Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника
Національний університет "Львівська політехніка"

Б.А. Шувар, М.І. Копач, А.Ф. Обшта

Агрегаційно-ітеративна декомпозиція операторних рівнянь

Монографія

Івано-Франківськ
2016

УДК 517.948+517.956+517.957+519.61
ББК 22.161
Ш 95

Рекомендовано Вченою радою

ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

(протокол № 3 від 29 березня 2016 р.).

Рецензенти:

Бігун Я.Й., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича).

Демків І.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет “Львівська політехніка”).

Сторож О.Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет імені Івана Франка).

Ш 95 Агрегаційно-ітеративна декомпозиція операторних рівнянь: монографія./ Б.А. Шувар, М.І. Копач, А.Ф. Обшта. – Івано-Франківськ : 2016. – 162 с.

ISBN 978-617-607-774-9

Встановлені достатні умови збіжності методів ітеративного агрегування за допомогою спеціального способу “занурення” банахового простору, в якому розглядається рівняння, у ширший простір. Результати не містять вимог про напівупорядкованість простору та величину спектрального радіуса оператора в лінійному випадку. Ці алгоритми можна використовувати для розпаралелення обчислювальних процесів. Для фахівців з теорії та застосувань наближених методів та для аспірантів і студентів старших курсів математичних, технічних, економічних спеціальностей.

We obtain sufficient conditions of iterative aggregation methods convergency using special method of insertion into wider space Banach space in which the equation is considered. The results do not contain conditions of space semioderliness and operator spectral radius dimension in linear case. These algorithms can be used for calculation process paralleling. This book can be used by specialists in approaching methods theory and application and by PhD students and higher courses students in mathematical, technical and economy specialization.

УДК 517.948+517.956+517.957+519.61

ББК 22.161

Робота частково виконана в рамках держбюджетної теми "Гомоморфізми та функціональне числення в алегебрах аналітичних функцій на банахових просторах"(Ф 011U002305)

Зміст

Contents

Вступ

В прикладних науках використання сучасних машинних засобів призводить до потреби в ефективних математичних моделях процесів явищ як засобів оптимізації затратних ресурсів задля отримання достовірних висновків. Це спричинює зацікавленість в удосконалені традиційних та в пошуку нових наближених методів (див., напр., [19,20,22,29,30]) для отримання розв'язків задач з потрібною точністю. З цього погляду ітераційні методи вирізняються з поміж інших тим, що в реальних обчислювальних схемах їх застосування нерідко є неминучим як для лінійних, так для нелінійних задач (див., напр., [18, стор. 360] та [34,35]).

Сучасні обчислювальні технології істотно експлуатують високопродуктивні багатопроцесорні режими обчислень, основою яких є алгоритми декомпозиції задач. Принципи декомпозиції ґрунтуються на алгоритмах, за допомогою яких задачі великої розмірності замінюються задачами меншої розмірності. Цим часто створюється можливість побудови розпаралелених схем обчислень. З поміж найуживаніших методик декомпозиції операторних рівнянь продуктивними є багатопараметричні методи агрегування (див., зокрема, [37]). Дослідженнями марковських процесів, задач лінійного програмування, проблем математичної економіки, де ці методи використовують систематично, не вичерпується перелік їх застосувань. В багатьох випадках отримані за допомогою методів ітеративного агрегування результати підтверджуються емпірично за обставин, коли умови збіжності відповідних алгоритмів є невідомими (див., напр., [17]). Більшість теоретичних досліджень цих методів мають спорадичний характер і стосуються лінійних рівнянь з позитивними (по відношенню до деякої напівупорядкованості) стискуючими операторами, які діють в банахових просторах з конусом додатніх елементів (див., напр., [1, 3–6, 8–18, 26–28, 31, 32, 36, 51–53], а також [58,64,70,67]). Застосуванням методів ітеративного агрегування присвячено чимало досліджень (див., напр., [10, 21. 55, 59, 60,61,63–66,68]).

Пропонована книга містить оригінальне цілісне дослідження агрегаційно-ітеративних методів, які охоплюють методи ітеративного агрегування та низку відомих і нових ітераційних алгоритмів, зокрема таких, котрі поєднують агрегаційно-ітеративний підхід з ідеями інших наближених методів.

Основою монографії є експлуатована в низці досліджень (див., [38–50], а також [13–16, 23, 24, 25]) методика "занурення" простору, в якому розглядається висхідне рівняння, в ширший простір, приєднанням до цього рівняння допоміжних рівняннь з допоміжними невідомими. Ця книга є продовженням досліджень, підсумованих в монографії [49] і наведені в ній результати істотно доповнюють результати із [49]. Як і в [49] отримані умови збіжності не потребують, щоб заданий оператор був стискуючим і не містять вимогу про його знакосталість, а в нелінійному випадку не постулюють монотонність оператора.

Схему побудови і дослідження збіжності агрегаційно-ітеративних методів для рівняння вигляду

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

можна описати в такий спосіб. Нехай $A : E \to E$, E – банахів простір, $b \in E$, оператор A є лінійним неперервним. Задамо лінійний неперервний оператор $\Lambda : E' \to E'$, де E' – банахів простір, який, взагалі кажучи, не співпадає з E, і розглянемо систему рівнянь, складену з рівняння (1) і допоміжного рівняння

$$y = \Lambda y + S\widetilde{A}x - Sb, \tag{2}$$

в якому заданими є лінійні неперервні оператори $S : E \to E'$, $\widetilde{A} : E \to E$. При цьому припускаємо, що

$$S(A + \widetilde{A}) = \Lambda S. \tag{3}$$

Одним із способів отримання агрегаціно-ітеративних алгоритмів є спосіб побудови послідовності пар $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ елементів $x^{(n)} \in E, y^{(n)} \in E'$ за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(x^{(n)})\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{4}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + S\widetilde{A}x^{(n)} - Sb, \tag{5}$$

де оператор $a(x)y$ неперервний щодо $x \in E$ та лінійний неперервний щодо $y \in E'$. Однією з основних вимог щодо $a(x)$ є співвідношення

$$Sa(x) = \Lambda. \tag{6}$$

Якщо, наприклад, рівність (3) зводиться до рівності

$$S(A + \widetilde{A})x = \lambda(\varphi, x) \qquad (x \in E, \varphi \in E'), \tag{7}$$

то матимемо, що при

$$a(x) = \frac{(A + \widetilde{A})x}{(\varphi, x)} \tag{8}$$

алгоритм (4), (5) є одним з однопараметричних методів ітеративного агрегування. В тому випадку, коли маємо, що

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i \tag{9}$$

і справджуються рівності

$$(\varphi_i, A_j x) = \lambda_{ij}(\varphi_j, x) \;\; (i, j = \overline{1, N}), \tag{10}$$

з формул (4), (3) можна отримати багатопараметричні агрегаційно-ітеративні алгоритми, зокрема, багатопараметричні методи ітеративного агрегування, які можна звести до формул вигляду

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\varphi_j, A_j x^{(n+1)}\right)}{(\varphi_j, x^{(n)})} + b. \tag{11}$$

За припущенням, що початкове наближення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ задовольняє умову $Sx^{(0)} + y^{(0)} = \theta'$ (де θ' – нульовий елемент в E') та що існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ (де I' – одиничний оператор в E'), збіжність ітераційного процесу (4), (5) забезпечує умова

$$||H(x)|| \leqslant q < 1$$

при $Sx + y = \theta'$ для оператора $H(x)$, означеного за формулою

$$H(x)w = [A - a(x)(I' - \Lambda)^{-1}S(I - A)]w.$$

Подібним способом можна отримати й інші однопараметричні і багатопараметричні методи ітеративного агрегування та їх агрегаційно-ітеративні узагальнення. Докладні дослідження щодо їх збіжності можна знайти в [49].

Монографія складається з двадцяти одного підрозділу, агрегованих в чотирьох розділах.

Розділ 1

Однопараметричні агрегаційно-ітеративні методи

У застосуваннях до практичних задач і в теоретичних дослідженнях методів ітеративного агрегування зазвичай обмежуються рівняннями з лінійними неперервними операторами, що діють в просторах з конусом додатніх елементів. У випадку, наприклад, найпростішого однопараметричного методу ітеративного агрегування найчастіше припускають також, що додатнім є агрегуючий функціонал. З-поміж інших вимог щодо заданого рівняння і агрегуючого функціоналу фігурують умови "допустимості" функціоналу [17, стор. 155-158] і вимоги, щоб відповідний оператор був фокусуючий [17, стор. 77], а його спектральний радіус був менший від одиниці. Як зазначено в [17, стор. 158] численні приклади підтверджують, що методи ітеративного агрегування часто збігаються тоді, коли зазначені припущення не справджуються.

§ 1. Рівняння з позитивними операторами

Нехай банахів простір E є напівупорядкованим за допомогою нормального конусу K, E^* – спряжений з E банаховий простір з конусом K^* додатніх елементів. Будемо позначати через (φ, x) значення лінійного функціоналу $\varphi \in K^*$ на елементах $x \in E$. Розглянемо рівняння

$$x = Ax + b \quad (b \in E), \tag{1.1}$$

в якому A є лінійним неперервним оператором, що діє з E в E. Однопараметричний метод ітеративного агрегування в [17, стор. 156] описує формула

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, b)}{(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)})} Ax^{(n)} + b. \tag{1.2}$$

В [17, стор. 155-158] для цього алгоритму встановлений результат, який забезпечує його збіжність за таких умов.

A) Оператор A є додатнім, тобто нерівність $x \geqslant \theta$ (θ – нульовий елемент в E) призводить до нерівності $Ax \geqslant \theta$.

B) Оператор A є фокусуючим щодо конуса K зі сталою фокусування $\tau_0 > 0$, яка є найменшою зі сталих τ, що задовольнять нерівність

$$\xi(Ax, Ay) \leqslant \tau^2, \quad (x, y \in K, Ax \neq \theta, Ay \neq \theta),$$

де

$$\xi(x, y) = \frac{\inf\{t : tx \geqslant y\}}{\sup\{t : tx \leqslant y\}}$$

для еквівалентних $x, y \in K$, тобто таких, для яких існує число $t > 0$ з властивістю $tx \geqslant y$ і $ty \geqslant x$ (див. [17, стор. 77]).

C) Функціонал $\varphi \in K^*$ є допустимим, тобто, $\varphi = A^* g$ $(g \in K^*)$ і $(g, x) > (A^* g, x)$ $(x \in K, x \neq \theta)$, де A^* є спряженим з A оператором.

D) Спектральний радіус $\rho(A)$ оператора A задовольняє нерівність $\rho(A) < 1$.

Теорема 1.1. *[17, стор. 156, теорема 19.1]. Нехай виконуються умови A)-D), $b \in K$, $b \neq \theta$, $x^{(0)} \in K$, $x^{(0)} \neq \theta$. Тоді послідовність* $\{x^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формули* (1.2)*, збігається до розв'язку* x^* *рівняння* (1.1)*, і справджується оцінка*

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leqslant M \left(\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0 + 1} \right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

зі сталою M*, що не залежить від початкового наближення* $x^{(0)}$.

Для квадратної матриці $A = \{a_{ij}\}$ умова фокусування виконується, якщо $\{a_{ij}\} > 0 \quad (i, j = \overline{1, N})$, де N – розмірність матриці A.

Для інтегрального оператора

$$Ax = \int_0^1 A(t, s) x(s) \, ds$$

умова фокусування забезпечується співвідношенням $A(t, s) \geqslant \delta > 0$ при $t, s \in [0, 1]$.

Приклад 1.1. *Нехай* φ *є власним елементом оператора* A^* *спряженого з оператором* A*, тобто* $A^* \varphi = \lambda_0 \varphi$*. Тоді з формули*

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} A x^{(n)} + b, \tag{1.4}$$

тотожньої з формулою (1.2)*, отримуємо*

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, A x^{(n)}\right) + (\varphi, b) =$$

$$= \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \lambda_0 \left(\varphi, x^{(n)}\right) + (\varphi, b) = \lambda_0 \left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + (\varphi, b).$$

Звідси при $\lambda_0 \neq 1$ *матимемо*

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) = \frac{(\varphi, b)}{1 - \lambda_0}. \tag{1.5}$$

Це є підставою для того, щоб вважати виконаною рівність (1.5) *при* $n = 0, 1, \ldots$ *для всякого* $x^{(0)} \in E$*. В цьому випадку ітераційний процес* (1.2) *можна вважати формально тотожним з методом послідовних наближень*

$$x^{(n+1)} = A x^{(n)} + b. \tag{1.6}$$

Якщо, зокрема, маємо $|\lambda_0| > 1$*, а всі інші власні числа оператора* A *лежать всередині кола* $|\lambda| = 1$*, то формально забезпечена збіжність алгоритму* (1.6)*. Однак формально збіжний ітераційний процес* (1.6) *при* $|\lambda_0| > 1$ *виявляється практично розбіжним, оскільки похибки заокруглень призводять до порушення рівності* (1.5) *після кількох ітерацій за формулою* (1.6)*. Алгоритм* (1.4) *за цих обставин позбавлений зазначеної вади для процесу* (1.6)*.*

Зауважимо, що в наведеному прикладі не фігурують умови A)-D).

§ 2. Однопараметричний метод ітеративного агрегування в банахових просторах

Використовуючи запропоновану в [38–44, 49] методику, розглянемо рівняння (1.1), тобто рівняння

$$x = Ax + b, \tag{1.7}$$

не постулюючи напівупорядкованість банахового простору E і не вимагаючи виконання нерівності $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса оператора A.

Побудуємо однопараметричний ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{1.8}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \left(\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}\right) + \alpha\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - (\varphi, b), \tag{1.9}$$

в яких $\widetilde{A}x$ – лінійний неперервний оператор, $a(x)$ – неперервна функція (лінійна або нелінійна щодо $x \in E$) зі значеннями в E, $\alpha(x)$ – неперервна при $x \in E$ функція зі значеннями в множині дійсних чисел E'.

Назвемо множиною $\mathcal{E}$ сукупність пар $\{x, y\}$ таких, що $x \in E$, $y \in E'$, котрі задовольняють рівність

$$(\varphi, x) + y = 0. \tag{1.10}$$

Ця множина є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, в якому норму $\|x, y\|$ пар $\{x, y\}$ ($x \in E$, $y \in E'$) можна означити, наприклад, як евклідову норму пари $\{\|x\|, |y|\}$. Будемо вважати, що $\lambda \neq 1$ і постулюємо виконання таких умов.

E) Справджується рівність

$$\Big(\varphi, (A+\widetilde{A})x\Big) = \lambda(\varphi, x) \quad (x \in E). \tag{1.11}$$

F) При $x \in E$ матимемо

$$(\varphi, a(x)) + \alpha(x) = \lambda. \tag{1.12}$$

Лема 1.1. *Нехай справджуються умови E), F), а також припущення, що* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$*. Тоді для* $u \in E$*,* $v \in E'$ *із співвідношень*

$$u = Ax + a(x)(y - v) + b,$$
$$v = \lambda v + (\varphi, \widetilde{A}x) + \alpha(x)(y - v) - (\varphi, b)$$

випливає, що $\{u, v\} \in \mathcal{E}$*.*

Доведення. Можна переконатися, що умови леми забезпечують виконання рівностей

$$\begin{gathered}(\varphi, u) + v = (\varphi, Ax) + (\varphi, a(x))\, y - (\varphi, a(x))\, v + (\varphi, b) = \\ = \lambda v + (\varphi, \widetilde{A}x) + \alpha(x)y - \alpha(x)v - (\varphi, b) = \\ = \Big(\varphi, (A+\widetilde{A})x\Big) + [(\varphi, a(x)) + \alpha(x)]y + [\lambda - (\varphi, a(x)) - \alpha(x)]v = \\ = \lambda[(\varphi, x) + y].\end{gathered}$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то звідси випливає, що $\{u, v\} \in \mathcal{E}$. $\square$

Лема 1.1 і принцип індукції є підставою вважати, що співвідношення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ призводять до співвідношень $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ при всіх $n = 0, 1, \ldots$

Формули (1.8), (1.9) розглядатимемо як ітераційний процес для системи, складеної із рівняння (1.7) і допоміжного рівняння

$$y = \lambda y + (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b). \tag{1.13}$$

Лема 1.2. *Якщо* $\{x^*, y^*\}$ $(x^* \in E, y^* \in E')$ *є розв'язком системи* (1.7), (1.13) *і виконана умова E), то* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$*.*

Доведення. Із співвідношень (1.7), (1.13) та (1.11) випливає, що

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* + (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b) =$$
$$= \Big(\varphi, (A + \widetilde{A})x^*\Big) + \lambda y^* = \lambda[(\varphi, x^*) + y^*].$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то можна вважати лему доведеною. $\square$

З цих двох лем випливає, що при $n = 0, 1, \ldots$ справджуються рівності

$$\Big(\varphi, x^{(n)} - x^*\Big) + y^{(n)} - y^* = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.14}$$

Зазначимо, що при

$$a(x) = \frac{Ax}{(\varphi, x)}$$

агрегаційно-ітеративний процес (1.8), (1.9) стає однопараметричним методом ітеративного агрегування, який можна подати у вигляді (1.2), а також у вигляді (1.4).

Позначимо

$$H^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}^{(0)}(x) & h_{12}^{(0)}(x) \\ h_{21}^{(0)}(x) & h_{22}^{(0)}(x) \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

де

$$h_{11}^{(0)}(x)u = Au - a(x)\frac{\Big(\varphi, \widetilde{A}u\Big)}{1 - \lambda + \alpha(x)},$$
$$h_{12}^{(0)}(x)v = a(x)\frac{1 - \lambda}{1 - \lambda + \alpha(x)}v,$$
$$h_{21}^{(0)}(x)u = \frac{\Big(\varphi, \widetilde{A}u\Big)}{1 - \lambda + \alpha(x)},$$
$$h_{22}^{(0)}(x)v = \frac{\alpha(x)}{1 - \lambda + \alpha(x)}v.$$

Теорема 1.2. *Нехай справджуються умови E), F) і при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\{u, v\} \in E$ *для оператора* $H^{(0)}(x)$ *маємо оцінку*

$$\|H^{(0)}(x)\| \leqslant Q_0 < 1. \tag{1.16}$$

Якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *то послідовність* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формул* (1.8), (1.9), *збігається за нормою в* $\widetilde{E}$ *до розв'язку* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$

системи рівнянь (1.7), (1.13) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* Q_0.

Доведення. З рівностей (1.7), (1.8) та (1.9), (1.13) можна отримати

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - a\left(x^{(n)}\right)\frac{\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)}{1 - \lambda + \alpha\left(x^{(n)}\right)} +$$

$$+a\left(x^{(n)}\right)\frac{1-\lambda}{1 - \lambda + \alpha\left(x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^*\right),$$

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)}{1 - \lambda + \alpha\left(x^{(n)}\right)} + \frac{\alpha\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \alpha\left(x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^*\right).$$

Тому, маючи на увазі (1.15), (1.16) та (1.14), а також твердження лем 1.1 і 1.2, можна вважати теорему доведеною. □

Наслідок 1.1. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ *і справджуються умови E), F), а оператор* $H^{(1)}(x)$, *побудований за допомогою формули*

$$H^{(1)}(x)u = Au - a(x)\frac{(\varphi, (I - A)u)}{1 - \lambda + \alpha(x)}, \tag{1.17}$$

де I *– тотожній оператор в* E, *при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ *задовольняє умову*

$$\|H^{(1)}(x)\| \leqslant Q_1 < 1. \tag{1.18}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *збігається за нормою в* $\widetilde{E}$ *до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи рівнянь* (1.7), (1.13) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* Q_1.

Доведення. Достатньо скористатися теоремою 1.2 і співвідношенням (1.14). □

Приклад 1.2. *Система рівнянь*

$$x_1 = 2,1x_1 + 6,2x_2 - 135,$$

$$x_2 = 1,2x_1 + 3,0x_2 - 5,2$$

має точний розв'язок $x^* = \{x_1^*, x_2^*\}^T = \{10; 20\}^T$. *Власні числа матриці коефіцієнтів мають значення* $\lambda_1 = 5,3145071$, $\lambda_2 = -0,2145071$. *Візьмемо*

$$\varphi = \{1; 3\}^T, \quad \lambda = 5,$$

$$x^{(0)} = \{1; 1\}^T, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,0 \end{pmatrix},$$

$$a(x) = \{\frac{2x_1 + 6x_2}{(\varphi, x)}; \frac{x_1 + 3x_2}{(\varphi, x)}\} = \{2; 1\}.$$

Очевидно, що $y^{(0)} = -4$. *Обчислимо* $y^{(1)}$, *використовуючи формулу* (1.10). *Будемо мати* $y^{(1)} = -72,525$. *Реалізуючи обчислення за формулами* (1.8), (1.9), *одержуємо*

$$x^{(1)} = \{10,35; 20,725\}^T, \quad y^{(2)} = -69,895,$$

$$x^{(2)} = \{9,97; 19,965\}^T, \quad y^{(3)} = -70,007.$$

Наведені покращення ітерацій до розв'язку $x^* = \{10; 20\}^T$ *спричинені тим, що з формул* (1.15), (1.16) *можна отримати*

$$\|H^{(n)}(x)\| = \max\{|-0,25| + 0,100; 0,25 + |-0,05|\} = 0,35,$$

оскільки

$$H^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -0,250 & 0,100 \\ 0,025 & -0,005 \end{pmatrix}.$$

Це формально забезпечує збіжність ітерацій $x^{(n)}$ *не повільнішу від збіжності геометричної прогресії зі знаменником* $Q = 0,35$. *Однак при дальшому обчисленні отримаємо* $x^{(3)} = \{9,944; 19,971\}^T$, $y^{(4)} = -70,01125$. *Наступні ітерації призводять до ще гірших результатів. Ситуацію вдається виправити, якщо взяти до уваги, що похибки заокруглень обчислень призводять до порушення рівності* (1.10). *Тому підправляючи* $x^{(n)}$ *таким способом, щоб пара* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *належала до множини* $\mathcal{E}$, *можна добитись обчислювальної стійкості алгоритму.*

§ 3. Про початкове наближення в методі послідовних наближень

Умови збіжності методу послідовних наближень для рівняння (1.1), тобто

$$x = Ax + b, \tag{1.19}$$

можна сформулювати в такому вигляді.

Теорема 1.3. *(див., напр., [17, стор. 119]). Нехай $A : E \to E$ (E – банахів простір) є лінійним неперервним оператором, спектральний радіус $\rho(A)$ якого задовольняє умову*

$$\rho(A) < 1. \tag{1.20}$$

Тоді при кожному $b \in E$ рівняння (1.19) *має єдиний розв'язок $x^* \in E$ і при всякому початковому наближенні $x^{(0)} \in E$ послідовні наближення $\{x^{(n)}\}$, побудовані за допомогою формули*

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1.21}$$

збігаються до x^*.

Як зазначено в [17, стор. 120], ця теорема має "майже" обернену.

Теорема 1.4. *[17, стор. 120] Якщо послідовність $\{x^{(n)}\}$, побудована за допомогою алгоритму* (1.21)*, збігається при всякому $b \in E$ і $x^{(0)} = b$, то $\rho(A) < 1$.*

В [17, стор. 120] наведено приклад рівняння вигляду (1.19), в якому $\rho(A) = 1$ і ітераційний процес (1.21) збігається до єдиного розв'язку рівняння (1.19) у відповідних банахових просторах. В книзі [17, стор. 122] підкреслено, що можлива збіжність ітераційного процесу (1.21) її при $\rho(A) > 1$. Множина початкових наближень, для яких при $\rho(A) > 1$ послідовні наближення $x^{(n)}$ збігаються до розв'язку x^*, є надто бідною. Цьому факту надамо конкретного змісту. Припустимо, що заданим є власне число $\lambda_1 \neq 1$

і це число є одиничної кратності. Нехай заданий відповідний до нього власний елемент φ_1 оператора A^*, спряженого до A. В цьому випадку формулу (1.10) можна замінити формулою

$$(\varphi_1, x) + \frac{(\varphi_1, b)}{1 - \lambda_1} = 0. \tag{1.22}$$

Вважаємо, що $(\varphi_1, b) \neq 0$. Тоді з рівняння (1.19) отримаємо

$$\begin{aligned}(\varphi_1, x^*) = (\varphi_1, Ax^*) + (\varphi_1, b) = (A^*\varphi_1, x^*) + (\varphi_1, b) = \\ = \lambda_1(\varphi_1, x^*) + (\varphi_1, b).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що рівність (1.22) справджується при $x = x^*$ (x^* – розв'язок рівняння (1.19) в E). Використовуючи ітераційну формулу

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi_1, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi_1, x^{(n)}\right)} Ax^{(n)} + b, \tag{1.23}$$

отримаємо

$$\left(\varphi_1, x^{(n+1)}\right) = \frac{\left(\varphi_1, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi_1, x^{(n)}\right)} (\varphi_1, Ax^{(n)}) + (\varphi_1, b) = \lambda_1 \left(\varphi_1, x^{(n+1)}\right) + (\varphi_1, b).$$

Тому маємо підставу для висновку, що розв'язок x^* і члени послідовності $\{x^{(n)}\}$, побудованої за формулою (1.23) при кожному $n = 1, 2, \ldots$ належить до множини $\mathcal{E}_1$, означеної рівністю (1.22). Зокрема, матимемо рівність $\left(\varphi_1, x^{(n)}\right) = \left(\varphi_1, x^{(n+1)}\right)$. Тому формули (1.21) і (1.23) можна ототожнити при всякому $x^{(0)}$. Припустимо, що

$$A = A_1 + A_0, \tag{1.24}$$

причому оператор A_1 має вигляд

$$A_1 = \psi_1 \varphi_1, \tag{1.25}$$

де $\psi_1 \in E$. Тоді формулу (1.21) запишемо наступним чином

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_0 x^{(n)} + b. \tag{1.26}$$

Враховуючи, що рівність (1.19) можна записати у вигляді

$$x^* = A_1 x^* + A_0 x^* + b, \tag{1.27}$$

використаємо той факт, що $x^* \in \mathcal{E}_1$, $x^{(n)} \in \mathcal{E}_1$. Маючи це на увазі, з рівності (1.21) отримаємо, що

$$\left(\varphi_1, x^{(n)} - x^*\right) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Оскільки з рівностей (1.24) – (1.27) можна знайти, що

$$x^{(n+1)} - x^* = A_0 \left(x^{(n)} - x^*\right) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1.28}$$

то у цьому випадку для збіжності процесу (1.21) достатньо, щоб спектральний радіус $\rho(A_0)$ оператора A_0 був меншим від одиниці. Йдеться, очевидно, про формальну збіжність. В практичних розрахунках при $\rho(A_0) > 1$ обчислювальну стійкість ітерацій можна забезпечити, залучаючи рівність (1.22) при $x = x^{(n)}$ для кожного $n = 0, 1, \ldots$ Підсумовуючи сказане, отримуємо таке твердження.

Теорема 1.5. *Нехай справджуються умови:*

1) відомими є власне число $\lambda_1 \neq 1$ і відповідний до нього власний елемент φ_1 спряженого до A оператора A^*;

2) $(\varphi_1, b) \neq 0$;

3) в рівності (1.24) *оператор A_1 означений за формулою* (1.25). *Тоді при всякому $x^{(0)} \in E$ метод послідовних наближень* (1.21) *збігається до единого розвязку $x^* \in E$ рівняння* (1.19), *якщо меншим від одиниці є спектральний радіус $\rho(A_0)$ оператора A_0. При цьому $x^* \in \mathcal{E}$ і $x^{(n)} \in \mathcal{E}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.*

Доведення. Твердження теореми випливає з попереднього викладу і рівності (1.27). □

Приклад 1.3. *Система*

$$x_1 = 5,2x_1 + 2,8x_2 - 98,$$
$$x_2 = 5x_1 + 3x_2 - 90$$

має розв'язок $x^* = \{10; 20\}^T$.

Матриця коефіцієнтів має власні числа $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 0,2$. *Власним вектором, що відповідає* λ_1, *є вектор* $\varphi_1 = \{10; 5,6\}$. *Знаходимо*

$$(\varphi_1, x) = -\frac{(\varphi_1, b)}{1-\lambda_1} = -\frac{98 \times 10 - 90 \times 5,6}{1-8} = 212.$$

Для спектрального радіуса матриці A_0 *маємо* $\rho(A_0) = 0,2$. *Візьмемо* $x^{(0)} = \{18,4; 5\}^T$. *Обчислення за формулою* (1.20) *дають такі результати*

$$x^{(1)} = \{11,68; 17\}^T \quad x^{(2)} = \{10,336; 19,4\}^T,$$

$$x^{(3)} = \{10,0672; 19,88\}^T \quad x^{(4)} = \{10,01344; 19,976\}^T,$$

$$x^{(5)} = \{10,00268; 19,9952\}^T \quad x^{(6)} = \{10,000490; 19,999000\}^T.$$

Таким чином, формальна збіжність ітерацій не повільніша за збіжність геометричної прогресії зі знаменником $q = \lambda_2 = 0,2$.

§ 4. Узагальнення однопараметричного методу ітеративного агрегування

Для рівняння

$$x = Ax + b \tag{1.29}$$

замість ітераційних формул (1.8), (1.9) використаємо формули

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b + \frac{A_0 B x^{(n)}}{\left(\varphi, Bx^{(n)}\right)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{1.30}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, \tilde{A} x^{(n)}\right) - (\varphi, b). \tag{1.31}$$

Нехай $\lambda \in E'$, $\varphi \in E^*$, де E' – множина дійсних чисел, E^* – простір, спряжений до банахового простору E. Нехай $A_0, \widetilde{A} : E \to E$ і маємо рівність

$$A = A_0 + \widetilde{A}. \tag{1.32}$$

Припустимо, що для оператора A_0^*, спряженого з A_0 матимемо

$$A_0^* \varphi = \lambda \varphi \quad (\varphi \in E^*, \lambda \in E'). \tag{1.33}$$

Означуємо множину $\mathcal{E}$ за формулою (1.10), тобто за формулою

$$(\varphi, x) + y = 0 \quad (x \in E, y \in E'). \tag{1.34}$$

Будемо досліджувати ітераційний процес (1.30), (1.31), вважаючи, що рівняння (1.29) розглядаємо разом з рівнянням

$$y = \lambda y - (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b). \tag{1.35}$$

Цим занурюємо простір E в простір $\widetilde{E} = E \times E'$, в якому означено норму $\|x, y\| = \sqrt{\|x\|^2 + |y|^2}$, де $\|x\|$ – норма елемента $x \in E$, $|y|$ – абсолютна величина числа y. Очевидно, що $\mathcal{E}$ є підпростором простору $\widetilde{E}$.

Будемо використовувати такі припущення:

а) справджується рівність (1.33), в якій $\lambda \neq 1$;

б) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$;

в) для оператора $H(x)w$, означеного при $w = u - v$, $\{u, v\} \in \mathcal{E}$, $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ за допомогою формули

$$H(x)w = Aw - \frac{A_0 Bx}{(1-\lambda)(\varphi, Bx)}(\varphi, (I - A)w), \tag{1.36}$$

де I – тотожній оператор, справджується оцінка

$$\|H(x)\| \leq q \tag{1.37}$$

зі сталою q, для якої маємо

$$q < 1. \tag{1.38}$$

Теорема 1.6. *Якщо виконані умови а)-в), то послідовності* $\{x^{(n)}\}$, $\{y^{(n)}\}$, *отримані за допомогою формул* (1.30), (1.31), *збігаються відповідно до компонент* x^*, y^* *розв'язку* $\{x^*, y^*\} \in \widetilde{E}$ *системи* (1.29), (1.35) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q *і при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *матимемо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Переконаємося, що

$$\left(\varphi, \frac{A_0 Bx}{(\varphi, Bx)}\right) = \lambda. \tag{1.39}$$

Справді

$$\left(\varphi, \frac{A_0 Bx}{(\varphi, Bx)}\right) = \left(A_0^* \varphi, \frac{Bx}{(\varphi, Bx)}\right) = \frac{(\lambda\varphi, Bx)}{(\varphi, Bx)} = \lambda.$$

Встановимо, що співвідношення $\{x^{(0)}, y(0)\} \in \mathcal{E}$ призводить до співвідношень $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ при $n = 0, 1, \ldots$ Для цього використаємо рівності (1.30), (1.31) та (1.32), (1.33), (1.39). Будемо мати

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)} = \left(\varphi, A_0 x^{(n)}\right) + \left(\varphi, \widetilde{A} x^{(n)}\right) + (\varphi, b) +$$

$$+ \left(\varphi, \frac{A_0 B x^{(n)}}{\left(\varphi, B x^{(n)}\right)}\right) \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \lambda y^{(n+1)} -$$

$$- \left(\varphi, \widetilde{A} x^{(n)}\right) - (\varphi, b) = \lambda \left[\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}\right].$$

Завдяки принципові індукції звідси отримуємо, що $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ при $n = 0, 1, \ldots$ З іншого боку, з рівностей (1.29), (1.35) отримуємо

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) - \lambda y^* -$$

$$-(\varphi, Ax^*) - (\varphi, b) = \lambda \left[(\varphi, x^*) + y^*\right].$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то це дає підставу зробити висновок, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$. Тому можна вважати доведеними рівності

$$\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^* = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.40}$$

З рівностей (1.31), (1.35) можна отримати, що

$$y^{(n+1)} - y^* = -\frac{1}{1-\lambda} \left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right)\right). \tag{1.41}$$

Враховуючи рівності (1.40), (1.41), а також (1.29), (1.30) отримаємо

$$x^{(n+1)} - x^* = H\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right). \tag{1.42}$$

Використання умови (1.37) завершує доведення теореми. □

Означимо тепер оператор $\widetilde{H}(x)w$ за допомогою формули

$$\widetilde{H}(x)w = Aw - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} A_0^i x^{(n)}}{(1-\lambda)(\varphi, x) \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i} (\varphi, I - A)w \tag{1.43}$$

і для нього вимагатимемо виконання співвідношення

$$\|\widetilde{H}(x)\| \leqslant q_1 < 1. \tag{1.44}$$

Теорема 1.7. *Нехай оператор B має вигляд*

$$B = \sum_{i=1}^{m} A_0^i, \tag{1.45}$$

оператор $\widetilde{H}(x)w$, побудований за формулою (1.43) *задовольняє співвідношення* (1.44), *а також виконуються умови а), б) теореми 1.6. Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, отримана за допомогою формул* (1.30), (1.31), *збігаються до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи* (1.29), (1.31) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q_1 і при кожному $n = 0, 1, \ldots$ $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.*

Доведення. Достатньо співставити формули (1.36) і (1.43), щоб можна було зробити посилання на теорему 1.6. □

Зауваження 1.1. *Нехай $\widetilde{A}$ є нульовим оператором, а оператор $A = A_0$ має власні числа $\lambda_i\,(i = 1, 2, \ldots)$, причому $\lambda = \lambda_1 \neq 1$ і має одиничну кратність. Нехай, крім того, $|\lambda_2| < 1$ і справджуються співвідношення*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \sup_{i \geqslant 3}\{|\lambda_i|\}. \tag{1.46}$$

Можна переконатися, що послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, отриману за допомогою формул (1.30), (1.31), *можна подати як алгоритм*

$$x^{(n+1)} = \frac{\big(\varphi, x^{(n+1)}\big)}{\big(\varphi, x^{(n)}\big)} A x^{(n)} + b, \tag{1.47}$$

який збігається до розв'язку рівняння (1.29) *зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $|\lambda_2|$. Множиною $\mathcal{E}$ у цій ситуації є сукупність таких $x \in E$, для яких*

$$(\varphi, x) = \frac{(\varphi, b)}{1 - \lambda_1}.$$

Тоді формулу (1.47) *формально можна замінити наступною*

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b. \tag{1.48}$$

Проте при $|\lambda_1| > 1$ *ітераційний процес* (1.48) *є нестійким з обчислювального погляду через неминучість впливу похибок заокруглень. Тому на практиці заміна ітераційної формули* (1.47) *алгоритмом* (1.48) *є доцільною при* $|\lambda_1| < 1$ *і при* $|\lambda_1| > 1$. *При* $|\lambda_1| < 1$ *застосування формули* (1.47) *дозволяє не втратити ефект прискорення збіжності методу послідовних наближень* (1.48).

Зазначимо, що враховуючи співвідношення (1.40), алгоритм (1.30), (1.31) можна описати однією формулою

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{\big(\varphi, x^{(n+1)} - x^{(n)}\big)}{\big(\varphi, Bx^{(n)}\big)} ABx^{(n)} + b.$$

Вона є аналогом формули (1.47) і тотожна з нею при $B = I$.

§ 5. Про деякі способи побудови однопараметричних агрегаційно-ітеративних алгоритмів

Розглянемо рівняння вигляду (1.29), в якому

$$A = A_0 + \widetilde{A},$$

де $A_0, \widetilde{A} : E \to E$ є лінійними неперервними операторами, $A_0^*, \widetilde{A}^* : E^* \to E^*$ є спряженими відповідно з A_0 та $\widetilde{A}$ операторами, E^* – спряжений з E банахів простір. Вважатимемо, що справджується рівність

$$(A_0^* + \widetilde{A}^*)\varphi = \lambda\varphi, \tag{1.49}$$

де $\lambda \neq 1$ – дійсне число, φ – лінійний функціонал зі значеннями (φ, x) на елементах $x \in E$. До рівнння (1.29) приєднаємо допоміжне рівняння

$$y = \lambda y + (\alpha, x) \tag{1.50}$$

з допоміжним невідомим дійсним числом y і функціоналом $\alpha \in E^*$, означеним за допомогою формули

$$\alpha = \lambda\varphi - A^*\varphi = \widetilde{A}^*\varphi. \tag{1.51}$$

Множину $\mathcal{E}_0$ означимо як сукупність елементів $x \in E$ та дійсних чисел $y \in E'$ (E' – множина дійсних чисел), для яких справджується рівність

$$(\varphi, x) + y = \frac{(\varphi, b)}{1-\lambda}. \tag{1.52}$$

Вважаємо заданою неперервну щодо $x \in E$ зі значеннями в E функцію $a(x)$ та дійсну неперервну при $x \in E$ функцію $\gamma(x)$, для яких при $x \in E$ маємо

$$(\varphi, a(x)) + \gamma(x) = \lambda. \tag{1.53}$$

Лема 1.3. *Нехай* $(\varphi, b) \neq 0$. *Якщо* $\{x^*, y^*\}$ *є розв'язком системи* (1.29), (1.50) *при* $x^* \in E$, $y^* \in E'$, *то* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$.

Доведення. З рівностей (1.29), (1.31) з урахуванням (1.53) при $x = x^*$, $y = y^*$ отримаємо

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + (\alpha, x^*) + \lambda y^* =$$
$$= (A^*\varphi, x^*) + (\alpha, x^*) + \lambda y^* + (\varphi, b) =$$
$$= (\lambda\varphi - \alpha, x^*) + (\lambda, x^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* = \lambda\left[(\varphi, x^*) + y^*\right] + (\varphi, b).$$

Звідси випливає, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$. $\square$

Побудуємо послідовність пар $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ за формулами

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}}\Big[Ax^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right)\Big] + b, \tag{1.54}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}}\Big[\left(\alpha, x^{(n)}\right) + \\ +\gamma\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \lambda y^{(n+1)}\Big] \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{gathered} \tag{1.55}$$

Лема 1.4. *Нехай* $(\varphi, b) \neq 0$ *і* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$. *Тоді для побудованої за формулами* (1.54), (1.55) *послідовності* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *справджується співвідношення* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0 \quad (n = 0, 1, 2, ...)$.

Доведення. Співвідношення (1.54), (1.55) та (1.52), (1.53) дозволяють отримати

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}} \Big[\left(\varphi, Ax^{(n)}\right) + \left(\alpha, x^{(n)}\right) +$$

$$+ \left(\varphi, a\left(x^{(n)}\right)\right) \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \gamma \left(x^{(n)}\right) \left(y^{(n)} - y^{(n+1)} + \lambda y^{(n+1)}\right) \Big] +$$

$$+(\varphi, b) = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}} \Big[\left(A^*\varphi, x^{(n)}\right) + \left(\varphi, a\left(x^{(n)}\right)\right) +$$

$$+\gamma \left(x^{(n)}\right) \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \left(\lambda - \left(\varphi, a\left(x^{(n)}\right)\right)\right) + \left(\alpha, x^{(n)}\right) \Big] +$$

$$+(\varphi, b) = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}} \Big[\lambda \left(\varphi, x^{(n)}\right) - \left(\alpha, x^{(n)}\right) + \lambda y^{(n)} +$$

$$+ \left(\alpha, x^{(n)}\right) \Big] + (\varphi, b) = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}} \lambda \Big[\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)} \Big] +$$

$$+(\varphi, b) = \lambda \left[\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)}\right] + (\varphi, b).$$

Цим забезпечено виконання рівності (1.52) при $x = x^{(n+1)}$, $y = y^{(n+1)}$, тобто лему доведено. □

Лема 1.5. *Якщо* $(\varphi, b) \neq 0$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *то алгоритм* (1.54), (1.55) *формально тотожній з алгоритмом*

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{1.56}$$

$$y^{(n+1)} = \left(\alpha, x^{(n)}\right) + \gamma \left(x^{(n)}\right) \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \lambda y^{(n+1)} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.57}$$

Доведення. Достовірність твердження цієї леми забезпечує лема 1.4, оскільки при $n = 0, 1, \ldots$ матимемо

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)} = \left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}. \quad \square$$

Для дослідження збіжності алгоритму (1.54), (1.55) використаємо рівність

$$\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^* = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.58}$$

Із співвідношення (1.29), (1.50) та (1.54), (1.55) отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) -$$
$$-a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right),$$
$$y^{(n+1)} - y^* = \lambda\left(y^{(n+1)} - y^*\right) + \alpha\left(x^{(n)} - x^*\right) +$$
$$+\gamma\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \alpha\left(x^{(n)} - x^*\right) + \gamma\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right).$$

Звідси при $1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right) \neq 0$ знаходимо

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)} + \frac{\gamma\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \alpha\left(x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^*\right),$$

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \frac{a\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)}\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right) +$$
$$+\frac{(1-\lambda)a\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^*\right).$$

Для всяких $\beta \in E,\ \beta_0 \in E'$, враховуючи (1.58), будемо мати

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \frac{a\left(x^{(n)}\right)\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)} - \\ -\beta\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + \left(\frac{(1-\lambda)a\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)} - \beta\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{gathered} \tag{1.59}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = \frac{\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)} - \beta_0\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + \\ + \left(\frac{\gamma\left(x^{(n)}\right)}{1 - \lambda + \gamma\left(x^{(n)}\right)} - \beta_0\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{gathered} \tag{1.60}$$

Означимо $H_\beta^{(0)}(x)u$ як лінійний щодо $u \in \widetilde{E} = E \times E'$ оператор за допомогою формули

$$H_\beta^{(0)}(x) = \left\{h_{ij}^{(\beta)}(x)\right\}_{i,j=1,2}, \tag{1.61}$$

де

$$h_{11}^{(\beta)}(x)u_1 = \frac{a(x)}{1-\lambda+\gamma(x)}(\alpha, u_1) - \beta(\varphi, u_1),$$
$$h_{12}^{(\beta)}(x)u_2 = \left(\frac{(1-\lambda)a(x)}{1-\lambda+\gamma(x)} - \beta\right) u_2,$$
$$h_{21}^{(\beta)}(x)u_1 = \frac{(\alpha, u_1)}{1-\lambda+\gamma(x)} - \beta_0(\varphi, u_1),$$
$$h_{22}^{(\beta)}(x)u_2 = \left(\frac{\gamma(x)}{1-\lambda+\gamma(x)} - \beta_0\right) u_2.$$

Норму пари $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$ означимо за формулою

$$|(x, y)| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

де $\|x\|$ – норма елемента $x \in E$, $|y|$ – абсолютна величина числа y. З рівностей (1.59) – (1.61) випливає збіжність послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, побудованої за допомогою формул (1.54), (1.55). Це разом з (1.49), (1.50) дає можливість сформулювати таке твердження.

Теорема 1.8. *Нехай справджується умова*

$$\|H_\beta^{(0)}(x)\| \leqslant q_\beta < 1. \tag{1.62}$$

Якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *то при всіх* $n = 0, 1, \ldots$ *будемо мати* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$ *і послідовність* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$ *системи* (1.29), (1.50) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_β.

Доведення. Якщо позначити $u^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\} = \{x^{(n)} - x^*, y^{(n)} - y^*\}$, то з (1.59), (1.60) можна отримати

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \frac{a\left(x^{(n)}\right)\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right)}{1-\lambda+\gamma\left(x^{(n)}\right)} - \\ - \frac{(1-\lambda)a\left(x^{(n)}\right)\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right)}{1-\lambda+\gamma\left(x^{(n)}\right)}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Цим теорему доведено. □

Позначивши через $H_0(x)w$ лінійний щодо w оператор

$$H_0(x)w = Aw - \frac{(\alpha, w)a(x)}{1-\lambda+\gamma(x)} - \frac{(1-\lambda)(\varphi, w)a(x)}{1-\lambda+\gamma(x)}, \tag{1.64}$$

де $w = x - x'$ $(x, x' \in E)$, рівність (1.63) запишемо у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = H_0(x)\left(x^{(n)} - x^*\right). \tag{1.65}$$

Теорема 1.9. *Якщо* $\|H_0(x)\| \leqslant q_0 < 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *то* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$ *при всіх* $n = 0, 1, \ldots$ *і послідовність* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формул* (1.54), (1.55), *збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$ *системи* (1.29), (1.50) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_0.

Доведення. Враховуючи рівність (1.65), для обґрунтування співвідношення $y^{(n)} - y^* \to \theta'$, де θ' – нульовий елемент в E', достатньо скористатися зі співвідношень

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{\left(\alpha, x^{(n)} - x^*\right)}{1-\lambda+\gamma\left(x^{(n)}\right)} - \beta_0\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) -$$
$$- \left(\frac{\gamma\left(x^{(n)}\right)}{1-\lambda+\gamma\left(x^{(n)}\right)} - \beta_0\right)\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right).$$

Цим теорему доведено. □

Для отримання апріорної оцінки похибки обмежимося спрощеною ситуацією, в якій $a(x), \gamma(x)$ не залежать від x, тобто маємо $a(x) = a$, $\gamma(x) = \gamma$, де a, γ – сталі числа.

Використаємо рівності

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = A\left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right) + a\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + a\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right),$$

$$y^{(n+1)} - y^{(n)} = \left(\alpha, x^{(n)} - x^{(n-1)}\right) + \gamma\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) +$$
$$+\gamma\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right) + \lambda\left(y^{(n+1)} - y^{(n)}\right),$$

що отримані з (1.54), (1.55). Звідси знаходимо

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = A\left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right) + \frac{a\left(\alpha, x^{(n)} - x^{(n-1)}\right)}{1-\lambda+\gamma} +$$
$$+\frac{(1-\lambda)a\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right)}{1-\lambda+\gamma},$$

$$y^{(n+1)} - y^{(n)} = \frac{\left(\alpha, x^{(n)} - x^{(n-1)}\right)}{1-\lambda+\gamma} + \frac{\gamma}{1-\lambda+\gamma}\left(y^{(n)} - y^{(n-1)}\right).$$

Оскільки

$$\left(\varphi, x^{(n)} - x^{(n-1)}\right) + y^{(n)} - y^{(n-1)} = 0,$$

то, взявши до уваги (1.64), матимемо

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = H_0\left(x^{(n)} - x^{(n-1)}\right),$$

де $H_0 w$ не залежить від x. Звідси при $\|H_0\| \leqslant q < 1$ випливає оцінка

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\,\|x^{(0)} - x^{(1)}\|.$$

Розглянемо агрегаційно-ітеративний алгоритм, побудований за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{A^{m+1}x^{(n)}}{\lambda^m\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{1.66}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \left(\varphi, \frac{\widetilde{A}^{m+1}x^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \\ + \left(\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}\right) - (\varphi, b), \end{gathered} \tag{1.67}$$

де задля зручності замість множини $\mathcal{E}_0$, означеної за формулою (1.52), використовуємо множину $\mathcal{E}$, означену рівністю

$$(\varphi, x) + y = 0, \tag{1.68}$$

причому $(A^* + \widetilde{A}^*)\varphi = \lambda\varphi$ для A^* та $\widetilde{A}^*$, спряжених з A та A^*. Як і в попередньому викладі, можна переконатися, що для розв'язку системи, складеної з рівняння (1.29) і допоміжного рівняння

$$y = \lambda y + (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b), \tag{1.69}$$

матимемо $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$ при $\lambda \neq 1$, а також співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. Справді,

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* + \Big(\varphi, \widetilde{A}^* x\Big) - (\varphi, b) =$$
$$= \Big(\varphi, (A + \widetilde{A}) x^*\Big) + \lambda y^* = \lambda \Big[(\varphi, x^*) + y^* \Big].$$

$$\Big(\varphi, x^{(n+1)}\Big) + y^{(n+1)} = \Big(\varphi, Ax^{(n)}\Big) + \frac{\big(\varphi, A^{m+1} x^{(n)}\big)}{\lambda^m \big(\varphi, x^{(n)}\big)} \Big(y^{(n)} - y^{(n+1)}\Big) +$$
$$+ (\varphi, b) + \lambda y^{(n+1)} + \left(\varphi, \frac{\widetilde{A}^{m+1} x^{(n)}}{\lambda^m \big(\varphi, x^{(n)}\big)}\right) \Big(y^{(n)} - y^{(n+1)}\Big) +$$
$$+ \Big(\varphi, \widetilde{A} x^{(n)}\Big) - (\varphi, b) = \Big(\varphi, (A + \widetilde{A}) x^{(n)}\Big) + \lambda y^{(n+1)} +$$
$$+ \frac{\Big(\varphi, \Big(A^{m+1} + \widetilde{A}^{m+1}\Big) x^{(n)}\Big)}{\lambda^m \big(\varphi, x^{(n)}\big)} \Big(y^{(n)} - y^{(n+1)}\Big) = \lambda \Big(\varphi, x^{(n)}\Big) +$$
$$+ \lambda \Big(y^{(n)} - y^{(n+1)}\Big) + \lambda y^{(n+1)} = \lambda \Big[\Big(\varphi, x^{(n)}\Big) + y^{(n)} \Big].$$

Це дає підставу скористатися нерівністю $\lambda \neq 1$ та принципом математичної індукції і вважати потрібні твердження обґрунтованим. Як підсумок, з цих міркувань отримуємо висновок, що при $\lambda \neq 1$ та $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ матимемо для $n = 0, 1, \ldots$ рівності (1.58).

Позначимо

$$a(x) = \frac{\big(\varphi, A^{m+1} x\big)}{\lambda^m (\varphi, x)}, \quad \alpha(x) = \left(\varphi, \frac{\widetilde{A}^{m+1} x}{\lambda^m (\varphi, x)}\right). \tag{1.70}$$

З рівностей (1.29), (1.66)–(1.68) можна одержати

$$y^{(n+1)} - y^* = -\frac{\alpha x^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha\big(x^{(n)}\big)} \Big(\varphi, x^{(n)} - x^*\Big) + \frac{\Big(\varphi, \widetilde{A}\big(x^{(n)} - x^*\big)\Big)}{1 - \lambda + \alpha\big(x^{(n)}\big)},$$

$$x^{(n+1)} - x^* = A\Big(x^{(n)} - x^*\Big) - a\Big(x^{(n)}\Big) \frac{\Big(\varphi, \widetilde{A}\big(x^{(n)} - x^*\big)\Big)}{1 - \lambda + \alpha\big(x^{(n)}\big)} -$$
$$- a\Big(x^{(n)}\Big) \left[\Big(\varphi, x^{(n)} - x^*\Big) - \frac{\alpha\big(x^{(n)}\big)}{1 - \lambda + \alpha\big(x^{(n)}\big)} \Big(\varphi, x^{(n)} - x^*\Big) \right].$$

Звідси випливає, що

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -a\left(x^{(n)}\right)\frac{(1-\lambda)\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + \left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)}{1-\lambda+\alpha\left(x^{(n)}\right)}. \tag{1.71}$$

Означимо оператор $H(x)w$ за допомогою формули

$$H(x)w = Aw - a(x)\frac{(1-\lambda)(\varphi, w) + \left(\varphi, \widetilde{A}w\right)}{1-\lambda+\alpha(x)}. \tag{1.72}$$

З формул (1.60) випливає, що

$$H(x)w = Aw - \frac{A^{m+1}x}{\lambda^m(\varphi, x)} \cdot \frac{(1-\lambda)(\varphi, w) + \left(\varphi, \widetilde{A}w\right)}{1-\lambda+\dfrac{\widetilde{A}^{m+1}w}{\lambda^m(\varphi, x)}}.$$

Теорема 1.10. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, $\lambda \neq 1$ *і при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ *маємо* $1-\lambda+\alpha(x) \neq 0$. *Якщо*

$$\|H(x)\| \leqslant q < 1$$

при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, *то послідовність* $\{x^{(n)},\}$, *утворена за допомогою алгоритму* (1.66), (1.67), *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (1.29) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q *і виконуються співвідношення* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Оскільки з умов (1.49), (1.60) та співвідношень $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, $\lambda \neq 1$, $1-\lambda+\alpha(x) \neq 0$ випливає рівність (1.71), то достатньо скористатись банаховим принципом стиску. $\square$

Розділ 2

Загальні схеми побудови агрегаційно-ітеративних алгоритмів

В багатьох прикладних задачах декомпозиція операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування є ефективним засобом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. В цьому розділі розвинемо ідеї попереднього розділу, поширивши застосовану там методику для побудови і дослідження багатопараметричних алгоритмів наближеного розв'язання лінійних рівнянь з неперервними операторами, що діють в банахових просторах.

§ 6. Про один клас методів ітеративного агрегування

Нехай E – банахів простір, і лінійні оператори $A, A_0 : E \to E$ є неперервними. Позначимо $\widetilde{A} = A_0 + A$. Розглядатимемо рівняння

$$x = \widetilde{A}x + b \quad (b \in E). \tag{2.1}$$

Припустимо, що

$$A = \sum_{j=1}^{N} A_j, \tag{2.2}$$

де $A_j : E \to E$ є лінійними неперервними операторами. Запишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$x = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} A_j x + b. \tag{2.3}$$

Вважатимемо, що

$$A_i = \Psi_i \Phi_i^* \quad (i = \overline{1, N}), \tag{2.4}$$

де $\Psi_i \in E$, $\Phi_i^* \in E^*$ (E^* – спряжений з E простір). Співвідношення (2.4) мають очевидний смисл, якщо, наприклад, E – евклідів простір, елементами якого є вектор-стовпці, а елементами простору E^* є вектор-рядки. Рівність (2.3) можна подати у вигляді

$$x = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} \Psi_j \Phi_j^* x + b. \tag{2.5}$$

Якщо вважати, що $\Psi^T = \{\Psi_1, ..., \Psi_N\}$, $\Phi = \{\Phi_1^*, ..., \Phi_N^*\}$, то замість (2.5) матимемо

$$x = A_0 x + \Psi \Phi^T x + b, \tag{2.6}$$

де T – символ транспонування. У випадку, коли (2.3) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, формули (2.4) означають, що A_i є матрицями, ранг яких рівний одиниці, з правими власними векторами Ψ_i та лівими власними векторами Φ_i^* відповідно для власних чисел λ_{ii}. Якщо ж, наприклад, (2.5) є лінійним інтегральним рівнянням, то його можна подати у вигляді

$$x(t) = \int_a^b A_0(t,s) x(s)\, ds + \sum_{j=1}^{N} \int_a^b \Psi_j(t) \Phi_j^*(s) x(s)\, ds. \tag{2.7}$$

Використаємо аналогію з тим, що ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, b)}{\left(\varphi, x^{(n)} - \widetilde{A} x^{(n)}\right)} \widetilde{A} x^{(n)} + b,$$

яким в [17, стор. 156] описано однопараметричний метод ітеративного агрегування, можна описати за допомогою формули

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \widetilde{A} x^{(n)} + b, \tag{2.8}$$

побудуємо багатопараметричний алгоритм за формулою

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} A_0 x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_j^* x^{(n+1)}}{\Phi_j^* x^{(n)}} A_j x^{(n)} + b. \tag{2.9}$$

Тут вжито (φ, x) замість $\varphi^* x$. Позначимо

$$\begin{gathered}\lambda_{ij} = \Phi_i \Psi_j, \quad \Lambda = \{\lambda_{ij}\}, \quad z_N^{(n)} = \{z_1^{(n)}, ..., z_N^{(n)}\}^T, \\ z_j^{(n)} = \Phi_j x^{(n)} \quad (j = \overline{1, N}).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Враховуючи (2.4)–(2.6), подамо (2.9) у вигляді

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \Phi x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} \Psi_j^* z_j^{(n+1)} + b. \tag{2.11}$$

Звідси отримуємо

$$z^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \Phi x^{(n)} + \Lambda \Psi^T z^{(n+1)} + \Phi b. \tag{2.12}$$

Нехай існує обернена матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$, де I' – одинична матриця розмірності N. З (2.12) знайдемо

$$z^{(n+1)} = (I' - \Lambda)^{-1} \Phi^T b + (I' - \Lambda)^{-1} \frac{\Phi^T A_0 x^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, x^{(n+1)}\right). \tag{2.13}$$

З (2.11) та (2.13) випливає рівність

$$x^{(n+1)} = \frac{A_0 x^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + \Psi z^{(n+1)} + b. \tag{2.14}$$

Тому маємо підставу записати

$$\begin{gathered}x^{(n+1)} = \frac{A_0 x^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + (\Psi (I' - \Lambda)^{-1} \Phi b + b) + \\ + \Phi (I' - \Lambda)^{-1} \frac{\Phi (I' - \Lambda)^{-1} A_0 x^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, x^{(n+1)}\right),\end{gathered}$$

тобто

$$\begin{gathered}x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left[I + \Psi (I' - \Lambda)^{-1} \Phi^T\right] A_0 x^{(n)} + \\ + (I' - \Lambda)^{-1} \Phi^T b + b,\end{gathered} \tag{2.15}$$

де I – одиничний оператор в E. Позначивши

$$B_0 = [I + \Psi (I' - \Lambda)^{-1} \Phi^T] A_0, \tag{2.16}$$

$$b_0 = (I' - \Lambda)^{-1}\Phi^T b + b, \tag{2.17}$$

рівність (2.15) запишемо у вигляді

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} B_0 x^{(n)} + b_0. \tag{2.18}$$

Можна переконатися, що для рівняння (2.3) є підстави записати

$$x = B_0 x + b_0. \tag{2.19}$$

З цього випливає, що до рівняння (2.3), записаного у вигляді (2.19) застосовна теорема 19.1 із [17, стор. 155-158].

Нехай банахів простір E напівупорядкований за допомогою нормального конуса K додатніх елементів, отже напівупорядкованість узгоджена з нормою. Вважатимемо, що напівупорядкованість у спряженому просторі E^* генеровано за допомогою конуса K^* додатніх лінійних функціоналів.

Теорема 2.1. *Нехай:*

1) оператор B_0 є додатнім, тобто $B_0 x \in K$ при $x \in K$;

2) оператор B_0 є фокусуючим щодо конуса K зі сталою фокусування $\Gamma(B_0)$ (див., [17, стор. 77-78]);

3) для спектрального радіуса $\rho(B_0)$ оператора B_0 маємо нерівність $\rho(B_0) < 1$;

4) функціонал $\varphi \in K^*$ є допустимим, тобто його можна подати у вигляді $\varphi = B_0 g$, причому $(g, x) > (B_0^* g, x)$, де $g \in K^*$, $x \neq \theta$ (θ – нульовий елемент в E);

5) $b_0 \in K$, $b_0 \neq \theta$, $x^{(0)} \in K$, $x^{(0)} \neq 0$.

Тоді послідовність $\{x^{(n)}\}$, побудована за допомогою формули (2.18), збігається до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (2.3) і справджується оцінка

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leqslant M \left(\frac{\Gamma(B_0) - 1}{\Gamma(B_0) + 1}\right)^n, \tag{2.20}$$

в якій число M не залежить від вибору початкового наближення $x^{(0)}$.

Доведення. Достатньо зробити посилання на теорему 19.1 із [17, стор. 156], оскільки для рівняння (2.19) виконані всі ті самі вимоги, які фігурують у згаданій теоремі для рівняння (2.3) й тому її можна застосувати до рівняння (2.19). □

Теорему 19.1 із [17, стор. 156] отримуємо як частковий випадок теореми 2.1, якщо скористатися з алгоритму, який описує формула (2.8) при $\widetilde{A} = A_0$.

Результат, що містить теорема 2.1, охоплює багатопераметричні алгоритми, котрі формально можна звести за описаною процедурою до алгоритму (2.18). При цьому оператори A_i $(i = \overline{1, N})$ можуть не бути додатніми, а спектральний радіус $\rho(\widetilde{A})$ оператора $\widetilde{A}$ не мусить бути меншим від одиниці.

Обмежуючись однопараметричним випадком, розглянемо алгоритм, який узагальнює алгоритм (2.8). При цьому не вимагатимемо виконання умов 1) – 5). Для цього приєднаємо до (2.3) допоміжне рівняння

$$y = \lambda y - (\varphi, A_0 x) - (\varphi, b_0) + \lambda(\varphi, x) \tag{2.21}$$

з дійсною невідомою змінною y при умові, що $\lambda \neq 1$.

Однопараметричний алгоритм опишемо за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = A_0 x^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, A_0 x^{(n)}\right) + \lambda\left(\varphi, x^{(n)}\right) + \\ +\alpha\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - (\varphi, b). \end{gathered} \tag{2.23}$$

Позначимо, як і в §2, через $\mathcal{E}$ сукупність таких пар $\{x, y\}$ $(x \in E,\ y \in E'$, E' – множина дійсних чисел), для яких справджується рівність

$$(\varphi, x) + y = 0. \tag{2.24}$$

Норму $\|x, y\|$ таких пар означимо, наприклад, як евклідову норму пар $\{\|x\|, |y|\}$, де $\|x\|$ – норма елемента $x \in E$, $|y|$ – абсолютна величина числа y. Очевидно, що $\mathcal{E}$ – підпростір простору $\widetilde{E} = E \times E'$.

Вважатимемо, що функція $a(x)$ зі значеннями в E та дійсна функція $\alpha(x)$ є неперервними і задовольняють рівність

$$(\varphi, a(x)) + \alpha(x) = \lambda \quad (\{x, y\} \in E). \tag{2.25}$$

Ітераційний процес (2.22), (2.23) перетворюється в процес вигляду (2.8), коли A є нульовим оператором, тобто якщо в (2.8) взяти A_0 замість $\widetilde{A}$ та $a(x)$ означити за формулою

$$a(x) = \frac{A_0 x}{(\varphi, x)}. \tag{2.26}$$

Позначимо

$$H(x)w = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix} \binom{p}{q}, \tag{2.27}$$

де

$$h_{11}(x)p = a(x)(1 - \lambda + \alpha(x))^{-1}(\varphi, A_0 - \lambda I))p + A_0 p,$$
$$h_{12}(x)q = -a(x)(1 - \lambda + \alpha(x))^{-1}(\lambda - \alpha(x))q,$$
$$h_{21}(x)p = -(1 - \lambda + \alpha(x))^{-1}[(\varphi, A_0 p) - \lambda(\varphi, p)],$$
$$h_{22}(x) = (1 - \lambda + \alpha(x))^{-1}\alpha(x)q,$$

де $w = \{p, q\}^T$, $\lambda \neq 1$, $\lambda - \alpha(x) \neq 1$ при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\{p, q\} \in \mathcal{E}$.

Теорема 2.2. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *справджується рівність* (2.25) *і для оператора* $H(x)$ *маємо співвідношення*

$$\|H(x)\| \leqslant Q < 1. \tag{2.28}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формул* (2.22), (2.23), *збігається за нормою в* $\widetilde{E}$ *до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи* (2.3), (2.21) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* Q, *причому* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$ *та* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *при* $n = 1, 2, \ldots$

Доведення. На підставі рівностей (2.21), (2.25) маємо

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, A_0 x^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* - (\varphi, A_0 x^*) -$$
$$-(\varphi, b) + \lambda(\varphi, x^*) = \lambda[(\varphi, x^*) + y^*].$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то отримуємо, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$. Для обґрунтування співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ скористаємося принципом математичної індукції, взявши до уваги, що $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. Припускаючи, що $\{x^{(k)}, y^{(k)}\} \in \mathcal{E}$, на підставі (2.22), (2.23) маємо

$$\left(\varphi, x^{(k+1)}\right) + y^{(k+1)} = \left(\varphi, A_0 x^{(k)}\right) + \left(\varphi, a\left(x^{(k)}\right)\right) y^{(k)} -$$
$$- \left(\varphi, a\left(x^{(k)}\right)\right) y^{(k+1)} + (\varphi, b) + \lambda y^{(k+1)} - \left(\varphi, A_0 x^{(k)}\right) +$$
$$+ \lambda \left(\varphi, x^{(k)}\right) + \alpha\left(x^{(k)}\right) y^{(k)} - \alpha\left(x^{(k)}\right) y^{(k+1)} + (\varphi, b).$$

Звідси, враховуючи (2.25), отримуємо

$$\left(\varphi, x^{(k+1)}\right) + y^{(k+1)} = \left[\left(\varphi, a\left(x^{(k)}\right)\right) + \alpha\left(x^{(k)}\right)\right] y^{(k)} +$$
$$+ \left[1 - \left(\varphi, a\left(x^{(k)}\right)\right) - \alpha\left(x^{(k)}\right)\right] y^{(k+1)} + \lambda\left(\varphi, x^{(k)}\right),$$

тобто

$$\left(\varphi, x^{(k+1)}\right) + y^{(k+1)} = \lambda\left[\left(\varphi, x^{(k)}\right) + y^{(k)}\right]. \tag{2.29}$$

Отже, $\{x^{(k+1)}, y^{(k+1)}\} \in \mathcal{E}$. На основі принципу індукції робимо висновок, що $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ для всіх $n = 0, 1, \ldots$ Співвідношення (2.28) дають підставу вважати завершеним доведення теореми. □

Наслідок 2.1. *Нехай оператор $H_0(x)p$ означено за формулою*

$$H_0(x)p = a(x)(1 - \lambda + \alpha(x))^{-1}[(\varphi, A_0 p) + \alpha(x)(\varphi, p)]. \tag{2.30}$$

і при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\{p, q\} \in \mathcal{E}$ маємо

$$\|H_0(x)\| \leqslant Q_1 < 1. \tag{2.31}$$

Тоді при $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ побудована за допомогою формул (2.22), (2.23), *збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи* (2.3), (2.21) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником Q_1, причому $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$ та $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ при $n = 1, 2, \ldots$*

Доведення. Оскільки для оператора $H(x)$, означеного за формулою (2.27), можна використати рівність

$$\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + \left(y^{(n)} - y^*\right) = 0$$

і отримати, що

$$x^{(n+1)} - x^* = H_0\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right),$$

то маємо підставу вважати наслідок доведеним. □

Розглянемо ітераційний алгоритм, побудований за допомогою формули

$$x^{(n+1)} = A_0 x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_j^T x^{(n+1)}}{\Phi_j^T x^{(n)}} A_j x^{(n)} + b.$$

В цьому випадку можна отримати

$$x^{(n+1)} - x^* = B_0\left(x^{(n)} - x^*\right),$$

де оператор B_0 означений за формулою (2.16). Як частковий випадок теореми 2.1, отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.2. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *виконується умова* (2.25) *і при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\{p, q\} \in \mathcal{E}$ *маємо*

$$\|B_0\| \leqslant Q_1 < 1.$$

Тоді справджуються всі твердження теореми 2.2.

§7. Деякі узагальнені багатопараметричні алгоритми

Будемо припускати, що в рівнянні

$$x = Ax + b \tag{2.32}$$

оператор A можна подати у вигляді

$$A = \sum_{j=1}^{N} A_j + A_0, \tag{2.33}$$

тобто розглядатимемо рівняння

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j x + A_0 x + b, \tag{2.34}$$

де $A_j : E \to E \quad (j = 0, 1, ..., N)$ є лінійними неперервними операторами, $b \in E$, E – банахів простір. Задамо лінійні неперервні функціонали $\varphi^{(i)} \in E^*$ $(i = 0, 1, ..., N)$. Тут E^* – спряжений з E простір. До рівняння (2.34) приєднаємо систему допоміжних рівняннь

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \left(\varphi^{(i)}, B_i x\right) - \left(\varphi^{(i)}, b\right) \quad (i = 0, 1, ..., N) \tag{2.35}$$

з допоміжними невідомими числами y_i і лінійними неперервними операторами $B_i : E \to E$. Припускаємо, що:

A) справджуються рівності

$$\left(\varphi^{(i)}, A_j x\right) = \lambda_{ij} \left(\varphi^{(j)}, x\right) \quad (i = \overline{1, N}; j = \overline{1, N}); \tag{2.36}$$

B) задані оператори B_i при $i = 0, 1, ..., N$ підпорядковані умові

$$\left(\varphi^{(i)}, A_0 x + B_i x\right) = \lambda_{i0} \left(\varphi^{(0)}, x\right) \quad (i = \overline{1, N}). \tag{2.37}$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = A x^{(n)} + \sum_{j=0}^{N} a_j^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} y_i^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \left(\varphi^{(i)}, B_i x^{(n)}\right) + \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right) - \\ - \left(\varphi^{(i)}, b\right) \quad (i = 0, 1, ..., N;\ n = 0, 1, ...), \end{aligned} \tag{2.39}$$

де елементи $a_j^{(n)} = a_j\left(x^{(n)}\right) \in E$ і дійсні числа $\alpha_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}\left(x^{(n)}\right)$ задовольняють умову:

C) при $x \in E$ справджуються рівності

$$\left(\varphi^{(i)}, a_j(x)\right) + \alpha_{ij}(x) = \lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}) \tag{2.40}$$

з дійсними числами λ_{ij} та неперервними $a_j(x)$, $\alpha_{ij}(x)$ при $x \in E$.

Множиною $\mathcal{E}_0$ назвемо сукупність елементів $x \in E$ та векторів $y = \{y_0, y_1, ..., y_N\}^T \in E'$, де E' – евклідів простір розмірності $N + 1$, для яких справджуються рівності

$$\left(\varphi^{(i)}, x\right) + y_i = 0 \quad (i = 0, 1, ..., N). \tag{2.41}$$

Очевидно, що $\mathcal{E}_0$ є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, в якому норму пар $\{x, y\}$ при $x \in E$, $y \in E'$ можна задати за допомогою формули

$$\|x, y\| = (\|x\|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$$

де $\|x\|$ – норма елемента $x \in E$, $|y|$ – евклідова норма $y \in E'$.

Лема 2.1. *Нехай виконуються умови A) та B) і невиродженою є матриця $I' - \Lambda$, де*

$$\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=0,1,\ldots,N}, \tag{2.42}$$

I' – одинична матриця в E'. Тоді для розв'язку $\{x^*, y^*\} \in \widetilde{E}$ системи (2.34), (2.35) *матимемо, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$.*

Доведення. З рівностей (2.34) – (2.37) при $x = x^*$, $y_i = y_i^*$ будемо мати

$$\Big(\varphi^{(i)}, x^*\Big) + \sum_{j=1}^{N} \Big(\varphi^{(i)}, A_j x^*\Big) + \Big(\varphi^{(i)}, A_0 x^*\Big) + \Big(\varphi^{(i)}, b\Big) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* + \Big(\varphi^{(i)}, B_i x^*\Big) - \Big(\varphi^{(i)}, b\Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \Big[\Big(\varphi^{(j)}, x^*\Big) + y_j^*\Big] + \Big[\Big(\varphi^{(i)}, A_0 x^* + B_i x^*\Big) + \lambda_{i0} y_0^*\Big] =$$
$$= \sum_{j=0}^{N} \lambda_{ij} \Big[\Big(\varphi^{(j)}, x^*\Big) + y_j^*\Big] \quad (i = 0, 1, \ldots, N).$$

Оскільки матриця $I' - \Lambda$ невироджена, то можна зробити висновок, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$. $\square$

Лема 2.2. *Нехай справджуються умови леми 2.1, а також умова C). Якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, то для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, побудованої за допомогою формул* (2.38), (2.39) *матимемо, що $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$ при $n = 0, 1, \ldots$*

Доведення. Рівності (2.38), (2.39) можна записати відповідно у вигляді

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + A_0 x^{(n)} + \sum_{j=0}^{N} a_j^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) +$$

$$+ a_0^{(n)} \left(y_0^{(n)} - y_0^{(n+1)} \right) + b,$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \lambda_{i0} y_0^{(n+1)} + \left(\varphi^{(i)}, B_i x^{(n)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + \alpha_{i0}^{(n)} \left(y_0^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) - \left(\varphi^{(i)}, b \right)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, N, \; n = 0, 1, \ldots).$$

З рівностей (2.36) – (2.40) випливає, що

$$\left(\varphi^{(i)}, x^{(n+1)} \right) + y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi^{(i)}, A_j x^{(n)} \right) + \left(\varphi^{(i)}, A_0 x^{(n)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi^{(i)}, a_j^{(n)} \right) \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + \left(\varphi^{(i)}, a_0^{(n)} \right) \left(y_0^{(n)} - y_0^{(n+1)} \right) +$$

$$+ \left(\varphi^{(i)}, b \right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \lambda_{i0} y_0^{(n+1)} + \left(\varphi^{(i)}, B_0 x^{(n)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + \alpha_{i0}^{(n)} \left(y_0^{(n)} - y_0^{(n+1)} \right) - \left(\varphi^{(i)}, b \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left(\varphi^{(i)}, x^{(n)} \right) + \left(\varphi^{(i)}, A_0 x^{(n)} + B_i x^{(n)} \right) +$$

$$+ \left[\left(\varphi^{(i)}, a_0^{(n)} \right) + \alpha_{i0}^{(n)} \right] y_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\varphi^{(i)}, a_j^{(n)} \right) + \alpha_{ij}^{(n)} \right] y_j^{(n)} +$$

$$+ \left[\lambda_{i0} - \left(\varphi^{(i)}, a_0^{(n)} \right) - \alpha_{i0}^{(n)} \right] y_0^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{N} \left[\lambda_{ij} - \left(\varphi^{(i)}, a_j^{(n)} \right) - \alpha_{ij}^{(n)} \right] y_j^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[\left(\varphi^{(j)}, x^{(n)} \right) + y_j^{(n)} \right] + \lambda_{i0} \left[\left(\varphi^{(0)}, x^{(n)} \right) + y_0^{(n)} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[\left(\varphi^{(j)}, x^{(n)} \right) + y_j^{(n)} \right] \quad (i = 0, 1, \ldots, N).$$

Тому можна вважати лему доведеною. □

З лем 2.1 та 2.2 як наслідок одержуємо таке твердження.

Лема 2.3. *Якщо виконуються умови A)-C), причому існує матриця* $(I' - \Lambda)^{-1}$ *і* $\{x^{(0)}, y(0)\} \in \mathcal{E}_0$, *а пара* $\{x^*, y^*\}$ *є розв'язком в* $\widetilde{E}$ *системи* (2.34), (2.35), *то справджуються рівності*

$$\left(\varphi^{(i)}, x^{(n)} - x^*\right) + y_i^{(n)} - y_i^* = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, N,\ n = 0, 1, \ldots). \tag{2.43}$$

Доведення. Достатньо зазначити, що рівності (2.43) отримуються з рівностей (2.41) при $\{x^{(0)}, y(0)\} \in \mathcal{E}_0$ та $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$ завдяки лемам 2.1 та 2.2. □

Позначимо

$$a^{(n)} = \{a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_N^{(n)}\},$$
$$[\varphi, Bx] = \{\left(\varphi^{(0)}, B_0 x\right), \left(\varphi^{(1)}, B_1 x\right), \ldots, \left(\varphi^{(N)}, B_N x\right)\}^T,$$
$$[\varphi, b] = \{\left(\varphi^{(0)}, b\right), \left(\varphi^{(1)}, b\right), \ldots, \left(\varphi^{(N)}, b\right)\}^T.$$

Запишемо формули (2.35), (2.38), (2.39) відповідно у вигляді

$$y = \Lambda y + [\varphi, Bx] - [\varphi, b], \tag{2.44}$$

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.45}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + \left[\varphi, Bx^{(n)}\right] + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - [\varphi, b], \tag{2.46}$$

де матрицю Λ означено за формулою (2.42). З рівностей (2.32), (2.44) – (2.46) отримаємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) - a^{(n)}\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* = \left(\Lambda - \alpha^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right) + \\ + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) + \left[\varphi, B\left(x^{(n)} - x^*\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Отже,

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) + \\ + \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left[\varphi, B\left(x^{(n)} - x^*\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Це разом з рівністю (2.47) приводить до рівності

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left[\varphi, B\left(x^{(n)} - x^*\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.50}$$

З рівностей (2.50) та (2.43) випливає, що

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left[\varphi, B\left(x^{(n)} - x^*\right)\right] - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda\right)\left[\varphi, x^{(n)} - x^*\right]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Позначимо через

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix},$$

де

$$h_{11}(x)w = Aw + a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}[\varphi, Bw],$$
$$h_{21}(x)w = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}[\varphi, Bw],$$
$$h_{12}(x)z = a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}(I' - \Lambda)z,$$
$$h_{22}(x)z = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}\alpha(x)z,$$

оператор, породжений правою частиною рівностей (2.49), (2.50) щодо пари $s = \{w, z\}$, де $w = x^{(n)} - x^*$, $z = y^{(n)} - y^*$.

Наведені міркування, що привели до рівностей (2.49), (2.50) підсумуємо у вигляді окремого твердження.

Теорема 2.3. *Нехай при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}_0$ *оператор* $H(x)s$ *є стискуючим і* $\|H(x)\| \leqslant q < 1$. *Тоді послідовність* $\{x^{(n)}\}$, *отримана за допомогою алгоритму* (2.45), (2.46), *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (2.32) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Як частковий випадок теореми 2.3 можна отримати таке твердження.

Теорема 2.4. *Нехай справджуються умови леми 2.3 і оператор* $H_0(x)w$, *означений за формулою*

$$H_0(x)w = Aw - a(x)\left(I' - \Lambda + \alpha(x)\right)^{-1}\left((I' - \Lambda)[\varphi, w] + [\varphi, Bw]\right), \tag{2.52}$$

при $\{x, y\} \in \mathcal{E}_0$, $w = x_1 - x_2$, $(x_1, x_2 \in E)$ *є стискуючим зі сталою* $q_0 \geqslant \|H_0(x)\|$, $q_0 < 1$. *Тоді послідовність* $\{x^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формул* (2.45), (2.46), *збігається до розв'язку* x^* *рівняння* (2.32) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_0.

Доведення. Запишемо умову (2.43) у вигляді

$$\Big[\varphi, x^{(n)} - x^*\Big] + \Big(y^{(n)} - y^*\Big)^T = \theta', \tag{2.53}$$

де θ' – нульовий вектор-стовпець в E'. Твердження теореми отримуємо завдяки рівностям (2.52), (2.53). $\square$

Агрегаційно-ітеративний алгоритм (2.38), (2.39) охоплює багатопараметричний метод ітеративного агрегування, якщо $a_j(x)$ означити за допомогою формули

$$a_j(x) = \frac{A_j x}{\big(\varphi^{(j)}, x\big)} \quad (j = 0, 1, \ldots, N, \quad x \in E). \tag{2.54}$$

В цьому випадку з формул (2.38), (2.39) можна отримати формулу

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\big(\varphi^{(j)}, x^{(n+1)}\big)}{\big(\varphi^{(j)}, x^{(n)}\big)} A_j x^{(n)} + b, \tag{2.55}$$

яка описує багатопараметричний метод ітеративного агрегування. Вибір агрегуючих функціоналів і матриць $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ та $\alpha(x) = \{\alpha_{ij}(x)\}$ підпорядковуємо вимозі про невиродження матриць $I' - \Lambda$, $I' - \Lambda + \alpha(x)$ при $\{x, y\} \in \mathcal{E}_0$.

Якщо $\alpha(x)$ є нульовою матрицею, то алгоритм (2.39), (2.40) перетворюється в один з проекційно-ітеративних методів, докладно досліджених в [19, 22]. Можна побудувати й інші багатопараметричні алгоритми, котрі потрактуємо як методи ітеративного агрегування. Задля прикладу розглянемо такий алгоритм

$$x^{(n+1)} = A_0 x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\big(\varphi^{(j)}, x^{(n+1)}\big)}{\big(\varphi^{(j)}, x^{(n)}\big)} A_j x^{(n)} + b. \tag{2.56}$$

Для дослідження його збіжності формулу (2.56) замінимо формулами

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + A_0 x^{(n)} + b, \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + \left[\varphi, B x^{(n)} \right] + \alpha^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) - \\ - \left[\varphi, A_0 x^{(n)} \right] - [\varphi, b], \end{aligned} \tag{2.58}$$

маючи на увазі, що $a_j^{(n)}$ при $j = \overline{1, N}$ означені за формулою (2.54). У використаних при конструюванні матриці $H(x)$ формулах (2.56) – (2.58) індекси i, j приймають значення $1, 2, \ldots, N$. Для алгоритму (2.57), (2.58) зберігається формальна структура матриці $H(x)$ і множини $\mathcal{E}_0$ з тією відмінністю для матриці $H(x)$, що для цього випадку будемо мати

$$\begin{gathered} h_{11}(x) w = A w - a(x) (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} [\varphi, (B - A_0) w], \\ h_{12}(x) z = a(x) (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} (I' - \Lambda) z, \\ h_{21}(x) w = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} [\varphi, (B - A_0) x], \\ h_{22}(x) z = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} \alpha(x) z. \end{gathered}$$

За цих обставин для алгоритму (2.57), (2.58) зберігається твердження теореми 2.4.

Приклад 2.1. *Розглянемо рівняння вигляду* (2.32), *в якому*

$$A = \begin{pmatrix} 2,1 & 1,0 & 2,1 & 2,1 & 6,0 \\ 6,2 & 3,1 & 6,0 & 1,1 & 3,0 \\ 4,1 & 2,0 & 4,2 & 3,1 & 9,1 \\ 3,0 & 6,1 & 3,1 & 1,0 & 1,1 \\ 2,1 & 4,1 & 2,0 & 5,2 & 5,2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -700 \\ -639 \\ -1092 \\ -364 \\ -779 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи в цьому випадку є вектор $x^* = \{10; 20; 40; 50; 80\}^T$. *Подамо цю систему у вигляді*

$$x = A_1 x + A_2 x + A_3 x + A_4 x + A_0 x + b,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,0 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо алгоритм (2.38), (2.39), *в якому* $a_j(x)$ *побудовані за формулами* (2.54). *Для обчислень доцільно скористатися із запису цього алгоритму у вигляді* (2.55). *Виберемо* $x^{(0)} = \{1; 1; 1; 1; 1\}^T$. *Перші дві ітерації дають такі числові значення*

$$x^{(1)} = \{12,55405; 22,04045; 37,7837; 53,660098; 80,3183\}^T,$$

$$x^{(2)} = \{10,08436; 20,73607; 39,7005; 50,34548; 80,47792\}^T.$$

Можна переконатися, що для цієї системи теорема 2.4 забезпечує збіжність ітерацій до розв'язку x^* *не повільніше від збіжності геометричної прогресії зі знаменником* $q = 0,5$. *Можна отримати апостеріорну і апріорну оцінки збіжності ітерацій, використовуючи сталу* $q = 0,5$.

Зазначимо, що матриці $A_i\,(i = \overline{1,4})$ *та* A_0 *можна розглядати як конструкції вигляду*

$$A_1 = \psi_1^T \widetilde{\varphi}_1, \quad A_2 = \psi_2^T \widetilde{\varphi}_2, \quad A_3 = \psi_3^T \widetilde{\varphi}_3, \quad A_4 = \psi_4^T \widetilde{\varphi}_4,$$

$$A_0 = A - A_1 - A_2 - A_3 - A_4,$$

де

$$\psi_1 = \{1,0; 3,0; 2,0; 0,0; 0,0\}, \quad \psi_2 = \{2,0; 1,0; 3,0; 0,0; 0,0\},$$

$$\psi_3 = \{0,0; 0,0; 0,0; 3,0; 2,0\}, \quad \psi_4 = \{0,0; 0,0; 0,0; 0,1; 0,5\},$$

$$\widetilde{\varphi}_1 = \{1,0; 1,0; 2,0; 0,0; 0,0\}, \quad \widetilde{\varphi}_2 = \{0,0; 0,0; 0,0; 1,0; 3,0\},$$

$$\widetilde{\varphi}_3 = \{1,0; 2,0; 1,0; 0,0; 0,0\}, \quad \widetilde{\varphi}_4 = \{0,0; 0,0; 0,0; 1,0; 1,0\}.$$

Приклад 2.2. *Розв'язком рівняння* (2.32)*, в якому*

$$A = \begin{pmatrix} 4,1 & 7,1 & 5,2 \\ 5,1 & 10,0 & 7,1 \\ 5,1 & 5,2 & 4,0 \end{pmatrix}, \quad b = \{-5,35; -4,27; -408\}^T,$$

є вектор $\{20; 30; 50\}^T$*. Використаємо алгоритм* (2.55) *при* $N = 2$*. За агрегуючі візьмемо вектори* $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ *та* $\varphi^{(0)} = \{1; 1; 1\}$*. Візьмемо також до уваги, що*

$$\|A_0\| < 0,5.$$

Задля зручності використаємо позначення

$$z_j^{(n)} = \left(\varphi^{(j)}, x^{(n)}\right), \quad \beta_j = \left(\varphi^{(j)}, b\right),$$

$$c_{ij}^{(n)} = \left(\varphi^{(i)}, a_j^{(n)}\right), \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

Запишемо формулу (2.55) *для цього прикладу у вигляді*

$$x^{(n+1)} = \frac{A_1 x^{(n)}}{z_1^{(n)}} z_1^{(n+1)} + \frac{A_2 x^{(n)}}{z_2^{(n)}} z_2^{(n+1)} + \frac{A_0 x^{(n)}}{z_0^{(n)}} z_0^{(n+1)} + b. \qquad (2.59)$$

Для алгоритму (2.59) *можна використати запис*

$$x^{(n+1)} = \psi_1^T z_1^{(n+1)} + \psi_2^T z_2^{(n+1)} + \frac{A_0 x^{(n)}}{z_0^{(n)}} z_0^{(n+1)} + b.$$

Агрегована система має вигляд

$$z_1^{(n+1)} = \lambda_{11} z_1^{(n+1)} + \lambda_{12} z_2^{(n+1)} + c_{10} z_3^{(n+1)} + \left(\varphi^{(1)}, b\right),$$

$$z_2^{(n+1)} = \lambda_{21} z_1^{(n+1)} + \lambda_{22} z_2^{(n+1)} + c_{20} z_3^{(n+1)} + \left(\varphi^{(2)}, b\right),$$

$$z_3^{(n+1)} = \lambda_{31} z_1^{(n+1)} + \lambda_{32} z_2^{(n+1)} + c_{30} z_3^{(n+1)} + \left(\varphi^{(3)}, b\right).$$

Тут

$$\lambda_{11} = \left(\varphi^{(1)}, \psi_1\right) = 13, \quad \lambda_{12} = \left(\varphi^{(1)}, \psi_2\right) = 8,$$

$$\lambda_{21} = \left(\varphi^{(2)}, \psi_1\right) = 8, \quad \lambda_{22} = \left(\varphi^{(2)}, \psi_2\right) = 5,$$

$$\lambda_{31} = \left(\varphi^{(3)}, \psi_1\right) = 6, \quad \lambda_{32} = (\varphi^{(3)}, \psi_2) = 4.$$

Нехай $x^{(0)} = \{10; 10; 10\}^T$. *Очевидно, що*

$$z_1^{(0)} = 60, \quad z_2^{(0)} = 40, \quad z_3^{(0)} = 30.$$

Для перших двох ітерацій матимемо

$$x^{(1)} = \{18,85347; 31,4224; 49,41377\}^T,$$

$$x^{(2)} = \{19,86552; 29,7063; 50,12726\}^T.$$

Приклад 2.3. *Система рівнянь*

$$\begin{aligned} x_1 &= 15,08x_1 + 34,12x_2 - 209,04, \\ x_2 &= 12,02x_1 + 29,03x_2 - 176,26 \end{aligned} \tag{2.60}$$

має точний розв'язок $x^* = \{10; 2\}$. *Матрицю* A *коефіцієнтів цієї системи подамо у вигляді*

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_0, \tag{2.61}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,12 \\ 0,02 & 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Для спектральних радіусів цих матриць маємо

$$\rho(A_1)+\rho(A_2)+\rho(A_3)+\rho(A_0) = 10+22+12+0,11 = 44,11 \neq \rho(A) = 27,625907.$$

Скористаємося з алгоритму (2.56) *з операторами* A_j, *означеними за формулами* (2.62). *Можна переконатися, що в цьому випадку збіжність алгоритму забезпечена зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником* $q \leq 0,5$. *Для практичних розрахунків достатньо використати позначення* $z_1^{(n)} = (\varphi_1, x^{(n)})$, $z_2^{(n)} = (\varphi_2, x^{(n)})$, $z_3^{(n)} = (\varphi_3, x^{(n)})$. *Оскільки маємо* $\varphi_1 = \{3;4\}$, $\varphi_2 = \{1;3\}$, $\varphi_3 = \{2;5\}$, *то, вибравши* $x^{(0)} = \{1;1\}$, *можна знайти* $z_1^{(0)} = 7$, $z_2^{(0)} = 4$, $z_3^{(0)} = 7$.

Відповідно до формул (2.61), (2.62) *систему* (2.60) *подамо у вигляді*

$$x_1 = (12x_1+6x_2)+(7x_1+21x_2)+(2x_1+5x_2)+(0,08x_1+0,12x_2)-209,04,$$

$$x_2 = (3x_1+4x_2)+(5x_1+15x_2)+(4x_1+10x_2)+(0,02x_1+0,03x_2)-176,26.$$

Отже, в узгодженні з (2.56) *можна записати*

$$x_1^{(n)} = 2z_1^{(n)}+7z_2^{(n)}+z_3^{(n)}+0,08x_1^{(n)}+0,12x_2^{(n)}-209,04,$$

$$x_2^{(n)} = z_1^{(n)}+5z_2^{(n)}+2z_3^{(n)}+0,02x_1^{(n)}+0,03x_2^{(n)}-176,26.$$

$$z^{(1)} = \{35,168;16,539976;30,24000\}, \qquad x^{(1)} = \{7,51583;2,58788\},$$

$$z^{(2)} = \{40,037144;15,6335;29,774133\}, \qquad x^{(2)} = \{11,15472;1,64321\},$$

$$z^{(3)} = \{38,09169;15,9784;29,986916\}, \qquad x^{(3)} = \{10,06864;1,96991\},$$

$$z^{(4)} = \{38,0281;15,9993;29,999634\}, \qquad x^{(4)} = \{10,00222;1,99904\},$$

$$z^{(5)} = \{38,002;15,9995;29,999995\}, \qquad x^{(5)} = \{10,00006;1,99995\}.$$

Отже, покомпонентна похибка п'ятої ітерації не перевищує 10^{-4}.

Приклад 2.4. *Для системи*

$$\begin{aligned} x_1 &= 14,02x_1+12,08x_2-622,8, \\ x_2 &= 21,03x_1+9,12x_2-784,2 \end{aligned} \tag{2.63}$$

з розв'язком $x^* = \{20; 30\}$ *матрицю коефіцієнтів*

$$A = \begin{pmatrix} 14,02 & 12,08 \\ 21,03 & 9,12 \end{pmatrix}$$

подамо як суму $A = A_1 + A_2 + A_3$ *матриць*

$$A_1 = \psi_1^T \varphi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 20 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \psi_2^T \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \psi_3^T \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,08 \\ 0,03 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

Систему (2.63) *запишемо у вигляді*

$$x_1 = (12x_1 + 6x_2) + (2x_1 + 6x_2) + (0,02x_1 + 0,08x_2) - 622,8,$$

$$x_2 = (20x_1 + 10x_2) + (x_1 + 3x_2) + (0,03x_1 + 0,12x_2) - 784,2.$$

При $x^{(0)} = \{10; 20\}$ *матимемо* $z_1^{(0)} = (\varphi_1, x^{(0)}) = 80$, $z_2^{(0)} = (\varphi_2, x^{(0)}) = 70$, $z_3^{(0)} = (\varphi_3, x^{(0)}) = 9$. *Знаходимо*

$$x_1^{(1)} = \frac{12 \cdot 10 + 6 \cdot 20}{80} z_1^{(1)} + \frac{2 \cdot 10 + 6 \cdot 20}{70} z_2^{(1)} + \frac{0,02 \cdot 10 + 0,08 \cdot 20}{9} z_3^{(1)} - 622,8,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{20 \cdot 10 + 6 \cdot 20}{80} z_1^{(1)} + \frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 20}{70} z_2^{(1)} + \frac{0,03 \cdot 10 + 0,12 \cdot 20}{9} z_3^{(1)} - 784,2.$$

В підсумку одержимо $x^{(1)} = \{20; 30\} = x^*$.

Можна переконатися, що в цьому випадку $\rho(A_1) + \rho(A_2) + \rho(A_3) = 22 + 5 + 0,14 = 27,14 \neq \rho(A) = \lambda_1 = 27,62507$. *При цьому для матриці* A *маємо* $|\lambda_2| = |-4,62907| > 1$. *Тому жодний однопараметричний алгоритм не може бути збіжним до розв'язку* x^*.

Зазначимо, що в прикладах 2.3 та 2.4 розмірність простору E' *більша за розмірність простору* E.

§ 8. Декомпозиція операторних рівнянь на основі принципу ітеративного агрегування

Описаний у попередніх підрозділах спосіб дослідження методів ітеративного агрегування та їх агрегаційно-ітеративних узагальнень поширимо на загальніші класи операторних рівнянь.

Розглядатимемо рівняння

$$x = Ax + b \tag{2.64}$$

з лінійним неперервним оператором $A : E \to E$ при $b \in E$, де E – банахів простір. Задамо лінійні неперервні оператори $\widetilde{A} : E \to E$, $\Lambda : E' \to E'$, $S : E \to E'$, де E' – банахів простір, який взагалі кажучи, не тотожний з E. Розглянемо систему рівнянь, складену з рівняння (2.64) та рівняння

$$y = \Lambda y + S\widetilde{A}x - Sb. \tag{2.65}$$

При цьому постулюємо рівність

$$S(A + \widetilde{A}) = \Lambda S. \tag{2.66}$$

Означимо множину $\mathcal{E}$ як сукупність таких пар $\{x; y\}$, що $x \in E$, $y \in E'$, для яких

$$Sx + y = \theta', \tag{2.67}$$

де θ' – нульовий елемент в E'. Множину $\mathcal{E}$ можна вважати підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, запровадивши норму пар $\{x; y\}$ $(x \in E, y \in E')$ за допомогою формули

$$\|x, y\| = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_{E'}^2},$$

де $\|x\|_E$ – норма елемента $x \in E$, $\|y\|_{E'}$ – норма елемента $y \in E'$.

Для побудови ітераційного процесу задамо неперервні щодо $x \in E$, лінійні неперервні щодо $y \in E'$ оператори $a(x)y$, $\alpha(x)y$, які при кожному $x \in E$, діють відповідно з E' в E та з E' в E' як оператори щодо $y \in E'$. Будемо вважати, що

$$Sa(x) + \alpha(x) = \Lambda \quad (x \in E). \tag{2.68}$$

Позначимо

$$a^{(n)} = a\left(x^{(n)}\right), \quad \alpha^{(n)} = \alpha\left(x^{(n)}\right).$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.69}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + S\widetilde{A}x^{(n)} + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - Sb. \tag{2.70}$$

Лема 2.4. *Нехай:*

1) справджується рівність (2.67)*;*

2) існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$*.*

Якщо $\{x^*, y^*\}$ *є розв'язком системи* (2.64), (2.65)*, то* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$*.*

Доведення. Можна переконатися, що

$$\begin{gathered} Sx^* + y^* = SAx^* + Sb + \Lambda y^* + S\widetilde{A}x^* - Sb = \\ = \Lambda y^* + S\left(A + \widetilde{A}\right)x^* = \Lambda(Sx^* + y^*). \end{gathered}$$

Звідси та з існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ випливає, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$. $\square$

Лема 2.5. *Нехай:*

1) справджуються рівності (2.67), (2.68)*;*

2) при $x \in E$ *існує обернений оператор* $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$*;*

3) $\{x^0, y^0\} \in \mathcal{E}$*.*

Тоді для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$*, побудованої за формулами* (2.69), (2.70)*, матимемо, що* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *при* $n = 0, 1, \ldots$

Доведення. Враховуючи, що послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ існує та справджуються рівності (2.67), (2.68), знаходимо

$$\begin{gathered} Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SAx^{(n)} + Sa^{(n)}y^{(n)} - Sa^{(n)}y^{(n+1)} + \\ + Sb + \Lambda y^{(n+1)} + S\tilde{A}x^{(n)} + \alpha^{(n)}y^{(n)} - \alpha^{(n)}y^{(n+1)} - Sb = \\ = S\left(A + \widetilde{A}\right)x^{(n)} + \left(\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha^{(n)}\right)y^{(n+1)} + \\ + (Sa^{(n)} + \alpha^{(n)})y^{(n)} = \Lambda\left(Sx^{(n)} + y^{(n)}\right). \end{gathered}$$

Використовуючи принцип індукції, звідси знаходимо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = \theta',$$

що і потрібно було довести. $\square$

Лема 2.6. *Якщо справджуються умови лем 2.4 та 2.5, то при* $n = 0, 1, \ldots$ *матимемо рівності*

$$S\left(x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^* = \theta'. \tag{2.71}$$

Доведення. Лема є наслідком лем 2.4 та 2.5. $\square$

Задамо лінійні неперервні щодо $x \in E$ оператори $\psi : E' \to E$, $\psi_0 : E' \to E'$. З (2.71) отримуємо

$$\psi S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \psi\left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta, \tag{2.72}$$

$$\psi_0 S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \psi_0\left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta'. \tag{2.73}$$

де θ – нульовий елемент в E. Означимо неперервний щодо $x \in E$, лінійний неперервний щодо $w \in \widetilde{E}$ оператор

$$H(x)w = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

де

$$\begin{gathered} h_{11}(x)z = Az - a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} S\widetilde{A}z - \psi Sz, \\ h_{12}(x)t = a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}(I' - \Lambda)t - \psi t, \\ h_{21}(x)z = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} S\widetilde{A}z - \psi_0 Sz, \\ h_{22}(x)t = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}\alpha(x)t - \psi_0 t. \end{gathered}$$

Теорема 2.5. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *існує оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$ *та при* $x \in E$ *існує оператор* $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$. *Нехай, крім того, справджується рівність* (2.68) *при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ *та рівність* (2.67). *Якщо при* $\{x, y\} \in E$ *маємо*

$$\|H(x)\| \leqslant q < 1, \tag{2.75}$$

то послідовність $\{x^{(n)}\}$, *отримана за допомогою формул* (2.69), (2.70), *збігається до розв'язку* x^* *рівняння* (2.64) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q, *а послідовність* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\} \in \widetilde{E}$ *системи* (2.64), (2.65) *і при* $n = 0, 1, \dots$ *маємо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. З (2.65) та (2.70) випливає, що

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ + \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \alpha^{(n)} \left(y^{(n)} - y^*\right), \end{gathered} \tag{2.76}$$

а з (2.64) та (2.69) отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) - a^{(n)}\left(y^{(n+1)} - y^*\right).$$

Разом з (2.76) це дає підставу для співвідношеннь

$$\begin{gathered} x^{(n)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) = \\ = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ +a^{(n)}\left[I' - \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \alpha^{(n)}\right]\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{gathered}$$

Звідси можна отримати

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ +a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{gathered} \tag{2.77}$$

Систему рівностей (2.76), (2.77) подамо як рівність

$$w^{(n+1)} = H\left(x^{(n)}\right) w^{(n)}, \tag{2.78}$$

де $w^{(n)} = \{x^{(n)} - x^*, y^{(n)} - y^*\}^T$. Тому можна скористатися умовою (2.75) і вважати теорему доведеною. $\square$

Вибираючи різними способами ψ та ψ_0, які можуть залежати від n, з теореми 2.5 можна отримати часткові твердження про збіжність алгоритму (2.69), (2.70). Якщо, наприклад,

$$\psi = a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}(I' - \Lambda), \tag{2.79}$$

то будемо мати

$$h_{11}(x)z = Az - a(x)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1} S\widetilde{A}z - \\ -a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}(I' - \Lambda)Sz. \tag{2.80}$$

В цьому випадку з теореми 2.5 отримується таке твердження.

Теорема 2.6. *Нехай для оператора $h_{11}(x)$, означеного за формулою* (2.80) *при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ справджується умова* (2.66) *та умова*

$$\|h_{11}(x)\| \leqslant q_0 < 1, \tag{2.81}$$

а також існує оператор $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$ при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ та існує оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$. Якщо $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, то послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, отримана за допомогою формул (2.69), (2.70), *збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\} \in \widetilde{E}$ системи* (2.64), (2.65) *і при $n = 0, 1, \ldots$ $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$, а послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається до розв'язку x^* рівняння* (2.64) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q_0.*

Доведення. При виборі ψ за формулою (2.79) з рівності (2.77) випливає можливість замість (2.78) використати рівність

$$x^{(n+1)} - x^* = h_{11}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)$$

і скористатися з теореми 2.5. □

Розглянемо різновид агрегаційно-ітеративного методу, коли система (2.64), (2.65) має вигляд

$$x = A_1 x + A_2 x + b, \tag{2.82}$$

$$y = \Lambda y + S\widetilde{A_1}x - SA_2 x - Sb, \tag{2.83}$$

тобто вважаємо, що

$$A = A_1 + A_2 \quad (A_1, A_2, \widetilde{A} : E \to E). \tag{2.84}$$

Припустимо, що справджуються умови (2.67), (2.68). Множину $\mathcal{E}$ означуємо за допомогою рівності (2.66). В цій ситуації зберігається твердження леми 2.5. Ітераційний процес будуємо за формулами (2.69) та

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + S\widetilde{A_1}x^{(n)} - S\widetilde{A_2}x^{(n)} + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right). \tag{2.85}$$

Для алгоритму (2.69), (2.85) зберігається твердження леми 2.5. Для цього алгоритму замість рівностей (2.76), (2.77) будемо відповідно мати

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A_1}\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ - \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} SA_2\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ + \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right), \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} S(\widetilde{A_1} - A_2)\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ +a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}(I' - \Lambda)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{aligned} \tag{2.87}$$

Оператор

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{h}_{11}(x) & h_{12}(x) \\ \widetilde{h}_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix}$$

відрізняється від оператора $H(x)$, означеного за допомогою формули (2.74) тим, що $h_{11}(x)$, $h_{21}(x)$ заміняємо відповідно на

$$\widetilde{h}_{11}(x) = A - a(x)\left(I' - \Lambda + \alpha(x)\right)^{-1} S(\widetilde{A_1} - A_2) - \psi S$$

та

$$\widetilde{h}_{21}(x) = \left(I' - \Lambda + \alpha(x)\right)^{-1} S(\widetilde{A_1} - A_2) - \psi_0 S.$$

Теорема 2.7. *Нехай:*

1) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

2) існують оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ *та при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ *оператор* $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$*;*

3) при $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ *справджуються рівності* (2.68) *та* (2.82) – (2.84). *Якщо при* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ *маємо*

$$\|H_1(x)\| \leqslant q_1 < 1, \tag{2.88}$$

то для алгоритму (2.69), (2.85) *зберігаються всі твердження, встановлені теоремою 2.5 при заміні q на q_1.*

Доведення. Обґрунтування незначними подробицями відрізняється від доведення теореми 2.5. □

Приклад 2.5. *Нехай в рівнянні* (2.64) *маємо*

$$A = \begin{pmatrix} 2,1 & 1,0 & 2,1 & 2,1 & 6,0 \\ 6,2 & 3,1 & 6,0 & 1,1 & 3,0 \\ 4,1 & 2,0 & 4,2 & 3,1 & 9,1 \\ 3,0 & 6,1 & 3,1 & 1,0 & 1,1 \\ 2,1 & 4,1 & 2,0 & 5,2 & 5,2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -700 \\ -639 \\ -1092 \\ -364 \\ -779 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (2.64) *в цьому випадку має розв'язок* $x^* = \{10; 20; 40; 50; 80\}$. *Запишемо наше рівняння у вигляді*

$$x = A_1 x + A_2 x + A_3 x + A_4 x + A_0 x + b,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,0 & 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо алгоритм (2.69), (2.70), *в якому*

$$a_j(x) = \frac{A_j x}{(\varphi^{(j)}, x)}, \quad x \in E, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{2.89}$$

Для обчислень доцільно цей алгоритм подати у вигляді

$$x^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\varphi^{(j)}, x^{(n+1)})}{(\varphi^{(j)}, x^{(n)})} A_j x + b.$$

Виберемо $x^{(0)} = \{1; 1; 1; 1; 1\}^T$. *Перші дві ітерації дають такі числові значення:*

$$x^{(1)} = \{12,55405; 22,04045; 37,7837; 53,660098; 80,3183\}^T,$$

$$x^{(2)} = \{10,08436; 20,73607; 39,7005; 50,34548; 80,47792\}^T.$$

Можна переконатися, що ітерації $x^{(n)}$ *збігаються до розв'язку* x^* *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* $q = 0,5$. *Зазначимо, що матриці* A_i $(i = \overline{1,4})$ *та* A_0 *побудовані за допомогою таких конструкцій*

$$A_1 = \psi_1^T \widetilde{\varphi}^{(1)},\ A_2 = \psi_2^T \widetilde{\varphi}^{(2)},\ A_3 = \psi_3^T \widetilde{\varphi}^{(3)},\ A_4 = \psi_4^T \widetilde{\varphi}^{(4)},$$

$$A_0 = A - A_1 - A_2 - A_3 - A_4,$$

де

$$\psi_1 = \{1,0; 3,0; 2,0; 0,0; 0,0\}, \quad \psi_2 = \{2,0; 1,0; 3,0; 0,0; 0,0\},$$

$$\psi_3 = \{0,0; 0,0; 0,0; 3,0; 2,0\}, \quad \psi_4 = \{0,0; 0,0; 0,0; 0,1; 0,5\},$$

$$\widetilde{\varphi}^{(1)} = \{1,0; 1,0; 2,0; 0,0; 0,0\}, \quad \widetilde{\varphi}^{(2)} = \{0,0; 0,0; 0,0; 1,0; 3,0\},$$

$$\widetilde{\varphi}^{(3)} = \{1,0; 2,0; 1,0; 0,0; 0,0\}, \quad \widetilde{\varphi}^{(4)} = \{0,0; 0,0; 0,0; 1,0; 1,0\}.$$

Приклад 2.6. *Нехай в рівнянні* (2.64) *маємо*

$$A = \begin{pmatrix} 4,1 & 7,1 & 5,2 \\ 5,1 & 10,0 & 7,1 \\ 5,1 & 5,2 & 4,0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -535 \\ -427 \\ -408 \end{pmatrix}.$$

Його розв'язок $x^* = \{20; 30; 50\}^T$. *Нехай* $\psi_1 = \{2; 3; 1\}$, $\psi_2 = \{1; 1; 2\}$, $\varphi^{(1)} = \{1; 3; 2\}$, $\varphi^{(2)} = \{2; 1; 1\}$. *Подамо матрицю* A *у вигляді* $A = A_1 + A_2 + A_0$, *де*

$$A_1 = \psi_1^T \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \psi_2^T \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо ітераційний процес (2.69), (2.70), (2.89) для $N = 2$. *За агрегуючі візьмемо вектори* $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ *та* $\varphi^{(0)}$. *Візьмемо також до уваги, що* $\|A_0\| < 0,5$. *Задля зручності позначимо* $z_j^{(n)} = (\varphi^{(j)}, x^{(n)})$, $\beta_j = (\varphi^{(j)}, b)$, $c_{ij}^{(n)} = (\varphi^{(i)}, a_j^{(n)})$ $(i,j = 1,2)$. *Ітераційний алгоритм запишемо у вигляді*

$$x^{(n+1)} = \frac{A_1 x^{(n)}}{z_1^{(n)}} z_1^{(n+1)} + \frac{A_2 x^{(n)}}{z_2^{(n)}} z_2^{(n+1)} + \frac{A_0 x^{(n)}}{z_0^{(n)}} z_0^{(n+1)} + b,$$

що можна подати також у вигляді

$$x^{(n+1)} = \psi_1^T z_1^{(n+1)} + \psi_2^T z_2^{(n+1)} + \frac{A_0 x^{(n)}}{z_0^{(n)}} z_0^{(n+1)} + b \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отже, для агрегованої системи маємо

$$z_1^{(n+1)} = \lambda_{11} z_1^{(n+1)} + \lambda 12 z_2^{(n+1)} + c_{10} z_3^{(n+1)} + \beta_1,$$

$$z_2^{(n+1)} = \lambda_{21} z_1^{(n+1)} + \lambda 22 z_2^{(n+1)} + c_{20} z_3^{(n+1)} + \beta_2,$$

$$z_3^{(n+1)} = \lambda_{31} z_1^{(n+1)} + \lambda 32 z_2^{(n+1)} + c_{30} z_3^{(n+1)} + \beta_3,$$

де

$$\lambda_{11} = (\varphi^{(1)}, \psi_1) = 13, \quad \lambda_{12} = (\varphi^{(1)}, \psi_2) = 8, \quad \lambda_{21} = (\varphi^{(2)}, \psi_1) = 8,$$

$$\lambda_{22} = (\varphi^{(2)}, \psi_2) = 5, \quad \lambda_{31} = (\varphi^{(3)}, \psi_1) =, \quad \lambda_{32} = (\varphi^{(3)}, \psi_2) = 4.$$

Нехай $x^{(0)} = \{10; 10; 10\}$. *Тоді* $z_1^{(0)} = 60$, $z_2^{(0)} = 40$, $z_3^{(0)} = 30$. *Для перших двох ітерацій матимемо*

$$x^{(1)} = \{18,58347; 31,4224; 49,41377\}^T, \; x^{(2)} = \{19,86552; 29,70630; 50,12726\}^T.$$

Можна переконатися, що для q *придатне значення* $q = 0,5$.

§ 9. Спрощені способи агрегаційно-ітеративної декомпозиції операторних рівнянь

Розглядатимемо рівняння

$$x = Ax + b \tag{2.90}$$

за припущенням, що A є лінійним неперервним оператором, який діє з E в E, де E – банахів простір. Нехай $b \in E$ і задані лінійні неперервні оператори $S : E \to E'$ та $\Lambda : E \to E'$, де E' – банахів простір взагалі кажучи не тотожний з E. До рівняння (2.90) приєднаємо додаткове рівняння

$$y = \Lambda y - SAx + \Lambda Sx - Sb \tag{2.91}$$

з допоміжним невідомим y. В просторі $\widetilde{E} = E \times E'$, який як і раніше можна вважати банаховим, виокремимо підпростір $\mathcal{E}$ пар $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$, які задовольняють співвідношення (2.66), тобто

$$Sx + y = \theta', \tag{2.92}$$

де θ' – нульовий елемент в E'. Для побудови ітераційного процесу використаємо неперервні щодо $x \in E$ лінійні неперервні щодо $y \in E'$ оператори $a(x)y$, $\alpha(x)y$ зі значеннями в E та E' відповідно.

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{2.93}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SAx^{(n)} + \Lambda Sx^{(n)} + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - Sb, \tag{2.94}$$

де $a^{(n)} = a\left(x^{(n)}\right)$, $\alpha^{(n)} = \alpha\left(x^{(n)}\right)$. Як і раніше, будемо вважати, що справджується умова (2.68), тобто

$$Sa(x) + \alpha(x) = \Lambda \quad (x \in E). \tag{2.95}$$

Сформулюємо аналоги лем 2.4 та 2.5.

Лема 2.7. *Якщо рівняння* (2.90) *має розв'язок* $x^* \in E$ *та існує обернений оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$, *де* I' – *одиничний оператор в* E', *то існує* $y^* \in E'$ *таке, що* $\{x^*, y^*\}$ *є розв'язком системи* (2.90), (2.91) *і справджується співвідношення* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Схема доведення є такою самою як і доведення леми 2.4, оскільки з (2.90), (2.91) при $x = x^*$, $y = y^*$ випливає, що

$$Sx^* + y^* = SAx^* + Sb + \Lambda y^* - SAx^* + \Lambda SAx^* - Sb = \Lambda(Sx^* + y^*).$$

Звідси, зважаючи на існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ і на очевидність існування y^* при існуванні x^*, отримуємо потрібне твердження. □

Лема 2.8. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ *і справджується співвідношення* (2.95). *Тоді з існування послідовності* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *випливає, що при* $n = 0, 1, \ldots$ *матимемо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Співвідношення

$$\begin{gathered} Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SAx^{(n)} + Sa^{(n)}y^{(n)} - Sa^{(n)}y^{(n+1)} - SAx^{(n)} + \Lambda Sx^{(n)} + \\ + \alpha^{(n)}y^{(n)} - \alpha^{(n)}y^{(n+1)} - Sb = \left(\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha^{(n)}\right) y^{(n+1)} + \\ + \Lambda Sx^{(n)} + \left(Sa^{(n)} + \alpha^{(n)}\right) y^{(n)} = \Lambda\left(Sx^{(n)} + y^{(n)}\right). \end{gathered}$$

дають підставу вважати лему доведеною завдяки принципу індукції. □

З припущення, що для $x \in E$ існує обернений оператор $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$, з рівностей (2.90), (2.91) та (2.93) – (2.95) випливають співвідношення

$$y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \left(\Lambda S - SA - \alpha^{(n)}S\right) \left(x^{(n)} - x^*\right), \quad (2.96)$$

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - a^{(n)}S\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ - a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(\Lambda S - SA - \alpha^{(n)}S\right)\left(x^{(n)} - x^*\right). \end{gathered} \quad (2.97)$$

Запишемо (2.97) у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = H\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right), \quad (2.98)$$

означивши оператор $H(x)z$ за формулою

$$\begin{gathered}H(x)z = Az - a(x)Sz- \\ -a(x)\left(I' - \Lambda + \alpha(x)\right)^{-1}\left(\Lambda S - SA - \alpha^{(n)}S\right)z.\end{gathered} \tag{2.99}$$

Теорема 2.8. *Нехай:*

1) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

2)існує обернений оператор $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$*;*

3) для оператора $H(x)z$*, означеного за формулою* (2.99) *маємо*

$$\|H(x)\| \leqslant q < 1. \tag{2.100}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}\}$*, побудована за допомогою формул* (2.93), (2.94)*, збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (2.90) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q*.*

Доведення. Обгрунтування теореми використовує таку саму схему, яку застосовано для доведення теореми 2.5 і відрізняється від нього тільки в подробицях, які пропускаємо. □

В частковому випадку, коли справджуються співвідношення

$$SA = \Lambda S \tag{2.101}$$

та

$$Sa(x) = \Lambda S, \tag{2.102}$$

ітераційний процес (2.93), (2.94) описують формули

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.103}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - Sb, \tag{2.104}$$

за припущення, що a є фіксованим незалежним від номера ітерації елементом в E.

Оскільки з (2.104) маємо

$$y^{(n+1)} = -(I' - \Lambda)^{-1}Sb \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2.105}$$

то ітераційний процес (2.103), (2.104) є звичайним методом послідовних наближень, для якого початкове наближення вибране за формулою

$$Sx^{(0)} = (I' - \Lambda)^{-1} Sb. \tag{2.106}$$

Теорема 2.9. *Нехай існує обернений оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$, *справджуються умови* (2.101), (2.102), *причому* $a^{(n)} = a$ *не залежить від* n. *Тоді для збіжності ітераційного процесу*

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b \tag{2.107}$$

з початковим наближенням $x^{(0)} \in E$, *яке задовольняє умову* (2.105), *достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус* $\rho(A - aS)$ *оператора* $A - aS$.

Доведення. Оскільки справджуються рівності (2.105) при $n = 0, 1, \ldots,$ то співвідношення (2.90), (2.107) та леми 2.7 і 2.8 дають підставу для того, щоб (2.97) подати у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = (A - aS)\left(x^{(n)} - x^*\right) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2.108}$$

що дає можливість застосувати принцип стиску і завершити доведення теореми. □

Збіжність ітерацій, отриманих за допомогою алгоритму (2.103), (2.104) істотньо може залежати, зокрема, від вибору елемента $a \in E$. Нехай, наприклад, оператор A має вигляд

$$A = \psi_1 \varphi_1^T + A_1, \quad A = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,N}}. \tag{2.109}$$

В однопараметричному випадку оператор S означимо за формулою

$$Sx = \varphi_1^T x,$$

де $\varphi_1^T x = (\varphi_1, x)$ – значення лінійного функціоналу φ_1 на елементах $x \in E$. Вибравши $a = \psi_1$, формулу (2.108) можна записати у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = A_1 \left(x^{(n)} - x^*\right). \tag{2.110}$$

При цьому в ролі оператора Λ виступає число $\Lambda = \lambda_1 = \varphi_1^T \psi_1$. Якщо λ_i є власними числами матриці A, а φ_i^T і ψ_i є відповідними йому власними векторами, то можна формально усунути вплив на збіжність ітерацій кількох власних чисел матриці A. Зазначимо при цьому, що у випадку, коли $|\lambda_1| > 1$ і спектральний радіус $\rho(A_1)$ матриці A_1 менший від одиниці, то при формальній збіжності ітерацій проявляється обчислювальна нестійкість процесу через існування похибок заокруглень.

Розглянемо докладніше агрегаційно-ітеративний алгоритм, який грунтується на припущенні, що рівняння (2.90) подане у вигляді

$$x = A_1 x + A_0 x + b, \tag{2.111}$$

де $b \in E$, $A_1, A_0 : E \to E$ є лінійними неперервними операторами, E – банахів простір. Вважаємо заданими лінійні неперервні оператори $\Lambda : E' \to E'$, $S : E \to E'$, де E' – банахів простір, взагалі кажучи, не тотожний з E. Разом з рівнянням (2.111) розглянемо рівняння

$$y = \Lambda y - S A_0 x - Sb. \tag{2.112}$$

При побудові ітераційного процесу будемо використовувати множину $\mathcal{E}$ таких пар $x \in E$, $y \in E'$, які задовольняють умову

$$Sx + y = \theta', \tag{2.113}$$

де θ' – нульовий елемент в E'. Нехай заданий неперервний щодо $x \in E$ лінійний неперервний щодо $z \in E'$ оператор $a(x)z$ зі значеннями в E, для якого справджується умова

$$Sa(x) = \Lambda \quad (x \in E). \tag{2.114}$$

Припускаємо також, що оператори S, A_1, Λ задовольняють рівність

$$SA_1 = \Lambda S. \tag{2.115}$$

Агрегаційно-ітеративний алгоритм опишемо за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_0 x^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.116}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SA_0 x^{(n)} - Sb. \tag{2.117}$$

Твердження леми 2.7 зберігається, якщо існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$. Залишається незмінною схема її доведення, яке наведемо повністю, зважаючи на подробиці міркувань. Отже,

$$Sx^* + y^* = SA_1 x^* + SA_0 x^* + Sb + \Lambda y^* - SA_0 x^* - Sb =$$
$$= SA_1 x^* + \Lambda y^* = \Lambda S x^* + \Lambda y^* = \Lambda(Sx^* + y^*).$$

Звідси з існування оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ випливає, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$. Зберігається також твердження леми 2.8. Наведемо формулювання її аналогу, оскільки основні припущення в її умовах відрізняються від вимог леми 2.8.

Лема 2.9. *Нехай:*

1) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

2) справджуються умови (2.114), (2.115).

Тоді для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$*, побудованої за допомогою формул* (2.116), (2.117), *маємо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *при* $n = 0, 1, \ldots$

Доведення. Твердження леми випливає із співвідношень

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SA_1 x^{(n)} + SA_0 x^{(n)} + Sb + Sa\left(x^{(n)}\right) y^{(n)} -$$
$$-Sa\left(x^{(n)}\right) y^{(n+1)} + \Lambda y^{(n+1)} - SA_0 x^{(n)} - Sb = SA_1 x^{(n)} + \Lambda y^{(n)} -$$
$$-\Lambda y^{(n+1)} + \Lambda y^{(n+1)} = \Lambda S x^{(n)} + \Lambda y^{(n)} = \Lambda\left(Sx^{(n)} + y^{(n)}\right)$$

завдяки принципові індукції. $\square$

Для дослідження збіжності алгоритму зауважимо спочатку, що з рівностей (2.112) та (2.117) випливає, що

$$y^{(n+1)} - y^* = -(I' - \Lambda)^{-1} SA_0 \left(x^{(n)} - x^*\right), \tag{2.118}$$

а з рівностей (2.111) та (2.116) матимемо

$$x^{(n+1)} - x^* = A_1\left(x^{(n)} - x^*\right) + A_0\left(x^{(n)} - x^*\right) +$$
$$+a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right).$$

Звідси із залученням співвідношення (2.118) отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - a\left(x^{(n)}\right) S\left(x^{(n)} - x^*\right) +$$
$$+a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1} SA_0\left(x^{(n)} - x^*\right).$$

Цю рівність після елементарних перетворень можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = \left[A - a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1}S(I - A_1 - A_0)\right]\left(x^{(n)} - x^*\right), \quad (2.119)$$

що можна записати як рівність

$$x^{(n+1)} - x^* = G\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right), \quad (2.120)$$

де

$$G\left(x^{(n)}\right)z = \left[A - a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1}S(I - A)\right]z. \quad (2.121)$$

Теорема 2.10. *Нехай:*

1) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

2) існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$*;*

3) оператор $G(x)$*, означений за допомогою формули* (2.121) *задовольняє умову*

$$\|G(x)\| \leqslant \widetilde{q} < 1; \quad (2.122)$$

4) справджуються рівності (2.114), (2.115).

Тоді для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$*, побудованої за допомогою формул* (2.116), (2.117)*, маємо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *при* $n = 0, 1, \ldots,$ *причому послідовність* $\{x^{(n)}\}$ *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (2.111) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* $\widetilde{q}$*.*

Доведення. Міркування, які привели до співвідношення (2.119) та нерівності (2.122) дають підставу для висновку, що теорему доведено. □

Приклад 2.7. *Для рівняння* (2.90)*, в якому*

$$A = \begin{pmatrix} -13980,3 & -8460,12 & -2839,94 \\ 17961,1 & 10920,44 & 3679,78 \\ -6839,64 & -20460,72 & -6839,64 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -30445,84 \\ 38888,08 \\ -74446,04 \end{pmatrix},$$

застосуємо алгоритм (2.116), (2.117)*. Розв'язком наведеної системи є вектор* $x^* = \{-5; 5; -1\}^T$*. Матриця* A *має власні числа* $\lambda_1 = -1000$*,* $\lambda_2 =$

100, $\lambda_3 = 0,5$. *Алгоритм* (2.116), (2.117) *при* $x^{(0)} = \{1;1;1\}^T$ *дав такі результати:*

$$x^{(1)} = \{-6,1606339; 9,3314798; -8,1921870\}^T,$$

$$x^{(10)} = \{-5,0023563; 5,0086400; -1,0141380\}^T,$$

$$x^{(15)} = \{-5,0000735; 5,0002701; -1,0004416\}^T.$$

Приклад 2.8. *Система* (2.90), *в якій*

$$A = \begin{pmatrix} 160,274 & 23,1576 & -12,5588 \\ -220,338 & 13,0888 & 44,7156 \\ 360,644 & 141,9456 & 26,6472 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 255,8244 \\ -375,0228 \\ 541,9464 \end{pmatrix},$$

має розв'язок $x^* = \{-1;-2;4\}^T$. *Матриця* A *має власні числа* $\lambda_1 = \lambda_2 = 100$, $\lambda_3 = 0,01$. *Двопараметричний ітераційний процес при* $x^{(0)} = \{1;1;1\}^T$ *дав такі результати:*

$$x^{(1)} = \{-1,4873468; -0,1575598; 1,0024740\}^T,$$

$$x^{(5)} = \{-1,0000018; -1,9999927; 3,9999883\}^T.$$

Приклад 2.9. *Для системи* (2.90), *в якій*

$$A = \begin{pmatrix} -1599,9 & -240,912 & 119,4768 \\ 2200,3 & -118,556 & -439,412 \\ -3600,4 & -1442,472 & -281,144 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4199,44 \\ 7399,28 \\ -6191,64 \end{pmatrix},$$

точний розв'язок якої $x^* = \{-3;3;1\}^T$ *і матриця* A *якої має власні числа* $\lambda_1 = \lambda_2 = -1000$, $\lambda_3 = 0,3$, *застосування двопараметричного алгоритму з початковим наближенням* $x^{(0)} = \{1;1;1\}^T$ *дав такі результати:*

$$x^{(1)} = \{-9,857867; 28,0600474; -40,0445306\}^T,$$

$$x^{(5)} = \{-3,0334399; 3,1246584; 0,7968052\}^T,$$

$$x^{(10)} = \{-3,0000297; 3,0001108; 0,9998195\}^T.$$

§ 10. Багатопараметричні аналоги методів ітеративного агрегування

Для рівняння
$$x = Ax + b \tag{2.123}$$
побудуємо і дослідимо на збіжність спеціальний клас аналогів методів ітеративного агрегування. Вважаємо, що $A : E \to E$ є лінійним неперервним оператором, E – банахів простір, $b \in E$. Припускаємо, що рівняння (2.123) можна подати у вигляді
$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j x + b \quad (N < \infty) \tag{2.124}$$
з лінійними неперервними операторами $A_j : E \to E \quad (j = \overline{1, N})$, для яких справджується співвідношення
$$\Bigl(\varphi_j, (A_j + \widetilde{A}_j)x\Bigr) = \lambda_{ij}(\varphi_j, x) \quad (i, j = \overline{1, N}), \tag{2.125}$$
де (φ_i, x), як і раніше, є значенням лінійного функціоналу φ_i на елементах $x \in E$. Нехай матриця
$$\Lambda = \{\lambda_{ij}\} \tag{2.126}$$
є такою, що існує обернена матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$ (I' – одинична матриця в евклідовому просторі E' розмірності N). До рівняння (2.124) приєднаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь
$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}\, y_j + \sum_{j=1}^{N} \Bigl(\varphi_i, \widetilde{A}_j x\Bigr) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}) \tag{2.127}$$
з допоміжними дійсними невідомими y_i.

Означимо множину $\mathcal{E}$ як сукупність пар $\{x, y\}$, де $x \in E$, $y = \{y_1, ..., y_N\} \in E'$, які задовольняють рівності
$$(\varphi_i, x) + y_i = 0 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{2.128}$$

Множина $\mathcal{E}$ є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, якщо запровадити норму пар $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$ як евклідову норму пар $\{\|x\|, |y|\}$, де $\|x\|$ – норма елемента $x \in E$, $|y|$ – норма елемента $y \in E'$.

Сформулюємо базові леми, які є аналогами відповідних лем, що використовувались раніше.

Лема 2.10. *Нехай:*

1) існує обернена матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$*;*

2) справджується умова (2.125)*;*

3) пара $\{x^*, y^*\}$ $(x^* \in E, y^* \in E')$ *є розв'язком системи* (2.124), (2.127)*. Тоді* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$*.*

Доведення. Можна переконатися, що завдяки, зокрема, умові (2.125) отримаємо

$$(\varphi_i, x^*) + y_i^* = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, A_j x^*) + (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, \widetilde{A}_j x^*\right) - (\varphi_i, b) = \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, \left(A_j + \widetilde{A}_j\right) x^*\right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} (\varphi_j, x^*) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[(\varphi_j, x^*) + y_j^*\right].$$

Оскільки матриця $I' - \Lambda$ невироджена, то звідси випливає, що справджуються співвідношення (2.128) при $x = x^*$, $y = y^*$, тобто $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$. $\square$

Розглянемо рівності

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j z + \sum_{j=1}^{N} a_j(z)(w_j - y_j) + b, \tag{2.129}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_j, \widetilde{A}_j z\right) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}), \tag{2.130}$$

де $a(x) = \{a_1(x), a_2(x), ..., a_N(x)\}^T$ є неперервною при $x \in E$ функцією зі значеннями в E. Вважаємо, що справджується умова

$$(\varphi_i, a_j(x)) = \lambda_{ij} \quad (x \in E, i, j = \overline{1, N}). \tag{2.131}$$

Лема 2.11. *Нехай виконані умови* (2.125) *та* (2.131)*. Якщо в рівностях* (2.129), (2.130) *маємо* $\{z, w\} \in \mathcal{E}$*, то* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$*.*

Доведення. Із співвідношень (2.129), (2.130), застосовуючи умови (2.125), (2.131), одержуємо

$$
(\varphi_i, x) + y_i = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, A_j z) + \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, a_j(z))\, w_j -
$$

$$
-\sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, a_j(z))\, y_j + (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, \widetilde{A}_j z\right) - (\varphi_i, b) =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, (A_j + \widetilde{A}_j) z\right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[(\varphi_j, z) + w_j\right].
$$

Це дозволяє завдяки припущенню, що $\{z, w\} \in \mathcal{E}$, вважати лему доведеною. □

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$
x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} a_j \left(x^{(n)}\right) \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.132}
$$

$$
y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, \widetilde{A}_j x^{(n)}\right) - (\varphi_i, b). \tag{2.133}
$$

Лема 2.12. *Нехай справджуються умови леми 2.11 при* $z = x^{(0)}$, $w = y^{(0)}$. *Тоді для послідовності* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудованої за допомогою формул* (2.132), (2.133), *маємо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E} \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Доведення. Твердження леми отримується як наслідок леми (2.11) та принципу індукції. □

Дослідимо збіжність ітераційного процесу (2.132), (2.133). Позначимо

$$
a(x) y = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) y_j = \{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_N(x)\}\{y_1, \ldots, y_N\}^T,
$$

$$
\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}^T, \quad \varphi_i = \{\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{iN}\}^T.
$$

Запишемо співвідношення (2.127), (2.132), (2.133) відповідно у вигляді

$$
y = \Lambda y + \Phi \widetilde{A} x - \Phi b, \tag{2.134}
$$

$$
x^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b, \tag{2.135}
$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + \Phi \widetilde{A} x^{(n)} - \Phi b. \tag{2.136}$$

При $x = x^*$, $y = y^*$ з рівностей (2.134) та (2.136) випливає, що

$$y^{(n+1)} - y^* = (I' - \Lambda)^{-1} \Phi \widetilde{A} \left(x^{(n)} - x^* \right), \tag{2.137}$$

а з рівностей (2.124), (2.135) отримуємо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = \sum_{j=1}^{N} A_j \left(x^{(n)} - x^* \right) + a\left(x^{(n)} \right) \left(y^{(n)} - y^* \right) - \\ -a\left(x^{(n)} \right) \left(y^{(n+1)} - y^* \right). \end{gathered} \tag{2.138}$$

Використовуючи леми 2.10 і 2.12, а також рівності (2.137), (2.138), знаходимо, що

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = \sum_{j=1}^{N} A_j \left(x^{(n)} - x^* \right) - a\left(x^{(n)} \right) \Phi \left(x^{(n)} - x^* \right) - \\ -a\left(x^{(n)} \right) (I' - \Lambda) \Phi \widetilde{A} \left(x^{(n)} - x^* \right). \end{gathered}$$

Звідси матимемо

$$x^{(n+1)} - x^* = A \left(x^{(n)} - x^* \right) - a\left(x^{(n)} \right) (I' - \Lambda)^{-1} \Phi (I - A) \left(x^{(n)} - x^* \right), \tag{2.139}$$

де I – тотожний оператор в E. Сформулюємо такий підсумок.

Теорема 2.11. *Нехай:*

1) існує матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$*;*

2) виконуються умови (2.125) *та* (2.131)*;*

3) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

4) для оператора $H(x)w$*, означеного за формулою*

$$H(x)w = Aw - a(x)(I' - \Lambda)^{-1} \Phi (I - \Lambda) w, \tag{2.140}$$

справджується умова

$$\|H(x)w\| \leqslant Q \tag{2.141}$$

в області $D \subseteq \mathcal{E}$ *при таких* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$*,* $w = x - x^{(0)}$*, для яких маємо*

$$Q < 1. \tag{2.142}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *існує, причому* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. *Ця послідовність збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи* (2.124), (2.134) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* Q.

Доведення. Рівності (2.125) можна подати у вигляді

$$\Phi(A + \widetilde{A}) = \Lambda\Phi, \tag{2.143}$$

Тому

$$\begin{aligned}&(I' - \Lambda)\Phi + \Phi\widetilde{A} = \Phi - \Lambda\Phi + \Phi\widetilde{A} = \\ &= \Phi - \Phi A - \Phi\widetilde{A} + \Phi\widetilde{A} = \Phi(I - A).\end{aligned} \tag{2.144}$$

Тоді рівність (2.139) запишемо так

$$x^{(n+1)} - x^* = H\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.145}$$

Використовуючи співвідношення (2.141), (2.142) і банахів принцип стиску, завершуємо доведення теореми. □

Приклад 2.10. *В однопараметричному випадку* $N = 1$ *матимемо* $\Lambda = \lambda \neq 1$. *Рівності* (2.125), (2.128) *мають вигляд*

$$\left(\varphi, (A + \widetilde{A})x\right) = \lambda(\varphi, x), \quad a(x) = \frac{(A + \widetilde{A})x}{(\varphi, x)},$$
$$\alpha(x) = 0, \quad (\varphi, a(x)) = \lambda \quad (x \in E).$$

Ітераційний процес (2.135), (2.136) *описується за допомогою формул*

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b,$$
$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \left(\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}\right) - (\varphi, b).$$

Означений за формулою (2.140) *оператор* $H(x)$ *має вигляд*

$$H(x)w = Aw - a(x)(\varphi, w).$$

Приклад 2.11. *Застосуємо однопараметричний алгоритм до системи*

$$x_1 = 2,9x_1 + 11,8x_2 - 156,$$

$$x_2 = 1,9x_1 + 7,9x_2 - 107,$$

яка має розв'язок $x^* = \{20; 10\}$. *Візьмемо*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $A + \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ *має власне число* $\lambda = 11$, *якому відповідає лівий власний вектор* $\varphi = \{1; 4\}$. *Виберемо* $x^{(0)} = \{1; 1\}$ *і обчислимо* $y^{(0)} = \left(\varphi, x^{(0)}\right) = -5$, $y^{(1)} = -58.51$. *Для перших двох ітерацій маємо*

$$x^{(1)} = \{19,23; 9,28\}^T, \quad x^{(2)} = \{19,9651; 9,9964\}^T.$$

§ 11. Один спосіб узагальнення методів ітеративного агрегування

Спосіб побудови алгоритму (1.30), (1.31) використаємо для побудови багатопараметричних аналогів цього алгоритму. Рівняння (2.123) запишемо у вигляді

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j x + \widetilde{A}x + b, \tag{2.146}$$

де A_j $(j = \overline{1, N})$, $\widetilde{A}$ є лінійними неперервними операторами, які діють з банахового простору E в E. Позначимо

$$A_0 = \sum_{j=1}^{N} A_j, \quad A = A_0 + \widetilde{A}.$$

Скористаємося результатами § 10. До рівняння (2.146) приєднаємо допоміжну систему рівнянь

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j - \left(\varphi_i, \widetilde{A}x\right) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}), \tag{2.147}$$

яку записуватимемо також у вигляді

$$y = \Lambda y - \Phi\widetilde{A}x - (\Phi, b), \tag{2.148}$$

де

$$\Phi x = \{(\varphi, x), \ldots, (\varphi_N, x)\}^T, \tag{2.149}$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ – квадратна матриця розмірності N. Позначимо через E' евклідів простір вектор-стовпців розмірності N, де I', θ' є відповідно одиничною матрицею і нульовою матрицею в E'. Нехай E^* є спряжений з E простір, A_j^* — спряжені з A_j оператори.

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b + \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j B_j x^{(n)}}{\left(\varphi_j, B_j x^{(n)}\right)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right), \tag{2.150}$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} - \left(\varphi_i, \widetilde{A} x^{(n)}\right) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}), \tag{2.151}$$

де $B_j : E \to E$ $(j = \overline{1, N})$ – лінійні неперервні оператори. Позначивши

$$a(x) = \{a_1(x), \ldots, a_N(x)\}^T, \qquad a_j(x) = \frac{A_j B_j x^{(n)}}{\left(\varphi_j, B_j x^{(n)}\right)}, \tag{2.152}$$

формули (2.150), (2.151) можна переписати у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{2.153}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - \Phi \widetilde{A} x^{(n)} - \Phi b. \tag{2.154}$$

Означимо множину $\mathcal{E}$ як сукупність пар $\{x, y\}$ $(x \in E,\ y \in E')$, для яких

$$\Phi x + y = \theta'. \tag{2.155}$$

При запровадженні тієї чи іншої норми пари $\{x, y\}$ $(x \in E,\ y \in E')$ множина $\mathcal{E}$ стає підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$. Як і в § 10, можна переконатися, що

$$y^{(n)} - y^* = -\Phi\left(x^{(n)} - x^*\right), \tag{2.156}$$

$$y^{(n+1)} - y^* = -(I' - \Lambda)\Phi \widetilde{A}\left(x^{(n)} - x^*\right), \tag{2.157}$$

вважаючи, що обернена матриця $(I'-\Lambda)^{-1}$ існує. З рівностей (2.153), (2.154) та (2.156), (2.157) можна отримати

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - a\left(x^{(n)}\right)\Phi\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ +a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1}\Phi A\left(x^{(n)} - x^*\right). \end{gathered} \tag{2.158}$$

Тут (x^*, y^*) — розв'язок системи (2.146), (2.148) ($x^* \in E, y^* \in E'$).

Припускаємо, що

$$\Phi A_0 = \Lambda\Phi. \tag{2.159}$$

Як і в § 10, можна стверджувати, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$, а також, що при $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ справджується співвідношення $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ ($n = 0, 1, \ldots$).

Із співвідношення (2.158) після нескладних перетворень можна отримати

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = A\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1}(I - A^*)\Phi\left(x^{(n)} - x^*\right). \end{gathered} \tag{2.160}$$

Теорема 2.12. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ *і справджується умова* (2.149), *а оператор* $H(x)w$, *означений за допомогою формули*

$$H(x)w = \left[A - a(x)(I' - \Lambda)^{-1}(I - A^*)\Phi\right]w, \tag{2.161}$$

при $w = x_2 - x_1$, $\{x_1, y_1\} \in \mathcal{E}$, $\{x_2, y_2\} \in \mathcal{E}$ *задовольняє умову*

$$\|H(x)\| \leq q < 1. \tag{2.162}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудована за допомогою формул* (2.153), (2.154), *збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи* (2.146), (2.148) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q. *При цьому* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *(*$n = 0, 1, \ldots$*) та* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Міркування, які призводять до рівності (2.160) разом із співвідношеннями (2.160)-(2.162) є підставою для того, щоб вважати теорему доведеною. $\square$

Зауваження 2.1. *У тому випадку, коли* Λ *є діагональною матрицею вигляду*

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{\mathrm{NN}}\},$$

тобто, коли маємо рівності

$$A_j^* \varphi_i = \begin{cases} \lambda_{ii}\varphi_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \tag{2.163}$$

та

$$B_j = \sum_{i=1}^{m-1} A_j^i \qquad (m < \infty), \tag{2.164}$$

рівності (2.153), (2.154) *можна записати у вигляді*

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b+ \\ + \sum_{j=1}^{N} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} A_j^i x^{(n)} (1 - \lambda_{jj})}{(1 - \lambda_{jj})^m \left(\varphi_j, x^{(n)}\right)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{2.165}$$

$$y_i^{(n+1)} = \lambda_{ii} y_i^{(n+1)} - \left(\varphi_i, \widetilde{A} x^{(n)}\right) - (\varphi_i, b). \tag{2.166}$$

Розділ 3

Застосування агрегаційно-ітеративних методів до інтегральних, диференціальних та функціонально-диференціальних рівнянь

Розділ присвячений застосуванню досліджених раніше агрегаційно-ітеративних алгоритмів до лінійних інтегральних рівнянь другого роду та до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Наведені результати близькі до результатів із [49] (див. також [16, 48] та [2,5].

§ 12. Однопараметричні алгоритми для лінійних інтегральних рівнянь

В класі дійсних інтегровних з квадратом на інтервалі (t_1, t_2) функцій, який позначатимемо через E, розглядатимемо рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t,s)x(s)ds, \tag{3.1}$$

вважаючи, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} k^2(t,s)ds\,dt \leqslant B^2 < \infty.$$

Вважатимемо також заданими інтегровні з квадратом функції $\widetilde{k}(t,s)$, $\varphi(t)$, для яких маємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} [k(t,s) + \widetilde{k}(t,s)]x(s)ds = \lambda \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x(t)dt. \tag{3.2}$$

Означимо множину $\mathcal{E}$ як сукупність пар $\{x(t), y\}$ функцій $x(t) \in L^2$ і дійсних чисел $y \in E'$ (E' – множина дійсних чисел), для яких

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x(t)dt + y = 0. \tag{3.3}$$

В просторі $\widetilde{E} = E \times E'$ норму пар $\{x, y\}$ ($x \in E, y \in E'$) означимо як евклідову норму пар $\{\|x\|, |y|\}$ ($\|x\|$ – норма функції $x(t) \in E$, $|y|$ – абсолютна величин числа y).

Задамо інтегровну з квадратом при $t \in [t_1, t_2]$, $x \in E$ дійсну функцію $a(t, x)$ і побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t, s)x^{(n)}(s)ds + a\left(t, x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{3.4}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t, s)x^{(n)}(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt. \tag{3.5}$$

Переформулюємо базові леми, які фігурують у попередніх розділах, в термінах застосування агрегаційно-ітеративних методів до інтегральних рівнянь.

Лема 3.1. *Якщо* $\lambda \neq 1$ *і виконана умова* (3.2)*, то розв'язок* (x^*, y^*) *системи, яка складена з рівняння* (3.1) *і допоміжного рівняння*

$$y = \lambda y + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t, s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt, \tag{3.6}$$

належить множині $\mathcal{E}$.

Нехай справджується припущення, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)a(t, x)dt = \lambda. \tag{3.7}$$

Рівність (3.7) виконується, наприклад, в тому випадку, коли маємо умову (3.2) і функцію $a(t,x)$ означено за формулою

$$a(t,x)=\frac{\int\limits_{t_1}^{t_2}[k(t,s)+\widetilde{k}(t,s)]x(s)ds}{\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)x(t)dt}, \tag{3.8}$$

а також, якщо $a(t,x)$ є сталим числом, обчисленим за формулою

$$a(t,x)=\frac{\lambda}{\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt}.$$

Лема 3.2. *Нехай задано* $\{x^{(0)},y^{(0)}\}\in\mathcal{E}$ *і маємо рівності* (3.2), (3.7)*. Тоді при* $n=0,1,\ldots$ *матимемо співвідношення* $\{x^{(n)},y^{(n)}\}\in\mathcal{E}$.

Теорема 3.1. *Нехай виконується нерівність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}[h^{(n)}(t,s)]^2ds\,dt\leqslant q^2 \qquad (n=0,1,\ldots), \tag{3.9}$$

де

$$h^{(n)}(t,s)=k(t,s)+\widetilde{k}(t,s)+$$
$$+\frac{a\left(t,x^{(n)}(t)\right)}{1-\lambda}\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(\tau)\widetilde{k}(\tau,s)d\tau-a\left(t,x^{(n)}(t)\right)\varphi(s). \tag{3.10}$$

Тоді при $q<1$ *послідовність* $\{x^{(n)}(t)\}$*, утворена за допомогою формул* (3.4), (3.5)*, збігається до розв'язку* $x^*(t)\in E$ *рівняння* (3.1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Доведення. Обґрунтування вичерпується отриманням рівності

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\int\limits_{t_1}^{t_2}h^{(n)}(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds, \tag{3.11}$$

яка випливає з формул (3.1), (3.6) та (3.4), (3.5). □

Позначимо

$$h_0^{(n)}(t,s) = \widetilde{k}(t,s) - \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}\varphi(s). \tag{3.12}$$

Припустимо, що функція $k(t,s)$ має вигляд

$$k(t,s) = \lambda_1\psi_1(t)\varphi_1(s), \tag{3.13}$$

причому

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\psi_1(t)dt = 1. \tag{3.14}$$

Теорема 3.2. *Нехай справджуються припущення* (3.2), (3.13), (3.14), *а також співвідношення*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)\varphi(t)dt = 0 \qquad (t \in (t_1,t_2)), \tag{3.15}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{t_1}^{t_2} [h^{(n)}(t,s)]^2 ds\, dt \leqslant q_0^2 \qquad (n = 0,1,\ldots). \tag{3.16}$$

Якщо $q_0 < 1$, *то послідовність* $\{x_n(t)\}$, *побудована за допомогою формул* (3.4), (3.5), *збігається до розв'язку* $x^*(t) \in E$ *рівняння* (3.1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_0.

Доведення. З (3.15) і (3.10) отримуємо

$$h^{(n)}(t,s) = k(t,s) + \widetilde{k}(t,s) - a(t,x^{(n)}(t))\varphi(s) = \lambda\psi(t)\varphi(s) +$$

$$+\widetilde{k}(t,s) - \frac{\lambda\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)x(\xi)d\xi}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}\varphi(s) - \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}\varphi(s) =$$

$$= \widetilde{k}(t,s) - \frac{\lambda\int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(\xi)x^{(n)}(\xi)d\xi} = h_0^{(n)}(t,s),$$

тобто $h^{(n)}(t,\xi) = h_0^{(n)}(t,\xi)$. Звідси випливає, що при $h^{(n)}(t,s) = h_0^{(n)}(t,s)$ і $q = q_0$ виконані умови теореми 3.1, тобто теорема 3.2 є наслідком теореми 3.1. □

Розглянемо випадок, коли

$$a\left(t, x^{(n)}(t)\right) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} k(t,s)x^{(n)}(s)ds}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)x^{(n)}(s)ds}. \tag{3.17}$$

Тоді ітераційний алгоритм (3.4), (3.5) матиме вигляд

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n)}(s)ds + \lambda\psi(t)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt. \tag{3.19}$$

Теорема 3.3. *Нехай $\lambda \neq 1$ і справджується нерівність*

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} [h_1(t,s)]^2 ds\, dt \leqslant q_1^2,$$

де

$$h_1(t,s) = \widetilde{k}(t,s) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\psi(t)\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau)\widetilde{k}(\tau,s)d\tau. \tag{3.20}$$

Якщо $q_1 < 1$, то послідовність $\{x^{(n)}(t)\}$, отримана за допомогою формул (3.18), (3.19), збігається до розв'язку рівняння (3.1) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q_1.

Доведення. З рівностей (3.18), (3.19) та (3.1), (3.6) одержуємо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_{t_1}^{t_2} k(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right) ds + \\ + \lambda\psi(t)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \lambda\psi(t)\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \end{gathered}$$

$$y^{(n+1)} - y^* = -\frac{1}{1-\lambda}\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds. \tag{3.21}$$

Звідси можна знайти, що

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} h_1(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds,$$

що дає підставу вважати теорему доведеною. □

Зауваження 3.1. *До алгоритму* (3.4), (3.5) *близький алгоритм, побудований за допомогою формули* (3.4) *та формули*

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n)}(s)ds + \\ +\alpha\left(x^{(n)}(t)\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt \end{gathered} \tag{3.22}$$

за припущення, що умову (3.7) *замінено умовою*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)a(t,x)dt + \alpha(x) = \lambda. \tag{3.23}$$

Зауваження 3.2. *Існування послідовних наближень до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (3.1) *можна обґрунтувати, наприклад, для одного з наведених алгоритмів* (3.4), (3.22), *якщо* $\{x, y\} \in \mathcal{E}$, $\lambda \neq 1$, *а число* $1-\lambda$ *не є власним числом, а* $\varphi(t)$ *не є відповідною йому власною функцією оператора*

$$\widetilde{K}x^* = \int\limits_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(s,t)x(s)ds.$$

Нехай

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt \neq 0 \tag{3.24}$$

та $x^{(0)}(t)$ вибрано таким чином, що справджується нерівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(0)}dt \neq 0. \tag{3.25}$$

Припустимо, що для якогось $n \geqslant 1$ маємо $\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(n)}(t)dt = 0$. Якщо n_0 є найменшим з таких чисел, то враховуючи (3.3), можна отримати, що $y^{(n_0)} = 0$. В такому разі з (3.22) маємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n_0-1)}(s)ds - \alpha(x^{(n_0-1)}(t))y^{(n_0)} - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt = 0,$$

яку в узгодженні з умовою (3.23) можна записати

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n_0-1)}(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{k}(t,s)x^{(n_0-1)}(s)ds = 0.$$

Звідси отримуємо рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt = 0,$$

яка суперечить припущенню (3.24).

Припущення про те, що число $1-\lambda$ не є власним числом, а $\varphi(t)$ не є відповідною йому власною функцією оператора K^*x дає підставу для обґрунтування можливості знайти $y^{(n+1)}$ з (3.22), бо в протилежному випадку з (3.22) ми знову прийшли б до протиріччя з умовою (3.24).

Приклад 3.1. *Застосуємо алгоритм* (3.4), (3.22) *до рівняння*

$$x(t) = \int\limits_0^1 (ts+1)x(s)ds - t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6}, \tag{3.26}$$

точним розв'язком якого є функція $x^*(t) = t - t^2$. *Позначимо* $k(t,s) = ts$, $\widetilde{k}(t,s) = 1$ *і запишемо рівняння* (3.26) *у вигляді*

$$x(t) = \int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds + \int\limits_0^1 k_2(t,s)x(s)ds - t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6}.$$

У цьому випадку матимемо $k(t,s) = \lambda\psi(t)\varphi(s)$, *взявши, наприклад,* $\lambda = \dfrac{1}{3}$, $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = \dfrac{3}{2}t$. *Рівності* (3.22) *та* (3.4) *матимуть відповідно вигляд*

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{3}y^{(n+1)} - \int\limits_0^1 2tdt \int\limits_0^1 x^{(n)}(s)ds + \frac{1}{18}\alpha\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right),$$

$$x^{(n+1)}(t) = \int_0^1 tsx^{(n)}(s)ds - \int_0^1 x^{(n)}(s)ds - t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6} +$$
$$+a\left(t, x^{(n)}(t)\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right),$$

де

$$a\left(t, x^{(n)}(t)\right) = \frac{\int_0^1 (k(t,s) + \widetilde{k}(t,s))x^{(n)}(s)ds}{\int_0^1 \varphi(s)x^{(n)}(s)ds},$$

$$\alpha\left(x^{(n)}(t)\right) = -\frac{\int_0^1 \varphi(t)dt \int_0^1 x^{(n)}(s)ds}{\int_0^1 \varphi(s)x^{(n)}(s)ds},$$

$$x^{(0)}(t) = f(t) = -t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6}.$$

Після відповідних обчислень матимемо, наприклад,

$$x^{(6)}(t) = -t^2 + \frac{1673}{1672}t + \frac{1}{12279},$$

$$x^{(6)}(t) - x^*(t) = \frac{1}{1672}t + \frac{1}{12279}.$$

Використання звичайного методу послідовних наближень, який описується формулою

$$x^{(n+1)}(t) = \int_0^1 (ts+1)x^{(n)}(s)ds - t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6}$$

з тим самим початковим наближенням $x^{(0)}(t) = -t^2 + \frac{11}{12}t - \frac{1}{6}$ *дає такий результат:*

$$x^{(6)}(t) = -t^2 + \frac{65411}{116640}t - \frac{50419}{58320}.$$

Тоді $x^{(6)}(t) - x^* = \frac{51229}{116640}t - \frac{50419}{58320}$. *Отже, маємо помітне прискорення збіжності ітерацій за формулами* (3.4), (3.22) *у порівнянні зі звичайним методом послідовних наближень.*

§ 13. Багатопараметричні алгоритми для інтегральних рівнянь

Рівняння (3.1), записане у вигляді

$$x(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} k_j(t,s)x(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds, \tag{3.27}$$

розглядаємо в класі E інтегрованих з квадратом на інтервалі (t_1, t_2) функцій. Задамо дійсні числа λ_{ij} та інтегровні з квадратом у відповідних областях функції $\varphi_j(t)$, $\beta_j(t,s)$ таким способом, щоб справджувалися рівності

$$\int_{t_1}^{t_2} [k_j(t,s) + \beta_j(t,s)]\varphi_j(t)dt = \lambda_{ij}\varphi_j(s) \qquad (i,j = \overline{1,N}). \tag{3.28}$$

Рівняння (3.27) розглядаємо разом з допоміжними рівняннями

$$\begin{gathered} y_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta_j(t,s)x(s)ds - \\ - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)f(t)dt \quad (i = \overline{1,N}). \end{gathered} \tag{3.29}$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_1}^{t_2} k_j(t,s)x^{(n)}(s)ds + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds + \sum_{j=1}^{N} a_j\left(x^{(n)}\right)\left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered} y_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta_j(t,s)x^{(n)}(s)ds - \\ - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)f(t)dt \quad (i = \overline{1,N}), \end{gathered} \tag{3.31}$$

де $a_j(t, x(t))$ – інтегровні з квадратом на (t_1, t_2) функції, $a_j(x^{(n)}) = a_j(t, x(t))$ $(j = \overline{1,N})$. Алгоритм (2.38), (2.39) охоплює алгоритм (3.30), (3.31). Умова (2.35) справджується при $\lambda_{i0} = 0$, а умова (2.40) при $\lambda_{ij}(x) = 0$.

Тому дослідження алгоритму (3.30), (3.31) зводиться до застосування результатів із §7.

Розглянемо алгоритм (3.30), (3.31) докладніше, вибравши $k_j(t,s)$ за формулами

$$k_j(t,s) = \psi_j(t)\varphi_j(s) \quad (i,j=\overline{1,N}). \tag{3.32}$$

Рівності (3.28) матимуть вигляд

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} k_j(t,s)\varphi_i(t)dt = \lambda_{ij}\varphi_j(s) \quad (i,j=\overline{1,N}), \tag{3.33}$$

тобто

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi_j(t)\varphi_j(s)\varphi_i(t)dt = \lambda_{ij}\varphi_j(s) \quad (i,j=\overline{1,N}). \tag{3.34}$$

Замість (3.30), (3.31) матимемо відповідно

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi_j(t)\varphi_j(s)x^{(n)}(s)ds + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds + \sum_{j=1}^{N} a_j\left(x^{(n)}\right)\left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{3.35}$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s,)x^{(n)}(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)f(t)dt. \tag{3.36}$$

Замінимо (3.29) формулою

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} y_j - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)f(t)dt. \tag{3.37}$$

Множину $\mathcal{E}$ опишемо як сукупність пар $\{x(t), y\}$, де $x(t) \in E$, $y \in E'$ (E' – множина вектор-стовпців розмірності N), для яких зберігаються основні базові леми §7 за припущення, що замість існування оберненої матриці $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$ вимагатимемо існування матриці $(I' - \Lambda)^{-1}$. Наводимо формулювання цих лем для випадку рівняння (3.27).

Лема 3.3. *Якщо існує матриця* $(I' - \Lambda)^{-1}$*, де* $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,N}$*, то розв'язок* $\{x^*(t), y^*\}$ *системи* (3.27), (3.37) *належить до множини* $\mathcal{E}$*.*

Лема 3.4. *Якщо* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ *та існує матриця* $(I' - \Lambda)^{-1}$*, то матимемо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ $(n = 0, 1, \ldots)$*.*

Зазначимо, що існування послідовностей $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ є очевидним за умови, що

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) k_0(t,s) ds \neq 0 \quad (i = \overline{1, N}) \tag{3.38}$$

та

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) f(t) dt \neq 0 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{3.39}$$

Це випливає з того, що виконання цих умов призводить до рівності

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t) x^{(n)}(t) dt = -y_i^{(n)} \quad (i = \overline{1, N}).$$

З рівностей (3.27), (3.37), враховуючи умови лем 3.3 та 3.4, можна отримати

$$\begin{gathered}
x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(t) \varphi_j(s) \left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right) ds + \\
+ \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s) \left(x^{(s)}(t) - x^*(s)\right) ds - \\
- \sum_{j=1}^{N} a_j \left(x^{(n)}\right) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t) \left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right) dt + \\
+ \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{N} a_j \left(x^{(n)}\right) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t) dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s) \left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right) ds,
\end{gathered} \tag{3.40}$$

де $\Delta = \det \Lambda$.

В тому випадку, коли в (3.34) маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_j(t)\varphi_j(s)\varphi_i(t)dt = \begin{cases} \lambda_{ii}\varphi_j(s) & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \tag{3.41}$$

формули (3.36) та (3.37) матимуть вигляд

$$y_i^{(n+1)} = \lambda_{ii} y_i^{(n+1)} - \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)f(t)dt, \tag{3.42}$$

$$y_i = \lambda_{ii} y_i - \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)f(t)dt. \tag{3.43}$$

Звідси отримуємо

$$y_i^{(n+1)} - y_i^* = -\frac{1}{1-\lambda_{ii}} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds.$$

Враховуючи це і рівності

$$y_i^{(n)} - y_i^* = -\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt,$$

будемо мати

$$\begin{aligned} x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = &\int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{j=1}^{N} \psi_j(t)\varphi_j(s) + k_0(t,s) \Big)\Big(x^{(n)}(s) - x^*(s)\Big)ds + \\ &+ \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j\left(x^{(n)}\right)}{1-\lambda_{jj}} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} a_j\left(x^{(n)}\right) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Позначимо

$$H(x)w = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{N} \psi_j(t)\varphi_j(s) + k_0(t,s) \right) w(s)ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j(x)}{1-\lambda_{jj}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_j(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)w(s)ds + \qquad (3.45)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} a_j(x) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_j(s)w(s)ds$$

і запишемо рівність (3.44) у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = H\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right). \qquad (3.46)$$

Тому, як випливає з результатів другого розділу, якщо $\lambda_{ii} \neq 1$ $(i = \overline{1,N})$ та $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ і $w \in \mathcal{E}$, то можна зробити висновок, що при виконанні умови $\|H(x)\| \leqslant g < 1$ послідовність $\{x^{(n)}\}$, побудована за допомогою формул (3.40), (3.42), збігається за нормою в E до розв'язку $x^* = x^*(t)$ рівняння (3.27).

§ 14. Алгоритми для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Для лінійного диференціального рівняння

$$x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \qquad (3.47)$$

шукатимемо розв'язок, що задовольняє крайові умови

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \qquad (3.48)$$

Припускаємо, що дійсні функції $a_0(t), a_1(t), b(t)$ мають потрібні властивості неперервності та гладкості. Задачу (3.47), (3.48) подамо у вигляді

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x(s)ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x(s)ds, \qquad (3.49)$$

де

$$f(t) = x_1 + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}(x_2-x_1) + \int\limits_{t_1}^{t}(t-s)b(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(t_2-s)x(s)ds, \quad (3.50)$$

$$k(t,s) = a_1(s) + (t-s)\left(a_0(s) - a_1'(s)\right), \quad (3.51)$$

$$k_0(t,s) = -\frac{t-t_1}{t_2-t_1}k(t_2,s). \quad (3.52)$$

Позначимо

$$\varphi(t) = k(t_2,t), \quad (3.53)$$

$$\lambda = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}k(t_2,t)dt, \quad (3.54)$$

причому

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)f(t)dt \neq 0.$$

Утворимо систему, складену з рівняння (3.49) та допоміжного рівняння

$$y = \lambda y - \int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt\int\limits_{t_1}^{t}k(t,s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)f(t)dt. \quad (3.55)$$

Розглянемо агрегаційно-ітеративний алгоритм, побудований за допомогою формул

$$x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int\limits_{t_1}^{t}k(t,s)x^{(n)}(s)ds + \int\limits_{t_1}^{t_2}k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds + a(t)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \quad (3.56)$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt\int\limits_{t_1}^{t}k(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)f(t)dt, \quad (3.57)$$

де дійсна неперервна функція $a(t)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)a(t,x(t))dt = \lambda. \quad (3.58)$$

Назвемо множиною $\mathcal{E}$ сукупність неперервних дійсних функцій $x(t) \in E$ та дійсних чисел $y \in E'$, які задовольняють рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x(t)dt + y = 0. \tag{3.59}$$

Наведемо формулювання двох базових тверджень, які є аналогами відповідних лем із попередніх параграфів.

Лема 3.5. *Якщо* $\{x^*(t), y^*\} \in \widetilde{E} = E \times E'$ *є розв'язком системи* (3.49), (3.55) *та* $\lambda \neq 1$, *то* $\{x^*(t), y^*\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Переконаємося, що $\{x^*(t), y^*\}$ задовольняє умову (3.59). Дійсно,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^*(t)dt + y^* = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x^*(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^*(s)ds + \lambda y^* - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x^*(s)ds -$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt = \lambda y^* + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)\frac{t-t_1}{t_2-t_1}k(t_2,t)x^*(s)dsdt =$$

$$= \lambda y^* + \lambda \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(s)x^*(s)ds = \lambda \left(y^* + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^*(t)dt \right).$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то цим завершуємо доведення леми. $\square$

Лема 3.6. *Нехай* $\lambda \neq 1$ *та виконана умова* (3.58). *Тоді із співвідношення* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ *для послідовних наближень* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *матимемо, що* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$ *при* $n = 1, 2, \ldots$

Доведення. З рівностей (3.56), (3.57) отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)x^{(n)}(s)ds+$$

$$+\lambda y^{(n+1)} - y^{(n+1)} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)a\left(t, x^{(n)}(t)\right)dt + y^{(n)} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)a\left(t, x^{(n)}(t)\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,t)dt \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds + \lambda y^{(n+1)} + \lambda y^{(n)} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,t)\left(-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)dt + \lambda y^{(n)} =$$

$$= \lambda \left[\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(n)}(t)dt + y^{(n)}\right].$$

Скориставшись умовою, що $\lambda \neq 1$ та принципом математичної індукції завершуємо доведення леми. □

Оскільки з (3.55), (3.57) при $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$ випливає рівність

$$y^{(n+1)} - y^* = -\frac{1}{1-\lambda}\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t} k(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds, \qquad (3.60)$$

то леми 3.5 та 3.6 дають підставу для рівності

$$y^{(n)} - y^* = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt. \qquad (3.61)$$

Тому можна отримати

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_{t_1}^{t} k(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds + \int_{t_1}^{t_2} k_0(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds+$$

$$+\frac{a\left(t, x^{(n)}(t)\right)}{1-\lambda} \times \left[\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t} k(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds - \right.$$

$$\left. -(1-\lambda)\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt\right].$$

$$(3.62)$$

Звідси випливає, що для збіжності послідовності $\{x^{(n)}(t)\}$ до розв'язку $\{x^*(t)\}$ рівняння (3.49) достатньо, щоб для лінійного щодо w оператора $H(x)w$ породженого правою частиною рівності (3.62) справджувалась умова

$$\|H(x)\| \leqslant q < 1 \tag{3.63}$$

при $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. При цьому $\{x^*(t), y^*(t)\}$ та $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ належать до множини $\mathcal{E}$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Замінимо рівняння (3.55) рівнянням

$$\begin{gathered} y = \lambda y + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x(s)ds + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t))dt \int\limits_{t_1}^{t} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x(t)dt. \end{gathered} \tag{3.64}$$

Ітераційний процес побудуємо за формулами

$$\begin{gathered} x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds - \\ - \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds - a^{(n)}(t)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{3.65}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int\limits_{t_1}^{t} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds - \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \end{gathered} \tag{3.66}$$

в яких

$$a^{(n)}(t) = \frac{\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi(s)x^{(n)}(s)ds}, \tag{3.67}$$

$$\alpha_0^{(n)} = \lambda - \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(s)a^{(n)}(s)ds. \tag{3.68}$$

За вибору λ та $\varphi(t)$ за формулами (3.54) співвідношення (3.67), (3.68) матимуть вигляд

$$a^{(n)}(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, \quad \alpha_0^{(n)} = 0. \tag{3.69}$$

За цих обставин (3.65), (3.66) і формули (3.56), (3.57) описують одну і ту ж саму послідовність. Для процесу (3.65), (3.66) маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}dt \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds - \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)a^{(n)}(t)dt +$$

$$+ \lambda y^{(n+1)} - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}dt \int_{t_1}^{t_2} k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}k(t_2,s)x^{(n)}(s)ds + \alpha_0^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt + \lambda \left[\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x^{(n)}(t)dt + y^{(n)}\right].$$

Звідси, припустивши, що при $x(t) = x^{(n)}(t)$, $y = y^{(n)}$ справджується рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)x(t)dt + y = \frac{1}{1 - \lambda}\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)f(t)dt, \tag{3.70}$$

одержуємо, що рівність (3.70) справджується при $x(t) = x^{(n+1)}(t)$, $y = y^{(n+1)}$.

Множину пар $\{x(t), y\}$, для яких виконана рівність (3.70) назвемо множиною $\mathcal{E}_0$. Ця множина відрізняється від множини $\mathcal{E}$ тим, що $\mathcal{E}_0$ не є підпростором простору, в якому розглядаємо систему рівнянь, складену з рівняння (3.49) і допоміжного рівняння

$$
\begin{gathered}
y = \lambda y - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t} k(t,s)x(s)ds + \\
+ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \int_{t_1}^{t_2} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} k(t_2,s)x(s)ds.
\end{gathered}
\tag{3.71}
$$

Роль множини $\mathcal{E}_0$ така сама, якою є роль множини $\mathcal{E}$ з попередніх параграфів. Встановлений факт щодо послідовності $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$, побудованої за допомогою формул (3.65), (3.66), тотожний з відповідним твердженням із попередніх базових лем і означає, що при $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$ маємо, що на основі принципу математичної індукції справджується співвідношення $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$ при $n = 0, 1, \ldots$

З рівностей (3.49), (3.71) та (3.67), (3.68) випливає аналог базової леми про співвідношення $\{x^*(y), y^*\} \in \mathcal{E}_0$ для розв'язку системи (3.49), (3.71). Наслідком цього є таке твердження.

Лема 3.7. *Нехай* $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *виконуються рівності* (3.67), (3.68) *та нерівність*

$$
\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) f(t) dt \neq 0.
$$

Тоді справджуються рівності

$$
\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \left(x^{(n+1)} - x^*(t) \right) dt + \left(y^{(n)} - y^* \right) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3.72}
$$

для послідовності $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$, *отриманої за допомогою формул* (3.65), (3.66).

З формул (3.65), (3.66) за цих припущень отримаємо

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \Big[-\int\limits_{t_1}^{t} k(t,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} k(t,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds \Big] + \\ + \frac{\alpha_0^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \Big(x^{(n)}(t) - x^*(t) \Big) dt. \tag{3.73}$$

З рівностей (3.65) та (3.49) знаходимо

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds - \\ - \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t_2,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds - \\ - a^{(n)}(t) \Big(y^{(n)} - y^* \Big) + a^{(n)}(t) \Big(y^{(n+1)} - y^* \Big). \tag{3.74}$$

Звідси та з (3.73) випливає рівність

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds - \\ - \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} k(t_2,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds - \\ - \frac{(1-\lambda)a^{(n)}(t)}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \Big(x^{(n)}(t) - x^*(t) \Big) dt + \\ + \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \Big[- \int\limits_{t_1}^{t} k(t,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{t-t_1}{t_2-t_1} k(t_2,s) \Big(x^{(n)}(s) - x^*(s) \Big) ds \Big]. \tag{3.75}$$

Нехай

$$T = t_2 - t_1, \quad |k(t,s)| \leqslant q_0, \quad |\varphi(s)| \leqslant q_1. \tag{3.76}$$

Тоді з рівностей (3.67), (3.68) та (3.75) випливає, що

$$|a^{(n)}(t)| \leqslant \frac{q_0}{q_1}, \quad \alpha_0^{(n)} = \lambda + q_0 T$$

та

$$\|x^{(n+1)}(t) - x^*(t)\| \leqslant q_0 T \left(2 + \frac{2q_0 T + 1 - \lambda}{1 + q_0 T} \right) \|x^{(n)}(t) - x^*(t)\|.$$

У цьому випадку маємо такий підсумок.

Теорема 3.4. *Якщо справджується співвідношення*

$$q_0 T \left(2 + \frac{2q_0 T + 1 - \lambda}{1 + q_0 T} \right) \leqslant q < 1,$$

то ітераційний процес (3.65), (3.66) *збігається до розв'язку системи* (3.49), (3.71) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Для задачі (3.47), (3.48) можна побудувати багатопараметричні алгоритми. Зокрема, для двопараметричного випадку можна використати формули

$$k_1(t,s) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} k(t,s), \quad k_2(t,s) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} k(t_2, s),$$

$$f(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x_1 + \frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} x_2 + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t} (t-s) b(s) ds +$$

$$+ \frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) b(s) ds,$$

де

$$k(t,s) = a_1(s) + (t-s)\left(a_0(s) - a_1'(s)\right).$$

Рівняння (3.49) запишемо у вигляді

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} k(t,s) x(s) ds - \int\limits_{t_0}^{t_1} k_1(t,s) x(s) ds - \int\limits_{t_0}^{t_2} k_2(t,s) x(s) ds$$

і приєднаємо до нього допоміжні рівняння

$$
\begin{aligned}
y_1 = \lambda_1 y_1 - \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) f(t) dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) dt \int\limits_{t_0}^{t} k(t,s) x(s) ds + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) k_2(t,s) x(s) ds + \int\limits_{t_0}^{t} \beta_1(s) x(s) ds, \\
y_2 = \lambda_2 y_2 - \int\limits_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) f(t) dt - \int\limits_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) dt \int\limits_{t_0}^{t} k(t,s) x(s) ds + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) dt \int\limits_{t_0}^{t} k_1(t,s) x(s) ds + \int\limits_{t_0}^{t_2} \beta_2(s) x(s) ds,
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

де $t_0 \in [t_1, t_2]$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – задані, неперервні на $[t_1, t_2]$ функції.

В іншому випадку можна використати формули

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) a_1^{(n)}(t) dt + \alpha_{11}^{(n)} = \lambda_1,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) a_2^{(n)}(t) dt + \alpha_{12}^{(n)} = 0,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) a_2^{(n)}(t) dt + \alpha_{21}^{(n)} = 0,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t) a_2^{(n)}(t) dt + \alpha_{22}^{(n)} = \lambda_2.$$

Для неперервних при $t \in [t_1, t_2]$ функцій $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, які вважатимемо заданими, постулюємо рівності

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} k_1(t,s) \varphi_1(t) dt = \lambda_1 \varphi_1(s) - \beta_1(s),$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_2} k_2(t,s) \varphi_2(t) dt = \lambda_2 \varphi_2(s) - \beta_2(s).$$

Для побудови ітераційного процесу використовуємо формули

$$x^{(n+1)}(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x^{(n)}(s)ds + a_1^{(n)}(t)\left(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)}\right) + a_2^{(n)}(t)\left(y_2^{(n)} - y_2^{(n+1)}\right),$$

$$y_1^{(n+1)} = \lambda_1 y_1^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)dt \int_{t_0}^{t_2} k_2(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t)f(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \beta_1(s)x^{(n)}(s)ds + \alpha_{11}^{(n)}\left(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)}\right) + \alpha_{12}^{(n)}\left(y_2^{(n)} - y_2^{(n+1)}\right),$$

$$y_2^{(n+1)} = \lambda_2 y_2^{(n+1)} - \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t} k(t,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)dt \int_{t_0}^{t_1} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds - \int_{t_0}^{t_2} \varphi_2(t)f(t)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_2} \beta_2(s)x^{(n)}(s)ds + \alpha_{21}^{(n)}\left(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)}\right) + \alpha_{22}^{(n)}\left(y_2^{(n)} - y_2^{(n+1)}\right).$$

Багатопараметричні аналоги наведених алгоритмів можна побудувати для кількості параметрів $N > 2$ за схожими до наведених схем для інтегральних рівнянь у попередніх параграфах. Схема обґрунтування цих алгоритмів тільки в подробицях відрізняється від описаної для інтегральних рівнянь.

§ 15. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку з лінійно перетвореним аргументом

Диференціальні рівняння з відхиленням аргументу трапляються як математичні моделі процесів і явищ у біології, в медицині, в екології, в задачах передачі сигналів і т.п.

Застосуємо агрегаційно-ітеративний підхід до лінійного диференціального рівняння другого порядку з лінійно перетвореним аргументом. Розглядатимемо рівняння

$$x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x'(\gamma t) + f(t) \tag{3.78}$$

з крайовими умовами

$$x(0) = x_1, \quad x(l) = x_2. \tag{3.79}$$

Тут $a(t)$, $b(t)$ – дійсні двічі неперервно диференційовні функції при $t \in [0, l]$, $f(t)$ – дійсна неперервна на $[0, l]$ функція, $\gamma \in (0, 1)$. Задачу (3.78), (3.79) за допомогою елементарних викладок можна звести до інтегрального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} x(t) = p(t) + \int_0^l k_1(t,s)x(s)ds + \int_0^l k_2(t,s)x(\gamma s)ds - \\ - \frac{t}{l}\int_0^l k_1(l,s)x(s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l k_2(l,s)ds, \end{aligned} \tag{3.80}$$

де

$$p(t) = \frac{l-t}{l}x_1 + \frac{t}{l}x_2 + \int_0^l (t-s)f(s)ds - \frac{t}{l}\int_0^l (l-s)f(s)ds,$$

$$k_1(t,s) = a(s) - (t-s)a'(t), \qquad k_2(t,s) = \frac{1}{\gamma}\left[b(s) - (t-s)b'(t)\right].$$

До рівняння (3.80) приєднаємо допоміжне рівняння

$$
\begin{aligned}
y = \lambda y - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_1(t,s)x(s)ds - \\
- \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_2(t,s)x(\gamma s)ds,
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

в якому дійсне число $\lambda \neq 1$ та дійсна неперервна при $t \in [0,l]$ функція $\varphi(t)$ задовольняють рівняння

$$
\int_0^l \frac{t}{l} k_1(l,s)\varphi(t)dt = \lambda\varphi(s), \qquad \int_0^l \frac{t}{l} k_2(l,s)\varphi(t)dt = 0. \tag{3.82}
$$

Означимо множину $\mathcal{E}$ як сукупність пар $\{x(t), y\}$ $(x(t) \in E,\ y \in E')$, де E – простір неперервних на $[0,l]$ функцій, E' — множина дійсних чисел, які задовольняють рівність

$$
\int_0^l \varphi(t)x(t)dt + y = 0. \tag{3.83}
$$

Аналогами базових лем, про які йшлося в попередніх викладках, є такі твердження.

Лема 3.8. *Якщо* $\lambda \neq 1$, *то при* $x(t) = x^*(t)$, $y = y^*$, *де* $\{x^*(t), y^*\}$ *є розв'язком системи* (3.80), (3.81), *справджується рівність* (3.83).

Доведення. З рівностей (3.80)-(3.82) випливає, що

$$
\int_0^l \varphi(t)x^*(t)dt + y^* = \int_0^l \varphi(t)p(t)dt + \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_1(t,s)x^*(s)ds +
$$

$$
+ \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)x^*(s)ds -
$$

$$
- \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_2(l,s)x^*(\gamma s)ds + \lambda y^* - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt -
$$

$$-\int_0^l \varphi(t)dt\int_0^l k_1(t,s)x^*(s)ds-\int_0^l \varphi(t)dt\int_0^l k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds=$$

$$=\lambda y^*-\int_0^l x^*(s)ds\int_0^l k_1(l,s)\varphi(t)dt-\int_0^l x^*(\gamma s)ds\int_0^l \frac{t}{l}k_1(l,s)\varphi(t)dt=$$

$$=\lambda\left(y^*+\int_0^l \varphi(s)x^*(s)ds\right).$$

Це дає підставу для висновку, що рівність (3.83) справджується, тобто $\{x^*(t),y^*\}\in\mathcal{E}$. $\square$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$\begin{gathered}x^{(n+1)}(t)=p(t)+\int_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds+\int_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds-\\-\frac{t}{l}\int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds-\frac{t}{l}\int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\gamma s)ds+\\+a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right),\end{gathered}\tag{3.84}$$

$$\begin{gathered}y^{(n+1)}=\lambda y^{(n+1)}-\int_0^l \varphi(t)p(t)dt-\int_0^l \varphi(t)dt\int_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds-\\-\int_0^l \varphi(t)dt\int_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds.\end{gathered}\tag{3.85}$$

Лема 3.9. *Нехай задана неперервна за сукупністю аргументів функція $a(x(t),t)$, де*

$$a^{(n)}(t)=a\left(x^{(n)},t\right),$$

причому при $\lambda\neq 1$ справджується рівність

$$\int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)dt=\lambda.\tag{3.86}$$

Якщо $\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\}\in\mathcal{E}$, то при $n=0,1,\ldots$ $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}\in\mathcal{E}$.

Доведення. Із співвідношень (3.84), (3.85) та умови (3.86) випливає, що

$$\int_0^l \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} = \int_0^l \varphi(t)p(t)dt + \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds+$$

$$+\int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + \int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right)dt+$$

$$+\lambda y^{(n+1)} - \int_0^l \varphi(t)p(t)dt - \int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^l \varphi(t)dt \int_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds = \lambda y^{(n+1)} - \int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^l \frac{t}{l}\varphi(t)dt \int_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right)\int_0^l \varphi(t)a^{(n)}(t)dt.$$

Отже,

$$\int_0^l \varphi(t)x^{(n+1)}(t)dt + y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + \lambda \int_0^l \varphi(s)x^{(n)}(s)ds+$$

$$+\lambda\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) = \lambda\Big(\int_0^l \varphi(t)x^{(n)}(t)dt + y^{(n)}\Big) = 0.$$

Тому на основі принципу математичної індукції можна вважати лему доведеною. □

Очевидним наслідком лем 3.8 та 3.9 є рівність

$$\int_0^l \varphi(t)\left(x^{(n)}(t) - x^*(t)\right)dt + \left(y^{(n)} - y^*\right) = 0 \tag{3.87}$$

для $n = 0, 1, \ldots$

Позначимо

$$u = \gamma s,$$

$$h_1(t,s) = \frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$h_2(t,s) = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{t}{l}k_1(l,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_s^l k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big).$$

Теорема 3.5. *Нехай* $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *а також виконуються нерівності*

$$|k_1(t,s)| \leqslant k_1, \quad |k_2(t,s)| \leqslant k_2, \quad |h_1(t,s)| \leqslant h_1, \quad |h_2(t,s)| \leqslant h_2, \qquad (3.88)$$

$$\left(k_1 + h_1 + \frac{1}{\gamma}(k_2 + h_2)\right) l = q < 1. \qquad (3.89)$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}(t)\}$ *збігається рівномірно на* $[0,l]$ *до розв'язку рівняння* (3.80) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Доведення. Згідно з лемою 3.9 $\{x^{(n+1)}(t), y^{(n+1)}\} \in \mathcal{E}$. Розглянемо різницю $(n+1)$-го наближення, що задається формулою (3.84), і розв'язку $x^*(t)$ рівняння (3.80). Отримуємо

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = p(t) + \int\limits_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds - \frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)x^{(n)}(s)ds -$$

$$-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + a^{(n)}(t)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) -$$

$$-p(t) - \int\limits_0^l k_1(t,s)x^*(s)ds - \int\limits_0^l k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds +$$

$$+\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)x^*(s)ds+\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)x^*(\gamma s)ds=$$

$$=\int\limits_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+\int\limits_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$

$$-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+$$

$$+a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^*\right)-a^{(n)}(t)\left(y^{(n+1)}-y^*\right).$$

Із (3.85) та (3.81) знаходимо

$$y^{(n+1)}-y^*=\lambda(y^{(n+1)}-y^*)-\int\limits_0^l \varphi(t)p(t)dt-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds-\lambda y^*+\int\limits_0^l \varphi(t)p(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_1(t,s)x^*(s)ds+\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds=$$

$$=\lambda\left(y^{(n+1)}-y^*\right)-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds.$$

Підставивши знайдений результат у вираз для різниці $x^{(n+1)}(t)-x^*(t)$ та враховуючи (3.87), одержимо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\int\limits_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_1(l,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$

$$-\frac{t}{l}\int\limits_0^l k_2(l,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds - a^{(n)}(t)\int\limits_0^l \varphi(s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_0^l \varphi(t)dt\int\limits_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds.$$

Звідси після зміни порядку інтегрування у відповідних доданках отримаємо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\int\limits_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^l \left(\frac{t}{l}k_1(l,s)+a^{(n)}(t)\varphi(s)\right)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^l \frac{t}{l}k_2(l,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_0^l \left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds\int\limits_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^l \frac{t}{l}k_2(l,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_0^l \left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds\int\limits_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_0^l \left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds\int\limits_s^l k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau=$$

$$= \int_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds + \int_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s) - x^*(\gamma s)\right)ds -$$

$$- \int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds -$$

$$- \int_0^l \left(\frac{t}{l}k_2(l,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int_s^l k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\right)\left(x^{(n)}(\gamma s) - x^*(\gamma s)\right)ds.$$

Звідси матимемо

$$x^{(n+1)}(t) - x^*(t) = \int_0^l k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds +$$

$$+ \int_0^l k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s) - x^*(\gamma s)\right)ds -$$

$$- \int_0^l \Big(\frac{t}{l}k_1(l,s) + a^{(n)}(t)\varphi(s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int_s^l k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds -$$

$$- \int_0^l \left(\frac{t}{l}k_2(l,s) - \frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int_s^l k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\right)\left(x^{(n)}(\gamma s) - x^*(\gamma s)\right)ds.$$

Враховуючи позначення для $h_1(t,s)$ і $h_2(t,s)$ та оцінки (3.88), (3.89), матимемо, що

$$\|x^{(n+1)} - x^*\| \leqslant q\|x^{(n)} - x^*\| \leqslant q^{n+1}\|x^{(0)} - x^*\|.$$

З цього випливає збіжність ітераційних наближень $x^{(n)}(t)$ з лінійною швидкістю до розв'язку $x^*(t)$ рівняння (3.80), отже, й до розв'язку крайової задачі (3.78), (3.79). $\Box$

§ 16. Лінійні диференціальні рівняння нейтрального типу з лінійно перетвореним аргументом

Диференціальні рівняння нейтрального типу з лінійно перетвореним аргументом трапляються при моделюванні економічних процесів, в задачах передачі сигналів та ін. Відомі різні підходи до побудови наближених розв'язків таких рівнянь, зокрема, скінченно-різницеві методи, методи апроксимації рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь і т.п.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння нейтрального типу другого порядку з лінійно перетвореним аргументом

$$\begin{gathered} x''(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x(\gamma t) + b_0(t)x'(t) + \\ + b_1(t)x'(\gamma t) + d(t)x''(\gamma t) + f(t), \end{gathered} \tag{3.90}$$

де $\gamma \in (0,1)$, з крайовими умовами

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad (0 < t_1 < \infty). \tag{3.91}$$

Вважаємо, що функції $a_0(t)$, $a_1(t)$, $f(t)$ є неперервними, $b_0(t)$, $b_1(t)$ – неперервно диференційовні на інтервалі $(0, t_1)$, а функція $d(t)$ – двічі неперервно диференційовна на цьому інтервалі. Інтегруючи почленно обидві частини рівняння (3.90) на $[0, t]$ і використовуючи умову (3.91), матимемо

$$\begin{gathered} x'(t) = c_1 + b_0(t)x(t) + \frac{1}{\gamma}b_1(t)x(\gamma t) + \frac{1}{\gamma}d(t)x'(\gamma t) - \\ -\frac{1}{\gamma^2}d(t)x'(\gamma t) + \int\limits_0^t f(s)ds + \int\limits_0^t \Big(a_0(s) - b_0'(s)\Big)x(s)ds + \\ + \int\limits_0^t \left(a_1(s) - \frac{1}{\gamma}b_1'(s) + \frac{1}{\gamma^2}d''(s)\right) x(\gamma s)ds, \end{gathered}$$

де $c_1 = \left(1 - \dfrac{1}{\gamma}d(0)\right) x'(0) + \left(\dfrac{1}{\gamma^2}d'(0) - b_0(0) - \dfrac{1}{\gamma}b_1(0)\right) x_0$. Проінтегрувавши почленно одержану рівність, знайдемо

$$x(t) = c_1 t + \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}d(0)\right) x_0 + \frac{1}{\gamma^2}d(t)x(\gamma t) + \int\limits_0^t (t-s)f(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^t \Big(b_0(s)+(t-s)\Big(a_0(s)-b_0'(s)\Big)\Big)\,x(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t \left(\frac{1}{\gamma}b_1(s)-\frac{2}{\gamma^2}d'(s)+(t-s)\Big(a_1(s)-\frac{1}{\gamma}b_1'(s)+\frac{1}{\gamma^2}d''(s)\Big)\right)x(\gamma s)ds. \tag{3.92}$$

Позначимо

$$k_1(t,s)=b_0(s)+(t-s)(a_0(s)-b_0'(s)), \tag{3.93}$$

$$k_2(t,s)=\frac{1}{\gamma}b_1(s)-\frac{2}{\gamma^2}d'(s)+(t-s)\Big(a_1(s)-\frac{1}{\gamma}b_1'(s)+\frac{1}{\gamma^2}d''(s)\Big), \tag{3.94}$$

$$p(t)=\frac{t}{t_1}x_1-\left(1-\frac{1}{\gamma^2}d(0)\right)\left(1-\frac{t}{t_1}\right)x_0+$$
$$+\int\limits_0^t (t-s)f(s)ds-\frac{t}{t_1}(t_1-s)f(s)ds. \tag{3.95}$$

Завдяки цьому рівність (3.92) можемо записати у вигляді

$$x(t)=c_1t+\left(1-\frac{1}{\gamma^2}d(0)\right)x_0+\frac{1}{\gamma^2}d(t)x(\gamma t)+$$
$$+\int\limits_0^t (t-s)f(s)ds+\int\limits_0^t k_1(t,s)x(s)ds+\int\limits_0^t k_2(t,s)x(\gamma s)ds. \tag{3.96}$$

Враховуючи, що $x(t_1)=x_1$, звідси отримуємо

$$x(t)=p(t)+\frac{1}{\gamma^2}d(t)x(\gamma t)-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)x(\gamma t_1)+\int\limits_0^t k_1(t,s)x(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^t k_2(t,s)x(\gamma s)ds-\frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1} k_1(t,s)x(s)ds-\frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s)x(\gamma s)ds. \tag{3.97}$$

При побудові ітераційного процесу разом з рівнянням (3.97) використаємо додаткове рівняння

$$
\begin{gathered}
y=\lambda y-\int_0^{t_1}\varphi(t)p(t)dt-\frac{1}{\gamma^2}\int_0^{t_1}\varphi(t)d(t)x(\gamma t)dt+\\
+\frac{1}{\gamma^2 t_1}d(t_1)x(\gamma t_1)\int_0^{t_1}t\varphi(t)dt-\int_0^{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t}k_1(t,s)x(s)ds-\\
-\int_0^{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t}k_2(t,s)x(\gamma s)ds+\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)x(\gamma s)ds,
\end{gathered}
\tag{3.98}
$$

де дійсне число $\lambda\neq 1$ і неперервна на $[0,t_1]$ функція $\varphi(t)$ вибрані так, щоб справджувалася рівність

$$
\int_0^{t_1}k_1(t_1,s)\varphi(t)dt=-\lambda\varphi(s). \tag{3.99}
$$

Сукупність пар $\{x(t),y\}$, де $x(t)$ – неперервна на $[0,t_1]$ функція, а y – дійсне число, підпорядкованих рівності

$$
\int_0^{t_1}\varphi(t)x(t)dt+y=0 \tag{3.100}
$$

назвемо множиною $\mathcal{E}$.

Наведемо відповідні твердження щодо включення розв'язку $\{x^*(t),y^*\}$ системи (3.97), (3.98) та членів послідовності $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}$ до множини $\mathcal{E}$ за ситуації, коли послідовність $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}$ утворено за допомогою ітераційного алгоритму

$$
\begin{gathered}
x^{(n+1)}(t)=p(t)+\frac{1}{\gamma^2}d(t)x^{(n)}(\gamma t)-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}x^{(n)}(\gamma t_1)+\\
+\int_0^{t}k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds+\int_0^{t}k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds-\\
-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_1(t_1,s)x^{(n)}(s)ds-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds+\\
+a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right),
\end{gathered}
\tag{3.101}
$$

$$
\begin{gathered}
y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \int\limits_0^{t_1} \varphi(t)p(t)dt - \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1} \varphi(t)d(t)x^{(n)}(\gamma t)dt + \\
+\frac{1}{\gamma^2 t_1} d(t_1)x^{(n)}(\gamma t_1)\int\limits_0^{t_1} t\varphi(t)dt - \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds - \\
-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + \\
+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s)x^{(n)}(\gamma s)ds \quad (n = 0, 1, \ldots),
\end{gathered}
\tag{3.102}
$$

де неперервні функції $a^{(n)}(t)$ вибираються таким чином, щоб справджувались співвідношення

$$
\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)a^{(n)}(t)dt = \lambda. \tag{3.103}
$$

Лема 3.10. *Нехай $\lambda \neq 1$ і справджується умова (3.100). Тоді розв'язок $\{x^*(t), y^*\}$ системи (3.97), (3.98) належить до множини $\mathcal{E}$.*

Доведення. Перевіримо виконання умови (3.99). Справді,

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)dt + y^* = \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)p(t)dt + \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dtx^*(\gamma t)dt - \\
-\frac{1}{\gamma^2 t_1}d(t_1)x^*(\gamma t_1)\int\limits_0^{t_1} t\varphi(t)dt + \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_1(t,s)x^*(s)ds + \\
+\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds - \int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1} k_1(t_1,s)x^*(s)ds - \\
-\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s)x^*(\gamma s)ds + \lambda y^* - \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)p(t)dt - \\
-\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)d(t)x^*(\gamma t)dt + \frac{1}{\gamma^2 t_1}d(t_1)x^*(\gamma t_1)\int\limits_0^{t_1} t\varphi(t)dt -
\end{gathered}
$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t}k_1(t,s)x^*ds-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t}k_2(t,s)x^*(\gamma s)ds+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1}k_2(t_1,s)x^*(\gamma s)ds=\lambda y^*-\int\limits_0^{t_1}x^*(s)ds\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)\varphi(t)dt.$$

Звідси, використовуючи умову (3.99), одержуємо

$$\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)dt+y^*=\lambda\left(\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)x^*(t)dt+y^*\right).$$

Оскільки $\lambda\neq 1$, то можна вважати завершеним доведення леми. □

Лема 3.11. *Нехай* $\lambda\neq 1$ *та справджуються співвідношення (3.99), (3.103). Якщо* $\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\}\in\mathcal{E}$, *то послідовність* $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}$ *при* $n=0,1,\ldots$ *задовольняє умову* $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}\in\mathcal{E}$.

Доведення. Припустимо, що при $n=k$ $\{x^{(k)}(t),y^{(k)}\}\in\mathcal{E}$. Тоді

$$\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)x^{(k+1)}(t)dt+y^{(k+1)}=y^{(k+1)}\left(\lambda-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)a^{(k)}(t)dt\right)+$$

$$+y^{(k)}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)a^{(k)}(t)dt-\int\limits_0^{t_1}x^{(k)}(s)ds\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)\varphi(t)dt=$$

$$=\lambda\left(\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)x^{(k)}(t)dt+y^{(k)}\right)=0.$$

Звідси випливає, що $\{x^{(k+1)}(t),y^{(k+1)}\}\in\mathcal{E}$. На основі принципу індукції робимо висновок, що $\{x^{(n)}(t),y^{(n)}\}\in\mathcal{E}$ при $n=1,2,\ldots$ □

Позначимо

$$h_1(t,s)=-\frac{t}{t_1}k_1(t,s)-a^{(n)}(t)\varphi(s)-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$h_2(t,s)=-\frac{t}{t_1}k_2(t,s)-\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\Big(\frac{1}{\gamma^2}\varphi(s)ds+ \tag{3.104}$$

$$+\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_1}\frac{\tau}{t_1}k_2(t_1,s)\varphi(\tau)d\tau\Big).$$

Теорема 3.6. *Нехай справджуються умови:* $\lambda \neq 1$; $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$;

$$q < 1, \tag{3.105}$$

$$q = \frac{2\widetilde{d}}{\gamma^2} + t_1 \left(\frac{\widetilde{a}\widetilde{\varphi}\widetilde{d}}{\gamma^2|1-\lambda|} + \widetilde{k}_1 + \widetilde{k}_2 + \widetilde{h}_1 + \widetilde{h}_2 \right), \tag{3.106}$$

$$k_1(t,s) \leqslant \widetilde{k}_1, \quad k_2(t,s) \leqslant \widetilde{k}_2, \quad |h_1(t,s)| \leqslant \widetilde{h}_1, \quad |h_2(t,s)| \leqslant \widetilde{h}_2,$$

$$|a^{(n)}(t)| \leqslant \widetilde{a}, \quad |\varphi(s)| \leqslant \widetilde{\varphi}, \quad |d(t)| \leqslant \widetilde{d}.$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}(t)\}$, *побудована за допомогою формул (3.101), (3.102), збігається рівномірно до розв'язку* $x^*(t)$ *рівняння (3.97) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменникои* q. *При цьому збігається також послідовність пар* $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$ *до розв'язку* $\{x^*(t), y^*\}$ *системи (3.97), (3.98) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q *і* $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\} \in \mathcal{E} \quad \forall n = 0, 1, \ldots$

Доведення. Перш за все зазначимо, що вагома роль при дослідженні збіжності ітераційного процесу (3.101), (3.102) належить рівностям

$$\int\limits_0^{t_1} \varphi(t) \left(x^{(n)}(t) - x^*(t) \right) dt + y^{(n)} - y^* = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.107}$$

які випливають з лем 3.10 і 3.11 за умови, що $\{x^{(0)}(t), y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. З (3.98) та (3.102) отримуємо

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1-\lambda} \Big[\frac{1}{\gamma^2} \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) d(t_1) \left(x^{(n)}(\gamma t_1) - x^*(\gamma t_1) \right) dt -$$

$$- \frac{1}{\gamma^2} \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) d(t) \left(x^{(n)}(\gamma t) - x^*(\gamma t) \right) dt -$$

$$- \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) dt \int\limits_0^{t} k_1(t,s) \left(x^{(n)}(s) - x^*(s) \right) ds +$$

$$+\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t_1}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$
$$-\int_0^{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t_1}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+\qquad(3.108)$$
$$+\int_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)\Big].$$

Рівності (3.97), (3.101) дозволяють записати

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\frac{1}{\gamma^2}d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)-$$
$$-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)+$$
$$+\int_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+\int_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$
$$-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_1(t_1,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+$$
$$+a^{(n)}(t)\left(y^{(n)}-y^{(n+1)}\right).$$

Звідси та з (3.107), (3.108) випливає

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\frac{1}{\gamma^2}d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)+$$
$$+\int_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+\int_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$
$$-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_1(t_1,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-\frac{t}{t_1}\int_0^{t_1}k_2(t_1,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$
$$-a^{(n)}(t)\int_0^{t_1}\varphi(s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\Big[\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(s)ds\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds\int\limits_0^{t_1}\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds\int\limits_s^{t_1}k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds\int\limits_0^{t_1}\frac{\tau}{t_1}k_2(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big].$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\frac{1}{\gamma^2}d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)+$$

$$+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+\int\limits_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\Big[\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)+a^{(n)}(t)\varphi(s)+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big]\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\Big[\frac{t}{t_1}k_1(t_1,s)+a^{(n)}(t)\varphi(s)+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau\Big]\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t_1}\Big[\frac{t}{t_1}k_2(t,s)+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\Big(\frac{1}{\gamma^2}\varphi(s)d(s)+\int\limits_s^{t_1}k_1(\tau,s)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t_1}\frac{\tau}{t_1}k_2(t_1,s)\varphi(\tau)d\tau\Big)\Big]\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds.$$

Позначення (3.104) дають можливість записати отриману рівність у вигляді

$$
\begin{gathered}
x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=\frac{1}{\gamma^2}d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)- \\
-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)+ \\
+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda}\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(s)d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)ds+ \\
+\int\limits_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+ \\
+\int\limits_0^{t}k_2(t,s)\Big(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\Big)ds+ \\
+\int\limits_0^{t_1}h_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+ \\
+\int\limits_0^{t_1}h_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds.
\end{gathered}
\tag{3.109}
$$

Звідси випливає, що

$$
\begin{gathered}
|x^{(n+1)}(t)-x^*(t)|\leqslant\frac{1}{\gamma^2}|d(t)|\,|x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)|+ \\
+\frac{1}{\gamma^2}\frac{|t|}{t_1}|d(t_1)|\,|x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)|+ \\
+\frac{|a^{(n)}(t)|}{|1-\lambda|}\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\frac{|t|}{t_1}|\varphi(s)|\,|d(t_1)|\,|x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)|ds+ \\
+\int\limits_0^{t}|k_1(t,s)|\,|x^{(n)}(s)-x^*(s)|ds+\int\limits_0^{t}|k_2(t,s)|\,|x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)|ds+ \\
+\int\limits_0^{t_1}|h_1(t,s)|\,|x^{(n)}(s)-x^*(s)|ds+\int\limits_0^{t_1}|h_2(t,s)|\,|x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)|ds.
\end{gathered}
$$

Отже, враховуючи (3.104), (3.106), можна записати

$$\|x^{(n+1)}(t) - x^*(t)\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}|d(t)| + \frac{1}{\gamma^2}|d(t_1)| +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} \Big(\frac{1}{\gamma^2} \frac{|a^{(n)}(t)|}{|1-\lambda|} |\varphi(s)|\, |d(t_1)| + |k_1(t,s)| +$$

$$+ |k_2(t,s)| + |h_1(t,s)| + |h_2(t,s)| \Big) ds \|x^{(n)}(t) - x^*(t)\|.$$

Звідси знаходимо

$$\|x^{(n+1)}(t) - x^*(t)\| \leqslant q \|x^{(n)}(t) - x^*(t)\|.$$

Цим забезпечене виконання тверджень теореми щодо збіжності послідовностей $\{x^{(n)}(t)\}$ та $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}\}$ відповідно до розв'язку $x^*(t)$ рівняння (3.97) та до розв'язку $\{x^*(t), y^*\}$ системи (3.97), (3.98). Інші твердження теореми повторюють твердження лем 3.10 та 3.11. Тому можна вважати теорему доведеною. $\square$

В побудові і дослідженні алгоритму (3.101), (3.102) фігурують умови (3.97) і (3.98). Число λ і функція $\varphi(t)$ визначаються з рівності (3.99) очевидним чином. Можна вважати, що

$$\lambda = -\int\limits_0^{t_1} \frac{t}{t_1} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) = k_1(t_1, t). \tag{3.110}$$

Тому рівність (3.103) є доволі важким обмеженням при виборі $a^{(n)}(t)$. При цьому підпорядкування функції $\varphi(t)$ умовам (3.99), (3.103) водночас практично позбавляє можливості охопити алгоритмом (3.101), (3.102) самий метод однопараметричного ітеративного агрегування.

Дослідимо агрегаційно-ітеративний алгоритм, який охоплює алгоритм однопараметричного ітеративного агрегування та агрегаційно-ітеративний алгоритм (3.101), (3.102). Замість формули (3.102) використаємо формулу

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \int\limits_0^{t_1} \varphi(t)p(t)dt - \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1} \varphi(t)d(t)x^{(n)}(\gamma t)dt + \\ +\frac{1}{\gamma^2}d(t_1)x^{(n)}(\gamma t_1)\int\limits_0^{t_1} \frac{t}{t_1}\varphi(t)dt - \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_1(t,s)x^{(n)}(s)ds + \\ + \int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_2(t,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + \\ + \int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s)x^{(n)}(\gamma s)ds + \\ + \int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1} k_1(t_1,s)x^{(n)}(s)ds + \\ +\alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) \quad (n = 0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{3.111}$$

Рівність

$$\int\limits_0^{t_1} \varphi(t)a^{(n)}dt + \alpha_0^{(n)} = \lambda \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{3.112}$$

якою замінюємо рівність (3.103), можна вважати означенням чисел $\alpha_0^{(n)}$. Для цього алгоритму зберігаються леми 3.10 та 3.11 і рівність (3.107). Замість (3.108) отримаємо рівність

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\Bigg[\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1) - x^*(\gamma t_1)\right)dt - \\ -\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t) - x^*(\gamma t)\right)dt - \\ -\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t} k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s) - x^*(s)\right)ds + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-\\
&-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+\\
&+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)\Bigg]+\\
&+\frac{\alpha_0^{(n)}}{1-\lambda-\alpha_0^{(n)}}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)\left(x^{(n)}(t)-x^*(t)\right)dt.
\end{aligned}
\tag{3.113}
$$

Тому можна отримати

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)}(t)-x^*(t)=&\frac{1}{\gamma^2}d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)-\\
&-\frac{1}{\gamma^2}\frac{t}{t_1}d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)+\\
&+\int\limits_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+\\
&+\int\limits_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds-\\
&-\frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1}k_1(t_1,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds-\\
&-\frac{t}{t_1}\int\limits_0^{t_1}k_2(t_1,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+\\
&+a^{(n)}(t)\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)\left(x^{(n)}(t)-x^*(t)\right)dt+\\
&+\frac{a^{(n)}(t)}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\Bigg[\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)d(t_1)\left(x^{(n)}(\gamma t_1)-x^*(\gamma t_1)\right)dt-
\end{aligned}
$$

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)d(t)\left(x^{(n)}(\gamma t)-x^*(\gamma t)\right)dt- \\
-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t}k_1(t,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds+ \\
+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1}k_1(t_1,s)\left(x^{(n)}(s)-x^*(s)\right)ds- \\
-\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t}k_2(t,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)ds+ \\
+\int\limits_0^{t_1}\frac{t}{t_1}\varphi(t)dt\int\limits_0^{t_1}k_2(t_1,s)\left(x^{(n)}(\gamma s)-x^*(\gamma s)\right)+ \\
\left.\frac{\alpha_0^{(n)}}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\int\limits_0^{t_1}\varphi(t)\left(x^{(n)}(t)-x^*(t)\right)dt\right].
\end{gathered} \tag{3.114}$$

Таким чином, отримаємо рівність

$$x^{(n+1)}-x^*=H^{(n)}\left(x^{(n)}-x^*\right),$$

в якій оператор $H^{(n)}$ означений правою частиною рівності (3.114). Очевидно, що для збіжності процесу достатньо, щоб справджувалися співвідношення

$$\|H^{(n)}\|\leqslant q<1,$$

якщо $\{x^{(0)}(t),y^{(0)}\}\in\mathcal{E}$, де множину $\mathcal{E}$ означено за рівністю (3.100).

Застосуємо аналог алгоритму (3.101), (3.102) до рівняння вигляду

$$\begin{gathered}
x''(t)=a_0(t)x(t)+a_1(t)x(\gamma t)+b_0(t)x'(t)+b_1(t)x'(\gamma t)+ \\
+d(t)x''(\gamma t)+f\left(t,x(t),x(\gamma t)\right)
\end{gathered} \tag{3.115}$$

з крайовими умовами (3.91). Після двократного почленного інтегрування рівності (3.114), використовуючи крайові умови (3.91), отримаємо інтегральне рівняння

$$
\begin{gathered}
x(t) = p_0(t) + \frac{1}{\gamma^2} d(t) x(\gamma t) - \frac{1}{\gamma^2} \frac{t}{t_1} d(t_1) x(\gamma t_1) + \int\limits_0^t k_1(t,s) x(s) ds - \\
- \frac{t}{t_1} \int\limits_0^{t_1} k_1(t_1,s) x(s) ds + \int\limits_0^t k_2(t,s) x(\gamma s) ds - \frac{t}{t_1} \int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s) x(\gamma s) ds + \\
+ \int\limits_0^t (t-s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds - \int\limits_0^{t_1} \frac{t}{t_1} (t_1 - s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds.
\end{gathered} \tag{3.116}
$$

Тут замість формул (3.95) маємо

$$
p_0 = p_0(t) = \frac{t}{t_1} x_1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} d(0)\right) \left(1 - \frac{t}{t_1} x_0\right), \tag{3.117}
$$

а $k_1(t,s)$, $k_2(t,s)$ означені за формулами (3.93), (3.94). Допоміжне рівняння з допоміжним невідомим y має вигляд

$$
\begin{gathered}
y = \lambda y - \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) p_0(t) dt - \frac{1}{\gamma^2} \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) d(t) x(\gamma t) dt - \\
- \frac{1}{\gamma^2} \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) \frac{t}{t_1} d(t_1) x(\gamma t_1) dt - \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) dt \int\limits_0^t k_1(t,s) x(s) ds + \\
+ \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) \frac{t}{t_1} dt \int\limits_0^{t_1} k_1(t,s) x(s) ds - \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) dt \int\limits_0^t k_2(t,s) x(\gamma s) ds + \\
+ \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) \frac{t}{t_1} dt \int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s) x(\gamma s) ds - \\
- \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) dt \int\limits_0^t (t-s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds + \\
+ \int\limits_0^{t_1} \varphi(t) \frac{t}{t_1} dt \int\limits_0^{t_1} (t_1 - s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds.
\end{gathered} \tag{3.118}
$$

Вважаємо, що $\lambda \neq 1$ і що неперервна на $[0, t_1]$ функція $\varphi(t)$ задовольняє рівність (3.99). Запишемо рівняння (3.116) у вигляді

$$x = p_0 + Ax + Fx, \tag{3.119}$$

де p_0 означено за формулою (3.117), оператори Ax та Fx означені за формулами

$$\begin{gathered} Ax = \frac{1}{\gamma^2} d(t) x(\gamma t) - \frac{1}{\gamma^2} \frac{t}{t_1} d(t_1) x(\gamma t_1) + \int\limits_0^t k_1(t,s) x(s) ds - \\ - \frac{t}{t_1} \int\limits_0^{t_1} k_1(t_1,s) x(s) ds + \int\limits_0^t k_2(t,s) x(\gamma s) ds - \frac{t}{t_1} \int\limits_0^{t_1} k_2(t_1,s) x(\gamma s) ds, \end{gathered} \tag{3.120}$$

$$Fx = \int\limits_0^t (t-s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds - \int\limits_0^{t_1} \frac{t}{t_1} (t_1 - s) f(s, x(s), x(\gamma s)) ds. \tag{3.121}$$

Задамо $\widetilde{A}$ таким чином, щоб справджувалась рівність

$$\Big((A^* + \widetilde{A}^*) \varphi, x \Big) = \lambda (\varphi, x),$$

де $A^*, \widetilde{A}^*$ – спряжені оператори з A та $\widetilde{A}$. Допоміжне рівняння щодо y матиме вигляд

$$y = \lambda y + (\widetilde{A} \varphi, x) - (\varphi, p_0) - (\varphi, Fx). \tag{3.122}$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = p_0 + Ax^{(n)} + Fx^{(n)} + a^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)} \right), \tag{3.123}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - (\widetilde{A}^* \varphi, x^{(n)}) - (\varphi, p_0) - \\ - (\varphi, Fx^{(n)}) + \alpha_0^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)} \right), \end{gathered} \tag{3.124}$$

постулюючи умову (3.112), яку можна прийняти за означення $\alpha_0^{(n)}$ при заданих $\lambda, \varphi, \alpha^{(n)}(t)$. Леми 3.10, 3.11 і рівність (3.107), яка випливає з цих лем, зберігається.

Для дослідження збіжності алгоритму (3.123), (3.124) можна застосувати результати другого розділу.

Розділ 4

Агрегаційно-ітеративні аналоги деяких ітераційних методів

Однією з основних відмінностей алгоритмів, які розглядаються в цьому розділі, від досліджених в [40] алгоритмів для нелінійних рівнянь є те, що вимогу про існування оберненого оператора $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$ замінюємо припущенням про існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$, який не залежить від x. При цьому отримуємо простіші умови збіжності алгоритмів.

§ 17. Абстрактна схема побудови і дослідження агрегаційно-ітеративних алгоритмів для нелінійних рівнянь

Розглядатимемо рівняння вигляду

$$x = Ax + Fx, \tag{4.1}$$

де $A : E \to E, \quad F : E \to E$ є неперервними операторами, що діють в банаховому просторі E, причому A є лінійним оператором, оператор F є, взагалі кажучи, нелінійним. Вважаємо заданими лінійні неперервні оператори $S : E \to E', \quad \Lambda : E' \to E'$, де E' – банахів простір, який в загальному випадку не є тотожним з E. Вважаємо, що справджується рівність

$$SA = \Lambda S. \tag{4.2}$$

Використовуватимемо також допоміжне рівняння

$$y = \Lambda y - SFx. \tag{4.3}$$

Будемо досліджувати систему, складену з рівнянь (4.1), (4.3), ініціюючи цим "занурення" простору E в простір $\widetilde{E} : E \times E'$, запровадивши в $\widetilde{E}$ норму пар $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$ в той чи інший спосіб. Позначатимемо через θ та θ' нульові елементи в E та E', а через I та I' одиничні оператори в в E та E'. В просторі $\widetilde{E}$ означимо підпростір $\mathcal{E}$ за допомогою співвідношення

$$\mathcal{E} = \{\{x, y\} : Sx + y = \theta',\, x \in E,\, y \in E'\}.$$

Задамо оператор $a(x)w$, який є неперервним щодо $x \in E$ лінійним неперервним щодо $w \in E'$, причому при $x \in E$, $w \in E'$ оператор $a(x)w$ отримує значення з E. Постулюємо умову

$$Sa(x) = \Lambda(x \in E). \tag{4.4}$$

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + Fx^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) \tag{4.5}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SFx^{(n)}. \tag{4.6}$$

Наведемо формулювання лем, які є аналогами двох базових лем з попередніх викладів, доведення яких пропускаємо, оскільки схема їх обґрунтування повторює схему доведення зазначених лем з попередніх параграфів.

Лема 4.1. *Нехай справджується умова (4.2) та існує обернений оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$. *Тоді розв'язок* $\{x^*, y^*\}$ $(x^* \in E, y^* \in E')$ *системи (4.1), (4.3) задовольняє співвідношення* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.

Лема 4.2. *Нехай справджуються умови (4.2), (4.4) і задані* $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \in E'$, *для яких маємо* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. *Тоді при* $n = 1, 2, \ldots$ *матимемо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.

Задамо додатково лінійні неперервні оператори $\Psi^{(n)} : E' \to E$, $\Psi_0^{(n)} : E' \to E'$. Умови наведених лем забезпечують виконання рівностей

$$\Psi^{(n)}S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \Psi^{(n)}\left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta, \tag{4.7}$$

$$\Psi_0^{(n)} S(x^{(n)} - x^*) + \Psi_0^{(n)}(y^{(n)} - y^*) = \theta', \tag{4.8}$$

які використаємо для отримання оцінок збіжності ітераційного процесу (4.5), (4.6). Позначимо

$$F_n' h = \int\limits_0^1 F' \left(x^{(n)} + \tau h \right) h d\tau, \tag{4.9}$$

маючи на увазі (див. напр., [7]) формулу

$$F(x+h) - Fx = \int\limits_0^1 F'(x + \tau h) h d\tau. \tag{4.10}$$

Із (4.3), (4.6) та (4.1), (4.5) одержимо відповідно

$$y^{(n+1)} - y^* = -(I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{F}_n' \left(x^{(n)} - x^* \right) \tag{4.11}$$

та

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = \left(A - \widetilde{F}_n' + a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{F}_n' \right) \left(x^{(n)} - x^* \right) + \\ + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Взявши до уваги (4.7), (4.8), можна замість (4.11), (4.12) записати

$$z^{(n+1)} - z^* = H^{(n)} \left(z^{(n)} - z^* \right), \tag{4.13}$$

де

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{12}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

$$\begin{gathered} h_{11}^{(n)} = A - \widetilde{F}_n' + a\left(x^{(n)}\right)(I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{F}_n' - \Psi^{(n)} S, \\ h_{12}^{(n)} = a\left(x^{(n)}\right) - \Psi^{(n)}, \\ h_{21}^{(n)} = (I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{F}_n' - \Psi_0^{(n)} S, \\ h_{22}^{(n)} = -\Psi_0^{(n)}, \\ z^{(n)} = \{x^{(n)}, y^{(n)}\} \qquad z^* = \{x^*, y^*\}. \end{gathered}$$

Вважаємо, що для пар $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$ запроваджено норму, наприклад, як евклідову норму пар чисел $\{\|x\|_E, \|y\|_{E'}\}$, де $\|x\|_E$ та $\|y\|_{E'}$ –

відповідні норми в E та в E'. Через $\|H^{(n)}\|_0$ позначимо відповідну норму в $\widetilde{E} = E \times E'$ оператора $H^{(n)}$.

Теорема 4.1. *Нехай справджуються умови (4.2), (4.4), існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. Якщо при $n = 0, 1, \ldots$ справджується співвідношення*

$$\|H^{(n)}\| \leqslant q < 1, \tag{4.15}$$

то послідовність $\{x^{(n)}\}$, побудована за допомогою формул (4.5), (4.6), збігається до розв'язку x^* рівняння (4.1) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.

Доведення. Наведені перед формулюванням теореми міркування зводять її доведення до використання лем 4.1 і 4.2 та співвідношень (4.13) – (4.15). □

З системи рівнянь (4.1), (4.3) та рівностей (4.11), (4.12), враховуючи (4.2) можна одержати

$$x^{(n+1)} - x^* = H_0^{(n)} \left(x^{(n)} - x^* \right), \tag{4.16}$$

де

$$H_0^{(n)} w = \left[A - \widetilde{F}_n' - a x^{(n)} (I' - \Lambda) S (I - A - \widetilde{F}_n') \right] w. \tag{4.17}$$

Теорема 4.2. *Нехай справджуються умови (4.2), (4.4), існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. Якщо при $n = 0, 1, \ldots$ виконується співвідношення*

$$\|H_0^{(n)}\|_E \leqslant q_0 < 1, \tag{4.18}$$

то послідовність $\{x^{(n)}\}$, утворена за допомогою алгоритму (4.5), (4.6), збігається до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (4.1) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q_0.

Доведення. Твердження теореми можна отримати як наслідок з теореми 4.1. □

Вибираючи тим чи іншим способом оператори $A, S, \Lambda, a(x), \Psi^{(n)}, \Psi_0^{(n)}$ можна конкретизувати ітераційний процес (4.5), (4.6) та отримувати достатні умови збіжності утворених алгоритмів. Зупинимось докладніше на випадку, коли рівняння (4.1) має вигляд

$$x = Ax + b, \tag{4.19}$$

де A є лінійним неперервним оператором, який діє з банахового простору E в E, а $b \in E$. Нехай E^* спряжений з E простір. За оператор S візьмемо лінійний неперервний функціонал $\varphi \in E^*$, тобто

$$Sx = (\varphi, x), \tag{4.20}$$

вважаючи, що E' є множиною дійсних чисел. За оператор Λ матимемо дію множення на число $\lambda \in E'$. Тому рівність (4.2) означає, що

$$(A^*\varphi, x) = \lambda(\varphi, x), \tag{4.21}$$

де A^* – спряжений з A оператор. Замість рівняння (4.3) будемо мати

$$y = \lambda y - (\varphi, b). \tag{4.22}$$

Множина $\mathcal{E}$ отримується як сукупність пар $\{x, y\}$ $(x \in E, y \in E')$, для яких

$$(\varphi, x) + y = 0. \tag{4.23}$$

Ітераційний процес (4.5), (4.6) опишуть формули

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{4.24}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - (\varphi, b). \tag{4.25}$$

При цьому оператор $a(x)$ означає дію множення на дійсне число $t \in E'$ елемента $a(x) \in E$. При

$$a(x) = \frac{Ax}{(\varphi, x)}. \tag{4.26}$$

ітераційний процес (4.24), (4.25) тотожний з однопараметричним випадком ітеративного агрегування тоді, коли справджується рівність (4.21).

Приклад 4.1. *Система*

$$x_1 = 0,28x_1 + 0,26x_2 + 0,02\sqrt{x_1} - 0,01x_2 + 15,155;$$

$$x_2 = 0,22x_1 + 0,15x_2 + 0,02\sqrt{x_1} + 0,01x_2 + 168,5$$

має розв'язок $x^* = \{100; 225\}$. *Запишемо цю систему у вигляді*

$$x = (A_1 + A_2)x + A_0(x) + b$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,24 \\ 0,1 & 0,12 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,02 \\ 0,12 & 0,12 \end{pmatrix},$$

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0,02\sqrt{x_1} & -0,01x_2 \\ 0,02\sqrt{x_1} & 0,01\sqrt{x_2} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 15,155 \\ 168,5 \end{pmatrix}.$$

При початковому наближенні $x^{(0)} = \{9; 1\}$, *використовуючи алгоритм (4.5), (4.6) та взявши* $A = A_1 + A_2$, $F(x) = A_0(x)$, *отримаємо*

$$x^{(1)} = \{102,90576; 224,95442\}, \quad x^{(2)} = \{99,818993; 224,48592\}.$$

§ 18. Однопараметричний аналог методу Ньютона

В обчислювальній практиці часто вживаними є методи, що поєднують ідеї кількох методів. завдяки чому вдається скористатися з можливостей кожного з них в отриманих синтетичних побудовах. Дослідимо алгоритм, сконструйований на основі ідей методу Ньютона і методів ітеративного агрегування для рівняння вигляду

$$x = Fx. \tag{4.27}$$

Нехай E – банахів простір, $F : E \to E$ є неперервним оператором. Позначимо через E' множину дійсних чисел. Використовуватимемо допоміжне рівняння

$$y = \lambda y - (\varphi, Fx) + \lambda(\varphi, x) \tag{4.28}$$

щодо невідомого $y \in E'$. Як і раніше, (φ, x) – значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах спряженого з E простору $E^*, \lambda \in E'$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$. Основний варіант методу Ньютона для рівняння (4.27) описує ітеративна формула

$$x^{(n+1)} = Fx^{(n)} + F'\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right), \tag{4.29}$$

де $F'(x)w$ – похідна Фреше від оператора F.

На практиці нечасто можна точно знайти обернений оператор $(I - F'(x))^{-1}$ при обчисленні чергової ітерації. Тому реальне використання алгоритму (4.29) здійснюється при заміні похідної оператора F тим чи іншим "близьким" до цієї похідної оператором. Тому замість ітераційного процесу (4.29) практично використовують алгоритм

$$x^{(n+1)} = Fx^{(n)} + A\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right), \tag{4.30}$$

з оператором $A(x)w$, який в тому чи іншому розумінні вважають близьким до $F'(x)w$. Вважаємо, що $A(x)w$ є лінійним щодо w, неперервним щодо x та w.

Ітераційний процес будуємо за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Fx^{(n)} + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{4.31}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, Fx^{(n)}\right) + \lambda\left(\varphi, x^{(n)}\right), \tag{4.32}$$

припускаючи, що функція $a(x)$ неперервно залежить від $x \in E$ і її значення при кожному $x \in E$ є елементами із E, причому справджується рівність

$$(\varphi, a(x)) = \lambda \tag{4.33}$$

для тих значень $x \in E$, для яких маємо, що

$$(\varphi, x) + y = 0 \quad (x \in E,\, y \in E'). \tag{4.34}$$

Сукупність таких пар $\{x, y\}$ $(x \in E,\, y \in E')$, які задовольняють рівність (4.34), назвемо множиною $\mathcal{E}$.

Ця множина при запровадженні норми пар $\{x, y\} \in \mathcal{E}$ за формулою $\|x, y\|^2 = \|x\|_E^2 + |y|_{E'}^2$ ($\|x\|$– норма елемента $x \in E$, $|y|$ – абсолютна величина числа $y \in E'$) є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$.

Наводимо два твердження, які є аналогами базових лем із попередніх параграфів.

Лема 4.3. *Якщо* $\{x^*, y^*\}$ *– розв'язок системи (4.27), (4.28), то* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. З (4.27), (4.28) випливає, що

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Fx^*) + \lambda y^* - (\varphi, Fx^*) + \lambda(\varphi, x^*).$$

Звідси отримуємо рівність

$$(1 - \lambda)\left((\varphi, x^*) + y^*\right) = 0,$$

яка при $\lambda \neq 1$ забезпечує виконання умови (4.34) для $\{x^*, y^*\}$. $\square$

Лема 4.4. *Нехай справджується умова (4.33) та* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. *Тоді при кожному* $n = 1, 2, \ldots$ *будемо мати* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Припускаючи, що при $n = k > 0$, $\{x^{(k)}, y^{(k)}\} \in \mathcal{E}$, на основі рівностей (4.31)-(4.33) знайдемо

$$\left(\varphi, x^{(k+1)}\right) + y^{(k+1)} = \left(\varphi, Fx^{(k)}\right) + \left(\varphi, a\left(x^{(k)}\right)\right)\left(y^{(k)} - y^{(k+1)}\right) +$$
$$+\lambda y^{(k+1)} - \left(\varphi, Fx^{(k)}\right) + \lambda\left(\varphi, x^{(k)}\right) = \lambda\left(\left(\varphi, x^{(k)}\right) + y^{(k)}\right) = 0.$$

Тому на основі принципу математичної індукції можемо вважати лему доведеною. $\square$

Якщо Ψ – який-небудь елемент з E, то з цих лем отримуємо

$$\Psi\left[\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^*\right] = \theta, \tag{4.35}$$

де θ – нульовий елемент із E. Якщо замість елемента Ψ в рівності (4.35) візьмемо дійсне число $\Psi_0 \neq 0$, то замість (4.35) матимемо

$$\Psi_0\left[\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^*\right] = 0,$$

З рівностей (4.27), (4.31) та (4.28), (4.32) отримуємо

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = Fx^{(n)} - Fx^* + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \end{gathered} \tag{4.36}$$

$$y^{(n+1)} - y^* = \lambda\left(y^{(n+1)} - y^*\right) - \left(\varphi, Fx^{(n)} - Fx^*\right) + \lambda\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right). \tag{4.37}$$

Скориставшись формулою (4.9) (див., також [7]), тобто для нашого випадку формулою

$$F(x+h) - Fx = \int\limits_0^1 F'(x+\tau h)hd\tau, \tag{4.38}$$

попередні рівності можна записати у вигляді

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = -\int\limits_0^1 F'\left(x^{(n)} + \tau\left(x^* - x^{(n)}\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)d\tau + \\ +a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \end{gathered} \tag{4.39}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = \lambda\left(y^{(n+1)} - y^*\right) + \\ +\left(\varphi, \int\limits_0^1 F'\left(x^{(n)} + \tau\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)d\tau + \right. \\ \left. + \lambda\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right)\right). \end{gathered} \tag{4.40}$$

Позначивши

$$\begin{gathered} \widetilde{A}_n\left(x^{(n)} - x^*\right) = \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) = \\ = \int\limits_0^1 F'\left(x^{(n)} + \tau\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)d\tau, \end{gathered} \tag{4.41}$$

надамо рівностям (4.39), (4.40) вигляду

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = -\widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n+1)} - y^*\right), \end{gathered} \tag{4.42}$$

$$\begin{gathered} y^{(n+1)} - y^* = \lambda\left(y^{(n+1)} - y^*\right) + \left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)\right) + \\ +\lambda\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right). \end{gathered} \tag{4.43}$$

Оскільки з (4.43) випливає, що

$$y^{(n+1)} - y^* = \frac{1}{1-\lambda}\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)\right) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right),$$

то, поєднуючи одержаний результат з (4.42), матимемо

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* = -\widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) + a\left(x^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \\ -\frac{a\left(x^{(n)}\right)}{1-\lambda}\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right)\right) - \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda} a\left(x^{(n)}\right)\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Позначимо

$$h_{11}\left(x^{(n)}\right) w = -\widetilde{A}\left(x^{(n)}\right) w - \frac{a\left(x^{(n)}\right)}{1-\lambda}\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)}\right)\right) w -$$

$$-\frac{\lambda}{1-\lambda} a\left(x^{(n)}\right)\left(\varphi, x^{(n)} - x^*\right),$$

$$h_{12}\left(x^{(n)}\right) z = a\left(x^{(n)}\right) z,$$

$$h_{21}\left(x^{(n)}\right) w = \frac{1}{1-\lambda}\left(\varphi, \widetilde{A}\left(x^{(n)} w\right)\right) + \frac{\lambda}{1-\lambda}(\varphi, w),$$

$$H\left(x^{(n)}\right)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}\left(x^{(n)}\right) w & h_{12}\left(x^{(n)}\right) z \\ h_{21}\left(x^{(n)}\right) w & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Припустимо, що для норми $\|H(x)\|$ оператора $H(x)$, означеного за (4.45) маємо

$$\|H(x)\| \leqslant q. \tag{4.46}$$

Теорема 4.3. *Нехай:*

а) справджується умова (4.33);

б) задані $x^{(0)} \in E$, $y^{(0)} \in E'$ *такі, що* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$*;*

в) $\lambda \neq 1$.

Нехай

$$q < 1. \tag{4.47}$$

Тоді послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, утворена за допомогою формул (4.31), (4.32), збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (4.27), (4.28) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.

Доведення. Твердження теореми випливає з (4.45), умови (4.47) та співвідношень (4.42), (4.43). □

Позначимо

$$\widetilde{h}_{11}\left(x^{(n)}\right)w = h_{11}\left(x^{(n)}\right)w - \Psi(\varphi, w),$$

$$\widetilde{h}_{12}\left(x^{(n)}\right)z = h_{12}\left(x^{(n)}\right)z - \Psi z,$$

$$\widetilde{h}_{21}\left(x^{(n)}\right)w = h_{21}\left(x^{(n)}\right)w - \Psi_0(\varphi, w),$$

$$\widetilde{h}_{22}\left(x^{(n)}\right)z = -\Psi z,$$

$$\widetilde{H}\left(x^{(n)}\right)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{h}_{11}\left(x^{(n)}\right)w & \widetilde{h}_{12}\left(x^{(n)}\right)z \\ \widetilde{h}_{21}\left(x^{(n)}\right)w & \widetilde{h}_{22}\left(x^{(n)}\right)z \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови а) – в) теореми 4.3. Якщо справджуються нерівності*

$$\|\widetilde{H}(x)\| \leqslant q < 1, \tag{4.49}$$

то послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, побудована за допомогою формул (4.31), (4.32), збігається до розв'язку $\{x^*, y^*\}$ системи (4.27), (4.28) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником $\widetilde{q}$.

Доведення. Твердження теореми випливає з (4.48), (4.49). □

§ 19. Загальний агрегаційно-ітеративний аналог методу Ньютона

Розглядатимемо рівняння (4.27) із, взагалі кажучи, нелінійним неперервним оператором $F : E \to E$. Задамо лінійні неперервні оператори $\Lambda : E' \to E'$, $S : E \to E'$, де E' – банахів простір, який не тотожний з простором E. Множину $\mathcal{E}$ означимо як сукупність пар $\{x, y\}$ елементів $x \in E$, $y \in E'$, для яких справджується рівність

$$Sx + y = \theta', \tag{4.50}$$

де θ' – нульовий елемент в E'. Рівняння (4.27) розглядатимемо разом з рівнянням

$$y = \Lambda y - SFx + \Lambda Sx, \tag{4.51}$$

яке містить додатковий невідомий елемент $y \in E'$.

Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Fx^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{4.52}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SFx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \Lambda Sx^{(n)}, \tag{4.53}$$

де оператори $a^{(n)} = a\left(x^{(n)}\right)$ та $\alpha_0^{(n)} = \alpha_0\left(x^{(n)}\right)$ означені при $x \in E$, $y \in E'$ і отримують значення відповідно з E і E'. Припускаємо, що справджується умова

$$Sa(x) + \alpha_0(x) = \Lambda \tag{4.54}$$

при $x \in E$. Сформулюємо аналоги лем 4.3 і 4.4.

Лема 4.5. *Нехай існує обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$, де I' – одиничний оператор в E'. Тоді розв'язок $\{x^*, y^*\}$ системи (4.27), (4.51) задовольняє співвідношення $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.*

Доведення. Очевидно, що

$$Sx^* + y^* = SFx^* + \Lambda y^* - SFx^* + \Lambda Sx^* = \Lambda(Sx^* + y^*).$$

Оскільки Λ не є тотожним оператором в E', то остання рівність означає виконання умови (4.50) для $\{x^*, y^*\}$. $\square$

Лема 4.6. *Нехай задані $x^{(0)} \in E, y^{(0)} \in E'$ такі, що $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$. Якщо виконується умова (4.54), то для послідовних наближень $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ побудованих за допомогою формул (4.52)(4.53), при $n = 0, 1, \ldots$ матимемо $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$.*

Доведення. Підставою застосування індукції є співвідношення

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SFx^{(n)} + Sa^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)} \right) +$$
$$+\Lambda y^{(n+1)} - SFx^{(n)} + \alpha_0^{(n)} \left(y^{(n)} -^{(n+1)} \right) + \Lambda Sx^{(n)} =$$
$$= \Lambda Sx^{(n)} + \left(\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha_0^{(n)} \right) y^{(n+1)} + \left(Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} \right) y^{(n)} =$$
$$= \Lambda \left(Sx^{(n)} + y^{(n)} \right).$$

Можна вважати, що цим лему доведено. □

Задамо оператори $\Psi : E' \to E$, $\Psi_0 : E' \to E'$, які вважаємо лінійними неперервними.

Лема 4.7. *Якщо справджуються умови лем 4.5 і 4.6, то матимемо рівності*

$$S \left(x^{(n)} - x^* \right) + y^{(n)} - y^* = \theta',$$

$$\Psi S \left(x^{(n)} - x^* \right) + \Psi \left(y^{(n)} - y^* \right) = \theta,$$

$$\Psi_0 S \left(x^{(n)} - x^* \right) + \Psi_0 \left(y^{(n)} - y^* \right) = \theta'.$$

Доведення. Лема очевидна як наслідок з лем 4.5 і 4.6. □

Нехай існує оператор $(I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}$. Рівності (4.27), (4.51) та (4.52)–(4.54) дають підставу для співвідношень

$$y^{(n+1)} - y^* = - \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)} \right)^{-1} \left[S \left(Fx^{(n)} - Fx^* \right) - \right.$$
$$\left. -\Lambda S \left(x^{(n)} - x^* \right) \right] + \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)} \right)^{-1} \alpha_0^{(n)} \left(y^{(n)} - y^* \right), \tag{4.55}$$

$$x^{(n+1)} - x^* = Fx^{(n)} - Fx^* +$$
$$+a^{(n)} \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)} \right)^{-1} \left[S \left(Fx^{(n)} - Fx^* \right) - \Lambda S \left(x^{(n)} - x^* \right) \right] + \tag{4.56}$$
$$+a^{(n)} \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)} \right)^{-1} (I' - \Lambda) \left(y^{(n)} - y^* \right).$$

Звідси, використовуючи лему 4.7, отримуємо

$$
\begin{gathered}
x^{(n+1)} - x^* = Fx^{(n)} - Fx^* + \\
+a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} S\left(Fx^{(n)} - Fx^*\right) - \\
-a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda S\left(x^{(n)} - x^*\right) - \Psi S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\
+a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} (I' - \Lambda)\left(y^{(n)} - y^*\right) - \Psi\left(y^{(n)} - y^*\right).
\end{gathered} \tag{4.57}
$$

$$
\begin{gathered}
y^{(n+1)} - y^* = \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda S\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\
-\Psi S\left(x^{(n)} - x^*\right) - \left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} S\left(Fx^{(n)} - Fx^*\right) + \\
+\left[\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \alpha_0^{(n)} - \Psi_0\right]\left(y^{(n)} - y^*\right).
\end{gathered} \tag{4.58}
$$

Позначимо

$$
H\left(x^{(n)}\right)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} w & h_{12}^{(n)} z \\ h_{21}^{(n)} w & h_{22}^{(n)} z \end{pmatrix}. \tag{4.59}
$$

$$
\begin{gathered}
h_{11}^{(n)} w = \widetilde{A}'_n w + a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}'_n w - \\
-\left[a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda S + \Psi S\right] w, \\
h_{12}^{(n)} z = \left[a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} (I' - \Lambda) - \Psi\right] z, \\
h_{21}^{(n)} w = \left[\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \Lambda - \Psi_0\right] Sw - \\
-\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} S\widetilde{A}'_n w, \\
h_{22}^{(n)} z = \left[\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1} \alpha_0^{(n)} - \Psi_0\right] z,
\end{gathered} \tag{4.60}
$$

де

$$
\begin{gathered}
\widetilde{A}'_n\left(x^{(n)} - x^*\right) = \widetilde{A}'\left(x^{(n)}\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) = \\
= \int\limits_0^1 F'\left(x^{(n)} + \tau\left(x^{(n)} - x^*\right)\right)\left(x^{(n)} - x^*\right) d\tau.
\end{gathered}
$$

Теорема 4.5. *Нехай* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}$, *справджується рівність (4.54),* $\lambda \neq 1$ *і існують обернені оператори* $\left(I' - \Lambda + \alpha_0^{(n)}\right)^{-1}$. *Якщо для оператора* $H(x)$, *означеного за допомогою формули (4.59), виконується умова*

$$\|H(x)\| \leqslant q < 1,$$

то послідовність $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ *утворена за допомогою формул (4.52), (4.53), збігається до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи (4.27), (4.51) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q.

Доведення. Формули (4.57), (4.58) при виконанні умов теореми означають, що твердження теореми підтверджуються. □

Зауваження 4.1. *Нехай умова (4.54) має вигляд*

$$Sa(x) = \Lambda. \tag{4.61}$$

В цьому випадку формулу (4.53) можна замінити на

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SFx^{(n)} + \Lambda Sx^{(n)},$$

що дасть можливість замість (4.60) для означення оператора $H(x)$ *використати формули*

$$h_{11}^{(n)} w = \widetilde{A}'_n w + a^{(n)}(I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{A}'_n w - [a^{(n)}(I' - \Lambda)^{-1}\Lambda S + \Psi S]w,$$

$$h_{12}^{(n)} z = (a^{(n)} - \Psi)z,$$

$$h_{21}^{(n)} w = \left((I' - \Lambda)^{-1}\Lambda - \Psi_0\right) Sw - (I' - \Lambda)^{-1} S \widetilde{A}'_n w,$$

$$h_{22}^{(n)} z = -\Psi_0 z.$$

Зберігши інші умови в теоремі 4.5 (з поправкою, що $\alpha_0(x)$ *є нульовим оператором) можна вважати, що твердження теореми 4.5 зберігаються.*

§ 20. Агрегаційно-ітеративна декомпозиція одного класу операторних рівнянь

Рівняння $x = Ax + b$ запишемо у вигляді

$$x = A_1 x + A_0 x + b. \tag{4.62}$$

Вважаємо, що $A_1, A_0 : E \to E$ є лінійними неперервними операторами, E – банахів простір, $b \in E$. Розглядатимемо випадок, коли A_0 має скінченну розмірність, а оператор A_1 має малий спектральний радіус. Припускаємо, що існує лінійний обернений оператор $(I - G)^{-1}$, де

$$G = I + A_0 + \ldots + A_0^{k-1} \quad (k < \infty), \tag{4.63}$$

I – тотожний оператор в E. Рівняння (4.62) можна подати у вигляді

$$x = GA_1 x + A_0^k x + Gb. \tag{4.64}$$

Можна переконатися, що оператор GA_1 має таку саму розмірність, яку має оператор A_1 (див. [17, стор. 150]).

Побудуємо агрегаційно-ітеративний аналог методу апроксимації оберненого оператора, описаного за допомогою формули

$$x^{(n+1)} = GA_1 x^{(n+1)} + A_0^k x^{(n)} + Gb. \tag{4.65}$$

Для цього до рівняння (4.64) приєднаємо допоміжну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_i = \lambda_i y_i - \left(\varphi_i, A_0^k x\right) - (\varphi_i, Gb) \quad (i = \overline{1, N}). \tag{4.66}$$

з допоміжними невідомими $y_1, \ldots, y_N$, $(N < \infty)$. Тут $\varphi_i \in E^*$, E^* – простір, спряжений з банаховим простором E, (φ_i, x) – значення лінійного функціоналу $\varphi_i \, (i = \overline{1, N})$ на елементах простору E. Функціонали φ_i і числа $\lambda_i \neq 1$ при $i = \overline{1, N}$, взагалі кажучи, задаємо довільно, причому задля зручності викладу вважаємо λ_i дійсними. Як і раніше, в просторі $\widetilde{E} = E \times R^N$, де R^N – евклідів простір розмірності N, означимо норму $\|x, y\|$ пар елементів $x \in E$, $y \in R^N$ як евклідову норму пар чисел $\|x\|, |y|$ за формулою $\|x, y\| = (\|x\|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}$. Тут $\|x\|$ – норма елемента x в E, $|y|$ – норма вектора $y = \{y_1, \ldots, y_N\}$ в R^N. В просторі $\widetilde{E}$ виокремимо підпростір $\mathcal{E}_0$ таких пар $\{x, y\} \, (x \in E, \, y \in R^N)$, для яких справджуються нерівності

$$(\varphi_i, x) + y_i = 0 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{4.67}$$

Для побудови одного з агрегаційно-ітеративних аналогів методу (4.65) використаємо формули

$$x^{(n+1)} = GA_1x^{(n)} + A_0^k x^{(n)} + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + Gb, \tag{4.68}$$

$$y_i^{(n+1)} = \lambda_i y_i^{(n+1)} - \left(\varphi_i, A_0^k x^{(n)} \right) - (\varphi_i, Gb) \quad (i = \overline{1, N}). \tag{4.69}$$

Елементи $a_j^{(n)} \in E$ означимо за формулами

$$a_j^{(n)} = a_j \left(x^{(n)} \right) = \frac{GA_1x^{(n)}}{\left(\varphi_j, x^{(n)} \right)} \quad (j = \overline{1, N},\ n = 0, 1, \ldots). \tag{4.70}$$

Припускаємо, що справджуються співвідношення

$$(GA_1)^* \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4.71}$$

$$\left(\varphi_i, a_i^{(n)} \right) = \lambda_i \quad (i = \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, \ldots), \tag{4.72}$$

$$\left(\varphi_j, a_j^{(n)} \right) = 0 \quad (i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, \ldots). \tag{4.73}$$

Достовірність двох тверджень, котрі є аналогами базових лем із попередніх параграфів, зводиться до того, що розв'язок $\{x^*, y^*\}$ в $\widetilde{E}$ системи (4.64), (4.66) належать множині $\mathcal{E}_0$, та що із співвідношення $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$ випливає належність множині $\mathcal{E}_0$ членів $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$ послідовності, побудованої за допомогою формул (4.68), (4.69) при $n = 1, 2, \ldots$ Обґрунтування першого з них отримується за допомогою співвідношень

$$(\varphi_i, x^*) + y^* = (\varphi_i, GA_1x^*) + \left(\varphi_i, A_0^k x^* \right) + (\varphi_i, Gb) + \lambda_i y_i^* -$$
$$- \left(\varphi_i, A_0^k x^* \right) - (\varphi_i, Gb) = \lambda_i y_i^* + ((GA_1)^* \varphi_i, x^*) = \lambda_i \left((\varphi_i, x^*) + y_i^* \right).$$

Для обґрунтування другого з них достатньо скористатися принципом математичної індукції, підставою для застосування якої є співвідношення

$$\left(\varphi_i, x^{(n+1)} \right) + y_i^{(n+1)} = \left(\varphi_i, GA_1x^{(n)} \right) + \left(\varphi_i, A^k x^{(n)} \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, a_j^{(n)} \right) \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)} \right) + (\varphi_i, Gb) + \lambda_i y_i^{(n+1)} -$$

$$-\left(\varphi_i, A_0^k x^{(n)}\right) - (\varphi_i, Gb) = \left((GA_1)^* \varphi_i, x^{(n)}\right) +$$
$$+\lambda_i y_i^{(n)} = \lambda_i \left(\left(\varphi_i, x^{(n)}\right) + y_i^{(n)}\right).$$

Звідси випливає, що $\{x^{(n+1)}, y^{(n+1)}\} \in \mathcal{E}_0$, якщо $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$. Тут $y = \{y_1, \ldots, y_N\}^T$. Отже, можна стверджувати, що справджуються рівності

$$\left(\varphi_i, x^{(n)} - x^*\right) + y_i^{(n)} - y^* = 0 \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4.74}$$

якщо $\lambda \neq 1$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$. Зазначимо, що при всякому $x^{(0)} \in E$ вектор $y^{(0)}$ можна вибрати так, щоб виконувались рівності

$$\left(\varphi_i, x^{(0)}\right) + y_i^{(0)} = 0 \quad (i = \overline{1, N}).$$

З (4.62), (4.66) та (4.68), (4.69) випливає, що

$$y_i^{(n+1)} - y^* = -\frac{1}{1 - \lambda_i}\left(\varphi_i, A_0^k\left(x^{(n)} - x^*\right)\right) \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4.75}$$

а також враховуючи (4.74), що

$$\begin{gathered} x^{(n+1)} - x^* = GA_1\left(x^{(n)} - x^*\right) - \\ -\sum_{j=1}^{N} \frac{GA_1 x^{(n)}}{\left(\varphi_j, x^{(n)}\right)}\left(\varphi_j, x^{(n)} - x^*\right) + A_0^k\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ +\sum_{j=1}^{N} \frac{GA_1 x^{(n)}}{(1 - \lambda_j)\left(\varphi_j, x^{(n)}\right)}\left(\varphi_j, A_0^k\left(x^{(n)} - x^*\right)\right). \end{gathered} \tag{4.76}$$

Позначивши $x^{(n)} - x^* = w_n$, запишемо (4.76) у вигляді

$$w_{n+1} = H^{(n)} w_n,$$

де оператор $H^{(n)}$ означений правою частиною рівності (4.76).

Теорема 4.6. *Нехай справджуються рівності (4.71) – (4.73), $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$. Якщо $\|H^{(n)}\| \leqslant q < 1$, то послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається до розв'язку x^* рівняння (4.62) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.*

Доведення. Достатньо скористатися рівністю (4.76). □

Задамо такі елементи $\psi_i \in E$ $(i = \overline{1,N})$, щоб виконувалась рівність

$$GA_1 x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j (\varphi_j, x), \tag{4.77}$$

причому

$$(\varphi_i, \psi_j) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = j, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = \overline{1,N}). \tag{4.78}$$

В такому разі будемо мати

$$a_j^{(n)} = \lambda_j \psi_j \quad (j = \overline{1,N},\, n = 0, 1, \ldots), \tag{4.79}$$

тобто, що справджуються рівності (4.71).

Теорема 4.7. *Нехай $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$ і виконані співвідношення (4.77), (4.78). Якщо для спектрального радіуса $\rho(H)$ оператора H, означеного за формулою*

$$Hx = A_0^k x + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} \psi_j (\varphi_j, A_0^k x) \tag{4.80}$$

справджується нерівність $\rho(H) < 1$, то послідовність $\{x^{(n)}\}$, отримана за допомогою алгоритму (4.68), (4.69) з початковим наближенням $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, збігається до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (4.62).

Доведення. За допомогою співвідношень (4.77), (4.79) з рівності (4.76) знайдемо

$$x^{(n+1)} - x^* = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j \left(\varphi_j, x^{(n)} - x^*\right) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j \left(\varphi_j, A_0^k \left(x^{(n)} - x^*\right)\right) +$$

$$+ A_0^k \left(x^{(n)} - x^*\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} \psi_j \left(\varphi_j, A_0^k \left(x^{(n)} - x^*\right)\right) = H\left(x^{(n)} - x^*\right).$$

Це дає підставу вважати, що теорему доведено. □

Теорема 4.8. *Припустимо, що виконані умови (4.71) – (4.73) і що* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$. *Нехай маємо рівності*

$$(\varphi_j, A_0^k x) = 0 \quad (x \in E, \quad j = \overline{1, N}). \tag{4.81}$$

Тоді для збіжності до розв'язку x^* *рівняння (4.62) послідовності* $\{x^{(n)}\}$, *утвореної за допомогою алгоритму (4.68), (4.69), достатньо, щоб був менший від одиниці спектральний радіус* $\rho(A_0^k)$ *оператора* A_0^k.

Доведення. Підставою вважати твердження теореми обґрунтованим є те, що у цьому випадку замість (4.80) матимемо $H = A_0^k$. $\square$

Розглянемо загальну ситуацію, коли маємо, що

$$A_1 = \sum_{j=1}^{N} A_{1j}. \tag{4.82}$$

Припустимо, що замість (4.71) маємо рівності

$$(GA_{1j})^* \varphi_i = \lambda_{ij} \varphi_j \quad (i, j = \overline{1, N}). \tag{4.83}$$

Нехай задані елементи $a_j^{(n)} = a_j\left(x^{(n)}\right) \in E$ і дійсні числа $\alpha_{ij}^{(n)}$ такі, що

$$\left(\varphi_j, a_j^{(n)}\right) + \alpha_{ij}^{(n)} = \lambda_{ij} \quad (i, j = \overline{1, N}). \tag{4.84}$$

Можна вважати, що числа $\alpha_{ij}^{(n)}$ визначаються цими рівностями при заданих λ_{ij}, φ_i та $a_j^{(n)}$. Припустимо, що існують обернені матриці $(I - \Lambda)^{-1}$ та $(I - \Lambda + \alpha^{(n)})^{-1}$. Замість системи (4.66) використовуватимемо систему

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j - \left(\varphi_i, A_0^k x\right) - (\varphi_i, Gb) \quad (i = \overline{1, N}) \tag{4.85}$$

і розглядатимемо її разом з рівностями (4.64). Тут I – одинична матриця в R^N, $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ є аналогом діагональної матриці, означеної за допомогою рівностей (4.71), $\alpha_n = \{\alpha_{ij}^{(n)}\}$.

Множину $\mathcal{E}_0$ знову означуємо за рівностями (4.67). Замість алгоритму (4.68), (4.69) розглянемо алгоритм, який описується формулою (4.68) та формулою

$$\begin{gathered}y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} - \left(\varphi_i, A_0^k x^{(n)}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}\right) - (\varphi_i, Gb) \quad (i = \overline{1, N}).\end{gathered} \tag{4.86}$$

Для алгоритму (4.68), (4.86) зберігаються базові факти, які є аналогами базових фактів для алгоритму (4.68), (4.69). Для оцінки збіжності цього алгоритму використаємо позначення

$$Sx = \{(\varphi_1, x), \ldots, (\varphi_N, x)\}^T, \tag{4.87}$$

де T – символ транспонування. Рівності (4.74), (4.85), (4.86) перепишемо відповідно у вигляді

$$S\left(x^{(n)} - x^*\right) + y^{(n)} - y^* = \theta_N, \tag{4.88}$$

$$y = \Lambda y - SA_0^k x - Sb, \tag{4.89}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SA_0^k x^{(n)} + \alpha^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - SGb, \tag{4.90}$$

де θ_N – нульовий вектор в R^N, $\alpha^{(n)} = \{\alpha_{ij}^{(n)}\}$. Формулу (4.68) запишемо у вигляді

$$x^{(n+1)} = GA_1 x^{(n)} - A_0^k x^{(n)} + a^{(n)} \left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + Gb, \tag{4.91}$$

де $a^{(n)} = \{a_{ij}^{(n)}\}$. Замість рівностей (4.84) матимемо

$$Sa^{(n)} + \alpha^{(n)} = \Lambda. \tag{4.92}$$

Аналогами рівностей (4.75), (4.76) є відповідно рівності

$$y^{(n+1)} - y^* = -\left(I - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \left(SA_0^k + \alpha^{(n)} S\right) \left(x^{(n)} - x^*\right), \tag{4.93}$$

$$\begin{gathered}x^{(n+1)} - x^* = \Big[GA_1 + A_0^k - a^{(n)} S + \\ + a^{(n)} \left(I - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} \left(SA_0^k + \alpha^{(n)} S\right)\Big] \left(x^{(n)} - x^*\right).\end{gathered} \tag{4.94}$$

Позначивши

$$H_1^{(n)} z = \Big[GA_1 + A_0^k - a^{(n)} S + \\ + a^{(n)} \left(I - \Lambda + \alpha^{(n)} \right)^{-1} \left(SA_0^k + \alpha^{(n)} S \right) \Big] z, \tag{4.95}$$

рівність (4.94) запишемо у вигляді

$$x^{(n+1)} - x^* = H_1^{(n)} \left(x^{(n)} - x^* \right) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.96}$$

Отже, для збіжності послідовності $x^{(n)}$, отриманої за допомогою алгоритму (4.68), (4.86) з початковим наближенням $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, достатньо виконання умови

$$\|H_1^{(n)}\| \leqslant q_1 < 1. \tag{4.97}$$

У підсумку маємо таке твердження.

Теорема 4.9. *Нехай існують обернені оператори* $(I - \Lambda)^{-1}$ *та* $\left(I - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}$ *при* $n = 0, 1, \ldots$, *справджуються умови (4.92), (4.97). Тоді послідовність* $\{x^{(n)}\}$, *отримана за допомогою алгоритму (4.90), (4.91) з початковим наближенням* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння (4.62) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q_1.

В окремому випадку, коли

$$Sa^{(n)} = \Lambda \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.98}$$

для оператора $H_1^{(n)}$ замість формули (4.95) будемо мати

$$H_1^{(n)} z = \left[GA_1 + A_0^k - a^{(n)} S + a^{(n)} (I - \Lambda)^{-1} (-I + \Lambda + SA_0^k) \right] z, \tag{4.99}$$

При цьому формулу (4.90) потрібно замінити формулою

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SA_0^k x^{(n)} - SGb. \tag{4.100}$$

Теорема 4.10. *Нехай справджується умова (4.98), умова*

$$a^{(n)} S = GA_1 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.101}$$

та існує обернений оператор $(I-\Lambda)^{-1}$. *Якщо оператор* $H_1^{(n)}$, *означений за формулою (4.99), задовольняє умову (4.97), то послідовність* $\{x^{(n)}\}$, *побудована за допомогою алгоритму (4.91), (4.100) з початковим наближенням* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння (4.62) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q, *де оператор* $H_1^{(n)}$, *який фігурує в умові (4.97), має вигляд*

$$H_1^{(n)} z = \left[A_0^k + a^{(n)}(I-\Lambda)^{-1} S A_0\right] z. \tag{4.102}$$

Доведення. Теорема є наслідком теореми 4.9. □

Теорема 4.11. *Нехай існує обернений оператор* $(I-\Lambda)^{-1}$, *справджуються співвідношення (4.87), (4.98). Нехай оператори* A_1, a_n *вибрані таким способом, що*

$$GA_1 x = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(\varphi_j, x), \tag{4.103}$$

$$a^{(n)}(I-\Lambda)^{-1} z = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{\Delta} \psi_j(\varphi_j, z), \tag{4.104}$$

де $\psi_j \in E \quad (j=\overline{1,N})$, Δ *– детермінант матриці* $(I-\Lambda)$, Δ_j *– відповідні детермінанти у формулах Крамера для системи вигляду*

$$(I-\Lambda) y = z. \tag{4.105}$$

Якщо є меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(H_2)$ *оператора* H_2, *означеного за формулою*

$$H_2 z = A_0^k z + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{\Delta} \psi_j(\varphi_j, z), \tag{4.106}$$

то послідовність $\{x^{(n)}\}$, *отримана за допомогою алгоритму (4.90), (4.91) з початковим наближенням* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$, *збігається до розв'язку* x^* *рівняння (4.62).*

Доведення. Твердження теореми випливає з рівності

$$x^{(n+1)} - x^* = H_2\left(x^{(n)} - x^*\right),$$

у якій оператор H_2 означений за формулою (4.106). $\square$

При $N = 1$, $G = I$ система (4.66) має вигляд

$$y_1 = \lambda_1 y_1 - (\varphi_1, A_0 x) - (\varphi_1, b).$$

З формул (4.68)–(4.73) отримуємо

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_0 x^{(n)} + a^{(n)} \left(y_1^{(n)} - y_1^{(n+1)} \right) + b,$$

$$y_1^{(n+1)} = \lambda_1 y_1^{(n+1)} - \left(\varphi_1, A_0 x^{(n)} \right) - (\varphi_1, b),$$

$$a_1^{(n)} = a^{(n)} = \frac{A_1 x^{(n)}}{\left(\varphi_1, x^{(n)}\right)},$$

$$A_1 \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \quad \left(\varphi_1, a_1^{(n)} \right) = \lambda_1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Множина $\mathcal{E}_0$ означена за допомогою рівності $(\varphi_1, x) + y_1 = 0$, а умови (4.77)–(4.79) описуються формулами

$$A_1 x = \lambda_1 \psi_1 (\varphi_1, x), \quad (\varphi_1, \psi_1) = 1, \quad a_1^{(n)} = \lambda_1 \psi_1 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Для означеного за формулами (4.80) оператора H будемо мати

$$Hx = A_0^k x + \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \psi_1 \left(\varphi_1, A_0^k x \right).$$

Зокрема, в умовах теореми 4.8 маємо $H = A_0$.

§ 21. Аналоги методу Піконе

Нехай оператор Tx в рівнянні

$$x = Tx \tag{4.107}$$

має вигляд $Tx = B(x)xF(x)$, тобто рівняння (4.107) можна подати так:

$$x = B(x)x + F(x). \tag{4.108}$$

Ітераційний алгоритм, відомий як метод Піконе (див, напр., [20, ст. 103-109]), описує формула

$$x^{(n+1)} = B(x^{(n)}) x^{(n+1)} + F x^{(n)} \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.109}$$

де оператор $B(x)w$ є неперервним при $x, w \in E$, лінійним неперервним щодо w, а оператор Fx – неперервний при $x \in E$.

Позначимо через E' – спряжений з E банахів простір. Нехай задані лінійні неперервні оператори $\Lambda : E' \mapsto E'$, $S : E' \mapsto E'$, де E' – банахів простір, який, взагалі кажучи, не тотожній з E. Припустимо, що неперервний оператор $B_1(x)w$, взагалі кажучи, є нелінійним щодо x, лінійним неперервним щодо w зі значеннями в E при $x, w \in E$, та справджуються такі умови:

А) обернений оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$ існує (I' – тотожний оператор в E');

Б) при $x \in E$ маємо рівність

$$S[B(x) + B_1(x)]x = \Lambda Sx. \tag{4.110}$$

Введемо допоміжне рівняння

$$y = \Lambda y + SB_1(x)x - SFx \tag{4.111}$$

з допоміжним невідомим y. Як і раніше, означуємо множину $\mathcal{E}_0$ як сукупність таких $x \in E$, $y \in E'$, для яких справджується рівність

$$Sx + y = \Theta', \tag{4.112}$$

де Θ' – нульовий елемент в E'. Множину $\mathcal{E}_0$ можна вважати підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, запровадивши норму пар чисел $\|x\|$ та $|y|$ з відповідними нормами в E та E'.

Будемо вважати заданими оператори $a(x)z$, $\alpha(x)z$, які є неперервними щодо $x \in E$, лінійними неперервними щодо $z \in E'$, які отримують значення із E та E' відповідно. Ітераційний процес будуємо за формулами

$$x^{(n+1)} = B(x^{(n)})x^{(n)} + F(x^{(n)}) + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \tag{4.113}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + SB_1(x^{(n)})x^{(n)} - SFx^{(n)} + \alpha^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \tag{4.114}$$

де $a^{(n)} = a(x^{(n)})$ $\alpha^{(n)} = \alpha(x^{(n)})$, $n = 0, 1, \ldots$

Наведемо аналоги відповідних базових лем з попереднього викладу.

Лема 4.8. *Нехай справджуються умови А) та Б), і система рівнянь* (4.107), (4.111) *має розв'язок* (x^*, y^*) $(x^* \in E, y^* \in E)$. *Тоді* $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$.

Доведення. При $x = x^*$, $y = y^*$ з рівностей (4.110), (4.111)випливає, що

$$Sx^* + y^* = SB(x^*)x^* + SFx^* + \Lambda y^* - SB_1(x^*)x^* - SFx^* =$$
$$= \Lambda y^* + S[B(x^*) + B_1(x^*)]x^*.$$

Звідси завдяки умові (4.110) маємо

$$Sx^* + y^* = \Lambda(Sx^* + y^*).$$

Тому за допомогою умови А) отримуємо, що $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}_0$.

Лема 4.9. *Нехай справджуються умови А) та Б), і* $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$. *Якщо при* $x \in E$ *маємо рівність*

$$Sa(x) + \alpha(x) = \Lambda, \tag{4.115}$$

то для послідовності $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *побудованої за допомогою формул* (4.113), (4.114), *при* $n = 1, 2, \ldots$ *маємо* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}_0$.

Доведення. З рівностей (4.113), (4.114) і умови (4.110) отримуємо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SB(x^{(n)})x^{(n)} + Sa^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + \Lambda y^{(n+1)} +$$
$$+ SB_1(x^{(n)})x^{(n)} - SFx^{(n)} + \alpha^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) =$$
$$+ S[B(x^{(n)})x^{(n)} + B_1(x^{(n)})x^{(n)}] + (Sa^{(n)} + \alpha^{(n)}) +$$
$$+ (\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha^{(n)})y^{(n+1)} = \Lambda(Sx^{(n)} + y^{(n)}).$$

Отже, маємо рівність

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = \Lambda(Sx^{(n)} + y^{(n)}),$$

яка на підставі принципу індукції завершує доведення леми. □

Якщо умови лем 4.8, 4.9 справджуються, то матимемо рівності

$$S(x^{(n)} - x^*) + y^{(n)} - y^* = \Theta' \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Позначимо

$$h_{11}^{(0)}(x,\xi)=[B(x)x-B(\xi)\xi]-$$
$$-a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S[B_1(x)x-B_1(\xi)\xi]+ \tag{4.116}$$
$$+[I+a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S](Fx-F\xi),$$

$$h_{12}^{(0)}(x)=a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}(I'-\Lambda), \tag{4.117}$$

$$h_{21}^{(0)}(x,\xi)=(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S[B_1(x)x-B_1(\xi)\xi]-$$
$$-(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S(Fx-F\xi), \tag{4.118}$$

$$h_{22}^{(0)}(x)=(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}. \tag{4.119}$$

Формули (4.116), (4.118), враховуючи умову (4.110), можна замінити формулами

$$h_{11}^{(0)}(x,\xi)=-a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}\Lambda S(x-\xi)+$$
$$+[I+a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S](B(x)x-B(\xi)\xi+Fx-F\xi), \tag{4.120}$$

$$h_{21}^{(0)}(x,\xi)=(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}\Lambda S(x-\xi)-(I'-\Lambda+$$
$$+\alpha(x))^{-1}S[B_1(x)x-B_1(\xi)\xi]-(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S(Fx-F\xi) \tag{4.121}$$

відповідно. Вважатимемо, що існують похідні Фреше $F'(x)w$, $B'(x)w$, $B_1'(x)w$, які є неперервними щодо x та w і лінійно залежать від w. Оскільки (див., напр., [7])

$$Fx-F\xi=\int_0^1 F'(\xi+\tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau,$$

$$B(x)x-B(\xi)\xi=B(x)(x-\xi)+\left[\int_0^1 B'(\xi+\tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau\right]\xi,$$

$$B_1(x)x-B_1(\xi)\xi=B_1(x)(x-\xi)+\left[\int_0^1 B_1'(\xi+\tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau\right]\xi,$$

то (4.120), (4.121) можна записати відповідно у вигляді

$$h_{11}(x,\xi)(x-\xi)=-a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}\Lambda S(x-\xi)+$$
$$+[I+a(x)(I'-\Lambda+\alpha(x))^{-1}S](B(x)(x-\xi)+ \tag{4.122}$$
$$+\int_0^1 B'(\xi+\tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau\xi+\int_0^1 F'(\xi+\tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau),$$

$$h_{21}(x,\xi)(x-\xi) = (I' - \Lambda + \alpha(x))^{-1}\Lambda S(x-\xi) - [(I' - \Lambda + \\ + \alpha(x))^{-1}S](B_1(x)(x-\xi) + \int_0^1 B_1'(\xi + \tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau\xi + \\ + \int_0^1 F'(\xi + \tau(x-\xi))(x-\xi)d\tau). \tag{4.123}$$

Позначивши для зручності $h_{11}^{(n)} = h_{11}(x^{(n)}, x^*)$, $h_{12}^{(n)} = h_{12}^{(0)}(x^{(n)})$, $h_{21}^{(n)} = h_{21}(x^{(n)}, x^*)$, $h_{22}^{(n)} = h_{22}^{(0)}(x^{(n)})$, запишемо

$$\begin{pmatrix} x^{(n+1)} - x^* \\ y^{(n+1)} - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{12}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(n)} - x^* \\ y^{(n)} - y^* \end{pmatrix}. \tag{4.124}$$

Якщо покласти

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} h_{11}^{(n)} & h_{12}^{(n)} \\ h_{21}^{(n)} & h_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad W^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(n)} - x^* \\ y^{(n)} - y^* \end{pmatrix}, \tag{4.125}$$

то (4.124) запишеться у вигляді

$$W^{(n+1)} = H^{(n)} w^{(n)} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.126}$$

Теорема 4.12. *Нехай існують неперервні щодо $x, w \in E$ лінійні щодо w похідні $F'(x)w$, $B'(x)w$, справджуються умови лем 4.8 та 4.9, а також умова*

$$\|H^{(n)}\| \le q < 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4.127}$$

Тоді послідовності $\{x^{(n)}\}$, $\{y^{(n)}\}$, побудовані за допомогою алгоритму (4.113), (4.114), *з початковим наближенням $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \mathcal{E}_0$ збігаються відповідно до компонент x^*, y^* розв'язку (x^*, y^*) системи* (4.108), (4.111) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q і при всіх $n = 1, 2, \ldots$ маємо $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \mathcal{E}$, а також $\{x^*, y^*\} \in \mathcal{E}$.*

Доведення. Обґрунтування рівності (4.126), умови (4.127), а також леми 4.8 та 4.9 дозволяють вважати теорему доведеною. □

Подібним способом можна побудувати й інші алгоритми, відмінні від алгоритму (4.113), (4.114).

Будемо вважати заданим неперервний оператор F_1x, за допомогою якого і тих самих операторів, що фігурують, зокрема, у рівнянні (4.108), замість рівності (4.110) постулюємо рівність

$$S(Fx + F_1x) = \Lambda Sx. \tag{4.128}$$

Як додаткове рівняння з додатковим невідомим $y \in E'$ замість рівняння (4.111) використаємо рівняння

$$y = \Lambda y + SF_1x - SBx. \tag{4.129}$$

Розглядатимемо систему, складену з рівнянь (4.108), (4.129). Ітераційний процес опишемо за допомогою (4.113) і формули

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SB(x^{(n)})x^{(n)} + SF_1x^{(n)}, \tag{4.130}$$

якою замінимо формулу (4.111). Обидві леми зберігаються з тою самою умовою (4.115), в якій покладемо, що $\alpha(x)$ є нульовим оператором.

Література

1. Адылов Г.Р. Об асимптотическом агрегировании / Г.Р. Адылов, В.М. Опойцев // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №1. – С. 131–140.

2. Бігун Я.Й. Застосування однопараметричного агрегаційно-ітеративного методу до диференціального рівняння з аргументом, що відхиляється / Я.Й. Бігун, Л.П. Костишин // Наук. вісник Чернівецького університету. Математика. – 2010. – Вип. 528. – С. 5–9.

3. Вен В.Л. Агрегирование линейных моделей (обзор методов) / В.Л. Вен // Изв. АН СССР. – Техническая кибернетика. – 1974. – № 2. – с.3-9; № 3. – С. 70–79.

4. Гробова Т.А. О сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования для нелинейных уравнений / Т.А. Гробова, А.А. Демчук // Вестник СГУ. Выпуск 63. – 2009. – С. 83–86.

5. Гробова Т.А. Об одном аналоге метода однопараметрического итеративного агрегирования / Т.А. Гробова , В.Я. Стеценко // Вестник СГУ. Выпуск 28. – 2001. – С. 12–16.

6. Гробова Т.А. Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений / Т.А. Гробова, В.Я. Стеценко. – Ставрополь, 2003. – 87 с.

7. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн – М.: Наука, 1970. – 534 с.

8. Дудкин Л.М. Основные проблемы классического агрегирования в модели межпродуктового баланса / Л.М. Дудкин, В.А. Хомяков, Б.А. Щенников // Экономика и математические методы. – 1973. – Т. IX, Вып. 2. – С. 231–242.

9. Ершов Э.Б. Агрегационный анализ систем линейных уравнений, межотраслевых и эконометрических моделей / Э.Б. Ершов // Экономика и математические методы. – 1984. – Т. XX, Вып. I. – С. 83–97.

10. Дудкин Л.М. Итеративное агрегирование и его применение в планировании / Под ред. Л.М.Дудкина. – М: Экономика, 1979. – 328 с.

11. Золотухина Т.Н. Проблема агрегирования в статической модели межотраслевого баланса: дис. на соискание ученой степени кан-та экон. наук: 08.00.13 / Золотухина Татьяна Николаевна. – М., 1979. – 328 с.

12. Калинина М.В. О сходимости метода агрегирования для решения систем линейных уравнений большой размерности / М.В. Калинина // Вычислительные методы и програмирование. – 1973. – № 21. – С. 63–73.

13. Копач М.І. Аналоги однопараметричного методу ітеративного агрегування з незнакосталими операторами / М.І. Копач, Б.А. Шувар // Вісник Одеського нац. ун-ту. – 2014. – Т.19, Вип 4(24). – С. 12–16.

14. Копач М.І. Один клас методів ітеративного агрегування для систем лінійних алгебраїчних рівнянь / М.І. Копач, Б.А. Шувар, Н.О. Шувар // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – Т29, №1. – С. 113–117.

15. Копач М.І. Багатопараметричні аналоги методів ітеративного агрегування / М.І. Копач, Б.А. Шувар, Н.О. Шувар // Буковинський математичний журнал. – 2015. – Т3, №1 – С. 74–77.

16. Костишин Л.П. Агрегаційно-ітеративні способи апроксимації розв'язків крайових задач / Л.П. Костишин, Б.А. Шувар // Укр. мат. журн. – 2003. – Т.55, №10. – С. 1425–1431.

17. Красносельский М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 255 с.

18. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – М: Просвещение, 1967. – 559 с.

19. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения систем уравнений / Н.С. Курпель. – К.: Наук. думка, 1968. – 243 с.

20. Курпель Н.С. Двусторонние операторные неравенства и их применение / Н.С. Курпель, Б.А. Шувар. – К.: Наук. думка, 1980. – 267 с.

21. Леонтьев В.В. Экономика и математические методы / В.В. Леонтьев, Д. Форд. – М: Наука, 1972. – 242 с.

22. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.

23. Обшта А.Ф. Агрегаційно-ітеративні аналоги методу Мамедова розрахунку моделей просторових віброобразів складених енергетичних вузлів / А.Ф. Обшта // Моделювання та інформаційні технології / Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С.Г. Пухова НАН України. – Київ, 2004. – Вип. 28. – С. 43–51.

24. Обшта А.Ф. Прогнозування змін параметрів роботи турбіни на основі аналізу віброобразів / А.Ф. Обшта // Моделювання та інформаційні технології / Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С.Г. Пухова НАН України. – Київ, 2004. – Вип. 26. – С. 63–69.

25. Петрович Р.Й. Про достатні умови збіжності деяких алгоритмів ітеративного агрегування / Р.Й. Петрович. – Львів: В-во Ін-ту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 1996. – Препринт №3-96. – 43 с.

26. Плюта А.И. Об итерационных методах решения операторных уравнений второго рода: дис. на соискание ученой степени к-та физ.-матем. наук: 05.13.18 / Плюта Алексей Иванович. – Ставрополь: Ставропольский гос. ун-т, 2004. – 167 с.

27. Плюта А.И. "Гибрид" методов ускорения сходимости монотонных приближений к решению уравнения вида $x = Ax + f$ и однопараметрического итеративного агрегирования / А.И. Плюта, В.Я. Стеценко // Ученые записки / Ставропольский гос. ун-т, физико-математический факультет. – Ставрополь, 2002. – С. 79–85.

28. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.Н. Ронто. – К.: Наук. думка, 1992. – 277 с.

29. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.

30. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок / Ю.Д. Соколов. – К.: Наук. думка, 1967. – 226 с.

31. Стеценко В.Я. Исследование сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования при решении линейных алгебраических систем и интегральных уравнений. / В.Я. Стеценко // Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении: материалы совещания. – Киев, 1984. – С. 74–81.

32. Стеценко В.Я. О методе однопараметрического итеративного агрегирования для нелинейных уравнений. / В.Я. Стеценко, Т.А. Гробова // Воронежская зимняя математическая школа: тезисы докладов. – Воронеж, 2001. – с .254-256.

33. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. – М.: Наука, 1984. – 192 с.

34. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1985. – 264 с.

35. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры /Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.-Л.: Изд.-во физ.-мат. лит., 1963. – 734 с.

36. Хиздер Л.А. Доказательство сходимости процесса итеративного агрегирования в общем случае / Л.А. Хиздер // Исследование по математической экономике и смежные вопросы. – 1971. – С. 186–206.

37. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности / В.И. Цурков. – М.: Наука. – 1981. – 352 с.

38. Шувар Б.А. О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений / Б.А. Шувар: Львов. политехн. ин-т. – Львов, 1988. – 11 с. – ДЕП. в Укр НИИНТИ 10.06.88, №1473-Ук88.

39. Шувар Б.А. Модификация однопараметрического метода итеративного агрегирования / Б.А. Шувар: Львов. политехн. ин-т. – Львов, 1988. – 11 с. – ДЕП. в Укр. НИИНТИ 10.06.88, №1471-Ук88.

40. Шувар Б.А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования / Б.А. Шувар // Вестник Львов. политехн. ин-та. – 1989. – Т. 232. – С. 140–142.

41. Шувар Б.А. Про ітеративне агрегування і метод послідовних наближень / Б.А. Шувар // Вісник Львів. політехн. ін-ту. – 1991. – №251 – С. 139–141.

42. Шувар Б.А. О сходимости методов итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений / Б.А. Шувар: Львов. политехн. ин-т. – Львов, 1992. – 23 с. – ДЕП. в Укр НИИНТИ 15.01.92, №50-Ук92.

43. Шувар Б.А. Обобщение метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений. / Б.А. Шувар: Львов. политехн. ин-т. – Львов, 1992. – 18 с. – ДЕП. в Укр НИИНТИ 15.01.92, №48-Ук92.

44. Шувар Б.А. Ітеративне агрегування для нелінійних рівнянь у банахових просторах / Б.А. Шувар // Одинадцята Міжнародна конференція ім. акад. М. Кравчука: матеріали конференції. – Київ, 2006. – С. 663.

45. Шувар Б.А. Параметризація методу послідовних наближень для систем лінійних інтегральних рівнянь / Б.А. Шувар, І.І. Демків , М. І. Копач. – Івано-Франківськ, 1993. – 9 с. – Деп. в ДНТБ України 26.07.93, № 16.03 Ук-93, 8 с. НДІНТІ 13.10.93.

46. Двосторонні наближені методи / Б.А. Шувар, М.І. Копач, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта. – Івано-Франківськ: В-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2007. – 515 с.

47. Дослідження збіжності ітеративного агрегування / Б.А. Шувар, М.І. Копач, А.Ф. Обшта, Г.В. Наконечна // Прикарпатський вісник НТШ. – 2010. – Т9, №1. – С. 34–45.

48. Шувар Б.А. Застосування одного агрегаційно-ітеративного методу до задачі Валле-Пуссена / Б.А. Шувар, Л.П. Костишин // Міжнародна наукова конференція "Шості боголюбівські читання": тези доповідей. – Київ, 2003. – С. 256.

49. Шувар Б.А. Агрегаційно-ітеративні методи розв'язання операторних рівнянь / Б.А. Шувар, А.Ф. Обшта. – Львів: В-во нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2015. – 432 с.

50. Шувар Б.А. Декомпозиція лінійних операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування / Б.А. Шувар, А.Ф. Обшта, М.І. Копач // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т.9. – С. 384–398.

51. Шувар Б.А. Агрегативно-ітераційний алгоритм для лінійних рівнянь в банахових просторах / Б.А. Шувар, Р.Й. Петрович – Львів, 1995. – 6 с. – Деп. в ДНТБ України 02.11.95, № 2345-Ук95.

52. Щенников Б.А. Применение методов итеративного агрегирования для решения систем линейных уравнений / Б.А. Щенников // Экономика и математические методы. – 1966. – Т. 2, № 5. – С. 723–731.

53. Щенников Б.А. Метод агрегирования для решения систем линейных уравнений / Б.А. Щенников // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 173, № 4. – С. 781–784.

54. *Bertsekas D.P.* Adaptive aggregation methods for infinite horizont dynamic programming / D.P. Bertsekas, D.A. Castonon // IEEE Trans. Autor. Contr. – 1989 – V. 34, № 6. – P. 589–598.

55. Stewart W.J. Iterative Aggregation/Disaggregation Techniques for Nearly Uncoupled

Markov Chains / W.J. Stewart, W.L. Cao // Journal of the ACM. – 1985. – № 32. – P. 702–719.

56. Frangoise C. Aggregation/desaggregation for eigenvalue problem. / C. Frangoise, M. Willard // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – V. 21, №3. – P. 567–582.

57. Fisher W.D. Clastering and Aggregation in Economics.-Baltimore / W.D. Fisher. – The Johns Hopkins Press, 1969. – 195 p.

58. Garcia L. An iterative aggregation algorithm for linear programming / L. Garcia // Lect. Notes Math. – 1988. – V. 135, № 4. – P. 257–265.

59. Hazra J. Analyzing closed Kanban-controlled assembly systems by iterative aggregation-disaggregation / J. Hazra, P.J. Schweitzer, A. Seidmann // Computers and Operations Research. – 1999. – V. 26, № 10-11. – P. 1015-1039.

60. He G. Parallel SimRank computation on large graphs with iterative aggregation / G. He, H. Feng, C. Li, H. Chen // Proceedings of the 16th ACM SIGKDD. – 2010. – dl.acm.org.

61. Kopach M.I. Convergence investigation of iterative aggregation methods for linear equations in a Banach space / M.I. Kopach, A.F. Obshta, B.A. Shuvar // Journal of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University. – 2015. – Vol. 2 No. 4 – P. 50–57.

62. Kopach M.I. Two-sided inequalities with nonmonotone sublinear operators / M.I. Kopach, A.F. Obshta, B.A. Shuvar // Carpathian Math. Publ. – 2015. – Vol.7. – P. 78–82.

63. Kuboniwa Masaaki. Step-wise aggregation for material balances / Masaaki Kuboniwa // Hitotsubashi Journal of Economics. – 1982. – V. 23, No. l. – P.43–52.

64. Marek I. Convergence analysis of an aggregation/disaggregation iterative method for computation stationary probability vector of stochastic matrices / I. Marek, P. Mayer // Numerical Linear Algebra With Applications. – № 5. – 1998. – P. 253–274.

65. Marek I. Aggregation/disaggregation iterative methods applied to Leont'ev systems and Markov chains / I. Marek, P. Mayer // Appl. of Math. – 2002. – V. 47, № 2. – P. 139–156.

66. Marek I. Convergence issues in the theory and practice of Iterative aggregation/disagrregation methods / I. Marek, P. Mayer, I. Pultarov // Economic Transactions of Numerical Analyis. – 2009. – № 35. – P. 185–200.

67. Schweitzer P.J. An iterative aggregation-desaggregation algorithm for solving linear equations / P.J. Schweitzer , K.W. Kindle // Appl. Math. and Comut. – 1986. – V. 18, № 4. – P. 313–353.

68. Seneta E. Iterative aggregation: Convergence rate / E. Seneta, W.D. Fisher // Economic Letters. – 1984 – V. 14. Issue 4. – P. 357–361.

69. Shuvar B.A. Modified iterative aggregation algorithms / B.A. Shuvar, M.I. Kopach // Russian Mathematics (Jz. VUZ). – 2007. – V. 57, No. 3. – P. 68–71.

70. Zhu I. Distributed pagerank computation based on iterative aggregation-disaggregation methods / I. Zhu, S. Ye, X. Li // CIKM '05 Proceedings of the 14th ACM international conference on Information and knowledge management ACM New York, NY, USA. – 2005. – P. 578–585.