І.А. Климишин
НАРИСИ З ІСТОРІЇ АСТРОНОМІЇ

Київ „Радянська школа”, 1987

(Елементи теорії розмірностей та їх застосування для аналізу окремих задач астрофізики)

КОСМІЧНА ФІЗИКА

Завданням цієї галузі науки є вивчення властивостей небесних тіл, міжпланетного, міжзоряного і міжгалактичного середовища на основі знань про найголовніші фізичні та хімічні властивості матерії. Один з її підрозділів — астрофізика займається встановленням у вигляді формул певних співвідношень між окремими параметрами зір і туманностей. Наприклад, визначають температуру надр зорі, якщо її маса і радіус відомі тощо. Результати знаходять шляхом розв'язування (за допомогою ЕОМ) систем складних диференціальних рівнянь. Проте загальні співвідношення між згаданими параметрами можна дістати на підставі теорії розмірностей. Деякі з таких задач космічної фізики ми і розглянемо у цьому розділі.

КРИТЕРІЙ ДЖИНСА

За сучасними уявленнями зорі формуються з уламків газопилових хмар. Ще в 1902 р. Дж. Джинс довів, що нескінченно протяжна хмара не може перебувати у зрівноваженому стані дуже довго. Адже у міжзоряному середовищі неперервно виникають і поширюються найрізноманітніші хвильові рухи, зумовлені зіткненнями газопилових хмар. Відомо ж, що коли через певне середовище проходить збурення (звукова хвиля), то в ньому утворюються згущення і розрідження.

Нехай ρ — густина середовища, T — температура, $a = \sqrt{\gamma \frac{B}{\mu} T}$ — відповідна їй швидкість звуку в цьому середовищі (γ — відношення питомих теплоємностей, B — універсальна газова стала, μ — молекулярна маса). Джинс установив, що коли довжина хвилі λ звукового збурення менша деякого критичного значення λ_j, причому (G — гравітаційна стала)

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{\pi a^2}{G\rho}}, \tag{1}$$

то сили пружності (тиск газу) у змозі повернути частинки середовища до первісного стану. Якщо ж $\lambda > \lambda_j$, то згущення, яке виникло, стає зародком конденсації і далі вже притягує до себе навколишню речовину. Стискуючись, такий фрагмент хмари (його об'єм λ_j^3, маса $\lambda_j^3 \rho$) і стає протозорею, а пізніше — зорею у повному значенні цього слова.

Співвідношення (1) можна дістати і на підставі теорії розмірностей, використовуючи так звану П-теорему. Суть її можна сформулювати так. Нехай певна задача описується n параметрами A_1, A_2, ..., A_n, розмірності яких позначимо через $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_n]$. Припустимо, що m параметрів з них мають незалежні розмірності (наприклад, маса зорі $[\mathcal{M}]$ = кг, її розміри [R] = м). П-теорема стверджує, що зі згаданих n параметрів можна скласти $K = n - m$ безрозмірних величин ("комплексів"), кожний з яких і буде з точністю до сталого коефіцієнта визначати певний закон природи. Розглянемо кілька прикладів, починаючи від критерію Джинса.

Як бачимо, задача про гравітаційну нестійкість туманності характеризується параметрами λ, G, ρ, a, розмірності яких можна записати так:

$$[\lambda] = L; \quad [G] = \frac{L^3}{MT^2}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [a] = \frac{L}{T},$$

де L - розмірність довжини, T - часу, M - маси. Неважко зорієнтуватися, що з цих чотирьох параметрів задачі три мають незалежні розмірності. Тому відповідно до П-теореми з них можна скласти один безрозмірний комплекс: $\Pi = \lambda G^x \rho^y a^z$, де x, y, z - шукані показники степенів. Підставляючи розмірності кожного з параметрів, запишемо це співвідношення так:

$$\Pi = L \cdot \frac{L^{3x}}{M^x T^{2x}} \cdot \frac{M^y}{L^{3y}} \cdot \frac{L^z}{T^z} = L^{1+3x-3y+z} M^{y-x} T^{-2x-z}. \tag{2}$$

Оскільки П — величина безрозмірна, то прирівнявши показники степенів до нуля, дістанемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 1 + 3x - 3y + z = 0 \\ y = x \\ z = -2x \end{cases}$$

і їх розв'язки:

$$x = y = \frac{1}{2}; \quad z = -1.$$

Отже, безрозмірний комплекс має вигляд $\Pi = \lambda (G\rho)^{1/2} a^{-1}$. Розв'язавши його відносно критичної довжини, знаходимо:

$$\lambda = \Pi \sqrt{\frac{a^2}{G\rho}}. \tag{3}$$

Як бачимо, теорія розмірностей дає змогу дістати залежність між параметрами задачі з точністю до множника, величина якого часто близька до одиниці.

Тут варто підкреслити, що величина λ, знайдена за формулою (3), може бути прийнятою за λ_j. Бо в комплексі (2) порівнюємо дві величини: гравітаційну енергію згустка U і його теплову енергію E. Оскільки маса згустка $m \approx \lambda_j^3 \rho$, то потенціальна енергія $U = \frac{G\mathcal{M}}{\lambda_j} \approx G\rho\lambda_j^2$. Із свого боку, теплова енергія в розрахунку на одиницю маси $E \approx \frac{\hat{A}T}{\mu} \approx a^2$. Зіставивши величини U і E, знаходимо, що $\lambda_j \approx \sqrt{\frac{a^2}{G\rho}}$, тобто здобутий раніше (з точністю до сталої величини) вираз (3).

ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ЗОРІ

На окремих етапах розвитку зір певну роль відіграє таке джерело енергії, як гравітаційне стискування зорі, що супроводжується "звільненням потенціальної енергії". Залежність потенціальної енергії зорі від її параметрів – маси $\mathcal{M}$ і радіуса R можна знайти наближено.

Зорю, що має масу $\mathcal{M}$ і радіус R, розділимо уявно на дві рівні частини. Знайдемо роботу, яку треба витратити на відокремлення двох половинок на відстань Δr. Відомо, що робота дорівнює добуткові сили на пройдений шлях: $A = f\Delta r$. Приймемо, що величина діючої сили дорівнює силі взаємного притягання, а її середнє значення на проміжку від R до 2R $\left(r = \frac{3}{2}R\right)$ рівне

$$f = \frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^2} = \frac{4}{9}\cdot\frac{G\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{R^2}.$$

Поклавши, що $\Delta r = R$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \frac{\mathcal{M}}{2}$, знаходимо

$$A = \frac{1}{9}\cdot\frac{G\mathcal{M}^2}{R}.$$

Проте це ще не вся робота, яку можна здійснити над половинками зорі. По-перше, їх можна розсунути на більшу відстань, як кажуть, "на нескінченність". По-друге, кожну з цих половинок у свою чергу можна поділити пополам і також взаємно їх віддалити. Склавши всю виконану роботу над "розпорошенням" зорі, дістаємо формулу:

$$U \cong \frac{3}{2}\cdot\frac{G\mathcal{M}^2}{R} \qquad (1)$$

Підставивши числові значення усіх величин, знаходимо, зокрема для Сонця, $U = 6\cdot10^{41}$ Дж.

Під час стискування газової кулі (якщо тільки зорі утворюються з фрагментів газопилових хмар) маємо обернену картину: енергія не витрачається, а виділяється. І, як показує аналіз, майже половина її при цьому йде на розігрівання зорі, друга половина висвічується.

Формулу для величини потенціальної енергії зорі можна знайти і за допомогою теорії розмірностей. Задача характеризується чотирма параметрами з розмірностями:

$$[U] = \frac{ML^2}{T^2}; \quad [G] = \frac{L^3}{MT^2}; \quad [\mathcal{M}]=M \quad [R] = L,$$

так що лише три з них мають незалежні розмірності. Тому можна скласти один безрозмірний комплекс $\Pi = UG^x\mathcal{M}^yR^z$. Або

$$\Pi = \frac{ML^2}{T^2}\left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^x M^yL^z = M^{1-x+y}L^{3x+z+2}T^{-2x-2}.$$

Звідси дістаємо систему алгебраїчних рінянь для визначення показників степенів

$$\begin{cases} 2x+2=0, \\ 1-x+y=0, \\ 3x+z+2=0 \end{cases}$$

та їх розв'язки x= –1, y= –2, z= 1.

Таким чином, безрозмірний комплекс має вигляд $\Pi = UG^{-1}\mathcal{M}^{-2}R.$ Розв'язавши його відносно потенціальної енергії, маємо:

$$U = \text{Ï}\ \frac{C\mathcal{M}^2}{R} \qquad (1')$$

А це і є шукана фурмула з точністю до сталої $\Pi \approx \frac{3}{2}$.

Використаємо формулу (1) для U, щоб визначити, скільки речовини повинно випадати на Сонце щороку, щоб забезпечити його втрати енергії. Якщо світність Сонця $L = 4\cdot 10^{26}$ Дж, а в році налічується $T = 3{,}16\cdot 10^7$ с, то за рік Сонце втратить енергію $Q = LT$. Приріст потенціальної енергії за рахунок випадання на Сонце речовини знаходимо диференціюванням виразу для U по $\mathcal{M}$ при сталому значенні R:

$$dU = \frac{3G\mathcal{M}d\mathcal{M}}{R}$$

Оскільки за умовою виконується рівність $dU = Q$, то

$$LT = \frac{3G\mathcal{M}d\mathcal{M}}{R}$$

і приріст маси $d\mathcal{M}$ визначається так:

$$dU = \frac{TLR}{3G\mathcal{M}} \qquad (2)$$

Підставляючи відомі величини у формулу ($G = 6{,}67\cdot 10^{-11} H\cdot м^2/кг^2$, $R = 7\cdot 10^8 м$, $\mathcal{M} = 2\cdot 10^{30}\hat{e}\tilde{a}$), знаходимо, що $d\mathcal{M}$=2,2·10^{22} кг, тобто 0,0034 маси Землі за рік, або одна маса

Землі за кожні 294 роки.

А ось як змінювався б період обертання Землі навколо Сонця під час зростання його маси. Швидкість колового руху Землі по орбіті радіуса а рівна $\upsilon = \sqrt{\frac{G\mathcal{M}}{a}}$, а період її обертання

$$T = \frac{2\pi a}{\upsilon} 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\mathcal{M}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}}} \tag{3}$$

Щоб знайти приріст періоду *dT*, формулу (3) необхідно продиференціювати по $\mathcal{M}$:

$$dT = -2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G}} \cdot \frac{d\mathcal{M}}{2\sqrt{\mathcal{M}^3}} = -T \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\mathcal{M}}{\mathcal{M}} \tag{4}$$

що дає $dT = -0{,}17c$ за рік. Оскільки половина звільненої енергії витрачається на розігрівання надр Сонця, то величини $d\mathcal{M}$ і dT потрібно подвоїти.

Обчислимо, наскільки мав би зменшуватися радіус Сонця, щоб, як це твердив Гельмгольц, за рахунок цього ефекту світність Сонця підтримувалася на сучасному рівні. Диференціюємо формулу (1) по R, вважаючи $\mathcal{M}$ сталим: $dU = \frac{3}{2}\frac{G\mathrm{M}^2}{R^2}dR$. Прирівнюючи цей приріст потенціальної енергії величині $Q = LT,$ знаходимо, що $LT = \frac{3}{2}\frac{G\mathrm{M}^2}{R^2}dR$ і

$$dR = \frac{2LTR^2}{3G\mathcal{M}^2} \tag{5}$$

Після підстановки числових значень маємо: *dR* = 15 м. Оскільки, як уже згадувалося, половина звільненої енергії витрачається на розігрівання зорі, це число подвоюємо.

І, нарешті, знайдемо час, протягом якого Сонце висвічувало б енергію за рахунок гравітаційного стискування, якби його світність не змінювалася:

$$t = \frac{\frac{1}{2}U}{L} = \frac{3\cdot 10^{41}\,\ddot{A}\text{æ}}{4\cdot 10^{26}\,\hat{A}\grave{o}} = 7{,}5\cdot 10^{14}\,\tilde{n} \approx 24\,\grave{\imath}\text{ëí}\ .\text{ðîê³â}\ .$$

Такий проміжок часу прийнято називати *шкалою Гельмгольца*. Час начебто і не малий, але, ще в середині XIX століття палеонтологічні дані переконливо доводили, що насправді вік нашої планети (а отже і Сонця) набагато більший! Тому то астрономи і фізики і були змушені шукати (і знайти) нове джерело енергії — синтез в надрах зір ядер важчих хімічних елементів.

ТЕМПЕРАТУРА ЗОРЯНИХ НАДР

Перевіримо тепер, чи справді температура у надрах зір досягає значень, достатніх для перебігу там реакцій синтезу складніших хімічних елементів.

Насамперед необхідно констатувати, що Сонце й інші зорі протягом мільярдів років перебувають у стані механічної рівноваги. Це означає, що на будь-якій відстані *r* від центра зорі сила тяжіння, спрямована до центра, зрівноважена тиском, величина якого зростає у напрямі до центра зорі.

Розглянемо елемент газу на відстані *r* від центра зорі. Нехай густина газу ρ, висота стовпчика $dr = r_2 - r_1$, площа поперечного перерізу стовпчика S. Тоді маса вибраного елемента $m = Sdr\rho$. Відповідно до закону всесвітнього тяжіння цей елемент маси притягується усією масою зорі $\mathcal{M}$(r), яка міститься всередині сфери радіуса r, із силою

$$f = \frac{G\mathcal{M}(r)m}{r^2} = \frac{G\mathcal{M}(r)}{\tilde{a}^2}\rho Sdr$$

Коли б сила притягання нічим не зрівноважувалася, то виділений нами елемент маси вільно падав би до центра зорі. Час падіння можна оцінити за формулою: $t_г = \sqrt{\frac{2R}{g}}$. Прийнявши за довжину шляху радіус зорі R і взявши до уваги, що прискорення сили тяжіння $g = \frac{G\mathsf{M}}{R^2}$, знаходимо час падіння речовини до центра зорі – так званий *гідродинамічний час*:

$$t_{\tilde{a}} = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2R^3}{G\mathcal{M}}}$$

Неважко переконатися, що для Сонця $t_г \approx 3000$ с. Але зорі перебувають у рівновазі мільйони років. Отже, зоря існує у стійкому стані тому, що з глибиною (у напрямі до центра) температура *T* і густина ρ, а відповідно і тиск *p*, зростають. Пригадаємо, що для ідеального газу ці параметри пов'язані співвідношенням $p = \frac{B}{\mu}\rho T$. Тут, як і раніше, B - газова стала, μ – молярна маса. Для “типового” хімічного складу зоряних атмосфер (близько 67 % за масою водню і 31 % гелію), у тому числі й сонячної, μ=0,6.

На відстані r_1 і r_2 від центра зорі тиск відповідно дорівнює p_1 і p_2, причому приріст тиску $dp = p_1 - p_2 > 0$. Саме ця різниця тисків і зрівноважує силу тяжіння згаданого елемента газу. Таким чином, умова рівноваги запишеться так:

$$dpS = -f, \text{ або } \frac{dp}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2}\rho. \qquad (1)$$

Це рівняння є одним з найважливіших у теорії внутрішньої будови зір. За його допомогою оцінюють температуру в надрах тієї чи іншої зорі.

Будемо вважати в першому наближенні, що зоря однорідна, тобто густина в ній не змінюється з відстанню від центра. Відношення приростів величин dp і dr, які входять у формулу (1), замінимо різницями їх значень на поверхні зорі (тут p = 0, r = R) та в її центрі ($p = p_c$, $r = 0$): $dp \to 0 - p_c = -p_c, dr \to R.$

Врахуємо, що $\mathcal{M}$(r)⟶$\mathcal{M}$, якщо $r \to R$. Тоді матимемо:

$$\frac{p_c}{R} = \frac{G\mathcal{M}}{R^2}\rho. \qquad (2)$$

Оскільки при $\rho = const$, $p_C = \frac{B}{\mu}\rho T_C$, то з цих двох останніх співвідношень знаходимо, що

$$T_c = \frac{\mu G \mathcal{M}}{BR}. \qquad (3)$$

Підставляючи значення відповідних величин для Сонця: $\mu = 0{,}6$, $\mathcal{M}_\odot = 2\cdot10^{30}$ кг, $R_\odot = 6{,}95\cdot10^8$ м, а також сталих $G = 6{,}67\cdot10^{-11} Н\cdot м^2/кг^2$, $B = 8{,}31 Дж/(моль\cdot К)$, знаходимо, що температура в центрі однорідного за густиною Сонця становила б $T_c = 14\cdot10^6 K$. Точні обрахунки за допомогою сучасних ЕОМ дають те саме значення. Це приклад того, як шляхом наближених оцінок можна дістати досить вірогідне значення певного фізичного параметра.

При стискуванні зорі половина гравітаційної енергії витрачається на розігрівання її надр. Ця обставина також дає змогу оцінити температуру зоряної речовини. Пригадаємо, що середня енергія однієї частинки $\varepsilon = \frac{3}{2}kT$, де $k = 1{,}38\cdot10^{-23} Дж/К$ - стала Больцмана. Якщо маса зорі рівна $\mathcal{M}$, а середня маса частинки m, то зоря складається $\mathcal{M}/m$ частинок. Їх повна теплова енергія

$$E = -\frac{3}{2}\frac{\mathcal{M}}{m}kT. \qquad (4)$$

Половина потенціальної енергії зорі – це $\frac{1}{2}U = -\frac{3}{4}\frac{G\mathcal{M}^2}{R}$. Порівнюючи ці дві величини ($E = \frac{1}{2}U$), знаходимо середнє значення температури речовини зорі:

$$T = \frac{Gm\mathcal{M}}{2kR}. \qquad (5)$$

Нехай Сонце сформувалося з чистого водню. Тоді маса частинки $m_H = 1{,}67\cdot10^{-27} кг$. Підставляючи у формулу (5) числові значення всіх параметрів, знаходимо, що $T = 11\cdot10^6 K$.

Як бачимо, температура в надрах зір сягає значення мільйонів градусів, що цілком достатнє для звільнення енергії внаслідок реакцій синтезу хімічних елементів.

РИТМИ ПУЛЬСАЦІЙ ЗІР

Розглянемо задачу про визначення періоду P пульсації зорі масою $\mathcal{M}$ і радіусом R. Використаємо теорію розмірностей. Очевидно, що процес пульсації зумовлений тяжінням зорі і визначається величиною її маси $\mathcal{M}$, радіусом R, сталою G. Запишемо розмірності згаданих величин:

$$[P] = T; \quad [\mathcal{M}] = M, \quad [R] = L; \quad [G] = \frac{L^3}{MT^2}.$$

Параметрів у задачі всього чотири (n = 4), з них четвертий є конкретною комбінацією розмірностей, якими характеризуються перші три. Тому в задачу входять три параметри з незалежними розмірностями (n = 3), і відповідно до П-теореми з параметрів P, $\mathcal{M}$, R і G можна скласти один безрозмірний комплекс: $Ï = PG^x R^y \mathcal{M}^z$ (не порушуючи загальності, ми поклали, що показник степеня при P дорівнює одиниці).

Запишемо комплекс через розмірності кожного з параметрів:

$$\Pi = T\left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^x L^y M^z = T^{1-2x} L^{3x+y} M^{z-x}. \tag{1}$$

Так дістаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 1-2x=0 \\ 3x+y=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

та їх розв'язки $x = z = 1/2, y = -3/2.$

Шукане співвідношення для періоду пульсації P:

$$P = Ï\ (G\mathcal{M})^{-1/2} R^{3/2} = Ï\ \left(\frac{R^3}{G\mathcal{M}}\right)^{1/2} \tag{2}$$

Оскільки $\dfrac{\mathcal{M}}{4/3\pi R^3} = \bar{\rho}$ (середня густина зорі),

то це співвідношення можна переписати ще й так:

$$P\sqrt{\bar{\rho}} = \frac{\Pi}{\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}G}}. \tag{3}$$

А це добре відоме в астрофізиці співвідношення “період - середня густина”, яке і виконується для всіх пульсуючих зір.

Пульсуючу зорю можна розглядати як своєрідний сферичний маятник, який ритмічно з періодом P розширюється і стискується. Розглянемо, як методом теорії розмірностей можна дістати відому формулу для періоду коливання математичного маятника. Тут визначальними параметрами є період P, довжина маятника l і прискорення сили тяжіння g (отже, n = 3). їхні розмірності такі: $[P]=T$, $[l]=L$ і $[g]=L/T^2$. Параметрів із незалежними розмірностями два (m = 2). Таким чином, матимемо один безрозмірний комплекс $\Pi = Pl^x g^y$, або

$$\Pi = TL^x\left(\frac{L}{T^2}\right)^y = T^{1-2y}L^{x+y}. \tag{4}$$

Відповідна система алгебраїчних рівнянь така:

$$\begin{cases} 1-2y=0 \\ x+y=0. \end{cases}$$

Звідси $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

Отже, безрозмірний комплекс набуває вигляду: $\Pi = Pl^{-1/2}g^{1/2}$, що дає таку формулу для періоду Р:

$$P=\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

Цікаво, що коли підставити в цю формулу замість прискорення g його значення, записане через масу і радіус зорі $g=\frac{G\mathcal{M}}{R^2}$, а замість довжини маятника l — радіус зорі R, то дістанемо формулу (3) для періоду пульсації зорі. Фізична суть обох явищ – пульсації зорі й коливання маятника – одна і та сама. Це – механічні рухи у полі тяжіння, обумовлені невеликими відхиленнями від положення рівноваги.

ЗАДАЧА ПРО СИЛЬНИЙ ВИБУХ

На певному етапі еволюції зоря, маса якої $\mathcal{M} \geq 1{,}2\mathcal{M}_\odot$, практично раптово стискується (відбувається «вибух всередину» – *імплозія*). При цьому наявні в її речовині електрони «втискуються» в ядра складніших елементів (проходить реакція $p+e^- \to n+\nu$ – «нейтронізація» речовини), внаслідок чого атомні ядра розпадаються на окремі нейтрони. І коли маса залишка зорі – її ядра – $\mathcal{M} < 3\mathcal{M}_\odot$, то цей нейтронний газ здатний відновити рівновагу зорі, але вже при розмірах $R \approx 10-20 км$.

Обчислимо насамперед величину потенціальної енергії ΔU, яка звільняється при зменшенні розмірів зорі з масою $\mathcal{M} = 3\mathcal{M}_\odot$ від $R_1 \approx 1R$ до $R_2 = 10 км$:

$$\Delta U = \frac{G\mathcal{M}^2}{R_2} - \frac{G\mathcal{M}^2}{R_1} \approx \frac{G\mathcal{M}^2}{R_2},$$

що дає величину енергії $\Delta U \approx 3{,}2\cdot 10^{47}\, Дж$.

При спалаху наднової оболонка, маса якої сягає величини $m \approx \mathcal{M}_\odot$, розлітається в навколишній простір із швидкістю υ = 10 000 км/с. Кінетична енергія цієї речовини

$$E=\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{30} кг \cdot \left(10^7\,\frac{м}{с}\right)^2 = 10^{44}\, Дж.$$

Як бачимо, «коефіцієнт корисної дії» такого вибуху невеликий: в кінетичну енергію оболонки переходить усього близько 1 % звільненої енергії. Не менше 99 % її «викрадають» нейтрино, що виникають у центральних зонах зорі і, пронизуючи всю її товщу, виходять у міжзоряне середовище. І вже зовсім мала частка (близько 0,01 Е) висвічується, тобто поширюється у навколишньому просторі у вигляді квантів електромагнітного випромінювання.

Згаданий 1 % енергії – це все-таки величезна її частина. Тому після спалаху зорі формується потужна ударна хвиля, яка й поширюється певний час (до затухання) у міжзоряному середовищі. Пригадаємо, що ударна хвиля виникає завжди, як тільки відбулося миттєве виділення значної кількості енергії. У місці вибуху температура і тиск газу раптово зростають. Нагрітий газ (його параметри позначають індексом «2») розширюється в бік холодного (тут параметри позначаються індексом «1»: T_1, p_1 і т. д.) із швидкістю, яка на початку може істотно перевищувати швидкість звуку a_1. Межа, яка розділяє два стани — нагрітий і холодний, зветься *фронтом ударної хвилі*, її швидкість позначимо через D. Отже, $D>a_1$.

При переході газу через фронт ударної хвилі виконуються закони збереження маси, імпульсу і енергії, з яких випливають певні співвідношення для величин стрибків параметрів газу, які при $D>>a_1$ і $\gamma=5/3$ (одноатомний газ) мають такий простий вигляд:

$$p_2 = \frac{3}{4}\rho_1 D^2;\ \ \rho_2 = 4\rho_1;\ \ T_2 = \frac{3\mu_2 D^2}{16B}. \tag{1}$$

Тут μ_2 – молекулярна маса за фронтом ударної хвилі, B – універсальна газова стала.

Так, якщо в атмосфері зорі чи в міжзоряному середовищі рухається ударна хвиля із швидкістю «всього» 100 км/с, то при μ_2 = 0,5 (іонізований водень) температура безпосередньо за фронтом хвилі зростає до величини T_2=110 000 К. Якщо ж D = 1000 км/с, то $T_2 \approx 10^7$ К.

При спалахах наднових зір швидкості речовини, що розлітається у навколишній простір, сягає значень 10 000 км/с. Це значить, що попереду самої речовини у міжзоряне середовище рухається ударна хвиля, яка і нагріває наявний там газ до високих температур. З часом цей газ поступово охолоджується: на місці спалаху зорі виникає потужне джерело як радіо-, так і (іноді) оптичного і навіть рентгенівського випромінювання.

Задачу, яка при цьому виникає, можна зформулювати так: знайти, за яким законом у міжзоряному середовищі (де густина $\rho_1 \approx 2\cdot10^{-21}$ кг/м^3) поширюється ударна хвиля? І яку відстань вона проходить там, тобто який об'єм буде охоплено цим збуренням?

Певну відповідь тут дають розв'язки, отримані ще 1944 р. Л. І. Сєдовим (СРСР) якраз на основі теорії розмірностей. Простежимо тут, з яких міркувань вони були отримані.

Нехай у певному середовищі з густиною ρ_1 відбулося миттєве виділення енергії Q. Треба знайти, як із часом t змінюється радіус фронту ударної хвилі r та швидкість руху хвилі $D = \frac{dr}{dt}$. У випадку сильної ударної хвилі величиною тиску ρ_1 перед її фронтом можна знехтувати порівняно з тиском за фронтом.

Отже, задача описується чотирма такими параметрами: r, t, Q і ρ_1 Неважко переконатися, що три з них мають незалежні розмірності, бо

$$[r] = L;\ \ [t] = T;\ \ [\rho_1] = \frac{M}{L^3};\ \ [Q] = \frac{ML^2}{T^2}.$$

З них і складаємо один безрозмірний комплекс

$$\Pi = rQ^x \rho_1^y t^z, \qquad (2)$$

що і дає закон руху сильної ударної хвилі в однорідному середовищі. Підставляючи розмірності величин, знаходимо, що

$$\Pi = L\left(\frac{ML^2}{T^2}\right)^x \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^y T^z = L^{1+2x-3y} M^{x+y} T^{z-2x}.$$

Прирівнюючи показники степенів нулеві, отримуємо алгебраїчні рівняння

$$\begin{cases} 1+2x-3y=0 \\ x+y=0 \\ z-2x=0 \end{cases} \qquad \text{та їх розв'язки} \qquad \begin{matrix} x=-1/5 \\ y=1/5 \\ z=-2/5 \end{matrix}$$

Отже, при $\Pi \approx 1$, що підтверджується зіставленнями із спостереженнями, з співвідношення (2) і випливає закон руху сильної ударної хвилі в однорідному середовищі:

$$r = \left(\frac{Q}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}. \qquad (3)$$

Тоді швидкість фронту хвилі, у свою чергу, визначається, як

$$D = \frac{2}{5}\left(\frac{Q}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}\left(\frac{Q}{\rho_1}\right)^{1/2} r^{-3/2}. \qquad (4)$$

Саме цей розв'язок і дав можливість оцінити, зокрема, вік залишків спалахів наднових зір. Наприклад, у сузір'ї Лебедя є відома волокноподібна туманність, радіус якої r = 20 пк, а швидкість розширення $\upsilon \approx 115$ км/с. Співставлення цих даних з розв'язками (3) і (4) приводить до висновку, що спалах наднової зорі тут відбувся близько 70 000 років тому.

Як показують спостереження, зараз у відносно недалеких околицях Сонця налічується понад 100 залишків спалахів наднових зір. За всю історію нашої Сонячної системи такі космічні катастрофи відбувалися не менш 3–4 рази на відстанях менших ніж 10 пк. І ще в 1957 р. Й.С.Шкловський та В.І.Красовський висловили думку, що практично раптове вимирання бл. 60 млн. років тому велетенських форм життя на Землі – динозаврів, іхтіозаврів тощо – якраз і може бути пов'язане зі спалахом наднової зорі у близьких околицях Сонця. Це – один з прикладів того, що процеси, які відбуваються далеко за межами нашої планети, можуть мати вплив і на всю її біосферу...

Підготовка електронного варіанту Войтків Г.В.