад 2. Дослідити на стійкість розв'язки задачі Коші

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y,\quad y(t_0)=y_0.$$

Розв'язання. Розв'язком заданої задачі Коші є $y=y_0 e^{t-t_0}$.

Маємо

$$|y-\bar{y}|=|y_0-\bar{y}_0|e^{t-t_0},\quad t\ge t_0,$$

для довільного t_0. Очевидно, для будь-якого t_0 при $t\ge t_0$ розв'язок y нестійкий, бо $e^{t-t_0}\to+\infty$ при $t\to+\infty$. $\blacksquare$

2. Дослідження на стійкість точок спокою. Дослідження на стійкість за Ляпуновим довільного розв'язку $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ системи (1) можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку деякої іншої системи. Для цього у системі (1) перейдемо до нових невідомих функцій за допомогою формул

$$x_j(t)=y_j(t)-\varphi_j(t),\qquad j=1,\dots,n. \tag{6}$$

Якщо підставити (6) в систему (1), то

$$\frac{\mathrm{d}\,y_j(t)}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\,x_j(t)}{\mathrm{d}\,t}+\frac{\mathrm{d}\,\varphi_j(t)}{\mathrm{d}\,t}=$$

$$=f_j\left(t,x_1(t)+\varphi_1(t),\dots,x_n(t)+\varphi_n(t)\right),\quad j=1,\dots,n,$$

звідки

$$\frac{\mathrm{d}\,x_j(t)}{\mathrm{d}\,t}=f_j\left(t,x_1+\varphi_1,\dots,x_n+\varphi_n\right)-f_j\left(t,\varphi_1,\dots,\varphi_n\right),\quad j=1,\dots,n. \qquad \textbf{(7)}$$

Система (7) має тривіальний розв'язок $x_j(t)\equiv 0$, $j=1,\dots,n$. Цей розв'язок характерний тим, що точка $\left(x_1(t),\dots,x_1(t)\right)$ насправді не рухається при зміні t, а знаходиться на місці. Тривіальний розв'язок системи (7) і точку $(0,\dots,0)$ у цьому випадку називають ***положенням рівноваги*** системи (1) або ***точкою спокою***.

Теорема 2. *Розв'язок* $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ *системи (1) стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим тривіальний розв'язок (точка спокою) системи (7).*

Тепер умову стійкості точки спокою $x_j(t)=0$, $j=1,\dots,n$, можна сформулювати так: точка спокою $x_j(t)=0$, $j=1,\dots,n$, системи (7) ***стійка за Ляпуновим***, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що з нерівності

$$|x_j(t_0)|<\delta(\varepsilon),\ \ j=1,\dots,n,$$

випливає

$$|x_j(t)|<\varepsilon,\quad j=1,\dots,n,\quad \forall t\ge t_0,$$

тобто траєкторія, початкова точка якої знаходиться в деякому δ-околі початку координат, для $t\ge t_0$ не виходить за межі довільного ε-околу початку координат.

Легко показати, що це означення стійкості можна замінити таким: для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$ таке, що з нерівності

$$x_{10}^2+x_{20}^2+\dots+x_{n0}^2<\delta^2$$

випливає нерівність

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)+\ldots+x_n^2(t)<\varepsilon^2,$$

де $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ – початкові значення розв'язку $x_j(t)=0,\ j=1,\ldots,n$.

Приклад 1. Дослідити на стійкість точки тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x, \end{cases}$$

який при $t=t_0=0$ **набуває значення** $x=\overline{x}_0,\ y=\overline{y}_0$**.**

Розв'язання. Зінтегруємо систему методом виключення:

$$y(t)=-x'(t) \ \Rightarrow\ -x''=x \ \Rightarrow\ x''+x=0 \ \Rightarrow$$

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t,$$

$$y(t)=C_1\sin t-C_2\cos t.$$

Врахувавши початкові умови

$$x(0)=\overline{x}_0,\ y(0)=\overline{y}_0,$$

одержуємо, що $C_1=\overline{x}_0,\ C_2=\overline{y}_0$ а тому розв'язком заданої задачі Коші є

$$x(t)=\overline{x}_0\cos t-\overline{y}_0\sin t,$$

$$y(t)=\overline{x}_0\sin t+\overline{y}_0\cos t,$$

звідки видно, що $x^2+y^2=\overline{x}_0^2+\overline{y}_0^2$. Отже, для будь-якого заданого $\varepsilon>0$ досить взяти $\delta=\varepsilon$, адже як тільки матиме місце нерівність

$$\overline{x}_0^2+\overline{y}_0^2<\delta^2,$$

то

$$x^2+y^2<\varepsilon^2$$

для всіх $t>0$. Розв'язок $x=y=0$ є стійкий. ■

Приклад 2. Дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y \end{cases}$$

при $t = t_0 = 0 \;\; x = \overline{x}_0,\ y = \overline{y}_0$**.**

Розв'язання. Загальний розв'язок системи знайдемо методом виключення:

$$y(t) = x'(t) \;\; \Rightarrow \;\; x'' = 2x + x' \;\;\; x'' - x' - 2x = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t},$$

$$y(t) = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}.$$

Враховуючи початкові умови, знаходимо

$$C_1 = \frac{\overline{x}_0 + \overline{y}_0}{3}, \quad C_2 = \frac{2\overline{x}_0 - \overline{y}_0}{3},$$

а тому, остаточно,

$$x(t) = \frac{\overline{x}_0 + \overline{y}_0}{3} e^{2t} + \frac{2\overline{x}_0 - \overline{y}_0}{3} e^{-t},$$

$$y(t) = \frac{2}{3}\left(\overline{x}_0 + \overline{y}_0\right) e^{2t} - \frac{2\overline{x}_0 - \overline{y}_0}{3} e^{-t}.$$

Розв'язок $x = y = 0$ є нестійкий. У цьому легко переконатися, поклавши $\overline{y}_0 = 2\overline{x}_0$, адже тоді, яким б малим не було $\overline{x}_0$, $|x(t)|$ та $|y(t)|$ необмежено зростатимуть при $t \to +\infty$. ■

Лекція 22.
Метод функцій Ляпунова.

План.

1. Стійкість за першим наближенням.
2. Критерій Рауса-Гурвіца.
3. Теорема Ляпунова.

1. Стійкість за першим наближенням. У наведених на лекції 21 прикладах ми мали можливість зінтегрувати диференціальне рівняння або систему таких рівнянь. Тоді відповісти про стійкість розв’язків не викликає особливих труднощів. Важливим є, як не маючи загального розв’язку диференціального рівняння або системи, дослідити на стійкість відповідні розв’язки.

Розглянемо систему:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

і нехай $x_i \equiv 0,\ i = 1, \ldots, n,$ – її точка спокою. Припустимо, що функції $\Phi_j(t, x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, n,$ у системі (1) неперервні разом зі своїми частинним похідними до другого порядку включно. Тоді, використовуючи формулу Тейлора, систему (1) можна записати у вигляді:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \Phi_j(t, 0, \ldots, 0) + \left.\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot x_1 + \left.\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot x_2 + \ldots + \left.\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_n}\right|_{(t,0,\ldots,0)} \cdot x_n +$$
$$+ R_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Якщо тепер позначити $\left.\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}\right|_{(t,0,\ldots,0)} = a_{ji}(t)$ і взяти до уваги, що $\Phi_j(t, 0, \ldots, 0) = 0$, то одержуємо систему

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + R_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + R_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, що функції $R_j(t, x_1, ..., x_n)$ містять члени не нижчі другого порядку відносно $x_1, ..., x_n$.

Систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = a_{j1}(t)x_1 + a_{j2}(t)x_2 + ... + a_{jn}(t)x_n, \quad j = 1, ..., n, \tag{3}$$

будемо називати ***системою першого наближення***, а задачу на стійкість точки спокою – ***задачею на стійкість розв'язку в першому наближені***.

Зауважимо, що дослідження на стійкість точки спокою для лінійної системи (3) є дуже складною проблемою, яка повністю досі не розв'язана (пояснюється це тим, що не існує загального способу інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь з довільними змінними коефіцієнтами).

Розглянемо той випадок, коли система (3) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ \quad\quad ... \quad ... \quad ... \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{4}$$

де a_{jk} – сталі.

Дослідимо питання про стійкість нульового розв'язку системи (4). Розв'язки цієї системи шукаємо у вигляді

$$x_1 = A_1 e^{k_1 t},\ x_2 = A_2 e^{k_2 t}, ... ,\ x_n = A_n e^{k_n t}.$$

Як відомо (див. лекцію 18), для існування ненульових розв'язків системи (4) необхідно і достатньо, щоб

$$P(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Розглянемо окремі випадки.

1. *Усі корені характеристичного рівняння (5) мають від'ємні дійсні частини (тобто або дійсні корені – від'ємні, або комплексні корені з від'ємними дійсними частинами).*

Припустимо, що всі характеристичні числа $k_1, k_2, ..., k_n$ прості і дійсні. Тоді, оскільки за припущенням $k_j < 0$, то всі

$$x_i(t) = A_{ij} e^{k_j t}$$

прямують до нуля при $t \to +\infty$. Якщо $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j < 0$, то, використовуючи формули Ейлера

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

перетворимо x_j до вигляду

$$x_j = e^{\alpha_j t}\left(C_{ji}\cos\beta_j t + D_{ji}\sin\beta_j t\right),$$

і, оскільки $\alpha_j < 0$, то $x_j \to 0$ при $t \to +\infty$.

Аналогічну ситуацію матимемо, якщо деякі з характеристичних чисел (або всі) є кратними, бо якщо k_j має кратність s, то йому відповідають розв'язки $P_{s-1}(t)e^{k_j t}$, де $P_{s-1}(t)$ – многочлен степеня, не вищого за $s-1$, і

$$\lim_{t \to +\infty} e^{k_j t} P_{s-1}(t) = 0,$$

бо $k_j < 0$, а показникова функція зростає швидше, ніж степенева. Отже, нульовий розв'язок системи (11) асимптотично стійкий.

2. *Характеристичне рівняння (5) має корені з додатними дійсними частини.*

Принаймні одна з функцій $e^{k_1 t}, e^{k_2 t}, ..., e^{k_n t}$ необмежено зростає за модулем при $t \to +\infty$, і оскільки вона фігурує у загальному розв'язку, то останній також необмежено зростає при $t \to +\infty$. Отже, розв'язки, близькі до точки спокою $x_1 = ... = x_n = 0$ за початковими даними, зі зростанням t необмежено від неї віддаляються. Таким чином, нульовий розв'язок системи (4) нестійкий.

3. *Характеристичне рівняння (5) не має коренів з додатними дійсними частинами, але має прості корені з нульовою дійсною частиною.*

Усі функції $x_j(t)$ обмежені за модулем для будь-якого $t > t_0$, якими б не були початкові значення цих функцій. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виборі $|\bar{x}_{j0}| < \delta,\ j = 1,\dots,n,$ матимемо $|x_j(t)| < \varepsilon,\ j = 1,\dots,n,$ для всіх $t > t_0$. Значить, нульовий розв'язок системи (4) є стійкий. Але він не асимптотично стійкий, бо для довільних $\bar{x}_{i0}$ не будуть одночасно прямувати до нуля всі функції $x_j(t)$ при $t \to +\infty$.

Якщо коли характеристичне рівняння (5) не має коренів з додатними дійсними частинами, але має кратні корені з нульовими дійсними частинами, то можливі і стійкі, і нестійкі нульові розв'язки.

2. Критерій Рауса-Гурвіца. Отже, випливає з п. 1 лекції, для систем зі сталими коефіцієнтами при розв'язуванні задачі на стійкість важливо з'ясувати знак дійсних частин характеристичних чисел. Умови, за виконання яких дійсні частини характеристичних чисел від'ємні, містить така теорема.

Теорема 1 (Рауса[1)]-Гурвіца[2)]). *Дійсні частини коренів рівняння*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатними є визначники

$$\Delta_1 = a_1,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{vmatrix},\quad \text{де } a_i = 0,\ \text{якщо } i > n.$$

[1)] **РАУС** Едуард (1831-1907) – англійський фізик і математик.
[2)] **ГУРВІЦ** Адольф (1859-1919) – німецький математик.

Приклад 1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння

$$y^{\mathrm{IV}}+5y'''+13y''+19y'+10y=0$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^4+5k^3+13k^2+19k+10=0.$$

Оскільки

$$\Delta_1=5>0, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 19 & 13\end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}5 & 1 & 0\\ 19 & 13 & 5\\ 0 & 10 & 19\end{vmatrix}>0, \qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}5 & 1 & 0 & 0\\ 19 & 13 & 5 & 1\\ 0 & 10 & 19 & 13\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{vmatrix}=10\cdot\Delta_3>0,$$

то тривіальний розв'язок $y\equiv 0$ асимптотично стійкий. ■

3. Теорема Ляпунова. У п. 1 вивчались питання, пов'язані з дослідженням на стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь. При цьому використовувалась відповідна система першого наближення. Але може трапитись, що при дослідженні лише першого наближення тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь виявиться стійким, хоча насправді він є нестійким, або навпаки. Розглянемо, наприклад, систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2^2+y_3^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=y_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t}=-y_2.\end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Її загальним розв'язком, як легко переконатись, є

$$y_1=C_3+(C_1^2+C_2^2)t, \quad y_2=C_1\cos t+C_2\sin t, \quad y_3=C_2\cos t-C_1\sin t.$$

Легко за означенням показати, що тривіальний розв'язок системи (6) нестійкий, а у той же час тривіальний розв'язок системи першого наближення

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}t} = y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_3}{\mathrm{d}t} = -y_2. \end{cases}$$

є стійким.

Таким чином, за першим наближенням не завжди можна зробити висновок про стійкість тривіального розв'язку системи вигляду (1). Для дослідження стійкості розв'язків систем, аналогічних до (1), Ляпунов запропонував метод, у якому використовуються допоміжні функції з певними властивостями.

Теорема (Ляпунова). *Нехай задано нормальну систему*

$$y_j' = f_j(t, y_1, ..., y_n), \quad j = 1, ..., n, \tag{7}$$

яка має тривіальний розв'язок $y_j(t) \equiv 0,\ j = 1, ..., n$. *Нехай існує диференційовна функція* $V(y_1, ..., y_n)$, *яка задовольняє умови:*

1) $V(y_1, ..., y_n) \geq 0$ *і* $V = 0$ *тільки тоді, коли* $y_1 = ... = y_n = 0$;

2) *повна похідна функції* V *вздовж розв'язку* $y_j(t),\ j = 1, ..., n$, *системи (2) недодатна, тобто*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot \frac{\mathrm{d}\,y_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} \cdot f_j(t, y_1, ..., y_n) \leq 0 \quad \text{для} \quad t \geq t_0.$$

Тоді точка спокою $y_j \equiv 0,\ j = 1, ..., n$, *стійка за Ляпуновим.*

Якщо додатково вимагати, щоб поза як завгодно малим околом початку координат $(y_1^2 + ... + y_n^2 \geq \delta)$ *виконувалась умова*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leq \beta < 0, \quad t \geq t_0,$$

де β *– стала, то точка спокою* $y_j(t) \equiv 0,\ j = 1, ..., n$, *асимптотично стійка.*

Функцію V називають ***функцією Ляпунова***.

Приклад 2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}t} = -y_1^5 - y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}t} = y_1 - y_2^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Покажемо, що вона задовольняє усі вимоги теореми Ляпунова. Справді:

1) $V(y_1, y_2) \ge 0$ і $V = 0$ тільки тоді, коли $y_1 = y_2 = 0$;

2) вздовж розв'язку y_1, y_2

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial y_1}\frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}t} = 2y_1\left(-y_1^5 - y_2\right) + 2y_2\left(y_1 - y_2^3\right) = -2\left(y_1^6 + y_2^4\right) \le 0.$$

Окрім того, поза околом початку координат $(y_1^2 + y_2^2 \ge \delta > 0)$ маємо $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \le -\beta < 0$, де β – мінімум функції $2(y_1^6 + y_2^4)$ поза колом $y_1^2 + y_2^2 = \delta$. Значить, розв'язок $y_1 = y_2 \equiv 0$ асимптотично стійкий. ■

Зауваження 1. Функцію Ляпунова рекомендується шукати у вигляді квадратичної форми від аргументів $y_1, ..., y_n$, тобто у вигляді

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j .$$

Перша вимога з теореми Ляпунова говорить про те, що V повинна бути додатно визначеною квадратичною формою. Яким чином підібрати коефіцієнти a_{ij}, щоб форма V була додатно визначеною, вказується у ***критерії Сильвестра***: потрібно, щоб

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \ , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Приклад 3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,t} = 2y_2^3 - y_1^5, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,t} = -y_1 - y_2^3 - y_2^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукаємо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(y_1, y_2) = V_1(y_1) + V_2(y_2).$$

Тоді

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot f_1(y_1, y_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot f_2(y_1, y_2) =$$

$$= V_1'(y_1)\left(2y_2^3 - y_1^5\right) + V_2'(y_2)\left(-y_1 - y_2^3 - y_2^5\right) =$$

$$= -y_1^5 V_1'(y_1) - \left(y_2^3 + y_2^5\right) V_2'(y_2) + 2y_2^3 V_1'(y_1) - y_1 V_2'(y_2).$$

Нехай

$$2y_2^3 V_1'(y_1) - y_1 V_2'(y_2) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1'(y_1)}{y_1} \equiv \frac{V_2'(y_2)}{2y_2^3} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_1'(y_1)}{y_1} = \mu, \quad \frac{V_2'(y_2)}{2y_2^3} = \mu, \quad \mu = \mathrm{const}.$$

Звідси

$$V_1(y_1) = \frac{\mu}{2} y_1^2, \qquad V_2(y_2) = \frac{\mu}{2} y_2^4.$$

Виберемо $\mu = 2$. Тоді

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^4 > 0, \text{ якщо } y_1^2 + y_2^2 \neq 0 \text{ і } V(0,0) = 0.$$

Окрім того,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \cdot f_1(y_1, y_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2} \cdot f_2(y_1, y_2) = -\left(2y_1^6 + 4y_2^6 + 4y_2^8\right) \leq \beta < 0,$$

де β – мінімум функції $g(y_1, y_2) = 2y_1^6 + 4y_2^6 + 4y_2^8$ поза колом $y_1^2 + y_2^2 = \delta$. З теореми Ляпунова випливає асимптотична стійкість тривіального розв'язку системи. ■

Лекція 23.
Рівняння з частинними похідними першого порядку (однорідні лінійні рівняння).

План.

1. Зв'язок між однорідним лінійними рівнянням з частинними похідними першого порядку і відповідною системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі.
2. Побудова загального розв'язку однорідного лінійного рівняння.
3. Розв'язування задачі Коші для однорідного лінійного рівняння.

1. Зв'язок між однорідним лінійними рівнянням з частинними похідними першого порядку і відповідною системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі. На цій лекції розглядатимемо рівняння з частинними похідним першого порядку. При цьому обмежимося викладом найпростіших відомостей цієї теорії, маючи за мету показати зв'язок лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку із системою звичайних диференціальних рівнянь і навести методи побудови загального розв'язку і розв'язку задачі Коші, які ґрунтуються на цьому зв'язку.

Розглянемо рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Розв'язком рівняння (1) називають функцію

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad \textbf{(2)}$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними у деякій області зміни $x_1, x_2, \dots, x_n$ і перетворює рівняння (1) у тотожність у цій області. При цьому припускається, що значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, для яких визначена функція (2), і значення, які набуває ця функція та її частинні похідні, лежать в області визначення функції Φ.

Якщо в рівнянні (1) функція Φ залежить лінійно від частинних похідних шуканих функцій, то його називають ***лінійним*** рівнянням.

Лінійне рівняння можна записати у вигляді

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+ \\ +f_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\dots,x_n,u). \qquad \mathbf{(3)}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли права частина рівняння (3) тотожно дорівнює нулю, а коефіцієнти $f_1, f_2, \dots, f_n$ не залежать від шуканої функції u, тобто маємо:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \quad \mathbf{(4)}$$

Рівняння (4) називають ***однорідним лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку***. Очевидно, що рівняння (4) має розв'язок

$$u=c \quad (c=\mathrm{const}). \qquad \mathbf{(5)}$$

Надалі такий розв'язок називатимемо ***очевидним***.

Рівняння (4) при певних припущеннях відносно коефіцієнтів має безліч розв'язків, відмінних від очевидних. Для доведення цього твердження разом з рівнянням (4) будемо розглядати таку систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{\mathrm{d}\,x_2}{f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{\mathrm{d}\,x_n}{f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}. \qquad \mathbf{(6)}$$

Систему (6) називають системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, яка відповідає однорідному лінійному рівнянню з частинними похідними (4).

Сформулюємо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (4) і системою (6). Стосовно коефіцієнтів $f_1, f_2, \dots, f_n$ рівняння (4) вважатимемо, що вони визначені і неперервні разом з частинними похідними за змінними $x_1,x_2,\dots,x_n$ у деякому околі заданої точки $(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})$ і що у цій точці вони не перетворюються одночасно у нуль (нехай, наприклад, $f_n(x_{10},x_{20},\dots,x_{n0})\neq 0$).

Очевидно, що система (6) рівносильна такій системі $(n-1)$-го рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n}=\frac{f_1}{f_n},\quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_n}=\frac{f_2}{f_n},\ \dots\ ,\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}=\frac{f_{n-1}}{f_n}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Кожний інтеграл системи (6) є неочевидним розв'язком рівняння (4).*

Доведення. Нехай $\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ – інтеграл системи (6), визначений у деякому околі точки $(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$. Тоді повний диференціал функції ψ тотожно дорівнює нулю згідно з системою (6) або системою (7), тобто

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\equiv 0, \tag{8}$$

де диференціали $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,...,\mathrm{d}x_{n-1}$ потрібно замінити їх значеннями з системи (8), а саме:

$$\mathrm{d}x_1=\frac{f_1}{f_n}\mathrm{d}x_n,\ \ \mathrm{d}x_2=\frac{f_2}{f_n}\mathrm{d}x_n,\ \dots\ ,\ \mathrm{d}x_{n-1}=\frac{f_{n-1}}{f_n}\mathrm{d}x_n.$$

Таким чином, маємо тотожність

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot\frac{f_1}{f_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot\frac{f_2}{f_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\cdot\mathrm{d}x_n\equiv 0 \tag{9}$$

або, скорочуючи на dx_n і домножуючи на f_n:

$$f_1\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \tag{10}$$

Тотожність (10) означає, що $u=\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ є розв'язком рівняння (4). ►

Теорема 2. *Кожний неочевидний розв'язок рівняння (4) є інтегралом системи (6).*

Доведення. Нехай $u=\psi(x_1,x_2,...,x_n)$ – неочевидний розв'язок рівняння (4). Тоді

$$f_1\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \qquad \textbf{(11)}$$

Якщо знайти диференціал функції ψ згідно з системою (6) або, що те саме, згідно з системою (7), то будемо мати:

$$\mathrm{d}\psi\big|_{(6)}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\overset{(7)}{=}$$

$$=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{f_1}{f_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{f_2}{f_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n=\left(f_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\frac{1}{f_n}\mathrm{d}x_n,$$

звідки, враховуючи тотожність (11), одержуємо, що $d\psi\big|_{(6)}\equiv 0$, тобто ψ є інтегралом системи (6). ►

Наприклад, рівнянню з частинними похідними

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

відповідає система

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2y}=\frac{\mathrm{d}z}{-z},$$

яка, як легко показати, має інтеграли $\psi_1=xz,\ \psi_2=x\sqrt{y}.$ Отже, функції $u_1=xz,\ \ u_2=x\sqrt{y}$ є розв’язками заданого рівняння.

2. Побудова загального розв’язку однорідного лінійного рівняння.

Теорема 3. *Нехай*

$$\psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ \psi_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ldots,\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad \textbf{(12)}$$

є незалежними інтегралами системи (6). Тоді функція

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}), \qquad \textbf{(13)}$$

де Φ *– довільна функція, яка має неперервні похідні за* $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}$ *(зокрема, функція* Φ *може бути і сталою), буде розв’язком рівняння (4).*

Доведення. Підставляючи функцію (13) в (4) і беручи до уваги, що функції (12) є розв’язками цього рівняння, одержуємо тотожність

$$f_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\ldots+f_n\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=$$

$$=f_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+f_2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+\ldots+f_n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_i}\left(f_1\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial\psi_i}{\partial x_2}+\ldots+f_n\frac{\partial\psi_i}{\partial x_n}\right)\equiv 0,$$

звідки й випливає, що функція (13) є розв’язком рівняння (4). ►

Формулу (13) називають ***загальним розв’язком*** рівняння (4). Отже, що загальний розв’язок рівняння (4) з частинними похідними містить довільну функцію, а не довільні сталі, як це було для звичайних диференціальних рівнянь,

Таким чином, *задача про побудову загального розв’язку рівняння (4) рівносильна задачі про знаходження* $n-1$ *незалежних інтегралів відповідної йому системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі (6)*.

Розглянемо випадок двох незалежних змінних. У цьому випадку (z – шукана функція від незалежних змінних x і y) замість рівняння (4) будемо мати:

$$f_1(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+f_2(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad \textbf{(14)}$$

Відповідна система (6) звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі вироджується в одне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{f_1(x,y)}=\frac{\mathrm{d}\,y}{f_2(x,y)}. \qquad \textbf{(15)}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл рівняння (16), то $z=\Phi\big(\psi(x,y)\big)$, де $\Phi(\psi)$ – довільна неперервно диференційовна функція від ψ, є загальним розв’язком рівняння (15).

Якщо розглядати x, y, z як прямокутні декартові координати точки тривимірного простору, то розв’язку $z=z(x,y)$ рівняння (14) відповідає деяка поверхня, яку називають ***інтегральною поверхнею*** цього рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$$

Розв’язання. Складемо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}\,x_2}{x_2}=\ldots=\frac{\mathrm{d}\,x_n}{x_n}$$

і зінтегруємо її. Будемо мати:

$$x_2/x_1=C_1,\;\; x_3/x_1=C_2,\ldots,\;\; x_n/x_1=C_{n-1},$$

а тому

$$\psi_1=x_2/x_1,\;\; \psi_2=x_3/x_1,\;\ldots\;,\;\psi_{n-1}=x_n/x_1.$$

Отже, загальним розв’язком заданого рівняння є

$$u=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція від часток $x_2/x_1,\, x_3/x_1,\ldots,x_n/x_1$, тобто u є довільною неперервно диференційовною однорідною функцією нульового виміру від n незалежних змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Наприклад, розв’язками заданого рівняння будуть функції:

$$u_1=x_2/x_1,\;u_2=x_3/x_1,\ldots,u_{n-1}=x_n/x_1,$$

$$u_n=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\ldots+\frac{x_n}{x_1},\quad u_{n+1}=\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2,\; u_{n+2}=\sin\left(\frac{x_2}{x_1}\right),\quad u_{n+3}=e^{\frac{x_2}{x_1}}$$ тощо. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Розв’язання. Відповідною системою звичайних диференціальних рівнянь є

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{y}=\frac{\mathrm{d}\,y}{-x}.$$

Тоді $\psi = x^2 + y^2$, а тому шуканим загальним розв'язком є

$$z = \Phi(\psi), \quad z = \Phi(x^2 + y^2).$$

З геометричної точки зору маємо сім'єю поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Таким чином, задане рівняння є диференціальним рівнянням усіх поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Інтегральними поверхнями є поверхні обертання $z = \Phi(x^2 + y^2)$. Частинними випадками цих поверхонь є $z = x^2 + y^2$ (параболоїд обертання), $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (півсфера), $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (конус), $z = c$ (площина)

3. Розв'язування задачі Коші для однорідного лінійного рівняння. ***Задача Коші*** для рівняння (4) формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{16}$$

який задовольняє ***початкові умови***:

$$u\big|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}), \tag{17}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція від $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, тобто при фіксованому значенні одного з аргументів розв'язок (16) перетворюється з задану функцію решти аргументів.

У випадку, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних, тобто для рівняння (14), задача Коші полягає у відшуканні такого розв'язку $z = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову

$$z\big|_{x = x_0} = \varphi(y), \tag{18}$$

де $\varphi(y)$ – задана функція. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь, які визначаються рівнянням (14), шукається така інтегральна поверхня $z = f(x, y)$, яка проходить через задану криву $\varphi(y)$, яка лежить у площині $x = x_0$, паралельній до площини Oyz.

Звертаємо увагу на те, що для звичайного диференціального рівняння першого порядку задача Коші полягає у відшуканні інтегральної кривої, яка проходить через задачу ***точку***, а для рівняння з частинними похідними (14) – у відшуканні інтегральної поверхні, яка проходить через задану ***криву***.

Загальний розв'язок рівняння (4) задається формулою (13), тобто $u=\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})$. Порівнюючи цю формулу з умовою (17), бачимо, що розв'язок задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції Φ так, щоб $\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_{n-1})\big|_{x_n=x_{n0}}=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1})$.

Таким чином, приходимо до такого правила розв'язування задачі Коші (4), (17):

1) *потрібно утворити відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь і знайти її* $n-1$ *незалежних інтегралів:*

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1(x_1,x_2,...,x_n),\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n),\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)\end{array}\right\};\tag{19}$$

2) *замінити в інтегралах (19) незалежну змінну її значенням* $x_n=x_{n0}$*:*

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0})=\overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0})=\overline{\psi}_2,\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0})=\overline{\psi}_{n-1}\end{array}\right\}\tag{21}$$

і розв'язати систему (21) відносно $x_1,x_2,...,x_{n-1}$*:*

$$\left.\begin{array}{c}x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),\\ x_2=\omega_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),\\ \dots\ \dots\ \dots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1})\end{array}\right\};$$

3) *побудувати функцію*

$$u=\varphi\big(\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),\omega_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1}),...,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_{n-1})\big),$$

яка і буде розв'язком задачі Коші.

Лекція 24.
Рівняння з частинними похідними першого порядку (неоднорідні лінійні рівняння).

План.

1. Побудова загального розв’язку неоднорідного лінійного рівняння.

2. Розв’язування задачі Коші для неоднорідного лінійного рівняння.

1. Побудова загального розв’язку неоднорідного лінійного рівняння. Диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{gathered} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+ \\ +f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\ldots,x_n,u) \end{gathered} \qquad \textbf{(1)}$$

називають ***неоднорідним лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку*** або ***квазілінійним рівнянням***. Відмінність рівняння (1) від рівняння, яке вивчалось на попередній лекції, полягає у тому, що коефіцієнти $f_1, f_2, \ldots, f_n$ можуть залежати від шуканої функції u, і, крім того, воно має вільний член $R(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)$. До цього ж типу будемо відносити також рівняння, у якому $R\equiv 0$, але хоча б один з коефіцієнтів f_j обов’язково повинен залежати від u.

Відносно функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$ будемо припускати, що вони неперервно диференційовні в деякому околі заданої точки $\left(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0},u_0\right)$, причому

$$f_n\left(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0},u_0\right)\neq 0.$$

Розв’язок рівняння (1) шукатимемо у неявному вигляді:

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0, \qquad \textbf{(2)}$$

де функція V має неперервні частинні похідні за усіма аргументами, причому $\left.\dfrac{\partial V}{\partial u}\right|_{\left(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0},u_0\right)}\neq 0$ принаймні в деякій області зміни

$x_1, x_2, \dots, x_n, u$ (це гарантує в цій області розв'язність рівняння (2) відносно шуканої функції).

Вважаючи, що рівність (2) визначає u як функцією від $x_1, x_2, \dots, x_n$, здиференціюємо цю рівність за незалежною змінною (яка входить у рівняння (2) явно і неявно через функцію u). Будемо мати:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

звідки

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Якщо підставити значення частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ з (4) в (1) і перенести усі доданки в ліву частину, то

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + \\ + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Рівняння (5) є однорідним лінійним відносно функції V. Утворимо відповідну йому систему звичайних диференціальних рівнянь (див. лекцію 23):

$$\frac{\mathrm{d}\,x_1}{f_1} = \frac{\mathrm{d}\,x_2}{f_2} = \dots = \frac{\mathrm{d}\,x_n}{f_n} = \frac{\mathrm{d}\,u}{R}. \tag{6}$$

Припустимо, що нам вдалося знайти n незалежних інтегралів системи (6):

$$\left.\begin{array}{c} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Тоді, як відомо з лекції 23, загальний розв'язок рівняння (5) визначається формулою

$$V = \Phi\big(\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, u),\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, u),\ ...,\ \psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\big). \quad \mathbf{(8)}$$

Прирівнюючи функцію (8) до нуля на підставі (2) одержуємо розв'язок заданого рівняння (1) у неявному вигляді:

$$\Phi\big(\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, u),\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, u),\ ...,\ \psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\big) = 0. \quad \mathbf{(9)}$$

Цей розв'язок називатимемо ***загальним розв'язком*** рівняння (1).

Систему (6) називають системою звичайних диференціальних рівнянь, яка відповідає рівнянню (1).

Таким чином, для відшукання загального розв'язку рівняння (1) потрібно утворити відповідну йому систему звичайних диференціальних рівнянь (6), знайти n незалежних інтегралів цієї системи і прирівняти до нуля довільну диференційовну функцію цих інтегралів. Одержана при цьому рівність (9) буде загальним розв'язком рівняння (1) в неявному вигляді. Розв'язуючи його відносно u (якщо це можливо), знаходимо загальний розв'язок у явному вигляді.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = mu, \quad m \neq 0.$$

Розв'язання. Утворимо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} = ... = \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n} = \frac{\mathrm{d}u}{mu}.$$

Знаходимо її інтеграли (див. приклад з лекції 23):

$$\psi_1 = \frac{x_2}{x_1},\ \ \psi_2 = \frac{x_3}{x_1},\ \ ...\ ,\ \psi_{n-1} = \frac{x_n}{x_1},\ \ \psi_n = \frac{u}{x_1^m}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}, \frac{u}{x_1^m}\right) = 0,$$

Розв'язуючи відносно $\dfrac{u}{x_1^m}$, одержуємо

$$\frac{u}{x_1^m} = f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \quad \Rightarrow \quad u = x_1^m \cdot f\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

де f – довільна функція, а отже розв'язком заданого рівняння є довільна однорідна неперервно диференційовна функція виміру $m \neq 0$. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$$

Розв'язання. Записуємо відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\mathrm{d}x}{e^x} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{ye^x}.$$

З першого рівняння знаходимо один перший інтеграл

$$\frac{1}{y} - e^{-x} = C_1,$$

а з другого, з врахуванням того, що

$$e^x = \frac{y}{1 - yC_1},$$

маємо ще один перший інтеграл

$$z - \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} = C_2.$$

Таким чином, загальним інтегралом заданого рівняння буде

$$\Phi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}, \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} - z\right) = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$z = \frac{\ln|y| - x}{e^{-x} - y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right). \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u.$$

Розв'язання. Знайдемо перші інтеграли системи

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z}=\frac{\mathrm{d}y}{x+z}=\frac{\mathrm{d}z}{x+y}=\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

З цієї системи утворимо три інтегровані комбінації::

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{y-x}=\frac{\mathrm{d}u}{u},\quad \frac{\mathrm{d}(x-z)}{z-x}=\frac{\mathrm{d}u}{u},\quad \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

інтегруючи які одержуємо три перші інтеграли:

$$u(x-y)=C_1,\quad u(x-z)=C_2,\quad \frac{x+y+z}{u^2}=C_3.$$

Тоді загальний інтеграл заданого рівняння можна записати у вигляді:

$$\Phi\left(u(x-y),\,u(x-z),\,\frac{x+y+z}{u^2}\right)=0. \ \blacksquare$$

2. Розв'язування задачі Коші для неоднорідного лінійного рівняння. ***Задача Коші*** для неоднорідного рівняння (1) формулюється так само, як для однорідного рівняння, тобто серед усіх розв'язків рівняння (1) потрібно знайти такий розв'язок

$$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{10}$$

який задовольняє ***початкові умови***:

$$u\big|_{x_n=x_{n0}}=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}), \tag{11}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція.

Покажемо як знайти розв'язок задачі Коші, знаючи загальний розв'язок (9). Як і для випадку однорідного рівняння, все зводиться до визначення вигляду функції Φ. Якщо записати умови (11) у вигляді

$$u-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=0 \quad \text{при } x_n=x_{n0}, \tag{12}$$

і порівняти ці умови з (9), то бачимо, що функцію Φ потрібно вибрати так, щоб

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\ldots,\overline{\psi}_{n-1})=u-\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}), \tag{13}$$

якщо під $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,\ldots,\overline{\psi}_n$ розуміти функції, які одержуються з інтегралів системи (7) заміною x_n початковим значенням x_{n0}, тобто

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_2,\\ \quad ...\quad ...\quad ...\\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_n\end{array}\right\}. \qquad \textbf{(14)}$$

Розв'язуючи систему (14) відносно $x_1,x_2,...,x_{n-1},u$, одержуємо:

$$\left.\begin{array}{l}x_1=\omega_1(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n),\\ x_2=\omega_2(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n),\\ \quad ...\ ...\ ...\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n),\\ u=\omega(\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n)\end{array}\right\}.$$

Якщо тепер в якості функції Φ взяти функцію

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)=$$

$$=\omega(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)-\varphi\left(\omega_1(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n),\ ...\ ,\ \omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)\right),$$

то умова (13) буде, очевидно, справджуватись. Отже, формула

$$\omega(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)-\varphi\left(\omega_1(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n),...,\omega_{n-1}(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)\right)=0 \qquad \textbf{(15)}$$

визначає шуканий розв'язок задачі Коші в неявному вигляді.

Розв'язуючи (15) відносно u (якщо це можливо), одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді (10).

Таким чином, приходимо до такого ***правила розв'язування задачі Коші*** для неоднорідного рівняння (1):

1) *потрібно утворити відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь і знайти n її незалежних інтегралів:*

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n,u),\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n,u),\\ \quad ...\ ...\ ...\\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n,u),\end{array}\right\} \qquad \textbf{(16)}$$

2) *замінити в інтегралах (16) x_n її заданим значенням $x_n=x_{n0}$:*

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_2,\\ \quad ...\ ...\ ...\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_{n0},u)=\overline{\psi}_{n-1}\end{array}\right\} \qquad \textbf{(17)}$$

і розв'язати систему (17) відносно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, u$*:*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ x_2 &= \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ &\dots\ \dots\ \dots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n), \\ u &= \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n). \end{aligned}\right\};$$

3) *утворити співвідношення*

$$\omega(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) - \varphi\big(\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)\big) = 0, \qquad \textbf{(18)}$$

яке і визначатиме шуканий розв'язок задачі Коші у неявному вигляді. Розв'язуючи (18) відносно u, одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді.

Приклад 4. Знайти поверхню, яка задовольняє рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

і проходить через лінію $y = 1,\ z = x^2$**.**

Розв'язання. Знайдемо перші інтеграли системи

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Звідси легко одержуємо:

$$yx^2 = C_1, \qquad \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - z = C_2.$$

Отже, загальним інтегралом є

$$\Phi\left(yx^2, \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - z\right) = 0,$$

а загальний розв'язок має вигляд:

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \varphi(yx^2). \qquad \textbf{(19)}$$

Функція φ згідно з початковою умовою задовольняє рівняння

$$x^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} + \varphi(x^2) \quad \text{при} \quad \varphi(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\varphi(yx^2) = \frac{yx^2}{2} + \frac{1}{4},$$

а тоді з (19) знаходимо шуканий розв'язок

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{yx^2}{2} + \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Приклад 5. Знайти поверхню, яка задовольняє рівняння

$$z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

і проходить через лінію $x + y = 1,\ yz = 1$**.**

Розв'язання. Перші незалежні інтеграли системи:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{z} = \frac{\mathrm{d}\,y}{-xy} = \frac{\mathrm{d}\,z}{2xz},$$

як легко показати, мають вигляд

$$x^2 - z = C_1, \quad zy^2 = C_2.$$

Виключивши змінні x, y, z із співвідношень

$$x + y = 2,\ \ yz = 1,\ \ x^2 - z = C_1,\ \ zy^2 = C_2,$$

знаходимо зв'язок між інтегралами на заданій кривій:

$$(2 - C_2)^2 - C_2^{-1} - C_1 = 0.$$

Підставивши сюди значення C_1, C_2, одержуємо рівняння шуканої поверхні:

$$(2 - zy^2)^2 - \frac{1}{zy^2} - x^2 + z = 0. \blacksquare$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Підручники, посібники

[1]. ***Матвеев Н.М.*** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Выш. шк., 1974.

[2]. ***Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.*** Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981.

[3]. ***Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф.*** Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003.

[4]. ***Степанов В.В.*** Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958.

[5]. ***Лавренюк С.П.*** Курс диференціальних рівнянь. – Львів: Вид-во наук.-техн. літератури, 1997.

[6]. ***Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О***. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994.

[7]. ***Егоров А.И.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[8]. ***Шкіль М.І., Сотніченко М.А.*** Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992.

[9]. ***Гой Т.П., Казмерчук А.І., Федак І.В.*** Звичайні диференціальні рівняння. Част. 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах. – Івано-Франківськ: ЛІК, 2005.

Збірники задач і вправ

[9]. ***Филиппов А.Ф.*** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985.

[10]. ***Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.*** Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.

[11]. ***Боярчук А.К., Головач Г.П.*** Справочное пособие по высшей математике. Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[12]. ***Матвеев Н.М.*** Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – СПб.: Лань, 2002.