О. Я. Довгий

Курс вищої математики для студентів спеціальності “Географія”

УДК 512.643+514
ББК 22.11
Д – 58

Довгий О.Я. Курс вищої математики для студентів спеціальності „Географія”: Навчально-методичний посібник / Івано-Франківськ, 2008. – 96 с.

Посібник в повному обсязі містить матеріал з курсів аналітичної геометрії та вищої алгебри відповідно до робочої програми з навчального предмету “Вища математика” для спеціальності 6.070501 – географія заочної форми навчання. Стисло та доступно для самостійного засвоєння курсу в логічній послідовності, розглянуто основні теоретичні положення та наведено зразки розв’язання задач. Подаються варіанти завдань для самостійного розв’язання студентами

Р е ц е н з е н т и :
Собкович Р.І. – доцент кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
Гургула С.І. – доцент кафедри вищої математики Івано-Франківського Національного технічного університету нафти і газу

Рекомендовано до друку Вченою радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, протокол № 5 від 16.03.06 р.

ISBN 966 – 640 – 171 – 1

- ✓ **Мета даного курсу** – ознайомити студентів з основними поняттями і методами вищої математики, необхідними для вивчення курсу фізики та математичних методів географії та спеціальних дисциплін, що використовують математичні методи, а також підготувати студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів у галузі географії
- ✓ **Студент повинен знати** основні теоретичні положення, навчитися використовувати їх при розв'язанні задач та виробити навики користування літературою. А також він повинен уміти знаходити віддаль між точками на площині і в просторі; записувати рівняння прямих на площині і в просторі, та площини в просторі; знаходити віддаль від точки до прямої на площині і в просторі; обчислювати визначники; розв’язувати системи лінійних рівнянь; виконувати дії над векторами.

I. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1. Координати та їх використання

1.1.1. Системи прямокутних і полярних координат на площині

Спосіб визначення положення точок чи інших об'єктів на площині і в просторі за допомогою чисел називають **методом координат**.

Візьмемо на площині дві взаємно перпендикулярні осі (напрямні прямі) Ox і Oy, які перетинаються в точці O (рис. 1.1). Задамо на цих осях масштаб (одиничний відрізок $e = OE$), тобто отримаємо дві координатні осі, які взаємно перпендикулярні. Точка O ділить обидві осі на від'ємну і додатню півосі. Ці осі утворюють **прямокутну систему координат *Oxy***. Вісь Ox називається віссю **абсцис**, вісь Oy – віссю **ординат**. Нехай A – довільна точка на площині. Спроектувавши її на осі Ox та Oy, отримаємо точки K і L відповідно. Довжини відрізків OK і OL, взяті зі знаком „+” або „–”, в залежності від того, чи точки K і L знаходяться на додатній чи від'ємній півосях, називаються абсцисою і ординатою точки A.

Абсциса та ордината точки A називаються координатами цієї точки на площині. Кожній точці на площині відповідає пара дійсних чисел і навпаки, тобто існує *бієктивна* (*взаємно однозначна*) *відповідність*. Множина впорядкованих пар чисел в обраній системі координат називається **двовимірним простором** і позначається $\mathbf{R_2}$.

Введені на площині координати x і y називаються ***декартовими*** в честь французького математика Рене Декарта.

При паралельному зсуві осей, коли положення початку нової системи координат в точці $O'(x_0, y_0)$ старої системи координат, а напрям осей залишається такий самий (рис 1.2), зв'язок між координатами виглядає так:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0. \tag{1.1}$$

Звідси маємо: $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$.

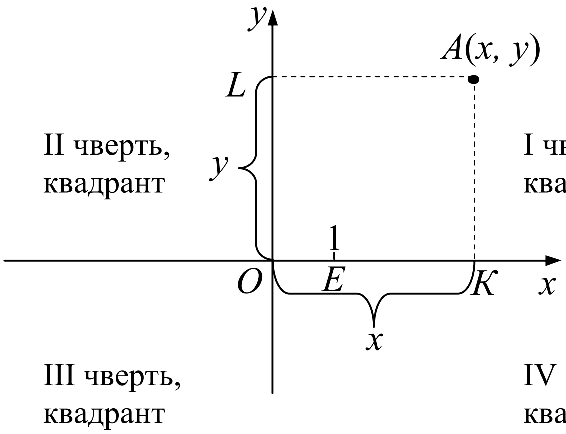


Рис. 1.1

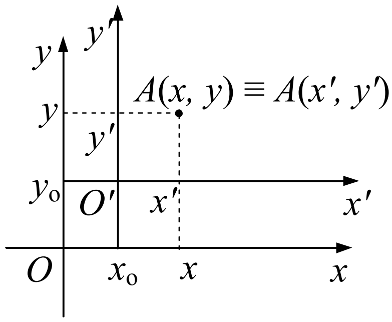


Рис. 1.2

П р и к л а д 1.1. Рівняння прямої l у старій системі Oxy координат має вигляд $y=kx+b$. Знайти рівняння прямої в новій системі координат $O'x'y'$, яка утворена паралельним зсувом осей старої системи координат, так, що положення початку нової системи координат знаходиться в точці $O'(x_0, y_0)$ старої системи координат. Числа k, b, x_0, y_0 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $k=3$, $b=7$, $x_0=4$, $y_0=7$. Отже l: $y=3x+7$, $O'(4, 7)$.

Використавши зв'язок між координатами, записаний формулами (1.1), отримаємо: $x=x'+4$, $y=y'+7$. Підставимо ці вирази в рівняння прямої l і отримаємо: $y'+7=3(x'+4)+7$. $\Rightarrow$ $y'=3x'+12$ – рівняння прямої l в системі координат $O'x'y'$.

Відповідь: $y'=3x'+12$.

Розглянемо так звану полярну систему координат, яку часто використовують під час пояснення багатьох фізичних явищ. Виберемо на площині довільну точку O, назвемо її **полюсом** і проведемо промінь OP, який називається **полярною віссю**, задамо масштабну одиницю довжини $e = OE$. Положення будь-якої точки M на площині визначимо так. Сполучимо відрізком прямої полюс з точкою M. Довжину відрізка OM позначимо через ρ. Цей відрізок називається **полярним радіусом** точки M; задамо на ньому напрям від O до M. Отримаємо вісь OM. Таким чином, маємо дві осі: перша — полярна вісь, а друга — вісь OM. Величину кута POM (з урахуванням того, що додатний напрям повороту проти годинникової стрілки) позначимо через φ (у градусах або радіанах) і назвемо його **полярним кутом** точки M (рис. 1.3).

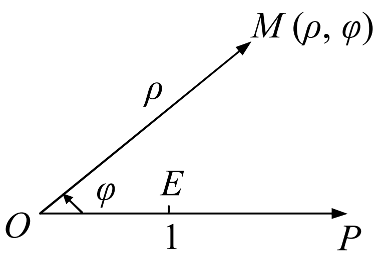


Рис. 1.3

Полярними координатами точки M називається впорядкована пара чисел (ρ, φ), де ρ — довжина полярного радіуса; φ — величина полярного кута точки M. Для полюса $\rho = 0$, а φ має довільне значення. Те, що числа ρ і φ — координати точки M, записують так: $M(\rho, \varphi)$.

Полярні координати ρ і φ однозначно визначають положення точки на площині. Обернене твердження неправильне, оскільки кожній точці координатної площини відповідає одне й те саме ρ і нескінченна множина полярних кутів, які можуть відрізнятись один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

Для того щоб отримати взаємно однозначну відповідність, на полярний кут φ накладають обмеження: $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$.

Ці значення називаються **головними значеннями полярного кута.**

Знайдемо залежність між полярними і прямокутними декартовими координатами точки M. Сумістимо прямокутну систему координат Oxy з полярною так, щоб початок координат збігався з полюсом, а полярна вісь — з додатною піввіссю абсцис (рис. 1.4).

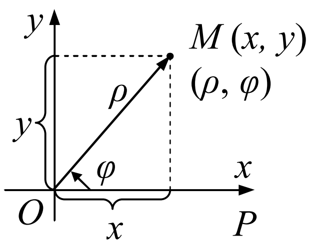


Рис. 1.4

Нехай точка M у декартовій системі визначається координатами (x, y), а в полярній — координатами (ρ, φ). Використовуючи означення тригонометричних функцій, знаходимо

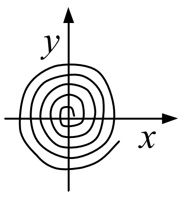
$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi. \qquad (1.2)$$

Ці формули виражають декартові координати точки через полярні. Розв'язуючи систему (1.2) відносно ρ і φ за умови, що $\rho \ge 0$ і $0 \le \varphi < 2\pi$, маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (1.3)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } \ y \ge 0; \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } \ y < 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Формули (1.2) – (1.4) встановлюють взаємно однозначну відповідність між прямокутними і полярними координатами точок площини.



На підставі цих залежностей можна скласти рівняння кривої в полярних координатах, якщо відомим є рівняння в декартових координатах і навпаки. Деякі криві зручніше подавати рівняннями в полярних координатах. Наприклад, спіраль Архімеда (рис. зліва), яка має вигляд пружини в годиннику, чи доріжки на грамофонній платівці, визначається рівнянням $\rho = a\varphi$.

П р и к л а д 1 . 2 . Точка M у прямокутній декартовій системі координат визначається координатами (x_1, y_1). Які координати цієї точки в полярній системі координат. Числа x_1, y_1 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: x_1=4, y_1=7. Отже M(4, 7).

Використавши формули (1.3), (1.4), отримаємо:

$$\rho = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \text{ (од.)}, \ \varphi = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \approx \arccos 0{,}496 \approx 60^\circ.$$

Відповідь: $M\left(\sqrt{65}, \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)\right)$.

П р и к л а д 1 . 3 . Точка M у полярній системі координат визначається координатами (ρ, φ). Знайти координати цієї точки в прямокутній декартовій системі координат. Числа ρ, φ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: ρ=5, $\varphi = 60^\circ$. Отже $M(5,\ 60^\circ)$.

Використавши формули (1.2), отримаємо:

$$x = 5\cos 60^\circ = 5/2 = 2{,}5; \quad y = 5\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}/2.$$

Відповідь: $M(5/2, 5\sqrt{3}/2)$.

1.1.2. Віддаль між двома точками. Поділ відрізка в даному відношенні.

Нехай задано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 1.5)

$$M_1K = |x_2 - x_1|, \quad M_2K = |y_2 - y_1|$$

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.5}$$

– формула віддалі між точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

П р и к л а д 1 . 4 . Яка віддаль між точками $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Числа x_1, y_1, x_2, y_2 подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: x_1=1, y_1= –2, x_2=3, y_2=4. Отже M_1(1, -2) і M_2(3, 4).

Використавши формулу (1.5), отримаємо:

$$M_1M_2 = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10} \text{ (од.)}.$$

Відповідь: $2\sqrt{10}$ (од.).

Нехай відрізок M_1M_2 ділиться точкою M в відношенні λ (рис. 1.6), тобто $\lambda = M_1M / M\,M_2$.

Нехай задано λ, треба знайти координати точки $M(x, y)$.

З рис. 1.6 і з теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

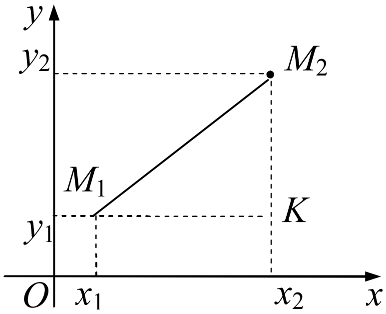


Рис. 1.5

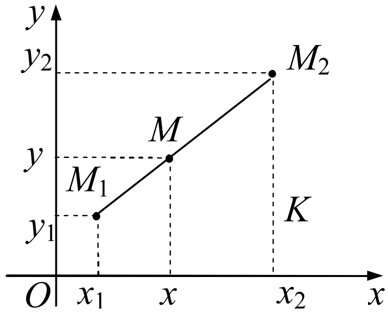


Рис. 1.6

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda.$$

Оскільки числа $x-x_1$ і x_2-x одного й того знаку, то $\dfrac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.\quad \text{Аналогічно}\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.5. Які координати точки М, яка ділить відрізок з кінцями в точках $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ у відношенні λ. Числа x_1, y_1, x_2, y_2, λ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=-3$, $y_1=0$, $x_2=5$, $y_2=-4$, $\lambda=3$. Отже $M_1(-3, 0)$ і $M_2(5, -4)$.

Використавши формулу (1.6), отримаємо:

$$x=\frac{-3+3\cdot 5}{1+3}=3;\;\; y=\frac{0+3\cdot(-4)}{1+3}=-3.$$

Відповідь: $M(3, -3)$.

Наслідок. Якщо точка $M(x, y)$ — середина відрізка M_1M_2, то $\lambda=1$ і формули (1.6) набувають вигляду:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1.7}$$

1.1.3. Площа трикутника (метод трапецій).

Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ (рис. 1.7).

Знайдемо площу цього трикутника. З рисунка видно, що площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\Delta ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}$. У правій частині формули розміщені площі відповідних трапецій, які знаходяться за формулами:

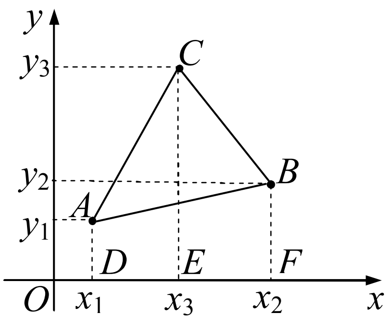


Рис. 1.7

$$S_{ADEC}=DE\frac{AD+CE}{2}=\frac{(x_3-x_1)(y_3+y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF}=EF\frac{EC+BF}{2}=\frac{(x_2-x_3)(y_2+y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD}=DF\frac{AD+BF}{2}=\frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2}.$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, отримаємо:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

Отже $$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|. \tag{1.8}$$

Приклад 1.6. Яка площа трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=4$, $y_1=7$, $x_2=0$, $y_2=1$, $x_3=5$, $y_3=1$. Отже $M_1(4, 7)$, $M_2(0, 1)$ і $M_3(5, 1)$.

Використавши формулу (1.8), отримаємо:

$$S=\frac{1}{2}\left|(0-4)(1-7)-(5-4)(1-7)\right|=\frac{1}{2}\left|24+6\right|=15(\text{од.}^2).$$ Відповідь: 15 (од.^{2}).

Приклад 1.7. Яка довжина сторін трикутника і які координати точки перетину його медіан, якщо координати його вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=-2$, $y_1=1$, $x_2=3$, $y_2=4$, $x_3=6$, $y_3=-5$.

Отже, $A(-2,1)$, $B(3,4)$, $C(6,-5)$.

Використавши формулу (1.5), отримаємо:

$$AB=\sqrt{(3-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}(\text{од.});$$

$$AC=\sqrt{(6-(-2))^2+(-5-1)^2}=\sqrt{64+36}=10(\text{од.});$$

$$BC=\sqrt{(6-3)^2+(-5-4)^2}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}(\text{од.}).$$

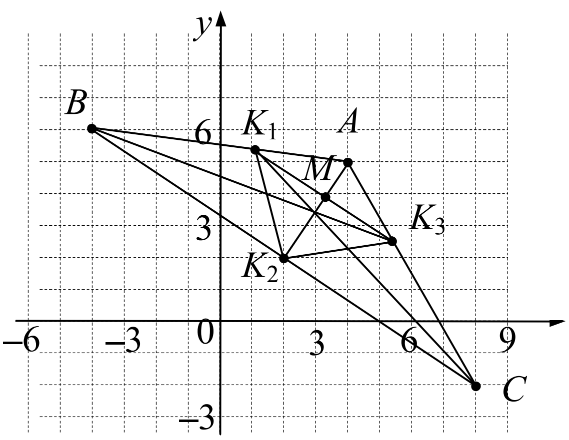
Медіана трикутника – це відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони. Медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Використавши формули (1.7) для знаходження координати точки *M*, яка є серединою сторони *AC*, отримаємо $M(2,-2)$.

Поділимо відрізок *BM* у відношенні 2:1 і отримаємо точку *O*, яка є точкою перетину медіан. При цьому, використавши формули (1.6) при $\lambda=2$, отримаємо такі координати точки *O*:

$$x=\frac{3+2\cdot 2}{1+2}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3};\ y=\frac{4+2\cdot(-2)}{1+2}=0.\ \text{Отже}\ O(2\frac{1}{3},\,0).$$

Відповідь: $\sqrt{34}$ од., 10 од., $3\sqrt{10}$ од., $O(2\frac{1}{3},\,0)$.



Приклад 1.8. Яка площа трикутника, вершини якого розташовані в точках перетину бісектрис трикутника *ABC* з його сторонами. Координати вершин трикутника *ABC*: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=4$, $y_1=5$, $x_2=-4$, $y_2=6$, $x_3=8$, $y_3=-2$. Отже $A(4,5)$, $B(-4,6)$, $C(8,-2)$ (рис. зліва).

Знайдемо спочатку вершини $\Delta K_1K_2K_3$.

Оскільки бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам, то потрібно знайти відношення довжин прилеглих сторін, попередньо знайшовши їх довжини. $AB=\sqrt{(-4-4)^2(6-5)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$ (од.);

$AC=\sqrt{(8-4)^2(-2-5)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$ (од.); $BC=\sqrt{(8+4)^2(-2-6)^2}=\sqrt{144+64}=\sqrt{208}$ (од.).

Беручи до уваги, що $AK_1:K_1B=AC:BC$, тобто $\lambda_1=\sqrt{\frac{65}{208}}$, то за формулами (1.6),

отримаємо: $K_1\left(\frac{4+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot(-4)}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}},\frac{5+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot 6}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)$. Аналогічно: $K_2(2,\,2)$, і також:

$$K_3\left(\frac{4+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot 8}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}},\frac{5+\sqrt{\frac{65}{208}}\cdot(-2)}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right).$$

Використавши формулу (1.8) для площі трикутника, отримаємо:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(2-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\left(\frac{5-2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{4+8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\left(2-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(2-\frac{4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\cdot\frac{-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}-\frac{12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\cdot\left(2-\frac{5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{1+\sqrt{\frac{65}{208}}}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(4-4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\cdot\left(-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(5+6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{2+2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}-4+4\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\cdot\left(-8\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)-\left(12\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)\cdot\left(\frac{2+2\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}-5-6\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\left(-48\cdot\frac{65}{208}+16\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)+\left(48\cdot\frac{65}{208}+36\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}\right)}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{52\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{52\cdot\sqrt{\frac{65}{208}}}{\left(1+\sqrt{\frac{65}{208}}\right)^2}\right|\approx\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{52\cdot 0,55901699}{(1+0,55901699)^2}\right|\approx\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{29,0688837}{2,43053399}\right|\approx 5,9799377.$$

Наочно перевіримо, користуючись рисунком на прямокутній системі координат (бісектриси рисуємо з допомогою транспортира). Для цього поміряємо в одиничних відрізках довжини сторін трикутника $K_1K_2K_3$ і за формулою Герона, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b(p-c)}$, де $p-$ півпериметр, знаходимо його площу (в даному випадку трикутник рівнобедрений, то можна за формулою $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot K_1K_3\cdot K_2M\approx$ 0,5 · 2,17 · 5,52 ≈ 5,9799377 од.^{2}.

Відповідь: ≈ 5,9799377од.^{2}.

Приклад 1.9. Які координати точок поділу, якщо відрізок з кінцем в точці $A(x_1, y_1)$ і серединою в точці $O(x_o, y_o)$ поділили на чотири рівних частини. Числа x_1, y_1, x_o, y_o подані в табл. 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_0 = -7$, $y_0 = 1$. Отже, $A(1, 0), O(-7, 1)$. Розглянемо рис. справа.

Знайдемо координати точки B, яка є другим кінцем відрізка. З формул (1.7) випливає, що $x_2 = 2x_0 - x_1,\ y_2 = 2y_0 - y_1$, де (x_o, y_o) – координати центра відрізка. Отже: $x_B = 2\cdot(-7) - 1 = -15,\ y_B = 2$, тобто: $B(-15, 2)$.

Щоб поділити відрізок на чотири рівних частини, потрібно поділити пополам відрізки AO і OB.

У результаті отримаємо: $AO_1 = O_1O = OO_2 = O_2B$, де

$O_1\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{0+1}{2}\right); O_2\left(\frac{-7+(-15)}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$, тобто $O_1\left(-3, \frac{1}{2}\right); O_2\left(-11, \frac{3}{2}\right)$.

2 спосіб. Першою точкою ділення відрізок ділиться в відношенні 1:3, другою – пополам, третьою – 3:1.

Зважаючи на те, що точкою O_1 відрізок AB ділиться у відношенні $1:3$, то використовуючи формули (1.6) при $\lambda = \frac{1}{3}$, отримаємо:

$$x_{O_1} = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot(-15)}{1+\frac{1}{3}} = (1-5):\frac{4}{3} = -4\cdot\frac{3}{4} = -3;\quad y_{O_1} = \frac{0+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}:\frac{4}{3} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $O_1\left(-3, \frac{1}{2}\right)$, $O(-7, 1)$, $O_2\left(-11, \frac{3}{2}\right)$.

1.2. Пряма лінія на площині

Рівнянням деякої лінії на площині є рівняння $F(x, y) = 0$, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) всіх точок, що лежать на цій лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

1.2.1. Різні види рівнянь прямої

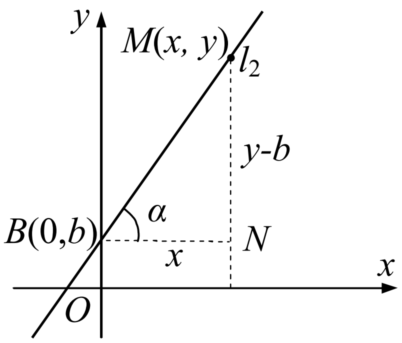


Рис. 1.8

Нехай задано деяку пряму (рис. 1.8), знайдемо її рівняння.

Точка M (x, y) лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли виконується умова: $\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha.$ Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$ і назвемо цю величину *кутовим коефіцієнтом* прямої лінії. Тоді враховуючи, що $NM = y - b$, $BN = x$, маємо: $\frac{y-b}{x} = k$. А звідси:

$$y = kx + b \tag{1.9}$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай деяка точка $M_1(x_1, y_1)$ належить заданій прямій, тоді повинна виконуватись рівність: $y_1 = kx_1 + b$. Знайшовши з цього рівняння величину b $(b = y_1 - kx_1)$ і підставивши в рівняння прямої (1.9), отримаємо: $y = kx + y_1 - kx_1$. Звідси:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{1.10}$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k*, що проходить через точку* $M_1(x_1, y_1)$.

Нехай точка $M_2(x_2, y_2)$ теж належить заданій прямій. Тоді маємо: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$.

Отже:
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1.11}$$

Знайдене значення k з останнього співвідношення підставимо в рівняння прямої (1.10) і отримаємо:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.12}$$

Отримане співвідношення називають *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки*.

Рівняння прямої, записаної в будь-якому вигляді (1.9), (1.10), (1.12) в прямокутній системі координат Oxy, задається рівнянням першого степеня відносно x і y і його можна записати в загальному вигляді:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1.13)$$

– загальне рівняння прямої лінії.

Коефіцієнти A, B рівняння (1.13) є координатами ***вектора нормалі*** $\mathbf{n} = (A, B)$ прямої, заданої даним рівнянням, причому A і B одночасно не рівні нулю, тобто $A^2 + B^2 > 0$, коефіцієнт C – вільний член. Числові величини $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ рівняння (1.12) рівні відповідно m, n і є координатами ***напрямного*** вектора $\mathbf{s} = (m, n)$ прямої, заданої даним рівнянням. З того, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю, тобто $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = A \cdot m + B \cdot n = 0$, випливає, що $m = \pm B$ і відповідно $n = \pm A$, тобто $\mathbf{s} = (B, -A)$, або $\mathbf{s} = (-B, A)$. Детальніше це висвітлено в четвертому розділі посібника.

Рівняння (1.13) при довільних A, B, C ($A^2 + B^2 > 0$) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежить на прямій, заданій рівнянням (1.13), тоді і тільки тоді, коли $C = -Ax_1 - By_1$.

Тому:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (1.13а)$$

– *рівняння прямої, що проходить через точку* $M_1(x_1, y_1)$ *і має вектор нормалі* $\mathbf{n} = (A, B)$.

Якщо точка $M_2(x_2, y_2) \neq M_1(x_1, y_1)$ також лежить на прямій заданій рівнянням (1.13а), то це буде тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 \qquad (1.13б)$$

Отже, вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ перпендикулярний до вектора нормалі $\mathbf{n} = (A, B)$ і паралельний напрямному вектору прямої $\mathbf{s} = (m, n) = = (B, -A)$ (рис. 1.9).

Якщо вектор $\mathbf{M}_1\mathbf{M} = (x - x_1, y - y_1)$ паралельний вектору $\mathbf{s} = (m, n)$, то:

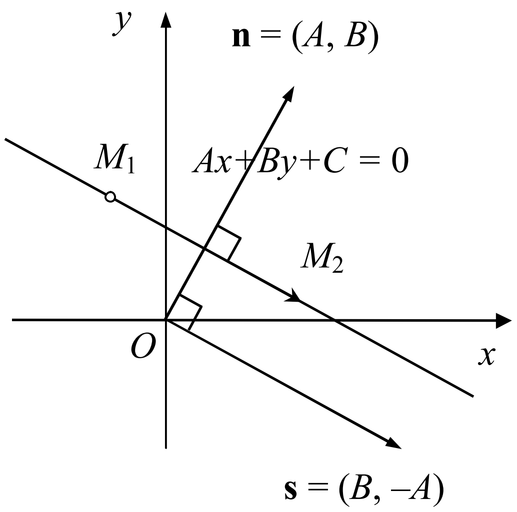


Рис. 1.9

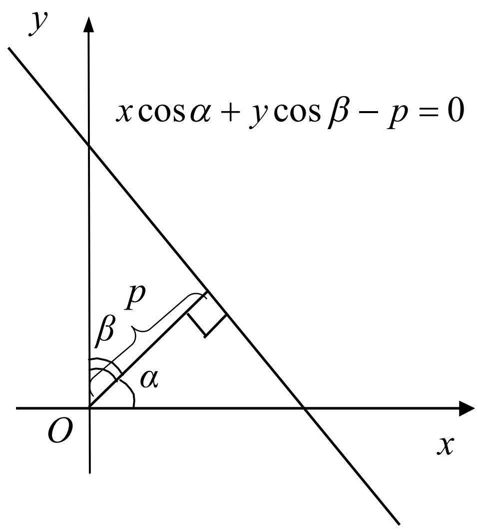


Рис. 1.10

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n} \qquad (1.13в)$$

– *рівняння прямої, що проходить через точку* $M_1(x_1, y_1)$ *і має напрямний вектор* $\mathbf{s}=(m, n)$. Його ще називають *канонічним рівнянням прямої.*

Помноживши рівняння (1.13) на нормуючий множник $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак якого вибирають протилежним до знака *C*, і позначивши $\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\beta$, $-p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$, одержимо:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \text{ або } x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0 \qquad (1.13г)$$

– *нормальне рівняння прямої*, де *p* – відстань від початку координат до прямої; α і β – кути, які утворює відповідно з осями *Ox* та *Oy* нормаль до прямої (рис. 1.10).

Приклад 1.10. Відомо, що пряма *l* проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має напрямний вектор $\mathbf{s}=(m, n)$. Записати канонічне і загальне рівняння прямої *l*, а також знайти координати її вектора нормалі. Числа x_1, y_1, *m*, *n* подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1= 2$, $y_1=1$, $m = -1$, $n = 3$. Отже $M_1(2,1)$, $\mathbf{s}=(-1,3)$.
З допомогою рівняння (1.13в), отримаємо: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{3}$ – канонічне рівняння прямої *l*.

Здійснивши рівносильні перетворення над останнім рівнянням, отримаємо: $3x+y-5=0$ – загальне рівняння прямої *l*.

Отже, координати вектора нормалі прямої *l* такі: $\mathbf{n}=(3,1)$.

Приклад 1.11. Відомо, що пряма *l* проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має вектор нормалі $\mathbf{n}=(A, B)$. Записати загальне і канонічне рівняння прямої *l*, а також знайти координати точок перетину прямої *l* з осями координат. Числа x_1, y_1, *A*, *B* подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1= 3$, $y_1= -4$, $A = 2$, $B = -5$. Отже $M_1(3,-4)$, $\mathbf{n}=(2,-5)$. З допомогою рівняння (1.13а), отримаємо: $2(x-3)-5(y+4)=0$.

Здійснивши рівносильні перетворення над останнім рівнянням, отримаємо: $2x-5y-26=0$ – загальне рівняння прямої *l*. Напрямний вектор прямої *l*: $\mathbf{s}=(-5,-2)$, отже, згідно з рівнянням (1.13в) отримаємо: $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+4}{-2}$ – канонічне рівняння прямої *l*. Якщо $y=0$, то $x=13$. Якщо $x=0$, то $y=-\frac{26}{5}=-5\frac{1}{5}$. Тобто точки $(13, 0)$ і $(0, -5\frac{1}{5})$ – точки перетину прямої *l* з осями *Ox* і *Oy* відповідно.

Приклад 1.12. Які рівняння сторін трикутника ABC і які координати його вершин, якщо середини сторін трикутника лежать в точках: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$. Числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, подані в таблиці 1.
Розв'язування: Варіант 1: $x_1= 2$, $y_1=1$, $x_2=3$, $y_2=7$, $x_3=4$, $y_3=-1$. Отже *P*(2, 1), *Q*(3, 7), *R*(4, –1).

1-ий спосіб. Скориставшись властивістю середньої лінії трикутника, складемо рівняння кожної зі сторін трикутника ABC як прямої, що проходить через одну з даних точок сторони (наприклад *P*) паралельно до відповідної середньої лінії (*QR*), утвореної двома іншими точками, тобто як прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору.

Рівняння сторони трикутника, що проходить через точку *P*(2, 1), отримаємо, підставивши в рівняння (1.13в) координати цієї точки і вектора

$\mathbf{QR} = (1, -8)$: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-8}$, або $8x + y - 17 = 0$. Підставивши в рівняння (1.13в) координати точки $Q(3, 7)$ і вектора $\mathbf{PR} = (2, -2)$, отримаємо рівняння другої сторони трикутника: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-2}$, або $x + y - 10 = 0$.

Підставивши в рівняння (1.13в) координати точки $R(4, -1)$ і вектора $\mathbf{PQ} = (1, 6)$, отримаємо рівняння третьої сторони трикутника: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{6}$, або $6x - y - 25 = 0$.

Координати вершин трикутника ABC є розв'язками систем рівнянь всіх пар сторін (A – AB і AC, B – AB і BC, C – AC і BC), бо кожна вершина трикутника ABC належить двом сторонам цього трикутника.

$$\begin{cases} 8x + y - 17 = 0 \\ x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases}; \begin{cases} 8x + y - 17 = 0 \\ 6x - y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -7 \end{cases}; \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ 6x - y - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Отже, три вершини трикутника лежать відповідно в точках (1, 9), (3, –7) і (5, 5).

2-ий спосіб. За координатами середини сторін трикутника, використовуючи формули (1.7), можна визначити координати його вершин і скориставшись рівнянням (1.12), записати рівняння його сторін.

Нехай вершини сторін трикутника лежать в точках: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. За умовою $P(2, 1)$, $Q(3, 7)$, $R(4, -1)$.

Отже, використаємо формули (1.7): $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2, \frac{x_1 + x_3}{2} = 3, \frac{x_2 + x_3}{2} = 4$. Звідси $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$.

$\frac{y_1 + y_2}{2} = 1, \frac{y_1 + y_3}{2} = 7, \frac{y_2 + y_3}{2} = -1$. Звідси $y_1 = 9, y_2 = -7, y_3 = 5$.

Тобто три вершини трикутника лежать відповідно в точках (1, 9), (3, –7) і (5, 5).

Тепер, підставивши координати точок в рівняння (1.12), отримаємо:

$\frac{y-9}{-7-9} = \frac{x-1}{3-1}$. Звідси $8x + y - 17 = 0$ – рівняння першої сторони.

$\frac{y-9}{5-9} = \frac{x-1}{5-1}$. Звідси $x + y - 10 = 0$ – рівняння другої сторони.

$\frac{y+7}{5+7} = \frac{x-3}{5-3}$. Звідси $6x - y - 25 = 0$ – рівняння третьої сторони.

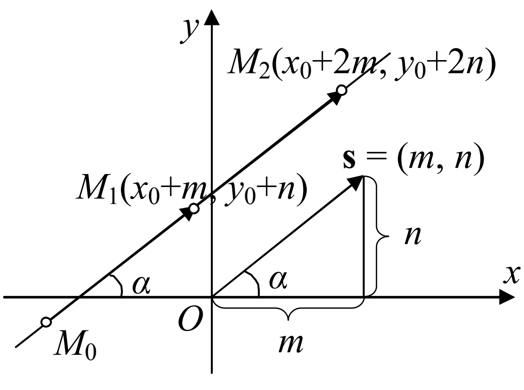


Рис. 1.11

З рівняння (1.13в) можна отримати:

$$x = x_0 + mt, \; y = y_0 + nt \qquad (1.13д)$$

– *параметричні рівняння прямої* (рис.1.11).

Дослідимо рівняння (1.13) (рис. 1.12):

1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ і останнє визначає пряму, що проходить через початок системи координат, бо координати точки O (0, 0) задовольняють рівняння, тобто точка O лежить на цій прямій.

2. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -C/A = a$, де $|a|$ – величина відрізка, що пряма відтинає на осі Ox, а сама вона розташована паралельно осі Oy. Якщо $C = 0$, то $x = 0$ задає рівняння осі Oy.

3. $A = O$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ тоді $By + C = 0$, або $y = -C/B = b$, де $|b|$ – величина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy, а сама вона паралельна осі Ox. При $C = 0$ маємо $y = 0$ – рівняння осі Ox.

Поділимо рівняння (1.13) на вільний член і помножимо на (–1), отримаємо рівносильне рівняння:

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1.$$ Отже:

$$\frac{x}{a_o}+\frac{y}{b_o}=1 \qquad (1.14)$$

– рівняння прямої у відрізках на осях.

Тут $a_o=-\frac{C}{A}$, $b_o=-\frac{C}{B}$ – це точки на осях, що є кінцями відрізків, які відтинає пряма на осях координат *Ox* і *Oy* відповідно (рис. 1.13).

Ще по-іншому вивести рівняння (1.14) можна так. Нехай пряма проходить через точку $A(a_0, 0)$ на осі *Ox* і через точку $B(0, b_0)$ на осі *Oy*. Використавши рівняння (1.12), отримаємо: $\frac{y-0}{b_0-0}=\frac{x-a_0}{0-a_0}$. Звідси одержимо: $xb_0+ya_0=a_0b_0$. Поділивши на a_0b_0, отримаємо: $\frac{x}{a_o}+\frac{y}{b_o}=1$.

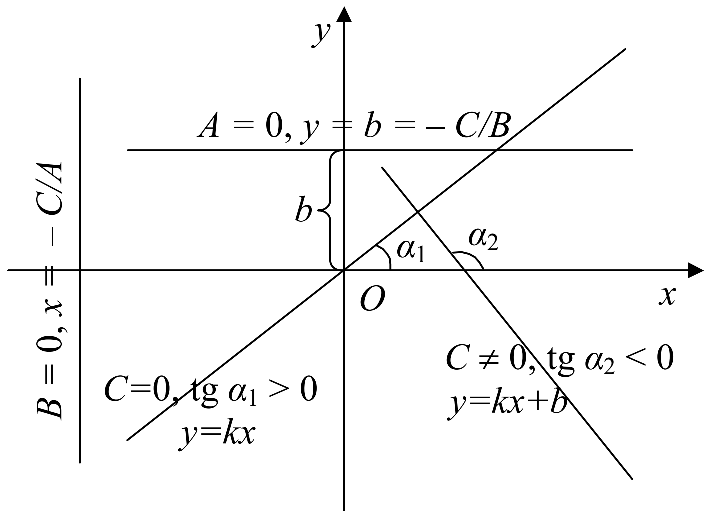


Рис. 1.12

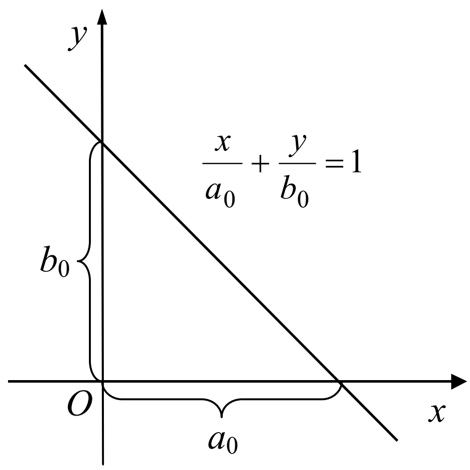


Рис. 1.13

П р и к л а д 1 . 13 . 1). Які з точок $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ лежать на прямій *l*: $y = kx + b$. 2). Яке рівняння даної прямої *l* а) в відрізках на осях, б) в загальному вигляді. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, k, b$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=-1$, $y_1=3$, $x_2=7$, $y_2=7$, $x_3=4$, $y_3=0$, $k=1$, $b=-4$. Отже $A(-1, 3)$, $B(7, 7)$ і $C(4, 0)$. Пряма *l*: $y = x - 4$.

1). Підставляючи в рівняння прямої *l* координати точки $A(-1, 3)$, потім $B(7, 7)$ і пізніше $C(4, 0)$, переконуємося, що дане рівняння задовольняють лише координати точки *C*, бо $0 = 4 - 4$, $0 = 0$ – істинна числова рівність. Отже, на прямій лежить точка *C*, а точки *A* і *B* не лежать.

Відповідь: $C \in l$, A і $B \notin l$.

2а). Щоб записати рівняння прямої *l* у відрізках на осях, тобто у вигляді (1.14), поділимо його почленно на вільний член зі знаком мінус і отримаємо:

$\frac{x}{4}+\frac{y}{-4}=1$ – рівняння прямої *l* у відрізках на осях.

2б). У загальному вигляді (1.13) рівняння прямої *l* запишеться: $x - y - 4 = 0$.

Відповідь: 2а). $\frac{x}{4}+\frac{y}{-4}=1$. 2б). $x - y - 4 = 0$.

1.2.2. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Розглянемо дві прямі:

l_1: $y = k_1x + b_1$ і l_2: $y = k_2x + b_2$.

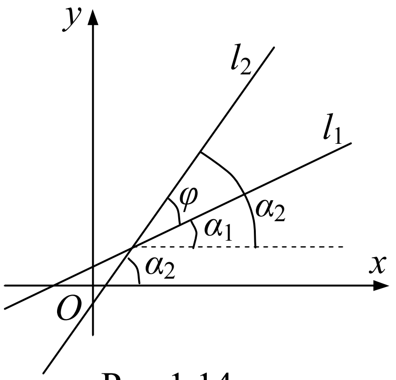


Рис.1.14

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається такий найменший кут φ, при повороті на який, відносно точки перетину прямих, проти бігу годинникової стрілки, першої прямої до другої відбувається їх збігання.

Зауважимо, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1. Пригадуючи, що $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$ і беручи до уваги очевидне співвідношення між кутами $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 1.14) маємо: $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1}$.

Остаточно:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \tag{1.15}$$

– *кут між прямими* l_1 і l_2 з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 відповідно.

Якщо кут φ – це кут між l_1 і l_2, то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $(\pi - \varphi)$. З формули (1.15) легко одержати умови *паралельності і перпендикулярності* двох прямих.

Коли пряма l_1 паралельна прямій l_2, кут φ між ними дорівнює нулю – маємо: $\operatorname{tg}\varphi = 0 \Rightarrow$

$$k_2 = k_1 \tag{1.16}$$

– умова *паралельності* двох прямих.

По-іншому умову паралельності можна вивести з таких міркувань. Якщо прямі паралельні, то вони мають однакові кути нахилу, а, отже, і однакові тангенси цих кутів, тобто однакові кутові коефіцієнти.

Коли $l_1 \perp l_2$, кут φ між ними дорівнює $\pi/2$ – маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}(\text{p}/2 + \alpha_1) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -1/\operatorname{tg}\alpha_1 \Rightarrow$$

$$k_2 = -1/k_1 \tag{1.17}$$

– умова *перпендикулярності* двох прямих.

П р и к л а д 1 . 14 . Дано вершини трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ 1). Яке рівняння а) сторони AC; б) медіани CM; в) бісектриси BK; г) висоти AN і висоти CD? 2). Які координати точки D? 3). Які величини кутів B і A? 4). Зробити рисунок. Числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = -4$, $y_2 = -2$, $x_3 = -4$, $y_3 = 8$. Отже $A(3, 5)$, $B(-4, -2)$ і $C(-4, 8)$.

1а). Рівняння сторони AC складаємо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки A і C за рівнянням (1.12):

$$\frac{y-5}{8-5} = \frac{x-3}{-4-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-5}{3} = \frac{x-3}{-7}$$ – рівняння сторони AC.

1б). Знайдемо координати точки M як середини відрізка AB за формулами (1.7): $x_M = \dfrac{3+(-4)}{2} = -0{,}5$; $y_M = \dfrac{5+(-2)}{2} = 1{,}5$. Отже точка $M\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Отже: $$\frac{y-(-4)}{-\frac{1}{2}-(-4)} = \frac{x-8}{\frac{3}{2}-8} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+4}{\frac{7}{2}} = \frac{x-8}{-\frac{13}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{7}(y+4) + \frac{2}{13}(x-8) = 0 \;\Big|\; \cdot\frac{7\cdot 13}{2} \quad \Rightarrow \quad 13y + 52 + 7x - 56 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 7x + 13y - 4 = 0$$ – рівняння медіани CM.

1в). Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Отже, щоб знайти координати точки *K*, треба знайти відношення $\lambda = \frac{AK}{KC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{(-4-3)^2 + (-2-5)^2}}{\sqrt{(-4-(-4)^2 + (8-(-2))^2}} = \frac{\sqrt{98}}{10}$ і, використавши формули (1.6), отримаємо:

$$x_K = \frac{3 + \frac{\sqrt{98}}{10}\cdot(-4)}{1 + \frac{\sqrt{98}}{10}} = \frac{30 - 4\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}} \approx -\frac{1}{2},\ y_K = \frac{5 + \frac{\sqrt{98}}{10}\cdot 8}{1 + \frac{\sqrt{98}}{10}} = \frac{50 + 8\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}} \approx 6\frac{1}{2}.$$

Для складання рівняння бісектриси *BK* нам потрібні точні координати точки *K*. Рівняння прямої, що проходить через точки *B* і *K*, запишеться:

$$\frac{x - \frac{30 - 4\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}}}{-4 - \frac{30 - 4\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}}} = \frac{y - \frac{50 + 8\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}}}{-2 - \frac{50 + 8\sqrt{98}}{10 + \sqrt{98}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(10 + \sqrt{98}) - 30 + 4\sqrt{98}}{7} = \frac{y(10 + \sqrt{98}) - 50 - 8\sqrt{98}}{7 + \sqrt{98}}$$

– рівняння бісектриси *BK*.

1г). Висота *AN* – це перпендикуляр проведений з точки *A* на сторону *BC*. Рівняння сторони *BC*: $x = -4$, бо абсциси точок *B* і *C* дорівнюють –4. Отже, *BC* паралельний *Oy*, тоді висота *AN* перпендикулярна *Oy*, а отже *AN* паралельний *Ox*, тобто ординати точок, що лежать на прямій A*N*, –однакові. Ще враховуючи, що для точки *A* ордината дорівнює 5, отримаємо рівняння висоти *AN*: $y = 5$.

Висота *CD* – це перпендикуляр проведений з точки *C* на сторону *AB*. Рівняння сторони *AB*: $\frac{y-5}{-2-5} = \frac{x-3}{-4-3} \Rightarrow \frac{y-5}{-7} = \frac{x-3}{-7} \Rightarrow y = x + 2$. У цьому рівнянні кутовий коефіцієнт k_1=1. З умови перпендикулярності двох прямих (1.17) отримаємо: $k_2 = -\frac{1}{1} = -1$ – кутовий коефіцієнт висоти *CD*. Отже, нам відомо координати точки *C* і кутовий коефіцієнт. Тому за рівністю (1.10), отримаємо: $y - 8 = -1\cdot(x - (-4)) \Rightarrow x + y - 4 = 0$ – рівняння висоти *CD*.

Відповідь: 1а) $\frac{y-5}{3} = \frac{x-3}{-7}$; 1б) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

1в) $\frac{x(10 + \sqrt{98}) - 30 + 4\sqrt{98}}{7} = \frac{y(10 + \sqrt{98}) - 50 - 8\sqrt{98}}{7 + \sqrt{98}}$;

1г) $y = 5$, $x + y - 4 = 0$ відповідно.

2) Координати точки *D* знаходимо як розв'язок системи рівнянь прямих *AB* і *CD*, на перетині яких є ця точка:

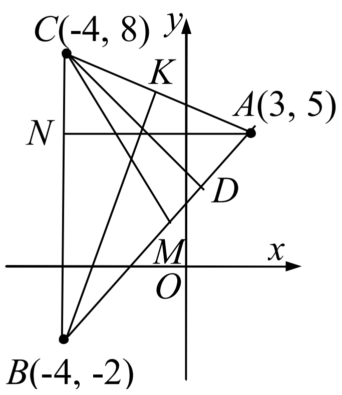
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1,\ \ y = 3.$$ Отже *D*(1, 3).

Відповідь: (1, 3).

3) Величина кута *B* дорівнює різниці кутів нахилу до осі *Ox* прямих *BC* і *BA*: $\angle B = \alpha_1 - \alpha_2$. $BC \perp Ox \Rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$. З рівняння прямої *BA*: $y = x + 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 1 = \mathrm{tg}\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$. Отже $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Величину кута *A* між прямими *AC* і *AB* знайдемо за формулою (1.15). Спочатку знайдемо кутові коефіцієнти прямих *AC* і *AB*.

AC: $\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{x-3}{7}\Rightarrow -7y+35=3x-9\Rightarrow y=\dfrac{3x-44}{-7}=-\dfrac{3}{7}x+\dfrac{44}{7}\Rightarrow k_1^{'}=\dfrac{-3}{7}$.



АВ: $y=x+2\Rightarrow k_2^{'}=1$. Отже

$$tg\angle A=\frac{1-\left(-\frac{3}{7}\right)}{1+1\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)}=\frac{1+\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{\frac{10}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{10}{4}=2\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle A=\operatorname{arctg} 2\dfrac{1}{2}\approx 68^{\circ}$. Відповідь: $45^{\circ}, 68^{\circ}$ відповідно.

4). На прямокутній декартовій системі координат відкладаємо точки $A(3, 5)$, $B(-4, -2)$ і $C(-4, 8)$. За допомогою лінійки, трикутника і транспортира проводимо медіану CM, висоти AN і CD і бісектрису BK. Порівнянням координат точок M, N, K і D, отриманих розрахунково і з допомогою рисунка (рис. зліва), переконуємося в правильності розв'язків.

1.2.3. Віддаль від точки до прямої

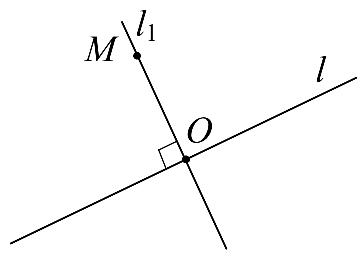


Рис. 1.15

Нехай задано деяку точку $M(x_o, y_o)$ і пряму l: $Ax + By + C = 0$. Вважатимемо, що т. M не лежить на прямій, тобто, що: $Ax_o + By_o + C \neq 0$.

Проведемо через точку M перпендикуляр l_1 до прямої l (рис. 1.15). Позначимо точку перетину перпендикуляра l_1 з прямою l через O. Віддаль від точки M до точки O і буде віддаллю від точки M до прямої l. Виведемо формулу для відстані від точки до прямої. Перепишемо рівняння прямої l в вигляді з кутовим коефіцієнтом.

$$l:\ y=\frac{-C-Ax}{B}=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.\quad \text{Тут}\ \ k=-\frac{A}{B}.$$

Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих (1.17): $k_1=-1/k=B/A$ і умову належності точки $M_o(x_o, y_o)$ прямій l_1 з кутовим коефіцієнтом k_1 (1.10), отримаємо рівняння прямої l_1.

$$l_1:\quad y-y_o=\frac{B}{A}(x-x_o).$$

Координати точки O, як спільної точки прямих l_1 та l, знайдемо, розв'язавши систему рівнянь, складену з рівнянь прямих l_1 та l. Підставивши знайдені вирази для координат точки $O(x_1, y_1)$ у формулу для віддалі між точками M і O: $MO=\sqrt{(x_o-x_1)^2+(y_o-y_1)^2}$, після алгебраїчних перетворень отримаємо: $MO=\dfrac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Отже, *віддаль від точки* $M(x_o, y_o)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ можна знайти за формулою:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1.18)$$

Приклад 1.15. Знайти віддаль від точки $M(x_o, y_o)$ до прямої l: $y = kx + b$ 1) не використовуючи формулу (1.18); 2) використовуючи формулу (1.18). Числа x_o, y_o, k, b подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_o=3, y_o=1$, $k=-3/4$, $b=2$. Отже $M(3, 1)$, l: $y=-\dfrac{3}{4}x+2$.

1). Переконаємось, що точка M не лежить на прямій: $1 \neq -\frac{3}{4} \cdot 3 + 2$. Отже не лежить.

Проведемо через точку M перпендикуляр l_1 до прямої l (Рис. 1.10). Віддаль від точки M до точки O, перетину прямих l_1 і l, тобто MO, і є шуканою віддалю.

Використовуючи умову перпендикулярності прямих (1.17) дістанемо $k = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку (1.10): $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x - 3$ – рівняння прямої l_1.

Розв'яжемо систему рівнянь прямих l_1 та l: $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x - 3 \\ y = -\frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$.

Віднімемо від І-ого рівняння ІІ-ге і отримаємо: $\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)x = 5 \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

$y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} + 2 = -\frac{9}{5} + 2 = 0{,}2$. Отже, точка $O\left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}\right)$ – точка перетину прямих l і l_1.

Використавши формулу (1.5), отримаємо:

$MO = \sqrt{(3 - 2{,}4)^2 + (1 - 0{,}2)^2} = 1$. Відповідь: 1.

2). $M(3,\ 1)$, l: $y = -\frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow 4y + 3x - 8 = 0$.

Використавши формулу (1.18), отримаємо: $MO = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$. Відповідь: 1.

П р и к л а д 1 . 16. Знайти рівняння прямої, відрізок якої між осями координат ділиться точкою $M(x_o, y_o)$ навпіл. Числа x_o, y_o подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_o = 2$, $y_o = 1$. Отже: $M(2, 1)$.

Рівняння прямої шукатимемо у вигляді (1.14): $\frac{x}{a_o} + \frac{y}{b_o} = 1$, де a_o, b_o – відрізки, що відтинає пряма на осях координат Ox і Oy відповідно.

Отже, пряма перетинає осі Ox і Oy відповідно в точках: $A(a_o, 0)$ і $B(0, b_o)$. Знайдемо a_o, b_o.

Оскільки точка M є середина відрізка BA, то згідно з формулами (1.7), отримаємо: $\frac{0 + a_o}{2} = 2$ і $\frac{b_o + 0}{2} = -1$. Звідси $a_o = 4$, $b_o = -2$.

Отже, рівняння прямої: $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$. Відповідь: $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$.

П р и к л а д 1 . 17. Знайти значення A, при яких пряма $Ax + By + C = 0$ відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи від початку координат. Числа B, C подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $B = 2, C = -5$. Отже, рівняння прямої: $Ax + 2y - 5 = 0$.

Здійснюючи рівносильні перетворення, запишемо рівняння у вигляді (1.14): $Ax + 2y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{5/A} + \dfrac{y}{5/2} = 1$, де згідно з рівнянням (1.14), $\dfrac{5}{A}$ і $\dfrac{5}{2}$ – це точки на осях, що є точками перетину прямої з осями координат Ox і Oy відповідно. Довжини відрізків, які відтинає пряма на осях координат Ox і Oy, відповідно рівні $\left|\dfrac{5}{A}\right|$ і $\left|\dfrac{5}{2}\right|$, бо це є відстані від початку координат. За умовою задачі відрізки повинні бути однакової довжини, отже, $\left|\dfrac{5}{A}\right| = \left|\dfrac{5}{2}\right|$. Звідси $A = \pm 2$. Відповідь: ± 2.

Приклад 1.18. Дано точку $P(x_1, y_1)$ і пряму l, яка проходить через точки $A(x_2, y_2)$, $B(x_3, y_3)$. Знайти 1) проекцію точки $P(x_1, y_1)$ на пряму l; 2) координати точки Q, яка симетрична точці P відносно прямої l. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ в т.1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = -8, y_1 = 12, x_2 = 2, y_2 = -3, x_3 = -5, y_3 = 1$. Отже $P(-8, 12), A(2, -3), B(-5, 1)$.

Проекцією точки P на пряму l є точка O, яка є точкою перетину прямої, що проходить через точку P і перпендикулярна прямій l, з прямою l.

Запишемо згідно з рівнянням (1.12) рівняння прямої l: $\dfrac{y-(-3)}{1-(-3)} = \dfrac{x-2}{-5-2}$; $\dfrac{y+3}{4} = \dfrac{x-2}{-7}$; $-7(y+3) = 4(x-2)$; $4x + 7y + 13 = 0$ – рівняння прямої l. З цього рівняння отримаємо: $y = -\dfrac{4}{7}x - \dfrac{13}{7} \;\Rightarrow\; k_1 = -\dfrac{4}{7}$ – кутовий коефіцієнт прямої l.

З умови перпендикулярності (1.17) отримаємо кутовий коефіцієнт перпендикуляра: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{(-4/7)} = \dfrac{7}{4}$.

Підставивши кутовий коефіцієнт перпендикуляра і координати точки P в рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку, тобто в рівняння (1.10), отримаємо: $y - 12 = \dfrac{7}{4}\big(x - (-8)\big) \;\Rightarrow\; y - \dfrac{7}{4}x - 26 = 0$ – рівняння перпендикуляра.

Шукаємо координати точки перетину перпендикуляра і прямої l, тобто точки O, яка і є проекцією точки P на пряму l. Координати точки O є розв'язком системи рівнянь перпендикуляра і прямої l, бо точка належить обидвом. Отже: $\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0 \\ -\dfrac{7}{4}x + y - 26 = 0 \end{cases}$. Друге рівняння помножимо на 7 і від першого віднімемо друге. Отримаємо $4x + \dfrac{49}{4}x + 13 + 26 \cdot 7 = 0 \;\Rightarrow\; x = -12$. $y = \dfrac{7}{4}x + 26 = \dfrac{7}{4}(-12) + 26 = 5$. Отже, $O(-12, 5)$.

2). Точка Q є кінцем відрізка PQ з серединою в точці O. Використавши формули (1.7) зв'язку координат кінців і середини відрізка PQ, отримаємо: $\dfrac{-8+x}{2} = -12$ і $\dfrac{12+y}{2} = 5$; $\Rightarrow$ $x = -24 + 8 = -16$ і $y = 10 - 12 = -2$. Отже: $Q(-16, -2)$.

Відповідь: 1) $O(-12, 5)$. 2) $Q(-16, -2)$.

П р и к л а д 1 . 19. Дві сторони паралелограма $ABCD$ лежать на прямих $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ і $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, а одна з його діагоналей на прямій $d_1: A_3x+B_3y+C_3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма. Числа $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: В.1: $A_1=8,\ B_1=3,\ C_1=1,\ A_2=2,\ B_2=1,\ C_2=-1,\ A_3=3,\ B_3=2,\ C_3=3$.

Отже, $l_1: 8x+3y+1=0$, $l_2: 2x+y-1=0$, $d_1: 3x+2y+3=0$.

З непропорційності $\frac{8}{2}\neq\frac{3}{1}$ відповідних коефіцієнтів рівнянь двох прямих l_1 і l_2 випливає нерівність їх кутових коефіцієнтів, а отже, згідно з (1.16), – непаралельність сторін. Отже, ці дві сторони паралелограма мають спільну вершину A. Знайдемо її координати з системи рівнянь сторін: $\begin{cases}8x+3y+1=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}$. Отже, $A(-2, 5)$.

Точка A не належить прямій d_1, бо не задовольняє рівняння прямої ($3\cdot(-2)+2\cdot5+3\neq0$), а, отже, точки перетину прямої d_1 з прямими l_1 і l_2 будуть відповідно вершинами B і D. Знайдемо їх: $\begin{cases}8x+3y+1=0\\3x+2y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$. Отже, $B(1,-3)$.

$\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+2y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=-9\end{cases}$. Отже, $D(5,-9)$. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам. Координати точки O, як середини сторони DB, згідно з формулами (1.7), такі: $x_o=\frac{5+1}{2}=3,\quad y_o=\frac{-9+(-3)}{2}=-6$. Отже, $O(3,-6)$.

Ця ж точка O ділить навпіл діагональ AC. Знайдемо згідно з формулами (1.7), координати точки C: $\frac{-2+x}{2}=3,\quad \frac{5+y}{2}=-6.$ Звідси $x=6+2=8$, $y=-12-5=-17$. Отже, точка $C(8,-17)$. Відповідь: $A(-2,5)$, $B(1,-3)$, $C(8,-17)$, $D(5,-9)$.

П р и к л а д 1 . 20. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $C(x_1, y_1)$ – вершина прямого кута, а $Ax+By+C=0$ – рівняння гіпотенузи. Числа $x_1,\ y_1,\ A,\ B,\ C$ подані в таблиці 1.

Розв'язування: В.1: $x_1=5,\ y_1=-1,\ A=2, B=-3,\ C=5.$ Отже, $C(5,-1)$, $2x-3y+5=0$.

У рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, є і бісектрисою. У даному випадку висота CH ділить прямий кут пополам, тобто утворює з катетами кути по 45°. Використавши формулу кута між прямими, зможемо записати рівняння катетів.

Отже, спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт гіпотенузи:

$2x-3y+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$. Отже, $k_1=\frac{2}{3}$. Застосувавши умову перпендикулярності прямих (1.17), знайдемо кутовий коефіцієнт висоти CH: $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2/3}=-\frac{3}{2}$. Зважаючи що, кути між висотою і катетами відповідно рівні – 45° і 45°, то, використавши формулу (1.15), отримаємо: $\operatorname{tg}(-45^\circ)=\frac{k_3-(-3/2)}{1+(-3/2)k_3}$;

$\Rightarrow -1=\frac{k_3+3/2}{1-3k_3/2}; \Rightarrow k_3+\frac{3}{2}=\frac{3k_3}{2}-1; \Rightarrow k_3=5.$ $\qquad \operatorname{tg}45^\circ=\frac{k_4-(-3/2)}{1+(-3/2)k_4}$;

$\Rightarrow\ 1=\frac{k_4+3/2}{1-3k_4/2};\ \Rightarrow\ k_4+\frac{3}{2}=1-\frac{3k_4}{2}; \Rightarrow k_4=-\frac{1}{5}.$

Застосувавши рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку, тобто рівняння (1.10), отримаємо: $CA: \ y+1=5(x-5) \Rightarrow \ 5x-y-26=0$ – рівняння катета CA. Аналогічно, $CB: \ y+1=-\frac{1}{5}(x-5)\Big|\cdot(-5) \ \Rightarrow \ -5y-5=x-5$ $\Rightarrow \ x+5y=0$ – рівняння катета CB. Відповідь: $5x-y-26=0$; $x+5y=0$.

1.3. Канонічні рівняння кривих другого порядку

Рівняння другого порядку виду:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0,$$

де хоча б одне з чисел a_{11}, a_{22}, a_{12} не дорівнює нулю, називаються рівняннями ліній другого порядку на площині.

Задавши коефіцієнти a_{ij} даним рівнянням можна описати будь-яку криву другого порядку. Кола, еліпси, гіперболи, параболи є кривими другого порядку (хоча існують і багато інших кривих другого порядку). Вивчимо детальніше дані лінії за допомогою їхніх так званих канонічних рівнянь.

1.3.1. Коло. Спершу розглянемо добре відому лінію, яка називається колом (рис. 1.16).

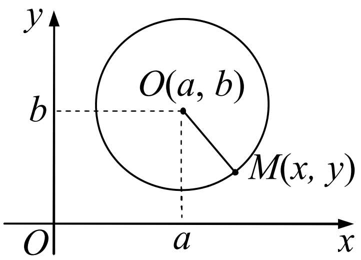


Рис. 1.16

Множина всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від заданої точки, називається *колом.* А саму цю точку називають центром кола. Нехай $M(x, y)$ – поточна точка кола, $O(a, b)$ – центр кола. З означення $OM = R$, або, використовуючи формулу відстані (1.5):

$$OM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2 \qquad (1.19)$$

– канонічне рівняння кола.

Тут (a, b) – координати центра кола, R – його радіус.

Приклад 1.21. Дано коло: $x^2+y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$. Який його центр і радіус? Числа a_{10}, a_{20}, a_{00} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{10}= -4$, $a_{20}=3$, $a_{00}=21$. Отже,

$$x^2+y^2-8x+6y+21=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-(-3))^2=4=2^2.$$

Порівнюючи це рівняння з канонічним рівнянням кола (1.19), отримаємо, що центр кола знаходиться в точці $O(4, -3)$, а радіус кола R=2.

Відповідь: (4, –3), 2.

1.3.2. Еліпс. Сукупність всіх точок на площині, для яких сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою (позначають $2a$) і більшою, ніж відстань між фокусами (позначають $2c$), називається *еліпсом.*

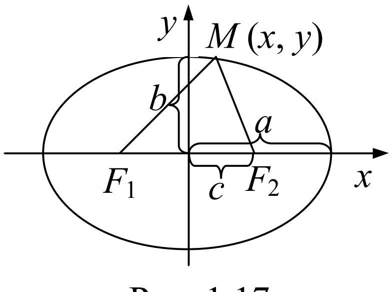


Рис. 1.17

На рис.1.17 зображено еліпс. $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокуси еліпса, $M(x, y)$ – точка площини, яка відповідає означенню еліпса, тобто $MF_1+MF_2=2a$, причому $2c<2a \Rightarrow a > c$. Тоді:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.20)$$

– канонічне рівняння еліпса.

Тут $b^2 = a^2 - c^2$.

Розглянемо геометричний зміст параметрів, що входять у рівняння (1.20). Якщо $x = O$, $y = \pm b$, тобто точки (0, b) і (0, $-b$) є точками перетину еліпса з віссю Oy. Величину b називають малою піввіссю еліпса. При $y = 0$, $x=\pm a$ і відповідно точки (a, 0), ($-a$, 0) – точки перетину еліпса з віссю Ox. Величина a – велика піввісь еліпса. З парності виразу (1.20) по x і по y випливає симетрія еліпса відносно осей Ox і Oy. На рис. 1.17 зображено еліпс.

Ексцентриситет еліпса – це відношення $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. З означення $c < a$, тому $\varepsilon \in (0, 1)$. Маючи на увазі, що

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2, \tag{1.21}$$

дістанемо $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. З останньої рівності випливає геометричний зміст ексцентриситета, який полягає в тому, що він характеризує *ступінь витяг-нутості* еліпса. Так при $\varepsilon \to 0 \Rightarrow a \to b$, тобто еліпс вироджується в коло. Якщо ε наближається до одиниці, то відношення довжини півосей еліпса стає малим, тобто еліпс витягується вздовж осі Ox.

Приклад 1.22. Дано еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Через точку $M(x_o, y_o)$ провести хорду еліпса (записати її рівняння), яка ділиться в цій точці навпіл. Зробити рисунок. Числа a, b, x_o, y_o подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 2$, $b = 4$, $x_o=1$, $y_o=2$. Отже: $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$, $M(1, 2)$.

Рівняння хорди запишемо як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $M(1, 2)$ за рівнянням (1.10): $y - 2 = k(x-1)$. Це буде рівняння всіх прямих, що проходять через точку M, по-різному орієнтованих в залежності від кутового коефіцієнта k. Знайдемо точки перетину прямої, записаної даним рівнянням з еліпсом. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ y = k(x-1) + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(k(x-1)+2)^2}{16} = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{2k^2 - 4k}{4+k^2}x + \frac{k^2 - 4k - 12}{4+k^2} = 0.$$

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = \dfrac{2k^2 - 4k}{4+k^2}$ (*). Хорда ділиться точкою M пополам, тому: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_0 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$ (**). Порівнюючи (*) і (**), отримаємо: $\dfrac{2k^2 - 4k}{4+k^2} = 2 \Rightarrow k = -2$. Отже, $y = -2(x-1) + 2 \Rightarrow y = -2x + 4$ – рівняння хорди.

Приклад 1.23. Яке канонічне рівняння еліпса, коли відомо b і ε? Числа b і ε подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $b = 4$, $\varepsilon = 0{,}6$.

Канонічне рівняння еліпса записано у вигляді (1.20). Використавши формулу (1.21), отримаємо: $a = \dfrac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = 5$. Отже, канонічне рівняння еліпса: $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Відповідь: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

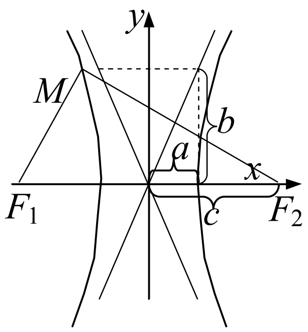


Рис. 1.18

1.3.3. Гіпербола. Множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, що називаються фокусами, є величиною сталою, (позначимо $2a$), і є меншою ніж відстань між фокусами (позначимо $2c$), називається *гіперболою.*

Скористаємось рис. 1.18 точки F_1 (– c, 0) і F_2 (c, 0) — фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ — точка гіперболи. Тоді $|MF_1 - MF_2| = 2a,\ a < c$. Отже:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.22}$$

– *канонічне рівняння гіперболи*. Тут $b^2 = c^2 - a^2$.

Дослідимо одержане рівняння. Гіпербола не перетинає вісь Oy. При $y = 0$, $x = \pm a$ і точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$ — точки перетину з віссю Ox. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називають *асимптотами гіперболи.* Це пов'язано з тим, що точки гіперболи при віддаленні від початку координат все ближче і ближче наближаються до цих прямих, що можна довести за допомогою формули (1.18). Враховуючи симетрію відносно осей Ox і Oy, графік гіперболи зображено на рис. 1.18.

Величини b і a називають відповідно уявною і дійсною осями гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називають число $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Беручи до уваги, що $c^2 = a^2 + b^2$, маємо $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$ або

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \tag{1.23}$$

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує степінь нахилу гілок гіперболи до осі Ox.

Дві прямі, рівняння яких

$$x = -\frac{a}{\varepsilon};\ x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{1.24}$$

називаються директрисами еліпса і гіперболи.

Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Директриси еліпса – це дві прямі, які розташовані симетрично відносно осі Oy і проходять ззовні еліпса. Для гіперболи $\varepsilon > 1$ і відношення $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Тобто директриси гіперболи розташовані симетрично відносно осі Oy і лежать між гілками гіперболи.

Для еліпса і гіперболи можна сформулювати важливе *твердження*: якщо r – відстань від деякої точки еліпса або гіперболи до будь-якого фокуса, а d – відстань від цієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення r/d є величиною сталою рівною ексцентриситету, тобто $\varepsilon = r/d$. Розглянуте твердження можна покласти в основу означення цих ліній: множина точок, для яких відношення відстаней від фокуса і до відповідної директриси – величина стала і рівна ексцентриситету ε, є *еліпс,* якщо $\varepsilon < 1$ і *гіпербола,* якщо $\varepsilon > 1$.

Приклад 1.24. Який ексцентриситет гіперболи $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Числа a і b подані в таблиці 1. *Розв'язування:* Варіант 1: $a = 3$, b=4. Отже, $x^2/3^2 - y^2/4^2 = 1$. Використавши формулу (1.23), отримаємо: $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1\frac{2}{3}$. Відповдь: $1\frac{2}{3}$.

П р и к л а д 1 . 2 5 . Яке канонічне рівняння гіперболи, відстані між фокусами якої дорівнюють *S*, а рівняння директрис $x = \pm x_0$. Числа *S* і x_o подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $S = 8$, $x_o=3$. Отже, $x = \pm 3$, а відстань між фокусами F_1 (– c, 0) і F_2 (c, 0) дорівнює $2c = 8 \Rightarrow c = 4$. Використавши рівняння (1.24) і (1.23), отримаємо рівняння директрис $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a}{c/a} = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{a^2}{4} = \pm 3 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 3 \Rightarrow a^2 = 12$. Використавши рівняння (1.22), отримаємо: $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 12 = 4$ і отже $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи. Відповідь: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

1.3.4. Парабола. Множина всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус, і називається *директрисою*, називається *параболою*.

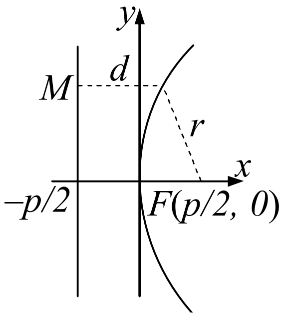


Рис.1.19

За означенням $r = d$ (див. рис. 1.19), – тому $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$, або піднісши до квадрату обидві частини рівності і спростивши вираз, отримаємо:

$$y^2 = 2px \qquad (1.25)$$

– *канонічне рівняння параболи.* Ексцентриситетом параболи називають число $\varepsilon = 1$.

Парабола симетрична відносно осі *Ox,* проходить через початок системи координат. Її графік зображено на рис. 1.19. Важливою є так звана *оптична властивість* параболи, яка полягає в тому, що всі промені, паралельні осі *Ox*, після відбиття від параболи потрапляють у фокус *F*.

П р и к л а д 1 . 26. Які координати фокуса параболи $y = ax^2 + bx + c$. Числа *a, b* і *c* подані в таблиці 1. *Розв'язування:* В. 1: $a = 2$, $b = 16$ і $c = 31$. Отже $y = 2x^2 + 16x + 31$. Зробимо деякі рівносильні перетворення: $y = 2(x^2 + 8x) + 31 \Rightarrow y = 2((x+4)^2 - 16) + 31 \Rightarrow y = 2(x+4)^2 - 32 + 31 \Rightarrow y = 2(x+4)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2(x+4)^2$. Введемо заміну: $x + 4 = y'$, $y + 1 = x'$, отже $x' = 2(y')^2 \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{2}x'$ – канонічне рівняння параболи.

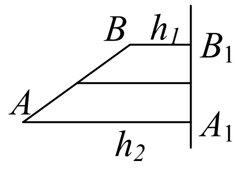
Враховуючи (1.25), отримаємо: $2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$, то F має координати $x' = \frac{p}{2} = \frac{1}{8}$ $y' = 0$

Враховуючи наші заміни, отримаємо: $x = y' - 4 = -4;\quad y = x' - 1 = -\frac{7}{8}$. В-дь: $\left(-4; -\frac{7}{8}\right)$.

Наведемо ще приклади задач, які розв'язуються координатним методом.

П р и к л а д 1 . 27. По одну сторону, попри два енерго-споживчі пункти *A* і *B* по прямій, проходить високовольтна лінія. Відстань від неї до пунктів відповідно $h_1 = a$ і $h_2 = b$ км. На які відстані від лінії потрібно поставити трансформатор, щоб відстань від нього до пунктів була найменшою і однаковою? Числа *a, b* подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 4$, $b = 1$. Отже $h_1 = 4, h_2 = 1$ км.

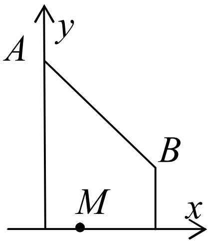


Для того, щоб відстань від трансформатора до пунктів була найменшою і однаковою, він повинен знаходитися на середині відрізка прямої *AB* між пунктами *A* і *B* (рис. справа).

Тоді відстань від трансформатора до високовольтної лінії дорівнює середній лінії трапеції AA_1B_1B, тобто (1+4)/2 = 2,5 (км). Відповідь: 2,5 (км).

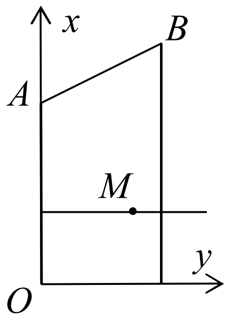
П р и к л а д 1 . 28. По одну сторону, попри два населені пункти *A* і *B*, відстань між якими $l = c$ км. по прямій, протікає річка, через яку стоїть міст. Відстань від неї до пунктів відповідно $h_1 = a$ і $h_2 = b$ км. Відстані від моста до пунктів *A* і *B* однакові. Знайти їх. Числа *a, b* і *c* подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 7$, $b = 1$ і $c = 10$. Отже, $h_1 = 7$, $h_2 = 1$ і $l = 10$. Накладемо на карту місцевості, про яку йдеться в задачі, прямокутну систему так, щоб вісь *Ox* збігалася з річкою, а пункт *A* був розміщений на осі *Oy* (рис. справа). Координати точок в яких розміщені пункти, будуть такі: $A(0, 7)$, $B(x_1, 1)$. За умовою задачі і згідно з формулою (1.5), отримаємо: $AB = 10 = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (7-1)^2} \Rightarrow x_1 = 8.$ Отже, $B(8, 1)$.



Нехай міст стоїть в точці $M(x, 0)$, такій, щоб $AM = MB$, тобто згідно з формулою (1.5), щоб виконувалося співвідношення: $\sqrt{(x-0)^2 + (0-7)^2} = = \sqrt{(x-8)^2 + (0-1)^2}$. Піднісши до квадрату обидві частини даної рівності і звівши подібні, отримаємо: $16x = 16 \Rightarrow x = 1$. Отже, міст стоїть в точці з координатами $M(1, 0)$. Шукана відстань $AM = MB$ і згідно з формулою (1.5), дорівнює: $AM = MB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (км). Відповідь: $5\sqrt{2}$ (км).

П р и к л а д 1 . 29. По одну сторону, попри два тепло-споживчі пункти *A* і *B*, вздовж прямої пролягає газопровід. Відстань від нього до пунктів відповідно $h_1 = a$ і $h_2 = b$ км. Відстань між пунктами $l = c$ км. На відстані $h = d$ км від газопроводу треба побудувати газорозподільну станцію, відстань від якої до пунктів *A* і *B* має бути однаковою. Визначити цю відстань. Числа *a*, *b*, *c* і *d* подані в таблиці 1.



Розв'язування: Варіант 1: $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$ і $d = 3$. Отже, $h_1 = 7$, $h_2 = 8$, $l = 5$ і $h = 3$.

Використаємо метод координат. Для цього прямокутну систему координат *Oxy* виберемо таким чином, щоб точка *A* (пункт *A*) лежала на осі *Oy*, а пряма, вздовж якої пролягав газопровід, була за вісь *Ox*. Зрозуміло, що в такому випадку, беручи до уваги умову задачі, пункт *A* знаходитиметься в точці $A(0, 7)$, пункт *B* – $B(x_b, 8)$, а газорозподільна станція, нехай, – $M(x, 3)$.

Відстань між пунктами A і B дорівнює 5, отже згідно з (1.5) запишемо: $\sqrt{(x_b - 0)^2 + (8-7)^2} = 5$, отже $x_b = \sqrt{24}$. Отже $B(\sqrt{24}, 8)$.

Оскільки $AM = MB$, то згідно з (1.5) запишемо: $\sqrt{(x-0)^2 + (3-7)^2} = = \sqrt{(x - \sqrt{24})^2 + (3-8)^2}$, або $(x-0)^2 + (3-7)^2 = (x - \sqrt{24})^2 + (3-8)^2$, звідси отримаємо $x^2 + 16 = x^2 - 2\sqrt{24}x + 24 + 25$, а, отже, $x = 33/2\sqrt{24}$ і $AM = MB = = \sqrt{(33/2\sqrt{24} - 0)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{1089/96 + 16} = \sqrt{27{,}34375} \approx 5{,}23$ (км).

Відповідь: $\sqrt{27{,}34375}$ км.

П р и к л а д 1 . 30. Через точку $M_0(x_0, y_0)$ до кола $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00} = 0$ проведено дотичну. Яка довжина відрізка від точки M_0 до точки дотику. Числа x_0, y_0, a_{11}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00} подані в таблиці 1.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = -10,\ y_0 = -3,$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, a_{10} =-10, a_{20} = -4, a_{00} = 4. Отже, $M_0(-10, -3)$, рівняння кола: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.

Перепишемо рівняння кола в такому вигляді: $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 4 = 0$, або в такому: $(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 - 4y + 2^2) - 5^2 - 2^2 + 4 = 0$, звідси $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 5^2$, тобто коло, згідно з (1.19) має центр в точці $O(5; 2)$ і радіус дожиною 5.

Дотична – це перпендикуляр до радіуса, отже маємо прямокутний трикутник. Згідно з теоремою Піфагора отримаємо: $M_0M_1{}^2 + OM_1{}^2 = OM_0{}^2$ (*). Згідно з (1.5), отримаємо: $OM_0{}^2 = (5-(-10))^2 + (2-(-3))^2 = 15^2 + 5^2 = 250$. Нехай точка M_1 має координати $M_1(x_1, y_1)$. Тоді: $M_0M_1{}^2 = (x_1 - (-10))^2 + (y_1 - (-3))^2 = (x_1 + 10)^2 + (y_1 + 3)^2$, $OM_1{}^2 = (x_1 - 5)^2 + (y_1 - 2)^2$. Враховуючи умову (*), а також те, що пара чисел (x_1, y_1) має задовольняти рівнянню кола, складаємо систему:

$$\begin{cases} x_1{}^2 + y_1{}^2 - 10x_1 - 4y_1 + 4 = 0 \\ (x_1+10)^2 + (y_1+3)^2 + (x_1-5)^2 + (y_1-2)^2 = 250 \end{cases}$$

. Звівши подібні в другому рівнянні і перемноживши перше рівняння на два, отримаємо:

$$\begin{cases} 2x_1{}^2 + 2y_1{}^2 - 20x_1 - 8y_1 + 8 = 0 \\ 2x_1{}^2 + 2y_1{}^2 + 10x_1 + 2y_1 - 112 = 0 \end{cases}$$

. Віднявши від другого рівняння перше рівняння, отримаємо: $30x_1 + 10y_1 - 120 = 0 \iff 3x_1 + y_1 - 12 = 0 \iff y_1 = 12 - 3x_1$.

Підставивши останній вираз в перше з рівнянь вихідної системи, отримаємо: $x_1{}^2 + (12 - 3x_1)^2 - 10x_1 - 4(12 - 3x_1) + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1{}^2 - 7x_1 + 10 = 0$. Розв'язками цього рівняння є числа $x_{11} = 5$ і $x_{12} = 2$. Відповідно $y_{11} = -3$ і $y_{12} = 6$. Тобто ми віднайшли дві можливі точки дотику дотичної до кола $M_{11}(5; -3)$ і $M_{12}(2; 6)$. Згідно з (1.5), отримаємо шукану відстань: $M_0M_{11} = \sqrt{(5-(-10))^2 + (-3-(-3))^2} = 15$ і

$$M_0M_{12} = \sqrt{(2-(-10))^2 + (6-(-3))^2} = 15$$

Відповідь: 15.

Таблиця 1

№	1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В
1.1	3;7;4;7	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1
1.2	4; 7	3; 4	2; 1	3; -4	4; 5	6; -1	1; 0	5; -2	7; 1
1.3	5; 60º	3; 45º	2; 135º	3; -45º	4; 135º	6; -120º	1; 0º	3; -60º	7; 90º
1.4	1;-2;3;4	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1
1.5	-3; 0; 5; -4; 3	6; -1; 1; 0; 2	5; -2; 1; 0; 1,5	2; 1; 1; 2; 4	3; -4; 2; 3; 5	2; 1; 3; 4; 6,5	1; 2; 4; -3; 7	4; 5; 4; 6; 8,2	3; 4; -7; 1; 9
1.6	4; 7; 0; 1; 5; 1	3; -4; 2; 3; 5; -9	6; -1; 1; 0; 2; -4	3; 4; -7; 1; 9; 7	5; -2; 1; 0; 1; 5	1; -2; 4; -3; 7; 9	2; -1; 1; 2; 4; -5	-2; 1; 3; 4; 6; -5	4; 5; -4; 6; 8; -2
1.7	-2; 1; 3; 4; 6; -5	2; -1; 1; 2; 4; -5	4; 7; 0; 1; 5; 1	4; 5; -4; 6; 8; -2	1; -2; 4; -3; 7; 9	3; -4; 2; 3; 5; -9	3; 4; -7; 1; 9; 7	6; -1; 1; 0; 2; -4	5; -2; 1; 0; 1; 5
1.8	4; 5; -4; 6; 8; -2	1; -2; 4; -3; 7; 9	3; -4; 2; 3; 5; -9	-2; 1; 3; 4; 6; -5	2; -1; 1; 2; 4; -5	6; -1; 1; 0; 2; -4	5; -2; 1; 0; 1; 5	4; 7; 0; 1; 5; 1	3; 4; -7; 1; 9; 7
1.9	1;0;-7;1	3;4;5;-2	1;-2;3;4	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1
1.10	2;1;-1;3	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1
1.11	3;-4;2;-5	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1	3;4;1;2	4;-3;2;1
1.12	2;1;3; 7;4;-1	-2; 1; 3; 4; 6; -5	2; -1; 1; 2; 4; -5	6; -1; 1; 0; 2; -4	5; -2; 1; 0; 1; 5	4; 7; 0; 1; 5; 1	3; 4; -7; 1; 9; 7	1; -2; 4; -3; 7; 9	3; -4; 2; 3; 5; -9
1.13	-1;3;7;7; 4;0;1;-4	-2;1;3;4; 6;-5;2;-1	2;-1;1;2; 4;-5;3;-1	4;7;0;1;5 ;1;6;1	4;5;-4;6; 8;9;4;-3	1;-2;4;3; 7;9;8;-1	3;-4;2;3; 5;-9;5;7	3;4;-7;1; 9;7;1;8	6;-1;1;0; 2;-4;1;-1
1.14	3; -4; 2; 3; 5; -9	4; 7; 0; 1; 5; 1	3; 4; -7; 1; 9; 7	6; -1; 1; 0; 2; -4	-2; 1; 3; 4; 6; -5	5; -2; 1; 0; 1; 5	1; -2; 4; -3; 7; 9	4; 5; -4; 6; 8; -2	2; -1; 1; 2; 4; -5
1.15	3; 1; -3/4; 2	1;1; -3/4;-3	1; 2; -3/4; -1	1; 2; -4/3;10	2; 2; -4/3;11	3; 3; -4/3; -3	4; 3; -4/3;7	5; 8; -3/4;4	6; 9; -3/4;9
1.16	2; -1	1; -5	6; 1	-7; -2	2; 7	3; 5	4; 12	-5; 5	2; -6
1.17	2; -5	2; 7	3; -5	-4; 12	-5; 5	2; -6	1; -5	6; 1	-7; -2
1.18	-8;12;2; -3;-5;1	-2;11;3; 4;-6;-5	5;-2;11; 0;-1;5	10;-2;4; -3;7;9	4;5;-4; 6;8;-2	2;-10;1; 2;4;-5	4;7;10; 1;5;-10	3;4;-7; 14;9;7	6;-10;1; 10;2;-4
1.19	8; 3; 1; 2; 1; -1; 3; 2; 3	-2; 1; 3; 4; 6; -5; 2; -1; 7	2; -1; 1; 2; 4; -5; 3; -7; 4	4; 7; 0; 1; 5; 1; 6; 1; 9	4; 5; -4; 6; 8; 9; 4; -2; 3	1; -2; 4; -3; 7; 9; 8; -1; 0	3; -4; 2; 3; 5; -9; 5; -7; 0	3; 4; -7; 1; 9; 7; 1; 8; 11	6; -1; 1; 0; 2; -4; 1; -1; 8
1.20	5; -1; 2; -3; 5	4; 7; 1; 5; 1	3; 4; 1; 9; 7	6; -1; 0; 2; -4	-2; 1; 4; 6; -5	5; -2; 0; 1; 5	1; -2; -3; 7; 9	4; 5; 6; 8; -2	2; -1; 2; 4; -5
1.21	-4;3;21	-1;-1; 1	0; 1; -8	2; -2; 4	-2; 3; 4	3; 0; 9	-4; 3; 0	-2;7;44	3;-4;-56
1.22	2;4;1;2	3;2;1;1	4;3;2;1	3;4;1;2	2;3;1;1	5;3;2;1	3;5;1;2	5;4;2;1	4;2;2;1
1.23	4; 0,6	3; 0,75	5; 0,3	7; 0,65	8; 0,8	6; 0,25	2; 0,4	9; 0,6	4; 0,85
1.24	3; 4	4; 3	1; 6	6; 1	2; 5	5; 2	3; 2	5; 4	7; 8
1.25	8; 3	2; 9	4; 8	2; 25	8; 9	2; 49	8; 16	6; 27	2; 4
1.26	2;16;31	3;-18;27	4;16;10	5;-10;15	3;12;10	2;-16;34	3;18;25	4;-16;20	5;10;0
1.27	4;1	4; 3	1; 6	6; 1	2; 5	5; 2	3; 2	5; 4	7; 8
1.28	7;1;10	3;18;27	4;1;10	5;10;15	3;10;10	2;16;34	3;18;25	4;16;20	5;3;11
1.29	7;8;5;3	3;2;4;1	4;3;5;2	3;4;6;1	2;3;7;1	5;3;8;2	3;5;9;2	5;7;6;3	4;2;8;1
1.30	-10;-3;1; 1;-10;-4; 4	7;-1;1;1; 8;-10;16	5;-4;1;1; 12;4;15	9;4;1;1; 10;-12; -39	-2;2;1;1; 2;-18;57	1;-1;1;1; 12;4;15	3;12;1;1; -6;-24;53	6;8;1;1; 10;-12; -39	1;-2;1;1; 2;-18;57

II. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел.

Наприклад, дві матриці: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Горизонтальні ряди чисел називаються ***рядками,*** вертикальні – **стовпцями.** Рядки нумеруються згори вниз, стовпці – зліва направо. Числа, що утворюють матрицю, називаються її **елементами.** Елементи матриці позначають малими латинськими буквами з подвійними індексами (рис. справа). Так, a_{ij} – елемент, який міститься в i-му рядку, j-му стовпці. Самі матриці позначають великими латинськими буквами. Якщо матриця має m рядків і n стовпців, то говорять, що вона має **розмір** m на n. Позначають $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, нехай є три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 9 \\ 5 & 7 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так, елемент $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{23} = 7$, $b_{11} = 8$, $b_{23} = 0$, $c_{31} = -1$, $c_{43} = -4$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 7$. Матриця A має розмір 2×3, $B - 3 \times 3$, $C - 4 \times 4$.

Матриця називається **нульовою,** якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

Дві матриці називаються **рівними,** якщо вони мають однаковий розмір і в них рівні між собою однаково розміщені елементи.

Матриця: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова, $F = \begin{pmatrix} 2+1 & 16-11 & 9-10 \\ 10+1 & 3\cdot 3 & 140:20 \end{pmatrix}$ рівна матриці A.

Матриця називається **квадратною,** коли число її рядків дорівнює числу її стовпців. Якщо квадратна матриця має n стовпців, то говорять, що матриця має **порядок** n. Ряд чисел a_{11}, a_{22}, … a_{nn} називається **головною її діагоналлю.**

Наприклад, матриці B і C – квадратні з порядком відповідно 3 і 4.
Елементи 8, 5, 3 утворюють головну діагональ матриці B;
1, 7, 0, 2 – утворюють головну діагональ матриці C.

Квадратна матриця називається **діагональною,** якщо всі її елементи, розміщені поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Наприклад, матриці $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ і $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – діагональні.

Діагональна матриця називається **одиничною,** якщо елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці. Одинична матриця позначається так:

$E = \begin{pmatrix} 1\,0\dots0 \\ 0\,1\dots0 \\ \dots\dots\dots \\ 0\,0\dots1 \end{pmatrix}$. Наприклад, деякі одиничні матриці $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Якщо для матриці $a_{ij} = a_{ji}$, то матрицю називають **симетричною**.

Наприклад, деякі симетричні матриці $N=\begin{pmatrix}4&3&7\\3&-2&0\\7&0&9\end{pmatrix}$, L, M, E_1, E_2.

Транспонуванням матриці називається заміна її рядків на стовпці зі збереженням порядку їх запису. Позначають A^T або $A^/$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn}\end{pmatrix},\quad A^T=A^/=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{21}\ \dots a_{m1}\\ a_{12}\ a_{22}\ \dots a_{m2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}\ a_{2n}\ \dots a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Наприклад, якщо $P=\begin{pmatrix}4&9&-2\\3&5&1\\7&8&-6\end{pmatrix}$, то $P^T=P'=\begin{pmatrix}4&3&7\\9&5&8\\-2&1&-6\end{pmatrix}$.

Матриця A називається **симетричною**, якщо $A^/=A$, і **кососиметричною**, якщо $A^/=-A$.

Н-д: $K=\begin{pmatrix}1&5&9\\5&6&4\\9&4&0\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&0&-7\\-3&7&0\end{pmatrix}$. Матриця K є симетрична, T – кососиметрична.

Розглянемо дві матриці: $A_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ Матриця A_1 називається *верхньою трикутною*, а матриця A_2 – *нижньою трикутною*.

2.2. Дії над матрицями

1. *Сумою* (*різницею*) *матриць одного порядку* $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=A+B$ ($C=A-B$), $C=(c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі (*різниці*) відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$).

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}5&8&4&1\\12&-8&1&0\\35&4&-9&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\-4&-2&0&5\\8&-1&9&2\end{pmatrix}$.

Обидві матриці мають розмірність 3×4, тому можна за означенням утворити їх суму-матрицю:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}5+1&8+2&4+3&1-1\\12-4&-8-2&1+0&0+5\\35+8&4-1&-9+9&7+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10&7&0\\8&-10&1&5\\43&3&0&9\end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент якої c_{ij} одержується множенням відповідних елементів матриці A на α, $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}-1&2&-5\\3&4&-2\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, то $C=\alpha A=\begin{pmatrix}-3&6&-15\\9&12&-6\end{pmatrix}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності: 1º. $A+B=B+A$. 2º. $\alpha A=A\alpha$. 3º. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. 4º. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$. 5º. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

3. Для знаходження добутку $A\cdot B$ матриць A та B необхідно, щоб кількість стовпців матриці A (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці B (другого множника).

Добутком матриці $A=(a_{ij})$ розмірності $m\times p$ на матрицю $B=(b_{ij})$ розмірності $p\times n$ називається така матриця $C=A\cdot B$ розмірністю $m\times n$, $C=(c_{ij})$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-ого рядка матриці A на відповідні за порядком елементи j-ого стовпця матриці *B*, тобто кожен елемент матриці *C* знаходять за формулою: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Наприклад: 1) знайдемо добуток матриць *AB* та *BA*, якщо: а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

а) $AB = \begin{pmatrix} 4\cdot(-4) + 2\cdot(-1) + (-8)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16-2-48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -66 \end{pmatrix}$ – ця матриця розміром 1×1.

$$BA = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 & 4\cdot 2 & 4\cdot(-8) \\ -1\cdot 4 & -1\cdot 2 & -1\cdot(-8) \\ 6\cdot 4 & 6\cdot 2 & 6\cdot(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & -32 \\ -4 & -2 & 8 \\ 24 & 12 & -48 \end{pmatrix}.$$

б) $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + 5\cdot(-2) + (-1)\cdot 6 \\ 2\cdot 4 + 1\cdot(-2) + (-3)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 0 + 4\cdot 2 & 4\cdot 5 + 4\cdot 1 & 4\cdot(-1) + 4\cdot(-3) \\ -2\cdot 0 + (-2)\cdot 2 & -2\cdot 5 + (-2)\cdot 1 & -2\cdot(-1) + (-2)\cdot(-3) \\ 6\cdot 0 + 6\cdot 2 & 6\cdot 5 + 6\cdot 1 & 6\cdot(-1) + 6\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 24 & -16 \\ -4 & -12 & 8 \\ 12 & 36 & -24 \end{pmatrix}.$$

2) Записати наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі а) $\begin{cases} x + 5y = 23 \\ 6x + 4y = 18 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - z = 4 \\ x + y + 4z = 7 \\ -x + 6y = -5 \end{cases}$. Р-к.: а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 18 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

П р и к л а д 2. 1. Знайти матрицю $C_1 = A\cdot B$ і матрицю $C_2 = B\cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32} подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 3$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 11$, $a_{22} = 9$, $a_{23} = 7$, $b_{11} = 4$, $b_{12} = 3$, $b_{21} = 9$, $b_{22} = 5$, $b_{31} = -2$, $b_{32} = 1$.

Отже: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Матриця *A* розміром 2×3, матриця *B* розміром 3×2. Отже можна знаходити добуток і $A\cdot B$, і $B\cdot A$. Матриця $C_1 = A\cdot B$ буде розмірністю 2×2.

$$C_1 = A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 5\cdot 9 + (-1)\cdot(-2) & 3\cdot 3 + 5\cdot 5 + (-1)\cdot 1 \\ 11\cdot 4 + 9\cdot 9 + 7\cdot(-2) & 11\cdot 3 + 9\cdot 5 + 7\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 + 45 + 2 & 9 + 25 - 1 \\ 44 + 81 - 14 & 33 + 45 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 33 \\ 111 & 85 \end{pmatrix}.$$ Матриця $C_2 = B\cdot A$ буде розмірністю 3×3.

$$C_2 = B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 11 & 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 + 3\cdot 11 & 4\cdot 5 + 3\cdot 9 & 4\cdot(-1) + 3\cdot 7 \\ 9\cdot 3 + 5\cdot 11 & 9\cdot 5 + 5\cdot 9 & 9\cdot(-1) + 5\cdot 7 \\ (-2)\cdot 3 + 1\cdot 11 & (-2)\cdot 5 + 1\cdot 9 & (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 47 & 17 \\ 82 & 90 & 24 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C_1 = \begin{pmatrix} 59 & 33 \\ 111 & 85 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 45 & 47 & 17 \\ 82 & 90 & 24 \\ 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний* (*непереставний*) $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Якщо $A\cdot B = B\cdot A$, то матриці *A* і *B* називають *переставними* (*комутативними*).

Наприклад, розглянемо матриці $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Так добуток $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2+7\cdot 3 & 4\cdot 3+7\cdot 2\\ 7\cdot 2+4\cdot 3 & 7\cdot 3+4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 26\\ 26 & 29\end{pmatrix}$, а інший добуток $B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4+3\cdot 7 & 2\cdot 7+3\cdot 4\\ 3\cdot 4+2\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 26\\ 26 & 29\end{pmatrix}$, отже $A\cdot B = B\cdot A$, то матриці $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 4\end{pmatrix}$, і $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ є *переставними* (*комутативними*).

Якщо E – одинична матриця, то $A\cdot E = E\cdot A = A$.

2.3. Визначники. Обчислення визначників та їх властивості

Розглянемо квадратну матрицю: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом або визначником матриці.** Детермінант матриці позначається так:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Детермінант так само, як і матриця, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Детермінанти можуть бути першого, другого і n-го порядків. Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць. Якщо розглянути деякий елемент квадратної матриці A, який позначимо a_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, і побудувати матрицю без цього рядка і стовпця, то дістанемо матрицю $(n-1)$-го порядку. Цій матриці відповідає визначник $(n-1)$-го порядку, який називається **мінором матриці** A, який відповідає елементу a_{ij}.

Мінором $(n-1)$-го порядку **елемента** a_{ij} **матриці** n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Мінор матриці позначається так: M_{ij}.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & 9 & -2\\ 3 & 5 & 1\\ 7 & 8 & -6\end{pmatrix}$, то мінор, наприклад, елемента a_{12} такий: $M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 7 & -6\end{vmatrix}$, елемента a_{23} такий: $M_{23}=\begin{vmatrix}4 & 9\\ 7 & 8\end{vmatrix}$, а елемента a_{31} такий: $M_{31}=\begin{vmatrix}9 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}$.

Обчислення визначників. Визначник порядку n, де $n > 1$, можна знайти за формулою:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}.$$

Отже, визначник матриці порядку два буде таким:

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\\ a_{21}\ a_{22}\end{pmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічній діагоналях.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ -11 & 3\end{pmatrix}$, то $\det A=|\ A\ |=4\cdot 3-7\cdot(-11)=12+77=89$.

Якщо маємо визначник третього порядку, то

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Введемо поняття алгебраїчного доповнення елемента a_{ij}, позначивши його через A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Тоді визначник матриці A можна записати у вигляді: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$ і довести, що $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, $i = 1,2,...,n$, або $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, $j = 1,2,...,n$. Ці формули називаються **розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця**.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Використовуючи ці формули, запишемо розклад визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

де

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11},\; A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -M_{12},\; A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = M_{13}.$$

Отже: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

Наприклад, знайдемо визначник таких матриць. 1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

$$|\,A\,| = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 51 + 7\cdot 34 - 8\cdot 34 = 153 - 34 = 119.$$

2) $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, то $|\,B\,| = 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 95$.

Щоб розкрити визначник третього порядку, можна використати, крім розглянутого правила розкладання за елементами якого-небудь стовпця або рядка, ще й інші правила: правило трикутників, правило приписування стовпців, (ці правила є вихідними з вищенаведеного і меншзастосовними).

Визначник вищого порядку розкривають розкладанням за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

Приклад 2.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 4$, $a_{24} = 8$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 5$, $a_{34} = 19$, $a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 2$, $a_{44} = 18$.

Отже: $\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1&1\\1&2&4&8\\0&1&5&19\\0&0&2&18\end{vmatrix}$. Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка, бо в четвертому ряді аж два нульових елементи, тобто, при розкладі визначників третього порядку буде тільки два (аналогічно буде і якщо розкладати за елементами першого стовпця):

$$\Delta=0+0+(-1)^{4+3}\cdot2\begin{vmatrix}1&3&1\\1&2&8\\0&1&19\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot18\begin{vmatrix}1&3&1\\1&2&4\\0&1&5\end{vmatrix}=-2\cdot[1\cdot(2\cdot19-1\cdot8)-3\cdot(1\cdot19-0\cdot8)+1\cdot(1\cdot1-0\cdot2)]+$$

$$+18\cdot[1\cdot(2\cdot5-1\cdot4)-3\cdot(1\cdot5-0\cdot4)+1\cdot(1\cdot1-0\cdot2)]=-2\cdot[-26]+18\cdot[-8]=52-144=-92.$$

Властивості визначників.

1°. *Значення визначника не змінюється, якщо усі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером.*

Наприклад: 1) $\begin{vmatrix}5&4\\-3&2\end{vmatrix}=10-(-12)=22$. Замінивши стовпці рядками, зберігаючи порядок, отримаємо: $\begin{vmatrix}5&-3\\4&2\end{vmatrix}=10-(-12)=22$.

2) $\begin{vmatrix}4&9&-2\\3&5&1\\7&8&-6\end{vmatrix}=95$ (цей результат взятий з попередніх прикладів).

Замінимо в даному визначнику стовпці рядками, зберігаючи порядок їх слідування, тобто транспонуємо його, після цього обчислимо транспонований визначник:

$$\begin{vmatrix}4&3&7\\9&5&8\\-2&1&-6\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}5&8\\1&-6\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}9&8\\-2&-6\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}9&5\\-2&1\end{vmatrix}=4\cdot(-38)-3\cdot38+7\cdot19=95.$$

Ця властивість означає *рівнозначність рядків і стовпців визначника.*

2°. *Якщо поміняти місцями два стовпці (рядки) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.*

Наприклад, помінявши місцями два рядки визначника з попереднього прикладу, обчислимо його: $\begin{vmatrix}-3&2\\5&4\end{vmatrix}=-12-10=-22$.

Для доведення властивостей 1° і 2° достатньо розписати кожний визначник і порівняти результати.

3°. *Визначник, який має два однакові стовпці (рядки), дорівнює нулю.*
Дійсно, нехай визначник Δ має два однакові стовпці. Тоді, помінявши місцями ці стовпці, дістанемо визначник, що дорівнює $-\Delta$, тобто $\Delta=-\Delta$, звідси знаходимо $2\Delta=0$ або $\Delta=0$.

Наприклад: 1) $\begin{vmatrix}-3&2\\-3&2\end{vmatrix}=-6-(-6)=0$.

2) $\begin{vmatrix}3&4&-5\\7&0&1\\3&4&-5\end{vmatrix}=7\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}4&-5\\4&-5\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\3&4\end{vmatrix}=-7\cdot0-1\cdot0=0$.

4°. *Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника*: $\begin{vmatrix}a_{11}&ma_{12}\\a_{21}&ma_{22}\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$.

Звідси як наслідок маємо, що коли помножити всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) на одне і те саме число, то і визначник помножиться на це число.

Наприклад: $\begin{vmatrix}4&1\\6&-7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&-7\end{vmatrix}=2\cdot(-17)=-34$; з іншої сторони: $\begin{vmatrix}4&1\\6&-7\end{vmatrix}=-28-6=-34$.

5°. *Визначник, елементи двох стовпців (рядків) якого відповідно пропорціональні, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай маємо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, в якому $a_{12} = ma_{11}$ і $a_{22} = ma_{21}$. Тоді, враховуючи властивості 3°, 4°, дістанемо: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ma_{11} \\ a_{21} & ma_{21} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$

Наприклад: $\begin{vmatrix} 41 & -7 \\ 82 & -14 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 41 & -7 \\ 41 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0$.

6°. *Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями (рядками) є відповідні доданки, а решта збігається із стовпцями (рядками) заданого визначника*:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{/} + a_{11}^{//} & a_{12} \\ a_{21}^{/} + a_{21}^{//} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^{/} & a_{12} \\ a_{21}^{/} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^{//} & a_{12} \\ a_{21}^{//} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо позначити:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^{/} + a_{11}^{//} & a_{12} \\ a_{21}^{/} + a_{21}^{//} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^{/} & a_{12} \\ a_{21}^{/} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}^{//} & a_{12} \\ a_{21}^{//} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

тобто властивість 6° виражає правило додавання визначників.

Наприклад: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (4+2) + (8-0) = 14$. З іншої сторони: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$.

7°. *Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця* (*рядка*) *додати відповідні елементи іншого стовпця* (*рядка*), *помножені на одне і те ж число.*

Справді, нехай дано два визначники, наприклад, третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді з урахуванням властивостей 3°, 4° і 6° маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + m\cdot 0 = \Delta..$$

Наприклад: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2\cdot 3 & 3 \\ 7 + 2\cdot 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 33 = -19 = \Delta$.

8°. *Сума добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Н-д: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$, $a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} = 5\cdot(-1)^{2+1}(-7) + (-7)\cdot(-1)^{2+2}\cdot 5 = 5\cdot 7 - 7\cdot 5 = 0$.

2.4 Ранг матриці

Введемо поняття рангу матриці. Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається **рангом матриці.** Це записують так: r = rang A = Rg *A.* Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого порядку називається **базисним.**

Теор. 1 (про базисний мінор). *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

Доведення цієї теореми не наводимо. Із теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.*

Для визначення рангу матриці використовується метод обвідних (які містять у собі) мінорів, що ґрунтується на такій теоремі.

Теор. 2. *Якщо матриця A містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори* (r+1)*-го порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.*

При обчисленні рангу матриці треба переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено мінор *r-го* порядку M – відмінний від нуля, то треба обчислити лише мінори (r + 1)-го порядку, що обводять мінор M. Якщо всі вони рівні нулю, то ранг матриці дорівнює r. Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори (r+2)-го порядку і т.д.

Наприклад, визначити ранг матриці методом обвідних мінорів:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$. Мінор другого порядку, що стоїть у лівому верхньому куті матриці $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=0$, але в матриці є і відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад: $\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Далі утворимо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку $\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх можна утворити лише два $\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -7 & 4 & -4\end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix}2 & -4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -7 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$. Обидва вони дорівнюють нулю – це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

2) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Запишемо матриці третього порядку:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Мінор першого порядку, розміщений у верхньому куті матриці A_1, не дорівнює нулю ($1\neq 0$). Обвідний її мінор другого порядку також не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0$.

Обвідний мінор третього порядку матриці A_1: $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=0$. Інші матриці A_2, A_3, A_4 дадуть ті самі результати, що і матриця A_1. Відповідь: $r(A)=2$.

Для обчислення рангу матриці A застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помноженого на деяке число.

Дійсна така теорема.

Теорема 3. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Скориставшись цими перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли всі її елементи, крім a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}, де $r \le \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r.

У подальшому матриці, які мають рівні ранги, будемо називати *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці будемо об'єднувати знаком ~ (хвилька).

Приклад 2.3. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -5$, $a_{24} = -6$, $a_{31} = -3$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = -4$, $a_{34} = -7$, $a_{41} = 1$, $a_{42} = 2$, $a_{43} = -1$, $a_{44} = 0$. Отже: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Виконаємо елементарні перетворення матриці. Поміняємо місцями I-ий і II-ий стовпчики. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$. (*)

Утворимо нулі в першому стовпчику помноживши елементи першого рядка спочатку на –4 і додавши до другого, потім на –1 і додавши до третього, і нарешті – на –2 і додамо до четвертого, одержимо матрицю, що записана після першої хвильки в (*). Помножимо тепер елементи першого стовпчика послідовно на –2 і додамо до другого стовпчика, на –1 і додамо до третього стовпчика, на –3 і додамо до четвертого стовпчика, одержимо вигляд матриці після другої хвильки.

Помножимо другий рядок одержаної матриці на –1/9, третій на –1/5,четвертий на –1/3, одержимо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Віднімемо від четвертого і від третього рядка другий, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Віднімемо від четвертого і від третього стовпця другий помножений відповідно на 1 і на 2, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отже, після виконання всіх цих елементарних перетворень з остаточного вигляду матриці випливає, що її ранг дорівнює 2, тому що єдиний мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$, всі інші, більш високого порядку, дорівнюють нулю. Відповідь: $r = 2$.

Якщо в матриці, нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, то її можна з допомогою елементарних перетворень звести до такої, в якій всі елементи поза головною діагоналлю будуть нульові, а головна діагональ міститиме стільки ненульових елементів, скільки елементів головної діагоналі, відмінних від нуля є у вихідній матриці. Отже, якщо в матриці нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 2.4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ за допомогою елементарних перетворень. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} подані в табл.2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = -1$, $a_{24} = 1$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = -1$, $a_{34} = 5$.

Отже: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Перший рядок додамо до другого і до третього, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Від третього рядка віднімемо другий помножений на два, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Від другого рядка віднімемо перший, отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. У даній матриці нижче головної діагоналі всі елементи є нулі, тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля, тобто 2. Відповідь: $r = 2$.

2.5. Системи лінійних рівнянь

Систему лінійних рівнянь у загальному можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Ця система називається *системою т лінійних рівнянь з п невідомими,* де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — невідомі; a_{ij} — коефіцієнти системи рівнянь; b_i — вільні члени, або праві частини системи рівнянь. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо всі b_i=0.

Розв'язком системи рівнянь (*) є така множина чисел k_1, k_1, ..., k_n, при підстановці яких в кожне з рівнянь системи замість відповідних невідомих x_1, x_2, …, x_n, рівняння перетворюються на вірні числові тотожності. Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною,* якщо має хоча б один розв'язок – *сумісною.* Сумісна система рівнянь називається *визначеною,* якщо вона має єдиний розв'язок, якщо розв'язків більше, ніж один, – *невизначеною.* Системи лінійних рівнянь, які мають більше, ніж один розв'язок (тобто невизначені системи), мають безліч розв'язків.

Введемо матрицю коефіцієнтів системи: $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$,

матрицю-стовпець правої частини $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ і невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Використовуючи означення добутку матриць, систему (*) можна записати у вигляді $AX=B$. Ця форма запису системи (*) називається **матричною.**

Пропонуючи задачу про знаходження розв'язку системи (*), ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих. Тому система (*) **може не мати розв'язку.** Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Система може мати **нескінченну множину розв'язків.** Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ Для цієї системи впорядкована трійка чисел $k_1 = 1 + a$, $k_2 = 1 - 2a$, $k_3 = a$ є розв'язком (a – будь-яке число).

Система може мати **єдиний розв'язок**. Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

Розв'язком цієї системи є тільки одна пара (впорядкована пара) чисел (2, 1).

Матриця A коефіцієнтів при невідомих системи (*) називається **основною**. Якщо до матриці A приєднати стовпець вільних членів системи (*), то дістанемо так звану розширену матрицю A^* даної системи: $A^* = \left(\begin{array}{l|l} a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Наприклад, для системи $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ розширена матриця буде такою: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$.

Приклад 2.5. Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$ відомим зі школи методом підстановки. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4 подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 4$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 5$, $b_1 = 7$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = -2$, $a_{24} = -3$, $b_2 = 3$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$, $a_{34} = 0$, $b_3 = -1$, $a_{41} = 2$, $a_{42} = 3$, $a_{43} = 2$, $a_{44} = -8$, $b_4 = -7$. Отже: $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$.

З другого рівняння: $x_1 = 3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4$. Підставимо отриманий вираз для x_1 замість x_1 в інші рівняння, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 4\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2\cdot(3 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4) + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_2 + 9x_3 + 17x_4 = -5 \\ 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = -10 \\ 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -13 \end{cases}.$$

З першого рівняння: $x_2 = \dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}$. Підставимо отриманий вираз для x_2 замість x_2 в інші рівняння, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 5\cdot\left(\dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}\right) + 8x_3 + 9x_4 = -10 \\ 7\cdot\left(\dfrac{-5 - 9x_3 - 17x_4}{5}\right) + 6x_3 - 2x_4 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 - 8x_4 = -5 \\ -33x_3 - 129x_4 = -30 \end{cases}.$$

З першого рівняння: $x_3 = 5 - 8x_4$. Підставимо отриманий вираз для x_3 замість x_3 в інше рівняння, отримаємо: $-33\cdot(5 - 8x_4) - 129x_4 = -30 \Leftrightarrow x_4 = 1$. $x_3 = 5 - 8 = -3$. $x_2 = \dfrac{-5 - 9(-3) - 17}{5} = 1$. $x_1 = 3 + 2 + 2(-3) + 3 = 2$. Відповідь: $(2, 1, -3, 1)$.

Приклад 2.6. Використовуючи означення добутку матриць, розв'язати матричне рівняння: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} подані в таблиці 2. *Розв'язування:* Варіант 1: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$, $b_{11} = 3$, $b_{12} = 5$, $b_{21} = 5$, $b_{22} = 9$. Отже: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Очевидно, що матриця X розміром 2×2, отже, нехай $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, тоді: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot x_{11} + 2\cdot x_{21} = 3 \\ 3\cdot x_{11} + 4\cdot x_{21} = 5 \end{cases}$ і $\begin{cases} 1\cdot x_{12} + 2\cdot x_{22} = 5 \\ 3\cdot x_{12} + 4\cdot x_{22} = 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x_{11} = -1, x_{12} = -1, x_{21} = 2, x_{22} = 3$. Отже $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.6. Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Теорема. Якщо **головний визначник** Δ, складений з коефіцієнтів при невідомих, системи n-лінійних рівнянь з n-невідомими (*), відмінний від нуля, то така система рівнянь має **єдиний** розв'язок (**сумісна і визначена**), який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який складається з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (*).

Δ_j — визначник, який одержується шляхом заміни j-го стовпчика в головному визначнику на стовпчик вільних членів.

Приклад 2.7. Методом Крамера розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4 подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{14} = 1$, $b_1 = -11$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -3$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -6$, $b_2 = -4$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = -1$, $a_{34} = 2$, $b_3 = 0$, $a_{41} = 1$, $a_{42} = 4$, $a_{43} = -7$, $a_{44} = 6$, $b_4 = -11$. Отже: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -11. \end{cases}$.

Складемо і обчислимо спочатку головний визначник цієї системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27$. Головний визначник системи рівнянь відмінний від нуля, отже, дана система має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Для цього утворимо й обчислимо ще чотири визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -11 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -11 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -11 \\ 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

За правилом Крамера, маємо розв'язки

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2,\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{27} = 0.$$

Отже, $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0$ – єдиний розв'язок.

2.7. Метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь

Метод Гаусса (Жордана-Гаусса) розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в послідовному виключенні змінних і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n0} \end{cases}$$

до трикутного вигляду

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = b_{10}; \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = b_{20}; \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = b_{n0}, \qquad b_{kk} \neq 0\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \qquad (**)$$

Над системою лінійних рівнянь виконують операції, які називаються **елементарними:**

а) множення будь-якого рівняння системи на дійсне число, відмінне від нуля;

б) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число;

в) перестановка рівнянь у системі;

г) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$.

Ці операції не порушують рівносильності (не змінюють множину розв'язків) системи рівнянь. За допомогою операції б) можна вилучити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, окрім одного. При цьому невідоме, яке вилучають, називається **провідним невідомим;** коефіцієнти при провідному невідомому називаються провідними елементами, а рівняння, у якому зберігається провідне невідоме, називається **провідним рівнянням.**

Для вилучення з усіх рівнянь, крім одного рівняння системи (провідного) невідомого x_1, по-перше потрібно прийняти за провідне перше рівняння системи (для зручності можна і попередньо поміняти в системі рівняння місцями). Пізніше, зокрема для вилучення з k-ого рівняння системи невідомого x_1, потрібно помножимо це рівняння на λ_k, де k = 2, 3, ..., n, і почленно додати знайдене рівняння до провідного. У результаті цього маємо:

$$(a_{11}+\lambda_k a_{k1})x_1+(a_{12}+\lambda_k a_{k2})x_2+\ldots+(a_{1n}+\lambda_k a_{kn})x_n=a_{10}+\lambda_k a_{k0}.$$

Поклавши $a_{11}+\lambda_k a_{k1}=0$, або $\lambda_k=-\dfrac{a_{11}}{a_{k1}}$, дістанемо рівняння, в якому відсутнє невідоме x_1. Аналогічно вилучимо з усіх рівнянь x_1, крім провідного (першого) рівняння. Потім, взявши за провідне друге рівняння знайденої системи, вилучимо x_2, з усіх наступних рівнянь і т. д. У результаті цього дістанемо так звану **ступінчасту систему** (**). Цю систему розв'язують, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знаходять x_n і підставляють в передостаннє рівняння, з якого знаходять x_{n-1}, і т.д.

Якщо система з n невідомими має єдиний розв'зок, то ця система може бути перетворена до трикутного вигляду (**).

Приклад 2.8. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3 подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: a_{11} = 5, a_{12} = -4, a_{13} = 3, b_1 = -2, a_{21} = 1, a_{22} = -2, a_{23} = 4, b_2 = 3, a_{31} = 3, a_{32} = -1, a_{33} = 5, b_3 = 2. Отже: $\begin{cases} 5x-4y+3z=-2 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.

Розглядаючи три невідомі x, y, z, як відповідно x_1, x_2, x_3, згідно з методом Гаусса, спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб елемент a_{11} основної матриці дорівнював одиниці. Отримаємо: $\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 5x-4y+3z=-2 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.

Тепер перше рівняння помножимо на (-5) і почленно додамо до другого (щоб отримати a_{21} = 0), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і почленно додамо до третього (щоб отримати a_{31} = 0). В результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 6y-17z=-17 \\ 5y-7z=-7 \end{cases}.$$

Ця система містить два рівняння, в яких відсутнє невідоме x. Тепер, взявши за провідне друге рівняння знайденої системи, помножимо його на $-\dfrac{5}{6}$ і почленно додамо до третього

(щоб отримати $a_{32} = 0$). В результаті отримаємо систему:
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 6y - 17z = -17 \\ -17z \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + (-7)z = -17 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + (-7) \end{cases}$$
, яка рівносильна наступній системі:
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 6y - 17z = -17 \\ \left(-17 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + (-7)\right)z = -17 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + (-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad -2y \quad +4z \quad = 3 \\ \quad -6y \quad -17z \quad = -17. \\ \qquad\qquad z \quad = 1 \end{cases}$$

Отже, у результаті дістали ступінчасту систему (**). Цю систему розв'яжемо, починаючи з останнього рівняння. Спочатку знайдемо $z = 1$ і підставимо в передостаннє рівняння, з якого знайдемо $y = 0$, і підставимо y, z в перше рівняння, знайдемо $x = -1$.

Зауважимо, що елементарні перетворення доцільно виконувати не з усією системою, а з її розширеною матрицею. В такий спосіб розв'язування цього прикладу виглядає так:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -17 & -17 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Відповідь: (-1, 0, 1) – єдиний розв'язок.

Приклад 2.9. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$
. Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_2, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, b_3, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, b_4 подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = -4$, $b_1 = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 8$, $a_{23} = -6$, $a_{24} = 2$, $b_2 = 6$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$, $a_{34} = -3$, $b_3 = 1$, $a_{41} = 3$, $a_{42} = 6$, $a_{43} = -3$, $a_{44} = -3$, $b_4 = 6$.

Отже: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \\ 8x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$.

Виконаємо елементарні перетворення не з усією системою, а з її розширеною матрицею, тобто:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{c} \text{Від третього,} \\ \text{помноженого на 3,} \\ \text{віднімемо друге,} \\ \text{помножене на два.} \\ \text{Від четвертого} \\ \text{віднімемо перше.} \end{array}\right| \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$
$$\to \left|\begin{array}{c} \text{друге поділимо} \\ \text{на два і додамо} \\ \text{до третього,} \\ \text{а також} \\ \text{віднімемо від} \\ \text{четвертого} \end{array}\right| \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$.

Нехай за основні невідомі (базисні) візьмемо невідомі x_1 та x_2. Тоді інші невідомі системи x_3 та x_4 – вільні. Розглянемо базисні змінні x_1 та x_2 як функції x_3 та x_4, тобто: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 + 4x_4 \\ 4x_2 = 3 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$.

Щоб позбутися в першому рівнянні невідомого x_2, віднімемо від першого рівняння, помноженого на 2, друге рівняння, отримаємо систему: $\begin{cases} 3x_1 = 3 - 3x_3 + 9x_4 \\ 4x_2 = 3 + 3x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + 3x_4 \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$.

Вільним невідомим x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення: $x_3 = C_1$ та $x_4 = C_2$, де C_1 та C_2 – довільні сталі числа з множини дійсних чисел. Отже, отримуємо нескінченну множину розв'язків: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - C_1 + 3C_2 \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}C_1 - \frac{1}{4}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $(1 - C_1 + 3C_2, \frac{3}{4} + \frac{3}{4}C_1 - \frac{1}{4}C_2, C_1, C_2)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 2.10. Знайти всі значення параметра a, при яких система $\begin{cases} A_1 x + (25a^2 - 2)y - 5a = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ не має розв'язків. Числа A_1, A_2, B_2, C_2 подані в таблиці 2.

Розв'язування: Варіант 1: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 2$, $C_2 = -2$. Отже: $\begin{cases} x + (25a^2 - 2)y = 5a \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$.

Ці рівняння системи при певному значенні параметра a є рівняннями прямих ліній в прямокутній системі координат Oxy, бо в кожному з них між змінними x та y є лінійна залежність (див. рівняння 1.13). З геометричної точки зору, щоб система не мала хоча б одного розв'язку, повинно не бути жодної точки перетину цих прямих ліній. Тобто, щоб задовольнялася умова задачі, прямі лінії 1) повинні бути паралельними (повинна виконуватися умова паралельності (1.16), тобто $k_2 = k_1$); 2) не збігатися (обидва рівняння системи не повинні бути рівносильними), інакше розв'яків безліч (координати кожної точки прямих що збіглися і будуть розв'язком системи). Умова рівності кутових коефіцієнтів з даних рівнянь є такою: $-\frac{1}{25a^2 - 2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 25a^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{2}{5}$. Але при $a = \frac{2}{5}$ обидва рівняння системи є рівносильні (з допомогою елементарних операцій можна з одного рівняння отримати інше), тобто множини їх розв'язків, як і самі прямі, збігаються, тобто розв'яків безліч, що не задовольняє умові задачі. Отже, тільки при $a = -\frac{2}{5}$ вихідна система не має розв'язків.

Відповідь: $a = -\frac{2}{5}$.

Таблиця 2

№	1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В
2.1	3;5;-1; 11;9;7; 4;3;9; 5;-2;1	1;3;1; 1;2;4; 0;1;5; 3;5;7	8;3;1; 2;1;-1; 3;2;3; 4;6;-5	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 8;3;1	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 4;6;-5	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 6;8;9	4;5;-4; 6;8;9; 4;-2;3; 11;9;7	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0; 2;4;-5	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 1;-2;4
2.2	1;3;1;1; 1;2;4;8; 0;1;5;19; 1;3;1;1	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1
2.3	2;1;1;3; -1;4;-5;-6 -3;1;-4;-7 1;2;-1;0	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1
2.4	1;-2;1;3; 1;3;-1;1; 3;4;-1;5	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1
2.5	4;-3;1;5; 7;1;-2;-2 -3;3;3;-1; 2;0;-1;2; 3;2;-8;-7	1;5;19;1; 3;1;1;-1; 2;4;8;0; 1;-3;1;1; 2;0;-1;2	3;1;1;5; 19;1;1;1; 2;4;8;0; 1;3;-1;1; 7;1;-2;-2	-2;4;8;0; 3;1;-1;5; 1;19;1;1; 1;3;1;1; 2;0;-1;2	4;-2;8;0; 1;19;1;1; 3;1;-5;1; 1;3;1;1;7; 1;-2;-2	1;3;1;1; 1;5;19;1; 2;4;-8;0; 1;3;-1;1; 1;-3;1;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1; 2;-8;4;0; 1;-3;-1;1; 2;0;-1;2	2;-8;8;0; 3;-1;9;5; 1;14;7;1; 1;3;-1;-1; 1;-3;1;1	3;1;-5;1; 4;-2;8;0; 1;0;-1;1; -1;3;-1;1; 7;1;-2;-2
2.6	1;2;3;4; 3;5;5;9	1;5;19;1; 3;8;5;-7	3;1;1;5; 19;1;5;1	-2;4;8;0; 3;1;-1;5	4;-2;8;0; 1;19;1;1	1;3;1;7; 1;5;19;1	3;-1;1;5; 0;1;91;1	2;-8;8;0; 3;-1;9;5	3;1;-5;1; 4;-2;8;0
2.7	2;1;-5;1; -11;1;-3; 0;-6;-4; 0;2;-1;2; 0;1;4; -7;6;-11	2;1;3;4; 11;7;3;6; 8;24; 3;2;4;5; 14;1;1; 3;4;10	2;-5;3;1; 5;3;-7;3; -1;-1;5; -9;6;2; 7;4;-6; 3;1;8	3;-2;-5; 1;3;2;-3; 1;5;-3;1; 2;0;-4; -3;1;-1; -4;9;22	1;1;-6; -4;6;3; -1;-6;-4; 2;2;3;9; 2;6;3;2; 3;8;-7	1;2;3;-2; 10;2;-1; -2;-3;20; 3;2;-3;2; -50;2;-3; 2;1;110	2;-2;3;3; 8;5;-9;6; 2;7;4;-6; 3;1;8;2; -5;3;1;5	0;5;8;-1; 0;1;2;3; -2;10;0; 2;5;-4; 40;0;7;4; -5;-90	1;2;15;6; 0;3;-1; -6;-4;2; 2;3;9;2; 6;3;2; 3;8;-7
2.8	5;-4;3; -2;1;-2; 4;3;3; -1;5;2	1;1;1;6; 2;1;3;13; 3;1;1;8	1;1;-1;2; 2;-1;4;1; -1;6;1;5	1;2;-1;7; 2;-1;1;2; 3;-5;2;-7	2;3;-1;6; 1;-1;7;8; 3;-1;2;7	1;0;2;7; 2;1;3;13; 3;1;1;8	1;-2;5;-1; 2;-1;4;1; -1;6;1;5	1;-3;2;-5; 2;-1;1;2; 3;-5;2;-7	1;-4;3;1; 1;-1;7;8; 3;-1;2;7
2.9	3;2;0;-4; 3;0;8;-6; 2;6;2;0;1; -3;1;3;6; -3;-3;6	1;-2;0;-2; -6;3;-7;3; -1;-1;5; -9;6;2;7; 2;-5;3; 1;5;	1;1;-6;-4; 6;2;-3;1; 5;-3;1;2; 0;-4;-3; 3;-2;-5; 1;3	-1;1;6;-6; 13;1;1; -6;-4;6;3; -1;-6;-4; 2; 1;1;-6; -4;6	-1;3;5;1; -10;2;-1; -2;-3;20; 3;2;-3;2; -50;1;2; 3;-2;10	3;-7;3;-1; -1;5;-9; 6;2;7;4; -6;3;1;8; 2;-2;3;3; 8	1;-3;-5; -1;10;1; 2;3;-2; 10;0;2;5; -4;40;0; 5;8;-1;0	-2;3;21; 10;-2;3; -1;-6;-4; 2;2;3;9; 2;6;1;2;1 5;6;0	5;2;3;4;1 3;7;3;6;8; 24;3;2;4; 5;14;2; 1;3;4;11
2.10	1;1; 2;-2	1;-1; 2;1	0;-3; -16/3;6	-1;3; -2;2	0;2; 1/3;-3/2	11;-21; 13;-1	0;-3; -16/3;6	11;-21; 13;-1	0;2;1/3; -3/2

III. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3.1. Вектори. Проекції вектора на осі. Координати вектора

Відомо такі два типи величин: 1) величини, для визначення яких досить задати число. Ці величини називаються **скалярними** (наприклад, довжина, густина, температура); 2) величини, для визначення яких недостатньо знати тільки число. Ці величини називаються **векторними** або просто **векторами. Векторною величиною, або вектором** (у широкому розумінні), називається будь-яка величина, що має напрям (наприклад, сила, що діє на матеріальну точку, швидкість, прискорення).

Розрізняють вектори зв'язані, ковзні і вільні. Зв'язаний вектор – це величина, яка задається числом, точкою прикладання, лінією дії та напрямом (наприклад, сила).

Якщо величина визначається числом, лінією дії та напрямом, то така величина називається **ковзним вектором** (наприклад, швидкість при обертовому русі).

Вільним вектором називається величина, яка визначається числом і напрямом, а лінія дії і точка прикладання можуть бути довільними. В аналітичній геометрії розглядають лише вільні вектори і називають їх просто **векторами.**

У геометрії **вектором** (у вузькому розумінні) називається напрямлений відрізок. Напрям відрізка вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора. Якщо припустимо A – початок вектора, а B – кінець, то даний вектор на письмі позначають **AB**, **a**, або $\vec{a}$ чи $\overrightarrow{AB}$.

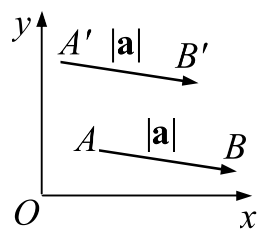


Рис. 3.1

Два вектори називаються **рівними** між собою, якщо кожний із них можна дістати паралельним перенесенням іншого (рис. 3.1).

Рівні вектори є паралельними (колінеарними), мають один і той самий напрям і однакову довжину (рис. 3.1). Довжина вектора **a** (**AB**) називається також **абсолютною величиною,** або **модулем** вектора і позначається |**a**| (AB**,** |**AB**|).

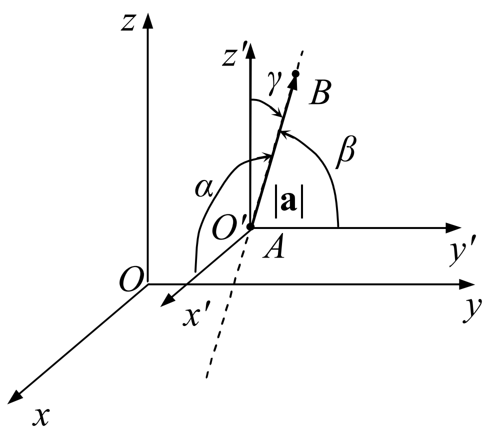


Рис. 3.2

Вектор називається **нульовим** (нуль-вектором), якщо він має нульову довжину, тобто його кінець збігається з початком.

Число визначає довжину вектора, а напрям визначає одну з тих прямих, на якій може бути розміщено вектор внаслідок його паралельного перенесення. Косинуси кутів, які складає ця пряма з осями координат, називаються **напрямними косинусами** і задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Якщо із довільної точки O' прямої, на якій розміщено вектор, побудувати осі $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, паралельні Ox, Oy, Oz (рис. 3.2), то кути, які утворюватиме ця пряма з цими осями, будуть відповідно кутами α, β, γ.

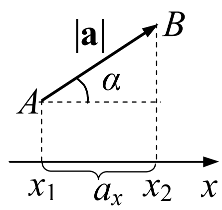


Рис. 3.3

Для побудови вектора на вказаній прямій обирається точка A, яка приймається за початок вектора, а число, яке виражає довжину вектора, дає змогу знайти його кінець. Для цього із точки A у заданому напрямі відкладаємо відрізок AB, довжина якого дорівнює довжині вектора. Кінець цього відрізка і є кінцем вектора **AB**.

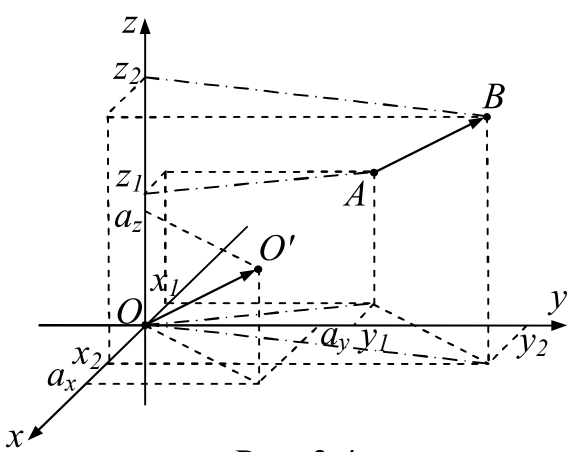


Рис. 3.4

Якщо вектор **a** утворює кут α з віссю x (рис. 3.3), то проекцією вектора **a** на вісь x називається величина:

$$np_x\mathbf{a} \equiv a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha = x_2 - x_1 \qquad (3.1)$$

Тут x_1 – координата проекції початку вектора, а x_2 – координата проекції кінця вектора на вісь x.

За аналогією можна визначити проекцію вектора **a** на будь-яку вісь.

Нехай вектор **a** має початок і кінець в точках A (x_1, y_1, z_1) і B (x_2, y_2, z_2) відповідно (рис. 3.4).

Різниці координат проекцій кінця і початку вектора на осі Ox, Oy, Oz називають **компонентами (координатами** або **проекціями на координатні осі)**.

Вектор **a** однозначно визначається упорядкованою трійкою чисел:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1, \qquad (3.2)$$

які називаються його координатами (рис. 3.4). Позначають так: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Нехай вектори **AB** і **OO′** утворені один з одного паралельним перенесенням на вектор **AO** (рис. 3.4), отже, вони рівні, тому рівні і їх відповідні координати. Координати вектора $\mathbf{OO'} = (a_x, a_y, a_z)$, а вектора $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Оскільки при паралельному переносі вектора його довжина і кути не змінюються, то два рівних між собою вектори завжди мають одні й ті самі координати (компоненти). Як видно (рис. 3.4) відповідні координати цих векторів є рівними, тобто задовольняються рівності (3.2).

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні відповідні компоненти.

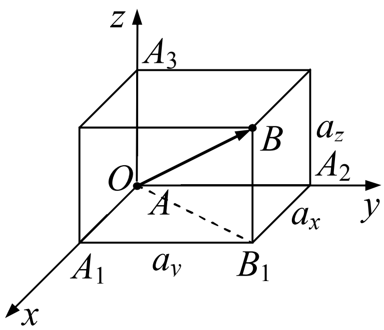


Рис. 3.5

Один зі способів виведення формули довжини вектора через його координати полягає в побудові на векторі, як на діагоналі, прямокутного паралелепіпеда (рис. 3.5) зі сторонами $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Як видно з теореми Піфагора, для прямокутних трикутників AB_1A_1 та AB_1B, довжина вектора **AB**, тобто $|\mathbf{a}|$, визначається за формулою:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\ . \qquad (3.3)$$

Якщо початок вектора збігається з початком координат, то вектор **OB** називається **радіусом-вектором точки** B і його компоненти збігаються з координатами його кінця – точки B.

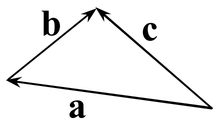


Рис. 3.6

3.2. Дії над векторами

1). Додавання векторів. Наочно **сумою двох векторів a** і **b** називається третій вектор **c**, спрямований із початку першого вектора в кінець другого (початок другого вектора повинен збігатися з кінцем першого). Це правило додавання векторів називається **правилом трикутника** (рис.3.6).

Використовується також **правило паралелограма** додавання векторів.

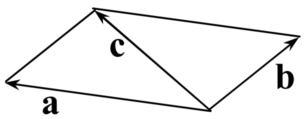


Рис. 3.7

Сумою векторів a і **b** називається третій вектор **c**, який виходить із спільного початку даних векторів і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах **a** і **b** як на сторонах (рис.3.7).

Сумою будь-якого скінченного числа векторів називається вектор, який утворюється внаслідок послідовного застосування правила трикутника (рис.3.8).

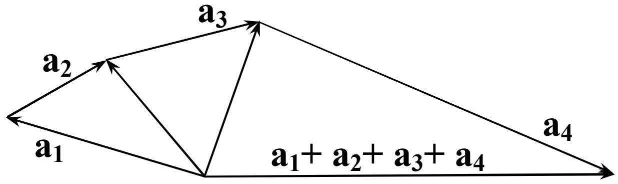


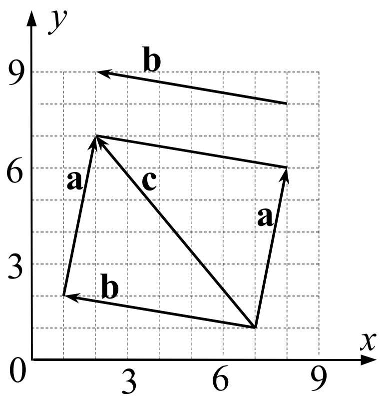
Рис. 3.8

Сумою двох векторів a і **b**, які належать одному простору і задані своїми координатами, називається третій вектор **c**, координати якого дорівнюють сумі відповідних координатів даних векторів:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z). \qquad (3.4)$$

Всіх три визначення суми двох векторів **a** і **b** є еквівалентні.

Наприклад, нехай вектор **a** має початок в точці з координатами (1, 2) і кінець в точці (2, 7), (рис. зліва) отже його компоненти: **a** = (2 - 1, 7 - 2) = (1, 5), а вектор **b** має початок



в точці (8, 8) і кінець в точці (2, 9), отже його компоненти **b** = (2–8, 9–8) = (– 6, 1). Тоді сумою векторів **a** і **b** заданих своїми компонентами за формулою (3.4) буде вектор **c** = **a** + **b** = (1+(–6), 5+1) = (–5, 6). З іншого боку, при застосовані для суми даних двох векторів **a** і **b** правил трикутника і паралелограма, після відповідних паралельних перенесень даних векторів, результатом суми отримаємо вектор **c**, який має початок в точці з координатами (7, 1) і кінець в точці (2, 7), отже, його компоненти **c** = (2–7, 7–1) = (–5, 6).

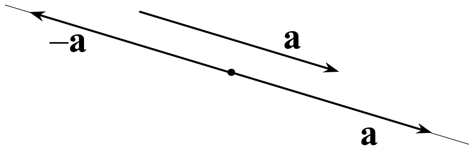
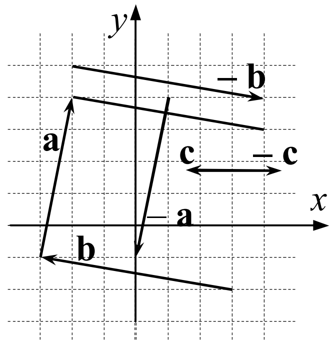


Рис. 3.9

2). Віднімання векторів. Для визначення різниці векторів в наочному просторі спочатку введемо визначення вектора протилежного даному. Два рівних між собою за довжиною, протилежних за напрямом і паралельних, вектори **a** і –**a** називаються **протилежними векторами** (сума їх дорівнює нуль-вектору) (рис 3.9). Компоненти протилежних векторів рівні за модулем і протилежні за знаком.

Наприклад, вектори **a** і – **a** (рис. зліва) є протилежними веторами. Аналогічно протилежні вектори **b** і – **b**, а також **c** і – **c**. Їх компоненти рівні по модулю і протилежні за знаком. Так вектор **c** = (–3, 0), а вектор – **c** = (3, 0), вектор **b** = (– 6, 1), а вектор – **b** = (6, – 1). Як бачимо, яке визначення ми би не брали до уваги, сума протилежних векторів дорівнює нуль-вектору.



Віднімання векторів визначається як дія, обернена до додавання:

a – b = a + (**– b**)

Таким чином, *щоб від вектора* **a** *відняти вектор* **b**, *треба до вектора* **a** *додати вектор, протилежний до вектора* **b** (рис. 3.10).

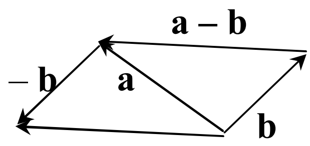
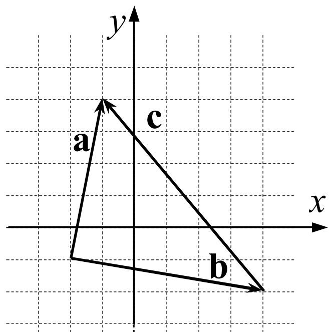


Рис. 3.10

Наочно, різниця векторів **a** і **b** являє собою вектор **a** – **b**, початок якого збігається з кінцем вектора **b**, а кінець – із кінцем вектора **a**, при цьому початки векторів повинні збігатися (рис. 3.10).

Різницею двох векторів a і **b**, які належать одному й тому самому простору, назвемо третій вектор **c**, компоненти якого дорівнюють різниці відповідних компонентів векторів **a** і **b**: **a** – **b** = $(a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z)$. Дане правило в двовимірному просторі (на площині) підтверджується правилами паралелограма і трикутника (рис. 3.10).



Наприклад, нехай на площині дано вектори **a** і **b**: **a** = (1, 5) і **b** = (6, –1). (рис. зліва). Різницею двох векторів **a** і **b** є вектор **c** = **a** – **b** = = (1 – 6, 5 – (–1)) = (–5, 6). Як бачимо з рисунка, координати вектора **c** дійсно такі.

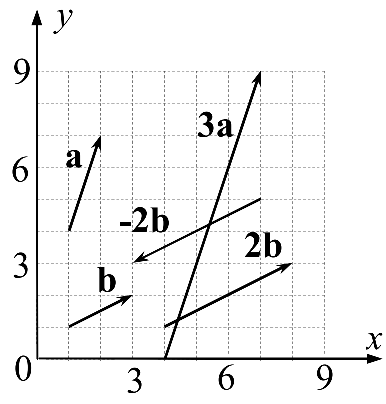


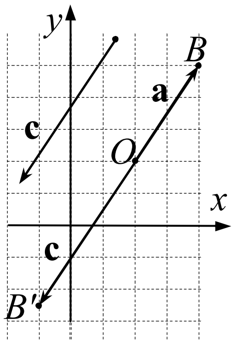
Рис. 3.11

3). Множення вектора на число. Наочно добутком вектора **a** на дійсне число λ є вектор λ**a**, довжина якого дорівнює $\lambda|\mathbf{a}|$. Якщо $\lambda > 0$ і $|\mathbf{a}| \neq 0$, то вектори λ**a** і **a** спрямовані однаково (співнапрямлені); якщо $\lambda < 0$ і $|\mathbf{a}| \neq 0$, то вектори λ**a** і **a** – протилежно (рис. 3.11). Якщо $\lambda = 0$ або $|\mathbf{a}| = 0$, то $\lambda\mathbf{a} = 0$.

Добутком вектора **a** на дійсне число λ називається вектор, компоненти якого дорівнюють добуткам на це число компонент вектора **a**:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \tag{3.5}$$

Наприклад, нехай на площині дано вектор **a**: **a** = **OB** = (2, 3) (рис. зліва). Знайдемо вектор **c**, який є добутком вектора **a** на дійсне число –1,5, $\mathbf{c} = -1{,}5\mathbf{a}$. Довжина вектора **c**,



$|\mathbf{c}| = |-1{,}5||\mathbf{a}| = 1{,}5|\mathbf{a}|$, а спрямований вектор **c** в протилежну сторону, бо –1,5 < 0. Нарисуємо вектор **c**. Отже, **c** = **OB′**. Згідно з формулою (3.5) координати вектора **c** = **OB′** = –1,5**a** = (–1,5·2, –1,5·3) = (–3, –4,5). Як бачимо з рисунка, координати вектора **c** дійсно такі.

Якщо два вектори **a** і **b** пов'язані співвідношенням **b** = λ**a**, то вони називаються **колінеарними** (в наочних просторах їх називають паралельними) (рис. 3.12).

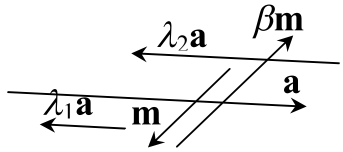


Рис. 3.12

Згідно з означенням колінеарності векторів (рис.3.12), рівності векторів і формули (3.5) отримаємо, що **b** = (b_x, b_y, b_z) = λ**a** = $(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. Отже:

$$a_x / b_x = a_y / b_y = a_z / b_z \qquad (3.5а)$$

– необхідна і достатня умова колінеарності векторів **a** *і* **b**.

Декілька векторів називаються ***колінеарними*** між собою, якщо всі вони, будучи прикладеними до однієї і тієї самої точки, лежатимуть на одній прямій (рис. 3.15). Такі вектори ще називають колінеарними цій прямій. Декілька векторів називаються ***компланарними*** між собою, якщо всі вони, будучи прикладеними до однієї і тієї самої точки, лежатимуть в одній площині. Такі вектори ще називають компланарними цій площині.

Приклад 3.1. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти координати вектора $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c}$, а також довжину вектора **d**. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = 1$, $b_x = 2$, $b_y = 4$, $b_z = -1$, $c_x = 1$, $c_y = 1$, $c_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, -1)$. Згідно з формулами (3.5) і (3.4) вектор **d** матиме координати: $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 7\mathbf{c} = (3\cdot 2 + 2\cdot 2 - 7\cdot 1,\ 3\cdot 1 + 2\cdot 4 - 7\cdot 1,\ 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) - 7\cdot(-1)) = (3,\ 4,\ 8)$. Отже $\mathbf{d} = (3,\ 4,\ 8)$. Згідно з формулою (3.3):

$|\mathbf{d}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89} \approx 9{,}434$(од.). Відповідь: $(3,\ 4,\ 8)$; 9,434.

Лінійні операції над будь-якими векторами **a**, **b** і **c** мають такі *властивості*:

1°. **a** + **b** = **b** + **a**.

2°. (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**).

3°. $\lambda(\beta\mathbf{a}) = (\lambda\beta)\mathbf{a}$, $\forall \lambda \in R$ і $\forall \beta \in R$.

4°. $(\lambda + \beta)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$, $\forall \lambda \in R$ і $\forall \beta \in R$..

5°. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $\forall \lambda \in R$ (рис. 3.13).

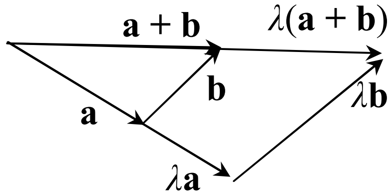
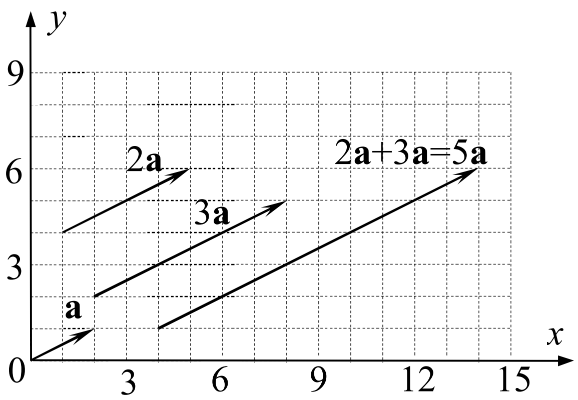
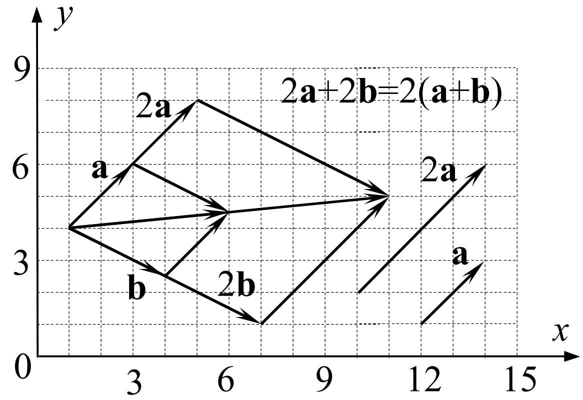


Рис. 3.13



Наприклад нехай на площині дано вектор **a**: **a** = (2, 1) (рис. зліва). Знайдемо вектор 2**a**+3**a**, який є сумою вектора 2**a** та вектора 3**a**. Нарисуємо вектори 2**a** і 3**a**. Довжина вектора 2**a**: $|2\mathbf{a}| = 2|\mathbf{a}|$, аналогічно довжина вектора 3**a**: $|3\mathbf{a}| = 3|\mathbf{a}|$. Спрямовані вектори 2**a** і 3**a** в ту саму сторону, що і вектор **a**, бо всі вони колінеарні (паралельні). Координати вектора 2**a**+3**a** за формулами (3.5) і (3.4) такі: 2**a**+3**a** = (2·2+3·2, 2·1+3·1) = (10, 5). Як бачимо з рисунка, беручи до уваги формулу (3.2), координати вектора 2**a**+3**a** дійсно такі.

Наприклад, нехай на площині дано вектор **a**: **a** = (2; 2) та **b**: **b** = (3; –1,5) (рис. справа). Порівняємо координати вектора 2**a**+2**b** та вектора 2(**a**+**b**). Якщо побудувати вектори 2**a** і 2**b**, та взяти за правилом паралелограма їх суму, а також побудувати вектор **a**+**b**, та взяти вектор 2(**a**+**b**), то бачимо з рисунка (рис. справа), що вектори 2**a**+2**b** та 2(**a**+**b**) співпадають. Беручи до уваги формулу (3.2), зрозуміло, що координати вектора 2**a**+2**b** та вектора 2(**a**+**b**) однакові.



Нехай вектори **i**, **j**, **k** такі, що за напрямом співпадають з осями *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно і |**i**| = |**j**| = |**k**| = 1 (одиничні вектори) (рис. 3.14). Тоді:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \qquad (3.6)$$

Вектори **i**, **j**, **k** називають ***ортами системи координат*** (рис. 3.14).

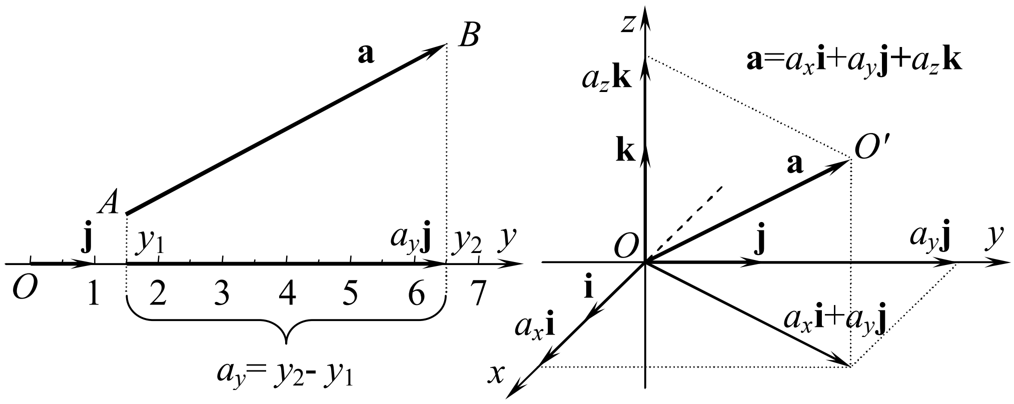


Рис. 3.14

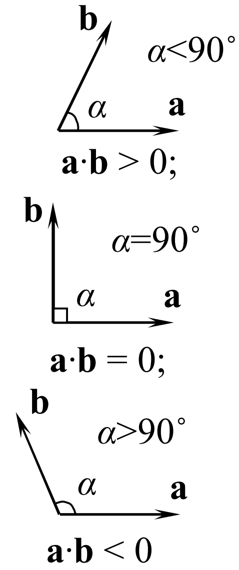


Рис. 3.15

3.3. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами

Розглядають скалярний та векторний добутки, де результатом множення двох векторів може бути як число, так і вектор. З самої назви зрозуміло, що скалярним добутком є скаляр, тобто число.

Скалярним добутком *двох ненульових векторів* **a** і **b** є число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Отже:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\alpha. \qquad (3.7)$$

Наприклад, знайти скалярний добуток двох векторів **a** і **b**, довжини яких відповідно рівні 6 і 18 умовних одиниць, а кут між ними 120°.

Згідно з формулою (3.7), $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 6\cdot 18\cdot \cos 120° = 6\cdot 18\cdot (-1/2) = -54$.

Якщо кут α між векторами **a** і **b** гострий, то $\cos\alpha > 0$, тобто $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$; якщо кут α тупий, то $\cos\alpha < 0$, тобто $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$; а якщо прямий, то $\cos\alpha = 0$, тобто $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ (рис. 3.15). Якщо хоча б один з векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений, але зважаючи на те, що довжина нульового вектора дорівнює 0, то, згідно з означенням, скалярний добуток дорівнює 0.

Використовуючи формулу проекції вектора (3.1), можна також записати:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,пр_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\,пр_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \qquad (3.8)$$

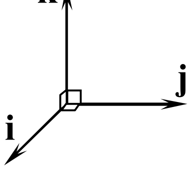


Рис. 3.16

Властивості скалярного добутку випливають з його визначення:

1°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$; 2°. $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$; 3°. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, бо $\cos 0 = 1$; 4°. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$.

Нехай вектори **a** і **b** задано за допомогою виразів: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, (їх координати відповідно: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$), тоді використовуючи властивості скалярного добутку, а також таблицю скалярного множення ортів системи координат: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ (рис. 3.16), отримаємо:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Отже:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \qquad (3.9)$$

– формула скалярного добутку векторів через їх координати.

Якщо кут між векторами **a** і **b** прямий, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ і, використавши формулу (3.9), отримаємо:

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0 \qquad (3.10)$$

– необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів **a** *і* **b**.

Приклад 3.2. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти скалярний добуток $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, а також суму скалярних добутків $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$. Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 4$, $a_z = 1$, $b_x = 3$, $b_y = 4$, $b_z = -1$, $c_x = 7$, $c_y = 1$, $c_z = -1$. Отже, вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (7, 1, -1)$. Знайдемо вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = (10, 5, -2)$. Використавши формулу (3.9), знайдемо скалярні добутки: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 2\cdot 10 + 4\cdot 5 + 1\cdot(-2) = 38$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot(-1) = 21$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 2\cdot 7 + 4\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 17$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 21+17= 38$. Отже, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 38$, що й висвітлено у властивостях скалярного добутку. Відповідь: 38.

Приклад 3.3. Дано два вектори **a** і **b**: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, c)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Знайти значення параметра c, при якому вектори **a** і **b** перпендикулярні. Числа a_x, a_y, b_x, b_y, b_z подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $b_x = 2$, $b_y = 4$, $b_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = (2, 1, c)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$. Використаємо умову перпендикулярності (3.10): $2\cdot 2 + 1\cdot 4 + c\cdot(-1) = 0$. Звідси отримаємо: $c = 8$. Відповідь: 8.

Для знаходження виразу для кута між двома векторами **a** і **b** прирівняємо запис скалярного добутку за визначенням (3.7) та через координати векторів (3.9) і отримаємо вираз: $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\alpha = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Звідси:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \qquad (3.11)$$

– формула для кута між векторами **a** *і* **b**.

Взявши до уваги вираз для довжини вектора через його координати (3.3), отримаємо:

$$\cos\alpha = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3.11a)$$

– формула для кута між векторами **a** *і* **b** через їх координати.

Приклад 3.4. Дано два вектори **a** і **b**: $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$. Знайти одиничний вектор, що лежить на бісектрисі кута, утвореного векторами **a** і **b**. Числа a_x, a_y, b_x, b_y подані в таблиці 3. Розв'язати двома способами.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $b_x = -1$, $b_y = 2$. Отже: $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$.

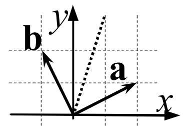
Вектори $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ і $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ – одиничні і однаково спрямовані з векторами відповідно **a** і **b**. Отже, паралелограм, побудований на векторах $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, – ромб. Діагональ цього ромба лежить на бісектрисі кута між векторами **a** і **b**. Отже, вектор $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ лежить на бісектрисі між векторами **a** і **b**.

Знайдемо цей вектор: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left(\dfrac{2+(-1)}{\sqrt{5}}, \dfrac{1+2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)$. Одиничним вектором, що лежить на бісектрисі кута, утвореного векторами **a** і **b**, буде вектор:

$$\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{5}}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

2 спосіб: Використавши формулу (3.11), знайдемо кут α між векторами **a** і **b**: $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{0}{5} = 0$. Отже $\alpha = 90°$. Вектори $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ і $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ – одиничні і однаково спрямовані з векторами відповідно **a** і **b**. $\mathbf{e}_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt5}, \dfrac{1}{\sqrt5}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\dfrac{-1}{\sqrt5}, \dfrac{2}{\sqrt5}\right)$.

Шуканий вектор лежить на бісектрисі кута між векторами $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, тобто складає з векторами $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ кути відповідно $45°$ і $-45°$ (рис. справа).



Отже:

$$\begin{cases} \cos 45° = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt5}\cdot x + \dfrac{1}{\sqrt5}\cdot y}{1\cdot 1} = \dfrac{2}{\sqrt5}\cdot x + \dfrac{1}{\sqrt5}\cdot y \\ \cos -45° = \dfrac{\dfrac{-1}{\sqrt5}\cdot x + \dfrac{2}{\sqrt5}\cdot y}{1\cdot 1} = \dfrac{-1}{\sqrt5}\cdot x + \dfrac{2}{\sqrt5}\cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{2x}{\sqrt5} + \dfrac{y}{\sqrt5} \\ \dfrac{1}{\sqrt2} = \dfrac{-x}{\sqrt5} + \dfrac{2y}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt5} = \dfrac{2y}{\sqrt5} - \dfrac{1}{\sqrt2} \\ \dfrac{1}{\sqrt2} = 2\cdot\left(\dfrac{2y}{\sqrt5} - \dfrac{1}{\sqrt2}\right) + \dfrac{y}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt5} = \dfrac{2y}{\sqrt5} - \dfrac{1}{\sqrt2} \\ \dfrac{3}{\sqrt2} = \dfrac{5y}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt5} = \dfrac{2y}{\sqrt5} - \dfrac{1}{\sqrt2} \\ \dfrac{3}{\sqrt2} = \sqrt5 y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{x}{\sqrt5} = \dfrac{2\cdot 3}{\sqrt5\cdot\sqrt{10}} - \dfrac{1}{\sqrt2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{x}{\sqrt5} = \dfrac{6}{\sqrt{50}} - \dfrac{1}{\sqrt2}\Bigg|\cdot\sqrt{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ \sqrt{10}x = 6 - \sqrt{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ – координати шуканого вектора.

Приклад 3.5. Знайти площу паралелограма побудованого на векторах **AB** і **AC**, якщо $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Числа $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$, $x_3 = -3$, $y_3 = 1$. Отже $A(1, 3)$, $B(-1, -2)$, $C(-3, 1)$.

Знаходимо, використавши формулу (3.2), вектори: **AB** = (–2, –5), **AC** = (–4, –2).

Згідно з формулою (3.9), отримаємо: **AB** · **AC** $= -2\cdot(-4) + (-5)\cdot(-2) = 8 + 10 = 18$.

Згідно з формулою (3.11а), отримаємо: $\cos A = \dfrac{-2\cdot(-4) + (-5)\cdot(-2)}{\sqrt{4+25}\cdot\sqrt{16+4}} = \dfrac{18}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{20}}$.

Використавши основну тригонометричну тотожність, отримаємо: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{18^2}{29\cdot 20}} = \sqrt{1 - \dfrac{324}{580}} = \sqrt{\dfrac{256}{580}} = \sqrt{\dfrac{4\cdot 64}{4\cdot 145}} = \dfrac{8}{\sqrt{145}}$.

З шкільного курсу геометрії відомо, що площа паралелограма: $S = AB\cdot AC\cdot\sin A = \sqrt{29}\cdot\sqrt{20}\cdot 8/\sqrt{145} = 2\cdot 8 = 16$. Відповідь: 16.

Приклад 3.6. Знайти $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$, якщо відомо, що $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$, $\widehat{\mathbf{ab}} = \varphi$ (φ – кут між векторами **a** і **b**). Числа a, b, φ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 3$, $b = 5$, $\varphi = 30°$. Отже $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\widehat{\mathbf{ab}} = 30°$.

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi + |\mathbf{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5^2} = \sqrt{9 + 15\cdot\sqrt{3} + 25} = \sqrt{34 + 15\cdot\sqrt{3}} \approx 7{,}7447.$$ Відповідь: 7,7447.

Приклад 3.7. Дано вектор $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. Знайти вектор **x**, який колінеарний вектору **a** і задовольняє умову $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = h$. Числа a_x, a_y, a_z, h подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = -1$, $h = 3$. Отже $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = 3$. З умови колінеарності $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$, оскільки $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ -1)$, то $\mathbf{x} = (2\lambda,\ \lambda,\ -\lambda)$. А за умовою $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = 3$, отже $2\lambda\cdot 2 + \lambda\cdot 1 - \lambda\cdot(-1) = 3$. Звідси $\lambda = 1/2$. Отже $\mathbf{x} = (1,\ 1/2,\ -1/2)$.

Відповідь: $\mathbf{x} = (1,\ 1/2,\ -1/2)$.

Приклад 3.8. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти вектор **x**, який перпендикулярний до векторів **a** і **b**, і задовольняє умову $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = h$. Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z, h подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = -3$, $b_x = 2$, $b_y = -1$, $b_z = -1$, $c_x = 2$, $c_y = 1$, $c_z = -1$, $h = 2$. Отже $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{b} = (2,\ -1,\ -1)$, $\mathbf{c} = (2,\ 1,\ -1)$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 2$. Нехай вектор **x** має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x,\ y,\ z)$. Згідно умови перпендикулярності векторів **x** і **a**, а також **x** і **b**, отримаємо: $2x + y - 3z = 0$ і $2x - y - z = 0$. Згідно умови $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 2$ отримаємо: $2x + y - z = 2$. Із системи трьох останніх рівнянь з трьома невідомими отримаємо: $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$. Відповідь: $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$.

Приклад 3.9. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Вектор **x**, перпендикулярний до векторів **a** і **b**, і утворює з віссю Oz гострий кут. Знайти координати вектора **x**, якщо $|\mathbf{x}| = \sqrt{h}$. Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, h подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 4$, $a_y = 3$, $a_z = 1$, $b_x = 1$, $b_y = 1$, $b_z = 1$, $h = 14$. Отже $\mathbf{a} = (4,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{14}$. Нехай вектор **x** має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x,\ y,\ z)$. Згідно умови перпендикулярності векторів **x** і **a**, а також **x** і **b**, отримаємо: $4x + 3y + z = 0$ і $x + y + z = 0$. Згідно умови $|\mathbf{x}| = \sqrt{14}$, отримаємо: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14}$. Отримаємо систему трьох останніх рівнянь з трьома невідомими: $\begin{cases} 4x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$. Розв'яжемо методом підстановки і отримаємо: $\begin{cases} x = -y - z \\ 4(-y - z) + 3y + z = 0 \\ (-y - z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ (-(-3z) - z)^2 + (-3z)^2 + z^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ 4z^2 + 9z^2 + z^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = -3z \\ z_{1,2} = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ y_{1,2} = \mp 3 \\ z_{1,2} = \pm 1 \end{cases}.$$

Отже, ми отримали два вектори: $\mathbf{x}_1 = (2, -3, 1)$ і $\mathbf{x}_2 = (-2, 3, -1)$. Знайдемо, який з них утворює з віссю Oz гострий кут. Для цього візьмемо орт вісі Oz: $\mathbf{k} = (0,\ 0,\ 1)$ і знайдемо скалярний добуток кожного з знайдених векторів з ортом **k**.

$\mathbf{x}_1\mathbf{k} = 2\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$, $\mathbf{x}_2\mathbf{k} = -2\cdot 0 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1$.

Отже, $\mathbf{x}_1\mathbf{k} = 1 > 0$, то кут між векторами $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{k}$ – гострий, $\mathbf{x}_2\mathbf{k} = -1 < 0$, то кут між векторами $\mathbf{x}_2$ і $\mathbf{k}$ – тупий. Отже, вектор $\mathbf{x}_1$, перпендикулярний до векторів **a** і **b**, і утворює з віссю Oz гострий кут. Відповідь: $\mathbf{x} = (2, -3, 1)$.

П р и к л а д 3 . 10. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Вектор **x**, перпендикулярний до осі Oy і задовольняє умову $\mathbf{xa} = h_1$ і $\mathbf{xb} = h_2$. Знайти координати вектора **x**. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, h_1, h_2$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -5$, $b_x = 1$, $b_y = 7$, $b_z = 4$, $h_1 = -5$, $h_2 = 5$. Отже $\mathbf{a} = (2,\ 3,\ -5)$, $\mathbf{b} = (1, 7, 4)$, $\mathbf{xa} = -5$, $\mathbf{xb} = 5$. Нехай вектор **x** має такі компоненти: $\mathbf{x} = (x,\ y,\ z)$. Вектор **x**, перпендикулярний до осі Oy, тобто він компланарний площині xOz, отже, його компонента $y = 0$, тобто $\mathbf{x} = (x,\ 0,\ z)$. Згідно з умовою $\mathbf{xa} = -5$, $\mathbf{xb} = 5$ отримаємо систему: $2x - 5z = -5$ і $x + 4z = 5$. Розв'яжемо методом підстановки. Отримаємо: $\begin{cases} 2x - 5z = -5 \\ x + 4z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 4z \\ 2(5 - 4z) - 5z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/13 \\ z = 15/13 \end{cases}$. Отже, ми отримали вектор: $\mathbf{x} = (5/13, 0, 15/13)$. Відповідь: $\mathbf{x} = (5/13, 0, 15/13)$.

П р и к л а д 3 . 11. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Знайти проекцію вектора **a** на вісь вектора **b**. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = -2$, $a_y = 3$, $a_z = -4$, $b_x = -1$, $b_y = 7$, $b_z = -4$. Отже, $\mathbf{a} = (-2, 3, -4)$, $\mathbf{b} = (-1, 7, -4)$. Згідно з формулою (3.8), отримаємо: $пр_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} / |\mathbf{b}|$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\cdot(-1) + 3\cdot 7 + (-4)\cdot(-4) = 2 + 21 + 16 = 39$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{66}$. $пр_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = 39/\sqrt{66} \approx 4{,}8$.

П р и к л а д 3 . 12. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ на вісь, що утворює з координатними осями Ox і Oz кути α і γ відповідно, а з віссю Oy – гострий кут. Числа $a_x, a_y, a_z, \alpha, \gamma$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = \sqrt{2}$, $a_y = -3$, $a_z = -3$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$. Отже $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, -3, -3)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, має компоненти (x, y, z), позначимо її через **x**. Згідно з умовою задачі дана вісь з ортами координатних осей Ox і Oz, тобто з ортами відповідно (1, 0, 0) і (0, 0, 1), утворює кути відповідно 45° і 60°. Використавши формулу (3.11), отримаємо: $\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \dfrac{x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0}{|\mathbf{x}|\cdot 1} = \dfrac{x}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{x}|$,

$\cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 1}{|\mathbf{x}|} = \dfrac{z}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2}|\mathbf{x}|$.

Використавши залежність між напрямними косинусами вектора $\cos^2\alpha + + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо: $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma = 1 - 1/2 - 1/4 = 1/4$. Отже $\cos\beta = \pm 1/4$. Зважаючи на те, що вісь **x** утворює з віссю Oy – гострий кут, $\cos\beta = 1/4$. Отже:

$\cos\beta = \dfrac{1}{4} = \dfrac{x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 0}{|\mathbf{x}|} = \dfrac{y}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}|\mathbf{x}|$. Отже:

$$пр_{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{x}| + (-3)\cdot\frac{1}{4}|\mathbf{x}| + (-3)\cdot\frac{1}{2}|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -1\frac{1}{4}.$$ Відповідь: $-1\frac{1}{4}$.

П р и к л а д 3 . 13. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути. Числа a_x, a_y, a_z подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = -3$, $a_z = 4$. Отже, $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, позначимо через **x**. Вона утворює з координатними осями рівні гострі кути, тобто $\alpha = \beta = \gamma$ і $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$. Використавши залежність між напрямними косинусами вісі $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm 1/\sqrt{3}$. Оскільки, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$, то $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Використавши формулу (3.11), для косинуса кута між віссю **x** і ортами координатних осей (1, 0, 0), (0, 1, 0) і (0, 0, 1), отримаємо:

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \dfrac{x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0}{|\mathbf{x}|\cdot 1} = \dfrac{x}{|\mathbf{x}|} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$, аналогічно:

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$ і $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{z}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$.

Отже: $np_{\mathbf{x}}\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}| + (-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}| + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \dfrac{2-3+4}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Відповідь: $\sqrt{3}$.

П р и к л а д 3 . 14. Знайти проекцію вектора **AB** на вісь, що утворює з координатними осями рівні тупі кути, якщо $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1, y_1 = 4, z_1 = -6, x_2 = -2, y_2 = -3, z_2 = 8$. Отже, $A(1, 4, -6)$, $B(-2, -3, 8)$. Згідно з формулою (3.2): $\mathbf{AB} = (-3, -7, 14)$. Нехай вісь, про яку йдеться в умові задачі, позначимо через **x**. Вона утворює з координатними осями рівні тупі кути, тобто $\alpha = \beta = \gamma$ і $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma < 0$. Використавши залежність між напрямними косинусами вісі $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, отримаємо: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Але беручи до уваги те, що $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma < 0$, то $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Використавши формулу (3.11), для косинуса кута між віссю **x** і ортами координатних осей (1, 0, 0), (0, 1, 0) і (0, 0, 1), отримаємо: $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \dfrac{x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\cdot 0}{|\mathbf{x}|\cdot 1} = \dfrac{x}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$, аналогічно: $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$ і $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{z}{|\mathbf{x}|} \Rightarrow z = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{x}|$. Отже: $np_{\mathbf{x}}\mathbf{AB} = \dfrac{\mathbf{AB}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} =$

$$= \frac{(-3)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})|\mathbf{x}| + (-7)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})|\mathbf{x}| + 14\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \frac{3+7-14}{\sqrt{3}} = \frac{-4}{\sqrt{3}}$$

В-дь: $-4/\sqrt{3}$.

3.4. Векторний добуток

Векторним добутком вектора **a** *на вектор* **b** називається вектор **a**×**b**, який задовольняє таким умовам:

1) вектор **a**×**b** колінеарний прямій *l* перпендикулярній до площини *α*, до якої вектори **a** і **b** є компланарними (рис. 3.17) (вектор **a**×**b** перпендикулярний до кожного з векторів **a** і **b**).

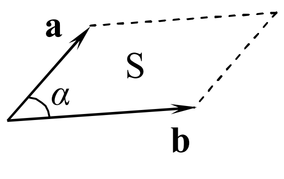


Рис. 3.18

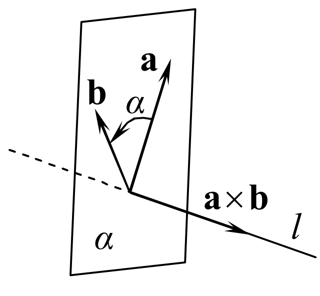


Рис. 3.17

2) довжина |**a**×**b**| вектора **a**×**b** дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах **a** та **b** (рис. 3.18), тобто

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha = S_{\text{паралелограма}}, \qquad (3.12)$$

де α – кут між двома векторами.

3) вектор **a**×**b** спрямований так, що якщо дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори **a** та **b**, то поворот вектора **a** до вектора **b** відбувається на найменший кут проти бігу годинникової стрілки (рис. 3.17).

Наприклад, знайти модуль векторного добутку векторів **a** і **b**, якщо $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\widehat{\mathbf{ab}} = \pi/6$. Розв'язок. Згідно з формулою (3.12) маємо: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 2\cdot 3\sin\pi/6 = 2\cdot 3\cdot(1/2) = 3$.

Властивості векторного добутку:

1°. Якщо $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$ то $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні тільки тоді, коли $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 0$, тобто коли $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ – нуль-вектор.

2°. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. 3°. $(\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

4°. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

Всі ці властивості легко виводяться з його визначення.

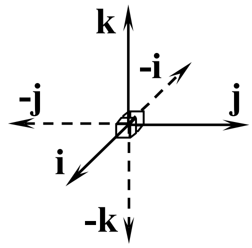


Рис. 3.19

Беручи до уваги те, що одиничні вектори співпадають з напрямом осей прямокутної системи координат (рис. 3.19), векторні добутки ортів **i**, **j**, **k**, дорівнюють:

$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Знайдемо координати вектора $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}$ або:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (3.13)$$

– формула векторного добутку векторів через їх координати.

Приклад 3.15. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$. Знайти координати векторів $\mathbf{a}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{c}$, а також їх довжину. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = 1$, $a_z = 1$, $b_x = 2$, $b_y = 4$, $b_z = -1$, $c_x = 1$, $c_y = 1$, $c_z = -1$. Отже: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, -1)$. Згідно з формулою (3.13) невідомі вектори матимуть координати: $\mathbf{a}\times\mathbf{a}$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку, $|\mathbf{a}\times\mathbf{a}| = 0$;

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(-1-4) - \mathbf{j}\cdot(-2-2) + \mathbf{k}\cdot(8-2) = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77} \approx 8{,}775$(од.);

$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(-1-1) - \mathbf{j}\cdot(-2-1) + \mathbf{k}\cdot(2-1) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{a}\times\mathbf{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$(од.);

$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(4+1) - \mathbf{j}\cdot(2+2) + \mathbf{k}\cdot(2-8) = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77} \approx 8{,}775$(од.);

$|\mathbf{b}\times\mathbf{b}|$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку, $|\mathbf{b}\times\mathbf{b}| = 0$;

$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(-4+1) - \mathbf{j}\cdot(-2+1) + \mathbf{k}\cdot(2-4) = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$(од.); $\mathbf{c}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $|\mathbf{c}\times\mathbf{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$(од.); $\mathbf{c}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $|\mathbf{c}\times\mathbf{b}| = \sqrt{14} \approx 3{,}742$(од.);

$|\mathbf{c}\times\mathbf{c}|$ – нуль-вектор, згідно з 1-ою властивістю векторного добутку $|\mathbf{c}\times\mathbf{c}| = 0$.

П р и к л а д 3 . 16. Дано $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ і $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = h$. Обчислити $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Числа *a*, *b*, *h* подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 2$, $b = 10$, $h = 12$. Отже: $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 10$ і $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 12$. Згідно з формулою (3.11), маємо: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{12}{2\cdot 10} = \frac{3}{5}$. Згідно з основним тригонометричним співвідношенням: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \,= \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$. Згідно з формулою (3.12) маємо: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha = 2\cdot 10\cdot\frac{4}{5}$ = 16. Відповідь: 16.

П р и к л а д 3 . 17. Дано $|\mathbf{a}| = a$, $|\mathbf{b}| = b$ і $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = h$. Обчислити $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Числа *a*, *b*, *h* подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 4$, $b = 12$, $h = 22$. Отже: $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 12$ і $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 22$. Згідно з формулою (3.12) маємо: $\sin\alpha = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{22}{4\cdot 12} = \frac{11}{24}$. Згідно основним тригонометричним співвідношенням: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \,= \pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{24}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{455}{576}}$.

Згідно з формулою (3.7), маємо: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha = 4\cdot 12\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{455}{576}}\right) = \pm 2\sqrt{455}$.

П р и к л а д 3 . 18. Площа трикутника *ABC* дорівнює *S*. Дві його вершини лежать у точках $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайти координати вершини *C*, якщо вона лежить на осі *Oz*. Числа S, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $S = 14, x_1 = 1, y_1 = 4, z_1 = -6, x_2 = -2, y_2 = -3, \quad z_2 = 8$. Отже $S = \sqrt{30{,}75}$, $A(1, 4, -6)$, $B(-2, -3, 8)$. З (3.2): $\mathbf{AB} = (-3, -7, 14)$. Згідно з умовою задачі вершина *C* лежить на осі *Oz*, тобто її абсциса і ордината рівні нулю. Нехай апліката вершини *C* рівна *z*. Тобто *C* (0, 0, *z*). Тоді $\mathbf{AC} = (-1, -4, z+6)$. Згідно з формулою (3.13): $\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -7 & 14 \\ -1 & -4 & z+6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\big((-7)\cdot(z+6) - (-4)\cdot 14\big) - \mathbf{j}\big((-3)\cdot(z+6) - (-1)\cdot 14\big) + \mathbf{k}\big((-3)\cdot(-4) - (-1)\cdot(-7)\big) =$$

$$= \mathbf{i}(-7z - 42 + 56) - \mathbf{j}(-3z - 18 + 14) + \mathbf{k}(12 - 7) = (-7z + 14)\mathbf{i} + (3z + 4)\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Згідно з формулою (3.12) маємо: $|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$. Трикутник *ABC* – це трикутник побудований на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$, і його площа дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$. Отже, $\frac{1}{2}|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}| = \sqrt{30{,}75} \Rightarrow |\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}| = 2\sqrt{30{,}75}$. З другої сторони, Згідно з формулою (3.3), маємо: $|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}| = \sqrt{(-7z+14)^2 + (3z+4)^2 + 5^2}$. Отже, прирівнявши два вирази з $|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|$, отримаємо: $(-7z+14)^2 + (3z+4)^2 + 5^2 = (2\cdot\sqrt{30{,}75})^2$

$$\Rightarrow \quad (49z^2 - 196z + 196) + (9z^2 + 24z + 16) + 25 = 123 \quad \Rightarrow \quad 58z^2 - 172z + 114 = 0$$

$\Rightarrow z_1 = 1\frac{28}{29}, z_2 = 1$. Отже $C(0, 0, 1\frac{28}{29})$ або $C(0, 0, 1)$. Відповідь: $C(0, 0, 1\frac{28}{29})$ або $C(0, 0, 1)$.

П р и к л а д 3 . 19. Дано вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$. Знайти орт вектора перпендикулярного до векторів **a** і **b**. Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z подані в табл. 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 4$, $a_y = 4$, $a_z = 2$, $b_x = 4$, $b_y = 5$, $b_z = 3$. Отже: $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a} = (4, 4, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 3)$. Згідно з означенням векторного добутку вектори $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, тобто вектор $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ і вектор $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, перпендикулярні до векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Згідно з формулою (3.13): $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \pm\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \pm(\mathbf{i} \cdot (12 - 10) - \mathbf{j} \cdot (12 - 8) + \quad + \mathbf{k} \cdot (20 - 16)) = \pm(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$, Згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \quad = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$(од.). Ортами векторів $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (колінеарними одиничними векторами з тими самими напрямками, як і самі вектори $\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$), є вектори $\dfrac{\pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \quad = \dfrac{\pm(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})}{6} = \pm\dfrac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

Приклад 3.20. Вершини трикутника ABC лежать у точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ і $C(x_3, y_3, z_3)$. Знайти висоту $h = |DB|$. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 подані в таблиці 3.

Розв'язування: В.1: $x_1 = 4, y_1 = 4, z_1 = 2, x_2 = 4, y_2 = 7, z_2 = 6$, $x_3 = 7, y_3 = 8, z_3 = 2$. Отже, $A(4, 4, 2)$, $B(4, 7, 6)$ і $C(7, 8, 2)$.

1 спосіб. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що площа трикутника $S = \dfrac{1}{2}ha$, де h – висота, а a – основа трикутника, або за формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр, а a, b, c – сторони трикутника. Прирівнявши, отримаємо: $h = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$, тобто $h = \dfrac{2\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}}{AC}$, $p = \dfrac{AC + AB + BC}{2}$.

Згідно з формулою (3.2): $\mathbf{AB} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{AC} = (3, 4, 0)$ і $\mathbf{BC} = (3, 1, -4)$.

Згідно з формулою (3.3): $AB = |\mathbf{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $AC = |\mathbf{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$ і $BC = |\mathbf{BC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$.

Отже: $$h = \frac{2\sqrt{\frac{5+5+\sqrt{26}}{2}\left(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2} - 5\right)\left(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2} - 5\right)\left(\frac{5+5+\sqrt{26}}{2} - \sqrt{26}\right)}}{5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{10+\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{10-\sqrt{26}}{2}}}{5} = \frac{2\sqrt{\frac{26}{4} \cdot \frac{100-26}{4}}}{5} = \frac{\frac{2}{4}\sqrt{26 \cdot 74}}{5} = \frac{\sqrt{481}}{5}.$$

2 спосіб. Замість формули Герона для відшукання площі трикутника використаємо: згідно з означенням векторного добутку $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$. Трикутник ABC – це трикутник, побудований на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$, і його площа, як відомо з середньої школи, дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{AC}$. Отже, $S = \dfrac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$. Згідно з формулою (3.13): $\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0 - 16) - \mathbf{j}(0 - 12) + \mathbf{k}(0 - 9) = -16\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$.

Згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| = \sqrt{16^2 + 12^2 + 9^2} = \sqrt{481}$. Отже $S = \sqrt{481}/2$. З іншої сторони, згідно з формулою $S = ha/2$ отримаємо: $h = 2S/a = 2S/AC = \sqrt{481}/5$.

П р и к л а д 3 . 2 1 . Дано вектори $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$. Вектор **x** перпендикулярний до векторів **a** і **b**, утворює з віссю *Oy* тупий кут. Знаючи, що $|\mathbf{x}|=l$, знайти його координати. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, l$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 4$, $a_y = -2$, $a_z = -3$, $b_x = 0$, $b_y = 1$, $b_z = 3$, $l = 8$. Отже: $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, тобто вектори мають такі координати: $\mathbf{a}=(4,-2,-3)$, $\mathbf{b}=(0,1,3)$, а $|\mathbf{x}|=8$. Згідно з означенням векторного добутку і добутку вектора на скаляр, вектори $\pm\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, тобто вектор $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ і вектор $-\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (λ – певне дійсне додатне число, тобто додатний скаляр), перпендикулярні до векторів **a** і **b**.

Згідно з формулою (3.13): $\pm\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\pm\lambda\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\pm\lambda\cdot\big(\mathbf{i}\cdot(-6+3)-$
$-\mathbf{j}\cdot(12-0)+\mathbf{k}\cdot(4-0)\big)=\pm\lambda\cdot(-3\mathbf{i}-12\mathbf{j}+4\mathbf{k})=\pm(-3\lambda\mathbf{i}-12\lambda\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k})$.

У зв'язку з тим, що вектор **x** утворює з віссю *Oy* тупий кут, то $\mathbf{x}\cdot\mathbf{j}<0$. Оскільки $\pm(-3\lambda\mathbf{i}-12\lambda\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k})\cdot\mathbf{j}=\pm(-12\lambda)\lesseqgtr 0$. Отже, $\mathbf{x}=-3\lambda\mathbf{i}-12\lambda\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k}$. Згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{x}|=\sqrt{(-3\lambda)^2+(-12\lambda)^2+(4\lambda)^2}=\lambda\sqrt{9+144+16}=\lambda\sqrt{169}=13\lambda$, а за умовою $|\mathbf{x}|=8$, то $13\lambda=8 \Rightarrow \lambda=\frac{8}{13}$. Отже, $\mathbf{x}=-3\cdot\frac{8}{13}\mathbf{i}-12\cdot\frac{8}{13}\mathbf{j}+4\cdot\frac{8}{13}\mathbf{k}=$
$=-\frac{24}{13}\mathbf{i}-\frac{96}{13}\mathbf{j}+\frac{32}{13}\mathbf{k}=-1\frac{11}{13}\mathbf{i}-7\frac{5}{13}\mathbf{j}+2\frac{6}{13}\mathbf{k}$. Відповідь: $\left(-1\frac{11}{13},-7\frac{5}{13},2\frac{6}{13}\right)$.

П р и к л а д 3 . 2 2 . Вектор **b** перпендикулярний до осі *Ox* і до вектора $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, утворює з віссю *Oz* гострий кут. Знаючи, що $|\mathbf{b}|=l$, знайти його координати. Числа a_x, a_y, a_z, l подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 3$, $a_y = 4$, $a_z = -1$, $l = 5$. Отже: $\mathbf{a}=(3,4,-1)$, а $|\mathbf{b}|=5$. Згідно з тими самими міркуваннями, що в попередній задачі, матимемо: $\mathbf{b}_{1,2}=\pm\lambda(\mathbf{i}\times\mathbf{a})=\pm\lambda\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=\pm\lambda\cdot(\mathbf{j}+4\mathbf{k})=\pm(\lambda\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k})$. У зв'язку з тим, що вектор **b** утворює з віссю *Oz* гострий кут, то $\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}>0$. Беручи до уваги, що: $(0,\pm\lambda\mathbf{j},\pm 4\lambda\mathbf{k})\cdot(0,0,1)=\pm 4\lambda \gtrless 0$. Отже, $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{j}+4\lambda\mathbf{k}$. Згідно з формулою (3.3): $|\mathbf{b}|=\sqrt{0^2+\lambda^2+(4\lambda)^2}=\lambda\sqrt{17}$, а за умовою $|\mathbf{b}|=5$, то $\sqrt{17}\lambda=5 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{\sqrt{17}}$. Отже $\mathbf{b}=\frac{5}{\sqrt{17}}\mathbf{j}+\frac{20}{\sqrt{17}}\mathbf{k}$. Відповідь: $\left(0,\frac{5}{\sqrt{17}},\frac{20}{\sqrt{17}}\right)$.

3.5. Змішаний добуток векторів

Змішаним (*мішаним*) *добутком* упорядкованої трійки векторів **a**, **b**, **c** називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора **a** на векторний добуток векторів **b** і **c**, тобто $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Геометричний зміст змішаного добутку полягає в тому, що якщо вектори **a**, **b**, **c** не лежать в одній площині, то на них можна побудувати паралелепіпед, об'єм якого і дорівнює модулю змішаного добутку. Для доведення цього знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах **a**, **b**, **c**. Площа його основи дорівнює модулю векторного добутку $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\varphi$ векторів **b** і **c**. Висота дорівнює $|\mathbf{a}|\cos\alpha$. Отже, остаточно маємо:

$V = ||\mathbf{a}|\cos\alpha\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\varphi| = ||\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\alpha| = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$. Тобто:

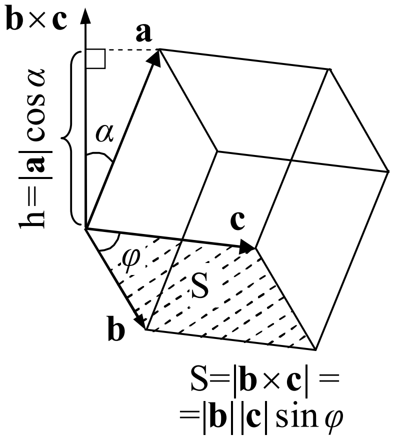


Рис. 3.20

$$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=V_{\text{паралелепіпеда}} \qquad (3.14)$$

Отже, якщо $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0$, то об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах **a**, **b**, **c** дорівнює нулю, а це буде тоді і тільки тоді, коли вектори **a**, **b**, **c** лежать в одній площині (компланарні одній площині). Отже:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0 \qquad (3.15)$$

– необхідна і достатня умова компланарності або лінійної залежності трьох векторів **a**, **b** і **c**.

Через проекції (компоненти, координати) векторів, змішаний добуток, ураховуючи формулу-визначник (3.14) знаходження векторного добутку для векторів **b** і **c**, запишеться:

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})((b_yc_z-b_zc_y)\mathbf{i}+(b_zc_x-b_xc_z)\mathbf{j}+(b_xc_y-b_yc_x)\mathbf{k})$.

А використовуючи скалярний добуток ортів і подавши вираз у вигляді визначника, отримаємо:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (3.16)$$

– змішаний добуток трьох векторів **a**, **b** і **c** *через їх компоненти.*

Якщо $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) > 0$, то упорядкована трійка векторів **a**, **b** і **c** права (рис. 3.21а), а якщо $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) < 0$, то ліва (рис. 3.21б).

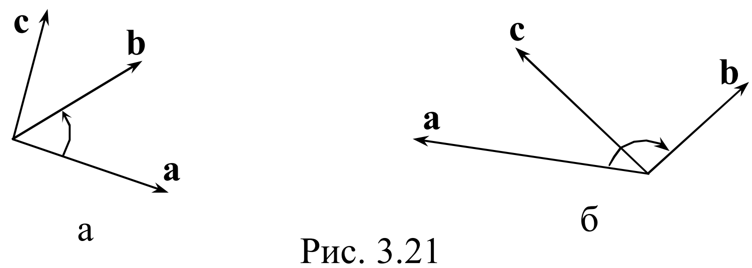


Рис. 3.21

Властивості змішаного добутку:

1°. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$. 2°. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$.

Приклад 3.23. Дано вектори: $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}$. Обчислити мішаний добуток $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ заданих векторів. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка **a**, **b**, **c**. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ в т.3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x=-2$, $a_y=3$, $a_z=-1$, $b_x=2$, $b_y=-5$, $b_z=7$, $c_x=1$, $c_y=-1$, $c_z=0$. Отже: $\mathbf{a}=-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$. Використовуючи формулу змішаного добутку (3.16), отримаємо: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=$ $=-2\cdot 7-3\cdot(-7)+(-1)\cdot(-2+5)=-14+21-3=4>0$, отже, упорядкована трійка –права.

Приклад 3.24. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: **a**, **b** і **c**. Числа $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z$ подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x=2$, $a_y=-6$, $a_z=2$, $b_x=2$, $b_y=1$, $b_z=-3$, $c_x=1$, $c_y=2$, $c_z=1$. Отже: $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку векторів (3.14) на яких він побудований як на ребрах (рис.3.20). Використовуючи формулу змішаного добутку (3.16), отримаємо:

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(1+6)-(-6)\cdot(2+3)+2\cdot(4-1)=14+30+6=50$ (од^3). В-дь: 50 од^3.

Приклад 3.25. Який об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-2\mathbf{c}-\mathbf{a}$, якщо $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}$. Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 2$, $a_y = -6$, $a_z = 2$, $b_x = 2$, $b_y = 1$, $b_z = -3$, $c_x = 1$, $c_y = 2$, $c_z = 1$. Отже: $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Звідси $\frac{1}{2}\mathbf{a}=\left(\frac{2}{2},\frac{-6}{2},\frac{2}{2}\right)=(1,-3,1)$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(2+2,-6+1,2+(-3))=(4,-5,-1)$, $\mathbf{b}-2\mathbf{c}-\mathbf{a}=$ $=(2-2\cdot1-2,1-2\cdot2-(-6),-3-2\cdot1-2)=(-2,3,-7)$. Тепер за аналогією до попереднього прикладу. $V_{\text{паралелепіпеда}}=\left|\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 4 & -5 & -1\\ -2 & 3 & -7\end{vmatrix}\right|=|-50|=50$ (од^3). Відповідь: 50 од^3.

Приклад 3.26. Який об'єм піраміди $ABCD$, якщо: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4 подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1= 2$, $y_1=3$, $z_1=2$ $x_2=1$, $y_2=1$, $z_3=1$, $x_3=3$, $y_3=0$, $z_3=2$, $x_4=1$, $y_4=3$, $z_4=5$. Отже $A(2, 3, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $C(3, 0, 2)$ і $D(1, 3, 5)$.

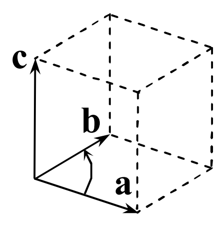
Зі шкільного курсу геометрії, відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ і $\mathbf{AD}$. Знайшовши з допомогою формули (3.2): $\mathbf{AB}=(-1,-2,-1)$, $\mathbf{AC}=(1,-3,0)$, $\mathbf{AD}=(-1,0,3)$, отримаємо:

$$V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{6}\cdot\left|(\mathbf{AB}\cdot(\mathbf{AC}\times\mathbf{AD}))\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}\right|=3$$ (од^3). Відповідь: 3 од^3.

Приклад 3.27. Дано вектори: $\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\mathbf{c}=(c_x,c_y,c_z)$. З'ясувати лінійну залежність векторів **a**, **b**, **c** (чи вектори **a**, **b**, **c** э компланарні). Числа a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $a_x = 3$, $a_y = 2$, $a_z = 2$, $b_x = 1$, $b_y = -1$, $b_z = 3$, $c_x = 1$, $c_y = 9$, $c_z = -11$. Отже: $\mathbf{a}=(3,2,2)$, $\mathbf{b}=(1,-1,3)$, $\mathbf{c}=(1,9,-11)$. Використовуючи необхідну і достатню умову компланарності або лінійної залежності трьох векторів **a**, **b**, **c**, тобто умову (3.15), отримаємо: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=3\cdot(-16)-2\cdot(-14)+2\cdot10=-48+28+20=0$, отже, вектори **a**, **b**, **c** лінійно залежні (компланарні). В-дь: вектори лінійно залежні (компланарні).

Приклад 3.28. Обчислити мішаний добуток взаємно перпендикулярних векторів **a**, **b**, **c**, якщо вони утворюють праву трійку і $|\mathbf{a}|=a$, $|\mathbf{b}|=b$, $|\mathbf{c}|=c$. Числа a, b, c подані в таблиці 3.



Розв'язування: Варіант 1: $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$. Отже: $|\mathbf{a}|=4$, $|\mathbf{b}|=2$, $|\mathbf{c}|=3$.

Модуль змішаного добутку векторів згідно з формулою (3.14) дорівнює об'єму паралелепіпеда, на яких він побудований, як на ребрах. Оскільки вектори **a**, **b**, **c** взаємно перпендикулярні і утворюють праву трійку (рис. Справа), то такий паралелепіпед є прямокутним, а його об'єм $V=a\cdot b\cdot c$, тобто $V=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|=$ $=4\cdot2\cdot3=24$. Отже $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=V=24$. Тобто $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\pm24$. Так, як вектори **a**, **b**, **c** утворюють праву трійку, тобто повинна виконуватися умова $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})>0$, то $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=24$.

Приклад 3.29. Які координати четвертої вершини піраміди $ABCD$, якщо ця вершина лежить на осі Oy, а три перші вершини лежать в точках: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і об'єм піраміди $V=v$. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, v подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1= 2$, $y_1=1$, $z_1=-1$ $x_2=3$, $y_2=0$, $z_3=1$, $x_3=2$, $y_3=-1$, $z_3=3$, $v=5$. Отже $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$ і $V=5$.

Вершина D лежить за умовою на осі Oy, отже, нехай вона має координати $D(0, y, 0)$.

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює 1/6 об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}$ і $\mathbf{AD}$. Знайшовши з допомогою формули (3.2): $\mathbf{AB} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{AC} = (0, -2, 4)$, $\mathbf{AD} = (-2, y-1, 1)$ і застосувавши формулу (3.14), отримаємо: $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{6} \cdot \left|(\mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC})\right|$. Звідси $\mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) = \pm 6 \cdot V_{\text{піраміди}} = \pm 6 \cdot 5 = \pm 30$. Зрозуміло, що $\pm$ відповідає відповідно правій або лівій трійці векторів $\mathbf{AD}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}$. З другої сторони, застосувавши формулу (3.16), отримаємо: $\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AC} \times \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & y-1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4y + 2$. Отже, $-4y + 2 = \pm 30 \Rightarrow y_1 = -7,\ y_2 = 8$.

Отже $D(0, -7, 0)$, або $D(0, 8, 0)$. Відповідь: $D(0, -7, 0)$, або $D(0, 8, 0)$.

Приклад 3.30. Числа x, y такі, що $Ax^2 + By^2 = C$. Використовуючи скалярний добуток векторів, знайти найбільше та найменше значення виразу $A_1 x + B_1 y$. Числа A, B, C, A_1, B_1 подані в таблиці 3.

Розв'язування: Варіант 1: $A = 4$, $B = 9$, $C = 7$, $A_1 = 5$, $B_1 = 6$. Отже $4x^2 + 9y^2 = 7$, $5x + 6y$.

Розглянемо вектор $\mathbf{a} = (2x, 3y)$, довжина якого згідно з умовою задачі дорівнює $|\mathbf{a}| = \sqrt{4x^2 + 9y^2} = \sqrt{7}$. Розглянемо вектор $\mathbf{b} = (\frac{5}{2}, 2)$, скалярний добуток якого з вектором $\mathbf{a}$, згідно (3.9) дорівнює $5x + 6y$. Згідно визначення скалярного добутку, формули (3.7) отримаємо: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| |\cos\varphi| \le |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, тобто $|5x + 6y| \le \sqrt{4x^2 + 9y^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{25 + 16}{4}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 41}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{287}$. Отже, згідно з означенням модуля отримаємо $5x + 6y \le \frac{1}{2}\sqrt{287}$ і $5x + 6y \ge -\frac{1}{2}\sqrt{287}$.

Ще по-іншому задачу можна розв'язати так. Скалярний добуток векторів набуває найбільшого і найменшого значень, коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні. Тобто, врахувавши умову (3.5а) і те, що за умовою задачі $4x^2 + 9y^2 = 7$, отримаємо: $\begin{cases} \dfrac{2x}{5/2} = \dfrac{3y}{2} \\ 4x^2 + 9y^2 = 7 \end{cases}$.

Розв'язавши систему, отримаємо: $\min(5x + 6y) = -\frac{1}{2}\sqrt{287}$ і $\max(5x + 6y) = \frac{1}{2}\sqrt{287}$.

Відповідь: $\min(5x + 6y) = -\frac{1}{2}\sqrt{287}$ і $\max(5x + 6y) = \frac{1}{2}\sqrt{287}$.

Таблиця 3

№	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	8B	9B
3.1	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1; 5;1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3; 7;9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	6;-1;1;0;2; -4;1;-1;8	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
3.2	2;4;1;3;4; -1;7;1;-1	1;-2;4;-3; 7;9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	6;-1;1;0;2; -4;1;-1;8	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3
3.3	2;1;2;4;-1	-3;0;5;-4;3	6;-1;1;0;2	3;4;-7;1;9	2;1;1;2;4	3;-4;2;3;5	2;1;3;4;6,5	1;2;4;-3;7	4;5;4;6;8,2
3.4	2;1;-1;2	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;0;-7;1
3.5	1;3;-1; -2;-3;1	6;-1;1; 0;2;5	5;-2;1; 0;1;4	2;1;1; 2;4;2	3;-4;2; 3;5;4	2;1;3; 4;6;6	1;2;4; -3;7;1	4;5;4; 6;8;0	3;4;-7; 1;9;-1
3.6	3;5;30	3;-4;60	6;-1;45	3;4;90	5;-2;60	1;-2;45	2;1;-60	-2;1;30	4;5;-45
3.7	2;1;-1;3	1;0;2;1	3;4;5;-2	1;-2;3;4	3;4;1;2	4;-3;2;1	1;2;3;-4	2;3;4;5	4;5;6;-1
3.8	2;1;-3;2;-1; -1;2;1;-1;2	-1;3;7;7;4; 0;1;-4;7;7	-2;1;3;4;6;- 5;2;-1;1;3	2;-1;1;2;4;- 5;3;-1;1;2	4;7;0;1;5; 1;6;1;1;2	4;5;-4;6;8; 9;4;-3;-4;6	1;-2;4;3;7; 9;8;-1;4;3	3;-4;2;3;5; -9;5;7;-4;2	3;4;-7;1;9; 7;1;8;-7;1
3.9	4;3;1;1; 1;1;14	2;1;3;7; 4;-1;233	-2;1;3;4; 6;-5;958	7;4;-1;2; 1;3;699	4;6;-5;-2; 1;3;479	1;1;1;4; 3;1;56	1;2;3;4; 7;-1;233	1;-2;3;6; 4;-5;958	4;7;-1;1; 2;3;699
3.10	2;3;-5;1; 7;4;-5;5	4;7;0;1; 5;1;6;1	4;5;-4;6; 8;9;4;-3	1;-2;4;3; 7;9;8;-1	3;-4;2;3; 5;-9;5;7	3;4;-7;1; 9;7;1;8	6;-1;1;0; 2;-4;1;-1	-2;1;3;4; 6;-5;2;-1	2;-1;1;2; 4;-5;3;-1
3.11	-2;3;-4; -1;7;-4	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	6;-1;1; 0;2;-4	5;-2;1; 0;1;5	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9
3.12	$\sqrt{2}$;-3; -3;45;60	$\sqrt{2}$;-4; 1;45;60	$\sqrt{2}$;5; 2;45;-60	$\sqrt{2}$;1; 1;45;60	$\sqrt{2}$;4; 5;45;90	$\sqrt{2}$;7; 1;45;-60	$\sqrt{2}$;6; 1;-45;90	$\sqrt{2}$;1; 1;45;270	$\sqrt{2}$;3; 3;-45;0
3.13	2;-3;4	3;5;3	3;-4;6	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3
3.14	1;4;-6; -2;-3;8	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	6;-1;1; 0;2;-4	-2;1;3; 4;6;-5	5;-2;1; 0;1;5	1;-2;4; -3;7;9	4;5;-4; 6;8;-2	2;-1;1; 2;4;-5
3.15	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	2;-1;1;2;4; -5;3;-7;4	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11
3.16	2;10;12	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3	3;5;3	3;-4;6
3.17	4;12;22	2;10;12	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3	3;5;3
3.18	14;1;4;-6; -2;-3;8	20;11;3;4; -6;-5;5	50;-2;11;0; -1;5;7	100;-2;4; -3;7;9;2	40;5;-4;6; 8;-2;7	20;-10;1; 2;4;-5;0	40;7;10;1; 5;-10;1	30;4;-7; 14;9;7;3	60;-10;1; 10;2;-4;4
3.19	4;4;2; 4;5;3	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	4;7;0; 1;5;1	4;5;-4; 6;8;9	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7	6;-1;1; 0;2;-4
3.20	4;4;2;4;7; 6;7;8;2	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
3.21	4;-2;-3; 0;1;3;8	4;5;-4; 6;8;-2;7	2;-10;1; 2;4;-5;0	4;7;1; 1;5;-1;1	3;4;-7; 14;9;7;3	6;-1;1; 10;2;-4;4	4;1;4;-6; -2;-3;8	2;1;3;4; -6;-5;5	5;-2;1;0; -1;5;7
3.22	3;4;-1;5	3;2;-1;1	4;3;-2;1	-3;4;1;2	2;3;-1;1	5;-3;2;1	3;5;-1;2	5;4;2;1	4;-2;2;1
3.23	-2;3;-1;2;- 5;7;1;-1;0	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6; 8;9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7
3.24	2;-6;2;2;1;- 3;1;2;1	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0
3.25	2;-6;2;2;1; -3;1;2;1	3;4;-7;1;9; 7;1;8;11	2;1;1;2;4; -1;1;1;-1	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	4;5;-4;6;8; 9;4;-2;3	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0
3.26	2;3;2;1; 1;1;3;0; 2;1;3;5	2;1;1;2; 4;5;7;-2; 1;1;1;-1	8;3;1;5; 2;1;-1;4; 3;2;3;-1	-2;1;3;7; 4;6;-5;4; 2;-1;7;2	4;7;0;4; 1;5;1;0; 6;1;9;-1	4;5;-4;1; 6;8;9;2; 4;-2;3;7	1;-2;4;4; 3;7;9;5; 8;-1;0;5	3;-4;2;1; 3;5;-9;2; 5;-7;0;1	3;4;-7;0; 1;9;7;4; 1;8;11;1
3.27	3;2;2;1;-1; 3;1;9;-11	2;-6;2;2;1; -3;1;2;1	2;-2;6;1;9; -11;9;6;6;	1;-2;4;-3;7; 9;8;-1;0	3;-4;2;3;5; -9;5;-7;0	8;3;1;2;1; -1;3;2;3	-2;1;3;4;6; -5;2;-1;7	4;7;0;1;5; 1;6;1;9	8;-4;6;6;8; 9;4;-2;3
3.28	4;2;3	3;8;2	4;1;1	5;1;5	3;1;10	2;6;4	4;8;5	4;6;2	5;3;1
3.29	2;1;-1;3;0; 1;2;-1;3;5	-2;1;3;7;4; 6;-5;4;2;8	4;7;0;4;1; 5;1;0;6;10	4;5;-4;1;6; 8;9;2;4;20	1;-2;4;4;3; 7;9;5;8;11	3;-4;2;1;3; 5;-9;2;5;7	3;4;-7;0;1; 9;7;4;1;8	2;1;1;2;4; 5;7;-2;1;9	8;3;1;5;2; 1;-1;4;3;9
3.30	4;9;7;5;6	-2;1;3;4;6	2;-1;1;2;4	4;7;0;1;5	4;5;-4;6;8	1;-2;4;-3;7	3;-4;2;3;5	3;4;-7;1;9	6;-1;1;3;2

IV. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

4.1. Декартові координати в просторі

Подібно до того, як вводилися декартові координати на площині, вводяться декартові координати в просторі. Візьмемо три попарно перпендикулярні прямі x, y і z, які перетинаються в одній точці O – початку відліку. Отримаємо осі Ox, Oy, Oz – координатні осі, які називають вісь абсцис, вісь ординат і вісь аплікат відповідно. Проведемо через кожну пару цих прямих площину і назвемо відповідно xOy, xOz, yOz (рис 4.1). xOy, xOz, yOz – координатні площини. Початок відліку і три попарно перпендикулярні координатні осі, які перетинаються в початку відліку, утворюють прямокутну систему координат Декарта в просторі (рис 4.1).

Візьмемо довільну точку простору М і проведемо через неї площини паралельні координатним площинам. Отримаємо три точки x, y, z перетину цих площин з відповідними осями (рис 4.2). Таким чином, кожній точці M простору відповідає впорядкована трійка чисел (x, y, z) – координати точки M простору (рис 4.2), x – абсциса, y – ордината і z – апліката. І навпаки – кожній упорядкованій трійці чисел відповідає точка простору. Таким чином, установлено взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками дійсних чисел. Простір, кожна точка якого визначається трійкою чисел, називається тривимірним простором і позначається R_3.

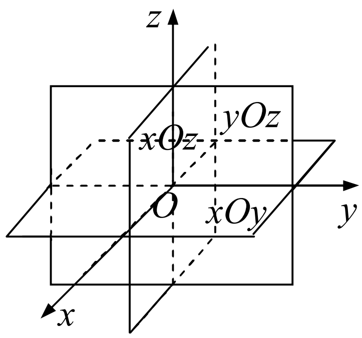


Рис. 4.1

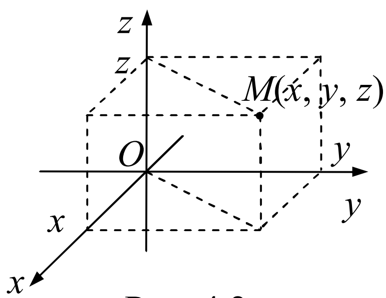


Рис. 4.2

Відстань між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ простору знаходиться за формулою подібною до формули (1.5):

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (4.1)$$

Формулу відстані між двома точками простору легко вивести, якщо в прямокутній декартовій системі координат в просторі розглянути побудований на двох точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ як на протилежних вершинах прямий паралелепіпед, грані якого паралельні відповідним координатним площинам (рис 4.3). Якщо двічі застосувати теорему Піфагора, спочатку до прямокутного трикутника ACM_2, а потім до прямокутного трикутника CM_1M_2 (рис 4.3), то отримаємо формулу (4.1).

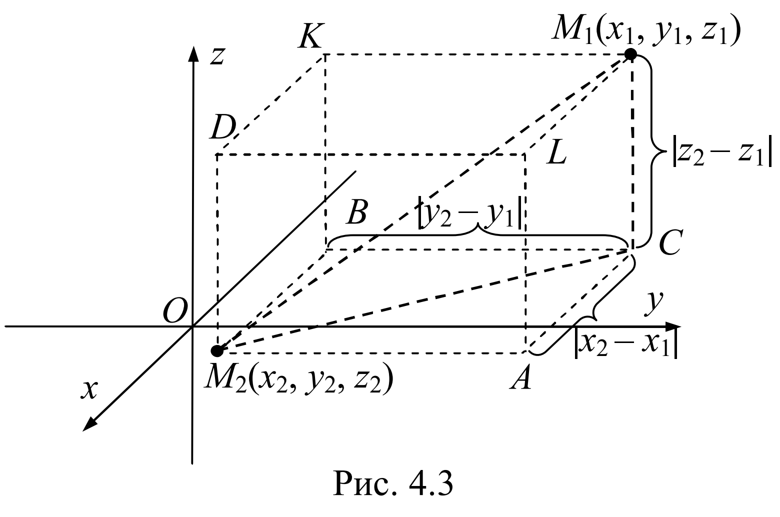


Рис. 4.3

Координати точки M, яка ділить відрізок між двома просторовими точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ у відношенні λ, знаходяться за формулами, аналогічними до формул (1.6) (виведення аналогічне):

$$x=\frac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda\, z_2}{1+\lambda}. \qquad (4.2)$$

Приклад 4.1. Відомі координати вершин $\Delta\, ABC$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Знайти площу $\Delta\, ABC$, а також координати точки перетину медіан. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 3$, $x_2 = 8$, $y_2 = -4$, $z_2 = -7$, $x_3 = -9$, $y_3 = 2$, $z_3 = 5$. Отже, $A(1, 0, 3)$, $B(8, -4, -7)$, $C(-9, 2, 5)$.

Площа $\Delta\, ABC$ за формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}$, де p – півпериметр, тобто $p=\dfrac{AB+BC+AC}{2}$. У свою чергу, згідно з (4.1):

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{(8-1)^2+(-4-0)^2+(-7-3)^2}=\sqrt{165}$;

$AC=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}=\sqrt{(-9-1)^2+(2-0)^2+(5-3)^2}=\sqrt{108}$;

$BC=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2}=\sqrt{(-9-8)^2+(2-(-4))^2+(5-(-7))^2}=\sqrt{469}$;

$p=\dfrac{\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}}{2}$. Отже площа $\Delta\, ABC$ дорівнюватиме:

$$S=\sqrt{\frac{\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}}{2}\left(\frac{\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}}{2}-\sqrt{469}\right)\left(\frac{\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}}{2}-\right.}$$

$$\overline{\left.-\sqrt{108}\right)\left(\frac{\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}}{2}-\sqrt{165}\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}\right)\times}$$

$$\overline{\times\left(\sqrt{165}-\sqrt{469}+\sqrt{108}\right)\left(\sqrt{165}+\sqrt{469}-\sqrt{108}\right)\left(-\sqrt{165}+\sqrt{469}+\sqrt{108}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\left(\sqrt{165}+\sqrt{108}\right)^2-469\right)\left(-165+\sqrt{165\cdot 469}+\sqrt{165\cdot 108}-\sqrt{165\cdot 469}+469+\right.}$$

$$\overline{\left.+\sqrt{469\cdot 108}+\sqrt{108\cdot 165}-\sqrt{108\cdot 469}-108\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(165+2\sqrt{165\cdot 108}+108-469\right)\left(-165+2\sqrt{165\cdot 108}+469-108\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(2\sqrt{165\cdot 108}-196\right)\left(2\sqrt{165\cdot 108}+196\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 165\cdot 108-196^2}=\frac{1}{4}\sqrt{32864}=$$

$$=\sqrt{\frac{32864}{16}}=\sqrt{2054}\approx 45{,}321\ (\text{од.}^2).$$ Тобто $S_{\Delta ABC}\approx 45{,}321$ (од.^{2}).

Шукаємо координати точки перетину медіан. Відомо, що медіани ділять протилежну сторону пополам і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Знайдемо координати точки M, яка є серединою сторони AC.

$$M\left(\frac{1+(-9)}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right)\Rightarrow M(-4, 1, 4).$$

Поділимо відрізок BM у відношенні 2:1 і отримаємо точку O, яка є точкою перетину медіан. При цьому при $\lambda = 2$ згідно з (4.2) отримаємо такі координати точки O:

$$x=\frac{8+2\cdot(-4)}{1+2}=0;\ y=\frac{-4+2\cdot 1}{1+2}=-\frac{2}{3}=-0,(6);\ z=\frac{-7+2\cdot 4}{1+2}=\frac{1}{3}=0,(3).$$

Отже $O(0; 0,(6); 0,(3))$. Відповідь: $S_{\Delta ABC}\approx 45{,}321$ (од.^{2}), $O(0;\ 0,(6);\ 0,(3))$.

4.2. Площина та пряма лінія в просторі

4.2.1. Рівняння площини в просторі

Для виведення рівняння площини α у тривимірному просторі візьмемо деяку точку $M_o(x_o,\ y_o,\ z_o)$ на цій площині і вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Нехай $M(x,\ y,\ z)$ – довільна точка на площині. Очевидно (рис. 4.4), що тоді і

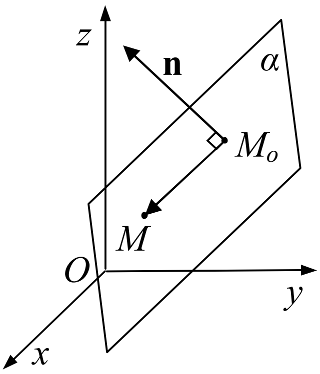


Рис. 4.4

тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M_o M}$ буде перпендикулярний до вектора **n**, точка $\mathrm{M}(x, y, z)$ лежатиме в площині α. Умова перпендикулярності вектора $\mathbf{M_o M} = (x - x_o, y - y_o, z - z_o)$ до вектора $\mathbf{n} = (A, B, C)$, згідно з (3.10) подається у вигляді:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0. \qquad (4.3)$$

– рівняння площини, що проходить через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ *перпендикулярно до вектора* $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

Якщо позначимо сталу величину:

$$-A\,x_o - B\,y_o - C\,z_o = D, \qquad (4.4)$$

то рівняння (4.3) набуде вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4.5)$$

– загальне рівняння площини.

П р и к л а д 4 . 2. Записати загальне рівняння площини α, якій належить точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ і вектор нормалі якої $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Числа x_o, y_o, z_o, A, B, C подані в таблиці 4.

Розв'язування: В.1: $x_o = 2$, $y_o = 1$, $z_o = -1$ $A = 3$, $B = -7$, $C = 1$. Отже, $M_o(2, 1, -1)$, $\mathbf{n} = (3, -7, 1)$.

Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $3(x-2) + (-7)(y-1) + (z+1) = 0$. Звідси $3x - 7y + z + 2 = 0$ – загальне рівняння площини α. Відповідь: $3x - 7y + z + 2 = 0$.

Нехай дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, тобто вектор $\mathbf{M_1 M_2}$ не паралельний вектору $\mathbf{M_1 M_3}$. Ці три точки (як і два вектори) належать одній площині і при тому єдиній. Знайдемо рівняння цієї площини.

Точка з координатами $M(x, y, z)$ належатиме площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\mathbf{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ належатимуть цій площині (будуть компланарними). Об'єм паралелепіпеда, побудованого на таких векторах дорівнюватиме нулю, а, отже, змішаний добуток цих трьох векторів також дорівнюватиме нулю, тобто $\mathbf{M_1M} \cdot (\mathbf{M_1M_2} \times \mathbf{M_1M_3}) = 0$. Використавши формулу (3.16), отримаємо вираз для змішаного добутку через координати векторів:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.6)$$

– рівняння площини, що проходить через три точки.

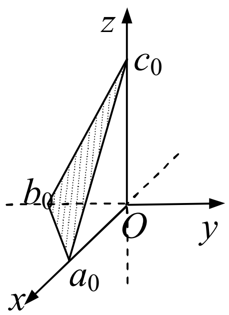


Рис. 4.5

П р и к л а д 4 . 3. Дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$ Записати загальне рівняння площини α, що проходить через три точки M_1, M_2 і M_3. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 в табл. 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $z_1 = -1$ $x_2 = 3$, $y_2 = 0$, $z_3 = 1$, $x_3 = 2$, $y_3 = -1$, $z_3 = 3$. Отже, $M_1(2, 1, -1)$, $M_2(3, 0, 1)$, $M_3(2, -1, 3)$. З формули (4.6) отримаємо: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(-4+4) - (y-1)(4-0) + (z+1)(-2-0) = 0 \Rightarrow -4(y-1) - 2(z+1) = 0$. Звідси $4y + 2z - 2 = 0$ – загальне рівняння площини α. Відповідь: $4y + 2z - 2 = 0$.

Якщо площина перетинає осі координат у точках $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$ (рис. 4.5), то відомі три точки цієї площини $A(a_0, 0, 0)$, $B(0, b_0, 0)$ і $C(0, 0, c_0)$. Враховуючи рівняння (4.6), отримаємо: $\begin{vmatrix} x - a_0 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a_0 & b_0 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a_0 & 0 - 0 & c_0 - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x - a_0)b_0c_0 + ya_0c_0 + za_0b_0 = 0$.

Розкриємо дужки і поділимо на вільний член. Отримаємо: $\dfrac{x}{a_0} + \dfrac{y}{b_0} + \dfrac{z}{c_0} = 1 \qquad (4.7)$

– рівняння площини у відрізках на осях (рис. 4.5).

П р и к л а д 4 . 4. Дано, що площина α перетинає осі координат у точках $x = a$, $y = b$, $z = c$. Записати загальне рівняння площини α. Числа a, b, c подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$. Застосувавши формулу (4.7), отримаємо:

$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-1}=1 \Rightarrow x+2y-2z=2$. Звідси $x+2y-2z-2=0$ – загальне рівняння площини α. Відповідь: $x+2y-2z-2=0$.

П р и к л а д 4 . 5. Дано, що площина α відтинає на осях координат Ox, Oy, Oz відрізки довжиною відповідно l_1, l_2, l_3 від початку координат. Записати рівняння площини α. Числа l_1, l_2, l_3 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $l_1 = 5$, $l_2 = 4$, $l_3 = 7$. Можливі такі випадки:
1. Площина перетинає осі координат у точках $x = 5$, $y = 4$, $z = 7$, то, застосувавши формулу (4.7), отримаємо α_1: $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{7}=1$. 2. $x = 5$, $y = 4$, $z = -7$, то α_2: $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-7}=1$.
3. $x = 5$, $y = -4$, $z = 7$, то α_3: $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{7}=1$. 4. $x = 5$, $y = -4$, $z = -7$, то α_4: $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{-7}=1$.
5. $x = -5$, $y = 4$, $z = 7$, то α_5: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{7}=1$. 6. $x = -5$, $y = 4$, $z = -7$, то α_6: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{-7}=1$.
7. $x = -5$, $y = -4$, $z = 7$, то α_7: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{7}=1$. 8. $x = -5$, $y = -4$, $z = -7$, то α_8: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{-7}=1$. Отже, можливі 8 різних площин, що задовольнятимуть умову задачі.

Рівняння площини у відрізках на осях можна отримати ще так. Загальне рівняння площини (4.5) (коли жодний із коефіцієнтів не нульовий) поділити почленно на вільний член зі знаком мінус і перенести одиницю в праву сторону. При цьому отримаємо рівняння у вигляді (4.7) (рис. 4.5):

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)}+\frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)}=\frac{x}{a_o}+\frac{y}{b_o}+\frac{z}{c_o}=1.$$

П р и к л а д 4 . 6. Знайти точки перетину площини α з осями координат, якщо їй належить точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ і її вектор нормалі $\mathbf{n}=(A, B, C)$. Числа x_o, y_o, z_o, A, B, C подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_o= 9$, $y_o=-8$, $z_o=-5$ $A = 8$, $B = -7$, $C = 4$. Отже, $M_o(9, -8, -5)$, $\mathbf{n}=(8, -7, 4)$. Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $8(x-9)+(-7)(y+8)+4(z+5)=0$. Звідси $8x-7y+4z-108=0$ – загальне рівняння площини α. Поділивши його почленно на вільний член зі знаком мінус, отримаємо:

$$\frac{8x}{108}-\frac{7y}{108}+\frac{4z}{108}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{108}{8}}+\frac{y}{-\frac{108}{7}}+\frac{z}{\frac{108}{4}}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{27}{2}}+\frac{y}{-\frac{108}{7}}+\frac{z}{27}=1$$

Отже, згідно з (4.7) площина α перетинає осі координат у точках $x= 13\frac{1}{2}$, $y=-15\frac{3}{7}$, $z = 27$, тобто в точках A, B, C з координатами $A(13\frac{1}{2}, 0, 0)$, $B(0, -15\frac{3}{7}, 0)$ і $C(0, 0, 27)$.

Рівняння площини (4.5) називають *неповним*, якщо в ньому немає деяких членів. З означення вектора $\mathbf{n}=(A, B, C)$, нормального до площини α, заданої рівнянням (4.5) зрозуміло, що в цьому рівнянні коефіцієнти A, B і C при x, y і z відповідно є проекціями нормального цій площині вектора $\mathbf{n}$ на осі Ox, Oy і Oz відповідно.

Дослідимо, яку площину в прямокутній системі координат $Oxyz$ визначає рівняння (4.5) при довільних A, B, C і D.

1°. Якщо $D=0$, то рівняння набуває вигляду $Ax+By+Cz=0$. Точка $O\,(0, 0, 0)$ задовольняє це рівняння, тобто лежить в площині (належить їй). Отже, площина проходить через початок системи координат.

2°. Якщо один з коефіцієнтів при змінних дорівнює нулю. Нехай $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді рівняння набуває вигляду $By+Cz+D=0$. Нормальний вектор – перпендикулярний до осі Ox, тому що його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Отже, площина – паралельна цій осі. Якщо ще і $D = 0$, то площина $By+Cz=0$ містить вісь Ox, тому що паралельна їй і проходить через початок системи координат. Отже, якщо $A = 0$ – площина паралельна осі Ox; $A = 0$, $D = 0$ – площина проходить через вісь Ox. Аналогічно, якщо $B = 0$ – площина, паралельна осі Oy; $B = 0$, $D = 0$ – площина проходить через вісь Oy і $C = 0$ – площина, паралельна осі Oz; $C = 0$, $D = 0$ – проходить через вісь Oz.

3°. Нехай два коефіцієнти при змінних нулі: $A = B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Тоді площина $Cz+D=0$ – паралельна відразу осям Ox і Oy, а, отже, вона паралельна площині Oxy і перпендикулярна осі Oz. Якщо ще і $D = 0$, тоді площина $z=0$ є координатною площиною Oxy. Отже, якщо $A = B = 0$ – площина перпендикулярна осі Oz; $A = B = 0$, $D = 0$ – це площина Oxy. За аналогією, якщо $A = C = 0$ – площина, перпендикулярна осі Oy; $A = C = 0$, $D = 0$ – це площина Oxz, і якщо $B = C = 0$ – площина перпендикулярна осі Ox; $B = C = 0$, $D = 0$ – це Oyz.

4°. Якщо $A = B = C$, то перетворивши загальне рівняння площини до вигляду (4.7), переконаємось, що вона відтинає на осях координат рівні відрізки.

Наприклад, нехай відомо, що площина α паралельна площині Oxy і відтинає на осі Oz відрізок довжиною 5 від початку координат. Запишемо рівняння площини α.

Площина α паралельна площині Oxy, отже, вона паралельна відразу осям Ox і Oy, тобто, проекції її вектора нормалі, перпендикулярного осям Ox і Oy, дорівнюють нулю. Тобто $A = B = 0$.

Можливі такі випадки:

1. Площина перетинає вісь Oz у точці $z = 5$. Очевидно, що й рівняння площини α в цьому випадку $z = 5$, бо кожна точка площини α має аплікату $z = 5$.

2. Площина перетинає вісь Oz у точці $z = -5$. Очевидно, що й рівняння площини α в цьому випадку $z = -5$, бо кожна точка площини α має аплікату $z = -5$.

Отже, можливі дві різні площини, що задовольнятимуть умову задачі та їх рівняння відповідно: $z = 5$, $z = -5$.

Площина α: $f(x, y, z) = Ax+By+Cz+D = 0$ розмежовує (ділить) увесь простір на два півпростори: в одному виконується нерівність $f(x, y, z) > 0$, а в іншому – нерівність $f(x, y, z) < 0$ (рис. 4.6).

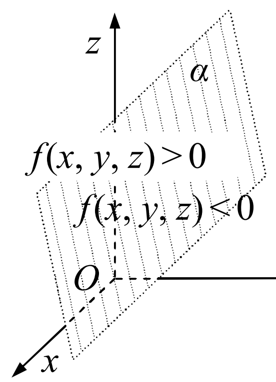


Рис. 4.6

П р и к л а д 4 . 7 . Дано площину α, якій належить точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$ і вектор нормалі якої $\mathbf{n} = (A, B, C)$. Перевірити, чи точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ належать одному півпростору відносно площини α. Числа x_o, y_o, z_o, A, B, C, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_o= 5$, $y_o=-4$, $z_o=-5$ $A = 1, B = -7$, $C = 4$, $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $z_1 = 9$, $x_2 = 2$, $y_2 = 6$, $z_2 = 3$. Отже $M_o(5, -4, -5)$, $\mathbf{n} = (1, -7, 4)$, $A(1, 5, 9)$, $B(2, 6, 3)$. Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $1(x-5)+(-7)(y+4)+4(z+5)=0$. Звідси $x-7y+4z-13=0$ – загальне рівняння площини α. Підставимо в отримане рівняння координати точок $A(1, 5, 9)$ і $B(2, 6, 3)$:

$$1-7\cdot5+4\cdot9-13=1-35+36-13=-11<0;\ 2-7\cdot6+4\cdot3-13=2-42+12-13=-41<0.$$

Відповідь: точки $A(1, 5, 9)$ і $B(2, 6, 3)$ належать одному півпростору відносно площини α.

П р и к л а д 4 . 8 . Дано площину α якій належать точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, і яка містить пряму l. Знайти рівняння площини α, якщо пряма l проходить паралельно до вектора $\mathbf{s} = (m, n, p)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, m, n, p$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $z_1 = 9$, $x_2 = 2$, $y_2 = 6$, $z_2 = 3$, $m = 5$, $n =-4$, $p = -5$. Отже, $A(1, 5, 9)$, $B(2, 6, 3)$, $\mathbf{s} = (5, -4, -5)$. Площина α, згідно з умовою, містить пряму l, паралельну вектору $\mathbf{s}$, тобто площина α сама паралельна вектору $\mathbf{s}$.

Знайдемо, згідно з формулою (3.2) координати вектора $\mathbf{AB}$, який міститься на площині α: $\mathbf{AB} = (1, 1, -6)$. Отже, площина α містить два вектори $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{s}$.

Вектор нормалі площини α, тобто вектор $\mathbf{n}$, шукатимемо як векторний добуток векторів $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{s}$, бо вектор нормалі $\mathbf{n}$ має бути перпендикулярний до векторів $\mathbf{AB}$ і $\mathbf{s}$ паралельних площині α. Згідно з формулою (3.13) отримаємо:

$$\mathbf{n} = \mathbf{AB} \times \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -6 \\ 5 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -29\mathbf{i} - 25\mathbf{j} - 9\mathbf{k}. \text{ Тобто } \mathbf{n} = (-29, -25, -9).$$

Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $-29(x-1)+(-25)(y-5)+(-9)(z-9)=0$. Звідси $-29x-25y-9z+235=0$ – загальне рівняння площини α.

Приклад 4.9. Точка $A(x_1, y_1, z_1)$ належить двом площинам α і β, які проходять через осі відповідно Oy і Oz. Знайти загальні рівняння площин α і β. Який кут між векторами нормалі площин α і β? Числа x_1, y_1, z_1 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $z_1 = 9$. Отже, $A(1, 5, 9)$.

Площина α згідно з умовою, містить вісь Oy, отже вона містить початок координат (точку O (0,0,0)). Отже, площині α належатимуть два вектори $\mathbf{OA} = (1, 5, 9)$ і $\mathbf{j} = (0,1,0)$.

Вектор нормалі площини α, тобто вектор $\mathbf{n}_1$ шукатимемо як векторний добуток векторів $\mathbf{OA}$ і $\mathbf{j}$, бо вектор нормалі $\mathbf{n}_1$ має бути перпендикулярний до векторів $\mathbf{OA}$ і $\mathbf{j}$ паралельних площині α. Згідно з формулою (3.13) отримаємо:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{OA} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + \mathbf{k}. \text{ Тобто } \mathbf{n}_1 = (-9, 0, 1).$$

Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $-9\cdot(x-1)+1\cdot(z-9)=0$. Звідси $-9x+z=0$ – загальне рівняння площини α (як бачимо, в загальному рівнянні площини (4.5), яка містить вісь Oy, коефіцієнти B і D дорівнюють нулю ($B = 0$, $D = 0$)).

Площина β, згідно з умовою, містить вісь Oz, отже, вона містить початок координат (точку O(0,0,0)). Отже, площині β належатимуть два вектори $\mathbf{OA} = (1, 5, 9)$ і $\mathbf{k} = (0,1,0)$.

Вектор нормалі площини β, тобто вектор $\mathbf{n}_2$, шукатимемо як векторний добуток векторів $\mathbf{OA}$ і $\mathbf{k}$, бо вектор нормалі $\mathbf{n}_2$ має бути перпендикулярний до векторів $\mathbf{OA}$ і $\mathbf{k}$ паралельних площині β. Згідно з формулою (3.13) отримаємо:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{OA} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}. \text{ Тобто } \mathbf{n}_2 = (5, -1, 0).$$

Застосувавши формулу (4.3), отримаємо: $5\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-5)=0$. Звідси $5x - y = 0$ – загальне рівняння площини β (як бачимо, в загальному рівнянні площини (4.5), яка містить вісь Oz, коефіцієнти C і D дорівнюють нулю ($C = 0$, $D = 0$)).

Знайдемо кут між векторами $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$ за формулою (3.11а):

$$\cos\alpha = \frac{-9\cdot 5 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0}{\sqrt{(-9)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{-45}{\sqrt{82\cdot 26}} \approx -0{,}9746. \qquad \angle\alpha \approx \arccos(-0{,}9746),$$

$\angle\alpha \approx 167^\circ$. Відповідь: α: $-9x+z=0$, β: $5x-y=0$, $\angle\alpha \approx 167^\circ$.

Приклад 4.10. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ є основою перпендикуляра опущеного з початку координат на площину. Знайти загальне рівняння цієї площини. Які відрізки відтинатиме ця площина на осях координат? Числа x_0, y_0, z_0 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = 3$, $y_0 = -5$, $z_0 = 7$. Отже, $M_0(3, -5, 7)$.

Точка M_0 є основою перпендикуляра, опущеного на площину, отже, вона належить цій площині. Вектор $\mathbf{OM_0} = (3-0; -5-0; 7-0) = (3; -5; 7)$ є вектором нормалі на площину. Отже, рівняння площини, згідно (4.3) запишеться: $3(x-3)+(-5)(y-(-5))+7(z-7)=0$. Звідси $3x-5+7z-63=0$ – загальне рівняння площини. Поділимо його почленно на 63 і перенесемо вільний член в праву сторону, отримаємо: $\frac{3x}{63}-\frac{5y}{63}+\frac{7z}{63}=1$. Звідси $\frac{x}{63/3}-\frac{y}{63/5}+\frac{z}{63/7}=1$ і $\frac{x}{21}+\frac{y}{-12{,}6}+\frac{z}{9}=1$. Отже, дана площина відтинатиме на осях Ox, Oy та Oz відрізки 21, $-12{,}6$, 9 відповідно.

Приклад 4.11. Знайти загальне рівняння площини α, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ паралельно осі Oy. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 4$, $y_1 = -3$, $z_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$, $z_2 = -8$. Отже, $M_1(4, -3, 5)$ і $M_2(7, 5, -8)$. 1 спосіб. Вектор нормалі площини α перпендикулярний до вектора $\mathbf{M_1M_2}$ і $\mathbf{j}$, отже за вектор нормалі $\mathbf{n}$, згідно з означенням векторного добутку, можна взяти вектор $\mathbf{M_1M_2} \times \mathbf{j}$. Згідно з (3.2) отримаємо: $\mathbf{M_1M_2} = (3,\ 8, -13)$. Згідно з (3.13) отримаємо: $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 8 & -13 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-13\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) = 13\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$. Отже, $\mathbf{n} = (13, 0, 3)$. Отже, рівняння площини α згідно з (4.3) запишеться: $13(x-4) + 3(z-5) = 0$, або $13x + 3z - 67 = 0$ – загальне р-я пл. α.

2 спосіб. Площина – паралельна осі Oy, отже, в її загальному рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$, згідно з геометричним змістом коефіцієнтів коефіцієнт $B = 0$, тобто рівняння набуде вигляду: $Ax + Cz + D = 0$. Оскільки площина проходить через точки M_1 і M_2, то координати точок повинні задовольняти рівняння площини, тобто повинна виконуватися система: $\begin{cases} A\cdot 4 + C\cdot 5 + D = 0 \\ A\cdot 7 + C\cdot(-8) + D = 0 \end{cases}$. Звідси $A\cdot 4 + C\cdot 5 = A\cdot 7 + C\cdot(-8)$, $3A = 13C$. Пара чисел $A = 13, C = 3$ є одним з розв'язків цього рівняння. $D = 8C - 7A = 8\cdot 3 - 7\cdot 13 = 24 - 91 = -67$. Отже, $13x + 3z - 67 = 0$ – заг. рівняння площини.

П р и к л а д 4 . 1 2 . Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вісь Oz. Числа x_0, y_0, z_0 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: x_0 –3, $y_0 = 7$, $z_0 = 11$. Отже, $M_0(-3, 7, 11)$.

І спосіб. Площина містить вісь Oz, отже вона містить початок координат, тобто точку $O(0, 0, 0)$. Оскільки площина містить точки O і M, а також вісь Oz, то вона компланарна векторам $\mathbf{OM_0}$ і $\mathbf{k}$. Згідно з (3.2): $\mathbf{OM_0} = (-3, 7, 11)$. Згідно з означенням векторного добутку вектором нормалі до площини може бути вектор $\mathbf{OM_0} \times \mathbf{k}$. Отже, згідно з (3.13), отримаємо: $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Отже $\mathbf{n}\,(7, 3, 0)$. Отже, рівняння площини згідно з (4.3) запишемо: $7(x - (-3)) + 3(y - 7) = 0$. Звідси $7x + 3y = 0$ – загальне рівняння площини.

2 спосіб. Площина містить вісь Oz, отже в її загальному рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$ згідно з геометричним змістом коефіцієнтів коефіцієнт $C = D = 0$, тобто рівняння набуде вигляду: $Ax + By = 0$.

Беручи до уваги те, $M_0(-3, 7, 11)$, то координати точки повинні задовольняти рівнянню площини, тобто повинне виконуватися рівняння $A\cdot(-3) + B\cdot 7 = 0$. Пара чисел $A = 7$, $B = 3$ є одним з розв'язків цього рівняння.. Отже, $7x + 3y = 0$ – заг. р-я площини.

П р и к л а д 4 . 1 3 . Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно площині Oxy. Числа x_0, y_0, z_0 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: x_0 –17, $y_0 = 3$, $z_0 = -5$. Отже, $M_0(-17, 3, -5)$.

І спосіб. Вектором нормалі такої площини є вектор $\mathbf{k}\,(0, 0, 1)$. Отже, згідно з (4.3) рівняння площини запишеться: $0 + 0 + 1\cdot(z - (-5)) = 0$. Звідси $z + 5 = 0$ – заг. р-я площини.

2 спосіб. Площина паралельна площині Oxy, отже, вона паралельна осям Ox і Oy , отже, в її загальному рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$ згідно з геометричним змістом коефіцієнтів коефіцієнт $A = B = 0$, тобто її рівняння набуде вигляду: $Cz + D = 0$.

Зважаючи на те, що площина проходить через точку $M_0(-17, 3, -5)$, координати точки повинні задовольняти рівнянню площини, тобто повинне виконуватися рівняння $C\cdot(-5) + D = 0$. Пара чисел $C = 1, D = 5$ є одним з розв'язків цього рівняння. Отже, загальне рівняння площини таке: $z + 5 = 0$. Відповідь: $z + 5 = 0$.

П р и к л а д 4 . 1 4 . Скласти загальне р-я площини α, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ паралельно вектору $\mathbf{a}\,(a_x, a_y, a_z)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ в т.4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = -3$, $y_1 = 7$, $z_1 = -4$, $x_2 = 8$, $y_2 = 9$, $z_2 = -5$, $a_x = -2, a_y = 3, a_z = 4$. Отже, $M_1(-3, 7, -4)$, $M_2(8, 9, -5)$ і $\mathbf{a}\,(-2, 3, 4)$.

Площина α компланарна векторам **a** і $\mathbf{M_1M_2}$. Згідно з (3.2): $M_1M_2 = (11, 2, -1)$. Згідно з означенням векторного добутку і згідно з формулою (3.13) вектор нормалі площини α може мати координати: $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 11 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} - 42\mathbf{j} + 37\mathbf{k}$. Отже, $\mathbf{n}(11, -42, 37)$. Отже, рівняння площини згідно (4.3) запишеться: $11(x-8) - 42(y-9) + 37(z+5) = 0$. Звідси: $11x - 42y + 37z + 475 = 0$ – загальне рівняння площини α.

Приклад 4.15. Скласти загальне рівняння площини α, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно векторам $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$. Числа x_0, y_0, z_0 в т. 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$, $a_x = -3, a_y = 0, a_z = 7$, $b_x = 5, b_y = -5, b_z = 2$. Отже, $M_0(2, 3, 4)$, $\mathbf{a}(-3, 0, 7)$ і $\mathbf{b}(5, -5, 2)$.

Згідно з означенням векторного добутку і згідно з формулою (3.13) вектор нормалі площини α може мати координати: $\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 7 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 35\mathbf{i} + 41\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$. Отже, $\mathbf{n}(35, 41, 15)$.

Тому, рівняння площини α згідно з (4.3) запишеться: $35(x-2) + 41(y-3) + 15(z-4) = 0$. Звідси: $35x + 41y + 15z - 253 = 0$ – загальне рівняння площини α.

Приклад 4.16. Скласти загальне рівняння площини α, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = 2$, $y_1 = -3$, $z_1 = 4$, $x_2 = 3$, $y_2 = -5$, $z_2 = -7$, $x_3 = -8$, $y_3 = -9$, $z_3 = 10$. Отже, $M_1(2, -3, 4)$, $M_2(3, -5, -7)$ і $M_3(-8, -9, 10)$.

Використавши рівняння (4.6), отримаємо таке рівняння площини α:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-(-3) & z-4 \\ 3-2 & -5-(-3) & -7-4 \\ -8-2 & -9-(-3) & 10-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-(-3) & z-4 \\ 1 & -2 & -11 \\ -10 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, звідси отримаємо: $(x-2)(-78) - (y+3)(-104) + (z-4)(-26) = 0$. Спростивши, отримаємо загальне рівняння площини α: $39x - 52y + 13z - 287 = 0$ – загальне рівняння площини α.

Приклад 4.17. Який об'єм піраміди, яку відтинає площина $Ax + By + Cz + D = 0$ від координатного кута? Числа A, B, C та D подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $A = 2$, $B = 3$, $C = 5$ та $D = 6$. Отже, рівняння площини таке: $2x + 3y + 5z + 6 = 0$.

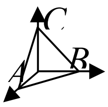
I спосіб. Піраміда, яку відтинає площина від координатного кута, – це піраміда $OABC$ з вершинами в точках з координатами: $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ і $C(0, 0, c)$, в яких площина перетинає осі Ox, Oy і Oz відповідно. Знайдемо a, підставивши в рівняння площини замість y, z нулі, тобто $2x + 3\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 = a$, тобто $A(-3, 0, 0)$. Аналогічно $b = -2, c = -6/5$, тобто $B(0, -2, 0)$ і $C(0, 0, -6/5)$.

Об'єм піраміди $OABC$ дорівнює, як відомо, 1/6 об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих самих ребрах OA, OB і OC. Згідно з геометричним змістом мішаного добутку і формули (3.16), попередньо знайшовши координати векторів $\mathbf{OA}(-3, 0, 0)$, $\mathbf{OB}(0, -2, 0)$, $\mathbf{OC}(0, 0, -6/5)$, отримаємо: $V_{пар} = \left| \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} \right| = \left| -36/5 \right| = 36/5$ (од^3).

І тоді $V_{пір} = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ (од^3).

2 спосіб. Шукаємо a, b, c по-іншоум, а саме, перетворюючи загальне рівняння площини в рівняння площини у відрізках на осях, тобто так. Рівняння $2x+3y+5z+6=0$ $\Big| :(-6)$ і, перетворивши, отримаємо: $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{-6/5}=1$. Отже, $a=-3, b=-2, c=-6/5$.

Далі так само, як і в 1-му способі. 3 спосіб (рис.).



$V_{пір}=\dfrac{1}{3}S_{осн}H=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{1}{2}OA\cdot OB)\cdot OC=\dfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}=1\dfrac{1}{5}$ (од^3).

П р и к л а д 4 . 1 8 . Площина α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і відтинає від осей Oy та Oz відрізки b та c відповідно. Знайти загальне рівняння площини α і координати та напрямні косинуси її вектора нормалі. Числа x_0, y_0, z_0, b , c в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = 3$, $y_0 = -7$, $z_0 = 11$, $b = 8$, $c = -2$. Отже, $M_0(3, -7, 11)$ і ця площина проходить через такі дві точки $B(0, 8, 0)$ і $C(0, 0, -2)$ на осях Oy і Oz відповідно. Використавши (4.6), отримаємо:
$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-(-2) \\ 0-0 & 8-0 & 0-(-2) \\ 3-0 & -7-0 & 11-(-2) \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 3 & -7 & 13 \end{vmatrix}=0$. Розкривши визначник, звідси отримаємо: $x(104+14)-y(0-6)+(z+2)(0-24)=0$. Спростивши, отримаємо: $38x+y-4z-8=0$ – загальне рівняння площини α. Згідно з геометричним змістом коефіцієнтів при змінних в загальному рівнянні прямої маємо: $\mathbf{n}(38, 1, -4)$ – вектор нормалі площини α. І згідно з (3.1) напрямні косинуси визначатимуться:
$\cos\alpha=\dfrac{n_x}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{38}{\sqrt{38^2+1^2+(-4)^2}}=\dfrac{38}{\sqrt{1461}}$; $\cos\beta=\dfrac{n_y}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1461}}$; $\cos\gamma=\dfrac{n_z}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{1461}}$.

П р и к л а д 4 . 1 9 . Площини α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і відтинає від осей координат рівні між собою відрізки. Знайти ці відрізки і загальне рівняння площини α. Числа x_0, y_0, z_0 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = 5$, $y_0 = -3$, $z_0 = 6$. Отже, $M_0(5, -3, 6)$.

Якщо площина відтинає від осей рівні між собою відрізки, то згідно з (4.7) в її рівняння у відрізках на осях маємо $a=b=c$, тобто рівняння площини запишеться $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$. Звідси $x+y+z=a$. Площині належить точка $M_0(5, -3, 6)$, отже, координати цієї точки повинні задовольняти це рівняння, тобто $5+(-3)+6=a$. Звідси $a=8=b=c$. І, отже, $x+y+z-8=0$ – шукане рівняння площини α.

П р и к л а д 4 . 2 0 . Запишіть загальне рівняння площини α, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і відтинає на осях координат Ox, Oy, Oz відрізки довжинами a, b, c відповідно, довжини яких відносяться між собою як $k_1 : k_2 : k_3$ відповідно. Також знайдіть відрізки a, b, c. Числа x_0, y_0, z_0, k_1, k_2, k_3 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0 = 7$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $k_1=21, k_2=3, k_3=4$. Отже, $M_0(7, 0, 0)$, $a:b:c=21:3:4$. Як видно з умови задачі, точка $M_0(7, 0, 0)$, яка належить площині і є точкою на осі Ox, бо абсциса і ордината точки M_0 рівні нулю. Отже, $a=7$. Оскільки $a:b:c=21:3:4$, то $\dfrac{7}{b}=\dfrac{21}{3}=7\Rightarrow b=1$; $\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow c=\dfrac{4}{3}$.

Отже, згідно з (4.7) рівняння площини таке: $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{4/3}=1\Rightarrow\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{3z}{4}=1$. Перемножимо його почленно на НСД (7, 1, 4) = 28 і перенесемо вільний член в ліву сторону. Отримаємо: $4x+28y+21z-28=0$ – загальне рівняння площини α.

Відповідь: $4x+28y+21z-28=0$, $a=7, b=1, c=4/3$.

4.2.2. Кут між площинами в просторі. Взаємне розташування площин в просторі

Нехай задані дві площини α і β своїми загальними рівняннями: $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Двогранний кут φ між площинами α і β вимірюється лінійним кутом між нормальними (перпендикулярними) цим площинам векторами $\mathbf{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ і $\mathbf{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ (рис. 4.7). Отже, використавши (3.11), отримаємо:

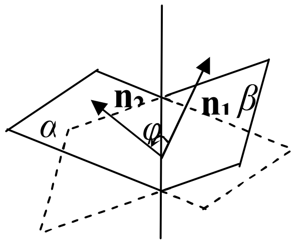


Рис.4.7

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4.8)$$

– формула для обчислення кута між двома площинами.

Зрозуміло, якщо площини перпендикулярні між собою, то $\cos\varphi = 0$ і з формули (4.8) одержимо:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (4.9)$$

– умова перпендикулярності двох площин.

А якщо площини є паралельними між собою, то їх нормальні вектори є колінеарними, тому координати цих векторів є пропорційними, тобто:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{– умова паралельності двох площин.} \qquad (4.10)$$

Якщо ж паралельні між собою площини проходять через одну точку, то такі площини повинні накладатися і рівняння однієї площини є рівнянням іншої площини, помноженим на деяке число, отже:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad \text{– умова накладання (збігання) двох площин.} \qquad (4.11)$$

П р и к л а д 4 . 2 1 . Знайти кут φ між площинами α і β заданими своїми загальними рівняннями $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно. Числа $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: В. 1: $A_1 = 2, B_1 = 5, C_1 = -7, D_1 = -2, A_2 = 4, B_2 = 6, \quad C_2 = 3, D_2 = -1$. Отже, $\alpha: 2x + 5y - 7z - 2 = 0$ і $\beta: 4x + 6y + 3z - 1 = 0$. Згідно з (4.8) кут між площинами α і β такий: $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 4 + 5\cdot 6 + (-7)\cdot 3}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2}} = \dfrac{8 + 30 - 21}{\sqrt{4 + 25 + 49}\cdot\sqrt{16 + 36 + 9}} =$

$$= \frac{17}{\sqrt{78}\cdot\sqrt{61}} = \frac{17}{\sqrt{4758}} \approx 0{,}25.$$ $\varphi \approx \arccos 0{,}25$, $\varphi \approx 75{,}73^\circ$. Відповідь: $\varphi \approx 75{,}73^\circ$.

П р и к л а д 4 . 2 2 . Запишіть загальне рівняння площини α, яка проходить через вісь Ox і утворює з площиною β, заданою своїм загальним рівнянням $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ кут 45°. Числа A_2, B_2, C_2, D_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: В.1: $A_2 = 4, B_2 = 6, C_2 = 3, D_2 = -1$. Отже, $\beta: 4x + 6y + 3z - 1 = 0$.

Нехай загальне рівняння площини α таке: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Задача зводиться до відшукання коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1. Зважаючи на те, що площина α проходить через вісь Ox, то згідно з геометричним змістом коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1 отримаємо $A_1 = 0$ і $D_1 = 0$. Отже, загальне рівняння площини α таке: $B_1y + C_1z = 0$ і задача зводиться до відшукання коефіцієнтів B_1, C_1. Оскільки площина α утворює з площиною кут 45°, то згідно з (4.8), отримаємо: $\cos\ 45^\circ = \dfrac{0\cdot 4 + B_1\cdot 6 + C_1\cdot 3}{\sqrt{0^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{6B_1 + 3C_1}{\sqrt{B_1^2 + C_1^2}\sqrt{61}}$.

Піднесемо до квадрату обидві сторони рівняння і отримаємо:

$$\frac{1}{2} = \frac{36B_1^2 + 36B_1C_1 + 9C_1^2}{61(B_1^2 + C_1^2)} \quad \Rightarrow \quad 61(B_1^2 + C_1^2) = 2(36B_1^2 + 36B_1C_1 + 9C_1^2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ 61B_1^{\ 2}+61C_1^{\ 2}=72B_1^{\ 2}+\ 72B_1C_1+18C_1^{\ 2}\ \Rightarrow\ 11B_1^{\ 2}+\ 72B_1C_1-43C_1^{\ 2}=0$.

Розв'яжемо це квадратне рівняння відносно невідомої B_1, отримаємо дискримінант $D=b^2-4ac=(72C_1)^2-4\cdot 11\cdot(-43C_1^{\ 2})=5184C_1^{\ 2}+1892C_1^{\ 2}=7076C_1^{\ 2};\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{7076}C_1$;

$B_{1_{1,2}}=x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-72C_1\pm\sqrt{7076}C_1}{2\cdot 11}=\dfrac{C_1(-72\pm\sqrt{7076})}{22}$.

Отже, якщо $C_1=22$, то $B_{1_1}=-72+\sqrt{7076},\ B_{1_2}=-72-\sqrt{7076}$.

Отже, в результаті отримаємо такі два можливі рівняння площини α:

$\alpha_1:(-72+\sqrt{7076})y+22z=0$ і $\alpha_2:(-72-\sqrt{7076})y+22z=0$.

Відповідь: $\alpha_1:(-72+\sqrt{7076})y+22z=0$ і $\alpha_2:(-72-\sqrt{7076})y+22z=0$.

Приклад 4.23. Запишіть загальне рівняння площини α, яка ділить навпіл менший двогранний кут між площинами β і γ, заданими своїми загальними рівняннями $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ і $\gamma: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ відповідно. Числа $A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $A_2=2, B_2=5, C_2=-7, D_2=-2, A_3=4, B_3=6, C_3=3, D_3=-1$. Отже, $\beta: 2x+5y-7z-2=0$ і $\gamma: 4x+6y+3z-1=0$.

Нехай загальне рівняння площини α таке: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$. Задача зводиться до відшукання коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1. Зрозуміло, що $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2=(2, 5, -7)$, $\mathbf{n}_3=(4, 6, 3)$ – нормальні вектори площин α, β і γ відповідно.

Перевіримо спочатку, чи кут між векторами $\mathbf{n}_2$ і $\mathbf{n}_3$ гострий ($<90^\circ$). Якщо ні, то розглядатимемо кут між векторами $\mathbf{n}_2$ і $-\mathbf{n}_3$. Згідно з (4.8) отримаємо: $\cos(\mathbf{n}_2 \widehat{,} \mathbf{n}_3)=\dfrac{8+30-21}{\sqrt{78\cdot 61}}\approx\dfrac{17}{69}\approx\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ (\mathbf{n}_2 \widehat{,} \mathbf{n}_3)\approx\arccos\dfrac{1}{4}$, $(\mathbf{n}_2 \widehat{,} \mathbf{n}_3)\approx 75^\circ<90^\circ$, отже, кут гострий (також видно що кут гострий, бо $\cos(\mathbf{n}_2 \widehat{,} \mathbf{n}_3)>0$).

Оскільки площина α утворює з площинами β і γ рівні кути, то:

по-перше, кути між нормальним вектором площини α та нормальними векторами площин β і γ повинні бути рівні, тобто повинна виконуватися умова (4.8). Отже, отримаємо: $\dfrac{A_1\cdot 2\ +\ B_1\cdot 5\ +\ C_1\cdot(-7)}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\sqrt{2^2+5^2+(-7)^2}}=\dfrac{A_1\cdot 4\ +\ B_1\cdot 6\ +\ C_1\cdot 3}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\sqrt{4^2+6^2+3^2}}$.

Помножимо обидві сторони рівняння на $\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}$ і отримаємо:

$$\frac{A_1\cdot 2\ +\ B_1\cdot 5\ +\ C_1\cdot(-7)}{\sqrt{4+25+49}}=\frac{A_1\cdot 4\ +\ B_1\cdot 6\ +\ C_1\cdot 3}{\sqrt{16+36+9}}\Rightarrow\frac{2A_1\ +\ 5B_1-7C_1}{\sqrt{78}}=\frac{4A_1\ +\ 6B_1\ +\ 3C_1}{\sqrt{61}}$$

Помножимо обидві сторони рівняння на $\sqrt{78}\cdot\sqrt{61}$ і отримаємо:

$\sqrt{61}(2A_1\ +\ 5B_1-7C_1)=\sqrt{78}(4A_1\ +\ 6B_1\ +\ 3C_1)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 2A_1\sqrt{61}\ +\ 5B_1\sqrt{61}-7C_1\sqrt{61}=4A_1\sqrt{78}\ +\ 6B_1\sqrt{78}\ +\ 3C_1\sqrt{78}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ A_1(2\sqrt{61}-4\sqrt{78})+\ B_1(5\sqrt{61}-6\sqrt{78})-C_1(7\sqrt{61}+3\sqrt{78})=0$;

по-друге, нормальні вектори площин α, β і γ повинні бути компланарні, по-іншому – лінійно залежні, тобто $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2+\lambda\mathbf{n}_3$, де λ – деяке дійсне число (коефіцієнт лінійної залежності), а, отже, $A_1=2+4\lambda, B_1=5+6\lambda, C_1=-7+3\lambda$.

Підставивши отримані вирази для A_1, B_1, C_1 в рівняння $A_1(2\sqrt{61}-4\sqrt{78})+\ B_1(5\sqrt{61}-6\sqrt{78})-C_1(7\sqrt{61}+3\sqrt{78})=0$, отримаємо: $(2+4\lambda)(2\sqrt{61}-4\sqrt{78})+\ (5+6\lambda)(5\sqrt{61}-6\sqrt{78})-(-7+3\lambda)(7\sqrt{61}+3\sqrt{78})=0$.

Відкриємо дужки і спростимо це рівняння:

$$4\sqrt{61}-8\sqrt{78}+8\lambda\sqrt{61}-16\lambda\sqrt{78}+25\sqrt{61}-30\sqrt{78}+30\lambda\sqrt{61}-36\lambda\sqrt{78}+$$
$$+49\sqrt{61}+21\sqrt{78}-21\lambda\sqrt{61}-9\lambda\sqrt{78}=0\Rightarrow 78\sqrt{61}-17\sqrt{78}+17\lambda\sqrt{61}-61\lambda\sqrt{78}=0.$$

Звідси знайдемо $\lambda=\dfrac{78\sqrt{61}-17\sqrt{78}}{61\sqrt{78}-17\sqrt{61}}$. А отже: $A_1=2+4\cdot\dfrac{78\sqrt{61}-17\sqrt{78}}{61\sqrt{78}-17\sqrt{61}}$, $B_1=5+6\cdot\dfrac{78\sqrt{61}-17\sqrt{78}}{61\sqrt{78}-17\sqrt{61}}$, $C_1=-7+3\cdot\dfrac{78\sqrt{61}-17\sqrt{78}}{61\sqrt{78}-17\sqrt{61}}$. За нормальний вектор площини α для зручності візьмемо вектор $\mathbf{n}=(A,B,C)=(61\sqrt{78}-17\sqrt{61})\cdot\mathbf{n}_1$, тобто вектор з координатами: $A=2(61\sqrt{78}-17\sqrt{61})+4(78\sqrt{61}-17\sqrt{78})=54\sqrt{78}+278\sqrt{61}$, $B=5(61\sqrt{78}-17\sqrt{61})+6(78\sqrt{61}-17\sqrt{78})=203\sqrt{78}+383\sqrt{61}$, $C=-7(61\sqrt{78}-17\sqrt{61})+3(78\sqrt{61}-17\sqrt{78})=-478\sqrt{78}+353\sqrt{61}$;

по-третє, площина α, повинна проходити через лінію перетину площин β і γ, тобто кожна точка лінії перетину площин β і γ повинна задовольняти рівняння площини α. Отже кожна точка, яка є розв'язком системи $\begin{cases}2x+5y-7z-2=0\\4x+6y+3z-1=0\end{cases}$, повинна задовольняти рівняння площини α. Нормальний вектор площини α ми вже знайшли, отже, для того щоб записати рівняння площини α, нам потрібно знати координати хоча б однієї точки, яка належить площині α. Знайдемо координати хоча б однієї точки лінії перетину площин β і γ. Для цього знайдемо хоч би один розв'язок системи $\begin{cases}2x+5y-7z-2=0\\4x+6y+3z-1=0\end{cases}$. Нехай $z=0$, отже, отримаємо $\begin{cases}2x+5y-2=0\\4x+6y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y-2=0\\-4y+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y-2=0\\y=3/4\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}y=3/4\\2x+5\cdot\dfrac{3}{4}-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7/8\\y=3/4\end{cases}$. Отже, точка з координатами $(-7/8,\ 3/4,\ 0)$ належить площині α. Згідно з (4.4) отримаємо: $D=-(54\sqrt{78}+278\sqrt{61})\cdot(-\dfrac{7}{8})-(203\sqrt{78}+383\sqrt{61})\cdot\dfrac{3}{4}=-105\sqrt{78}-44\sqrt{61}$. Отже:

$(54\sqrt{78}+278\sqrt{61})x+(203\sqrt{78}+383\sqrt{61})y+(-478\sqrt{78}+353\sqrt{61})z-105\sqrt{78}-44\sqrt{61}=0$–заг.р-я пл.$\alpha$.

2 спосіб. Аналогічно $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{n}_2=(2,5,-7)$, $\mathbf{n}_3=(4,6,3)$ – нормальні вектори площин α,β і γ відповідно. Взявши до уваги те, що площина α ділить навпіл менший двогранний кут між площинами β і γ, то нормальний вектор $\mathbf{n}_1$ площини α, повинен бути компланарним з $\mathbf{n}_2$ і $\mathbf{n}_3$ площин β і γ відповідно, і кут між $\mathbf{n}_1$ і з кожним з векторів $\mathbf{n}_2$ чи $\mathbf{n}_3$ повинен бути рівним половині кута між $\mathbf{n}_2$ і $\mathbf{n}_3$ (кут між $\mathbf{n}_2$ і $\mathbf{n}_3$, як нам відомо з першого способу, є гострим, тому ми розглядаємо саме цей кут, а не кут між $\mathbf{n}_2$ і $-\mathbf{n}_3$, який рівний в даному випадку більшому двогранному кутові між площинами β і γ).

За вектор $\mathbf{n}_1$ можна взяти вектор, який рівний сумі таких двох одиничних векторів $\dfrac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|}$ і $\dfrac{\mathbf{n}_3}{|\mathbf{n}_3|}$, тобто $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)=\dfrac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|}+\dfrac{\mathbf{n}_3}{|\mathbf{n}_3|}$. $|\mathbf{n}_2|=\sqrt{78}$, $|\mathbf{n}_3|=\sqrt{61}$, отже, $A_1=\dfrac{2}{\sqrt{78}}+\dfrac{4}{\sqrt{61}}$, $B_1=\dfrac{5}{\sqrt{78}}+\dfrac{6}{\sqrt{61}}$, $C_1=\dfrac{-7}{\sqrt{78}}+\dfrac{3}{\sqrt{61}}$.

З попереднього способу відомо, що точка з координатами $(-7/8,\ 3/4,\ 0)$ належить лінії перетину площин β і γ, а, отже, площині α. Згідно з (4.4), отримаємо:

$$D=-(\frac{2}{\sqrt{78}}+\frac{4}{\sqrt{61}})\cdot(-\frac{7}{8})-(\frac{5}{\sqrt{78}}+\frac{6}{\sqrt{61}})\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}(\frac{1}{\sqrt{78}}+\frac{2}{\sqrt{61}})-\frac{3}{4}(\frac{5}{\sqrt{78}}+\frac{6}{\sqrt{61}})=\frac{-2}{\sqrt{78}}-\frac{1}{\sqrt{61}}$$

Отже, загальне рівняння площини α таке:

$$(\frac{2}{\sqrt{78}}+\frac{4}{\sqrt{61}})x+(\frac{5}{\sqrt{78}}+\frac{6}{\sqrt{61}})y+(\frac{-7}{\sqrt{78}}+\frac{3}{\sqrt{61}})z-\frac{2}{\sqrt{78}}-\frac{1}{\sqrt{61}}=0$$

$$(2\sqrt{61}+4\sqrt{78})x+(5\sqrt{61}+6\sqrt{78})y+(-7\sqrt{61}+3\sqrt{78})z-2\sqrt{61}-\sqrt{78}=0$$

А в 1 способі таке:

$$(54\sqrt{78}+278\sqrt{61})x+(203\sqrt{78}+383\sqrt{61})y+(-478\sqrt{78}+353\sqrt{61})z-105\sqrt{78}-44\sqrt{61}=0$$

Перевіримо, чи ці рівняння є рівняннями однієї і тієї ж самої площини. Для цього перевіримо, чи виконується умова (4.11).

$$\frac{54\sqrt{78}+278\sqrt{61}}{2\sqrt{61}+4\sqrt{78}}=\frac{203\sqrt{78}+383\sqrt{61}}{5\sqrt{61}+6\sqrt{78}}=\frac{-478\sqrt{78}+353\sqrt{61}}{-7\sqrt{61}+3\sqrt{78}}=\frac{-105\sqrt{78}-44\sqrt{61}}{-2\sqrt{61}-\sqrt{78}}$$

Для цього згідно з транзитивною властивістю рівності достатньо лише перевірити рівність першого виразу з усіма іншими. Використавши основну властивість пропорції, отримаємо: $(54\sqrt{78}+278\sqrt{61})(5\sqrt{61}+6\sqrt{78})=(203\sqrt{78}+383\sqrt{61})(2\sqrt{61}+4\sqrt{78})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 270\sqrt{78\cdot 61}+25272+84790+1668\sqrt{78\cdot 61}=406\sqrt{78\cdot 61}+63336+46726+1532\sqrt{78\cdot 61}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1938\sqrt{78\cdot 61}+110062=1938\sqrt{78\cdot 61}+110062$. Аналогічно можна довести й інші рівності. Отже, ці рівняння є рівняннями однієї і тієї ж самої площини.

Відповідь: $(2\sqrt{61}+4\sqrt{78})x+(5\sqrt{61}+6\sqrt{78})y+(-7\sqrt{61}+3\sqrt{78})z-2\sqrt{61}-\sqrt{78}=0$.

Приклад 4.24. Запишіть загальне рівняння площини α, яка паралельна до площини $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ і проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Числа $A_2, B_2, C_2, D_2, x_0, y_0, z_0$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $A_2=4, B_2=5, C_2=3, D_2=-1$, $x_0=7$, $y_0=-1$, $z_0=3$. Отже: $\beta: 4x+5y+3z-1=0$, $M_0(7,-1,3)$.

1 спосіб. Нехай загальне рівняння площини α таке: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$. Задача зводиться до відшукання коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1. Оскільки площина α паралельна до площини β, то згідно з умовою паралельності двох площин (4.10) отримаємо: $\frac{A_1}{4}=\frac{B_1}{5}=\frac{C_1}{3}$. Крім того, що площина α проходить через точку $M_0(7,-1,3)$, то координати точки повинні задовольняти рівнянню площини, тобто: $A_1\cdot 7+B_1\cdot(-1)+C_1\cdot 3+D_1=0$.

Нехай $\frac{A_1}{4}=\frac{B_1}{5}=\frac{C_1}{3}=1$, тобто за A_1, B_1, C_1 візьмемо числа 4, 5, 3 відповідно. Отже, $4\cdot 7+5\cdot(-1)+3\cdot 3+D_1=0$. Звідси знайдемо $D_1=-32$.

Отже, загальне рівняння площини α таке: $4x+5y+3z-32=0$.

2 спосіб. Оскільки площина α паралельна до площини β, то в них один і той самий вектор нормалі, тобто $\mathbf{n}=(4,5,3)$. Крім того, площина α проходить через точку $M_0(7,-1,3)$. Взявши до уваги ці дві умови, згідно з рівнянням (4.3) отримаємо: $4(x-7)+5(y-(-1))+3(z-3)=0$. Спростивши, отримаємо: $4x+5y+3z-32=0$ – загальне рівняння площини α. Відповідь: $4x+5y+3z-32=0$.

Нехай задані три різні площини α, β і γ відповідно рівняннями: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ і $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Складемо систему з цих трьох рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases}. \qquad (4.12)$$

Дані площини α, β і γ перетинатимуться в одній точці тоді і тільки тоді, коли система (4.12) матиме єдиний розв'язок, а це у свою чергу, буде в тому і тільки тому разі, коли визначник складений з коефіцієнтів при змінних x, y, z даної системи, не дорівнюватиме нулю:

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0 \text{ – \textit{умова перетину трьох площин в одній точці.}} \qquad (4.13)$$

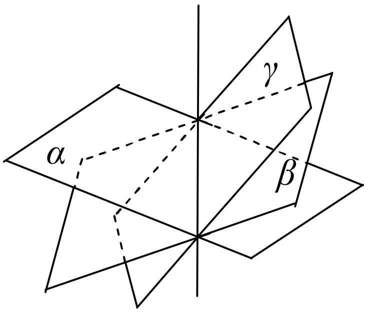


Рис. 4.8

Якщо ж $\Delta = 0$, то можливі два випадки:

– площини *α, β* і *γ* матимуть спільну пряму (рис. 4.8), якщо система їх рівнянь (4.12) має безліч розв'язків;

– площини не матимуть жодної спільної точки, якщо система їх рівнянь (4.12) не має розв'язків.

Приклад 4.25. Запишіть загальне рівняння площини *α*, яка перпендикулярна до площини $\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ і проходить через лінію перетину площин *γ* і *δ* заданих своїми загальними рівняннями $\gamma: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ і $\delta: A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$ відповідно. Числа $A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, A_4, B_4, C_4, D_4$ подані в таблиці 4.

Розв'язування: В.1: $A_2 = 2, B_2 = 5, C_2 = -7, D_2 = -2, A_3 = 4, B_3 = 6, C_3 = 3, D_3 = -1, A_4 = 8,$ $B_4 = -9, C_4 = 11, D_4 = -3$. Отже, $\beta: 2x + 5y - 7z - 2 = 0$, $\gamma: 4x + 6y + 3z - 1 = 0$ і $\delta: 8x - 9y + 11z - 3 = 0$. Нехай загальне рівняння площини α таке: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Задача зводиться до знаходження коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1.

Тому, що площина α перпендикулярна до площини *β*, то згідно з умовою перпендикулярності двох площин (4.9) отримаємо: $A_1 \cdot 2 + B_1 \cdot 5 + C_1 \cdot (-7) = 0$.

Крім того, оскільки площина α проходить через лінію перетину площин *γ* і *δ*, тобто це означає, що всі три площини перетинаються по одній лінії, тобто система їх рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ 4x + 6y + 3z - 1 = 0 \\ 8x - 9y + 11z - 3 = 0 \end{cases}$ є рівносильною системі рівнянь $\begin{cases} 4x + 6y + 3z - 1 = 0 \\ 8x - 9y + 11z - 3 = 0 \end{cases}$, яка має безліч розв'язків. Звідси випливає, що рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ є лінійною комбінацією двох інших рівнянь, а, отже, $A_1 = 4 + 8\lambda, B_1 = 6 - 9\lambda, C_1 = 3 + 11\lambda, D_1 = -1 - 3\lambda$, де $\lambda -$ коефіцієнт пропорційності. Підставивши отримані вирази в рівняння $A_1 \cdot 2 + B_1 \cdot 5 + C_1 \cdot (-7) = 0$, отримаємо: $(4 + 8\lambda) \cdot 2 + (6 - 9\lambda) \cdot 5 + (3 + 11\lambda) \cdot (-7) = 0$. Звідси знайдемо λ: $8 + 16\lambda + 30 - 45\lambda - 21 - 77\lambda = 0 \Rightarrow 17 = 106\lambda \Rightarrow \lambda = 17/106$. Отже:

$$A_1 = 4 + 8 \cdot \frac{17}{106} = \frac{4 \cdot 106 + 8 \cdot 17}{106} = \frac{424 + 136}{106} = \frac{560}{106}, B_1 = 6 - 9 \cdot \frac{17}{106} = \frac{6 \cdot 106 - 9 \cdot 17}{106} = \frac{636 - 153}{106} = \frac{483}{106},$$

$$C_1 = 3 + 11 \cdot \frac{17}{106} = \frac{3 \cdot 106 + 11 \cdot 17}{106} = \frac{318 + 187}{106} = \frac{505}{106},\ D_1 = -1 - 3 \cdot \frac{17}{106} = \frac{-106 - 3 \cdot 17}{106} = \frac{-157}{106}.$$

Отже, загальне рівняння площини α таке: $\frac{560}{106}x + \frac{483}{106}y + \frac{505}{106}z - \frac{157}{106} = 0$. Для простоти, домножимо отримане рівняння на 106 і отримаємо таке загальне рівняння площини α: $560x + 483y + 505z - 157 = 0$. Відповідь: $560x + 483y + 505z - 157 = 0$.

Приклад 4.26. Відомо, що: 1) площина α відтинає від осей координат Ox, Oy, Oz відрізки довжинами a_0, b_0, c_0 відповідно; 2) площина β проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має вектор нормалі $\mathbf{n}_2(A, B, C)$; площина *γ* містить точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Перевірити, чи ці площини перетинаються в одній точці, і якщо так, то знайти координати цієї точки. Числа a_0, b_0, c_0, x_0, y_0, z_0, A, B, C, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $a_0 = -2/5$, $b_0 = 1/2$, $c_0 = -2/3$, $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $A = 1$, $B = -2$, $C = 4$, $x_1 = 0$, $y_1 = -2$, $z_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $z_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_3 = 9$, $z_3 = 1$. Отже, $M_0(3, 0, 0)$, $\mathbf{n}_2(1, -2, 4)$ і $A(0, -2, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, 9, 1)$. Площина α відтинає від осей координат Ox, Oy, Oz відрізки довжинами $-2/5$, $1/2$, $-2/3$ відповідно, то згідно

з (4.7) отримаємо: $\frac{x}{-2/5}+\frac{y}{1/2}+\frac{z}{-2/3}=1$ і $5x-4y+3z+2=0$ – заг. р-я площини α..
Площина β проходить через точку $M_0(3,0,0)$ і має вектор нормалі $\mathbf{n}_2(1,-2,4)$, і згідно з (4.3) отримаємо: $(x-3)+(-2)\cdot(y-0)+4\cdot(z-0)=0$. То $x-2y+4z-3=0$ – заг. р-я пл. β.

Площина γ містить точки $A(0,-2,0)$, $B(1,1,0)$, $C(2,9,1)$ і згідно з (4.6): $\begin{vmatrix} x-0 & y-(-2) & z-0 \\ 1-0 & 1-(-2) & 0-0 \\ 2-0 & 9-(-2) & 1-0 \end{vmatrix}=0$. Звідси $\begin{vmatrix} x & y+2 & z \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}=0$. Розкривши визначник, отримаємо $3x-y+5z-2=0$ – загальне рівняння площини γ.

Перевіримо, чи виконується умова (4.13) – умова перетину трьох площин в одній точці: $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-30-28+15=-43\neq 0$, отже, виконується. Для знаходження координат цієї точки слід розв'язати систему, складену з рівнянь площин α, β і δ: $\begin{cases} 5x-4y+3z=-2 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$. Розв'язавши цю систему, отримаємо $(-1,0,1)$ – координати точки перетину площин α, β і δ. Відповідь: (–1, 0, 1).

4.2.3. Рівняння прямої у просторі

Будь-яка пряма лінія l у просторі є лінією перетину будь-яких двох різних площин α і β, які містять цю пряму (рис. 4.9). Рівняння такої прямої визначатиметься системою рівнянь відповідних площин $\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}. \qquad (4.14)$$

– загальне рівняння прямої у просторі.

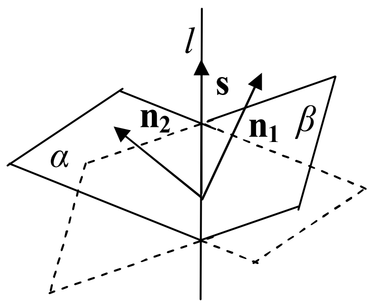


Рис. 4.9

Координати нормальних векторів $\mathbf{n_1}$ і $\mathbf{n_2}$ площин α і β повинні бути не пропорційними, в іншому випадку вектори $\mathbf{n_1}$ і $\mathbf{n_2}$ колінеарні і ці площини α і β будуть паралельними та не перетинатимуться вздовж прямої.

Рівняння прямої лінії в просторі ще по-іншому можна задати в системі координат $Oxyz$, якщо відомо координати точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ на цій прямій і ненульовий вектор $\mathbf{s}=(m, n, p)$, колінеарний (паралельний) цій прямій. Тоді довільна точка $M(x, y, z)$ буде лежати на прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\mathbf{M_oM}$ буде колінеарний *напрямному вектору прямої*, тобто вектору **s** (рис. 4.10). Тобто, коли:

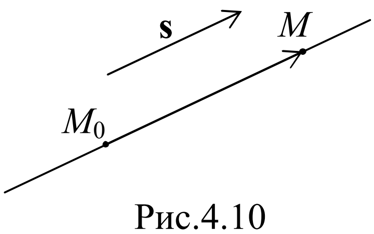


Рис.4.10

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (4.15)$$

– канонічне рівняння прямої у просторі.

Така пряма є лінією перетину площин, заданих рівняннями: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$; $\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$; $\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Якщо відомо дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, що лежать на прямій, то напрямний вектор **s** матиме координати $\mathbf{s}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, тоді рівняння прямої (4.15) перепишеться в вигляді:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4.16)$$

– рівняння прямої у просторі, що проходить через дві задані точки.

Через коефіцієнт пропорційності (параметр t) напрямних колінеарних векторів $\mathbf{M_oM}$ і **s**, які характеризують пряму l, дана пряма задаватиметься, виходячи з відношень

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$ такою системою: $\begin{cases} x=x_0+tm; \\ y=y_0+tn; \\ z=z_0+tp. \end{cases}$ (4.17)

– *параметричне рівняння прямої у просторі.*

Розглянемо, як перейти від загального рівняння прямої в просторі (4.14) до канонічного (4.15). Для цього треба знайти точку, яка лежить на прямій, тобто знайти розв'язок системи (4.14), а також потрібно знайти напрямний вектор **s** прямої. Оскільки вектор $\mathbf{n_1}=(A_1, B_1, C_1)$ – перпендикулярний до площини α, вектор $\mathbf{n_2}=(A_2, B_2, C_2)$ – перпендикулярний до площини β, а напрямний вектор прямої **s** перпендикулярний до обох цих векторів (рис. 4.9). Отже $\mathbf{s}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}$. Або через визначник:

$$\mathbf{s}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}+\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$ Отже:

$$\mathbf{s}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)=(m, n, p) \quad (4.18)$$

– *координати напрямного вектора прямої, заданої загальним рівнянням.*

Приклад 4.27. Дві площини $\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ перетинаються вздовж прямої *l*. Знайти загальне, канонічне і параметричне рівняння прямої *l*. Числа A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $A_1=7, B_1=-3, C_1=-5, D_1=-3$ і $A_2=8, B_2=9$, $C_2=-1$, $D_2=1$. Отже, $\alpha: 7x-3y-5z-3=0$ і $\beta: 8x+9y-z+1=0$.

Згідно з (4.14) загальне рівняння прямої *l* матиме вигляд такої системи: $\begin{cases} 7x-3y-5z-3=0 \\ 8x+9y-z+1=0 \end{cases}$. Перейдемо від загального рівняння прямої до канонічного (4.15) та параметричного (4.17). Для цього знайдемо координати точки, яка лежить на прямій, тобто знайдемо трійку чисел (x, y, z), які задовольняють нашу систему. А для цього слід розв'язати цю систему. $\begin{cases} 7x-3y-5z-3=0 \,|\cdot(-3) \\ 8x+9y-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow -21x+15z+9=-9y=8x-z+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -21x+15z+9=8x-z+1 \Leftrightarrow 29x-16z-8=0.$ $x=0 \Rightarrow -16z=8 \Rightarrow z=-1/2.$ $y=\dfrac{7x-5z-3}{3}=$

$=\dfrac{7\cdot 0-5\cdot(-1/2)-3}{3}=\dfrac{5/2-3}{3}=\dfrac{5}{6}-1=-\dfrac{1}{6}.$ Отже, отримаємо $M_0(0;-\frac{1}{6};-\frac{1}{2})$ – точка перетину площин α і β, тобто точка, яка належить прямій *l*. Напрямний вектор **s** – перпендикулярний до обох векторів нормалі $\mathbf{n}_1$ і $\mathbf{n}_2$ даних площин. Згідно з означенням векторного добутку і згідно з формулою (3.13), отримаємо: $\mathbf{s}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -3 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}+\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot(3+45)-\mathbf{j}\cdot(-7+40)+\mathbf{k}\cdot(63+24)=$$

$=3(16\mathbf{i}-11\mathbf{j}+29\mathbf{k})$. Отже, за напрямний вектор прямої *l* візьмемо вектор $\mathbf{s}_1(16,-11,29)$.

Використавши рівняння (4.15), запишемо канонічне рівняння прямої *l*:

$\dfrac{x-0}{16}=\dfrac{y-(-1/6)}{-11}=\dfrac{z-(-1/2)}{29} \Leftrightarrow \dfrac{x}{16}=\dfrac{y+1/6}{-11}=\dfrac{z+1/2}{29}$ – канонічне рівняння прямої *l*.

Нехай $\dfrac{x}{16}=\dfrac{y+1/6}{-11}=\dfrac{z+1/2}{29}=t$, то $\begin{cases} x=16t \\ y=-11t-1/6 \\ z=29t-1/2 \end{cases}$ – параметричне рівняння прямої *l*.

2 спосіб. Аналогічно, тільки координати напрямного вектора прямої *l* можна отримати за допомогою готової формули (4.18): $\mathbf{s}=\left(\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}\right)=(48;\ -33;\ 87)$ і $\mathbf{s}_1=\dfrac{1}{3}\mathbf{s}=(16,-11,29)$ – напрямний вектор.

П р и к л а д 4 . 2 8 . Пряма *l* і площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ відсікають на осі Oy однакові відрізки і на осі Oz однакові відрізки. Записати канонічне і загальне рівняння прямої *l*. Числа A, B, C, D подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $A=-5, B=4, C=-3, D=2$. Отже, $\alpha: -5x+4y-3z+2=0$.

Перетворивши загальне рівняння площини α до рівняння у відрізках на осях (4.7), отримаємо: $\frac{-5x}{-2}+\frac{4y}{-2}+\frac{-3z}{-2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2/5}+\frac{y}{-1/2}+\frac{z}{2/3}=1$. Отже, площина α а згідно з умовою задачі і пряма *l* відтинають на осях Oy і Oz відрізки $(-\frac{1}{2})$ і $\frac{2}{3}$ відповідно.

Тобто, пряма *l* проходить через такі дві точки: $B(0; -1/2; 0)$ і $C(0; 0; 2/3)$.

Пряма $l \in$ площині Oyz (для кожної точки прямої *l* абсциса = нулю).

Згідно з (4.16), відкинувши перший вираз рівняння, отримаємо канонічне рівняння прямої *l* у площині Oyz: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, яке аналогічне рівнянню (1.12). Отже: $\frac{y-(-1/2)}{0-(-1/2)}=\frac{z-0}{2/3-0} \Leftrightarrow \frac{y+1/2}{1/2}=\frac{z}{2/3}$ – канонічне рівняння прямої *l* у площині Oyz.

Загальним рівнянням прямої *l* є система двох рівнянь, які є рівняннями відповідно двох площин, що перетинаються вздовж прямої *l*.

Однією з таких площин є площина α (площина α містить дві різні точки прямої *l*, точки B і C, а, отже, і саму пряму *l*). За другу площину, площину β, можна взяти будь-яку з площин, яка містить також точки B і C і не накладається з площиною α. Для цього виберемо точку M, координати якої не задовольняють рівняння площини α. Наприклад, для зручності візьмемо точку $M(0; 0; 0)$. Точка $M \notin \alpha$, бо для площини α: $D=2 \neq 0$. Запишемо рівняння площини β, яка містить точки M, B і C. Згідно з (4.6), отримаємо:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x=0$ – р-я пл. β. Отже, $\begin{cases} -5x+4y-3z=0 \\ x=0 \end{cases}$ – заг. р-я пр.*l*.

П р и к л а д 4 . 2 9 . Знайти слід прямої *l*, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\mathbf{s}(m, n, p)$ у площині Oxz. Числа x_0, y_0, z_0, m, n, p подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_0=3$, $y_0=2$, $z_0=3$, $m=1$, $n=2$, $p=1$. Отже, $M_0(3, 2, 3)$, $\mathbf{s}(1, 2, 1)$. Слідом прямої у площині є спільні прямої з площиною точки. Рівняння площини Oxz: $y=0$. Рівняння прямої *l* згідно з (4.15): $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$. Підставимо в останнє рівняння замість y число 0: $x-3=\frac{-2}{2}=z-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-1 \\ z-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=2 \end{cases}$.

Отже, точка (2; 0; 2) є слідом прямої *l* у площині Oxz. Відповідь: (2; 0; 2).

П р и к л а д 4 . 3 0 . Дві площини α і β перетинаються вздовж прямої *l*. Знайти точку перетину цієї прямої з площиною Oxz. Числа A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 в табл.4.

Розв'язування: В.1: $\alpha: 7x-3y-5z-3=0$ і $\beta: 8x+9y-z+1=0$.

Згідно з (4.14) загальне рівняння прямої *l* запишеться у вигляді такої системи $\begin{cases} 7x-3y-5z-3=0 \\ 8x+9y-z+1=0 \end{cases}$. У площині Oxz ордината шуканої точки дорівнює нулю $(y=0)$.

Тому маємо: $\begin{cases} 7x-5z-3=0 \\ 8x-z+1=0 \end{cases}$. Звідси $z=8x+1$, то $7x-5(8x+1)-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{33}$.

$z=8\cdot(-\frac{8}{33})+1=-\frac{64}{33}+1=-\frac{31}{33}$. Отже, $L(-\frac{8}{33}; 0; -\frac{31}{33})$ – точка перетину пр.*l* з пл. Oxz.

4.2.4. Взаємне розташування двох прямих у просторі, кут між ними.

Дві прямі в просторі можуть бути паралельні, перетинні, або мимобіжні.

Нехай дві прямі l_1 і l_2 задані своїми канонічними рівняннями (4.15): $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ відповідно. Враховуючи, що вектори $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$ і $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим, прямі l_1 і l_2 будуть паралельними, коли їх напрямні вектори $\mathbf{s_1}$ і $\mathbf{s_2}$ будуть колінеарними, тобто коли задовільнятиметься умова:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad \text{– } \textit{умова паралельності двох прямих у просторі.} \tag{4.19}$$

Для спрощення подальших висвітлень запишемо цю умову по-іншому:

$$\overline{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}} \quad \text{– } \textit{умова непаралельності двох прямих у просторі.} \tag{4.20}$$

(Пряма риска над даною рівністю означає заперечення виконання цієї рівності).

Для того, щоб дві прямі в просторі задані своїми канонічними рівняннями (4.15): $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, були перетинними за умови, що вони непаралельні (виконується умова (4.20)), необхідно і достатньо, щоб вектор, який сполучає дві дані точки цих прямих, тобто вектор $\mathbf{M_1\,M_2}$=$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, лежав в одній площині разом з напрямними векторами $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$ і $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ відповідно до цих прямих. Змішаний добуток таких компланарних векторів дорівнює нулю. Отже, враховуючи (4.20) і (3.16), отримаємо:

$$\overline{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}} \quad \text{і} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \tag{4.21}$$

– *умова перетину двох непаралельних прямих у просторі* (паралельні прямі можуть перетинатися тільки при їх накладанні одна на одну, тобто при їх співпаданні).

Якщо дві прямі в просторі не паралельні і не перетинні, то вони *мимобіжні*. Вектор, який сполучає дві точки мимобіжних прямих, тобто вектор $\mathbf{M_1\,M_2}$=$(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, не лежить в одній площині разом з напрямними векторами $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$ і $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ відповідно до цих прямих. Отже, змішаний добуток таких некомпланарних векторів не дорівнює нулю.

Отже, враховуючи вищесказане і (3.16), отримаємо:

$$\overline{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}} \quad \text{і} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.22}$$

– *умова мимобіжності двох непаралельних прямих у просторі.*

Кут між двома перетинними прямими l_1 і l_2 (виконується умова (4.21)), заданими канонічними рівняннями (4.15): $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, враховуючи, що вектори $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$ і $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим, визначатиметься з врахуванням формули (3.11) такою формулою:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s_2}}{|\mathbf{s_1}||\mathbf{s_2}|}=\frac{m_1m_2\ +\ n_1n_2\ +\ p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}} \tag{4.23}$$

– *формула кута між двома перетинними прямими.*

Використавши формулу (4.23), запишемо, як частинний випадок, умову за якої кут між двома перетинними прямими в просторі дорівнюватиме 90°.

Оскільки: $\cos 90^\circ = 0 = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$, то

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \qquad (4.24)$$

– умова перпендикулярності двох прямих у просторі.

П р и к л а д 4 . 3 1 . Знайти координати точки перетину прямих та кут між прямими, заданими своїми параметричними рівняннями: $l_1: \begin{cases} x = t_1m_1 + x_1 \\ y = t_1n_1 + y_1 \\ z = t_1p_1 + z_1 \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = t_2m_2 + x_2 \\ y = t_2n_2 + y_2 \\ z = t_2p_2 + z_2 \end{cases}$.

Числа m_1, x_1, n_1, y_1, p_1, z_1, m_2, x_2, n_2, y_2, p_2, z_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: Отже, $l_1: \begin{cases} x = \dfrac{t_1}{3} - 2 \\ y = t_1 - 6 \\ z = 2t_1 - 15 \end{cases}$, $l_2: \begin{cases} x = t_2 - 5 \\ y = \dfrac{t_2}{2} \\ z = \dfrac{t_2}{3} + 1 \end{cases}$.

Шукаємо точку перетину прямих: $\begin{cases} t_1/3 - 2 = t_2 - 5 \\ t_1 - 6 = t_2/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3t_2 - 9 \\ t_1 = t_2/2 + 6 \end{cases}$. Звідси $3t_2 - 9 = t_2/2 + 6 \;\Leftrightarrow\; 5t_2/2 = 15 \;\Leftrightarrow\; t_2/2 = 3 \;\Leftrightarrow\; t_2 = 6$.

Отже, $x = t_2 - 5 = 6 - 5 = 1$; $y = \dfrac{t_2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$; $z = \dfrac{t_2}{3} + 1 = \dfrac{6}{3} + 1 = 2 + 1 = 3$.

Отже, $M_2(1; 3; 3)$ – точка перетину прямих l_1 і l_2. Кут між прямими l_1 і l_2 знайдемо за допомогою формули (4.23):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{46}{9}}\sqrt{\frac{49}{36}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\sqrt{46}\cdot\frac{7}{6}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7\sqrt{46}}{18}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{18}{7\sqrt{46}} = \frac{27}{7\sqrt{46}}.$$

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{27}{7\sqrt{46}}\right) \approx \arccos 0{,}5687 \approx 55{,}34^\circ$. Відповідь: $M_2(1; 3; 3)$, $\alpha \approx 55{,}34^\circ$.

П р и к л а д 4 . 3 2 . Пряма l_1 проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно прямій l_2: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Знайти рівняння прямої l_1. Числа x_0, y_0, z_0, A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: Отже, $M_0(-9; 8; 0)$, $\begin{cases} 7x - 3y - 5z - 3 = 0 \\ 8x + 9y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Напрямний вектор $\mathbf{s}_1$ прямої l_1 паралельний напрямному вектору прямої l_2. Отже, $\mathbf{s}_1 = k\mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -3 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 3(16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 29\mathbf{k})$. Отже, за напрямний вектор прямої l_1 візьмемо вектор $\mathbf{s}_1(16, -11, 29)$. Використавши рівняння (4.15), запишемо канонічне рівняння прямої l_1: $\dfrac{x - (-9)}{16} = \dfrac{y - 8}{-11} = \dfrac{z - 0}{29} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x + 9}{16} = \dfrac{y - 8}{-11} = \dfrac{z}{29}$.

П р и к л а д 4 . 3 3 . Прямі: $l_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $l_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ мимобіжні? Числа x_1, m_1, y_1, n_1, z_1, p_1, x_2, m_2, y_2, n_2, z_2, p_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $l_1: \dfrac{x + 9}{16} = \dfrac{y - 8}{-11} = \dfrac{z}{29}$ і $l_2: \dfrac{x - 1}{6} = \dfrac{y + 7}{8} = \dfrac{z - 5}{-4}$.

Перевіримо, чи виконується умова (4.22). Справді, $\overline{\frac{16}{6}=\frac{-11}{8}=\frac{29}{-4}}$ і

$$\begin{vmatrix} 1-(-9) & -7-8 & 5-0 \\ 16 & -11 & 29 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -15 & 5 \\ 16 & -11 & 29 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 10(44-232)+15(-64-174)+5(128+66)=$$

$=-1880+3570+970=2660\neq 0$, отже прямі l_1 і l_2 – мимобіжні.

Приклад 4.34. Пряма l_1 проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перетинає пряму l_2: $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ під прямим кутом. Знайти рівняння прямої l_1. Числа x_0, y_0, z_0, x_2, m_2, y_2, n_2, z_2, p_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $M_0(-9;8;7)$, l_2: $\frac{x-10}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$. Нехай прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці $H(x_3;y_3;z_3)$. Тоді напрямний вектор прямої l_1 такий: $\mathbf{s}_1=k\,\mathbf{HM}_0$. $\mathbf{HM}_0=\left(x_3-(-9);\,y_3-8;\,z_3-7\right)$. Вектори l_1 і l_2 згідно з умовою задачі перпендикулярні, то повинна виконуватися умова (4.24): $3\left(x_3+9\right)+4\left(y_3-8\right)+\left(z_3-7\right)=0$.

Координати точки $H(x_3;y_3;z_3)$ повинні задовольняти рівняння прямої l_2, тобто повинна виконуватися рівність: $\frac{x_3-10}{3}=\frac{y_3+7}{4}=\frac{z_3}{1}$.

З останньої рівності отримаємо: $x_3=3\cdot z_3+10$, $\quad y_3=4\cdot z_3-7$.

Підставивши в рівняння $3\left(x_3+9\right)+4\left(y_3-8\right)+\left(z_3-7\right)=0$, отримаємо:

$3\left((3z_3+10)+9\right)+4\left((4z_3-7)-8\right)+\left(z_3-7\right)=0$. Звідси випливає $z_3=\frac{5}{13}$, а в свою чергу: $x_3=3\cdot\frac{5}{13}+10=\frac{145}{13}$, $\quad y_3=4\cdot\frac{5}{13}-7=-\frac{71}{13}$. Отже $\mathbf{HM}_0=\left(\frac{145}{13}+9;-\frac{71}{13}-8;\frac{5}{13}-7\right)=$ $=\left(\frac{262}{13};-\frac{175}{13};-\frac{86}{13}\right)$. Отже, $\mathbf{s}=k\,\mathbf{HM}_0=k\left(\frac{262}{13};-\frac{175}{13};-\frac{86}{13}\right)$. Нехай $k=13$, то $\mathbf{s}(262;-175;86)$. Отже, рівняння прямої l_1 таке: $\frac{x+9}{262}=\frac{y-8}{-175}=\frac{z-7}{86}$.

Приклад 4.35. Пряма l_1 перетинає пряму $l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ та пряму $l_3:\frac{x-x_3}{m_3}=\frac{y-y_3}{n_3}=\frac{z-z_3}{p_3}$ і паралельна прямій $l_4:\frac{x-x_4}{m_4}=\frac{y-y_4}{n_4}=\frac{z-z_4}{p_4}$. Знайти рівняння прямої l_1. Числа x_2, m_2, y_2, n_2, z_2, p_2, x_3, m_3, y_3, n_3, z_3, p_3, x_4, m_4, y_4, n_4, z_4, p_4 подані в таблиці 4.

Розв'язування: В.1: $l_2:\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$, $l_3:\frac{x-10}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$ і $l_4:\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

Дана задача не мала б жодного розв'язку, якщо б прямі l_2 і l_3 були паралельні, а пряма l_4 – не паралельна площині прямих l_2 і l_3. Пряма l_2 згідно з (4.20) не паралельна прямій l_3. Перевіримо за допомогою формули (4.22) умову мимобіжності прямих l_2 і l_3:

$$\begin{vmatrix} 10+3 & -7-5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 13(3-4)+12(2-3)=-13-12=-25\neq 0$$, то, прямі l_2 і l_3 – мимобіжні.

Нехай пряма l_1 перетинає пряму l_2 в точці $A(x_a; y_a; z_a)$ а пряму l_3 – в точці $B(x_b; y_b; z_b)$. Тоді координати точок A і B повинні задовольняти рівняння відповідних прямих l_2 і l_3, тобто: $\frac{x_a+3}{2}=\frac{y_a-5}{3}=\frac{z_a}{1}$ і $\frac{x_b-10}{3}=\frac{y_b+7}{4}=\frac{z_b}{1}$. Крім цього, для паралельності прямих l_1 і l_4, повинні бути паралельними їх напрямні вектори, тобто $\mathbf{AB}=k\mathbf{s}_4$. Оскільки згідно з (3.2): $\mathbf{AB}=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$, а згідно з (4.15): $\mathbf{s}_4(8; 7; 1)$, то згідно (3.10а) отримаємо: $\frac{x_b-x_a}{8}=\frac{y_b-y_a}{7}=\frac{z_b-z_a}{1}$.

Склавши три подвійні рівняння в систему, отримаємо систему шести лінійних рівнянь, в якій шість невідомих:

$$\frac{x_a+3}{2}=\frac{z_a}{1}\ i\ \frac{y_a-5}{3}=\frac{z_a}{1}\ i\ \frac{x_b-10}{3}=\frac{z_b}{1}\ i\ \frac{y_b+7}{4}=\frac{z_b}{1}\ i\ \frac{x_b-x_a}{8}=\frac{z_b-z_a}{1}\ i\ \frac{y_b-y_a}{7}=\frac{z_b-z_a}{1}.$$

З цієї системи отримаємо: $z_a=\frac{x_a+3}{2}$; $z_b=\frac{x_b-10}{3}$;

$$\frac{x_a+3}{2}=\frac{y_a-5}{3}\Rightarrow y_a=\frac{3}{2}(x_a+3)+5;\qquad \frac{x_b-10}{3}=\frac{y_b+7}{4}\Rightarrow y_b=\frac{4}{3}(x_b-10)-7.$$

Отже, підставивши отримані вирази в п’яте і шосте рівняння системи, отримаємо таку систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}\dfrac{x_b-x_a}{8}=\dfrac{\left(\frac{4}{3}(x_b-10)-7\right)-\left(\frac{3}{2}(x_a+3)+5\right)}{7} & \Big|\times 56\\[2ex] \dfrac{x_b-x_a}{8}=\dfrac{x_b-10}{3}-\dfrac{x_a+3}{2} & \Big|\times 24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-11x_b+15x_a=-716\\ -5x_b+9x_a=-116\end{cases}.$$

Звідси $x_b=196$, $x_a=96$; $y_a=\frac{3}{2}(x_a+3)+5=\frac{3}{2}(96+3)+5=\frac{297}{2}+5=\frac{307}{2}$;

$$z_a=\frac{x_a+3}{2}=\frac{96+3}{2}=\frac{99}{2};\ y_b=\frac{4}{3}(x_b-10)-7=\frac{4}{3}(196-10)-7=241;\quad z_b=\frac{x_b-10}{3}=\frac{196-10}{3}=62.$$

Отже: $A(96; \frac{307}{2}; \frac{99}{2})$, $B(196; 241; 62)$.

Згідно з (3.2): $\mathbf{AB}=(x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)=(100; \frac{175}{2}; \frac{25}{2})$.

Перевіримо, чи задовольняється умова: $\mathbf{AB}=k\mathbf{s}_4=k(8; 7; 1)$.

Дійсно $\mathbf{AB}=(100; \frac{175}{2}; \frac{25}{2})=\frac{25}{2}(8; 7; 1)$, тобто координати вектора $\mathbf{AB}=k\mathbf{s}_4$ знайдені правильно, а, отже, і координати точок A і B знайдені правильно. А, отже, згідно з (4.16) рівняння прямої l_1 таке: $\frac{x-196}{8}=\frac{y-241}{7}=z-62$ – рівняння прямої l_1.

Приклад 4.36. Пряма l_1 – перпендикулярна прямим $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ та $l_3: \frac{x-x_3}{m_3}=\frac{y-y_3}{n_3}=\frac{z-z_3}{p_3}$. Знайти рівняння прямої l_1. Числа x_2, m_2, y_2, n_2, z_2, p_2, x_3, m_3, y_3, n_3, z_3, p_3 подані в таблиці 4.

Розв’язування: Варіант 1: отже, $l_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{5}$, $l_3: \frac{x-10}{3}=\frac{y+7}{4}=\frac{z+2}{7}$.

Рівняння прямої l_1 шукатимемо у вигляді: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$, де $A(x_a;\,y_a;z_a)$ і $B(x_b;\,y_b;z_b)$ – точки перетину прямої l_1 з прямими l_2 та l_3 відповідно. Задача зводиться до відшукання координат цих точок. Напрямний вектор прямої l_1: $\mathbf{AB}=(x_b-x_a,\, y_b-y_a,\, z_b-z_a)$.

Щоб знайти рівняння прямої l_1, перпендикулярної прямим l_2 та l_3, слід : *по-перше* – використати умову перпендикулярності прямої l_1 з прямими l_2 та l_3, тобто умову (4.24); *по-друге* – використати умову перетинності прямої l_1 з прямими l_2 та l_3.

Отже, згідно (4.24), $(x_b-x_a)\cdot 2\;+\;(y_b-y_a)\cdot 3\;+\;(z_b-z_a)\cdot 5=0$ і $(x_b-x_a)\cdot 3\;+\;(y_b-y_a)\cdot 4\;+\;(z_b-z_a)\cdot 7=0$.

Крім того, точки $A(x_a;\,y_a;z_a)$ і $B(x_b;\,y_b;z_b)$ належать прямим l_2 та l_3 відповідно, тобто повинні задовольнятися умови:

$$\frac{x_a+3}{2}=\frac{y_a-5}{3}=\frac{z_a}{5},\quad \frac{x_b-10}{3}=\frac{y_b+7}{4}=\frac{z_b+2}{7}.$$

Отже, маємо шість рівнянь з шістьма невідомими. Візьмемо їх в систему і розв’яжемо її методом підстановки. З цих подвійних рівнянь отримаємо:

$$y_a=\frac{3x_a+9}{2}+5,\; y_b=\frac{4x_b-40}{3}-7,\; z_a=\frac{5x_a+15}{2},\; z_b=\frac{7x_b-70}{3}-2.$$

Підставивши отримані вирази в умови перпендикулярності, отримаємо:

$$(x_b-x_a)\cdot 2+\left[\left(\frac{4x_b-40}{3}-7\right)-\left(\frac{3x_a+9}{2}+5\right)\right]\cdot 3+\left[\left(\frac{7x_b-70}{3}-2\right)-\frac{5x_a+15}{2}\right]\cdot 5=0 \text{ і}$$

$$(x_b-x_a)\cdot 3+\left[\left(\frac{4x_b-40}{3}-7\right)-\left(\frac{3x_a+9}{2}+5\right)\right]\cdot 4+\left[\left(\frac{7x_b-70}{3}-2\right)-\frac{5x_a+15}{2}\right]\cdot 7=0.$$

Від системи шести рівнянь з шістьма невідомими ми прийшли до системи двох рівнянь з двома невідомими. Розв’яжемо її. Щоб позбутися знаменників, домножимо перше і друге рівняння почленно на 6, отримаємо:

$12x_b-12x_a+24x_b-240-126-27x_a-81-90+70x_b-700-60-75x_a-225=0$ і $18x_b-18x_a+32x_b-320-168-36x_a-108-120+98x_b-980-84-105x_a-315=0$

$106x_b-114x_a-1522=0$ і $148x_b-159x_a-2095=0$

$53x_b-57x_a-761=0 \Rightarrow x_a=\dfrac{53x_b-761}{57}$, то $148x_b-159\cdot\dfrac{53x_b-761}{57}-2095=0$

$148x_b-53\cdot\dfrac{53x_b-761}{19}-2095=0 \;\;|\times 19,\; 2812x_b-2809x_b+40333-39805=0,$

$3x_b=-528$, то $x_b=-176$, $x_a=\dfrac{53\cdot(-176)-761}{57}=\dfrac{-9328-761}{57}=-177$.

$y_a=\dfrac{3\cdot(-177)+9}{2}+5=-256,\; y_b=\dfrac{4\cdot(-176)-40}{3}-7=-255,$

$z_a=\dfrac{5\cdot(-177)+15}{2}=-435,\; z_b=\dfrac{7\cdot(-176)-70}{3}-2=-436.$

Отже: $A(-177;-256;-435)$, $B(-176;-255;-436)$.

І тоді: $\mathbf{AB}=\big(-176-(-177);-255-(-256);-436-(-435)\big)=(1;1;-1)$.

А, отже, рівняння прямої l_1 матиме вигляд: $\dfrac{x+177}{1}=\dfrac{y+256}{1}=\dfrac{z+435}{-1}$. Звідси: $x+177=y+256=-z-435$ – канонічне рівняння прямої l_1.

Відповідь: $x+177=y+256=-z-435$.

4.2.5. Взаємне розташування площини і прямої в просторі

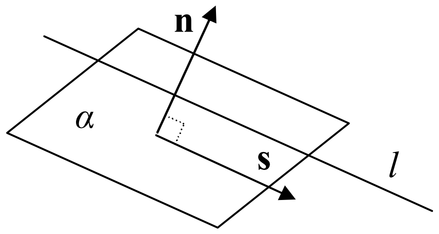


Рис. 4.11

Нехай в просторі задано площину α своїм загальним рівнянням: $Ax+By+Cz+D=0$ і пряму l своїм канонічним рівнянням: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Геометричний зміст коефіцієнтів A, B, C і m, n, p нам відомо, тобто вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ є вектором нормалі до площини α, а вектор $\mathbf{s}=(m, n, p)$ є напрямним вектором прямої l. Зрозуміло, що коли дані вектори будуть перпендикулярними, то пряма l буде паралельною площині α (рис. 4.11), отже, використавши умову перпендикулярності векторів (3.10), отримаємо: $Am+Bn+Cp=0$ *– умова паралельності прямої і площини.* (4.25)

А коли дані вектори будуть колінеарними, то пряма l буде перпендикулярною площині α (рис. 4.12), отже використавши умову колінеарності векторів (3.10а), отримаємо: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ *– умова перпендикулярності прямої і площини.* (4.26)

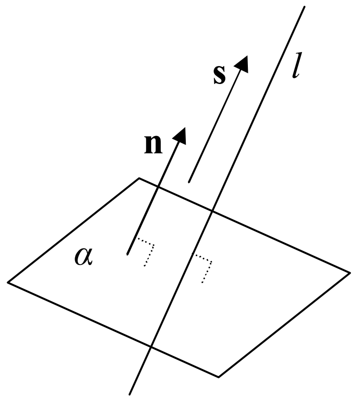


Рис. 4.12

Нехай $Am+Bn+Cp\neq 0$, тобто пряма l не паралельна площині α, а отже існує точка їх перетину. Розв'яжемо задачу на знаходження координат цієї точки. Перепишемо рівняння прямої l в параметричному вигляді $x=x_0+mt$, $y=y_0+nt$, $z=z_0+pt$. Візьмемо біжучу точку (точку зі змінними координатами) $M(x, y, z)$ на цій прямій, тобто координати x, y, z цієї точки повинні задовільняти параметричному рівнянню прямої l: $x=x_0+mt$, $y=y_0+nt$, $z=z_0+pt$. Координати точки M змінюватимуться зі зміною параметра t. Така точка M належатиме ще й площині, коли її координати задовільнятимуть ще й рівняння площини α: $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$. Тоді $t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}=t^*$ – величина параметра t, при якому точка M пересікатиме площину α. Отже: $x=x_0+mt^*$, $y=y_0+nt^*$, $z=z_0+pt^*$ (4.27)

– координати точки перетину прямої зафіксованої точкою $M(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\mathbf{s}=(m, n, p)$ з площиною, заданою своїм загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$.

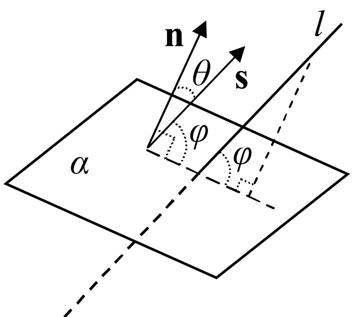


Рис. 4.13

Кут φ між площиною α і прямою l дорівнює різниці прямого кута ($\pi/2$) і кута між напрямним вектором прямої l, тобто вектором $\mathbf{s}=(m, n, p)$ і вектором нормалі до площини α, тобто вектором $\mathbf{n}=(A, B, C)$ (θ): $\varphi=\pi/2-\theta$ (рис. 4.13). Використавши формули зведення, а також формулу для кута між векторами (3.11), отримаємо:

$$\sin\varphi=\cos\theta=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (4.28)$$

– кут між площиною і прямою.

П р и к л а д 4 . 3 7 . Вектор $\mathbf{AB}$, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ – колінеарний прямій l. Площина α проходить паралельно осі Ox і перпендикулярно вектору ордината якого в два рази більша за його аплікату. Знайти кут між прямою l та площиною α. Числа x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1=-9, y_1=8, z_1=1$, $x_2=5, y_2=9, z_2=-3$.

Отже, $A(-9; 8; 1)$, $B(5; 9; -3)$. За напрямний вектор $\mathbf{s}$ прямої l візьмемо вектор $\mathbf{s}=\mathbf{AB}=(5+9; 9-8; -3-1)=(14; 1; -4)$. Вектор нормалі $\mathbf{n}$ площини α шукатимемо таким чином. Оскільки площина α згідно з умовою задачі, паралельна вісі Ox, то проекція її вектора нормалі на вісь Ox дорівнює нулю, тобто абсциса вектора нормалі площини α дорівнює нулю ($A = 0$). Залишається знайти дві інші координати вектора нормалі, тобто ординату і аплікату (B і C). Згідно з умовою задачі, ордината вектора нормалі площини α в два рази більша за його аплікату. Отже, взявши $C = 1$, отримаємо $B = 2$. І, отже, ордината і апліката вектора нормалі дорівнюватимуть 2 і 1 відповідно, тобто вектор нормалі площини α матиме такі координати: $\mathbf{n}(0, 2, 1)$.

Кут між площиною α і прямою l згідно з (4.28), дорівнюватиме:

$$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|} = \frac{0\cdot 14 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-4)}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{14^2+1^2+(-4)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{213}} = \frac{-2}{\sqrt{1065}} \approx -0{,}06.$$

Тоді $\varphi \approx \arcsin(-0{,}06) \approx 3°30'$. Відповідь: $\varphi \approx 3°30'$.

П р и к л а д 4 . 3 8 . Площина α проходить через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно до площини Oxz. Знайти кут між прямою l: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ та площиною α. Числа x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, A_1, B_1, C_1, D_1 і A_2, B_2, C_2, D_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: $x_1 = -9, y_1 = 8, z_1 = 1$, $x_2 = 5, y_2 = 9, z_2 = -3$, $A_1 = 7, B_1 = -3, C_1 = -5$, $D_1 = -3$ і $A_2 = 8, B_2 = 9$, $C_2 = -1$, $D_2 = 1$.

Отже, $A(-9; 8; 1)$, $B(5; 9; -3)$, l: $\begin{cases} 7x - 3y - 5z - 3 = 0 \\ 8x + 9y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Шукаємо напрямний вектор $\mathbf{s}$ прямої l: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -3 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} +$

$+\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(3+45) - \mathbf{j}\cdot(-7+40) + \mathbf{k}\cdot(63+24) = 3(16\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 29\mathbf{k})$.

Отже, за напрямний вектор прямої l візьмемо вектор $\mathbf{s}(16, -11, 29)$.

Шукаємо вектор нормалі $\mathbf{n}$ площини α. Тому що площина α згідно з умовою задачі перпендикулярна до площини Oxz, то вона паралельна вісі Oy, а, отже, проекція її вектора нормалі на вісь Oy дорівнює нулю, тобто ордината вектора нормалі площини α дорівнює нулю ($B = 0$). Залишається знайти дві інші координати вектора нормалі, тобто абсцису і аплікату (A і C).

Згідно з умовою задачі площина α проходить через дві точки A і B, тобто координати цих точок повинні задовольняти рівняння площини $\alpha: Ax + Cz + D = 0$, тобто:

$A(-9; 8; 1)$, то $A\cdot(-9) + C\cdot 1 + D = 0$ і $B(5; 9; -3)$, то $A\cdot 5 + C\cdot(-3) + D = 0$.

З цих двох рівнянь отримаємо: $-9A + C = 5A - 3C$. Звідси: $14A = 4C$, тобто $C = \frac{7}{2}A$. Отже, взявши $A = 2$, отримаємо $C = \frac{7}{2}\cdot 2 = 7$. І, отже, абсциса і апліката вектора нормалі дорівнюватимуть 2 і 7 відповідно, тобто вектор нормалі площини α матиме такі координати: $\mathbf{n}(2, 0, 7)$.

Кут між площиною α і прямою l згідно з (4.28), дорівнюватиме:

$$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|} = \frac{2\cdot 16 + 0\cdot(-11) + 7\cdot 29}{\sqrt{2^2+0^2+7^2}\cdot\sqrt{16^2+(-11)^2+29^2}} = \frac{32+203}{\sqrt{4+49}\cdot\sqrt{256+121+841}} =$$

$$= \frac{235}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{1218}} \approx 0{,}925.$$ $\varphi \approx \arcsin 0{,}925 \approx 67°40'$. Відповідь: $\varphi \approx 67°40'$.

4.2.6. Віддаль від точки до площини та від точки до прямої

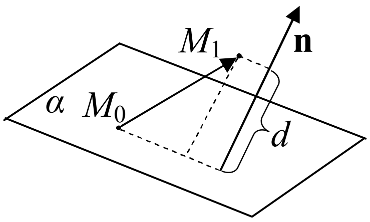


Рис. 4.14

Нехай задано загальне рівняння площини α: $Ax+By+Cz+D=0$, а також задані точки: точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, що не лежить на цій площині α і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на цій площині. Тоді віддаль d від точки M_1 до площини дорівнює модулю проекції вектора $\mathbf{M_0M_1}$ на нормаль до площини (рис. 4.14).

Використовуючи формули (3.7) і (3.8) для скалярного добутку векторів $\mathbf{n}$ і $\mathbf{M_0M_1}$, отримаємо: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_0M_1}=|\mathbf{n}||\mathbf{M_0M_1}|\cos\alpha=|\mathbf{n}|\,np_{\mathbf{n}}\mathbf{M_0M_1}$, а для проекції згідно з цим виразом і формулами (3.9) і (3.3) отримаємо такий вираз: $|np_{\mathbf{n}}\mathbf{M_0M_1}|=\dfrac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_0M_1}|}{|\mathbf{n}|}=\dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Отже, віддаль d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини α дорівнює: $d=|np_{\mathbf{n}}\mathbf{M_0M_1}|=\dfrac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Тому що $-A\,x_0-B\,y_0-C\,z_0=D$, то

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \text{– віддалі від точки до площини.} \tag{4.29}$$

Як бачимо, ця формула знаходження відстані від точки до площини аналогічна з формулою знаходження відстані від точки до прямої на площині.

Якщо рівняння площини α: $Ax+By+Cz+D=0$ поділити на числову величину $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, взяту зі знаком протилежним до знаку D (якщо D=O, то вибір знака неістотний), то отримаємо:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \quad \text{– нормальне рівняння площини.} \tag{4.30}$$

Підставивши координати будь-якої точки в нормальне рівняння площини α і взявши модуль отриманої величини, знайдемо віддаль від цієї точки до даної площини α.

Величина, що знаходиться в лівій стороні рівняння (4.30), може бути як додатною, так і від'ємною. Її називають *відхиленням точки від площини* і позначають буквою δ:

$$\delta=\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{4.31}$$

Зрозуміло, що модуль відхилення дорівнює відстані від точки $M(x,y,z)$ до площини. Якщо $\delta<0$, то точка $M(x,y,z)$ і початок координат лежать по один бік від розглядуваної площини; якщо $\delta>0$, – по різні боки; якщо $\delta=0$, то точка належить цій площині.

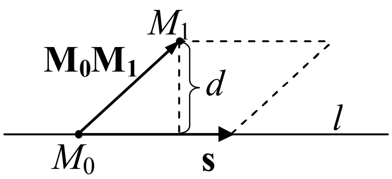


Рис. 4.15

Віддаль від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l заданої деякою точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній і напрямним вектором $\mathbf{s}=(m,\ n,\ p)$, тобто канонічним рівнянням (4.15): $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, можна розглядати як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{M_0M_1}$ і $\mathbf{s}$ (рис. 4.15). Площа паралелограма дорівнює добутку основи $|\mathbf{s}|$ на висоту d (рис. 4.15), а з іншого боку, згідно з визначення векторного добутку площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудований цей паралелограм. Таким чином $S=|\mathbf{s}|d=|\mathbf{M_0M_1}\times\mathbf{s}|$. Отже, шукана висота, а вона є і віддаль від точки до прямої, дорівнюватиме: $d=\dfrac{|\mathbf{M_0M_1}\times\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}$. Знайшовши з відповідного визначника (3.13) компоненти вектора $\mathbf{M_0M_1}\times\mathbf{s}$, отримаємо:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ m & p\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ n & p\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad (4.32)$$

– віддалі від точки до прямої.

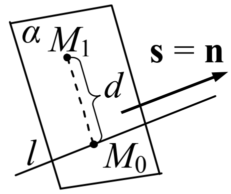


Рис. 4.16

Ще віддаль від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l можна знайти, якщо: 1) через дану точку M_1 провести площину, перпендикулярно прямій l (рис. 4.16). Канонічне рівняння такої площини легко записати, використавши те, що напрямний вектор прямої l і буде нормаллю невідомої площини; 2) знайти точку M_0 перетину проведеної площини з даною прямою l; 3) визначити віддаль від знайденої точки M_0 до точки M_1 (рис. 4.16).

Відстань між двома паралельними площинами визначатиметься як відстань від будь-якої точки однієї з площин до другої площини. Відстань від прямої до паралельної їй площини визначатиметься, як відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини.

4.2.7. Віддаль між двома прямими в просторі

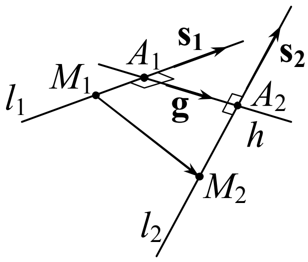


Рис. 4.17

Віддаллю d між двома мимобіжними (виконується умова (4.22)) прямими l_1 і l_2 є довжина відрізка A_1A_2 між точками перетину деякої прямої h, перпендикулярної одночасно до обох даних прямих l_1 і l_2 (рис. 4.17). Нехай дані прямі l_1 і l_2 задані своїми канонічними рівняннями: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ відповідно. Тоді напрямний вектор $\mathbf{g}$ прямої h визначатиметься згідно з означенням векторного добутку векторним добутком напрямних векторів $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$ та $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ відповідно прямих l_1 і l_2. Візьмемо на прямих l_1 і l_2 по одній точці відповідно M_1 і M_2. Модуль проекції вектора $\mathbf{M_1M_2}$ на вісь-вектор $\mathbf{g}$ дорівнюватиме довжині відрізка A_1A_2 (рис. 4.17), і у свою чергу – відстані d між прямими l_1 і l_2.

Спочатку запишемо вираз для знаходження проекції вектора $\mathbf{M_1M_2}$ на вісь-вектор $\mathbf{g}$. Згідно з (3.1), отримаємо: $\text{пр}_{\mathbf{g}}\mathbf{M_1M_2}=|\mathbf{M_1M_2}|\cdot\cos\alpha$, де α – кут між векторами $\mathbf{M_1M_2}$ та $\mathbf{g}$. З іншого боку, скалярний добуток цих векторів $\mathbf{g}$ і $\mathbf{M_1M_2}$, згідно з (3.8), через проекцію вектора $\mathbf{M_1M_2}$ на вісь-вектор $\mathbf{g}$ запишеться: $\mathbf{g}\cdot\mathbf{M_1M_2}=|\mathbf{g}|\cdot|\mathbf{M_1M_2}|\cdot\cos\alpha=|\mathbf{g}|\cdot\text{пр}_{\mathbf{g}}\mathbf{M_1M_2}$. Звідси проекція дорівнює: $\text{пр}_{\mathbf{g}}\mathbf{M_1M_2}=\frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{M_1M_2}}{|\mathbf{g}|}\Rightarrow\left|\text{пр}_{\mathbf{g}}\mathbf{M_1M_2}\right|=\frac{|\mathbf{g}\cdot\mathbf{M_1M_2}|}{|\mathbf{g}|}$. Отже, в кінцевому рахунку, отримаємо: $d=\frac{|\mathbf{g}\cdot\mathbf{M_1M_2}|}{|\mathbf{g}|}$. Згідно з (3.13) знайдемо вектор $\mathbf{g}$, який дорівнює: $\mathbf{g}=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix}m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}$, отже, вираз для віддалі між двома прямими матиме вигляд:

$$d=\frac{|\mathbf{g}\cdot\mathbf{M_1M_2}|}{|\mathbf{g}|}=\frac{|(\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2)\cdot\mathbf{M_1M_2}|}{|\mathbf{g}|}=\left|\frac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2}}\right| \quad (4.33)$$

– віддаль між двома прямими, заданими канонічними рівняннями.

Нехай дві прямі l_1 і l_2, задані своїми канонічними рівняннями, відповідно $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ та $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, належать одній і тій самій площині. Тоді їхні напрямні вектори $\mathbf{s_1}=(m_1, n_1, p_1)$, $\mathbf{s_2}=(m_2, n_2, p_2)$ та вектор $\mathbf{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ є компланарні (точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, що належать відповідно прямим l_1 і l_2). Мішаний добуток таких векторів згідно з геометричним змістом мішаного добутку (3.14) дорівнює нулю (3.15). Використавши формулу (3.16), отримаємо:

$$\mathbf{M_1M_2}\cdot(\mathbf{s_1}\times\mathbf{s_2})=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \tag{4.34}$$

– *умова належності двох прямих l_1 і l_2 одній площині.*

Формула (4.33) у випадку належності двох прямих одній площині, дасть нам значення відстані між такими прямими, яке рівне нулю, але коли прямі паралельні і не співпадають, то відстань між ними не нульова, тобто формула (4.33) для паралельних прямих не застосовна. У випадку, коли прямі l_1 і l_2 між собою паралельні, а це лише тоді, коли їх напрямні вектори відповідно $\mathbf{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$ і $\mathbf{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$ – колінеарні, відстань між l_1 і l_2 дорівнюватиме відстані між точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямої l_1 та точкою $M(x, y, z)$, причому точка M повинна лежати на прямій l_2 і крім того, вектор $\mathbf{M_1M}$ повинен бути перпендикулярним вектору $\mathbf{s}_1$. Як наслідок цього, координати точки $M(x, y, z)$ повинні задовольняти таким умовам: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ і $m_1(x-x_1)+n_1(y-y_1)+p_1(z-z_1)=0$. Три рівняння і три невідомих x, y, z, тому координати точки $M(x, y, z)$ можна однозначно віднайти. Використавши формулу відстані між точками, знайдемо відстань між точкою M_1 та точкою M, яка й буде дорівнювати шуканій відстані між паралельними прямими.

Приклад 4.39. Площина α проходить через точку $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ паралельно до прямої l: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. Знайти відстань між площиною α та прямою l. Числа $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, A_1, B_1, C_1, D_1$ і A_2, B_2, C_2, D_2 в т.4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $A(-9; 8; 1)$, $B(5; 9; -3)$, l: $\begin{cases} 7x-3y-5z-3=0 \\ 8x+9y-z+1=0 \end{cases}$.

Шукаємо напрямний вектор $\mathbf{s}$ прямої l: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -3 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}-$ $-\mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot(3+45)-\mathbf{j}\cdot(-7+40)+\mathbf{k}\cdot(63+24)=3(16\mathbf{i}-11\mathbf{j}+29\mathbf{k})$. Отже, за напрямний вектор прямої l візьмемо вектор $\mathbf{s}(16, -11, 29)$. Вектор $\mathbf{AB}=(5+9; 9-8; -3-1)=(14; 1; -4)$. Як бачимо вектори $\mathbf{s}$ та $\mathbf{AB}$ не колінеарні, тому площина визначиться однозначно. Шукаємо вектор нормалі $\mathbf{n}$ площини α. Оскільки площина α згідно з умовою задачі проходить паралельно до прямої l, то її вектор нормалі $\mathbf{n}$ утворює з вектором $\mathbf{s}$ – напрямним вектором прямої l прямий кут, тобто перпендикулярний йому. Крім того, вектори $\mathbf{n}$ та $\mathbf{AB}$ також повинні бути перпендикулярні, бо вектор $\mathbf{AB}$ компланарний площині α. Отже, вектор нормалі $\mathbf{n}$ площини α перпендикулярний одночасно до обох векторів $\mathbf{s}$ і $\mathbf{AB}$, і може бути визначений як векторний добуток цих векторів, тобто:

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}\times\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 16 & -11 & 29 \\ 14 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -11 & 29 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 16 & 29 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 16 & -11 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(44-29) -$$

$- \mathbf{j}\cdot(-64-406) + \mathbf{k}\cdot(16+154) = 15\mathbf{i} + 470\mathbf{j} + 170\mathbf{k} = 5(3\mathbf{i} + 94\mathbf{j} + 34\mathbf{k})$. Отже, за вектор нормалі $\mathbf{n}$ площини α візьмемо вектор $\mathbf{s}(3, 94, 34)$.

Згідно з умовою задачі площина α проходить через дві точки *A* і *B*, тобто координати цих точок повинні задовольняти рівняння площини $\alpha: 3x + 94y + 34z + D = 0$, тобто: $A(-9; 8; 1) \in \alpha$, то $3\cdot(-9) + 94\cdot 8 + 34\cdot 1 + D = 0$. А звідси: $-27 + 752 + 34 + D = 0$ і $D = -759$. Отже рівняння площини α буде таким: $3x + 94y + 34z - 759 = 0$.

Знайдемо відстань про яку питається в умові задачі, тобто відстань між площиною α та прямою *l*. Оскільки відстань від прямої до паралельної їй площини визначатиметься як відстань від будь-якої точки даної прямої до даної площини.

Візьмемо яку-небудь точку прямої *l*, заданої своїм загальним рівнянням: $\begin{cases} 7x - 3y - 5z - 3 = 0 \\ 8x + 9y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Для цього слід знайти будь-який розв'язок цієї системи. Покладемо $x = 0$, то $\begin{cases} -3y - 5z - 3 = 0 \\ 9y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Помножимо перше на (-3) і прирівняємо ліві сторони: $9y - z + 1 = 9y + 15z + 9$. Звідси: $16z + 8 = 0$, то $z = -1/2$.

$y = \dfrac{-5z-3}{3} = \dfrac{-5\cdot(-1/2)-3}{3} = \dfrac{5/2-3}{3} = \dfrac{5}{6} - 1 = -\dfrac{1}{6}$. Отже, ми взяли точку з координатами $(0; -1/6; -1/2)$. Використавши формулу (4.29), отримаємо:

$$d = \frac{\left|3\cdot 0 + 94\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) + 34\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 759\right|}{\sqrt{3^2 + 94^2 + 34^2}} \approx 7{,}9.$$ Відповідь: $\approx 7{,}9$.

Приклад 4.40. Знайти відстань від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої *l*, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор якої – $\mathbf{s} = (m, n, p)$. Числа x_1, y_1, z_1, x_0, y_0, z_0, і m, n, p подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $M_1(-9; 8; 1)$, $M_0(5; 9; -3)$, $\mathbf{s} = (8, 9, 1)$.

Використавши рівняння (4.15), запишемо канонічне рівняння прямої *l*:

$$\frac{x-5}{8} = \frac{y-9}{9} = \frac{z-(-3)}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{8} = \frac{y-9}{9} = z + 3.$$

Використавши формулу (4.32), отримаємо:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -9-5 & 8-9 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -9-5 & 1-(-3) \\ 8 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 8-9 & 1-(-3) \\ 9 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -14 & -1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -14 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{-118^2 + (-46)^2 + (-37)^2}}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-118^2 + (-46)^2 + (-37)^2}}{\sqrt{8^2 + 9^2 + 1^2}} \approx 10{,}9.$$ Відповідь: $\approx 10{,}9$.

Приклад 4.41. Знайти відстань між двома прямими, заданими своїми канонічними рівняннями $l_1: \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $l_2: \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$. Числа x_1, m_1, y_1, n_1, z_1, p_1, x_2, m_2, y_2, n_2, z_2, p_2 подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $l_1: \frac{x+9}{16} = \frac{y-8}{-11} = \frac{z}{29}$ і $l_2: \frac{x-1}{6} = \frac{y+7}{8} = \frac{z-5}{-4}$.

Використавши формулу (4.33), отримаємо:

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} 1-(-9) & -7-8 & 5-0 \\ 16 & -11 & 29 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -11 & 29 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 16 & 29 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 16 & -11 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}^2}} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} 10 & -15 & 5 \\ 16 & -11 & 29 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix}}{\sqrt{(44-232)^2 + (-64-174)^2 + (128+66)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{10(44-232)+15(-64-174)+5(128+66)}{\sqrt{(44-232)^2 + (-64-174)^2 + (128+66)^2}} \right| = \left| \frac{-1880-3570+970}{\sqrt{188^2+238^2+194^2}} \right| = \left| \frac{4480}{129624} \right| \approx 0{,}03456.$$

4.3 Канонічні рівняння деяких поверхонь другого порядку. Поверхня і крива другого порядку

Рівняння в якому є змінні x, y та z в другому степені задають в просторі поверхні, які називають поверхнями другого порядку. Загальний вигляд рівняння поверхні другого порядку в просторі таке:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{10}x + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0 \qquad (4.35)$$

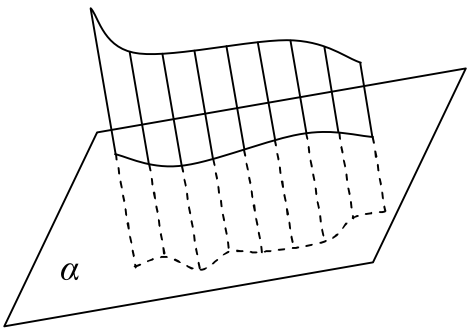


Рис. 4.18

Задавши коефіцієнти a_{ij} даним рівнянням можна описати будь-яку поверхню другого порядку. До таких поверхонь належать циліндри і конуси другого порядку, сфера, еліпсоїд, еліптичний і гіперболічний параболоїди, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди. У подальшому детальніше розглянемо тільки найбільшпростіші, так звані канонічні рівняння деяких з поверхонь другого порядку.

Криву ж другого порядку можна розглядати як лінію перетину будь-якої площини α (поверхні першого порядку) з будь-якою поверхнею другого порядку (рис. 4.18). Для зручності для прикладу, не порушуючи правильності міркувань, за січну площину можна взяти будь-яку з координатних площин.

Тобто, крива другого порядку – це множина точок, які задовольняють систему, складену з рівняння будь-якої поверхні другого порядку (4.35) і рівняння будь-якої площини. Якщо, в простішому випадку, за рівняння січної площини взяти одне з рівнянь x=0, y=0, або z=0, то крива буде розміщеною в одній з координатних площин відповідно Oyz, Oxz, або Oxy. Деякі з таких кривих, розміщених в площині Oxy, нами вже розглянуто (коло, еліпс, гіпербола, парабола – §1.3).

Розглянемо деякі типи поверхонь другого порядку заданих своїми канонічними рівняннями.

4.3.1. Сфера. Спершу розглянемо добре відому нам поверхню, яка називається сферою. Сфера відноситься до поверхонь другого порядку.

Множина всіх точок простору, що знаходяться на однаковій відстані від заданої точки, називається *сферою.* А саму цю точку називають центром сфери. Нехай M (x, y, z) – біжуча точка сфери (точна на сфері зі змінними координатами), O (a, b, c) – центр сфери. З означення $OM = R$ і використовуючи формулу відстані між двома точками простору (4.1), отримаємо: $OM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$ Піднісши до квадрату, отримаємо: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ – *канонічне рівняння сфери.* (4.36)

Тут (a, b, c) – координати центра сфери, R – її радіус.

Приклад 4.42. Який центр, радіус і канонічне рівняння сфери: $x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$? Числа a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00} подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z - 7 = 0$.

Доповнимо в рівнянні сфери члени з x, y, z до повних квадратів:

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 4z + 4) - 4 - 1 - 4 - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$ – канонічне рівняння сфери. Отже центр сфери знаходиться в точці $O(-2, 1, -2)$, а радіус сфери R=4. Відповідь: (–2, 1, –2), 4.

4.3.2. Циліндр. Поверхню, яка утворюється внаслідок руху деякої прямої (*твірної циліндра*), паралельно сталому вектору, вздовж заданої кривої (*напрямної циліндра*), – називають *циліндром*, або *циліндричною поверхнею*.

Будь-яке з рівнянь (4.35) в якому відсутня одна зі змінних координат, тобто рівняння з двома змінними, визначає в просторі циліндричну поверхню, напрямна крива якої в площині осей існуючих змінних визначається цим же рівнянням, а твірні якої є паралельні третій осі простору. Тобто, наприклад, будь-яке рівняння:

$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + a_{20}y + a_{30}z + a_{00} = 0 \text{ або } f(y, z) = 0,$$

визначає в просторі циліндричну поверхню, напрямна крива якої лежить в площині Oyz і визначається цим самим рівнянням $f(y, z)=0$, а твірні якої є паралельні осі Ox.

Ми розглянули випадок, коли твірні циліндричної поверхні будуть паралельні осі Ox. Аналогічні міркування будуть у випадках, коли твірні циліндра паралельні осі Oy, або Oz.

Якщо напрямна циліндра є лінією другого порядку, то таку циліндрричну поверхню називають *циліндричною поверхнею другого порядку*.

Приклади циліндрів:

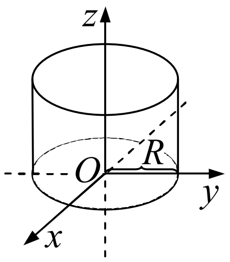


Рис. 4.19

1) $x^2 + y^2 = R^2$ – коловий циліндр, напрямною якого може бути коло задане в просторі системою з двох рівнянь $z = 0$ і $x^2 + y^2 = R^2$ (коло площини Oxy), а твірні якого паралельні осі Oz (рис. 4.19).

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – еліптичний циліндр, напрямною якого може бути еліпс, заданий в просторі системою з двох рівнянь $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ і $z = 0$ (еліпс площини Oxy), а твірні якого паралельні осі Oz (рис. 4.20).

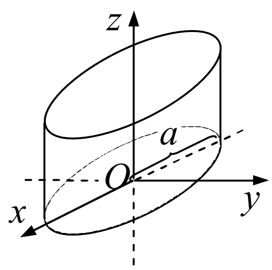


Рис. 4.20

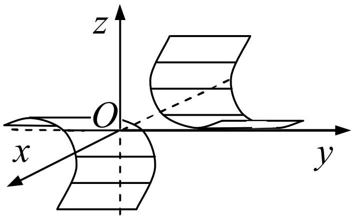


Рис. 4.21

3) $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – гіперболічний циліндр, напрямною якого може бути гіпербола, задана в просторі системою з двох рівнянь $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ і $x = 0$ (гіпербола площини Ozy), а твірні якого паралельні осі Ox (рис. 4.21).

4) $y^2 = 2pz$ – параболічний циліндр, напрямною якого може бути парабола, задана в просторі системою з двох рівнянь $y^2 = 2pz$ і $x = 0$ (парабола площини Ozy), а твірні якого паралельні осі Ox (рис. 4.22).

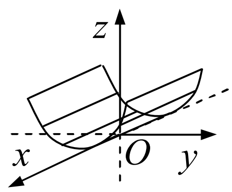


Рис. 4.22

П р и к л а д 4 . 43. Відомо рівняння деякої циліндричної поверхні другого порядку: $ax^2 + bx - y + c = 0$. Визначити, яким є даний циліндр, записавши попередньо рівняння його твірної в канонічній формі. Числа *a, b* і *c* подані в таблиці 4.

Розв'язування: Варіант 1: отже, $2x^2 + 16x - y + 31 = 0$. Зробимо деякі рівносильні перетворення: $2x^2 + 16x - y + 31 = 0 \Rightarrow y = 2(x+4)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2(x+4)^2$. Введемо заміну: $x + 4 = y'$, $y + 1 = x'$, отже $x' = 2(y')^2 \Rightarrow (y')^2 = x'/2$ – канонічне рівняння параболи. Отже, твірна даної циліндричної поверхні є параболою і даний циліндр є параболічний.

4.3.3. Поверхні обертання. Еліпсоїд. Поверхню, утворену внаслідок обертання плоскої кривої навколо прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої, називають *поверхнею обертання*. Криву, що обертається, називають *твірною* поверхні обертання або її *меридіаном*, а кола, які описують точки кривої і які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання, називають *паралелями* поверхні обертання.

Нехай в площині Oxz задано криву такою системою: $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. І нехай ця крива обертається навколо осі Oz. Складемо рівняння поверхні, утвореної внаслідок обертання цієї кривої навколо осі Oz. Відстані від відповідних точок паралелей (кіл навколо осі Oz) до осі обертання Oz є однаковими і рівними $\sqrt{x^2 + y^2}$, тому: $F(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0$ (4.37)

– *рівняння поверхні обертання.*

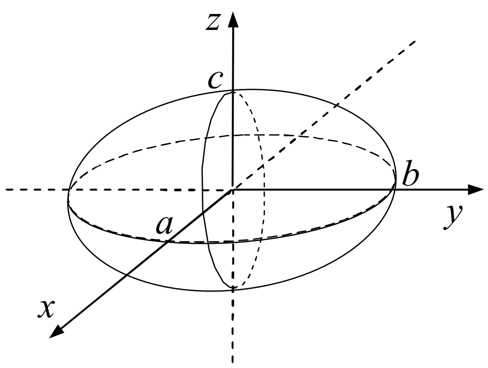


Рис. 4.23

Поверхню, утворену внаслідок обертання еліпса навколо однієї з своїх осей симетрії, називають *еліпсоїдом обертання* (рис. 4.23).

Якщо обертати еліпс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0$ (еліпс належить площині Oyz) навколо осі Oy, утвориться еліпсоїд обертання (рис. 4.23) рівняння якого має вигляд:

$$\frac{x^2 + z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4.38)$$

– *рівняння еліпсоїда обертання.*

Еліпсоїд – це поверхня, утворена внаслідок рівномірного стиску (розтягу) еліпсоїда обертання відносно однієї з його площин симетрії.

Під час такого стиску (розтягу) еліпсоїда обертання відносно його площини симетрії, наприклад, Oyz, усі його точки наближаються (віддаляються) з обох боків до цієї площини (від неї) так, що їхні відстані до цієї площини зменшуються (збільшуються) в ту саму кількість разів t. Дане число t називають коефіцієнтом деформації. Якщо $t < 1$ маємо стиск, $t > 1$ – розтяг. Врахувавши це, рівняння (4.38) перетвориться на таке: $\frac{x^2 + z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{(tx)^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зробивши заміну $a^2 = \frac{c^2}{t^2}$, отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{– } \textit{канонічне рівняння еліпсоїда.} \qquad (4.39)$$

При $a = c$ з цього рівняння отримаємо рівняння еліпсоїда обертання, який утворюється внаслідок обертання еліпса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ навколо осі Oy. Отже, з рівняння (4.39) очевидно, що якщо серед його параметрів a, b, c є два рівних між собою, то матимемо рівняння еліпсоїда обертання.

При $a = b = c = R$ з рівняння (4.39) отримаємо рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Координатні площини є площинами симетрії, координатні осі – осями симетрії, а точка O, в якій перетинаються площини симетрії і осі симетрії, є центром симетрії еліпсоїда, і її називають *центром симетрії* еліпсоїда (4.39). Еліпсоїд має шість точок перетину з осями симетрії, які називають вершинами. Тому що еліпсоїд відтинає на осях координат (осях симетрії) відрізки a, b, c, які називають довжинами півосей еліпсоїда, то вершини еліпсоїда матимуть координати: $A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$, $B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$, $C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$. Переріз еліпсоїда з площиною $x = x_0$ (чи $y = y_0$, $z = z_0$) є або порожньою множиною, або однією точкою – точкою дотику, або еліпсом. Перерізи еліпсоїда з координатними площинами називають *головними*. За їх допомогою найчастіше зображають еліпсоїд (перерізи на рис. 4.23).

Можливі і інші поверхні обертання: *еліптичний* і *гіперболічний параболоїди*, *однопорожнинний* і *двопорожнинний гіперболоїди*, *конус*.

Таблиця 4

№	1В	2В	3В	4В	5В	6В	7В	8В	9В
4.1	1;0;3; 8;-4;-7; -9;2;5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	4;5;-4; 6;8;9; 4;-2;3	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7
4.2	2;1;-1; 3;-7;1	6;-1;1; 0;2;5	5;-2;1; 0;1;4	2;1;1; 2;4;2	3;-4;2; 3;5;4	2;1;3; 4;6;6	1;2;4; -3;7;1	4;5;4; 6;8;0	3;4;-7; 1;9;-1
4.3	2;1;-1; 3;0;1; 2;-1;3	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	4;5;-4; 6;8;9; 4;-2;3	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4
4.4	2;1;-1	3;4;1	4;-3;2	1;2;3	2;3;4	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7
4.5	5;4;7	1;2;3	2;3;4	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7	3;4;1	4;-3;2
4.6	9;-8;-5; 8;-7;4	6;-1;1; 0;2;5	5;-2;1; 0;1;4	2;1;1; 2;4;2	3;-4;2; 3;5;4	2;1;3; 4;6;6	1;2;4; -3;7;1	4;5;4; 6;8;0	3;4;-7; 1;9;-1
4.7	5;-4;-5;1; -7;4;1;5; 9;2;6;3	2;1;1;2; 4;5;7;-2; 1;1;1;-1	8;3;1;5; 2;1;-1;4; 3;2;3;-1	-2;1;3;7; 4;6;-5;4; 2;-1;7;2	4;7;0;4; 1;5;1;0; 6;1;9;-1	4;5;-4;1; 6;8;9;2; 4;-2;3;7	1;-2;4;4; 3;7;9;5; 8;-1;0;5	3;-4;2;1; 3;5;-9;2; 5;-7;0;1	3;4;-7;0; 1;9;7;4; 1;8;11;1
4.8	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	4;5;-4; 6;8;9; 4;-2;3	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7
4.9	1;5;9	1;2;3	2;3;4	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7	3;4;1	4;-3;2
4.10	3;-5;7	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7	3;4;1	4;-3;2	1;2;3	2;3;4
4.11	4;-3;5; 7;5;-8	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	6;-1;1; 0;2;-4	5;-2;1; 0;1;5	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9
4.12	-3;7;11	3;-5;7	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7	3;4;1	4;-3;2	1;2;3
4.13	-17;3;-5	3;5;3	3;-4;6	6;-1;4	3;4;9	5;-2;6	1;-2;4	2;1;-6	-2;1;3
4.14	-3;7;-4; 8;9;-5; -2;3;4	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9
4.15	2;3;4; -3;0;7; 5;-5;2	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7
4.16	2;-3;4; 3;-5;-7; -8;-9;10	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7	2;3;4; -3;0;7; 5;-5;2
4.17	2;3;5;6	2;1;0;12	6;-1;4;8	3;4;9;7	5;-2;6;6	1;-2;4;5	2;1;-6;6	-2;1;3;7	3;5;3;8
4.18	3;-7;11; 8;-2	-2;1;3; 4;6	1;1; 2;4;-5	7;0; 1;5;1	5;-4; 6;8;9	-2;4; -3;7;9	-4;2; 3;5;-9	4;-7; 1;9;7	-1;1; 0;2;-4
4.19	5;-3;6	4;5;6	1;0;2	3;4;5	1;0;-7	3;4;1	4;-3;2	1;2;3	-17;3;-5
4.20	7;0;0; 21;3;4	0;1;0; 4;6;-5	0;0;1; 2;4;-5	6;0;0; 7;2;-4	0;-2;0; 6;1;5	0;7;0; 1;5;1	3;0;0; 1;9;7	0;0;7; -3;7;9	0;-4;0; 3;5;-9

4.21	2;5;-7; -2;4;6; 3;-1	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7	4;7;0; 1;5;1; 6;1	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7	3;4;-7; 1;9;7; 1;8	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1	2;3;4; -3;0;7; 5;-5
4.22	4;6;3;-1	3;2;-1;1	4;3;-2;1	-3;4;1;2	2;3;-1;1	5;-3;2;1	3;5;-1;2	5;4;2;1	4;-2;2;1
4.23	2;5;-7; -2;4;6; 3;-1	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7	4;7;0; 1;5;1; 6;1	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7	3;4;-7; 1;9;7; 1;8	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1	2;3;4; -3;0;7; 5;-5
4.24	4;5;3; -1;7;-1; 3	3;-4;2; 3;5;-9; 5	3;4;-7; 1;9;7; 1	6;-1;1; 0;2;-4; 1	-2;1;3; 4;6;-5; 2	2;3;4; -3;0;7; 5	2;-1;1; 2;4;-5; 3	4;7;0; 1;5;1; 6	1;-2;4; -3;7;9; 8
4.25	2;5;-7; -2;4;6; 3;-1;8; -9;11;-3	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;5;-9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-9	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;5;-9	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-9	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-9	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;5;-9
4.26	-2/5;1/2; -2/3; 3;0;0; 1;-2;4; 0;-2;0; 1;1;0; 2;9;1	-1/5;1/3; -2/5; 4;0;0; 1;-6;4; 0;-7;0; 1;9;0; 2;4;1	1/5;1/2; -4/3; 5;0;0; 3;-2;4; 0;2;0; 1;5;0; 2;1;1	-2/7;1/2; -2/9; 0;4;0; 1;-2;4; 0;0;3; 3;1;0; 2;8;1	-6/5;1/2; -7/3; 5;0;0; 1;-5;4; 0;-5;0; 1;5;0; 5;9;1	-2/5;7/2; -2/3; 7;0;0; 7;-2;4; 0;-7;0; 7;1;0; 2;7;1	-8/5;1/2; -2/8; 8;0;0; 1;-2;8; 0;-8;0; 1;8;0; 2;8;1	-9/5;1/2; -2/9; 9;0;0; 1;-2;4; 0;9;0; 4;1;0; 2;4;1	-2/9;5/2; -2/7; 4;0;0; 1;3;4; 0;-4;0; 1;4;0; 2;0;1
4.27	7;-3;-5; -3;8;9; -1;1	4;7;0; 1;5;1; 6;1	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7	3;4;-7; 1;9;7; 1;8	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1	2;3;4; -3;0;7; 5;-5	2;5;-7; -2;4;6; 3;-1
4.28	-5;4;-3;2	3;2;-1;1	4;3;-2;1	-3;4;1;2	2;3;-1;1	5;-3;2;1	3;5;-1;2	5;4;2;1	4;-2;2;1
4.29	3;2;3; 1;2;1	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	6;-1;1; 0;2;-4	5;-2;1; 0;1;5	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9
4.30	7;-3;-5; -3;8;9; -1;1	4;7;0; 1;5;1; 6;1	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7	3;4;-7; 1;9;7; 1;8	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1	2;3;4; -3;0;7; 5;-5	2;5;-7; -2;4;6; 3;-1
4.31	1/3;-2;1; -6;2;-15; 1;-5;1/2; 0;1/3;1	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;5;-9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-9	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;5;-9	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-9	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-9	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;5;-9
4.32	-9;8;0; 7;-3;-5; -3;8;9; -1;1	8;4;2; 4;7;0; 1;5;1; 6;1	1;9;7; 1;-2;4; -3;7;9; 8;-1	1;2;7; 3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7	8;7;2; 3;4;-7; 1;9;7; 1;8	1;4;7; 6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1	2;6;3; -2;1;3; 4;6;-5; 2;-1	8;3;2; 2;3;4; -3;0;7; 5;-5	1;1;7; 2;5;-7; -2;4;6; 3;-1
4.33	-9;16;8; -11;0;29; 1;6;-7; 8;5;-4	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;5;-9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-9	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;5;-9	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-9	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-9	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;5;-9

4.34	-9;8;7; 10;3;-7; 4;0;1	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9	1;-2;4; -3;7;9; 8;-1;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7
4.35	-3;2;5; 3;0;1; 10;3;-7; 4;0;1; -2;8;1; 7;3;1	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 4;3;1; -2;8;1	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9; 3;6;3; 5;-4;-5	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;5;-9; 4;0;1; -2;3;1	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-9; 2;3;3; 5;-4;-5	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;5;-9; 4;0;1; -2;8;4	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-9; 2;4;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-9; 4;4;1; -2;8;1	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;5;-9; 2;6;3; 4;-4;-5
4.36	-3;2;5; 3;0;5; 10;3;-7; 4;-2;7	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;4;-9	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 7;3;-9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 8;6;-9	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 9;7;-9	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 7;5;-9	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 9;9;-9	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 0;6;-9	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 8;-9;0
4.37	-9;8;1; 5;9;-3	-2;1;3; 4;6;-5	2;-1;1; 2;4;-5	6;-1;1; 0;2;-4	5;-2;1; 0;1;5	4;7;0; 1;5;1	3;4;-7; 1;9;7	1;-2;4; -3;7;9	3;-4;2; 3;5;-9
4.38	-9;8;1; 5;9;-3; 7;-3;-5; -3;8;9; -1;1	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 4;3	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9; 3;6	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;7;-1; 4;9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-2; 2;3	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;6;-3; 4;8	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-4; 2;4	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-5; 4;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;4;-6; 2;6
4.39	-9;8;1; 5;9;-3; 7;-3;-5; -3;8;9; -1;1	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 4;3	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9; 3;6	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;7;-1; 4;9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-2; 2;3	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;6;-3; 4;8	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-4; 2;4	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-5; 4;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;4;-6; 2;6
4.40	-9;8;1; 5;9;-3; 8;9;1	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9
4.41	-9;16;8; -11;0;29; 1;6;-7; 8;5;-4	3; 3;-1; 8;4;2; 3;5;-9; 5;-7;0	3;-4;2; 3;5;-9; 5;-7;0; 3;5;-9	3;4;-7; 1;9;7; 1;8;11; 3;5;-9	6;-1;1; 0;2;-4; 1;-1;8; 3;5;-9	-2;1;3; 4;6;-5; 2;-1;7; 3;5;-9	1;5;9; 2;6;3; 5;-4;-5; 3;5;-9	2;-1;1; 2;4;-5; 3;-7;4; 3;5;-9	4;7;0; 1;5;1; 6;1;9; 3;5;-9
4.42	2;-1;2;-7	-1;2;2;-7	2;2;-1;-7	0;2;2;-8	5;3;-2;13	3;-2;5;13	-2;5;3;13	-2;3;5;13	2;0;2;-8
4.43	2;16;31	3;-18;27	4;16;10	5;-10;15	3;12;10	2;-16;34	3;18;25	4;-16;20	5;10;0

Список рекомендованої літератури

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Баврин И.И. Высшая математика. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Данко П.Е., Попов А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II. – М.: Высшая школа, 1974. – 464 с.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие. – М.: Наука, 1985. – 623 с.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1978. – 352с.
6. Соколенко О.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Вища школа, 1994. – 271 с.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: У 3 кн.: Кн. I. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
8. Лейфура В.М., Городницький Г.І., Файст Й.І. Математика: Підр. для студ. економ. спец. вищ. навч. закладів I-II рівня акредитації. – К.: Техніка, 2003. – 640 с.
9. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч. 1. – 546 с.
10. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 248 с.
11. Вища математика: Навч.-метод. Посібник для самост. вивч. диск. / Валєєв К.Г., Джалладова І.А. та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
12. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. – К.: Видавничий цент „Академія”, 2002. – 624 с.
13. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П.Дубовик, І.І. Юрик та ін. К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
14. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Е.И.Гурский и др. – М.: Высш. шк., 1989. – 349 с.
15. Клетеник В.Д. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
16. Овчинников П.Ф. та ін. Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення – К.: Техніка, 2000. – 592 с.
17. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2002 – 400 с.

Навчальне видання

Довгий Олег Ярославович

КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ „ГЕОГРАФІЯ”

Комп’ютерна верстка і редакція *О.Я. Довгого, С.Д. Довгої*
Коректор *Л.П. Василевич*

Навчально-методичний посібник

Здано до набору 20.12.05.
Підписано до друку 15.06.06
Формат 60×84\16. Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Ум. друк. арк. 5,7. Вид. арк. 5,6
Тираж 300

м. Івано-Франківськ