Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Педагогічний інститут
Кафедра математичних і природничих дисциплін початкової освіти

Подільність цілих невід’ємних чисел

(Методичні рекомендації для студентів спеціальності “Початкове навчання”)

Івано-Франківськ – 2010

УДК 378.14:510.8
ББК 22.128
Р – 64

Романишин Р.Я. Подільність цілих невід'ємних чисел (Методичні рекомендації для студентів спеціальності "Початкове навчання") / Івано-Франківськ: Видавництво "Горицвіт". – 2009. – 32 с.

Рецензенти:
Козак М.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих і математичних дисциплін початкового навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка;
Мариновська О.Я. – завідувач кафедри менеджменту та освітніх інновацій Івано-Франківського обласного ІППО, кандидат педагогічних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника
(*протокол № 4 від 20.01.10 р.*)

Передмова

Запропонований збірник розроблений для студентів другого курсу спеціальності “Початкове навчання” і передбачає методичну допомогу при розв’язанні задач тестового характеру з теми “Подільність цілих невід’ємних чисел” відповідно до діючих програмами з математики.

Методичні рекомендації містять достатній за обсягом теоретичний матеріал, який дозволяє студенту за умови правильного його застосування досягти поставленої мети – розв’язати запропоновані завдання. Особливу цінність вони складатимуть для студентів екстернатної та заочної форми навчання.

Значна кількість запропонованих розв’язків завдань дозволять студентам самостійно працювати, використовуючи запропоновані методичні рекомендації для самостійної роботи. Наявність вказаних в кінці методичних рекомендацій відповідей до завдань сприяє самоконтролю студентів під час вивчення теми “Подільність цілих невід’ємних чисел”.

Представлені у збірнику розв’язки прикладів ілюструють різні підходи до вирішення математичних задач а також правильного їх оформлення. Запропоновані завдання для самостійної роботи мають засвідчити не тільки про вміння студентів користуватися необхідним теоретичним матеріалом і використовувати отримані знання для розв’язку конкретних завдань, але й працювати з тестами.

До кожного завдання подано п’ять варіантів відповідей (а, б, в, г, та “інша відповідь”) і тільки одна з них є правильною. Якщо перші чотири відповіді на думку студенти не є правильними, то слід вибрати варіант “інша відповідь”.

Наявні в методичних рекомендаціях вибіркові відповіді дозволяють студентам самостійно підготуватися до контрольних робіт.

У збірнику представлені такі теми:

1. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел

На множині цілих невід'ємних чисел дії додавання і віднімання виконуються завжди, тобто завжди в результаті виконання цих дій отримуємо ціле невід'ємне число. Проте дії віднімання і ділення є частковими операціями на цій множині.

Якщо для виконання дії віднімання $(a - b)$ слід застосувати просту ознаку $(a \geq b)$, то для дії ділення такої очевидної ознаки не існує.

Пошуки таких ознак почалися ще в древні часи до нашої ери. Важливе місце у розкритті властивостей чисел належить Піфагору та його послідовникам. Дослідження у цій галузі привели не тільки до відкриття ряду ознак, а й до встановлення важливих властивостей чисел, пов'язаних з розглядом спеціального відношення, яке називається *відношенням подільності.*

Про довільні цілі невід'ємні числа a і b кажуть, що a знаходиться у відношенні подільності з b або що *a ділиться на b* (позначається $a \vdots b$), якщо існує ціле невід'ємне число x таке, що $a = b \cdot x$:

$$\forall a, b \in N_0 : a \vdots b \Leftrightarrow \exists x \in N_0 : a = b \cdot x.$$

З означення відношення подільності випливають наступні **властивості**.

1. Нуль ділиться на будь-яке ціле невід'ємне число:

$$\forall a, b \in N_0 : 0 \vdots a.$$

2. Будь-яке ціле невід'ємне число ділиться на одиницю:

$$\forall a, b \in N_0 : a \vdots 1.$$

Теорема. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел:

1) рефлексивне: $\forall a \in N_0 : a \vdots a$;
2) антисиметричне: $\forall a, b \in N_0 : (a \vdots b) \wedge (b \vdots a) \Rightarrow (a = b)$;
3) транзитивне: $\forall a, b, c \in N_0 : (a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c)$;
4) незв'язне.

З теореми випливає такий **наслідок**.

Наслідок. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням нестрогого порядку.

Особливе місце у теорії подільності цілих невід'ємних чисел займають числа 0 і 1. Нуль ділиться на довільне ціле невід'ємне число, а тому висловлення "$0 \vdots 0$" – істинне. З другого боку, якщо $a \vdots 0$, то за означенням подільності $a = 0 \cdot x$, що можливо лише тоді, коли $a = 0$. Отже, на нуль з цілих невід'ємних чисел ділиться лише 0. А тому іноді відношення подільності $a \vdots b$ розглядається лише тоді, коли b є натуральним числом. У цьому випадку замість терміна "a ділиться на b" користуються термінами "*a кратне b*", "*b є дільником a*" або "*a ділиться націло на b*".

Зауваження. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел слід відрізняти від операції ділення у цій множині: пару чисел, яка належить цьому відношенню, не можна ототожнювати з результатом операції ділення, що ставиться їй у відповідність.

2. Подільність суми, різниці і добутку

Відношення подільності цілих невід'ємних чисел розглядається з операціями додавання віднімання і множення. Про це свідчать наступні теореми.

Теорема (подільність суми).

Якщо кожен із доданків ділиться на задане число, то й сума ділиться на це число.

Доведення.

Доведення теореми проведемо для випадку двох доданків. Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що $a_1 \vdots b$ і $a_2 \vdots b$. Звідси за означенням подільності

$$a_1 = b \cdot x_1,\ a_2 = b \cdot x_2, \qquad x_1, x_2 \in N_0.$$

Додамо одержані рівності почленно:

$$a_1 + a_2 = b \cdot x_1 + b \cdot x_2.$$

На основі дистрибутивності множення відносно додавання

$$a_1 + a_2 = b \cdot (x_1 + x_2).$$

Число $x = x_1 + x_2$ є цілим невід'ємним числом як сума цілих невід'ємних чисел. Отже, $a_1 + a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$. Тому за означенням подільності $(a_1 + a_2) ⋮ b$.■

Аналогічно доводиться така теорема.

Теорема (подільність різниці).

Якщо зменшуване і від'ємник діляться на дане число, то й різниця ділиться на це число.

Вираз, у якому є тільки операції додавання і віднімання, називається *алгебраїчною сумою,* а його компоненти – *доданками.*

Із розглянутих теорем одержуємо **наслідок**.

Наслідок. Якщо алгебраїчна сума кількох чисел і кожний її доданок, за винятком одного, діляться на задане число, то й цей доданок ділиться на задане число.

Теорема (подільність добутку).

Якщо у добутку кількох чисел хоч один із множників ділиться на задане число, то й добуток ділиться на це число.

Доведення.

Доведення проведемо для випадку двох множників. Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що, наприклад, $a_1 ⋮ b$. З того, що $a_1 ⋮ b$, за означенням подільності випливає

$$a_1 = b \cdot x_1,\ x_1 \in N_0.$$

Тоді $a_1 \cdot a_2 = (b \cdot x_1) \cdot a_2 = b \cdot (x_1 \cdot a_2)$.

Але $x = x_1 \cdot a_2$ є цілим невід'ємним числом як добуток цілих невід'ємних чисел. Тому $a_1 \cdot a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$.

Отже, за означенням подільності $a_1 \cdot a_2 ⋮ b$.■

З властивостей відношення подільності та теореми одержуємо **наслідок**.

Наслідок. Якщо число ділиться на добуток кількох чисел, то воно ділиться на кожний множник.

3. Ознаки подільності

У багатьох випадках процес ділення одного числа на інше досить трудомісткий. З'ясування істинності висловлення " $a \vdots b$" при діленні чисел a і b не завжди просте. У зв'язку з цим виникає задача пошуку одержання відповіді без виконання безпосереднього ділення.

Ознакою подільності одного натурального числа на інше називається необхідна і достатня умова, при виконанні якої одне число ділиться на інше, причому перевірка умови виконується легше, ніж безпосереднє ділення.

Ряд ознак подільності натуральних чисел одержують із загальної ознаки подільності Паскаля.

Теорема (загальна ознака подільності Паскаля).

Для того щоб натуральне число $a = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0}_g$, записане у позиційній системі числення з основою g, ділилося на натуральне число b, необхідно і достатньо, щоб на b ділилася сума

$$r = a_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \ldots + a_n \cdot r_n,$$

де $r_1, r_2, \ldots r_n$ – остачі від ділення $g, g^2, \ldots, g^n$ на число b.

Користуючись теоремою, можна встановлювати ознаку подільності на довільне задане натуральне число у позиційній системі числення з будь-якою основою. Найбільш вживаними є ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11 і 25 у десятковій системі числення, деякі з них відомі ще з середньої школи.

• Для того щоб число **ділилося на 2**, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі ділилося на 2.

• Для того щоб число **ділилося на 5**, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі була 0 або 5.

• Для того щоб число **ділилося на 3, або 9**, необхідно і достатньо, щоб на 3, або 9 ділилася сума цифр даного числа ($a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$).

• Для того щоб число **ділилося на 4**, необхідно і достатньо, щоб число $a_0 + 2\, a_1$ ділилося на 4.

• Для того щоб число **ділилося на 11**, необхідно і достатньо, щоб на 11 ділилася різниця

$$(a_0 + a_2 + a_4 + ...) – (a_1 + a_3 + a_5 + ...).$$

• Для того щоб число **ділилося на 25**, необхідно і достатньо, щоб на 25 ділилися дві останні цифри числа.

На основі теореми Паскаля можна сформулювати і деякі ознаки подільності.

Загальна ознаки подільності чисел на 7, 11, 13.

Якщо різниця, одержана від віднімання числа вираженого трьома його останніми цифрами і всіма іншими (або навпаки) ділиться на 7, або на 11, або 13, то і саме число ділиться на 7, 11, 13.

• Для того щоб число **ділилося на 50**, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00, або 50.

• Для того щоб число **ділилося на 100**, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00.

• Для того щоб число **ділилося на 8, 125, 250**, необхідно і достатньо, щоб на ці числа воно ділилося число, записане трьома останніми цифрами цього числа.

• Для того щоб число **ділилося на 6**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 2 і на 3 одночасно.

• Для того щоб число **ділилося на 12**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 3 і на 4 одночасно.

• Для того щоб число **ділилося на 15**, необхідно і достатньо щоб це число ділилось на 3 і на 5 одночасно.

4. Прості і складені числа. Решето Ератосфена

Для довільного цілого невід’ємного числа a і натурального числа b, якщо a ділиться на b, то число b називається дільником числа a.

Натуральне число, яке більше за одиницю називається *простим*, якщо воно має своїми дільниками тільки одиницю і саме себе.

Натуральне число, яке більше за одиницю називається *складеним*, якщо воно має не менше трьох дільників.

Отже, числа 2, 3, 5, 7 – прості числа першого десятка, 11, 13, 17, 19 – прості числа другого десятка а числа 4, 6, 8, 9, 10, 12 складені.

Натуральні числа a_1, a_2, ..., a_n називаються *взаємно простими*, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці. Якщо кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа a_1, a_2, ..., a_n називають *попарно взаємно простими.*

Прості числа мають такі **властивості.**

• Якщо просте число ділиться на натуральне число більше одиниці, то ці числа рівні.

• Добуток кількох натуральних множників ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли хоча б один них ділиться на просте число.

• Кожне натуральне число, яке більше за одиницю, має хоча б один простий дільник.

• Найменший, відмінний від одиниці, дільник натурального числа є числом простим.

• Множина простих чисел нескінченна. **(Теорема Евкліда).**

• Якщо натуральне число a, більше одиниці, не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують a, то число a просте.

• Найменший простий дільник натурального числа не перевищує кореня квадратного з даного числа.

Для вивчення розподілу простих чисел у натуральному ряді та інших задач теорії чисел потрібно знати всі прості числа, які не перевищують заданого натурального числа. Для розв’язання цієї задачі є спеціальний метод, який називається *решетом Ератосфена.*

Суть методу *решета Ератосфена* полягає у тому, що:

1. Виписують всі натуральні числа від 2 до n:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., n. \qquad (1)$$

2. Число 2 ділиться тільки на 1 і саме на себе, отже, воно є простим. Викреслюють у ряді (1) усі числа, кратні двом, крім самого числа 2.

3. Перше, наступне за 2, невикреслене число буде 3. Воно не ділиться на 2 (інакше його б викреслили). Отже, 3 ділиться тільки на 1 і саме на себе, а тому також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 3, крім самого числа 3.

4. Перше, наступне за 3, невикреслене число буде 5. Воно не ділиться ні на 2, ні на 3. Отже, 5 ділиться тільки на 1 і саме на себе, тому воно також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 5, крім самого числа 5 і т. д.

Процес буде закінчено, коли одержимо просте число p таке, що $p^2 \leq n$, але для першого, наступного за p, невикресленого простого числа p_1 $p_1^2 > n$. Усі невикреслені числа від 2 до n будуть простими.

Наприклад, щоб скласти таблицю простих чисел, які не перевищують 1000, викреслювання потрібно закінчити при $p = 31$, бо $31^2 = 961 < 1000$. Для наступного за 31 числа, тобто для числа 32, маємо $32^2 = 1024 > 1000$, а тому й поготів для наступного за 31 простого числа будемо мати таку ж нерівність.

Зауваження.

1. Щоб викреслити всі складені числа, кратні простому числу p, не потрібно знати ознаки подільності на p. Для цього досить у ряді (1) викреслити кожне p-те число після числа p, враховуючи й ті, які вже раніше були викреслені.

2. Викреслювання чисел, кратних простому числу p, слід починати з p, тому що всі складені числа між p і p^2 уже викреслені як кратні простим числам, меншим від p.

5. Спільне кратне, найменше спільне кратне кількох натуральних чисел

Нехай a_1, a_2, a_3, ..., a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, яке ділиться на кожне із заданих чисел, називається їх *спільним кратним*, а найменше із спільних кратних – їх *найменшим спільним кратним* і позначається НСК (a_1, a_2, a_3, ..., a_n).

Множина спільних кратних для натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n нескінченна. Це випливає з того, що за теоремою про подільність добутку число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ є спільним кратним заданих чисел, а тому і кожне число виду

$$(a_1,\ a_2, a_3, ..., a_n) \cdot k, \text{ де } k \in N,$$

також буде їх спільним кратним. За принципом найменшого числа у множині спільних кратних існує найменше число – це і є найменше спільне кратне заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n їх найменше спільне кратне існує і причому єдине.

Найменше спільне кратне має такі **властивості**:

1. Для довільних натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n існує єдине НСК.

2. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то НСК $(a, b) \geq a$).

3. Кожне спільне кратне даних чисел ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

4. Якщо $a \,⋮\, b$, то НСК $(a, b) = a$.

6. Спільний дільник, найбільший спільний дільник кількох натуральних чисел

Нехай a_1, a_2, ..., a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, на яке ділиться кожне із заданих чисел, називається їх *спільним дільником,* а найбільший із спільних дільників – їх *найбільшим спільним дільником* і позначається НСД $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Множина спільних дільників декількох натуральних чисел є непорожньою і скінченною. Це випливає з того, що число 1 є спільним дільником довільних натуральних чисел, а дільник числа не перевищує саме число. Тоді за принципом найбільшого числа у множині спільних дільників заданих чисел існує найбільше число, яке і буде найбільшим спільним дільником заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел a_1, a_2, ..., a_n їх найбільший спільний дільник завжди існує і причому єдиний.

Найбільший спільний дільник має такі **властивості:**

1. Для довільних натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n існує єдине НСД.

2. Найбільший спільний дільник чисел a і b не перевищує меншого за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то НСД $(a, b) \leq a$).

3. Найбільший спільний дільник даних чисел ділиться на будь-який спільний дільник.

4. Якщо $a \,⋮\, b$, то НСД $(a, b) = b$.

7. Властивості найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел

Між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох натуральних чисел існує зв'язок, який виражається такою теоремою.

Теорема. Для довільних натуральних чисел a і b їх найменше спільне кратне дорівнює добутку даних чисел, поділеному на їх найбільший спільний дільник:

$$\forall a, b \in N: \ НСК\ (a, b) = \frac{ab}{НСД\ (a, b)}.$$

З доведеної теореми одержуємо наслідок.

Наслідок. Для того щоб найменше спільне кратне двох чисел дорівнювало їх добутку, необхідно і достатньо, щоб ці числа були взаємно простими.

Теорема не може бути застосована більше, ніж до двох чисел, бо, наприклад, НСК (2, 4, 6) = 12, тоді як за теоремою

$$\text{НСК}(2, 4, 6) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2} = 24.$$

Теорема. Спільний дільник двох натуральних чисел можна виносити за знак їхнього найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного:

$$\forall a, b, c \in N: \text{НСД}\ (a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot \text{НСД}\ (a, b);$$

$$\forall a, b, c \in N: \text{НСК}\ (a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot \text{НСК}\ (a, b).$$

Теорема полегшує знаходження найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника двох чисел. Наприклад:

$$\text{НСК}\ (45, 60) = 15 \cdot \text{НСК}\ (3, 4) = 15 \cdot 3 \cdot 4 = 180;$$

$$\text{НСД}\ (45, 60) = 15 \cdot \text{НСД}\ (3, 4) = 15.$$

Теорему також можна узагальнити на довільну скінчену сукупність натуральних чисел.

8. Теореми про подільність пов'язані з взаємно простими числами

З поняттям про взаємно прості числа пов'язані дві важливі **теореми про подільність.**

► Для довільних натурального числа a і простого числа p має місце одне і тільки одне з відношень: або a ділиться на p, або вони взаємно прості.

► Якщо добуток двох натуральних чисел ділиться на третє натуральне число, яке взаємно просте з одним із множників, то другий множник ділиться на це число:

$$\forall a, b, c \in N : a, b \,⋮\, c \ \wedge \text{НСД}\,(a, b) = 1 \Rightarrow a \,⋮\, c\,.$$

► Якщо натуральне число ділиться на кожне з двох взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їх добуток:

$$\forall a, b, c \in N : (a \,⋮\, b) \wedge (a \,⋮\, c) \wedge \text{НСД}\,(b, c) = 1 \Rightarrow a \,⋮\, b \cdot c\,.$$

З даної теореми випливає **наслідок**.

► Для того щоб натуральне число ділилося на добуток двох взаємно простих чисел, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на кожен із множників.

Одержаний наслідок дає можливість встановлювати ознаки подільності на натуральні числа, які можна подати у вигляді добутку двох взаємно простих чисел. Відзначимо також, що цей наслідок можна застосувати і до множників числа, подільність на яке встановлюється.

9. Основна теорема арифметики і канонічний розклад натурального числа

З простих чисел будується кожне натуральне число, яке більше за одиницю. Це випливає з теореми, яку в математиці називають *основною теоремою арифметики.*

► Кожне натуральне число, більше одиниці, є або простим, або розкладається у добуток простих множників, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку слідування множників.

Якщо для складеного натурального числа знайдено його зображення у вигляді добутку простих множників, і у ньому рівні прості множники записано у вигляді степенів простих множників, а самі прості множники розміщені у порядку зростання, то такий запис складеного числа у вигляді добутку простих множників називається *канонічним розкладом натурального числа*

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ де $p_1, p_2, ..., p_n$ – різні прості дільники числа a і $p_1 < p_2 < ... < p_n$.

Якщо натуральне число *a* є простим, то сам його запис і є канонічним розкладом числа *a*.

Кажуть, що просте число *p входить у канонічний розклад числа* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, якщо воно дорівнює одному з чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

На основі поняття канонічного розкладу з основної теореми арифметики одержуємо **наслідок**.

► Канонічний розклад складеного числа єдиний.

Щоб знайти канонічний розклад складеного числа, з'ясовують його подільність на прості числа у порядку зростання. При цьому користуються відомими ознаками подільності на прості числа.

10. Знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного кількох чисел за їх канонічними розкладами

При розгляді кількох натуральних чисел можна вважати, що їх канонічні розклади містять степені одних і тих же простих множників, при цьому показники степенів у деяких з них можуть бути рівні нулю, бо за означенням нульового показника степеня $\boldsymbol{x^0 = 1}$ для довільного числа $x \neq 0$.

За допомогою канонічного розкладу натуральних чисел можна встановити вигляд їх дільників.

Теорема. Якщо натуральне число *a* має канонічний розклад

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

то натуральне число *b* є його дільником тоді і тільки тоді, коли воно має канонічний розклад

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \text{ і } 0 \le \beta_1 \le \alpha_1,$$
$$0 \le \beta_2 \le a_2, \ldots, 0 \le \beta_n \le a.$$

З теореми випливають **наслідки**.

► Натуральне число ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли дане просте число входить до його канонічного розкладу.

► Два натуральних числа взаємно прості тоді і тільки тоді, коли їх канонічні розклади не мають спільних простих дільників.

► Якщо кожне з двох даних натуральних чисел взаємно просте з третім натуральним числом, то і їх добуток взаємно простий з даним числом.

Теорема також дає можливість за канонічними розкладами кількох натуральних чисел знайти їх найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне.

► Якщо число *a* можна представити у канонічному записі $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то число дільників числа *a* визначиться за формулою:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1).$$

► Канонічний розклад найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел містить ті ж прості множники, що й канонічні розклади цих чисел, але взяті з найменшими показниками степенів.

► Канонічний розклад найменшого спільного кратного кількох натуральних чисел містить ті ж прості множники, що й канонічні розклади даних чисел, але взяті з найбільшими показниками степенів.

11. Алгоритм Евкліда

Знаходження НСД і НСК двох чисел не завжди дають можливість їх обчислювати, оскільки є дуже трудомісткими. Для розв'язання цієї задачі є метод, який називається *послідовним діленням*, або *алгоритмом Евкліда*, описаний Евклідом у VII книзі "Начала". Теоретичною основою його є теорема про ділення з остачею і така теорема.

► Якщо довільні натуральні числа a, b, g і r, пов'язані співвідношенням $a = b \cdot g + r$, то множина спільних дільників чисел a і b дорівнює множині спільних дільників чисел b і r, тобто

НСД (a, b) = НСД (g, r).

Алгоритм Евкліда полягає у тому, що:

1. Число a ділиться на число b з остачею r_1

$$a = b \cdot g_1 + r_1, \quad r_1 < b .$$

Якщо $r_1 = 0$, то b = НСД (a, b).

2. Якщо $r_1 > 0$, то число b ділять на число r з остачею:

$$b = r_1 \cdot g_2 + r_2, \quad r_2 < r_1.$$

Якщо $r_2 = 0$, то r_1 = НСД (b, r_1) = НСД (a, b).

3. Якщо $r_2 > 0$, то число r_1 ділять на число r_2 з остачею:

$$r_1 \Rightarrow r_2 \cdot g_3 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

Якщо $r_3 = 0$, то

$$r_2 = \text{НСД}(r_1, r_2) = \text{НСД}(b, r_1) = \text{НСД}(a, b).$$

4. Якщо $r_3 > 0$, то повторюють ділення аналогічно пункту 3, поки не отримають остачу, рівну нулю.

5. Остання, відмінна від нуля, остача буде найбільшим спільним дільником чисел a і b. Процес ділення в алгоритмі Евкліда скінченний, бо остачі, які є цілими невід’ємними числами, на кожному кроці зменшуються, залишаючись меншими від b, а таких чисел не більше як b.

ВПРАВИ

Приклад 1.А. Знайти розкладом на прості множники НСД і НСК чисел 6160 і 1560.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники

$$\begin{array}{r|l} 6160 & 2 \\ 3080 & 2 \\ 1540 & 2 \\ 770 & 2 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1560 & 2 \\ 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$6160 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$1660 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

Отже, НСД (6160, 1560) = $2^3 \cdot 5 = 40$,
НСК (6160, 1560) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 240240$.

***Відповідь*:** НСД (6160, 1560) = 40, НСК (6160, 1560) = 240240.

Приклад 1.Б. Знайти розкладом на прості множники НСД і НСК чисел 27720, 207900 і 12600.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & 2 \\ 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 207900 & 2 \\ 103950 & 2 \\ 51975 & 3 \\ 17325 & 3 \\ 5775 & 3 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12600 & 2 \\ 6300 & 2 \\ 3150 & 2 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$207900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

НСД (27720, 207900, 12600) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ =

НСД (27720, 207900, 12600) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

1260. = 415800.

Відповідь: НСД (27720, 207900, 12600) = 1260, НСК (27720, 207900, 12600) = 415800.

Приклад 1.В. Знайти НСД і НСК чисел 2970 і 1980 за алгоритмом Евкліда та залежністю між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел.

Розв'язання. Знайдемо НСД (2970, 1980). Поділимо більше число на менше.

$$\begin{array}{rrl} - & 2970 & \underline{|\,1980} \\ & \underline{1980} & \;\;1 \\ -\,1980 & \underline{|\,\mathbf{990}} & \\ \underline{1980} & \;\;2 & \\ 0 & & \end{array}$$

НСД (2970, 1980) = 990.

НСК (2970, 1980) = $\dfrac{2970\cdot1980}{990}=5940$.

Відповідь: НСД (2970, 1980) = 990, НСК (2970, 1980) = 5940.

Приклад 1.Г. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД і НСК чисел 2911 і 1763.

Розв'язання. Знайдемо НСД (2911, 1763). Для цього більше з даних чисел, тобто 2911 ділимо на менше – 1763. Якщо залишиться остача, то менше число ділимо на остачу, потім першу остачу ділимо на другу і т. д., доки не одержимо остачу 0. Остання не рівна нулю остача і буде шуканим найбільшим спільним дільником даних чисел.

$$\begin{array}{l} -\,2911\ \underline{|\,1763} \\ \;\;\underline{1763}\ \ 1 \\ -\,1763\ \underline{|\,1148} \\ \;\;\underline{1148}\ \ 1 \\ -\,1148\ \underline{|\,615} \\ \;\;\underline{615}\ \ 1 \\ -\,615\ \underline{|\,533} \\ \;\;\underline{533}\ \ 1 \\ -\,533\ \underline{|\,82} \\ \;\;\underline{492}\ \ 6 \\ -\,82\ \underline{|\,\mathbf{41}} \\ \;\;\underline{82}\ \ 2 \end{array}$$

0

Отже, НСД (2911, 1763) = 41.

На основі формули, яка виражає залежність між НСД, НСК і добутком двох чисел НСК (a, b) = $\dfrac{a \cdot b}{НСД\ (a, b)}$,

НСК (2911, 1763) = $\dfrac{2911 \cdot 1763}{41} = 125173$.

Відповідь**:** НСД (2911, 1763) = 41, НСК (2911, 1763) = 125173.

ТЕСТИ

1.1. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 3960 і 3024.
а) 166 г) 164
б) 360 д) інша відповідь.
в) 630

1.2. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 132300 і 11760.
а) 4320 г) 2940
б) 5630 д) інша відповідь.
в) 2850

1.3. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 6160 і 1560.
а) 120 г) 98
б) 86 д) інша відповідь.
в) 40

1.4. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 80, 64 і 96.
а) 16 г) 20
б) 18 д) інша відповідь.
в) 24

1.5. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 12870 і 7650.
а) 180 г) 120
б) 270 д) інша відповідь.
в) 90

1.6. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2550 і 1320.
а) 60 г) 30
б) 240 д) інша відповідь.
в) 280

1.7. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 2970 і 660.

а) 2345 г) 4563
б) 6789 д) інша відповідь.
в) 5940

1.8. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 48510, 2940 і 1650.

а) 30 г) 125
б) 145 д) інша відповідь.
в) 56

1.9. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2911 і 1763.

а) 64 г) 32
б) 214 д) інша відповідь.
в) 41

1.10. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 2310, 780 і 50050.

а) 300300 г) 567320
б) 300455 д) інша відповідь.
в) 456320

1.11. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 1980, 702 і 936.

а) 450 г) 210
б) 18 д) інша відповідь.
в) 128

1.12. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 315315, 42900 і 6930.

а) 6750 г) 165
б) 345 д) інша відповідь.
в) 450

1.13. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 132300 і 11760.

а) 923400 г) 54870
б) 345600 д) інша відповідь.
в) 529200

1.14. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 77000, 12740 і 296450.

а) 700 г) 70
б) 370 д) інша відповідь.
в) 348

1.15. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 7800 і 193050.

а) 2345 г) 4530
б) 1950 д) інша відповідь.
в) 4562

1.16. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 609840 і 4200.
а) 564 г) 840
б) 360 д) інша відповідь.
в) 340

1.17. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 8820 і 29400.
а) 2940 г) 450
б) 2730 д) інша відповідь.
в) 1250

1.18. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 4200 і 11088.
а) 277200 г) 76540
б) 34578 д) інша відповідь.
в) 45320

1.19. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 363000 і 21780.
а) 4560 г) 2540
б) 7260 д) інша відповідь.
в) 5620

1.20. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 87750 і 51480.
а) 456784 г) 78542
б) 76540 д) інша відповідь.
в) 3861000

1.21. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 163350, 7644 і 528.
а) 6 г) 789
б) 56 д) інша відповідь.
в) 128

1.22. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 3960 і 3024.
а) 166320 г) 12360
б) 320160 д) інша відповідь.
в) 345230

1.23. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 5390, 21780 і 1650.
а) 780 г) 34
б) 342 д) інша відповідь.
в) 110

1.24. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 86625 і 10890.
а) 345 г) 495

б) 342 д) інша відповідь.
в) 542

1.25. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 211750 і 2940.
а) 70 г) 56
б) 346 д) інша відповідь.
в) 560

1.26. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 225225 і 38610.
а) 4562 г) 6435
б) 784 д) інша відповідь.
в)350

1.27. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 92400 і 16380.
а) 456000 г) 567890
б) 3603600 д) інша відповідь.
в) 456700

1.28. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 24750 і 7800.
а) 450 г) 452
б) 150 д) інша відповідь.
в) 670

1.29. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 4840 і 1100.
а) 24200 г) 2354
б) 34500 д) інша відповідь.
в) 4530

1.30. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 2970 і 3300.
а) 56 г) 46
б) 330 д) інша відповідь.
в) 280

Приклад 2.А. Встановити чи числа 153623 і 150623 ділиться на 11.

Розв'язання. Число 153623 не ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – – (2 + 3 + 1) = 8, а 8 не ділиться на 11.

Число 150623 ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – (2 + 0 + 1) = 11, і 11 ділиться на 11.

Відповідь. 153623 не ділитися на 11, 150623 ⋮ 11.

Приклад 2.Б. Визначити чи число 368 312 ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Число, записане трьома останніми цифрами

$$Q = 312.$$

Тоді число, виражене цифрами, що залишилися

$$P = 368.$$

Вказана різниця запишеться:

$$P - Q = 368 - 312 = 56.$$

Відповідь. Отже, 56 ділиться на 7 і не ділиться на 11 і 13.

Приклад 2.В. Визначити чи число 378 456 ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Число, записане трьома останніми цифрами

$$Q = 456.$$

Тоді число, виражене цифрами, що залишилися

$$P = 378.$$

Вказана різниця запишеться:

$$Q - P = 456 - 378 = 78.$$

Відповідь. Оскільки 78 ділиться на 13, то і 378 456 ділиться на 13 і не ділиться на 7 і 11.

Приклад 2.Г. Встановити, простим чи складеним є число 967.

Роз'язання. Для того, щоб встановити простим чи складеним є число 967, потрібно перевірити, чи є його дільниками всі прості числа від 2 до 31, бо $31^2 = 961 < 967$, а $32^2 = 1024 > 967$.

За ознаками подільності встановлюємо, що число 967 не ділиться на прості числа 2, 3, 5 і 11. Безпосередньо перевіряємо, що це число не ділиться на прості числа 7, 13, 17, 19, 23, 29 і 31.

Отже, число 967 не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують числа 967, а тому воно буде простим.

Відповідь. Число 967 – просте.

Приклад 2.Д. Встановити ознаку подільності на 110.

Роз'язання. Число 110 = 2 · 55, де числа 2 і 55 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 55\,.$$

Число 55 = 5 · 11, де числа 5 і 11 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 55 \Leftrightarrow a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

На основі попередніх узагальнень одержимо

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

Отже, число ділиться на 110 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на числа 2, 5 і 11.

За цією ознакою число 2640 ділиться на 110, бо остання цифра цього число ділиться як на 2, так і на 5 і виконується наступна умова

$(6 + 0) – (4 + 2) = 0 \vdots 11.$

Приклад 2.Е. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК (a, b) = 180, НСД (a, b) = 6.

Розв'язаня. Розкладемо НСК і НСД на множники.

НСК $(a, b) = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ і НСД $(a, b) = 6 = 2 \cdot 3$. Відповідно у записі чисел a і b буде присутній НСД цих чисел, тобто – 6. Отже,

$$\begin{cases} a = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60, \\ b = 6 \cdot 3 = 18. \end{cases} \text{, або } \begin{cases} a = 6 \cdot 2 = 12\,, \\ b = 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90. \end{cases}$$

Відповідь. 60 і 18, або 12 і 90.

Приклад 2.Є. Знайти число дільників числа 504.

Розв'язання. Оскільки канонічним розкладом числа $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, то число всіх дільників цього числа дорівнює $\tau\,(504) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$

Відповідь. 24 дільники.

Приклад 2.Ж. Скоротити дріб $\frac{21120}{30720}$.

Розв'язаня. Представимо чисельник і знаменник дробу у вигляді їх канонічного розкладу.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники

$$\begin{array}{r|l} 211220 & 2 \\ 10560 & 2 \\ 5280 & 2 \\ 2640 & 2 \\ 1320 & 2 \\ 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$21120 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$

$$\begin{array}{r|l} 30720 & 2 \\ 15360 & 2 \\ 7680 & 2 \\ 3840 & 2 \\ 1920 & 2 \\ 960 & 2 \\ 480 & 2 \\ 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$30720 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5.$

Тепер даний дріб можна записати у вигляді $\frac{21120}{30720} = \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5}$. Здійснивши скорочення у чисельнику і знаменнику дробу отримаємо:

$\frac{21120}{30720} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}$.

Відповідь. $\frac{11}{16}$.

Приклад 2.З. Довести подільність при кожному натуральному *n*:
$6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1} \vdots 11.$

Розв'язання. Позначимо вираз $6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1}$ через $f(n)$. Доведемо подільність $f(n) \vdots 11$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$

отримаємо: $f(1) = 6^{2 \cdot 1+1} + 20 \cdot 3^{1+1} = 6^3 + 20 \cdot 3^2 = 216 + 180 = 396$. Оскільки $(3 + 9) - 9 = 0 \vdots 11$, то і $396 \vdots 11$.

2. Припустимо, що $f(k) = 6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1} \vdots 11$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k + 1) = (6^{2k+3} + 20 \cdot 3^{k+2}) \vdots 11$.

Тоді $f(k + 1) = 6^{2k+1+2} + 20 \cdot 3^{k+1+1} = 6^2 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$
$$= 36 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1}.$$

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення.

• Якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться. •

$$f(k + 1) = 36 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$$
$$= 36 \cdot 6^{2k+1} + \underbrace{36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} - 36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}}_{\text{ДОДАМО І ВІДНІМЕМО ОДИН І ТОЙ САМИЙ ВИРАЗ}} + 3 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} =$$

• Згрупуємо два перші доданки. •

$$= 36\,(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1}) - 36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$$
$$= 36\,\underbrace{(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1})}_{\text{ДІЛИТЬСЯ НА 11 ЗА ПРИПУЩЕННЯМ П.2.}} - \underbrace{36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}}_{= 33 \cdot 20 \cdot 3^{K+1}} =$$
$$= 36\,(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1}) - 33 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}.$$

Як бачимо, у зменшуваному алгебраїчний вираз, що міститься у дужках ділиться на 11 за п.2., а у від'ємнику $33 \vdots 11$. Оскільки різниця ділиться на число, тоді коли зменшуване і від'ємник ділиться на число, то доходимо висновку, що $f(k + 1) \vdots 11$.

Відповідь. Отже, $6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1} \vdots 11$.

Приклад 2.К. Довести подільність при кожному натуральному n:

$4^n + 15n - 1 \vdots 9$.

Розв'язання. Позначимо вираз $4^n + 15n - 1 = f(n)$. Доведемо подільність $f(n) \vdots 9$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$

отримаємо: $f(1) = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$, $18 \vdots 9$.

2. Припустимо, що $f(k) = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k+1) = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 \,\vdots\, 9$.

Тоді $f(k+1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14$.

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення.

• Вираз $15k$ представимо у вигляді $4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k = 15k$. •

• Якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться. •

$$f(k+1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 =$$

$$= 4 \cdot 4^k + \underbrace{4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k}_{15k} - \underbrace{4 + 4}_{0} + 14 =$$

• Перегрупуємо доданки. •

$$= (4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 4) - 3 \cdot 15k + 4 + 14 =$$

•З дужок винесемо 4 за дужки, а вираз $3 \cdot 15k = 3 \cdot 3 \cdot 5k = 9 \cdot 5k$ •

$$= 4\underbrace{(4^k + 15k - 1)}_{\text{ДІЛИТЬСЯ НА 9 ЗА П. 2.}} - \underbrace{9 \cdot 5k}_{\vdots 9} + \underbrace{18}_{\vdots 9}.$$

Оскільки всі доданки діляться на 9, то і сам вираз ділиться на 9.

Відповідь. Отже, $4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9$.

ВПРАВИ

2.1. Знайти канонічний розклад таких чисел:
а) 714285;
б) 131952.

2.2. Не виконуючи додавання встановити, чи діляться наступні суми на 3:
а) 126 + 285;
б) 741 + 231;
в) 162 + 112.

2.3. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться встановити, чи різниця чисел 23544 – 17028 кратна числам 4, 8, 9.

2.4. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 1980 на 165.

2.5. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 6732 на 66.

2.6. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться число 2912 на 26.

2.7. Не виконуючи ділення встановити чи ділиться 1265 на 45.

2.8. Які з наступних висловлень істинні:
а) якщо число ділиться на 7 і на 5, то воно ділиться на 35;
б) якщо число ділиться на 10 і на 15, то воно ділиться на 150;
в) якщо число ділиться на 4 і на 8, то воно ділиться на 32;
г) якщо число не ділиться на 3 або на 5, то воно не ділиться на 15;
д) якщо число не ділиться на 15, то воно не ділиться ні на 3, ні на 5;
е) якщо число не ділиться на 24, то воно або не ділиться на 12, або не ділиться на 8.

2.9. Скільки дільників має число 720.

2.10. НСК двох чисел 420, а одне з чисел дорівнює 60. Знайти друге число, якщо НСД дорівнює 10.

2.11. Одне з чисел 576, НСД цих чисел дорівнює 192, а НСК – 2880. Знайти друге число.

2.12. НСД двох чисел – 27, а їх НСК – 324. Знайти числа a і b, якщо $\frac{3}{4}a = b$.

2.13. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 210 і 77, а їх сума дорівнює НСК чисел 168 і 224. Знайти ці числа.

2.14. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 913 і 781, а різниця цих чисел дорівнює НСК чисел 175 і 126. Знайти ці числа.

2.15. Знайти канонічний розклад числа 10800 і число всіх дільників цього числа.

2.16. Скоротити дріб $\frac{15120}{340200}$.

2.17. Дані дроби звести до спільного знаменника $\frac{7}{192}$ і $\frac{187}{1620}$.

2.18. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 5$, НСК $(a, b) = 105$.

2.19. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.

2.20. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 75$, $a \cdot b = 375$.

2.21. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 915$, НСД $(a, b) = 3$.

2.22. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 7$, $a \cdot b = 1470$.

2.23. Довести, що при будь-якому n число $n^2\,(n^2 - 1)$ ділиться на 4.

2.24. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 30$, $a + b = 150$.

2.25. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 10$, $a \cdot b = 20$.

2.26. Знайти a і b, якщо відомо, що $a : b = 11 : 13$, НСД $(a, b) = 5$.

2.27. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 5$, НСК $(a, b) = 165$.

2.28. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.

2.29. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 75$, $a \cdot b = 375$.

2.30. Знайти a і b, якщо відомо, що $a : b = 7 : 8$, НСК $(a, b) = 224$.

2.31. Скільки дільників має число 192.

2.32. Скільки дільників має число 810.

2.33. Скільки дільників має число 650.

2.34. Дані дроби звести до спільного знаменника $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1234}{30720}$.

2.35. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 817 і 1691.

2.36. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 391 і 667.

2.37. Три пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший пароплав приходить з рейсу через кожні 6 днів, другий – за 5 днів, третій – 10 днів. Через скільки найближчих днів зустрінуться в порту перший пароплав з другим, перший з третім, другий з третім. Всі три пароплави разом, якщо вони вийшли з порту одночасно?

2.38. Довести подільність при кожному натуральному n:
$7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ на 17.

2.39. Довести подільність при кожному натуральному n:
$9^n - 8n - 1$ на 16.

2.40. Довести подільність при кожному натуральному n:
$n^7 - n$ ділиться на 7.

2.41. Довести подільність при кожному натуральному n:
$n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

2.42. Довести подільність при кожному натуральному n:
$6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ділиться на 43.

2.43. Довести подільність при кожному натуральному n:
$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на133.

2.44. Довести подільність при кожному натуральному n:
$3^{2n+1} + 40n - 67$ ділиться на 64.

ВІДПОВІДІ

1.

1.2. 2940. **1.4.** 16. **1.6.** 30. **1.7.** 5940.
1.9. 41. **1.12.** 165. **1.13.** 529200. **1.15.** 1950.
1.16. 840. **1.19.** 7260. **1.21.** 6. **1.23.** 110.
1.26. 6435. **1.29.** 24200.

2.

2.4. Так.

Вказівка: використати властивість подільності на добуток множників.

2.8. 30.

2.10. 70.

2.12. 81 і 108.

2.16. $\frac{2}{45}$.

2.17. $\frac{945}{25920}$ і $\frac{2992}{25920}$.

2.18. 15 і 35.

2.19. 14 і 21.

2.20. 15 і 25.

2.24. 30 і 120, або 60 і 90.

2.34. $\frac{1776}{337920}$ і $\frac{13574}{337920}$.

2.37. Всі пароплави зустрінуться через 30 днів.

ТАБЛИЦЯ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ПЕРШОЇ ТИСЯЧІ

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	703	853	997

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і теорія чисел / [С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Г. І. Хацет]. – Ч. 1. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1974. – 464 с.

2. Андронов И. К. Арифметика: развитие понятия числа и действий над числами : пособ. для фак-тов нач. школы педагог. ин-тов и педагог. училищ / И. К. Андронов. – Изд. 2-е испр. и доп. – М. : Учпедгиз, 1962. – 374 с.

3. Бородін О. І. Теорія чисел / О. І. Бородін. – Вид. 3-тє. – К. : Вища шк., 1970. – 275с.

4. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости / Н. Н. Воробьёв. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – 95 с.

5. Гребенча М. К. Арифметика : пособ. для учительських ин-тов / М. К. Гребенча, С. Е. Ляпин. – М. : Учпедгиз, 1952. – 280 с.

6. Задачник-практикум по математике / [Н. Я. Виленкин, Н. Н. Ларова и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 205 с.

7. Збірник задач з арифметики для педагогічних училищ / [В. А. Ігнатьев, М. І. Ігнатьєв, О. Я. Шор]. – Вид. 3-тє. – К. : Рад. шк., 1964. – 263 с.

8. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики / Л. А. Калужнин. – М. : Наука, 1969. – 31 с.

9. Кужель О. В. Розвиток поняття про число: ознаки подільності: досконалі числа : посіб. для учнів фізико-математ. шкіл / О. В. Кужель. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1974. – 80 с. 10. Курс математики : навчальний посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. – К. : Вища шк. – 1995. – 392 с.

11. Кухар В. М. Математика: множини: логіка: цілі числа : практикум / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1989. – 333 с.

12. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики : навч. посіб. для педагог. училищ / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – Вид. 2-ге, – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1987. – 319 с.

13. Лаврова Н. Н. Задачник-практикум по математике : учеб. пособие для студентов-заочн. I-III курсов фак-тов педагогики и методики начальн. обуч. педагог. ин-тов / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 183 с.

14. Математика : навч. посібник / [Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим]. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.

15. Математика : посібник для педінститутів / [В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. Н. Костарчук та ін.]. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1980. – 400 с.

16. Математика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2121 “Педагогика и методика начального обучения” / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало и др. – М. : Просвещение, 1977. – 352 с.

17. Пономарёв С. А. Задачник-практикум по арифметике : пособие для фак-та начальных классов педагог. ин-тов / С. А. Пономарёв. – Изд. 2-е., доп. – М. : Просвещение, 1966. – 223 с.

18. Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар : [пер. с нем. А. А. Карацубы]. – М. : Мир, 1967. – 511 с.

19. Сборник задач по математике : пособие для педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова и др. – М. : Просвещение, 1979. – 208 с.

20. Стойлова Л. П. Основи начального курса математики : учеб. пособие для учащихся педагог. училищ по специальности № 2001 "Преподавание в начальных классах общеобразоват. шк." / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1988. – 320 с.

21. Стойлова Л. П., Виленкин Н. Я. Целые неотрицательные числа / Л. П. Стойлова, Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1986. – 79 с.

22. Теоретические основы начального курса математики : учеб. пособие для учащихся школьных отделений педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова др. – М. : Просвещение, 1974. – 368 с.

23. Фридман Л. М. Арифметика : пособие для студент.-заочн. фак-тов учителей начальных классов педагог. ин-тов / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение. – 166 с.