

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової
освіти

Розв'язування рівнянь та систем рівнянь в курсі
“Математика”
(Методичні рекомендації для студентів спеціальності
“Початкове навчання”)

Івано-Франківськ – 2009

УДК 378.14:371.214.114

ББК 22.143

Р – 64

Романишин Р.Я. Розв'язування рівнянь та систем рівнянь в курсі “Математика” (Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Початкове навчання”). /Івано-Франківськ: Видавництво “Горицвіт”. – 2009. – 32 с.

Рецензенти:

Лучків І.М. – завідувач кафедри теорії та методики природничо-математичних дисциплін Івано-Франківського обласного ІППО, кандидат педагогічних наук, доцент;

Стасів Н.І. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені І. Франка.

*Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника
(протокол № 4 від 25.12.08 р.)*

Передмова

Даний збірник складений відповідно до діючих програм з математики для спеціальності “Початкове навчання”, у якому пропонуються методичні рекомендації щодо вивчення розділів, зокрема рівнянь і систем рівнянь для студентів спеціальності “Початкове навчання” на I курсі у II семестрі.

Збірник складається з таких розділів:

- розв’язування рівнянь;
- розв’язування систем рівнянь;
- задачі на складання рівнянь та систем рівнянь.

Кожний розділ містить по 50 завдань тестового характеру.

До кожного завдання подано п’ять варіантів відповідей (а, б, в, г, та “інша відповідь”). Тільки одна з запропонованих відповідей є правильною. Якщо перші чотири відповіді на думку студенти не є правильними, то слід вибрати варіант “інша відповідь”.

Оскільки, кожний розділ починається з короткого викладення відповідного теоретичного матеріалу, яким повинен володіти студент для успішного розв’язку запропонованих завдань, то це дає змогу використати даний матеріал для самостійної роботи студентів при підготовці до контрольних робіт.

Представлені у збірнику розв’язки прикладів ілюструють різні підходи до вирішення математичних задач а також правильного їх оформлення.

Наявні у збірнику відповіді до певних завдань дозволять студентам самостійно підготуватися до контрольних робіт з зазначених тем, а наявний зразок контрольної роботи усуне питання щодо оформлення такого виду завдань.

1. Розв'язування рівнянь

Якщо існують два вирази від змінної x виду $F_1(x)$ і $F_2(x)$ областями визначення яких є непорожні множини X_1 і X_2 , причому хоча б один з цих виразів є числовою формою від змінної x і $X = X_1 \cap X_2$, тоді висловлювальна форма виду $F_1(x) = F_2(x), x \in X$, називається **рівнянням з однією змінною**, а множина X – областю визначення.

Вирази $F_1(x)$ і $F_2(x)$ називають **лівою** і **правою** частинами рівняння з однією змінною.

Значення змінної з області визначення рівняння, при підстановці якого в рівняння дістають істину числову рівність, називають **розв'язком рівняння**, або його **коренем**. Розв'язати рівняння означає знайти множину цілих розв'язків цього рівняння.

Два рівняння називають **рівносильними** (кажуть, що одне з них рівносильне іншому), якщо області визначення збігаються і множини розв'язків їх рівні між собою.

Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Якщо в рівнянні перенести доданок (числовий вираз, або числову форму) з однієї частини в іншу, змінивши знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається **квадратним рівнянням**. Якщо $a = 1$, то квадратне рівняння називається **зведеним**. Числа a, b, c мають свої назви. Так, a – перший коефіцієнт, b – другий коефіцієнт, c – вільний член.

Корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходять за допомогою формули

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Вираз $D = b^2 - 4ac$ називається **дискримінантом** квадратного рівняння. Якщо $D < 0$, то дане квадратне рівняння не має жодного дійсного кореня. Якщо $D = 0$, то рівняння має один дійсний корінь. Якщо $D > 0$, то рівняння має два дійсні корені.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$ називається **бікватратним**, причому $a \neq 0$. Бікватратне рівняння розв'язується методом введення нової змінної: $x^2 = y$, після чого отримуємо квадратне рівняння $ay^2 + by + c = 0$.

Приклад 1. А. Розв'язати рівняння

$$2x - 3 + 4(x - 1) = 5.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$2x - 3 + 4x - 4 = 5,$$

$$2x + 4x = 5 + 3 + 4,$$

$$6x = 12,$$

$$x = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 1.Б. Розв'язати рівняння

$$(7x - 3)(x + 5)x = 0.$$

Розв'язання. Добуток множників дорівнює нулю тоді, коли б хоча один із множників дорівнює нулю. Запишемо у вигляді диз'юнкції розв'язків:

$$7x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0 \vee x = 0.$$

Отримаємо розв'язки рівняння

$$x = \frac{3}{7} \vee x = -5 \vee x = 0.$$

Відповідь. $-5; 0; \frac{3}{7}$.

Приклад 1.В. Розв'язати рівняння

$$6x^2 - 7x - 3 = 0.$$

Розв'язання. Для розв'язку даного квадратного рівняння зкористаємося формулою: $D = b^2 - 4ac$, де $a = 6, b = -7, c = -3$.

$$D = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-3),$$

$$D = 121.$$

Оскільки $D > 0, D = 121$, то квадратне рівняння має два корені, значення яких обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Знайдемо розв'язки даного квадратного рівняння:

$$x_1 = \frac{7 + 11}{12} = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{7 - 11}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}$.

Приклад 1.Г. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x - 11}{4} - \frac{3 - 5x}{8} = \frac{x + 6}{2}.$$

Розв'язання. Перенесемо доданки в одну частину рівняння:

$$\frac{3x - 11}{4} - \frac{3 - 5x}{8} - \frac{x + 6}{2} = 0.$$

Зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2(3x - 11) - (3 - 5x) - 4(x + 6)}{8} = 0.$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\frac{6x - 22 - 3 + 5x - 4x - 24}{8} = 0;$$
$$\frac{7x - 49}{8} = 0.$$

Дріб тоді дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник нулю не дорівнює. Отже,

$$7x - 49 = 0,$$
$$7x = 49,$$
$$x = 7.$$

Відповідь. 7.

Приклад 1.Д. Знайти область визначення і множину розв'язків рівняння

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1.$$

Розв'язання. Перенесемо доданки в одну частину рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} - 1 = 0.$$

Зведемо до спільного знаменника, який у даному випадку дорівнює $x(x+2)$:

$$\frac{x+2+2x-x(x+2)}{x(x+2)} = 0;$$
$$\frac{x+2+2x-x^2-2x}{x(x+2)} = 0.$$

Зведемо подібні доданки у чисельнику дробу і домножимо на (-1) :

$$\frac{x^2 - x - 2}{x(x+2)} = 0.$$

Дріб тоді дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник нулю не дорівнює. Отже,

$$x^2 - x - 2 = 0 \wedge x(x+2) \neq 0;$$
$$x_1 = -1, x_2 = 2 \wedge x \neq 0, x \neq -2.$$

Відповідь. $-1; 2, x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

Приклад 1.Е. Знайти найменший корінь рівняння

$$x^2 - \frac{7}{6}x - 0,5 = 0.$$

Розв'язання. Домножимо обидві частини рівняння на 6: $6x^2 - 7x - 3 = 0$.

Розв'яжемо дане квадратне рівняння:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 49 + 72 = 121 = 11^2.$$

$$x_1 = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{7-11}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

Приклад 1.Є. Розв'язати біквдратне рівняння

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x^2 = a$. Підставимо це значення у дане біквдратне рівняння $a^2 - 13a + 36 = 0$. Дане рівняння має два розв'язки: $a_1 = 4$, $a_2 = 9$.

$$x^2 = 4, \quad x^2 = 9.$$

$$x_1 = 2, \quad x_3 = 3,$$

$$x_2 = -2, \quad x_4 = -3.$$

Відповідь. $-2, 2, -3, 3$.

1.1. Розв'язати рівняння

$$5(x+7) = 29.$$

а) 1,2; б) $-1,2$; в) 1,4; г) 1,8; д) інша відповідь.

1.2. Розв'язати рівняння

$$9x^2 + 6(x+1) = 5.$$

а) 2; б) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) 3; д) інша відповідь.

1.3. Розв'язати рівняння

$$x^2(2+x) = 0.$$

а) 0; 2; б) 2; в) 0; г) 0; -2 ; д) інша відповідь.

1.4. Розв'язати рівняння

$$2x^2 - 27x + 13 = 0.$$

а) -13 ; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; 13; в) 2; г) $-\frac{1}{2}$; 13; д) інша відповідь.

1.5. Розв'язати рівняння

$$(x-5,4)(x+8) = 0.$$

а) -8 ; 5,4; б) $-5,4$; 8; в) $-8,4$; 5; г) 5,4; 8; д) інша відповідь.

1.6. Розв'язати рівняння

$$x(x+3)(x-7) = 0.$$

а) -3 ; 0; 7; б) 0; 3; 7; в) -7 ; 0; 3; г) -3 ; 7; д) інша відповідь.

1.7. Знайти суму цілих розв'язків рівняння

$$(x-2)(x+3,5)(x+7) = 0.$$

а) 1,5; б) $-1,5$; в) 5; г) -5 ; д) інша відповідь.

1.8. Знайти найменший розв'язок рівняння

$$(2x-3)(7x+3)(5x-2)x = 0.$$

а) $-\frac{3}{7}$; б) $-\frac{2}{5}$; в) 0; г) $\frac{2}{5}$; д) інша відповідь.

1.9. Розв'язати рівняння

$$5x + 3 = 2.$$

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) інша відповідь.

1.10. Обчислити суму коренів рівняння

$$3x(2x+3)(x-7)=0.$$

а) $-\frac{11}{2}$; б) $\frac{11}{2}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) 7; д) інша відповідь.

1.11. Знайти найбільший корінь рівняння

$$x^2 + \frac{1}{2}x = 0.$$

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

1.12. Розв'язати рівняння

$$x^2 + 16 = 0.$$

а) -4;4; б) -4; в) 4; г) \emptyset ; д) інша відповідь.

1.13. Розв'язати рівняння

$$7 - 2(x - 5) = 4.$$

а) $5\frac{1}{2}$; б) $6\frac{1}{2}$; в) 5; г) 4; д) інша відповідь.

1.14. Розв'язати рівняння

$$-13(3x - 5) = 91.$$

а) $-\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$; в) $-1\frac{2}{3}$; г) 5; д) інша відповідь.

1.15. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3} = 2.$$

а) $3\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) 4; г) 0; д) інша відповідь.

1.16. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3x+5} = \frac{2}{5}.$$

а) 0,25; б) 2,5; в) -3,75; г) 4,2; д) інша відповідь.

1.17. Знайти найбільший корінь рівняння

$$0,75x^2 + x + \frac{1}{4} = 0.$$

а) $-\frac{4}{3}$; б) 3; в) $-\frac{1}{3}$; г) 2; д) інша відповідь.

1.18. Знайти найменший корінь рівняння

$$x^2 - \frac{7}{6}x - 0,5 = 0.$$

а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{3}{2}$; г) $\frac{1}{3}$; д) інша відповідь.

1.19. Розв'язати рівняння

$$6 - \frac{x-1}{2} = \frac{3-x}{2} + \frac{x-2}{3}.$$

а) -17 ; б) 15 ; в) 17 ; г) 18 ; д) інша відповідь.

1.20. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x-1}{7} + \frac{4x+7}{3} = 11.$$

а) -7 ; б) 14 ; в) 12 ; г) 5 ; д) інша відповідь.

1.21. Розв'язати рівняння

$$\frac{x-3}{6} + x = \frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2}.$$

а) \emptyset ; б) $\frac{11}{6}$; в) 0 ; г) 1 ; д) інша відповідь.

1.22. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x+1}{5} = 2 - \frac{4(x-3)}{15}.$$

а) -3 ; б) 3 ; в) 0 ; г) 2 ; д) інша відповідь.

1.23. Розв'язати рівняння

$$\frac{6x-x^2-6}{x-1} - \frac{2x-3}{x-1} = 1.$$

а) 1 ; б) 2 ; в) 1 ; г) -2 ; д) інша відповідь.

1.24. Розв'язати рівняння

$$3(x-2) - 5 = 4 - (5x-1).$$

а) 2 ; б) -6 ; в) 12 ; г) 8 ; д) інша відповідь.

1.25. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x-1}{2} = 4.$$

а) 2 ; б) 3 ; в) -3 ; г) 0 ; д) інша відповідь.

1.26. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x+1}{6} + \frac{7x-1}{3} = \frac{x}{2}.$$

а) -1 ; б) 1 ; в) 3 ; г) 0 ; д) інша відповідь.

1.27. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x+2}{4} - \frac{7x+4}{2} - 4 = 0.$$

а) 2 ; б) 3 ; в) 1 ; г) -2 ; д) інша відповідь.

1.28. Розв'язати рівняння

$$\frac{1+2x}{7} + \frac{3x+1}{2} = 6.$$

а) 2 ; б) 1 ; в) 3 ; г) -1 ; д) інша відповідь.

1.29. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x-3}{-3} - \frac{7x+1}{2} + 10x = 0.$$

а) -7 ; б) 0 ; в) 3 ; г) 4 ; д) інша відповідь.

1.30. Розв'язати рівняння

$$\frac{1+2x}{3} + \frac{6x}{2} = \frac{11}{3}.$$

а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0; д) інша відповідь.

1.31. Розв'язати рівняння

$$\frac{x-1}{3} + \frac{3x-2}{5} - \frac{4x-1}{5} = 0.$$

а) -2; б) 4; в) 1; г) 6; д) інша відповідь.

1.32. Розв'язати рівняння

$$\frac{-3x+1}{5} = 4.$$

а) 4; б) -7; в) 7; г) 3; д) інша відповідь.

1.33. Розв'язати рівняння

$$\frac{4x+14}{11} = 2.$$

а) 2; б) -2; в) 1; г) 0; д) інша відповідь.

1.34. Розв'язати рівняння

$$1 - \frac{x-3}{2} = x - \frac{3(5-2x)}{7}.$$

а) 2; б) $\frac{65}{33}$; в) $\frac{60}{33}$; г) -3; д) інша відповідь.

1.35. Розв'язати рівняння

$$2x(3x-2) - 3\left(1 - (2-x)(2x+3) - \frac{x-3}{7}\right) = 13.$$

а) $\frac{5}{4}$; б) 6; в) $-\frac{1}{4}$; г) -5; д) інша відповідь.

1.36. Розв'язати рівняння

$$5 - 3(x - 2(x - 2(x - 2))) = 2.$$

а) 3; б) 2; в) 0; г) -3; д) інша відповідь.

1.37. Розв'язати рівняння

$$7x^2 - 9x + 2 = 0.$$

а) $-1; \frac{2}{7}$; б) $-1; -\frac{2}{7}$; в) $\frac{2}{7}; 1$; г) $\frac{1}{7}; 1$; д) інша відповідь.

1.38. Розв'язати рівняння

$$1 - \frac{1}{5}x = \frac{3}{2}.$$

а) $\frac{1}{2}$; б) 3; в) $\frac{2}{5}$; г) $-\frac{5}{2}$; д) інша відповідь.

1.39. Розв'язати рівняння

$$9x^2 - 7x - 2 = 0.$$

а) $-1; -\frac{2}{9}$; б) $-1; \frac{2}{9}$; в) $-\frac{1}{9}; 1$; г) $-\frac{2}{9}; 1$; д) інша відповідь.

1.40. Розв'язати рівняння

$$x^2 - \frac{9x+2}{5} = 0.$$

а) $-\frac{1}{5}; 2$; б) $-2; \frac{1}{5}$; в) $-2; -\frac{1}{5}$; г) $\frac{2}{5}; \frac{3}{5}$; д) інша відповідь.

1.41. Розв'язати рівняння

$$x^2 - \frac{11x+2}{6} = 0.$$

а) $-2; -\frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{6}; 2$; в) $\frac{1}{6}; 2$; г) $\frac{1}{6}; \frac{1}{2}$; д) інша відповідь.

1.42. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 5x}{2} - 3 = 0.$$

а) $-6; -1$; б) $-1; 6$; в) $1; 6$; г) $-6; 1$; д) інша відповідь.

1.43. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 7x}{8} - 1 = 0.$$

а) $-8; -1$; б) $1; 8$; в) $\frac{1}{8}; 1$; г) $-1; 8$; д) інша відповідь.

1.44. Розв'язати рівняння

$$\frac{5x+14}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4}.$$

а) $-2; 7$; б) 7 ; в) $-7; -2$; г) $2; 7$; д) інша відповідь.

1.45. Розв'язати рівняння

$$\frac{8}{x-3} - \frac{10}{x} = 2.$$

а) $-5; -3$; б) $-3; 5$; в) 5 ; г) $3; 5$; д) інша відповідь.

1.46. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - x}{3} = \frac{2x - 4}{5}.$$

а) \emptyset ; б) $3; 5$; в) $-2; 5$; г) $-5; -2$; д) інша відповідь.

1.47. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 3}{2} - 6x = 5.$$

а) $-13; -1$; б) $-1; 13$; в) $1; 13$; г) $\frac{1}{13}; 1$; д) інша відповідь.

1.48. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 + 2x}{2} = \frac{x^2 + 24}{7}.$$

а) $\frac{1}{7}; \frac{3}{7}$; б) $1\frac{1}{7}; 3\frac{3}{7}$; в) $1\frac{1}{7}; 3$; г) $-3\frac{3}{7}; 1\frac{1}{7}$; д) інша відповідь.

1.49. Розв'язати рівняння

$$\frac{3x^2 + x}{4} - \frac{2 - 7x}{5} = \frac{3x^2 + 17}{10}.$$

а) $-4\frac{2}{3}; 1$; б) $-4; 1$; в) $-\frac{2}{3}; 1$; г) $-1; -4\frac{2}{3}$; д) інша відповідь.

1.50. Розв'язати рівняння

$$\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{5x - 1}{6} = \frac{x^2 + 17}{9}.$$

а) $-1; 1$; б) $-1\frac{9}{22}; 1$; в) \emptyset ; г) $-1; 1\frac{9}{22}$; д) інша відповідь.

2. Розв'язування систем рівнянь

Системою рівнянь виду $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$ називають кон'юнкцію цих рівнянь

$$F_1(x, y) = 0 \wedge F_2(x, y) = 0,$$

або

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0; \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Будь-яке рівняння з двома змінними x і y **рівносильне** деякому рівнянню виду $F(x, y) = 0$

Розв'язком системи рівнянь (1) називають кортеж (a, b) , що складається з дійсних чисел, якщо при заміні x на a і y на b отримаємо істинні числові рівності:

$$F_1(x, y) = 0 \text{ і } F_2(x, y) = 0.$$

Розв'язати систему рівнянь означає знайти множину розв'язків цієї системи. **Множиною розв'язків системи рівнянь** (1) є переріз характеристичних множин рівняння $F_1(x, y) = 0$ і рівняння $F_2(x, y) = 0$.

Приклад 2.А. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна **способом підстановки**, який полягає у тому, що з будь-якого рівняння системи виражають одне невідоме через інше, а потім підставляють значення цього невідомого у інше рівняння.

З першого рівняння виражаємо: $x = \frac{8 - 3y}{2}$. Підставимо це значення у друге рівняння і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \frac{8 - 3y}{2}, \\ 3 \cdot \frac{8 - 3y}{2} + 2y = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи і отримаємо:

$$\begin{cases} x = \frac{8-3y}{2}, \\ \frac{3(8-3y) + 2 \cdot 2y - 2 \cdot 7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2}, \\ \frac{24-9y+4y-14}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2}, \\ \frac{10-5y}{2} = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи отримаємо $y = 2$. Підставимо це значення у перше рівняння системи: $x = \frac{8-3 \cdot 2}{2} = 1$.

Відповідь. (1;2).

Приклад 2.Б. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна **способом алгебраїчного додавання**, який полягає у тому, що одне з рівнянь системи домножують на таке число, щоб коефіцієнти при відповідних змінних були рівні і при додаванні, або відніманні і двох рівнянь результат дорівнював нулю.

Домножимо друге рівняння системи на 2:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ x - 2y = 3 \cdot 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 2x - 4y = 6. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге і отримаємо:

$$-\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 2x - 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 2x + 5y - (-4y) = 15 - 6 \Leftrightarrow 9y = 9 \Leftrightarrow y = 1.$$

Підставимо це значення у перше рівняння і розв'яжемо його відносно змінної x :

$$2x + 5 \cdot 1 = 15,$$

$$2x = 10,$$

$$x = 5.$$

Відповідь. (5;1).

Приклад 2.В. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо кожне рівняння даної системи до спільного знаменника:

$$\begin{cases} \frac{3 \cdot x - 2 \cdot y}{6} = 1, \\ \frac{3 \cdot x - 4 \cdot 2y}{12} = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x - 2y}{6} = 1, \\ \frac{3x - 8y}{12} = 8. \end{cases}$$

Домножимо перше рівняння системи на 6, а друге на 12:

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{6} = 1/6, \\ \frac{3x-8y}{12} = 8/12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = 6, \\ 3x-8y = 96. \end{cases} \quad (1)$$

Скористаємося *способом алгебраїчного додавання* і від другого рівняння віднімемо перше:

$$3x-8y-(3x-2y)=96-6 \Leftrightarrow 3x-8y-3x+2y=90 \Leftrightarrow -6y=90 \Leftrightarrow y=-15.$$

Підставимо отримане значення змінної у перше рівняння системи (1):

$$3x-2(-15)=6 \Leftrightarrow 3x+30=6 \Leftrightarrow 3x=-24 \Leftrightarrow x=-8.$$

Відповідь. $(-8; -15)$.

Приклад 2.Г. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розкладемо ліві частини рівнянь а множники. З першого винесемо за дужки x , а з другого $-y$:

$$\begin{cases} y(y-x)=12, \\ x(x-y)=-3. \end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння $(x \neq 0)x - y = -\frac{3}{x}/(-1) \Leftrightarrow y - x = \frac{3}{x}$, і підставимо

$$\text{дане значення у перше рівняння: } \begin{cases} y \cdot \frac{3}{x} = 4, \\ x(x-y) = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x, \\ x(x-y) = -3. \end{cases}$$

Підставимо значення y друге рівняння системи: $-3x^2 = -3/(-3) \Rightarrow x^2 = 1$.

Отримаємо розв'язки даного рівняння: $x_1 = 1; x_2 = -1$, звідси $y_1 = 4; y_2 = -4$.

Відповідь. $(1; 4), (-1; -4)$.

Приклад 2.Д. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+7 = y^2, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Розв'язання. Підставимо значення y^2 з першого рівняння системи у друге рівняння: $x^2 + x + 7 = 13$,

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$x_1 = 2, x_2 = -3.$$

Підставимо значення x_1 у перше рівняння системи: $2+7 = y^2$,

$$y^2 = 9,$$

$$y_1 = 3, y_2 = -3.$$

Розв'язком системи відносно невідомого x_1 буде: $(2; 3), (2; -3)$.

Підставимо значення x_2 у друге рівняння системи: $-3+7 = y^2$,

$$y^2 = 4,$$

$$y_3 = 2, y_4 = -2.$$

Розв'язком системи відносно невідомого x_2 буде: $(-3;2), (-3;-2)$.

Відповідь. $(2;3), (2;-3), (-3;2), (-3;-2)$.

Приклад 2.Е. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ x = y. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $x = y$, то перше рівняння системи можна представити:

$$x^2 + x^2 = 32,$$

$$2x^2 = 32,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x_1 = 4, x_2 = -4.$$

Відповідь. $(4;4), (-4;-4)$.

Приклад 2.Є. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 2y = 10, \\ x - 3y = -6. \end{cases}$$

Розв'язання. Домножимо перше рівняння системи на 3.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 2y = 10 \cdot 3, \\ x - 3y = -6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6y = 30, \\ x - 3y = -6. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге: $x + 6y - (x - 3y) = 30 - (-6)$,

$$x + 6y - x + 3y = 36,$$

$$9y = 36,$$

$$y = 4.$$

Підставимо отримане значення змінної у друге рівняння:

$$x - 3 \cdot 4 = -6,$$

$$x - 12 = -6,$$

$$x = -6 + 12,$$

$$x = 6.$$

Відповідь. $(6;4)$.

2.1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

а) $(-3;-2)$; б) $(3;2)$; в) $(-2;3)$; г) $(2;3)$; д) інша відповідь.

2.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

а) $(-4;3)$; б) $(-3;4)$; в) $(-3;-4)$; г) $(-4;-3)$; д) інша відповідь.

2.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - y = 5, \\ xy = 18. \end{cases}$$

а) $(2;9)$; б) $(2;-9)$; в) $(-2;9)$; г) $(2;9); \left(-\frac{9}{7}; -14\right)$; д) інша відповідь.

2.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 6, \\ x^2 + 6y = 10. \end{cases}$$

а) $(7;6,5); (4;1)$; б) $(7;-6,5); (4;1)$; в) $(4;-1)$; г) $(-7;-6,5); (4;-1)$; д) інша відповідь.

2.5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 8, \\ x^2 - 3y = -5. \end{cases}$$

а) $(2;-3)$; б) $(2;3)$; в) $(-2;-3)$; г) $(3;2)$; д) інша відповідь.

2.6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$$

а) $(2;1)$; б) $(-2;-1)$; в) $(-1;2)$; г) $(1;-2)$; д) інша відповідь.

2.7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x = y. \end{cases}$$

а) $(-2;2); (2;-2)$; б) $(2;2); (-2;-2)$; в) $(-2;2)$; г) $(2;2)$; д) інша відповідь.

2.8. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y + 5 = x^2, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

а) $(0;-5); (3;4)$; б) $(3;4); (-3;-4)$; в) $(0;5); (0;-5)$; г) $(3;4)$; д) інша відповідь.

2.9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1. \end{cases}$$

а) $(1;-1)$; б) $(-1;-1)$; в) $(1;1)$; г) $(-1;1)$; д) інша відповідь.

2.10. Знайти значення виразу $x+y$, де $(x;y)$ – розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ 3x - 2y = -8. \end{cases}$$

а) 5; б) -5; в) -15; г) 0; д) інша відповідь.

2.11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x - y = 19, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

а) $(-5;-1)$; б) $(5;-1)$; в) $(1;5)$; г) $(5;1)$; д) інша відповідь.

2.12. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + \frac{3y}{4} = 7, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

а) (2;4); б) (-4;2); в) (-2;4); г) (2;-2); д) інша відповідь.

2.13. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 2y = -6. \end{cases}$$

а) (0;-3); б) (-3;3); в) (0;3); г) (-3;0); д) інша відповідь.

2.14. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x(y+1) = -4, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

а) (4;-2);(1;5); б) (4;-2);(1;-5); в) (4;2);(1;-5); г) (4;-2); д) інша відповідь.

2.15. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

а) (3;2);(2;3); б) (3;2);(-2;-3); в) (3;2); г) (2;3); д) інша відповідь.

2.16. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

а) (-3;-2); б) (3;2); в) (3;-2); г) (-3;2); д) інша відповідь.

2.17. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 6, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

а) (-1;4); б) (4;-1); в) (-1;-4); г) (4;-4); д) інша відповідь.

2.18. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$$

а) (3;-2); б) (-3;-3); в) (-2;-5); г) (-5;3); д) інша відповідь.

2.19. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4 + 2y = 1, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

а) (1;1,5); б) (1,5;-1,5); в) (-1,5;1); г) (1;-1); д) інша відповідь.

2.20. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$$

а) (5;-1); б) (-5;1); в) (-1;-1); г) (5;-5); д) інша відповідь.

2.21. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11, \\ 2x - 3y = 3. \end{cases}$$

а) (-1;3); б) (3;1); в) (-3;-1); г) (-3;-3); д) інша відповідь.

2.22. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - 3y = 8. \end{cases}$$

а) $(-3;17)$; б) $(-17;3)$; в) $(-17;-3)$; г) $(17;3)$; д) інша відповідь.

2.23. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x + 2y = 36, \\ 4x - y = 14. \end{cases}$$

а) $(-2;4)$; б) $(4;2)$; в) $(4;-0,2)$; г) $(-2;-4)$; д) інша відповідь.

2.24. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + y = 2, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

а) $(5;1)$; б) $(-5;1)$; в) $\left(\frac{1}{5};1\right)$; г) $(1;0,5)$; д) інша відповідь.

2.25. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + y = -7, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

а) $(1;1)$; б) $(2;2)$; в) $(-2;-2)$; г) $(-1;-1)$; д) інша відповідь.

2.26. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0, \\ 4x + y = 2. \end{cases}$$

а) $(-2;1)$; б) $(1;-2)$; в) $(2;-2)$; г) $(1;-2)$; д) інша відповідь.

2.27. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 4y = 3, \\ x^2 - 21y = 28. \end{cases}$$

а) $(7;1); (-1;-7)$; б) $(7;1); \left(-1\frac{3}{4}; -1\frac{3}{16}\right)$; в) $(7;1); \left(-1\frac{3}{4}; 1\frac{3}{16}\right)$; г) $\left(-1\frac{3}{4}; -1\frac{3}{16}\right)$;

д) інша відповідь.

2.28. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 4y = -7, \\ 3x + 7y = 24. \end{cases}$$

а) $(1;3)$; б) $(3;-1)$; в) $(-3;-3)$; г) $(-3;1)$; д) інша відповідь.

2.29. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = -6, \\ 3x - 7y = -5. \end{cases}$$

а) $(-1;4)$; б) $(4;1)$; в) $(-4;1)$; г) $(-4;-1)$; д) інша відповідь.

2.30. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 0,5y = 3,5, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

а) $(2;1,5)$; б) $(1,5;1,5)$; в) $(2;-0,5)$; г) $(1,5;2)$; д) інша відповідь.

2.31. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - y = 2, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

а) $(-3; -1)$; б) $(-1; 3)$; в) $(1; 3)$; г) $(-1; 1)$; д) інша відповідь.

2.32. Знайти значення виразу $x - y$, де $(x; y)$ – розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x - 3y = -2. \end{cases}$$

а) 4; б) -4; в) 0; г) 2; д) інша відповідь.

2.33. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

а) $(0; 2)$; б) $(1; 2)$; в) $(-2; -2)$; г) $(2; 2)$; д) інша відповідь.

2.34. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x - y = 0, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

а) $(1; 4)$; б) $(-4; -1)$; в) $(0; 4)$; г) $(1; 1)$; д) інша відповідь.

2.35. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = -1,5, \\ x - y = 2,5. \end{cases}$$

а) $(2; 5)$; б) $(0,2; 5)$; в) $(0,5; -2)$; г) $(2,5; 2)$; д) інша відповідь.

2.36. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 4, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = -1. \end{cases}$$

а) $(4; 4)$; б) $(4; -6)$; в) $(-6; 4)$; г) $(6; -4)$; д) інша відповідь.

2.37. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1,6y = 1. \end{cases}$$

а) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{16}\right)$; б) $\left(\frac{5}{16}; -\frac{1}{2}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{16}\right)$; д) інша відповідь.

2.38. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 4x + 7y = 1. \end{cases}$$

а) $(2; -1)$; б) $(2; 2)$; в) $(-1; 2)$; г) $(-1; -2)$; д) інша відповідь.

2.39. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x + 3y = 16. \end{cases}$$

а) $(3; 1,5)$; б) $(2; 1,5)$; в) $(-2; 2,5)$; г) $(2,5; 2)$; д) інша відповідь.

2.40. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + y = 17. \end{cases}$$

а) (6;11); б) (-11;6); в) (6;1); г) (1,5;6); д) інша відповідь.

2.41. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x - y = -4, \\ -x + 5y = 9. \end{cases}$$

а) (2;-1); б) (2;2); в) (1;2); г) (-1;2); д) інша відповідь.

2.42. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 4y = 2, \\ x - y = 8. \end{cases}$$

а) (-2;-10); б) (10;2); в) (2;-2); г) (2;10); д) інша відповідь.

2.43. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0, \\ 4x + y = 2. \end{cases}$$

а) (-2;1); б) (-1;2); в) (1;-2); г) (-2;2); д) інша відповідь.

2.44. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 2, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

а) $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$; б) (-1;4); в) (4;-1); г) (4;4); д) інша відповідь.

2.45. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 0,9, \\ 2x + y = 1,4. \end{cases}$$

а) (5;4); б) (-0,4;5); в) (0,5;0,4); г) (0,5;4); д) інша відповідь.

2.46. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 4x + 2y = 10. \end{cases}$$

а) (1;3); б) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; в) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; г) (-3;1); д) інша відповідь.

2.47. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 3x - y = 12. \end{cases}$$

а) (-3;5); б) (5;3); в) $\left(\frac{1}{3}; 5\right)$; г) (-5;-3); д) інша відповідь.

2.48. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x + y = 13. \end{cases}$$

а) (10;3); б) (-3;10); в) (3;10); г) (0,1;10); д) інша відповідь.

2.49. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2. \end{cases}$$

а) (-2;4); б) (-2;-4); в) (4;2); г) (-4;2); д) інша відповідь.

2.50. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 13x - 8y = 28, \\ 11x + 8y = 44. \end{cases}$$

а) $\left(3; \frac{11}{8}\right)$; б) (8;3); в) (11;3); г) (3;8); д) інша відповідь.

3. Задачі на складання рівнянь та систем рівнянь

Приклад 3. А. У двох коробках разом 48 цукерок. У другій коробці було у 3 рази більше цукерок, ніж у першій. Скільки цукерок було у другій коробці?

Розв'язання. Нехай у першій коробці було x цукерок. Тоді у другій коробці було $3x$ цукерок. Разом у двох коробках $(x + 3x)$ цукерок. За умовою задачі складаємо рівняння $x + 3x = 48$,

$$4x = 48,$$

$$x = 12.$$

Отже, у першій коробці 12 цукерок, тоді у другій $3 \cdot 12 = 36$ (ц.)

Відповідь. 36 цукерок.

Приклад 3. Б. У першій бригаді було в 4 рази більше робітників, ніж у другій. Після того, як з першої бригади пішло 10 робітників, а в другу прийшло 8 робітників, то робітників у першій бригаді стало в 2 рази більше, ніж у другій. Скільки робітників було в першій бригаді?

Розв'язання. Нехай у другій бригаді було x робітників. Тоді у першій бригаді було $4x$ робітників. Після того, як з першої бригади пішло 10 робітників у ній стало $4x - 10$ робітників. Коли у другу прийшло 8 робітників, у ній стало $x + 8$ робітників. За умовою задачі складаємо рівняння $4x - 10 = (x + 8) \cdot 2$. Поділимо обидві частини рівняння на 2.

$$2x - 5 = x + 8,$$

$$2x - x = 8 + 5,$$

$$x = 13.$$

Отже, у другій бригаді було 13 робітників, тоді у першій бригаді було $4 \cdot 13 = 52$ (р.)

Відповідь. 52 робітників.

Приклад 3. В. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 35 см^2 .

Розв'язання. Нехай довжина прямокутника x см. Тоді ширина прямокутника y см. Периметр прямокутника становить $(x + y) \cdot 2$, а площа

– $x \cdot y$. За умовою задачі складаємо систему рівнянь $\begin{cases} (x+y) \cdot 2 = 24, \\ x \cdot y = 35. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y=12, \\ x \cdot y=35. \end{cases}$$

З першого рівняння отриманої системи виражаємо: $x=12-y$ і підставимо це значення у друге рівняння: $(12-y) \cdot y = 35$,

$$12y - y^2 = 35,$$

$$-y^2 + 12y - 35 = 0 / \cdot (-1),$$

$$y^2 - 12y + 35 = 0.$$

На основі наслідку з **теорема Вієта** сума коренів отриманого квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, тобто -12 , а добуток – вільному члену, тобто -35 . Коренями квадратного рівняння будуть числа 5 і 7 .

Відповідь. 5 см, 7 см.

Приклад 3.Г. Сума двох чисел 26, а різниця більшого і меншого становить 4. Знайти менше число.

Розв'язання. Нехай більше число – x , тоді менше число – y . Сума двох чисел – $x+y$, а різниця більшого і меншого – $x-y$. За умовою задачі складаємо

систему рівнянь $\begin{cases} x+y=26, \\ x-y=4. \end{cases}$ Скористаємося **способом алгебраїчного**

додавання і до першого рівняння додамо друге

$$+ \begin{cases} x+y=26, \\ x-y=4. \end{cases} \Leftrightarrow 2x=30 \Leftrightarrow x=15.$$

Виразимо з першого рівняння значення $y: y=26-x$. Підставимо значення x в отримане рівняння: $y=26-15 \Rightarrow y=11$. Отже, менше число дорівнює 11.

Відповідь. 11.

Приклад 3.Д. На виготовлення костюму було затрачено 2,8 m^2 тканини. Площі витраченої тканини на піджак, штани і жилетку відносяться як 7:5:2. Скільки тканини було витрачено на штани?

Розв'язання. Нехай коефіцієнт пропорційності k . Тоді на піджак затрачено $7k$ тканини, на штани – $5k$, а на жилетку – $2k$. За умовою задачі складаємо рівняння: $7k + 5k + 2k = 2,8$,

$$14k = 2,8,$$

$$k = 0,2.$$

На штани витрачено $5 \cdot 0,2 = 1 (m^2)$

Відповідь. 1 m^2 .

Приклад 3.Е. Моторний човен пройшов 28 км за течією річки і 16 км проти течії річки, затративши на весь шлях 3 год. Яка

власна швидкість моторного човна, якщо швидкість течії річки 1 км/год?

Розв'язання. Нехай власна швидкість моторного човна – x . Тоді швидкість моторного човна за течією річки – $x+1$, а проти течії річки – $x-1$. На шлях проти течії річки було витрачено – $\frac{28}{x-1}$ год., а за течією річки – $\frac{16}{x+1}$ год. За

умовою задачі складаємо рівняння $\frac{28}{x-1} + \frac{16}{x+1} = 3$,

$$\frac{28(x+1)+16(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 3,$$

$$28x + 28 + 16x - 16 = 3(x^2 - 1),$$

$$3x^2 - 3 - 28x - 28 - 16x + 16 = 0,$$

$$3x^2 - 44x - 15 = 0,$$

$$D = (-44)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 1936 + 180 = 2116 = 46^2.$$

$$x_1 = \frac{44 + 46}{6} = \frac{90}{6} = 15,$$

$$x_2 = \frac{44 - 46}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Значення $x_2 = -\frac{1}{3}$ не задовольняє умову задачі, оскільки швидкість не може бути від'ємною.

Відповідь. 15 км/год.

Приклад 3.Є. Майстер мав виготовляти 72 деталі, а його учень – 64 деталі. Виготовляючи за годину на 4 деталі більше, ніж учень, майстер виконав замовлення на 2 год раніше. Скільки деталей виготовляв за годину майстер, а скільки робітник?

Розв'язання. Вся робота становить 1. Нехай учень мав виготовляти x деталей. Тоді майстер мав виготовляти $x+4$ деталі. Учень виконав всю роботу за $\frac{64}{x}$ год, а майстер за $\frac{72}{x+4}$ год. За умовою задачі складаємо рівняння

$$\frac{64}{x} - \frac{72}{x+4} = 2,$$

$$\frac{64(x+4) - 72 \cdot x}{x(x+4)} = 2,$$

$$\frac{64x + 256 - 72x}{x^2 + 4} = 2,$$

$$-8x + 256 = 2x^2 + 8x,$$

$$2x^2 + 16x - 256 = 0 / \div 2,$$

$$x^2 + 8x - 128 = 0,$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot (-128) = 64 + 512 = 576 = 24^2.$$

$$x_1 = \frac{-8 + 24}{2} = 8;$$

$$x_2 = \frac{-8-24}{2} = -16.$$

Оскільки x_2 – від’ємне, то воно не задовольняє умову задачі. Тому учень виготовляв 8 деталей, а майстер – $8+4=12$ (д.)

Відповідь. 8 дет., 12 дет.

3.1. Батько старший за сина у 5 разів. Скільки років сину, якщо разом їм 36 років?

а) 6 років; б) 4 роки; в) 9 років; г) 5 років; д) інша відповідь.

3.2. Сума двох чисел дорівнює 48. Перше число в 3 рази більше за друге. Знайти друге число.

а) 16; б) 36; в) 12; г) 13; д) інша відповідь.

3.3. Відомо, що різниця двох чисел дорівнює 84 і одне число в 5 разів менше за друге. Знайдіть більше з чисел.

а) 15; б) 35; в) 225; г) 105; д) інша відповідь.

3.4. Периметр прямокутника дорівнює 30 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 56 см^2 .

а) 7 см, 8 см; б) 6 см, 5 см; в) 7 см, 5 см; г) 3 см, 8 см; д) інша відповідь.

3.5. Перше число більше за друге на 5, а їх сума дорівнює 29. Знайти перше число.

а) 15; б) 10; в) 17; г) 12; д) інша відповідь.

3.6. Два комбайни зібрали врожай з поля за 4 дні. За скільки днів зміг би зібрати врожай кожний комбайн, якщо одному з них для виконання всієї роботи потрібно на 6 днів менше, ніж іншому?

а) 12 дн, 18 дн.; б) 10 дн, 16 дн.; в) 14 дн, 20 дн.; г) 8 дн, 12 дн.; д) інша відповідь.

3.7. Периметр прямокутника дорівнює 20 см. Знайти його сторони, якщо відомо, що площа прямокутника дорівнює 24 см^2 .

а) 4 см, 6 см; б) 2 см, 12 см; в) 3 см, 4 см; г) 2 см, 4 см; д) інша відповідь.

3.8. За два дні скошили 301 га пшениці, причому першого дня на 45 га більше, ніж другого. Скільки гектарів скошили першого дня?

а) 173 га; б) 162 га; в) 73 га; г) 57 га; д) інша відповідь.

3.9. Добуток двох послідовних натуральних чисел дорівнює 1056. Знайти ці числа.

а) 23, 33; б) 27, 33; в) 32, 33; г) 17, 33; д) інша відповідь.

3.10. За два місяці витратили 24 т палива, причому за перший місяць витратили на 6 т більше, ніж за другий. Скільки тонн палива витратили за перший місяць?

а) 12 т; б) 15 т; в) 18 т; г) 10 т; д) інша відповідь.

- 3.11.** Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а його площа 36 см². Знайти більшу сторону прямокутника.
а) 5 см; б) 3 см; в) 2 см; г) 9 см; д) інша відповідь.
- 3.12.** Периметр прямокутника дорівнює 22 см, а його площа 24 см². Знайти меншу сторону прямокутника.
а) 8 см; б) 3 см; в) 9 см; г) 7 см; д) інша відповідь.
- 3.13.** Сума двох чисел дорівнює 70, а їх різниця дорівнює 28. Знайти більше з чисел
а) 49; б) 68; в) 21; г) 40; д) інша відповідь.
- 3.14.** У двох пачках разом було 120 зошитів. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій пачці стало в 4 рази менше, ніж у першій. Скільки зошитів було в другій пачці спочатку?
а) 88; б) 34; в) 32; г) 14; д) інша відповідь.
- 3.15.** Пасажирський поїзд проходить за 3 год на 10 км більше, ніж товарний за 4 год. Швидкість товарного поїзда на 20 км/год менша за швидкість пасажирського. Знайти швидкість пасажирського поїзда.
а) 65 км/год; б) 54 км/год; в) 82 км/год; г) 90 км/год; д) інша відповідь.
- 3.16.** Двоє робітників виготовили разом 74 деталі. Перший виготовляв за день на 2 деталі більше, ніж другий і працював 7 днів, а другий – 8 днів. Скільки деталей у день виготовляв другий робітник?
а) 6 д.; б) 4 д.; в) 8 д.; г) 7 д.; д) інша відповідь.
- 3.17.** Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 5, а різниця цих чисел дорівнює 4. Знайти більше число.
а) 3; б) 7; в) 4; г) 8; д) інша відповідь.
- 3.18.** Теплохід, власна швидкість якого 18 км/год, пройшов 50 км за течією річки і 8 км проти течії річки, затративши на весь шлях 3 год. Яка швидкість течії річки?
а) 12 км/год; б) 2 км/год; в) 6 км/год; г) 4 км/год; д) інша відповідь.
- 3.19.** Купили 9 м тканини двох сортів за ціною 12 грн. за метр і 35 грн. за метр. За всю покупку заплатили 258 грн. Скільки метрів тканини кожного сорту купили?
а) 4 м, 5 м; б) 5 м, 6 м; в) 3 м, 5 м; г) 3 м, 4 м; д) інша відповідь.
- 3.20.** У трьох кошиках було 140 грибів. У другому кошику їх було в 2 рази більше, ніж у першому, а в третьому – на 12 більше, у першому. Скільки грибів було у третьому кошику?
а) 76; б) 64; в) 32; г) 44; д) інша відповідь.
- 3.21.** Одне число менше за друге в 4 рази. Знайти більше з чисел, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 15.

а) 12; б) 4; в) 8; г) 6; д) інша відповідь.

3.22. Дві бригади робітників повинні виготовити по 240 деталей. Перша бригада виготовляла в день на 8 деталей більше, ніж друга, тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки деталей виготовила перша бригада?

а) 40 дет.; б) 48 дет.; в) 38 дет.; г) 42 дет.; д) інша відповідь.

3.23. Одне з двох натуральних чисел на 7 менше за інше. Знайти менше число, якщо їх добуток дорівнює 330.

а) 22; б) 25; в) 15; г) 12; д) інша відповідь.

3.24. Дві бригади школярів, працюючи разом, закінчили садити дерева на навчально-дослідній ділянці за 4 дні. Скільки днів витратила б на виконання цієї роботи кожна бригада, якби одна з них могла закінчити садіння дерев на 6 днів швидше, ніж друга?

а) 4 дн., 10 дн.; б) 5 дн., 11 дн.; в) 6 дн., 12 дн.; г) 3 дн., 9 дн.; д) інша відповідь.

3.25. За два місяці витратили 24 т палива, причому за перший місяць витратили на 6 т більше, ніж за другий. Скільки тонн палива витратили за перший місяць?

а) 15 т; б) 12 т; в) 18 т; г) 14 т; д) інша відповідь.

3.26. У трьох коробках 52 цукерки. Їх кількість співвідноситься як 3:4:6. скільки цукерок у першій коробці?

а) 12; б) 16; в) 24; г) 14; д) інша відповідь.

3.27. Токар повинен обробити 120 деталей. Вдосконаливши взірець він став обробляти за годину на 4 деталі більше, тому виконав все завдання на 1 годину раніше встановленого терміну. Скільки деталей за годину став виготовляти токар після того, як вдосконалив взірець?

а) 14 дет.; б) 13 дет.; в) 12 дет.; г) 24 дет.; д) інша відповідь.

3.28. Бригада повинна виконати завдання з виготовлення деталей за 5 днів, а виконала за 4 дні тому що виготовляла за день на 12 деталей більше, ніж намічалось планом. Скільки деталей виготовила бригада?

а) 120 д.; б) 240 д.; в) 140 д.; г) 220 д.; д) інша відповідь.

3.29. Знайти найменше з двох чисел, сума яких дорівнює 17, а сума їх квадратів дорівнює 185.

а) 5; б) 6; в) 4; г) 7; д) інша відповідь.

3.30. Першого дня на базу завезли 6,5 т картоплі. Другого – в 2 рази менше, ніж першого, а третього – на 12, 5 ц більше, ніж першого. Скільки картоплі завезли на базу за три дні?

а) 14,25 т; б) 27,75 т; в) 17,5 т; г) 16,375 т; д) інша відповідь.

3.31. За течією річки катер пройшов за 7 год стільки ж кілометрів, скільки проходить за 8 год проти течії річки. Власна швидкість катера 30 км/год. Знайти швидкість течії річки.

а) 2 км/с; б) 4 км/год; в) 2 м/с; г) 2 км/год; д) інша відповідь.

3.32. Сума двох чисел дорівнює 20, а добуток 75. знайти більше з чисел.

а) 15; б) 25; в) 16; г) 18; д) інша відповідь.

3.33. Двоє робітників разом можуть виконати планове завдання за 12 днів. Якщо половину завдання виконуватиме один робітник, а потім другу половину – другий, та все завдання буде виконано за 25 днів. За скільки днів може виконати завдання кожний робітник?

а) 20 дн., 30 дн.; б) 10 дн., 20 дн.; в) 15 дн., 20 дн.; г) 25 дн., 30 дн.; д) інша відповідь.

3.34. За два дні зорали 80 га поля, причому за перший день зорали на 18 га поля більше, ніж за другий день. Скільки гектарів поля зорали за другий день?

а) 31 га; б) 49 га; в) 19 га; г) 23 га; д) інша відповідь.

3.35. У першому зерносховищі було зерна в 2 рази більше, ніж у другому. З першого зерносховища вивезли 70 т зерна, а з другого – 20 т зерна, після чого зерна в сховищах стало порівну. Скільки зерна було в другому зерносховищі?

а) 60 т; б) 30 т; в) 45 т; г) 50 т; д) інша відповідь.

3.36. Знайти більшу сторону прямокутника, якщо його площа дорівнює 72 м^2 , а периметр дорівнює 36 м.

а) 6 м; б) 12 м; в) 4 м; г) 15 м; д) інша відповідь.

3.37. Одне число в 3 рази більше за інше. Якщо друге число збільшити в 5 разів, то воно стане більше за перше на 7. Знайти суму цих чисел.

а) 16; б) 12; в) 18; г) 14; д) інша відповідь.

3.38. Катер пройшов відстань між двома пристанями за течією річки за 2 год, а зворотній шлях проти течії річки – за 3 год. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки 2 км/год.

а) 12 км/год; б) 10 км/год; в) 5 км/год; г) 9 км/год; д) інша відповідь.

3.39. За 3 год їзди автобусом і 4 год їзди поїздом туристи проїхали 390 км. Знайти швидкість поїзда, якщо вона на 10 км/год більша, ніж швидкість автобуса.

а) 50 км/год; б) 60 км/год; в) 65 км/год; г) 85 км/год; д) інша відповідь.

3.40. У двох контейнерах 135 т зерна. Їх кількість співвідноситься як 2:7. Скільки зерна у другому контейнері?

а) 30 т; б) 35 т; в) 105 т; г) 75 т; д) інша відповідь.

3.41. Одне з чисел менше за друге на 8, а їх середнє арифметичне дорівнює 21. Знайти перше число.

а) 7; б) 17; в) 12; г) 11; д) інша відповідь.

3.42. Розкласти число 10 на добуток двох чисел так, щоб їх добуток дорівнював 16. Знайти результат ділення більшого з цих чисел на менше.

- а) 4; б) 5; в) 6; г) 2; д) інша відповідь.
- 3.43.** Шнурок завдовжки 135 м розрізали на дві частини так, що одна з них довша за іншу у 2 рази. Знайти довжину довшої частини.
а) 45 м; б) 90 м; в) 85 м; г) 55 м; д) інша відповідь.
- 3.44.** Пішохід вийшов з пункту А в пункт В зі швидкістю 5 км/год. Якщо би він рухався зі швидкістю на 1 км/год більшою, то прийшов би в пункт В на 1 год раніше. Яку відстань пройшов пішохід?
а) 30 км; б) 40 км; в) 35 км; г) 25 км; д) інша відповідь.
- 3.45.** Добуток двох додатніх чисел дорівнює 96. одне з них на 4 більше, ніж друге. Знайти більше число.
а) 10; б) 8; в) 6; г) 12; д) інша відповідь.
- 3.46.** Половину шляху мотоцикліст їхав з наміченою швидкістю 45 км/год, а потім затримався на 10 хв, тому щоб наздогнати втрачений час він збільшив швидкість на 15 км/год. Яку відстань пройшов мотоцикліст?
а) 70 км; б) 80 км; в) 95 км; г) 60 км; д) інша відповідь.
- 3.47.** Бригада повинна виготовити 360 деталей. Виготовляючи за день на 4 деталі більше, ніж за планом, бригада виконала завдання на 1 день раніше. Скільки деталей за день повинна була виготовляти бригада?
а) 40 дет.; б) 30 дет.; в) 36 дет.; г) 29 дет.; д) інша відповідь.
- 3.48.** Сторони прямокутника співвідносяться як 3:5. Знайти більшу сторону прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48.
а) 9; б) 6; в) 14; г) 15; д) інша відповідь.
- 3.49.** За 4 олівці і 3 зошити заплатили 70 к., а за 2 олівці і один зошит – 28 к. Скільки коштує один зошит?
а) 7 к.; б) 14 к.; в) 28 к.; г) 24 к.; д) інша відповідь.
- 3.50.** У трьох корзинах 54 кг яблук. У першій корзині на 12 кг яблук менше, ніж у другій, а в третій – в 2 рази більше, ніж у першій. Скільки кілограмів яблук у третій корзині?
а) 10,5 кг; б) 21 кг; в) 22,5 кг; г) 22 кг; д) інша відповідь.

4. Зразок контрольної роботи з теми: “Рівняння та системи алгебраїчних рівнянь”

1. Розв’язати рівняння

$$12\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6}\right) = 12\left(\frac{5x}{12} - 1\right).$$

Розв’язання. У даному рівнянні розкриємо дужки і зведемо подібні доданки

$$8 + 3x + 2(1-x) = 5x - 12,$$

$$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12,$$

$$3x - 2x - 5x = -12 - 2 - 8,$$

$$\begin{aligned} -4x &= 22, \\ x &= 5,5. \end{aligned}$$

Відповідь. 5,5.

2. Розв'язати систему рівнянь способом підстановки

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо з першого рівняння значення x : $x = 5 + y$ і підставимо це значення у друге рівняння: $2(5 + y) + 3y = 5$,

$$\begin{aligned} 10 + 2y + 3y &= 5, \\ 5y &= 5 - 10, \\ 5y &= -5, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Підставимо отримане значення у перше рівняння: $x = 5 - 1 = 4$.

Відповідь. (4; -1).

3. Розв'язати систему рівнянь способом алгебраїчного додавання

$$\begin{cases} 5x - 6y = 2, \\ 3x - 2y = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Домножимо друге рівняння на (-3) і отримаємо рівносильні рівняння:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 2, \\ -9x + 6y = 6. \end{cases}$$

Додамо перше і друге рівняння: $5x - 9x - 6y + 6y = 2 + 6$. Зведемо подібні доданки і отримаємо $-4x = 8$, $x = -2$.

Підставимо дане значення змінної у перше рівняння: $5(-2) - 6y = 2$,

$$\begin{aligned} -10 - 6y &= 2, \\ -10 - 2 &= 6y, \\ -12 &= 6y, \\ y &= -2. \end{aligned}$$

Відповідь. (-2; -2).

4. Розв'язати задачу

Турист проплив за течією річки на плоті 12 км і повернувся назад на човні, швидкість якого в стоячій воді становить 5 км/год. Знайти швидкість течії річки, якщо відомо, що на всю подорож турист витратив 10 год.

Розв'язання. Нехай швидкість течії річки – x . Тоді швидкість човна проти течії річки – $5 - x$. На подорож проти течії річки турист витратив – $\frac{12}{5 - x}$ год, а на подорож за течією річки – $\frac{12}{x}$ год. За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{5 - x} = 10.$$

Зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{12(5-x)+12x}{x(5-x)} = 10 \Leftrightarrow 12(5-x)+12 = 10x(5-x) \wedge x \neq 0, x \neq 5.$$

Розкриємо дужки: $70 - 12x + 12 = 50x - 10x^2$.

Зведемо подібні доданки $50x - 10x^2 - 60 = 0 \quad / \div (-10)$ і отримаємо квадратне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Розв'яжемо дане квадратне рівняння:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1.$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Обидва розв'язки задовольняють умову задачі.

Відповідь. 3 км/год, 2 км/год.

Відповіді

1.

1.2. $-\frac{1}{3}$. **1.6.** $-3; 0$; **7.** **1.8.** $-\frac{3}{7}$. **1.10.** $\frac{11}{2}$. **1.13.** $6\frac{1}{2}$. **1.15.** $3\frac{1}{2}$. **1.19.** 17 . **1.22.** 3 .
1.23. 2 . **1.27.** -2 . **1.30.** $\frac{1}{2}$. **1.33.** 2 . **1.36.** 3 . **1.39.** $-\frac{2}{9}; 1$. **1.42.** $-1; 6$. **1.44.** 7 .
1.47. $-1; 13$. **1.49.** $-4\frac{2}{3}; 1$.

2.

2.2. $(-4; 3)$. **2.5.** $(2; 3)$. **2.7.** $(2; 2); (-2; -2)$. **2.10.** -5 . **2.13.** $(0; 3)$. **2.16.** $(3; -2)$.
2.19. $(1; 1; 5)$. **2.22.** $(17; 3)$. **2.25.** $(-1; -1)$. **2.28.** $(1; 3)$. **2.31.** $(1; 3)$. **2.32.** 0 .
2.35. $(0, 5; -2)$. **2.39.** $(2, 5; 2)$. **2.42.** $(10; 2)$. **2.45.** $(0, 5; 0, 4)$. **2.48.** $(10; 3)$. **2.49.** $(-2; -4)$.

3.

3.1. 6 років. **3.4.** 7 см. **3.7.** 4 см, 6 см. **3.9.** 32, 33. **3.10.** 15 т. **3.13.** 49. **3.16.** 4 д.
3.18. 2 км/год. **3.21.** 6. **3.24.** 6 дн., 12 дн. **3.27.** 24 дет. **3.30.** 17,5 т.
3.33. 20 дн. **3.34.** 31 га. **3.37.** 14. **3.39.** 60 км/год. **3.43.** 90 м.
3.44. 30 км. **3.48.** 15.

Список рекомендованої літератури

1. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса / В.И. Жохов, Ю.Н.Макарычев, Н.Г. Миндюк. – М.: Просвещение, 1991. – 144 с.
2. Збірник задач з математики для вступників до вузів: Навч. посібник / Під ред. М.І.Сканаві. – К., 2000. – 527 с.
3. Збірник тестових завдань з математики / Під ред. О.Р.Никифорчина. – Івано-Франківськ, Плай. – 2005. – 189 с.
4. Курс математики: Навч. посібник / В.Н.Боровик, Л.М.Вивальнюк, М.М.Мурач, О.І.Соколенко. – К.: Вища шк., 1995. – 392 с.
5. Математика. Довідковий повторювальний курс: Навч. посібник / За ред. М.Й.Ядренка. – К.: Вища шк., 1992. – 495 с.
6. Математика: Справ. материалы / В.А.Гусев, А.Г.Мордкович. – М.: Просвещение, 1988. – 416 с.
7. Сборник задач по математике: Пособие для педучилищ А.М.Пышкало, Л.П.Стойлова, Н.Н.Лаврова, Н.П.Ирошников. – М.: Просвещение, 1979. – 208 с.
8. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я.Симонов, Д.С.Бакаев, А.Г.Эпельман и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.