Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Олег ДОВГИЙ

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчально-методичний посібник для студентів спеціальності "Географія"

Івано-Франківськ
2010

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
Д18

Рекомендовано вченою радою Педагогічного інституту Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №2 від 14.09.2011 р.)

Рецензенти:
Кульчицька Н. В. **–** кандидат педагогічних наук, доцент кафедри статистики і вищої математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ;
Дем'янів Т. О. **–** кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальних наук ПВНЗ «Галицька академія», м. Івано-Франківськ.

Довгий О.

Д18 Елементи комбінаторики, теорії ймовірності та математичної статистики: навч.-метод. посіб. для студ. спец. “Географія”. / О. Я. Довгий. – Івано-Франківськ : Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. – 100 с.

ISBN 978-966-640-134-9

У навчально-методичному посібнику автором доступно та в логічній послідовності висвітлено основний теоретичний та практичний матеріал таких розділів: комбінаторика, основи теорії ймовірності, елементи математичної статистики курсу “Вища математика та теорія ймовірності”, що вивчається студентами спеціальності “Географія”. Виклад теоретичного матеріалу із виведенням формул та властивостей доступний і для самостійного освоєння даного курсу. Крім того, в даному посібнику міститься достатня кількість прикладів та графічно-ілюстративного матеріалу, що сприятиме кращому уявленню і наочно-просторовому підтвердженню викладеного теоретичного матеріалу, а також правильним міркуванням при розв'язуванні практичних завдань. При розгляді відповідного теоретичного матеріалу, в якості зразків, наведено типові практичні завдання з їх детальними розв'язками.

Зміст

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Людині щоденно приходиться міркувати – як скерувати собою в тій чи іншій ситуації. Варіантів іноді дуже багато і щоб зробити те чи інше розміщення, чи переміщення, той чи інший вибір, тобто як скомбінувати (в гарному розумінні цього слова), розумному керівнику потрібно добре подумати. Однією з областей математики, яка нам може допомогти досягти оптимального (найкращого за тим або іншим критерієм) керування, є комбінаторика. Дана математика, в наш час, досягла надзвичайної популярності.

Розглянемо два самі елементарні і майже очевидні правила, які за повного осмислення будь-якої комбінаторної задачі, можуть її розв'язати. Це правило суми й правило добутку.

1. 1. Правило суми

Якщо множини A і B знаходяться у відношенні виключення (не перетинаються), то число елементів множини $A \cup B$ дорівнює сумі чисел елементів множин A і B, тобто:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Це є ***правило суми для множин які знаходяться у відношенні виключення***.

Справедливе також і ***узагальнене правило суми множин кожна можлива пара яких знаходиться у відношенні виключення***:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m).$$

Наприклад, в магазині, для вибору однієї ручки з трьох масляних, десяти чорнильних і п’яти шарикових, потрібно зробити один з 18 (3 + 10 + 5 = 18) можливих виборів.

В попередній задачі фігурують три множини, які попарно не перетинаються. Якщо ж множини перетинаються, тобто містять спільні елементи, то щоб два рази ці спільні елементи не враховувати, потрібно при застосуванні правила суми їх один раз відняти.

Отже *формули правила суми* набудуть такого вигляду:

а) для двох множин:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

б) для трьох множин:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$$
$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) +$$
$$+ n(A \cap B \cap C).$$

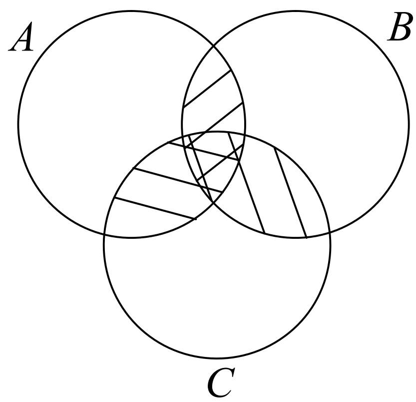
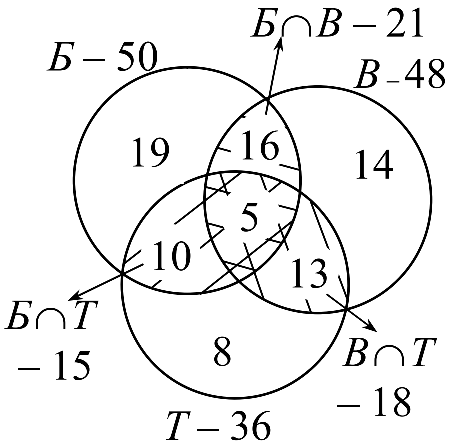


Рис. 1

Виведення цієї формули очевидне з кругів Ейлера-Венна (рис.1).

Подібно буде і для m множин.

Наприклад, задача: на першому курсі педагогічного факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються баскетболом, 48 – волейболом, 36 – тенісом, баскетболом і волейболом – 21, баскетболом і тенісом – 15, волейболом і тенісом – 18. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?



Розв'язання.

1-й спосіб (аналітичний). Позначимо через $Б$ – множину студентів, які займаються баскетболом, $В$ – волейболом і $Т$ – тенісом. Так, як є студенти, які займаються двома і трьома видами спорту, то ці три множини за умовою попарно перетинаються. За правилом суми визначимо, скільки студентів займаються хоча б одним з цих трьох видів спорту:

$$n(Б \cup В \cup Т) = n(Б) + n(В) + n(Т) -$$

$$- n(Б \cap В) - n(Б \cap Т) - n(В \cap Т) +$$

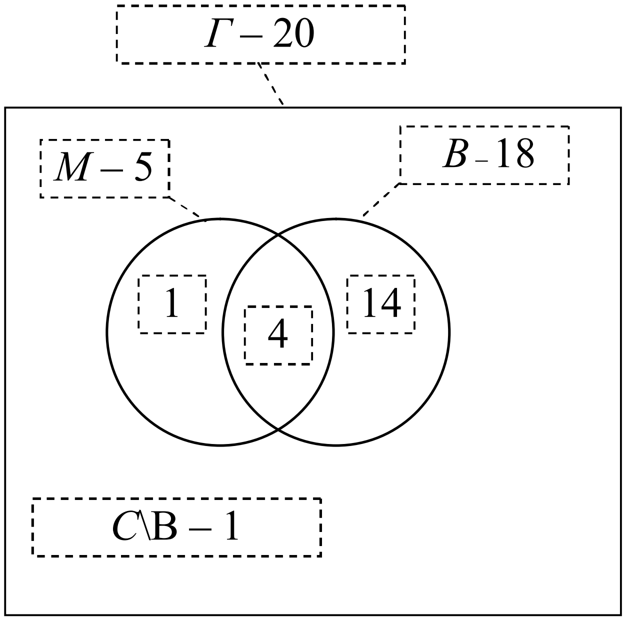
$$+ n(Б \cap В \cap Т) =$$

= 50 + 48 + 36 – 15 – 18 – 21 + 5 = 85 (студентів).

Тоді іншими видами спорту займаються: 95 – 85 = 10 (студентів).

2-й спосіб. Розв’язок задачі очевидний з допомогою діаграм Ейлера поданих на рисунку (19 + 16 + 14 + 10 + 5 + 13 + 8 = 85).

Наприклад, задача: у студентській групі 20 чоловік, серед яких 18 вчаться краще ніж задовільно та 5 є постійними жителями міста. Ще відомо, що серед тих, що вчаться краще ніж задовільно є 14 не постійних жителів міста. Скільки не постійних жителів міста, що є студентами даної групи, вчаться не краще ніж задовільно?



Розв'язання. Позначимо множини $Г$ – множина всіх студентів групи; $М$ – множина студентів групи, що є постійними жителями міста; $В$ – множина студентів групи, що вчаться краще ніж задовільно; $С$ – множина студентів групи, що не є постійними жителями міста. Оскільки з 18-и тих, що вчаться краще ніж задовільно, 14 студентів не є постійними жителями міста, то $18 - 14 = 4$ студентів, що вчаться краще ніж задовільно є постійними жителями міста, а отже $5 - 4 = 1$ студент із міських вчиться не краще ніж задовільно, тобто на задовільно або гірше. Якщо за допомогою кругів Ейлера-Венна позначити ці всі множини, то отримаємо такий рисунок (рис. справа). З цього рисунка видно, що

$1 + 4 + 14 = 19$ студентів належать множині $M \cup B$, тобто міські або вчаться краще ніж задовільно. Тоді не постійних жителів міста, що є студентами даної групи та вчаться не краще ніж задовільно є $n(C \setminus B) = 20 - 19 = 1$ студент. Відповідь 1 студент.

1. 2. Правило добутку

Правило ***добутку***: число елементів декартового добутку множин дорівнює добутку чисел елементів у кожній з даних множин. Іншими словами: якщо елемент a_1 можна вибрати n_1 способами, а після його вибору елемент a_2 можна вибрати n_2 способами і т. д., а елемент a_n після вибору всіх попередніх – n_k способами, то тоді кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можна вибрати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Наприклад, всіх чотирицифрових чисел у десятковій системі числення є $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (на першому місці нуль не може бути, тому перша цифра вибирається з множини з дев'яти елементів).

1. 3. Розміщення без повторень

Нехай множина M містить m елементів. ***Розміщенням*** з m елементів по n ***без повторення*** елементів називається будь-який кортеж довжини n, елементи якого відрізняються між собою, складений з m елементів множини M.

У розміщеннях, які вводяться за цим означенням, немає однакових елементів.

Приклади

1. Розміщень з двох елементів a і b по два може бути тільки два: (a, b), (b, a). Вони відрізняються лише порядком.

2. Розміщень з трьох елементів a, b, c по два є шість: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).

3. Розміщення (a, b) і (a, c) відрізняються елементами, а розміщення (a, c) і (c, a) – порядком.

Кількість розміщень з m елементів по n позначають через A_m^n. З означення випливає, що $m \geq n$.

Формула числа розміщень з m елементів по n випливає з правила добутку і дорівнює:

$$A_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)),$$

де m – це кількість елементів множини M, $m-1$ – кількість елементів множини M без одного елемента, $m-2$ – без двох, $m-(n-1)$ – кількість елементів множини M без $(n-1)$-ого елемента.

Тобто, ***число розміщень*** з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше серед яких m.

Формулу числа розміщень з m елементів по n можна переписати і так:

$$A_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Приклади

1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 8, 9, щоб жодна з них у цих числах не повторювалась?

Розв'язання. Чисел буде стільки, скільки можна скласти розміщень з шести елементів 4, 2, 5, 7, 3, 9 по три, бо кожне таке розміщення дає тризначне число, тобто

$A_6^3 = 6{\cdot}(6 - 1){\cdot}(6 - (3 - 1)) = 6{\cdot}5{\cdot}4 = 120$(чисел) – за формулою.

Або за правилом добутку $A_6^3 = 6{\cdot}5{\cdot}4 = 120$(чисел).

2. Скільки непарних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 4, 8, 9, якщо кожну цифру у кожному числі можна використовувати тільки один раз?

Розв'язання. Усього двоцифрових чисел у даному випадку можна утворити $A_4^2 = 4{\cdot}(4 - (2 - 1)) = 4{\cdot}3 = 12$.

Кількість чисел, яка закінчуватиметься цифрами 2, 4, 8, 9, однакова і дорівнює 12 : 4 = 3. Отже, цифрою 9 (єдиною непарною цифрою серед даної множини) закінчується три числа, які й є шуканими непарними числами. Їх можна і перерахувати: 29, 49, 89.

Можна міркувати і так. Якщо відкинути цифру 9 в усіх здобутих непарних двоцифрових числах, то одноцифрових чисел буде стільки, скільки можна їх записати з цифр 2, 4, 8, тобто 3.

1. 4. Розміщення з повтореннями

Оскільки розміщенням є впорядкована сукупність об'єктів (кортеж), то в них можуть бути й повторення однакових елементів. Таким є, наприклад, кортежі цифр у зображеннях чисел, кортежі нот у зображеннях музикальних фраз і т. д. Таким чином дістаємо розміщення з повторенням.

Розміщенням з повторенням з m елементів по n, $m, n \in \mathrm{N}$, називається будь-який кортеж довжини n, який складається з елементів множини $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ і в якому хоча б один елемент повторюється.

Розміщення з повтореннями і без повторень тісно пов'язані з поняттям декартового (прямого) добутку множин. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Наприклад, нехай $M = \{a, b\}$. Знайдемо прямий квадрат M^2 та прямий куб M^3 цієї множини. Дістанемо:

$M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$;

$M^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$.

Як бачимо, всі можливі розміщення з повтореннями з двох елементів множини M по два дістаємо з M^2, а всі можливі розміщення з цих самих елементів по три – з M^3. Розміщення без повторень дістаємо з M^2 вилученням усіх розміщень з повтореннями. Розміщень з повторенням з даної двоелементної множини M можемо робити скільки завгодно і якої завгодно довжини, треба тільки взяти відповідну кількість прямих (декартових) множників.

Можна показати, що все, сказане вище для множини $M = \{a, b\}$ стосується й будь-якої скінченної множини.

Позначивши через $\overline{A}_m^n$ число всіх різноманітних розміщень з повтореннями елементів множини $M = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ по n, дістанемо

$$\overline{A}_m^n = m^n,$$

де m – кількість елементів множини M.

Дана формула є наслідком того, що вибір на кожне місце кортежа довжиною n проводиться з усіх m елементів множини M.

Приклад.

1. Скільки чотирицифрових чисел можна записати з цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в записі числа можуть повторюватися?

Розв'язання. Всього дано шість цифр. Очевидно, що шукане число дорівнює числу всіх розміщень з повтореннями елементів із множини з шести елементів по чотири, тобто $6^4 = 1296$.

1. 5. Перестановки без повторень

Будь-який кортеж довжини m над множиною $M = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$, в якого всі компоненти різні, називають ***перестановкою*** (***перестановкою без повторень***) елементів множини M.

Такий чином, перестановка елементів множини M – це розміщення з m елементів по m цієї ж множини.

Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m.

Згідно з означенням,

$$P_m = A_m^m = (m-1)(m-2) \ldots 2 \cdot 1 = m!$$

Тобто, ***число перестановок без повторень*** з m елементів дорівнює добутку від m до 1 послідовних натуральних чисел, тобто $m!$.

Приклади

1. Скількома способами можна розсадити 19 студентів по 19-и місцям?

Розв'язання.

$$P_{19} = 19! = 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 121645100408832000 \text{ (способами).}$$

2. Серед усіх перестановок цифр числа 531289 скільки є таких, які починаються числом 39?

Розв'язання. Оскільки дві цифри 3 і 9 забираються, то переставляти будемо всього чотири цифри. Отже чисел, які задовольняють умову задачі, є:

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

3. Скільки десятицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається тільки один раз?

Розв'язання. Кортежів довжиною десять з даних десяти цифр буде: $P_{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$. З однаковою першою компонентою буде: 3628800:10 = 362880. Так, як на першому місці в числі стояти нуль не може, то віднімеме від знайденого числа всіх кортежів довжиною десять, число кортежів з однаковою першою компонентою (тобто нулем) і отримаємо шукану кількість:

3628800 – 362880 = 3265920 (чисел).

1.6. Перестановки з повтореннями

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Будь-який кортеж довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ над множиною M, в якому елемент a_1 повторюється k_1 разів, елемент a_2 – k_2 разів і т. д., елемент a_m – k_m разів, називається ***перестановкою з повтореннями***.

Число всіх перестановок з повтореннями позначають символом – $P_{k_1,k_2,...,k_m}$, в яких елемент a_1 повторюється k_1 разів, a_2 – k_2 разів і т.д., a_m – k_m разів.

Число $P_{k_1,k_2,...,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ з повтореннями з елементів a_1, a_2, ..., a_m, які повторюються відповідно k_1, k_2, ..., k_m разів дорівнює:

$$P_{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}.$$

Доведення.

Відомо, що кількість всіх перестановок з l елементів дорівнює $l!$. Якщо серед цих l елементів є k_1 однакових, то їх перестановка між собою не змінить кортежа довжини l. Отже це слід врахувати і поділити на кількість перестановок між собою k_1 однакових елементів, тобто на $k_1!$. Якщо серед цих l елементів є ще й k_2 однакових інших елементів, то слід поділити ще й на $k_2!$. І т.д. Тобто отримаємо формулу числа $P_{k_1,k_2,...,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ з повтореннями з елементів $a_1, a_2, ..., a_m$, які повторюються відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$ разів:

$$P_{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}.$$

Приклад.

Скільки шестицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, якщо цифра 7 повторюється в кожному числі два рази, цифра 6 – три рази, а цифра 9 – один раз?

Розв'язання. Числа, які можна записати таким чином, є кортежі довжини 6 складені з елементів даної множини чисел {7, 8, 9} з відповідною, з умови, кількістю повторень рівною: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$. Тобто, це є перестановки з повторенням і їх кількість рівна:

$$P_{2,3,1} = \frac{(2+3+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{6!}{2 \cdot 6} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{(чисел)}.$$

1. 7. Комбінації та їх властивості

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – довільна не порожня множина. Будь-яка підмножина $A \in M$, яка містить n елементів, називається ***комбінацією*** (***вибіркою***, ***сполученням***) з m елементів по n.

З цього означення випливає, що комбінація – це множина, і що дві різні комбінації з m елементів по n відрізняються принаймні одним елементом.

Число всіх комбінацій з m елементів по n дорівнює числу всіх розміщень з m елементів по n, розділеному на число всіх перестановок з n елементів, тобто:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \frac{p_m}{P_n P_{m-n}}.$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}.$$

Основні властивості числа C_m^n.

1°. $C_m^0 = 1$, $C_0^0 = 1$, $C_m^m = 1$.

Ці властивості слідують з означення.

2°. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Доведення:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{n+m-m} P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_{m-(m-n)}} = C_m^{m-n}.$$

3°. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Доведення:

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} + \frac{P_m}{P_{n+1} P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n \left(P_{m-(n+1)}(m-n) \right)} +$$

$$+ \frac{P_m}{(n+1) P_n P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}} \frac{(n+1)+(m-n)}{(m-n)(n+1)} = \frac{P_m (1+m)}{P_n (n+1) P_{m-(n+1)} (m-n)} =$$

$$= \frac{P_{m+1}}{P_{n+1} P_{m-n}} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Отже, $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$

Приклади.

1. Для подорожі на річку, 60 дітей вишикували одних за другими по три дитини в одному ряді. Скількома способами вожатий може вибрати три дитини в перший ряд, а скількома в останній?

Розв'язання.

Відповідь на перше і друге питання є тією самою, бо це звичайна вибірка трьох дітей із усіх 60.

1-ий спосіб.

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{3! \cdot (60-3)!} = \frac{60!}{3! \cdot 57!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2} = 34220 \text{ (способами).}$$

2-ий спосіб.

$$C_{60}^3 = \frac{A_{60}^3}{P_3} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2} = 34220 \text{ (способами).}$$

Відповідь. 34220 способами.

2. Для участі в змаганнях, з групи в дев'ятнадцять чоловік потрібно вибрати чотири команди, в складі 8, 7, 1 і 2 чоловіки у кожній, причому, кожний чоловік може брати участь в змаганнях лише один раз і в одній команді. Скількома різними способами можна вибрати чотири команди?

Розв'язання.

З дев'ятнадцять чоловік можна вибрати $C_{19}^{8} = \frac{19!}{8! \cdot 11!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 75582$ способами першу команду в складі восьми чоловік.

Після того, як вибрано першу команду, можна $C_{11}^{7} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 330$ способами вибрати другу команду в складі семи чоловік з одинадцяти чоловік.

Після цього одного з чотирьох можна вибрати $C_4^1 = 4$ способами.

І нарешті, останню команду в складі двох чоловік можна вибрати $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$ способами.

Три команди можна вибрати:

$C_{19}^{8} \cdot C_{11}^{7} \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 75582 \cdot 330 \cdot 4 \cdot 3 = 299304720$ способами.

Відповідь. 299304720 способами.

1. 8. Трикутник Паскаля

Співвідношення $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$, можна переписати інакше і отримати співвідношення $C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^{n} = C_m^n$, з якого, маючи C_{m-1}^{n-1} і C_{m-1}^{n} можна обчислити C_m^n.

На основі цього, використовуючи лише операцію додавання відповідних чисел, побудовано схему, яку називають ***трикутником Паскаля***.

Схему будують так.

У першому рядку записують 1.

У другому рядку записують дві одиниці: одну – зліва, а другу – справа від одиниці, записаної в першому рядку.

У третьому рядку знову записують дві одиниці: одну – зліва від лівої другого рядка, а другу – справа від правої одиниці другого

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ m = 4 \\ m = 5 \\ m = 6
\end{array}
$$

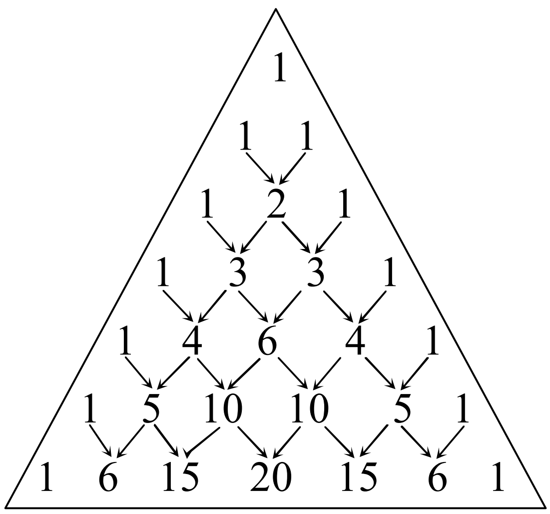


Рис. 2

рядка. Крім того, між цими одиницями записують число 2, яке є сумою двох одиниць попереднього рядка.

У четвертому рядку записують суму першого і другого, другого і третього числа третього рядка, причому суми розміщують між доданками; зліва й справа знову пишуть одиниці.

Так продовжують далі.

Процес утворення трикутника Паскаля показано на рис. 2.

Якщо до якогось числа напрямлено дві стрілки, то це означає, що дане число є сумою тих чисел, звідки виходять стрілки. Дальше трикутник можна продовжувати зазначеним вище способом.

Наприклад, нехай треба знайти числа $C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$. Для цього вибираємо горизонтальну лінію з $m = 6$ і дістаємо послідовно зліва направо всі числа, записані в цьому рядку: $C_6^0 = 1\; C_6^1 = 6, C_6^2 = 15, C_6^3 = 20, C_6^4 = 15, C_6^5 = 6, C_6^6 = 1$.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: правила суми і добутку, формули і смисл різних видів комбінаторних з’єднань без повторень та з повтореннями;

у м і т и: встановлювати вид комбінаторної задачі і використовувати формули для підрахунку числа розміщень і перестановок без повторення і з повтореннями та комбінацій, виводити властивості комбінацій, користуватися трикутником Паскаля.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Скількома способами можна вибрати голосну букву з слова “республіка”? Скількома способами можна вибрати дві голосні букви з цього слова?

2. Скількома способами студент може вибрати два факультативних курси з шести можливих?

3. Скількома способами можуть бути виставлені оцінки вісьмом студентам, які здали екзамени, якщо відомо, що лише два з них отримали п’ятірки, і лише два з них отримали незадовільні оцінки?

4. Скількома способами можна утворити з групи в 12 чоловіків і 8 жінок комісію, в яку входили б три чоловіки і дві жінки?

5. Скількома способами можна утворити групу з трьох солдатів і одного офіцера, якщо є двадцять солдатів і п'ять офіцерів?

6. Скількома способами можна скласти список студентів групи, в якій налічується 25 студентів?

7. Скількома способами можна скласти наряд з одного сержанта і 3 солдат, якщо у військовому підрозділі всього 7 сержантів і 80 солдат?

8. Скількома способами можна скласти команду з восьми учасників шахового гуртка I курсу, шести учасників II курсу і

десяти учасників III курсу так, щоб у неї з I курсу входило три студенти, а з II і III курсів – по два студенти?

9. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи, якщо які-небудь два студенти відмовляються поселитися разом?

10. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи?

11. Скількома способами можна розсадити 19 студентів на 80 місць?

12. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний учитель викладатиме у двох класах?

13. Скількома способами можна розподілити премії по чотири книжки для преміювання трьох учнів, якщо купили 12 різних книжок?

14. Скількома способами можна з групи з 20 студентів вибрати трьох делегатів на конференцію?

15. Скількома способами можна доїхати з пункту C в пункт L, якщо з пункту C до пункту L проходять дві автодороги через пункт A і три автодороги – через пункт B, причому пункти A і B не зв'язані автодорогами?

16. Скількома способами можна вишикувати 9 чоловік в один ряд?

17. Скількома способами можна вибрати п'ять осіб на п'ять посад з восьми кандидатів на ці посади?

18. Скількома способами можна вибрати один предмет: або ручку, або олівець, якщо є 7 ручок і 5 олівців?

19. Скількома способами можна вибрати на підсумкову наукову студентську конференцію по одній доповіді з кожного гуртка, якщо всього на математичному гуртку інституту підготовили чотири доповіді, на природознавчому – три доповіді, на психологічному – дві і літературному – п'ять?

20. Скількома способами можна вибрати з 19 чоловік старосту, замісника старости і профорга?

21. Скількома способами може бути утворена бригада в складі 3 чоловік для виїзних комісій, щоб до неї входив хоча б один лікар, якщо всього є 2 лікарі та 7 медсестер?

22. Скількома способами із восьми роз і шести жоржин можна скласти букет так, щоб у ньому було дві рози і три жоржини?

23. Скількома способами з восьми різних квіток можна скласти букет так, щоб він містив непарну їх кількість і не менше трьох?

24. Скількома способами групу студентів з 26 чоловік можна розбити на дві підгрупи так, щоб в одній з них було 10 студентів, а в другій – 16?

25. Скільки трицифрових чисел, кратних 5, можна зобразити цифрами 0, 3, 5, 7, 9?

26. Скільки трицифрових чисел можна написати за допомогою цифр: 0, 2, 9, 4, 7, так, щоб в числі жодна з цифр не повторювалася?

27. Скільки тризначних чисел можна утворити з множини цифр {2, 4, 5, 6, 8}? Скільки двозначних? чотиризначних?

28. Скільки різних п'ятицифрових натуральних чисел можна утворити з множини цифр {1, 3, 4, 7}?

29. Скільки різних площин можна провести через n точок у просторі, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

30. Скільки різних восьмизначних чисел можна утворити з цифр 2, 3 при умові, що цифра 2 повторюється п'ять разів, а цифра 3 – три рази?

31. Скільки потрібно різних предметів, щоб можна було утворити 110 розміщень по два предмети в кожному?

32. Скільки можна утворити трицифрових чисел у десятковій системі числення так, щоб вони складалися з різних цифр?

33. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр: 4, 2, 5, 6, 8, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз у кожному числі?

2. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

2. 1. Випадкові події та їх простір

Теорія ймовірності та математична статистика – це розділ математики, в якому вивчають випадкові явища (точніше їх математичні моделі), а також методи збирання й обробки цих явищ, щоб дійти наукових висновків щодо їх виникнення.

Основними поняттями є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. Експерименти, результати яких неможливо передбачити заздалегідь, називають *стохастичними*. Результати таких експериментів називають *випадковими подіями*. До випадкових подій належать такі події, настання або ненастання яких залежить від цілого ряду умов, які неможливо наперед врахувати. Під *елементарними подіями*, пов'язаними з певним експериментом, розуміють усі *нерозкладні результати* цього експерименту.

Так, наприклад, якщо нас цікавить подія "поява туза" при витяганні карти з колоди карт, то ця подія не є елементарною подією, бо є чотири туза, а подія, наприклад, "поява туза черви" є елементарною подією.

Елементарні події є *єдиноможливими* (можуть появлятися поодинці), *несумісними* (поява однієї виключає одночасну появу іншої в даному досліді), і *рівноможливими* (однакова вірогідність появи кожної з них).

Сукупність всіх елементарних подій називають *простором* (*множиною*) *елементарних подій*. Простір елементарних подій позначають Ω. Елементами простору елементарних подій є самі елементарні події. Позначають їх ω_1, ω_2 і т.д. в залежності від їх кількості, або малими латинськими літерами: *а*, *в*, *с*, ... Простір Ω може містити скінченну множину значень (елементарних подій), або може містити нескінченну і при тому зліченну або незліченну множину значень.

Так, наприклад, експеримент “пропонується задумати натуральне число більше за 10, але менше за 100” містить скінченну множину елементарних подій (значень), бо натуральних чисел більших за 10 і менших за 100 є скінченна кількість {11, 12, …, 98, 99}.

Експеримент “пропонується на координатній прямій поставити навмання між числами 10 та 11 точку” містить нескінченну і незліченну множину елементарних подій (точних значень координати точки), бо дійсних чисел більших за 10 і менших за 11 є нескінченна кількість (додавши два крайніх числа та їх суму поділивши пополам, дістанемо число, яке міститься між ними і т. д., тобто між будь-якими двома як завгодно близькими числами міститься безліч інших чисел).

Сукупність (підмножина) деяких елементарних подій певного експерименту утворює *подію* (*складну подію*), яка може виникнути в цьому експерименті. Події позначають великими латинськими літерами: A, B, C, ...

Якщо деяка подія не містить жодної елементарної події, то її називають *неможливою* та позначають так як і порожню множину символом Ø. Якщо деяка подія містить всі елементарні події, то її називають *вірогідною* та позначають так як і простір елементарних подій символом Ω.

Подібно як і множини, події задають одним із двох способів – переліком елементів, або за допомогою характеристичних ознак.

Наприклад, нехай один раз кидають гральний кубик (гральний кубик – це правильний куб, який містить на кожній грані по-одному різному числі від 1 до 6) і нехай подія A «Випадання парного числа». Ми подію A задали за допомогою характеристичної ознаки – число парне. Переліком елементів подія A буде задана так: $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ або так $A = \{2, 4, 6\}$.

Якщо в результаті проведення деякого експерименту настала деяка елементарна подія ω_i, де $\omega_i \in A$, то це означає, що і настала подія A. Елементарні події, які входять до складу події A називають *сприятливими* для події A. Отже, подія A відбудеться, якщо відбудеться будь-яка її сприятлива подія. Простір елементарних подій певного експерименту є вірогідною подією при проведенні цього експерименту.

1. Нехай один раз кидають гральний кубик (гральний кубик – це правильний куб, який містить на кожній грані по-одному різному числі від 1 до 6) і нехай подія A – випадання парного числа.

В цьому випадку простір елементарних подій при киданні кубика: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а сама подія $A = \{2, 4, 6\}$.

2. Припустимо, що монету кидають два рази і нехай подія A – випадання монети гербом догори не менше двох разів. При кожному киданні монета може впасти догори гербом (г), або цифрою (ц). Простором елементарних подій є множина: Ω = {гг, гц, цг, цц}. Як видно одна елементарна подія простору належить події A, тобто A = {гг}.

3. Припустимо, що монету кидають три рази і нехай подія A – випадання монети гербом догори не менше двох разів. При кожному киданні монета може впасти догори гербом (г), або цифрою (ц). Простором елементарних подій є множина: Ω = {ггг, ггц, гцг, гцц, цгг, цгц, ццг, ццц}. Як видно чотири елементарні події простору належать події A, тобто A = {ггг, ггц, гцг, цгг}.

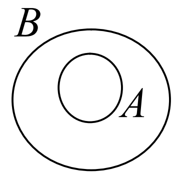
4. Припустимо, що монету кидають чотири рази і нехай подія A – випадання монети гербом догори не менше двох разів. При кожному киданні монета може впасти догори гербом (г), або цифрою (ц). Простором елементарних подій є множина: Ω = {гггг, гггц, ггцг, ггцц, гцгг, гцгц, гццг, гццц, цггг, цггц, цгцг, цгцц, ццгг, ццгц, цццг, цццц}. Як видно 11 елементарних подій простору належать події A, тобто A = {гггг, гггц, ггцг, ггцц, гцгг, гцгц, гццг, цггг, цггц, цгцг, ццгг}.

5. Нехай монету кидають до тих пір, поки не випаде цифра і подія A – полягає в тому, що буде зроблено не більше шести кидків. Тоді A = {ц, гц, ггц, гггц, ггггц, гггггц}. Зрозуміло, що в даному прикладі простір елементарних подій міститиме елементарні події, які входять до складу події A, а також і інші елементарні події: Ω = {ц, гц, ггц, гггц, ггггц, гггггц, ..., гг...гц, ...}. Кількість елементів простору елементарних подій є нескінченним.

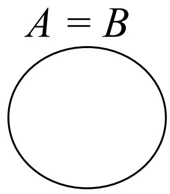
Подібно, як і множини, події можна подавати за допомогою кругів Ейлера-Венна, де простір елементарних подій позначатиметься прямокутником, а події – кругами.

2. 2. Відношення та дії над подіями

1. Подія B є наслідком події A (інакше кажучи – подія A *включається* в подію B), тоді та тільки тоді, коли подія A є окремим випадком події B, а це буде в тому та тільки тому випадку, коли подія A складається з таких елементарних подій, кожна з яких входить до складу події B. Позначають: $A \subset B$, або $B \supset A$ при цьому говорять A включається в B (або, інакше, B є наслідком A). Отже, відношення $A \subset B$ означає, що всі елементарні події, які входять до складу події A, входять також до складу події B. Подія B є наслідком події A, тому, що при настанні події A настає подія B.

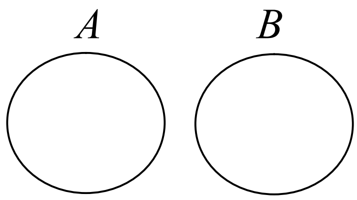


Наприклад, при киданні кубика, події: «Випадання парного числа на кубику» та «Випадання числа 4 на кубику» є такими, що перша з них є наслідком другої, а інакше – друга включається в першу.



2. Події A і B *рівнозначні* або *еквівалентні, рівні*, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Позначають $A = B$. Отже, якщо: $A \subset B$ і $B \subset A$ $\Leftrightarrow$ $A = B$.

Наприклад, при киданні кубика, події: A «Випадання парного числа на кубику» та B «Випадання числа 2, 4 або 6 на кубику» перебувають у відношенні рівності, тобто є рівнозначними.

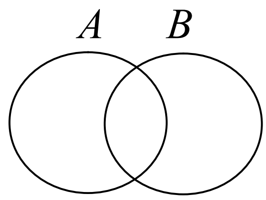


3. Події A і B називають *несумісними* (інакше кажучи – такими, що перебувають у відношенні *виключення*), якщо вони можливі та не мають спільних елементарних подій, або, простіше, якщо вони не можуть одночасно відбутися.

Наприклад, при киданні кубика, події: A «Випадання непарного числа на кубику» та B «Випадання числа більшого за п’ять на кубику» знаходяться в відношенні виключення, бо не містять спільних елементарних подій (перша з них містить три елементарні події ($\omega_1, \omega_3, \omega_5$), а друга – одну ($\omega_6$), де ω_i – це елементарна подія, яка означає, що на кубику випало число i). Відбутися події A і B одночасно не можуть.

Якщо ми маємо будь-яку кількість подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, то вони називаються *несумісними*, якщо вони не можуть одночасно відбутися.

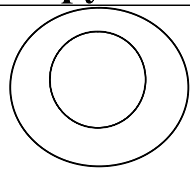
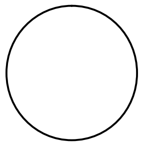
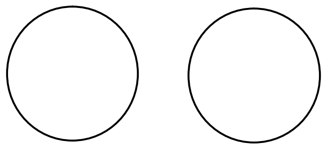
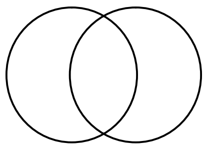
4. Події A і B називають *пересічними* (інакше кажучи – такими, що перебувають у відношенні *часткового перерізу*), якщо вони можливі, містять хоча б одну спільну елементарну подію, а також кожна з них містить хоча б одну таку елементарну подію, якої немає в іншій з цих двох подій.



Наприклад, при киданні кубика, події: A «Випадання на кубику парного числа» та B «Випадання на кубику числа більшого за три» знаходяться в відношенні часткового перерізу, бо вони містять спільні елементарні події ω_4, ω_6, а також A містить елементарну подію ω_2 якої нема в B , а B містить елементарну подію ω_5 якої нема в A, де ω_i – це елементарна подія, яка означає, що на кубику випало число *i*. Відбуватися події A і B можуть як і одночасно, так і поодинці.

Отож, будь-які дві події (множини елементарних подій) перебувають між собою в одному з таких чотирьох *відношень*: включення, рівності, виключення, часткового перерізу (табл. 2.1). Кругами Ейлера-Венна вони задаватимуться так, як показано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Типи відношень між подіями	Задання відношень за допомогою кругів
• ***включення*** – коли одна з подій є наслідком іншої;	
• ***рівності*** – коли в кожній із них немає такої елементарної події, якої немає в іншій, тобто коли кожна елементарна подія (елемент) однієї множини є елементом іншої і навпаки;	
• ***виключення*** *(несумісності)* – обидві події можливі (тобто містять хоча б одну елементарну подію) але не містять спільних елементарних подій;	
• ***часткового перерізу*** – обидві події можливі, містять хоча б одну спільну елементарну подію, а також кожна з них містить хоча б одну таку елементарну подію, якої немає в іншій з цих двох подій.	

Розглянемо **дії над подіями**.

5. *Сумою* або *об'єднанням* подій A, B називається їх теоретико-множинне *об'єднання*, тобто подія, яка складається з тих і тільки тих елементарних подій, які входять до складу хоча б однієї з подій A чи B. Отож, сума подій A, B настає тоді та тільки тоді, коли настає хоча б одна з подій A чи B (інакше кажучи або A, або

B, або *A* та *B*; ще інакше кажучи A або B в невиключаючому розумінні). Позначається сума подій так $A \cup B$ (іноді так $A + B$). Подію $A \cup B$ утворюють лише сприятливі елементарні події подій A або B в невиключаючому розумінні. Суму (об'єднання) подій називають *логічною сумою*. При утворенні суми подій в звичайній мові використовують словосполучник "або" інакше "чи", причому обидва в невиключаючому розумінні.

Наприклад, якщо при киданні кубика, подія *A* «Випадання на кубику парного числа» та *B* «Випадання на кубику числа більшого за три», то $A \cup B$ є така подія «Випадання на кубику парного або більшого за три числа», причому $A \cup B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_2, ω_4, ω_5, ω_6 – це всі елементарні події хоча б одної із подій *A*, *B*, тобто всі події об'єднання подій *A*, *B*.

Аналогічно буде для суми будь-якої кількості подій.

6. *Добутком* або *перерізом* подій *A*, *B* називається їх теоретико-множинний *переріз*, тобто подія, яка складається з тих та тільки тих елементарних подій, що входять в обидві події *A* та *B*. Добуток подій *A*, *B* настає тоді та тільки тоді, коли настають обидві події *A* та *B* (інакше кажучи і *A* і *B*). Позначається добуток так *AB* (інакше $A \cap B$; ще інакше $A \cdot B$). Подію *AB* утворюють лише спільні сприятливі елементарні події подій *A* та *B*. Добуток (переріз) подій називають *логічним добутком*. При утворенні добутку подій в звичайній мові використовують словосполучник "і" інакше "та".

Наприклад, якщо при киданні кубика, подія A «Випадання на кубику парного числа» та B «Випадання на кубику числа більшого за три», то AB є така подія «Випадання на кубику парного та більшого за три числа», причому $AB = \{\omega_4, \ \omega_6\}$, де $\omega_4, \ \omega_6$ – це всі спільні елементарні події подій A, B, тобто всі події перерізу подій A, B.

Аналогічно буде для добутку будь-якої кількості подій.

Теорема. $AB = \varnothing$ тоді та тільки тоді коли події A, B несумісні.

Доведення. Доведемо достатність. Якщо $AB = \varnothing$, то, згідно визначення добутку, множина спільних елементарних подій для подій A та B є порожня, а отже, події A та B не мають спільних елементарних подій, тобто не можуть одночасно відбутися, а отже, згідно визначення несумісних подій, є несумісні.

Доведемо необхідність. Якщо події A, B несумісні, то, згідно визначення несумісних подій, події A та B не мають спільних елементарних подій, а отже, множина спільних елементарних подій для них є порожня, а отже, згідно визначення добутку, $AB = \varnothing$.

Теорема доведена.

7. *Різницею* подій A, B називається теоретико-множинне *доповнення* події B до події A, тобто подія, яка складається з тих та тільки тих елементарних подій, що входять в подію A та не входять в подію B. Різниця подій A, B настає тоді та тільки тоді, коли настає подія A та не настає подія B. Позначається різниця так $A \setminus B$

(інакше $A-B$). Подію $A \setminus B$ утворюють лише ті елементарні події, які є сприятливі для події *A* та не є сприятливі для події *B*.

Наприклад, якщо при киданні кубика, подія *A* «Випадання на кубику парного числа» та *B* «Випадання на кубику числа більшого за три», то $A \setminus B$ є така подія «Випадання на кубику парного числа, яке не є більше за три», причому $A \setminus B = \{\omega_2\}$, де ω_2 – це єдина з простору експерименту елементарна подія, яка належить події *A* та не належить події *B*.

8. *Протилежною подією* до події *A* називається теоретико-множинне *доповнення* події *A* до всього простору експерименту для якого розглядається подія *A*. Інакше кажучи, п*ротилежною подією* до події *A* називається подія, що складається з усіх елементарних подій простору цього експерименту, що не входять в подію *A*. Позначається *протилежна подія* $\overline{A}$ (або інакше $\Omega \setminus A$). Подію $\overline{A}$ утворюють лише ті елементарні події простору цього експерименту, які не є сприятливі для події *A*. В звичайній мові для формулювання протилежної події використовують частку “не”.

Наприклад, якщо при киданні кубика, подія *A* «Випадання на кубику парного числа» то $\overline{A}$ «Випадання на кубику непарного числа», причому $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Протилежні події *A* та $\overline{A}$ появляються тільки поодинці (єдино-можливі); утворюють події *A* та $\overline{A}$ повну групу, бо їх об’єднання дає множину всіх сприятливих та несприятливих елементарних подій, тобто весь простір елементарних подій цього експерименту. Подія A настає тоді та тільки тоді, коли не настає подія $\overline{A}$, тобто подія A полягає в тому, що подія $\overline{A}$ не відбулася, а подія $\overline{A}$ полягає в тому, що подія A не відбулася, тобто, що відбулася подія не A.

Розглянемо суму, добуток та різницю подій для кожного випадку відношень між ними (таблиця 2.2).

Якщо над подіями проводять операції суми, добутку та різниці, і в виразі відсутні дужки, то спочатку виконують операції добутку, а потім, по порядку слідування зліва направо згідно їх розміщення у виразі – суми, різниці.

Якщо, наприклад, існують події A та B, які не мають спільних елементів, а подія C має спільні елементи як і з A так і з B, то з допомогою кругів Ейлера-Венна подія $A \cup B \cap C$ це заштрихована область не як на рис. 2а (на рис. 2а зображено подія $(A \cup B) \cap C$), а як на рис.2б.

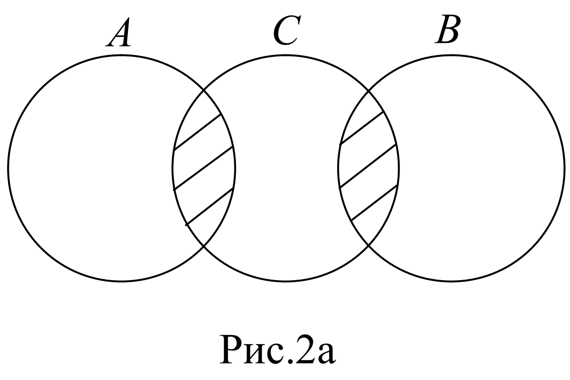


Рис.2а

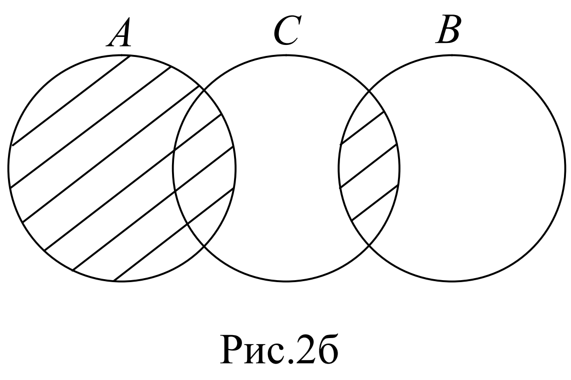
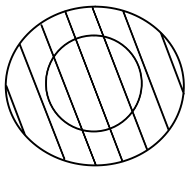
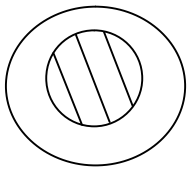
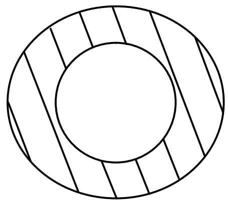
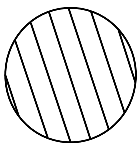
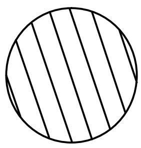
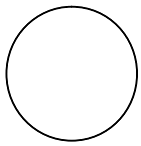
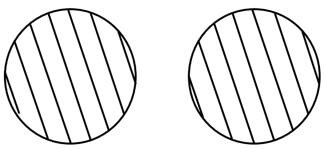
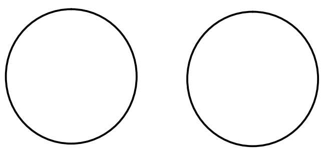
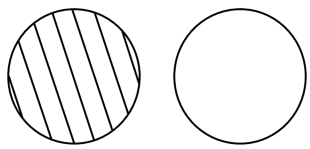
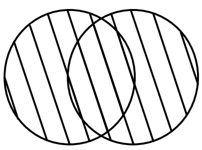
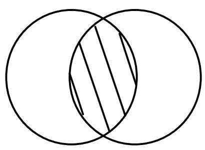
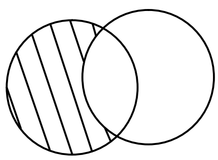


Рис.2б

Таблиця 2.2

Дія → / **Відно-шення ↓**	**• сума**	**• добуток**	**• різниця**
• включення $B \subset A$ (A містить B)			$A \setminus B = \overline{B_A}$,  $B \setminus A = \varnothing$
• рівності			$A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \varnothing$ 
• виключення		$A \cap B = \varnothing$ 	$A \setminus B = A$ 
• часткового перерізу			

2. 3. Властивості операцій над подіями

1°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення (читається так: протилежною до протилежної є сама подія). Доведення слідує із самого визначення протилежної події. Розглянемо приклад: якщо при киданні кубика, подія A «Випадання на кубику парного числа», $\overline{A}$ «Випадання на кубику непарного числа» та $\overline{\overline{A}}$ «Не випадання на кубику непарного числа», або $\overline{\overline{A}}$ «Випадання на кубику парного числа» причому $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ та $\overline{\overline{A}} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = A$;

2°. $A \cup B = B \cup A$ – переставна (комутативна) властивість операції суми;

3°. $AB = BA$ – переставна (комутативна) властивість операції добутку;

4°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції суми;

5°. $(AB)C = A(BC)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції добутку;

6°. $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції добутку відносно суми;

7°. $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції суми відносно добутку;

8°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A\,B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – І-ий, ІІ-ий закони де-Моргана відповідно;

9°. $A \cup (A\,B) = A$; $A\,(A \cup B) = A$ – закони поглинання;

10°. $(A\,B)\cup(A\,\overline{B})=A$; $(A\cup B)\,(A\cup\overline{B})=A$ – закони склеювання;

11°. $A\cup\overline{A}=\Omega$; $A\cup\varnothing=A$; $A\cup A=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cap A=A$; $A\cup\Omega=\Omega$; $A\cap\Omega=A$.

Всі властивості і закони над подіями легко доводяться з самих означень відповідних операцій над подіями та за допомогою визначення рівності подій (також можливе доведення за допомогою кругів Ейлера-Венна).

Приклад. Гравець витягує з перемішаної колоди карт одну, а потім другу карту. Нехай подія A – витягання першою карти червоної масті (черва, дзвуна), B – витягання другою карти чорної масті (піка, хреста). Тоді подія: $C=A\,\overline{B}$ – витягання обох карт червоної масті; $D=(A\,B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})$ – витягання карт масті різних кольорів; $E=(A\,B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(A\,\overline{B})=A\cup\overline{B}$ – витягання хоча б однієї червоної масті.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: поняття стохастичного експерименту; події та елементарної події; способи задавання і запису різних видів подій; означення та властивості відношення пересічності, відношення несумісності; відношення наслідку (включення) і відношення рівності подій; поняття вірогідної (універсальної) події (простору елементарних подій); означення добутку, суми та різниці двох подій; поняття доповнення події; їх символічні позначення;

властивості і закони операцій над подіями; порядок виконання операцій над подіями;

у м і т и: наводити приклади стохастичних експериментів та їх подій; знаходити простір елементарних подій експерименту; записувати подію за допомогою елементарних подій; визначати відношення між подіями; зображати на кругах Ейлера-Венна події беручи до уваги відношення між ними; робити дії над подіями; записувати складену подію за допомогою простих подій; застосовувати операції над подіями.

3. ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

3. 1. Статистичне та класичне визначення ймовірності подій

Розглянемо експеримент в результаті якого точно виникне подія A. Позначимо ймовірність виникнення події A в такому експерименті за 1, бо подія A є вірогідною подією. Тепер розглянемо стохастичний експеримент, який можна повторити будь-яке число разів і при цьому результат попереднього експерименту не впливатиме на результат даного. Повторимо експеримент n разів. Нехай деяка подія A при цьому відбулася m разів. Введемо визначення.

Статистичною ймовірністю $P^*(A)$ події A називається відношення кількості разів виникнення події A, при багатократному повторенні експерименту, до всієї кількості повторень експерименту: $P^*(A) = m/n$.

Якщо розглянути один із найпростіших експериментів, наприклад «підкидання монети», та підкинути монету лише один раз, то ми можемо отримати як герб, так і цифру. Наприклад отримали герб, тобто нехай це буде подія A. Застосувавши формулу $P^*(A) = m/n$, отримаємо $P^*(A) = 1/1 = 1$. Це означатиме, що подія A повинна завжди точно виникати при проведенні цього експерименту, чого насправді бути не може, бо може випадати і цифра. А помилка виникла тому, що число повторень не є достатньо великим.

Відношення m/n називають *відносною частотою події* A в проведеній серії експериментів. Теорія ймовірності розглядає лише ті експерименти, які проводяться в однакових умовах. Для таких експериментів m/n при великому n (числі повторень) мало відрізняється від деякої безрозмірної величини p – *ймовірності події* A, де $0 \le p \le 1$ і чим більше число повторень n, тим менше відхилення між m/n та p по абсолютній величині (по модулю) .

Ряд дослідників підкидали монету велике число разів і записували результати. При цьому отримували, що відношення випадання герба (або цифри) до числа підкидань приблизно дорівнює $\frac{1}{2}$.

Наприклад, Пірсон підкидав монету 24000 разів і при цьому отримав, що цифра випала 11988 разів. Як видно відношення $\frac{11988}{24000} \approx \frac{12000}{24000} = \frac{1}{2}$.

Статистична ймовірність $P^*(A)$ події A буде відображати досить точно ймовірність події A, якщо число повторень експерименту прямуватиме до нескінченності, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\left(P^*(A)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n} = p$.

Введемо класичне означення ймовірності. Розглядатимемо дещо з іншої сторони деякий експеримент, для якого простір елементарних подій є скінченним $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ... \omega_n\}$, тобто можна перерахувати всі рівноможливі, нерозкладні результати цього експерименту (рівноможливі означає, що не повинно бути якихось об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій ймовірнішою за інші), які є єдино можливі й несумісні (тобто взаємовиключні) та лише вони утворюють весь простір (повну групу) цього експерименту.

Класичною ймовірністю $p(A)$ події A називається відношення кількості елементарних подій що входять до складу події A (сприятливих для події A), до всієї кількості елементарних подій цього простору.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Або так: *класичною ймовірністю* $p(A)$ події A називається відношення кількості випробовувань при яких виникла б подія A, до всієї кількості рівноможливих, єдиноможливих і несумісних результатів випробовувань.

Щоб обчислити ймовірність події A за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω, а також кількість їх у множині, яка відповідає події A. Для цього застосовують формули комбінаторної математики.

Зрозуміло, що $n(A)$ – кількість випробовувань при яких виникла б подія A, або те саме, що число елементів множини A, n – кількість рівноможливих, єдиноможливих і несумісних результатів випробовувань, які лише собою складають весь простір, або те саме, що число елементарних подій простору елементарних подій даного експерименту.

Наприклад. В мішку є три зелені, дві білі і одна червона куля. Знайти ймовірність того, що вийнята куля буде: зелена; біла; червона.

Розв'язування: Всіх куль є шість. Ймовірність того, що вийнята куля буде: зелена дорівнює 3/6 = 0,5; біла = 2/6 = 1/3; червона = 1/6.

Задача 2.1. В мішку є 23 зелені, 4 білі і 101 червона куля. Знайти ймовірність того, що вийнята куля буде: зелена; біла; червона.

Наприклад. В щойно створене курортне озерце для відпочиваючих рибалок запустили 950 карасів і 50 коропів. Яка ймовірність, що серед перших п'яти виловлених риб будуть самі карасі.

Розв'язування: Нехай подія A полягає в тому, що серед перших п'яти виловлених риб будуть самі карасі. Простір елементарних подій містить C_{1000}^5 (число можливих наборів п'яти риб із тисячі) елементарних подій. Сама подія A містить C_{950}^5 елементарних подій. Тому, використовуючи класичне визначення ймовірності, отримаємо:

$$P(A)=\frac{C_{950}^5}{C_{1000}^5}=\frac{A_{950}^5/P_5}{A_{1000}^5/P_5}=\frac{A_{950}^5}{A_{1000}^5}=\frac{950\cdot 949\cdot 948\cdot 947\cdot 946}{1000\cdot 999\cdot 998\cdot 997\cdot 996}\approx 0{,}77.$$

Відповідь. 0,77.

Задача 2.2. В щойно створене курортне озерце для відпочиваючих рибалок запустили 390 карасів і 10 коропів. Яка ймовірність, що серед перших п'яти виловлених риб будуть самі карасі.

Наприклад. Знайти ймовірність того, що гральний кубик після підкидання впаде догори а) парною цифрою; б) цифрою кратною три; в) парною цифрою або цифрою кратною три в невиключаючому розумінні.

Розв'язування: а) Нехай подія A – випадання парної цифри. Ймовірність події A: $p(A) = n(A)/n$, де $n(A) = 3$, бо подія $A = \{w_2, w_4, w_6\}$, тобто вона містить елементарні події: випадання цифри 2, – 4, – 6 відповідно. n – кількість всіх елементарних подій (n = 6). Отже $p(A) = n(A)/n = 3/6 = 1/2$;

б) Нехай подія A – випадання цифри кратної три. В цьому випадку $n(A) = 2$, бо подія $A = \{w_3, w_6\}$, тобто вона містить відповідно елементарні події: випадання цифри 3, випадання цифри 6. Отже $p(A) = n(A)/n = 2/6 = 1/3$;

в) Нехай подія A – випадання парної цифри або цифри кратної три в невиключаючому розумінні. В цьому випадку $n(A)$ = 4, бо подія $A = \{w_2, w_4, w_6, w_3\}$. Отже $p(A) = n(A)/n = 4/6 = 2/3$.

Задача 2.3. Знайти ймовірність того, що при витягуванні карти з колоди карт в якій їх 36, витягнута карта є: а) тузом; б) червоної масті; в) тузом або червоної масті в невиключаючому розумінні.

3. 2. Властивості ймовірності

1°. Для кожної події $A \subset \Omega$ справедлива нерівність: $0 \le P(A) \le 1$.

Доведення: Так, як $\left(P(A) = m/n\right) \wedge \left(0 \le m \le n\right)$, де m, n – числа сприятливий для події А, та всіх елементарних подій простору даного експерименту відповідно, то $0 \le P(A) \le 1$.

2°. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Доведення: $P(\varnothing) = 0/n = 0$, бо неможлива подія має 0 сприятливих елементарних подій.

3°. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$.

Доведення: $P(\Omega) = n/n = 1$, бо для вірогідної події всі елементарні події простору даного експерименту є сприятливими.

4°. *Теорема додавання для двох будь-яких* (*сумісних*) *подій*:

Якщо A і B сумісні події, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доведення: Розглянемо деякий експеримент, при виконанні якого можуть виникнути події A та B, причому події A та B є сумісні, тобто мають спільні елементи ($AB \ne \varnothing$). Нехай всіх можливих елементарних подій даного експерименту буде n. Подія A нехай містить кількість m_1 сприятливих собі елементарних подій. Подія B нехай містить кількість m_2 сприятливих собі елементарних події. Оскільки події A, B сумісні, то деякі їх елементарні події є спільні та входять в подію A і в подію B одночасно, тобто в подію AB. Нехай їх кількість m_{12}. Перераховуючи елементарні події, які входять в подію $A \cup B$, потрібно, згідно комбінаторного правила суми, елементарні події, що належать події A додати до елементарних подій, що належать події B і щоб два рази спільні елементарні події не враховувати, їх потрібно один раз відняти. Отже результатів експерименту, сприятливих для події $A \cup B$ (число сприятливих елементарних подій події $A \cup B$) дорівнює: $m = m_1 + m_2 - m_{12}$.

Беручи до уваги класичне означення ймовірності, отримаємо:

$$p(A \cup B) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 + m_2 - m_{12}}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_{12}}{n} =$$

$$= p(A) + p(B) - p(AB).$$

Тобто $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$. Теорема доведена.

Якщо A і B несумісні події ($AB = \varnothing$), то $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, бо $p(AB) = p(\varnothing) = 0$.

Отож, *теорема додавання для несумісних подій*:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

5°. *Теорема додавання для будь-якого числа n довільних подій*:

Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ довільні події, то:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n} p(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} p(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^{n-1} p(A_1 A_2 ... A_n).$$

Доведення проводиться на основі подібних міркувань як в теоремі про суму двох довільних подій, яка і є частковим випадком даної теореми. Якщо всі можливі пари утворені з подій $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні ($A_i A_j = \varnothing$, $i \ne j$), то: $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$.

6°. Події A та B називають *незалежними*, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи іншої. Інакше кажучи, події A та B називають *незалежними*, якщо між ними немає причинного зв'язку.

Наприклад, при подвійному киданні кубика, події випадання герба в результаті першого кидка та випадання герба в результаті другого кидка є незалежними подіями.

Теорема множення для двох незалежних подій: ймовірність добутку двох незалежних подій, тобто ймовірність настання їх обох дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Доведення: Нехай серед всіх n_1 можливих результатів експерименту, в результаті якого може виникнути подія A, є m_1 сприятливих для події A, а серед всіх n_2 можливих результатів експерименту, в результаті якого може виникнути подія B, є m_2 сприятливих для події B. Отже $p(A) = m_1 / n_1$, $p(A) = m_2 / n_2$.

Кількість всіх можливих результатів експерименту, в результаті якого може виникнути і подія A і подія B, тобто подія AB, дорівнює кількості елементів (пар) простору цих двох експериментів, тобто кількості елементів декартового добутку множин $\{n_1\}$ та $\{n_2\}$, тобто $n_1 \cdot n_2$. Серед них сприятливих для події AB є стільки, скільки елементів містить декартовий добуток множин $\{m_1\}$ та $\{m_2\}$, тобто $m_1 \cdot m_2$. То:
$p(AB) = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \dfrac{m_1}{n_1} \cdot \dfrac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B)$. Теорему доведено.

7°. Ймовірності протилежних подій A та $\overline{A}$ перебувають у такому співвідношенні: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Доведення. Оскільки подій A та $\overline{A}$ несумісні та в сумі дають весь простір, то $p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$ та $p(A \cup \overline{A}) = 1$, тобто $p(A) + p(\overline{A}) = 1$, а отже $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

8°. Якщо $A \subset B$, то $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.

Доведення випливає із визначення різниці подій і відношення включення між подіями. Якщо $A \subset B$, то $B = B \setminus A \cup A$.

А отже, згідно правила ймовірності суми двох несумісних подій (подія $B \setminus A$ та подія A – несумісні), отримаємо: $p(B) = p(B \setminus A \cup A) = p(B \setminus A) + p(A)$.

А отже $p(B) = p(B \setminus A) + p(A)$ і $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$.

Наприклад, підкидають двічі копійку та потрібно знайти ймовірність того, що копійка після першого та після другого підкидання впаде цифрою догори.

Розв'язування: Нехай подія A – подія, яка означає, що копійка після першого підкидання впала цифрою догори, подія B – подія, яка означає, що копійка після другого підкидання впала цифрою догори. Тоді подія AB – подія, яка означає, що копійка після першого і після другого підкидання впала цифрою догори. Така ймовірність дорівнює: $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$, бо події A та B – незалежні. Отже, так як $p(A) = p(B) = 1/2$, то $p(AB) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$.

2-ий спосіб. Нехай подія A – подія, яка означає, що копійка після першого та після другого підкидання впала цифрою догори. Весь простір подвійного підкидання містить такі елементарні події: гг, гц, цг, цц, тобто їх кількість – 4. Лише одна із них, а саме елементарна подія цц є сприятлива для події A. Тому $p(A) = 1/4$.

Відповідь. 1/4.

Приклад. Підкидають двічі гральний кубик. Потрібно знайти ймовірність того, що кубик після першого та після другого підкидання впаде а) числом кратним 5 догори; б) числом кратним 3 догори; в) парним числом догори; г) числом кратним 2 або 3 догори.

Приклад. У шухляді є 8 ручок українського виробництва, 6 – угорського і 4 – китайського. Знайти ймовірність того, що серед випадково вибраних 5 ручок три ручки виявляться імпортного виробництва.

Розв'язування: Нехай подія A – подія, яка означає, що серед випадково вибраних 5 ручок три ручки є імпортного виробництва.

Ручки угорського і китайського виробництва є ручками імпортного виробництва і їх разом у шухляді у продавця канцтоварів є 6 + 4 = 10.

Подія A складатиметься з таких подій: подія A_1 – перші дві витягнуті ручки є українського виробництва, а наступні три – імпортного, тобто (у, у, і, і, і); подія A_2 – перша є українського виробництва, друга – імпортного, третя – українського, а наступні дві – імпортного, тобто (у, і, у, і, і); подія A_3 – (у, і, і, у, і); подія A_4 – (у, і, і, і, у); подія A_5 – (і, у, у, і, і); подія A_6 – (і, у, і, у, і); подія A_7 – (і, у, і, і, у); подія A_8 – (і, і, у, у, і); подія A_9 – (і, у, і, і, у); подія A_{10} – (і, і, і, у, у).

Тобто, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9 \cup A_{10}$.

Тут події A_i, $1 \le i \le 10$, – елементарні події. Зрозуміло, що якщо вони елементарні, то вони несумісні між собою. Тоді, згідно теореми про додавання ймовірностей несумісних подій, отримаємо:

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) + p(A_5) + p(A_6) + p(A_7) + p(A_8) + p(A_9) + p(A_{10}).$$

Ймовірність кожної з цих подій можна знайти згідно класичного означення ймовірності, тобто як відношення числа сприятливих події A_i елементарних подій до всієї кількості елементарних подій.

Так $p(A_1) = \dfrac{A_8^2 \cdot A_{10}^3}{A_{18}^5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \dfrac{2}{51}$. Очевидно, що ймовірність будь-якої з подій A_i, $1 \le i \le 10$, визначатиметься так само і дорівнюватиме тому ж числу, тобто $p(A_1) = p(A_2) = ... = p(A_{10})$. Отже

$$p(A) = p(A_1) \cdot 10 = \frac{2}{51} \cdot 10 = \frac{20}{51}.$$

2-ий спосіб.

Нехай подія A – подія, яка означає, що серед випадково вибраних 5 ручок три ручки є імпортного виробництва.

Ручки угорського і китайського виробництва є ручками імпортного виробництва і їх разом у шухляді у продавця канцтоварів є 6 + 4 = 10.

Подія A складатиметься з таких подій A_i, кожна з яких означає, що вибрано певні 3 із десяти ручок імпортного виробництва та 2 із 8 українського і ймовірність кожної із подій A_i дорівнює $\frac{A_8^2 \cdot A_{10}^3}{A_{18}^5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{2}{51}$.

Тут всі події A_i несумісні між собою та кількість їх дорівнює $N = C_5^2 = \frac{A_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ або $N = C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$.

Тоді, згідно теореми про додавання ймовірностей несумісних подій, отримаємо: $p(A) = p(A_i) \cdot N = \frac{A_8^2 \cdot A_{10}^3}{A_{18}^5} \cdot C_5^3 = \frac{2}{51} \cdot 10 = \frac{20}{51}$.

3-ій спосіб.

Число сприятливих елементарних подій для події A дорівнює $C_{10}^3 \cdot C_8^2$, а число всіх елементарних подій експерименту дорівнює C_{18}^5. Тоді згідно класичного визначення ймовірності, матимемо:

$$p(A) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_8^2}{C_{18}^5} = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}\right) = \frac{20}{51}.$$

4-ий спосіб. Ми вибираємо 5 ручок. Подія A – дві з вибраних п'ятьох є українські, то сприятливих елементарних подій подія A має стільки, скільки є вибірок $C_5^2 = \frac{A_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Всі 10 сприятливих елементарних подій події A мають однакову ймовірність виникнення. Розглянемо одну із них, а саме елементарну подію A_1, яка означає, що перші дві витягнуті ручки є українського виробництва, а наступні три – імпортного, тобто (у, у, і, і, і). Отож, нам потрібно знайти ймовірність настання події у, у, і, і, і. Для цього розглядатимемо вибір 5 ручок як п'ятиразове повторення витягання 1 ручки з шухляди, беручи до уваги зміну чисельності ручок в процесі витягання. Наступить подія A_1 тоді і тільки тоді коли наступлять одночасно 5 таких подій: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$, де

A_{11} – витягання 1-ою ручки українського виробництва, причому $p(A_{11}) = 8/18 = 4/9$;

A_{12} – витягання 2-ою ручки українського виробництва із 17 ручок, причому $p(A_{12}) = 7/17$;

A_{13} – витягання 3-ьою ручки імпортного виробництва вже із 16 ручок, причому $p(A_{13}) = 10/16 = 5/8$;

A_{14} – витягання 4-ьою ручки імпортного виробництва вже із 15 ручок, причому $p(A_{14}) = 9/15 = 3/5$;

A_{15} – витягання 5-ою ручки імпортного виробництва вже із 14 ручок, причому $p(A_{15}) = 8/14 = 4/7$.

Оскільки події $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}$ є незалежні, то застосувавши теорему множення, отримаємо:

$$p(A_1) = p(A_{11})p(A_{12})p(A_{13})p(A_{14})p(A_{15}) = \frac{4}{9}\cdot\frac{7}{17}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{51}.$$

Отож, $p(A_1) = \frac{2}{51}$. Тому $p(A_i) = \frac{2}{51}$, $1 \le i \le 10$.

Тоді, $p(A) = p(A_i)\cdot 10 = \frac{2}{51}\cdot 10 = \frac{20}{51}$.

Відповідь. 20/51.

Приклад У мішечку є 5 кульок білого кольору, 4 – темно-коричневого і 3 – темно-синього. Знайти ймовірність того, що серед випадково вибраних 4 кульок – три кульки виявляться темного кольору.

Розв'язування:

$$p(A) = \frac{A_7^3 \cdot A_5^1}{A_{12}^4} \cdot C_4^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{35}{99}.$$

Або інакше

$$p(A) = \frac{C_7^3 \cdot C_5^1}{C_{12}^4} = \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5}{1}\right) / \left(\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right) = \frac{35}{99}.$$

Відповідь. $\frac{35}{99}$.

Приклад. Деякий український футбольний клуб має чверть сотні м'ячів, серед яких переважно українські, а інші – 5 російських, 4 польські, 2 німецькі і один румунський. Знайти ймовірність того, що серед випадково вибраних 6 м'ячів – чотири м'ячі виявляться імпортного виробництва.

Приклад. В мішечку є 200 картоплин чотирьох сортів. Відомо, що ймовірність витягання картоплини І-го сорту дорівнює 3/8, ІІ-го – 2/8, ІІІ-го – 2/8. а) скільки було картоплин IV-го сорту? б) знайти ймовірність витягання двох картоплин IV-го сорту при витяганні двох картоплин. в) знайти ймовірність того, що серед сотні вийнятих навмання картоплин хоч би одна є І-го сорту.

Розв'язування: а) Кожна картоплина належить тільки до одного сорту, тому події, – витягання картоплин різних сортів, є несумісними подіями і складають вірогідну подію даного випробування. А тому:

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) = p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = p(\Omega) = 1,$$

де подія A_i – подія, яка означає витягання картоплини i-го сорту.

Отже ймовірність витягання картоплини IV-го сорту дорівнює:

$$p(A_4) = 1 - \left(p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)\right) = 1 - p(A_1) - p(A_2) - p(A_3).$$

З другого боку, за означенням класичної ймовірності, ймовірність витягання картоплини IV-го сорту дорівнює $p(A_4) = x / N$, де N – кількість всіх картоплин, а x – кількість картоплин IV-го сорту.

Отже: $p(A_4) = x / N$.

Прирівнявши, отримаємо: $x / N = 1 - p(A_1) - p(A_2) - p(A_3)$.

Отож, $x = N\left(1 - p(A_1) - p(A_2) - p(A_3)\right) =$

$$= 200 \cdot \left(1 - \frac{3}{8} - \frac{2}{8} - \frac{2}{8}\right) = 200 \cdot \frac{1}{8} = 25 \text{ (к.) – IVсорту.}$$

б) З попереднього пункту відомо, що всього картоплин IV-го сорту було 25.

Нехай подія C_1 – подія, яка означає витягання з мішечка зі 200 картоплинами, з яких IV-го сорту є 25, картоплини IV-го сорту ($p(C_1) = 25/200 = 1/8$), C_2 – подія, яка означає витягання з мішечка зі 199 картоплинами з яких IV-го сорту є 24 картоплини IV-го сорту

($p(C_2)=24/199$). Тоді подія C_1C_2 – подія, ймовірність якої нам потрібно знайти. Події C_1 і C_2 є незалежними, а тому:

$$p(C_1C_2)=p(C_1)\cdot p(C_2)=\frac{25}{200}\cdot\frac{24}{199}=\frac{1}{8}\cdot\frac{24}{199}=\frac{3}{199}.$$

б) 2-ий спосіб. За визначенням класичної ймовірності, отримаємо: $p=\frac{C_{25}^2}{C_{200}^2}=\frac{A_{25}^2/P_2}{A_{200}^2/P_2}=\frac{A_{25}^2}{A_{200}^2}=\frac{25\cdot 24}{200\cdot 199}=\frac{3}{199}$.

в) За означенням класичної ймовірності, ймовірність витягання картоплини І-го сорту дорівнює $P(A_1)=x_1/N$, де N – кількість всіх картоплин, а x_1 – кількість картоплин І-го сорту. За умовою $P(A_1)=3/8$.

Отже: $\frac{x_1}{200}=\frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad x_1=200\cdot\frac{3}{8}=75$ (картоплин) І-го сорту.

Нехай подія A – серед сотні вийнятих навмання картоплин є хоч би одна І-го сорту. Тоді подія $\overline{A}$ – серед сотні вийнятих навмання картоплин немає картоплин І-го сорту. Зрозуміло, що події A і $\overline{A}$ – протилежні. Тому: $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$.

Щоб відбулася подія $\overline{A}$, потрібно сотню картоплин вийняти з картоплин не І-го сорту, які є в мішечку, тобто з $200-75=125$ картоплин. А це можна здійснити такою кількістю способів: $C_{125}^{100}=\frac{125\,!}{100\,!\cdot(125-100)\,!}$.

Загальне число способів вибору сотні картоплин з 200 картоплин дорівнює: $C_{200}^{100}=\frac{200\,!}{100\,!\cdot(200-100)\,!}=\frac{200\,!}{100\,!\cdot 100\,!}$.

Отже:

$$P(\overline{A})=\frac{C_{125}^{100}}{C_{200}^{100}}=\frac{\dfrac{125\,!}{100\,!\cdot 25\,!}}{\dfrac{200\,!}{100\,!\cdot 100\,!}}=\frac{125\,!}{100\,!\cdot 25\,!}\cdot\frac{100\,!\cdot 100\,!}{200\,!}=\frac{125\,!\cdot 100\,!}{25\,!\cdot 200\,!}=$$

$$=\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot ...\cdot 26\cdot 25\,!\cdot 125\,!}{200\cdot 199\cdot 198\cdot ...\cdot 126\cdot 125\,!\cdot 25\,!}=\frac{100\cdot 99\cdot 98\cdot ...\cdot 26}{200\cdot 199\cdot 198\cdot ...\cdot 126}=$$

$$=\frac{100}{200}\cdot\frac{1}{199}\cdot\frac{99}{198}\cdot\frac{1}{197}\cdot\frac{98}{196}\cdot\frac{1}{195}\cdot ...\cdot\frac{63}{126}\cdot 62\cdot 61\cdot ...\cdot 26=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{38}\cdot\frac{62\cdot 61\cdot ...\cdot 26}{199\cdot 197\cdot ...\cdot 127}\approx 2{,}6\cdot 10^{-35}.$$

Отже, ймовірність того, що серед сотні вийнятих навмання картоплин є хоч би одна І-го сорту така $p(A)\approx 1-2{,}6\cdot 10^{-35}\approx 1$, тобто подія A є майже вірогідною.

Пункт в) цієї задачі можна зробити іншим способом. Подія $\overline{A}$ може бути подана як добуток таких подій $B_1B_2...B_{100}$ ($B_1\cap B_2\cap ...\cap B_{100}$) де B_1 – подія, яка означає витягання з мішечка зі 200 картоплинами, з яких першого сорту є 75, картоплини не І-го сорту ($p(B_1)=\dfrac{200-75}{200}=\dfrac{125}{200}$), B_2 – подія, яка означає витягання з мішечка зі 199 картоплинами, з яких першого сорту є 75, картоплини не І-го сорту ($p(B_2)=\dfrac{199-75}{199}=\dfrac{124}{199}$), і т.д., B_{100} – подія, яка означає витягання з мішечка зі 101 картоплинами, з яких першого сорту є 75, картоплини не І-го сорту

($p(B_{100})=\dfrac{101-75}{101}=\dfrac{26}{101}$). Ймовірність події $\overline{A}$ можна знайти як ймовірність добутку незалежних подій $B_1B_2...B_{100}$.

Тому:

$$p(\overline{A})=p(B_1B_2...B_{100})=p(B_1)\cdot p(B_2)\cdot...\cdot p(B_{100})=\frac{125}{200}\cdot\frac{124}{199}\cdot...\cdot\frac{26}{101}=$$

$$=\frac{100\cdot 99\cdot...\cdot 26}{200\cdot 199\cdot...\cdot 126}=\left(\frac{1}{2}\right)^{38}\cdot\frac{62\cdot 61\cdot...\cdot 26}{199\cdot 197\cdot...\cdot 127}\approx 2{,}6\cdot 10^{-35}.$$

$p(A)=1-P\left(\overline{A}\right)\approx 1-2{,}6\cdot 10^{-35}\approx 1$, тобто подія A є майже вірогідною, але не вірогідною, а дуже близькою до вірогідної (різниця між ймовірностями події A та вірогідної події складає $2{,}6\cdot 10^{-35}$).

Приклад. В ящику є 1000 картоплин чотирьох сортів. Відомо, що ймовірність витягання картоплини І-го сорту дорівнює 1/4, ІІ-го – 1/8, ІІІ-го – 3/8. а) скільки було картоплин IV-го сорту? б) знайти ймовірність витягання двох картоплин IV-го сорту при витяганні двох картоплин. в) знайти ймовірність того, що серед сотні вийнятих навмання картоплин хоч би одна є ІІ-го сорту.

Приклад. На автостоянці шість автомобілів мають магнітофони фірми «AIWA», сім – фірми «PHILIPS» і дев’ять – фірми «PIONEER». Вночі викрадено п’ять магнітофонів. Знайти ймовірність того, що всі магнітофони фірми «PHILIPS» залишилися на своїх місцях.

Розв'язування: Нехай подія A – подія, що означає, що всі магнітофони фірми «PHILIPS» залишилися на своїх місцях, тобто це означає, що серед вибраних п'яти магнітофонів немає магнітофонів фірми «PHILIPS».

Знайдемо ймовірність згідно класичної ознаки ймовірності.

Всіх магнітофонів разом – 22. Знайдемо число всіх можливих вибірок з 22 по 5.

$C_{22}^5 = \frac{A_{22}^5}{P_5} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$ – число всіх елементарних подій.

Магнітофонів не «PHILIPS» було 22 – 7 = 15. Знайдемо число всіх можливих вибірок з 15 по 5, тобто число сприятливих елементарних подій, які означають, що серед вибраних п'яти магнітофонів немає магнітофонів фірми «PHILIPS».

$C_{15}^5 = \frac{A_{15}^5}{P_5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$.

Тоді,

$$P(A) = \frac{C_{15}^5}{C_{22}^5} = \frac{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}}{\frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{13}{114} \approx 0{,}114035$$

– ймовірність того, що всі магнітофони фірми «PHILIPS» залишилися на своїх місцях. Відповідь: $\approx$ 0,114035.

Приклад. В класі з 15 комп'ютерів є 12 справних. Знайти ймовірність того, що з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

Розв'язування: З точки зору постановки запитання задачі, можливі два випадки:

1) з двох навмання вибраних комп'ютерів обидва справні;

2) з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним (один або два).

Нехай подія A – подія, яка означає, що серед випадково вибраних 2-ох комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

Знайдемо ймовірність згідно класичної ознаки ймовірності.

Знайдемо число всіх можливих вибірок з 15 по 2.

$C_{15}^2 = \dfrac{A_{15}^2}{P_2} = \dfrac{15 \cdot 14}{2} = 15 \cdot 7 = 105$ – число всіх елементарних подій.

Знайдемо число всіх можливих вибірок зі справних комп'ютерів, тобто з 12 по 2.

$C_{12}^2 = \dfrac{A_{12}^2}{P_2} = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ – число несприятливих для події A елементарних подій.

Тоді $105 - 66 = 39$ – число сприятливих для події A елементарних подій.

Тоді, $P(A) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \dfrac{39}{105} = \dfrac{13}{35} = 0{,}3(714285)$ – ймовірність того, що з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

2-ий спосіб. Нехай подія A – подія, яка означає, що серед випадково вибраних 2-ох комп'ютерів хоча б один виявиться несправним. Тоді подія $\overline{A}$ – подія, яка означає, що серед випадково вибраних 2-ох комп'ютерів обидва справні.

$$p(\overline{A}) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{A_{12}^2 / P_2}{A_{15}^2 / P_2} = \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 7} = \frac{22}{35}.$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{22}{35} = \frac{35}{35} - \frac{22}{35} = \frac{35-22}{35} = \frac{13}{35} = 0{,}3(714285)$$ –

ймовірність того, що з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

Відповідь: 0,3(714285).

Приклад. В двох контейнерах є по 20 деталей, причому в першому – 5 бракованих, а в другому – 3 браковані деталі. З першого контейнера навмання береться одна деталь і перекладається в другий. Знайти ймовірність того, що навмання взята після цього з другого контейнера деталь виявиться стандартною.

Розв'язування: Ймовірність того, що з першого контейнера навмання береться стандартна деталь і перекладається в другий дорівнює $\frac{20-5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Тоді в другому контейнері $20 + 1 = 21$ деталь з яких $20 - 3 + 1 = 18$ стандартних. Отже, в цьому випадку, ймовірність того, що, після перекладання, навмання взята з другого контейнера деталь виявиться стандартною дорівнює $18/21 = 6/7$.

Або можливе таке. Якщо ж з першого в другий контейнер переставлено браковану деталь, а ймовірність цього рівна

$5/20 = 1/4$, то при цьому, ймовірність того, що, після перекладання, навмання взята з другого контейнера деталь виявиться стандартною дорівнює $17/21$.

Отже, згідно теореми додавання для несумісних подій, отримаємо:

$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{21} = \frac{71}{4 \cdot 21} = \frac{71}{84}$ = 0,8452380(952380), (952380 – це період десяткового нескінченного періодичного дробу).

Відповідь: 0,8452380(952380).

3. 3. Умовні ймовірності.
Теорема множення ймовірностей будь-яких подій

Розглянемо ймовірність події *A* за умови, що подія *B* відбулася. Позначатимемо її так: $p(A/B)$ і читаємо так: *A* за умови *B*. Для визначення цієї ймовірності за класичним означенням ймовірності, потрібно можливими елементарними подіями вважати ті, при яких настає подія *B*, а сприятливими елементарними подіями для події *A* (за умови, що подія *B* відбулася) будуть ті елементарні події простору, які є сприятливі двом подіям *A* і *B*, тобто які є сприятливі добутку *AB*. Тому,

$$p(A/B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{n(AB):n}{n(B):n} = \frac{p(AB)}{p(B)},$$

де *n* – кількість всіх елементарних подій простору.

$B \neq \varnothing$, тобто подія *B* не повинна бути неможливою подією, інакше не має змісту говорити про ймовірність події *A* за умови, що подія *B* відбулася. Тобто $p(B) \neq 0$.

Умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, називається число $p(A/B)=\dfrac{p(AB)}{p(B)}$.

Отож, для умовної події A/B простором елементарних подій є сама подія B.

З попередньої формули випливає теорема множення ймовірностей будь-яких двох подій:

$$p(AB)=p(B)\cdot p(A/B)=p(A)\cdot p(B/A).$$

Як частинний випадок, для двох незалежних подій маємо:

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B).$$

Теорема про незалежні події. Якщо події A і B незалежні, то незалежні також між собою складові таких пар A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, а також події $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Доведення. Розглянемо подію $A\overline{B}$. Якщо до цієї події додати несумісну їй подію AB, то отримаємо саму подію A. Тому $p(A)=p(AB\cup A\overline{B})=p(AB)+P(A\overline{B})$. А з останньої рівності отримаємо: $p(A\overline{B})=p(A)-p(AB)=p(A)-p(A)p(B)=$ $p(A)\big(1-p(B)\big)=p(A)p(\overline{B})$, тобто події A і $\overline{B}$ є незалежні. Аналогічно можна довести це і для інших пар.

Теорему доведено.

Теорема множення ймовірностей будь-яких n подій.

Ймовірність добутку (перерізу) n незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ визначається з формули:

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}).$$

Приклад. В мішечку є 15 червоних кульок та 10 білих кульок. Витягують по одній п'ять кульок. Знайти ймовірність того, що перших чотири кульки є червоні, а п'ята – біла.

Розв'язування:

Нехай A_1, A_2, A_3, A_4 – події, які означають витягання червоної кульки, а подія A_5 означає витягання білої кульки.

Подія A означає витягання перших чотирьох кульок червоних, а п'ятої – білої.

Використавши теорему множення ймовірностей, отримаємо:

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1 A_2) \cdot p(A_4 / A_1 A_2 A_3) \cdot p(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{13}{23} \cdot \frac{12}{22} \cdot \frac{10}{21} = \frac{13}{23} \cdot \frac{1}{11} = \frac{13}{253}.$$ Відповідь. $\frac{13}{253}$.

Приклад. В мішечку є 25 червоних кульок та 12 білих кульок. Витягують по одній сім кульок. Знайти ймовірність того, що перших чотири кульки є червоні, а п'ята, шоста та сьома – білі.

Приклад. Відомо, що серед готівкової маси 0,5 % купюр є непридатними до наступного використання. Знайти ймовірність того, що серед 2400 купюр виручки магазину непридатними до наступного використання є хоча б дві купюри.

Розв'язування: Нехай подія A – подія, яка означає, що купюра непридатна до наступного використання. Згідно умови задачі серед готівкової маси 0,5 % купюр є непридатними до наступного використання. А отже, $p(A)=\dfrac{0,5}{100}=\dfrac{5}{1000}=\dfrac{1}{200}$.

Тоді, подія $\overline{A}$ – подія, яка означає, що купюра придатна до наступного використання. Так як, $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\dfrac{1}{200}=\dfrac{199}{200}$.

Нам слід знайти ймовірність того, що серед 2400 купюр виручки магазину непридатними до наступного використання є хоча б дві купюри. Хоча б дві купюри – це дві, три або більше купюр.

Нехай подія B_1 – подія, яка означає, що всі 2400 купюр придатні до наступного використання.

Тоді, $p(B_1)=\left(\dfrac{199}{200}\right)^{2400}$.

Нехай подія B_2 – подія, яка означає, що зі всіх 2400 купюр лише одна непридатна до наступного використання.

Тоді, $p(B_2)=\left(\dfrac{199}{200}\right)^{2399}\cdot\dfrac{1}{200}$.

Подія $B=B_1\cup B_2$ – подія, яка означає, що зі всіх 2400 купюр придатні всі, або лише одна непридатна до наступного використання. Оскільки події B_1, B_2 є несумісні, не можуть бути всі придатні і в той самий час – одна непридатна, то згідно правила ймовірності несумісних подій, отримаємо:

$$p(B)=p(B_1\cup B_2)=p(B_1)+p(B_2)=\left(\frac{199}{200}\right)^{2399}\cdot\left(\frac{199}{200}+\frac{1}{200}\right)=\left(\frac{199}{200}\right)^{2399}.$$

Нехай C – подія, яка означає, що зі всіх 2400 купюр непридатними до наступного використання є хоча б дві купюри.

Так, як зі всіх 2400 купюр можуть бути придатні до наступного використання всі купюри, може бути лише одна непридатна до наступного використання, або можуть бути хоч би дві (дві або більше) непридатні до наступного використання, то $B \cup C = \Omega$, де події B та C – несумісні. То $p(B) + p(C) = 1$. Звідси

$$p(C) = 1 - p(B) = 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{2399} \approx 0{,}999994.$$

Відповідь: 0,999994.

Приклад. Відомо, що серед готівкової маси 0,1 % двогривневих купюр є непридатними до наступного використання. Знайти ймовірність того, що серед двогривневих купюр загальною вартістю 2000 гривень непридатними до наступного використання є: а) хоча б одна купюра; б) хоча б дві купюри; в) хоча б три купюри.

3. 4. Формула повної ймовірності

Розглянемо такий приклад задачі. Є три мішки із кульками. В першому лише червоні кульки, в другому – три білі та три червоні, в третьому – п’ять білих і 15 червоних. Із одного з мішків витягують одну кульку. Знайти ймовірність того, що витягнута кулька червона.

Розв’язування: Нехай ω_i – вибір кульки з і-ого мішка, де $i = 1, 2, 3$. Ймовірність вибору кульки з кожного з мішків однакова та дорівнює $p(\omega_i)=\frac{1}{3}$. Нехай A – вибір з одного з мішків червоної кульки. Тоді умовні ймовірності A/ω_i означають вибір червоної кульки за умови вибору і-ого мішка, тобто вибір червоної кульки з і-ого мішка, де $i = 1, 2, 3$. Ймовірність вибору червоної кульки за умови вибору першого мішка дорівнює 1, бо там самі червоні кульки, отже $p(A/\omega_1) = 1$. Ймовірність вибору червоної кульки за умови вибору другого мішка дорівнює $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, отже $p(A/\omega_2) = \frac{1}{2}$. Ймовірність вибору червоної кульки за умови вибору третього мішка дорівнює $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, отже $p(A/\omega_3) = \frac{1}{4}$. Подія A настане тоді та тільки тоді, коли вибрано перший мішок і з нього вибрано червону кульку $\omega_1 \cdot A/\omega_1$ або вибрано другий мішок і з нього вибрано червону кульку $\omega_2 \cdot A/\omega_2$ або вибрано третій мішок і з нього вибрано червону кульку $\omega_3 \cdot A/\omega_3$. Множники цих добутків є незалежними, тому $p(\omega_i \cdot A/\omega_i) = p(\omega_i)p(A/\omega_i)$, а самі добутки є несумісними, тому

$$p(A) = p(\omega_1 \cdot A/\omega_1 \cup \omega_2 \cdot A/\omega_2 \cup \omega_3 \cdot A/\omega_3) = \sum_{i=1}^{3} p(\omega_i \cdot A/\omega_i).$$

Використавши останні рівності, отримаємо $p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(\omega_i)p(A/\omega_i)$. Оскільки в нас всі $p(\omega_i)=\frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, то $p(A) = p(\omega_i)\sum_{i=1}^{3} p(A/\omega_i) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{12}$. Відповідь. $\frac{7}{12}$.

Нехай події $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ попарно несумісні та утворюють повну групу подій, тобто $\omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_n = \Omega$. Нехай з цього простору взято подію A.

Теорема.

Якщо $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ – повна група подій ($\omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_n = \Omega$) і $p(\omega_i) \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, то ймовірність будь-якої події A з простору Ω визначатиметься за формулою

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) p(A / \omega_i),$$

яку називають ***формулою повної ймовірності***.

Доведення.

$\Omega = \omega_1 \cup \omega_2 \cup ... \cup \omega_n$. Помноживши цю рівність на A, враховуючи властивості операцій над подіями, можемо записати:

$$A = \Omega \cap A = (\omega_1 \cap A) \cup (\omega_2 \cap A) \cup ... \cup (\omega_n \cap A).$$

Оскільки події $\omega_1 \cap A$, $\omega_2 \cap A$, ..., $\omega_n \cap A$ попарно несумісні, бо попарно несумісні події $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, то використовуючи теореми про додавання, а також про множення подій, отримаємо:

$$p(A) = p\big((\omega_1 \cap A) \cup (\omega_2 \cap A) \cup ... \cup (\omega_n \cap A)\big) =$$

$$= p(\omega_1 \cap A) + p(\omega_2 \cap A) + ... + p(\omega_n \cap A) =$$

$$= p(\omega_1) \cdot p(A / \omega_1) + p(\omega_2) \cdot p(A / \omega_2) + ... + p(\omega_n) \cdot p(A / \omega_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) p(A / \omega_i).$$

Отож, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) p(A / \omega_i)$.

Приклад. Монітор до комп'ютера може належати одній з чотирьох партій з ймовірностями 0,4; 0,1; 0,2 і 0,3 відповідно. Імовірність того, що монітор відпрацює подвійний гарантійний термін, дорівнює для кожної партії 0,7; 0,8; 0,6; 0,9 відповідно. Знайти імовірність того, що навмання вибраний монітор буде працювати подвійний гарантійний термін.

Розв'язування: Нехай подія *A* полягає у тому, що вибраний монітор буде працювати подвійний гарантійний термін, подія H_i – монітор до комп'ютера належить *i*-ій партії, $i = 1, 2, 3, 4$. Треба знайти $P(A)$. Події H_i, $i = 1, 2, 3, 4$, попарно незалежні, й одна з них обов'язково відбувається. Отже вони утворюють повну групу подій. За умовою:

$$P(H_1) = 0{,}4; \quad P(H_2) = 0{,}1; \quad P(H_3) = 0{,}2; \quad P(H_4) = 0{,}3;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}7; \quad P(A/H_2) = 0{,}8; \quad P(A/H_3) = 0{,}6; \; P(A/H_3) = 0{,}9.$$

За формулою повної ймовірності для $n = 4$, отримаємо:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) +$$

$$+ P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}28 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}27 = 0{,}75.$$

Відповідь: $0{,}75$.

Приклад. В класі є три ряди парт. За партами лівого ряду сидять три дівчини і сім хлопців, середнього – п'ять дівчат і шість хлопців і за партами правого ряду – сім дівчат і два хлопці. З довільного ряду вибирають одну людину. Яка ймовірність того, що вибрано дівчину?

Розв'язування: Нехай ω_i, $i = 1, 2, 3$ – подія, яка означає, що вибрано студента з лівого, середнього, правого ряду відповідно. Подія A – подія, яка означає, що вибраним студентом є дівчина. Оскільки про ймовірності вибору того чи іншого ряду нічого не сказано, то вважатимемо їх рівними між собою та рівними $p(\omega_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Умовні ймовірності $p(A/\omega_1) = \frac{3}{10}$; $p(A/\omega_2) = \frac{5}{11}$; $p(A/\omega_3) = \frac{7}{9}$. Отже, за формулою повної ймовірності (випадок $n = 3$), отримаємо: $p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(\omega_i) p(A/\omega_i) =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{11} + \frac{7}{9} \right) = \frac{1517}{2970}$. Відповідь. $\frac{1517}{2970}$ – ймовірність того, що вибрано дівчину.

Приклад. В залі є 5 рядів із сидіннями. За першим рядом сидять тринадцять дівчат і сімнадцять хлопців, другого – шістнадцять дівчат і чотирнадцять хлопців, третього – сім дівчат і три хлопці, четвертого – троє дівчат і два хлопці. З довільного ряду вибирають одну людину. Яка ймовірність того, що вибрано дівчину, якщо ймовірність вибору учня з певного ряду прямопропорційна числу учнів в цьому ряді?

Розв'язування: Нехай ω_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ – подія, яка означає, що вибрано учня з 1, 2, 3, 4, 5 ряду відповідно. Подія A – подія, яка означає, що вибраним учнем є дівчина.

За умовою задачі: $p(\omega_1):p(\omega_2):p(\omega_3):p(\omega_4):p(\omega_5)=$ $=n_1:n_2:n_3:n_4:n_5=30:30:10:5:0=6x:6x:2x:x:0$, де символ “:” означає відноситься. Позначимо через x ймовірність вибору четвертого ряду, тоді 0 – п’ятого, $2x$ – третього, $6x$ – другого, $6x$ – першого. Оскільки повинен бути вибраний один із рядів, то $6x+6x+2x+x+0=1$ і звідси $x=\dfrac{1}{15}$ – ймовірність вибору четвертого ряду; $2x=\dfrac{2}{15}$ – третього; $\dfrac{6}{15}$ – другого; $\dfrac{6}{15}$ – першого; 0 – п’ятого.

Знайдемо умовні ймовірності: $p(A/\omega_1)=\dfrac{13}{30}$, $p(A/\omega_2)=\dfrac{16}{30}$, $p(A/\omega_3)=\dfrac{7}{10}$, $p(A/\omega_4)=\dfrac{3}{5}$, $p(A/\omega_5)=0$. Отже, за формулою повної ймовірності (випадок $n=5$), отримаємо:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{5}p(\omega_i)p(A/\omega_i)=\frac{6}{15}\cdot\frac{13}{30}+\frac{6}{15}\cdot\frac{16}{30}+\frac{2}{15}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{15}\cdot\frac{3}{5}+0=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{13}{5}+\frac{1}{15}\cdot\frac{16}{5}+\frac{2}{15}\cdot\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13+16+14+3}{75}=\frac{46}{75}.$$ Відповідь. $\dfrac{46}{75}$.

3. 5. Формула ймовірності гіпотез (формула Байєса)

Нехай події (гіпотези) $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ – несумісні, мають відомі ймовірності $P(\omega_i)$, які називають апріорними (від лат. *apriori* – до випробування), а також нехай відомі умовні ймовірності $P(A/\omega_i)$. Виразимо ймовірності виконання гіпотез ω_i за умови, що подія A відбулася, тобто умовні ймовірності $P(\omega_i/A)$, які називають апостеріорними (від лат. *apjsteriori*– після випробування). Кожна з таких ймовірностей, як умовна, виразиться через ймовірність добутку подій так

$$P(\omega_i / A) = \frac{P(\omega_i A)}{P(A)}, i = 1, 2, ..., n.$$

В свою чергу, кожну з ймовірностей чисельника та ймовірність знаменника можемо розписати

$$P(\omega_i A) = P(\omega_i)P(A/\omega_i), \quad P(A) = \sum_{I=1}^{n} P(\omega_i)P(A/\omega_i), i = 1, 2, ..., n.$$

Отже шукані ймовірності $P(\omega_i / A), i = 1, 2, ..., n$ виражаються формулою

$$P(\omega_i / A) = \frac{P(\omega_i)P(A/\omega_i)}{\sum_{I=1}^{n} P(\omega_i)P(A/\omega_i)}, i = 1, 2, ..., n$$

– формула ймовірностей гіпотез Байєса.

Приклад. В трьох мішечках є кульки. Із навмання вибраного одного мішечка з даних трьох навмання вибирають одну кульку (ймовірність вибору кожного з мішечків однакова). Ймовірність вибору білої кульки складає 2/3, 4/7, 3/5 для І-ого, ІІ-ого та ІІІ-ого мішечка відповідно. Вибрана кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що вона вибрана із другого мішечка.

Розв'язування: Нехай ω_i, $i = 1, 2, 3$ – подія, яка означає, що вибрано кульку з І-ого, ІІ-ого та ІІІ-ого мішечка відповідно. Подія A – подія, яка означає, що вибрана кулька виявилась білою. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = p(\omega_3) = 1/3$. За умовою задачі умовні ймовірності:

$p(A/\omega_1)=2/3$, $p(A/\omega_2)=4/7$, $p(A/\omega_3)=3/5$. Отже, за формулою Байєса, ймовірність того, що біла кулька вибрана із другого мішечка дорівнює:

$$p(\omega_2/A)=\frac{p(\omega_2)p(A/\omega_2)}{\sum_{i=1}^{5}p(\omega_i)p(A/\omega_i)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{4}{21}:\frac{70+60+63}{3\cdot3\cdot5\cdot7}=$$

$$=\frac{4}{21}:\frac{193}{315}=\frac{4}{21}\cdot\frac{315}{193}=\frac{4}{1}\cdot\frac{15}{193}=\frac{60}{193}.$$

Відповідь. 60/193.

Приклад. В залі є 5 рядів із сидіннями на яких сидять учні. За першим рядом сидять тринадцять дівчат і сімнадцять хлопців, другого – шістнадцять дівчат і чотирнадцять хлопців, третього – сім дівчат і три хлопці, четвертого – троє дівчат і два хлопці. З довільного ряду вибирають одного учня (хлопця або дівчину). Ймовірність вибору учня з певного ряду прямопропорційна числу учнів в цьому ряді. Вибраним учнем виявляється хлопець. Яка ймовірність того, що він вибраний з першого ряду.

Розв'язування: Нехай ω_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ – подія, яка означає, що вибрано учня з 1, 2, 3, 4, 5 ряду відповідно. Подія A – подія, яка означає, що вибраним учнем є хлопець.

За умовою задачі: $p(\omega_1):p(\omega_2):p(\omega_3):p(\omega_4):p(\omega_5)=$

$=n_1:n_2:n_3:n_4:n_5=30:30:10:5:0=6x:6x:2x:x:0$, де символ ":" означає відноситься, а n_i – число всіх учнів в i-ому ряді. Позначимо через x ймовірність вибору четвертого ряду, тоді 0 –

п'ятого, $2x$ – третього, $6x$ – другого, $6x$ – першого. Оскільки повинен бути вибраний один із цих рядів, то $6x+6x+2x+x+0=1$ і звідси $x=\frac{1}{15}$ – ймовірність вибору четвертого ряду; $2x=\frac{2}{15}$ – третього; $\frac{6}{15}$ – другого; $\frac{6}{15}$ – першого; 0 – п'ятого.

Знайдемо умовні ймовірності: $p(A/\omega_1)=\frac{17}{30}$, $p(A/\omega_2)=\frac{14}{30}$, $p(A/\omega_3)=\frac{3}{10}$, $p(A/\omega_4)=\frac{2}{5}$, $p(A/\omega_5)=0$. Отже, за формулою Байєса, отримаємо:

$$p(\omega_1/A)=\frac{p(\omega_1)p(A/\omega_1)}{\sum\limits_{i=1}^{5}p(\omega_i)p(A/\omega_i)}=\frac{\frac{6}{15}\cdot\frac{17}{30}}{\frac{6}{15}\cdot\frac{17}{30}+\frac{6}{15}\cdot\frac{14}{30}+\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{15}\cdot\frac{2}{5}+0}=$$

$$=\frac{\frac{6}{15}\cdot\frac{17}{30}}{\frac{6}{15}\cdot\frac{17}{30}+\frac{6}{15}\cdot\frac{14}{30}+\frac{2}{15}\cdot\frac{9}{30}+\frac{1}{15}\cdot\frac{12}{30}}=\frac{\frac{6\cdot 17}{15\cdot 30}}{\frac{6\cdot 17+6\cdot 14+2\cdot 9+1\cdot 12}{15\cdot 30}}=$$

$$=\frac{\frac{6\cdot 17}{15\cdot 30}}{\frac{6\cdot 17+6\cdot 14+2\cdot 9+1\cdot 12}{15\cdot 30}}=\frac{6\cdot 17}{6\cdot 17+6\cdot 14+2\cdot 9+1\cdot 12}=$$

$$=\frac{102}{102+84+18+12}=\frac{102}{216}=\frac{51}{108}=\frac{17}{36}.$$

Відповідь. $17/36$.

Приклад. Три заводи виготовляють однакові вироби, причому перший завод випускає 50 %, другий – 20 %, третій – 30 % всієї продукції. Відсотки браку для кожного з них складають відповідно

1, 6, 3. Навмання вибраний виріб виявляється бракованим. Знайти ймовірність того, що він був виготовлений на другому заводі.

Розв'язування: Нехай подія A полягає у тому, що вибраний виріб виявляється бракованим, подія H_i – у тому, що виріб виготовлений на i-ому заводі, $i = 1, 2, 3$. Треба знайти $P(H_2 / A)$. Події H_i, $i = 1, 2, 3$, попарно незалежні, й одна з них обов'язково відбувається. Отже вони утворюють повну групу подій. За умовою:

$$P(H_1) = 0{,}5; \qquad P(H_2) = 0{,}2; \qquad P(H_3) = 0{,}3;$$

$$P(A / H_1) = 0{,}01; \quad P(A / H_2) = 0{,}06; \quad P(A / H_3) = 0{,}03.$$

За формулою Байєса для $n = 3$ при $k = 2$, отримаємо:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A / H_2)}{P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}06}{0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}06 + 0{,}3 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}012}{0{,}025 + 0{,}012 + 0{,}009} = \frac{0{,}012}{0{,}046} = \frac{6}{23}.$$

Відповідь: $6/23$.

Варіанти завдань домашньої контрольної роботи з теорії ймовірності.

Вимоги до написання домашньої контрольної роботи. Результати заокруглювати не можна. Результат кожного пункту обов'язково записати в таблицю під прізвищем у вигляді цілого числа, якщо результат є цілим, або у вигляді звичайного нескоротного дробу (увага, звичайного а не десяткового), якщо результат дробовий.

Варіант 1. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 3 білих і 2 червоних кульки. В ІІ-ому – 2 білих і 4 червоних, а в ІІІ-ьому – 7 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 2 рази більша ніж з І-ого, але в 3 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 2. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 3 білих і 3 червоних кульки. В ІІ-ому – 4 білих і 3 червоних, а в ІІІ-ьому – 5 білих та 2 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 4 рази більша ніж з І-ого, але в 3 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 3. 1. Є три мішечки з кульками. В I-ому тільки 3 білих і 4 червоних кульки. В II-ому – 4 білих і 4 червоних, а в III-ьому – 6 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з II-ого мішечка в 3 рази більша ніж з I-ого, але в 3 рази менша ніж з III-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 4. 1. Є три мішечки з кульками. В I-ому тільки 4 білих і 4 червоних кульки. В II-ому – 3 білих і 2 червоних, а в III-ьому – 5 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з II-ого мішечка в 4 рази більша ніж з I-ого, але в 3 рази менша ніж з III-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 5. 1. Є три мішечки з кульками. В I-ому тільки 2 білих і 3 червоних кульки. В II-ому – 2 білих і 2 червоних, а в III-ьому – 6 білих та 4 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з II-ого мішечка в 4 рази більша ніж з I-ого, але в 4 рази менша ніж з III-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 6. 1. Є три мішечки з кульками. В I-ому тільки 3 білих і 2 червоних кульки. В II-ому – 2 білих і 4 червоних, а в III-ьому – 7 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з II-ого мішечка в 3 рази більша ніж з I-ого, але в 4 рази менша ніж з III-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 7. 1. Є три мішечки з кульками. В I-ому тільки 2 білих і 2 червоних кульки. В II-ому – 4 білих і 2 червоних, а в III-ьому – 7 білих та 2 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з II-ого мішечка в 3 рази більша ніж з І-ого, але в 4 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 8. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 3 білих і 3 червоних кульки. В ІІ-ому – 4 білих і 3 червоних, а в ІІІ-ьому – 5 білих та 2 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 3 рази більша ніж з І-ого, але в 3 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 9. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 3 білих і 4 червоних кульки. В ІІ-ому – 4 білих і 4 червоних, а в ІІІ-ьому – 6 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 3 рази більша ніж з І-ого, але в 4 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 10. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 4 білих і 4 червоних кульки. В ІІ-ому – 4 білих і 4 червоних, а в ІІІ-ьому – 5 білих та 3 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 4 рази більша ніж з І-ого, але в 4 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 11. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 2 білих і 3 червоних кульки. В ІІ-ому – 2 білих і 3 червоних, а в ІІІ-ьому – 7 білих та 4 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 2 рази більша ніж з І-ого, але в 3 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 12. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 3 білих і 2 червоних кульки. В ІІ-ому – 3 білих і 2 червоних, а в ІІІ-ьому – 5 білих та 4 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 3 рази більша ніж з І-ого, але в 2 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Варіант 13. 1. Є три мішечки з кульками. В І-ому тільки 2 білих і 2 червоних кульки. В ІІ-ому – 2 білих і 2 червоних, а в ІІІ-ьому – 5 білих та 2 червоних. Із одного з мішечків вибирають дві кульки. Відомо, що ймовірність вибору кульок з ІІ-ого мішечка в 2 рази більша ніж з І-ого, але в 3 рази менша ніж з ІІІ-ого. Знайти: 1.1.) ймовірність вибору кульок із третього мішечка (тобто ймовірність вибору третього мішечка; 1.2.) число способів вибору двох кульок із третього мішечка (обидві кульки витягуються одночасно); 1.3.) ймовірність того, що вибрані кульки різного кольору; 1.4.) ймовірність того, що серед вибраних кульок є хоча б одна біла.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: статистичне та класичне визначення ймовірності; властивості ймовірності; формули обчислення суми та добутку подій; формулу повної ймовірності, формули Байєса;

у м і т и: працювати з статистичним та класичним визначенням ймовірності в процесі розв'язування задач на знаходження ймовірності; використовувати властивості ймовірності для спрощення розв'язку; застосовувати формули обчислення суми та добутку подій, формулу повної ймовірності, формули Байєса.

4. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4. 1. Поняття дискретної випадкової величини та її закону розподілу

При проведенні деякого експерименту, може виявитись корисним приписувати його різним результатам деякі числа. Наприклад, ми могли б сто раз кидати кубик і записувати число випадання цифри шість. Інший експеримент може полягати у виборі 6 кульок з набору в 30 кульок, частина з яких є зеленого кольору і підрахунку зелених серед вибраних. Число зелених кульок серед вибраних і буде результатом експерименту.

Розглянемо простір елементарних подій деякого стохастичного експерименту, тобто Ω. Будь-який закон ξ, за яким кожному елементу $\omega \in \Omega$ ставиться в відповідність функцію $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, всі значення якої є дійсними числами, називають випадковою величиною. Множиною можливих значень випадкової величини ξ розуміють множину значень функції $\xi(\omega)$.

В останньому прикладі простір елементарних подій складається а усіх можливих способів вибору 6 кульок із 30. Нехай буквою ω позначено один з таких виборів. Тоді випадкова величина ξ визначається законом “ $\xi(\omega)$ дорівнює числу кульок в ω, які є зеленого кольору ”. Множиною можливих значень цієї випадкової величини є множина $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Випадкову величину називають *дискретною* випадковою величиною, якщо її множина можливих значень *скінченна* або *зчис-*

ленна (нагадаємо, що множина M називається *зчисленною*, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел, тобто якщо між множиною M та множиною натуральних чисел можна встановити взаємнооднозначну відповідність).

Нижче розглядаються дискретні випадкові величини, множина можливих значень кожної з яких скінченна.

Випадкові величини з вище наведених прикладів дискретні.

Нехай $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ – дискретна випадкова величина, множиною можливих значень якої є множина $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, і нехай $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, – імовірності цих значень, тобто p_i є імовірністю події, яка полягає в тому, що ξ набуває значень x_i, $i = 1, 2, ...n$. Набір імовірностей $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, називають *законом розподілу* дискретної випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$. *Закон розподілу* закон переважно записують у вигляді таблиці:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Тут у першому рядку записано усі можливі значення дискретної випадкової величини ξ, у другому рядку – відповідні імовірності. Зазначимо, що з теореми додавання ймовірностей для попарно несумісних подій, причому всіх подій, що утворюють повну групу, випливає, що завжди $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Приклад. У грошовій лотереї розігрується два виграшу в 100 грн., двадцять виграшів по 10 грн. і двісті виграшів по 1 грн. при загальному числі білетів 1000. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Розв'язування: Тут множина можливих значень для ξ складається з таких чисел: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 10$, $x_4 = 100$.

Відповідні імовірності:

$$p_2 = \frac{200}{1000} = 0{,}2,\ p_3 = \frac{20}{1000} = 0{,}02,\ p_4 = \frac{2}{1000} = 0{,}002,$$

$$p_1 = 1 - (p_2 + p_3 + p_4) = 1 - (0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002) = 1 - 0{,}222 = 0{,}778.$$

Отже, шуканий закон розподілу можна записати у вигляді такої таблиці:

ξ	0	1	10	100
p	0,778	0,2	0,02	0,002

4. 2. Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості

Нехай ξ – дискретна випадкова величина, задана законом розподілу $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots n$. *Математичним сподіванням* випадкової величини ξ називають число $M\xi$, яке дорівнює сумі добутків всіх значень випадкової величини ξ на їх відповідні ймовірності, тобто

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Приклад. За умов останнього прикладу знайти математичне сподівання випадкової величини ξ.

Розв'язування:

$M\xi = 0 + 1 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}002 = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6.$

Відповідь. $M\xi = 0{,}6.$

Розглянемо *властивості* математичного сподівання дискретної випадкової величини.

Нехай *m* і *M* – відповідно найменше та найбільше можливі значення дискретної випадкової величини ξ, заданої законом розподілу $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, ...n$.

1°. На основі рівності $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ маємо

$$m = \sum_{i=1}^{n} mp_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq \sum_{i=1}^{n} Mp_i = M$$

Отже, $m \leq M\xi \leq M$.

Таким чином, математичне сподівання дискретної випадкової величини є деяким її середнім значенням.

2°. Математичне сподівання сталої дорівнює самій цій сталій: $Mc = c$.

Справді. Сталу с можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка набуває єдиного числового значення *с з* імовірністю, що дорівнює $p = 1$. Отже, маємо $Mc = c \cdot 1 = c$.

3°. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання $M(k\xi) = kM\xi$.

Справді, якщо дискретна випадкова величина ξ має закон розподілу $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, то величина $k\xi$ набуває значення kx_1,

$kx_2, ..., kx_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, відповідно. Тому маємо

$$M(k\xi) = \sum_{i=1}^{n} kx_i p_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = kM\xi .$$

4°. Математичне сподівання суми двох дискретних випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Нехай дискретні випадкові величини ξ і η задані законами розподілу

$$p_i = P\{\xi = x_i\},\ i = 1, 2, ... n,$$

$$q_j = P\{\eta = y_j\},\ j = 1, 2, ... m,$$

Введемо позначення

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\},\ i = 1, 2, ... n,\ j = 1, 2, ... m.$$

Тоді за теоремою додавання ймовірностей для попарно несумісних подій маємо

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\} = p_i, \qquad i = 1, 2, ... n,$$ і

аналогічно

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\eta = y_j\} = q_j,\ j = 1, 2, ... m,$$

Випадкова величина $\xi + \eta$ набуває всіх значень виду $x_i + y_j$, $i = 1, 2, ... n$, $j = 1, 2, ... m$.

Припустимо для спрощення міркувань, що всі останні суми різні (від цього припущення неважко звільнитися); тоді

$$P\{\xi + \eta = x_i + y_j\} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, ... n,\ j = 1, 2, ... m,$$

і дістанемо

$$M(\xi+\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}p_{ij}+\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j=M\xi+M\eta .$$

Наслідок. Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n$$

Цей наслідок є прямим узагальненням попередньої властивості.

Доведення цієї формули методом математичної індукції.

Дискретні випадкові величини ξ і η, що задані законами розподілу $p_i=P\{\xi=x_i\}$, $i=1, 2, \ldots n$, $q_j=P\{\eta=y_j\}$, $j=1, 2, \ldots m$, називаються незалежними, якщо події $\{\xi=x_i,\}$ та $\{\eta=y_j\}$ незалежні при будь-яких i та j, $i=1, 2, \ldots n$, $j=1, 2, \ldots m$, тобто, якщо

$$P\{\xi=x_i, \eta=y_j\}=P\{\xi=x_i\}, P\{\eta=y_j\}, i=1, 2, \ldots n, \ j=1, 2, \ldots m .$$

4°. Математичне сподівання добутку двох незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta$$

Використаємо ті самі позначення, що і в доведенні властивості 3°. Оскільки за умовою дискретні випадкові величини ξ і η незалежні, то $p_{ij}=p_i\cdot q_j$, $i=1, 2, \ldots n$, $j=1, 2, \ldots m$.

Випадкова величина $\xi\eta$ набуває всіх значень виду $\{x_i y_j\}$, $i=1, 2, \ldots n$, $j=1, 2, \ldots m$. Якщо припустити для спрощення міркувань, що всі ці добутки різні, то

$P\{\xi\eta = x_i y_j\} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij} = p_i \cdot q_j$, $i = 1, 2, \dots n$, $j = 1, 2, \dots m$, і за формулою $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$ дістанемо

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\xi \cdot M\eta .$$

4. 3. Дисперсія дискретної випадкової величини та її властивості

Для характеристики відхилення дискретної випадкової величини ξ від її математичного сподівання $M\xi$ вводиться величина, яка називається ***дисперсією*** дискретної випадкової величини.

Дисперсією $D\xi$ дискретної випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $M\xi$:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Має місце таке твердження: дисперсія дискретної випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Справді, з формули $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ на основі властивостей математичного сподівання дискретної випадкової величини дістаємо:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2M\xi \cdot \xi + (M\xi)^2) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини має такі ***властивості***.

1°. $D\,c = 0$ (c – стала).

Згідно з формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ дістаємо

$D\,c = Mc^2 - (Mc)^2 = c^2 - c^2 = 0.$

2°. $D\,(k\xi) = k^2 D\xi$ (k – число).

$D\,(k\xi) = M(k^2\xi^2) - (M(k\xi))^2 = k^2\,(M\xi^2 - (M\xi)^2) = k^2 D\xi.$

3°. $D\,(\xi + \eta) = D\,\xi + D\,\eta$, якщо ξ і η незалежні.

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 = M(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - (M\xi + M\eta))^2 =$$

$$= M\xi^2 + 2\,M\xi\,M\,\eta + M\eta^2 - ((M\xi)^2 + 2\,M\xi\,M\eta + (M\eta)^2) =$$

$$= M\xi^2 - (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 = D\,\xi + D\,\eta.$$

4°. $D\,(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$, якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ попарно незалежні (тобто ξ_i, і ξ_j незалежні при $i \neq j;\ i, j = 1, 2, ..., n$).

Доведення цієї формули методом математичної індукції.

Дисперсія будь-якої дискретної випадкової величини невід'ємна, бо вона є математичним сподіванням квадрата відхилення, а квадрат будь-якої величини не може бути від'ємним, то можна дати таке означення.

4. 4. Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини

Середнім квадратичним відхиленням *$\sigma\xi$ дискретної випадкової величини ξ* називають корінь квадратний з її дисперсії:

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}\,.$$

Приклад. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ в прикладі про лотерейні білети.

Розв'язування: Користуючись вміщеною там таблицею, маємо для випадкової величини ξ^2 такий закон розподілу:

ξ^2	0	1	100	10000
p	0,778	0,2	0,02	0,002

і, отже,

$M\xi^2 = 1 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}02 + 10000 \cdot 0{,}002 = 0{,}2 + 2 + 20 = 22{,}2.$

Тому для дисперсії $D\xi$ згідно з формулою (7) і результатом для $M\xi$ маємо:

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 22{,}2 - 0{,}6^2 = 22{,}2 - 0{,}36 = 21{,}84$, а звідси на основі формули (8) маємо $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{21{,}84} \approx 4{,}67$.

Відповідь: $\approx 4{,}67$.

Приклад. Знайти: 1) математичне сподівання; 2) дисперсію; 3) середньоквадратичне відхилення дискретної випадкової величини X за заданим законом її розподілу:

x_i	21	25	32	40	50
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Розв'язування: 1) Згідно формули для математичного сподівання дискретної випадкової величини $M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, отримаємо:

$$M\xi = 21 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}2 + 32 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 4{,}2 + 5 + 9{,}6 + 8 + 5 = 31{,}8;$$

2) Формула для дисперсії дискретної випадкової величини $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Спочатку знайдемо математичне сподівання квадрату дискретної випадкової величини. Для цього побудуємо таблицю:

x_i	441	625	1024	1600	2500
p_i	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Отже: $M\xi^2 = 441 \cdot 0,2 + 625 \cdot 0,2 + 1024 \cdot 0,3 + 1600 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,1 =$
$= 88,2 + 125 + 307,2 + 320 + 250 = 1090,4.$

Тоді, $D\xi = 1090,4 - (31,8)^2 = 79,16.$

3) Формула для середньоквадратичного відхилення дискретної випадкової величини $\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{79,16} \approx 8,89719.$

Відповідь: $M\xi = 31,8$; $D\xi = 79,16$; $\sigma\xi = 8,89719.$

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: визначення всіх величин, які характеризують дискретні випадкові величини та їх властивості;

у м і т и: виводити формули обрахунку всіх величин, які характеризують дискретні випадкові величини; знаходити всі величини, які характеризують дискретні випадкові величини та використовувати їх у процесі розв’язування задач.

5. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

5. 1. Поняття неперервної випадкової величини та її функції розподілу

Випадкову величину називають *неперервною випадковою величиною,* якщо її множина можливих значень є проміжком, скінченним чи нескінченним.

Прикладом неперервної випадкової величини може бути річна кількість опадів у певній місцевості. Рівень опадів, що випали за один рік, є випадковою величиною, яка може набувати будь-якого значення з деякого проміжку.

Вище розглянутий спосіб вивчення дискретних випадкових величин не можна, застосовувати у випадку неперервних випадкових величин. Тому останні вивчаються іншим способом, до розгляду якого ми і переходимо.

Нехай відома неперервна випадкова величина, x – довільне дійсне число і нехай $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, тобто $F_\xi(x)$ є імовірність події, яка полягає в тому, що ξ набуває значень, менших від x. Функцію

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\},\ x \in R\ ,$$

називають ***функцією розподілу неперервної випадкової величини***. Іноді пишуть $F(x)$ замість $F_\xi(x)$.

Зазначимо, що функція розподілу цілком так само означається і для дискретних випадкових величин.

Функція розподілу $F(x)$ має такі ***властивості***.

1°. Для будь-якого $x \in R$, $0 \le F(x) \le 1$. Правильність цієї властивості випливає з того, що $F(x)$ – це імовірність.

2°. Функція *F (x)* є неспадною: якщо $x_1 < x_2$ то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Якщо $x_1 < x_2$, то події $\{\xi < x_1\}$, $\{\xi < x_2\}$ і $\{x_1 \le \xi < x_2\}$, зв'язані між собою співвідношенням $\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \le \xi < x_2\}$, причому події $\{\xi < x_1\}$ і $\{x_1 \le \xi < x_2\}$ несумісні. Тому за теоремою додавання імовірностей для несумісних подій дістаємо $P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \le \xi < x_2\}$,

звідки з урахуванням означення функції розподілу

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Оскільки імовірність будь-якої події – невід'ємне число, то $P\{x_1 \le \xi < x_2\} > 0$ і, отже, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3°. Імовірність того, що випадкова величина ξ набуде значення, яке належить скінченному проміжку $[a; b)$, дорівнює різниці між значенням функції розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини в правому і лівому кінцях проміжка $[a; b)$:

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a).$$

Приклад. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Знайти імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина ξ набуде значення, яке належить проміжку $[0; 1)$.

Розв'язування: Згідно з формулою (11) маємо

$$P\,\{0 \le \xi < 1\} = F\,(1) - F\,(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,0 = \frac{1}{4}.$$

Властивості 1°–3° стосуються як неперервних, так і дискретних випадкових величин. Наступна властивість та її наслідки стосуються лише неперервних випадкових величин.

Надалі випадкову величину ξ називатимемо ***неперервною*** лише в тому випадку, коли її функція розподілу $F(x)$ неперервна на R.

4°. Імовірність того, що неперервна випадкова величина ξ набуде якого-небудь цілком певного значення x_1 дорівнює нулю: $P\,\{\xi = x_1\} = 0$.

Поклавши в (10) $x_2 = x_1 + \Delta x, \Delta x = x_2 - x_1 > 0$ дістаємо рівність $P\,\{x_1 \le \xi < x_1 + \Delta x\} = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$, перейшовши в якій до границі при $\Delta x \to 0 + 0$ (тобто до границі до нуля справа), переконаємось в тому, що рівність $P\,\{\xi = x_1\} = 0$ правильна.

Наслідок. Для неперервної випадкової величини ξ при будь-яких x_1 і x_2, $x_1 < x_2$ мають місце рівності

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi \le x_2\} = P\{x_1 \le \xi \le x_2\}.$$

Дві наступні властивості стосуються як неперервних, так і дискретних випадкових величин.

5°, Якщо множина можливих значень випадкової величини ξ є підмножиною скінченного інтервала $(a; b)$, то:

1) $F(x) = 0$ при $x \le a$; 2) $F\,(x) = 1$ при $x \ge b$.

Справді, якщо $x_1 \le a$, то подія $\{\xi < x_1\}$ неможлива, тобто її імовірність дорівнює нулю. Якщо ж $x_2 \ge b$, то подія $\{\xi < x_2\}$ вірогідна і $F(x_2) = P\{\xi < x_2\} = 1$.

6°. Справедливі такі рівності (див. виведення узагальненої формули Ньютона–Лейбніца):

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

5. 2. Щільність розподілу неперервної випадкової величини та її властивості

Нехай ξ – неперервна випадкова величина, а $F(x)$ – її функція розподілу, яка вважається диференційовною на R. ***Щільністю розподілу*** випадкової величини ξ називають функцію

$$f(x) = F^{/}(x),\ x \in R.$$

Щільність розподілу $f(x)$ має такі ***властивості***.

1°. Для будь-якого $x \in R$ $f(x) \ge 0$.

Правильність цієї властивості випливає з властивості 2° функції розподілу $F(x)$ і такого твердження: функція, диференційовна в деякому інтервалі, яка є неспадною на цьому інтервалі, має в кожній точці даного інтервала невід'ємну похідну.

Надалі функцію $F(x)$ вважатимемо неперервною на R.

2°. Імовірність того, що неперервна випадкова величина ξ набуде значення, яке належить скінченному проміжку $[a; b)$, дорівнює визначеному інтегралу щільності розподілу $f(x)$ цієї випадкової величини з нижньою межею інтегрування a і верхньою b

$$P\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Оскільки $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на R, то згідно з формулою Ньютона – Лейбніца маємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Залишилось скористатися властивістю 3° функції розподілу $F(x)$.

3°. Має місце формула

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,\ x \in R.$$

Справді, замінивши у формулі $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ число a на $-\infty$ і b на x, $x \in R$, матимемо $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, звідки на основі $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ дістанемо $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

4°. Правильна рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Справді, якщо перейти до границі при $x \to +\infty$, то на основі $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ дістанемо $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Приклад. Щільність розподілу неперервної випадкової величини ξ має вигляд $f(x) = \dfrac{p}{1 + x^2}$, де p – невід'ємне число. Знайти *p*.

Розв'язування: Згідно з формулою (17) і рівністю і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, маємо $1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{pdx}{1+x^2}=p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=p\pi$, звідки $p=\frac{1}{\pi}$.

Відповідь. $p=\frac{1}{\pi}$.

5. 3. Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини

Нехай ξ – неперервна випадкова величина, а $f(x)$ – її щільність розподілу, яка вважається такою, що невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ збіжний.

Математичним сподіванням випадкової величини ξ називають число

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$$

Нехай ξ – неперервна випадкова величина, математичне сподівання якої $M\xi=a$, а $f(x)$ – її щільність розподілу, яка вважається такою, що невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx$ збіжний. *Дисперсією випадкової величини* ξ називають число

$$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx.$$

Можна показати, що математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини мають властивості аналогічні тим, що були розглянуті вище для математичного сподівання і дисперсії дискретної випадкової величини. Для неперервної випадкової величини ξ середнє квадратичне відхилення $\sigma\xi$ означається, як і для дискретної величини, формулою

$$\sigma = \sqrt{D\xi}\,.$$

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: визначення всіх величин, які характеризують неперервні випадкові величини та їх властивості;

у м і т и: виводити формули обрахунку всіх величин, які характеризують неперервні випадкові величини; знаходити всі величини, які характеризують неперервні випадкові величини та використовувати їх у процесі розв'язування задач.

6. ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

6. 1. Біномний розподіл

Нехай проводиться n випробувань (одноразових експериментів), причому імовірність настання певної події A в кожному випробуванні дорівнює p і не залежить від результатів інших випробувань; такі випробування називають *незалежними*. Оскільки імовірність настання події A в одному випробуванні дорівнює p, то імовірність її ненастання, тобто невдачі, дорівнює $q = 1 - p$.

Знайдемо імовірність того, що при n випробуваннях подія A настане рівно k разів ($0 \le k \le n$).

Нехай подія A настала в перших k випробуваннях і не настала в усіх $n-k$ наступних випробуваннях. Цю складну подію можна записати у вигляді добутку:

$$\underbrace{A \cap A \cap \ldots \cap A}_{k \text{ разів}} \cap \underbrace{\overline{A} \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}}_{n-k \text{ разів}}$$

Загальне число складних подій, в яких подія A настає рівно k разів, дорівнює C_n^k, де C_n^k $(1 \le k \le n)$ – число комбінацій без повторень з n елементів по k. При цьому імовірність кожної складної події дорівнює $p^k q^{n-k}$. Оскільки складні події попарно несумісні, то імовірність суми їх дорівнює сумі їхніх ймовірностей. Отже, якщо $P_n(k)$ – імовірність настання події A рівно k разів при n випробуваннях, то

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Дану формулу називають ***біномною формулою***. Ця назва формули пов'язана з тим, що її права частина є загальним членом розкладу так званого бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^n q^{n-k} .$$

Приклад. Симетричну монету підкидають вісім разів підряд. Яка імовірність того, що цифра випаде рівно п'ять разів?

Розв'язування: Тут $n = 8$, $k = 5$, $p = q = \frac{1}{2}$. Отже, за біномною формулою (21) маємо:

$P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^8} = \frac{8\cdot 7}{2^8} = \frac{7}{32}$. Відповідь: $\frac{7}{32}$.

Повернемось до розгляду n незалежних випробувань, про які йшлося на початку даного пункту. Нехай ξ – число тих з n випробувань, в кожному з яких настала подія A. Зрозуміло, що подія A може взагалі не настати, настати один раз, два рази і т. д. і, нарешті, настати n разів. Отже, множиною можливих значень випадкової величини ξ є множина $\{0, 1, 2, ..., n\}$. Бачимо, що випадкова величин ξ дискретна, її закон розподілу згідно з біномною формулою $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ має вигляд

$$p_n = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ..., n..$$

Обчислимо $M\xi$. Для кожного $i = 1, 2, ..., n$, ξ_i – число разів появи події A при i-му випробуванні є дискретною випадковою величиною, яка може набувати тільки двох значень: 0 з імовірністю q і 1 з імовірністю p. Тому $M\xi_i = 0\cdot q + 1\cdot p = p$, $i = 1, 2, ..., n$. Але, оскільки, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, то $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n = np$, тобто дістали

$$M\xi = np.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини дорівнює:

$$D\xi = npq.$$

звідки

$$\sigma\xi = \sqrt{npq}.$$

Розглянуту в цьому пункті величину ξ називають ***випадковою величиною що розподілена за біномним законом***.

Приклад. Нехай для якогось хижака імовірність вдалого полювання дорівнює 0,4 при кожному зіткненні з жертвою. Знайти математичне сподівання числа ξ спійманих жертв при 20 зіткненнях.

Розв'язування: Випадкова величина ξ розподілена за біномним законом при $n = 20$ і $p = 0$.

6. 2. Нормальний розподіл

Нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами a і σ називають неперервну випадкову величину ξ, яка має щільність розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – довільне число і σ – довільне додатне число. Про цю випадкову величину ξ часто кажуть, що вона має *нормальний розподіл* (або *розподілена за нормальним законом*) з параметрами α і σ.

Можна обчислити математичне сподівання цієї випадкової величини. Отримаємо:

$$M\xi = a\,,$$

Рівність $M\xi = a$ показує, що параметр a у формулі щільності розподілу нормально розподіленої випадкової величини є математичним сподіванням цієї випадкової величини.

Можна обчислити дисперсію нормально розподіленої випадкової величини ξ. Дістанемо:

$$D\xi = \sigma^2\,.$$

Рівність $D\xi = \sigma^2$ показує, що параметр σ у формулі щільності розподілу нормально розподіленої випадкової величини є середнім квадратичним відхиленням цієї випадкової величини.

Оскільки, як встановлено вище, параметр a є математичним сподіванням, то можна сказати, що нормальний закон розподілу повністю визначається своїми математичним сподіванням і дисперсією. Цей висновок широко використовується в теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Розглянутий у даному пункті нормальний розподіл відіграє в теорії ймовірностей і математичній статистиці важливу роль. Це пояснюється, зокрема, тим, що при досить широких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального розподілу.

Приклад. Відомі математичне сподівання a та середньоквадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини. Знайти: 1) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (α, β); 2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від математичного сподівання буде менша за δ.

a	σ	α	β	δ
6	3	6	12	4

Розв'язування: $M\xi = a = 6$, $\sigma = 3$ $D\xi = \sigma^2 = 3^2 = 9$, $\alpha = 6$, $\beta = 12$, $\delta = 4$.

$$1)\ P\{\alpha \le \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$P\{6 \le \xi < 12\} = \Phi\left(\frac{12-6}{3}\right) - \Phi\left(\frac{6-6}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(0) = \Phi(2) =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^2 e^{-t^2/2}dt = \Big|$ згідно таблиці $\Big| = 0{,}4772$ – ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (6, 12);

2) $P\{|\xi - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, $P\{|\xi - 6| < 4\} = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 2\Phi(1,(3)) \approx$

$\approx 2\Phi(1{,}33) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{1{,}33} e^{-t^2/2}dt = 2 \cdot 0{,}4082 = 0{,}8164$ – ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від математичного сподівання буде менша за 4.

Приклад 6.22. Відомі математичне сподівання a та середньоквадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини. Знайти: 1) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (α, β); 2) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від математичного сподівання буде менша за δ.

a	σ	α	β	δ
11	4	13	23	6
6	3	6	12	4

Розв'язування: $M\xi = a = 11$, $\sigma = 4$ $D\xi = \sigma^2 = 4^2 = 16$, $\alpha = 13$, $\beta = 23$, $\delta = 6$.

1) $P\{\alpha \le \xi < \beta\} = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$,

$$P\{13 \le \xi < 23\} = \Phi\left(\frac{23-11}{4}\right) - \Phi\left(\frac{13-11}{4}\right) = \Phi(3) - \Phi(1/2) =$$

(згідно таблиці) $= 0{,}498650 - 0{,}1915 = 0{,}30715$ – ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (13, 23);

2) $P\{|\xi - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$, $\quad P\{|\xi - 11| < 6\} = 2\Phi\left(\dfrac{6}{4}\right) =$

$= 2\Phi\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664$ – ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від математичного сподівання буде менша за 4.

7. Елементи математичної статистики

Розглянемо основні поняття вибіркового методу.

Генеральна сукупність і вибірка. Задача математичної статистики – дійти певних висновків з експериментальних даних. При цьому маємо на увазі, що до експериментів застосовані теоретико-ймовірнісні концепції. Точніше задачі математичної статистики можна сформулювати з різним ступенем загальності та з різноманітних точок зору. Обмежимося найважливішими та порівняно нескладними задачами. Розглянемо поняття генеральної сукупності та вибірки. Нехай ξ – випадкова величина, функція розподілу якої $F(x)$ нам невідома. Досліджуючи цю величину, здійснюємо n разів той самий експеримент, внаслідок чого дістаємо n значень величини ξ: $x_1, x_2, ..., x_n$ (серед цих значень можуть бути і рівні). Термінологія при цьому запозичена з розгляду деяких конкретних задач. А саме, нехай задано скінченну множину M, що складається з однотипних елементів (наприклад, множина горобців деякої місцевості). Експеримент полягає в тому, що ми вибираємо наугад один з елементів множини M, реєструємо деяку його характеристику ξ (наприклад, масу) і повертаємо цей елемент до множини. Множину M називають *генеральною сукупністю*, а групу елементів, які спостерігалися при n повтореннях експерименту,– *випадковою вибіркою.*

Інтерес становлять здебільшого не самі елементи множини M, а згадана характеристика ξ та закон її розподілу. Тому у разі довільної випадкової величини ξ множину її можливих значень також називають генеральною сукупністю, знайдені в результаті n

експериментів числа $x_1, x_2, ..., x_n$ – вибіркою за характеристикою ξ з цієї сукупності; число n при цьому називають об'ємом вибірки.

Оскільки умови експерименту вважаємо незмінними, а результати експериментів – незалежними один від одного, то результати експериментів $x_1, x_2, ..., x_n$ є попарно незалежними випадковими величинами, що мають ту саму функцію розподілу $F(x)$.

Попарну незалежність n випадкових величин $x_1, x_2, ..., x_n$ (серед цих величин можуть бути і неперервні) розуміємо так само, як і у випадку, коли всі x_i, $i = 1, 2, ..., n$, дискретні. *Зауваження.* На практиці вибір з генеральної сукупності часто здійснюється так, що після кожного експерименту досліджений елемент не повертається до генеральної сукупності перед наступним вибором (так здійснюють вибірковий контроль якості продукції за умови знищення досліджуваних елементів). При цьому, очевидно, не можна вважати, що всі експерименти проводяться в однакових умовах і що їхні результати взаємно незалежні, оскільки після кожного експерименту склад генеральної сукупності змінюється. Такий вибір називають вибором без повернення на відміну від простого випадкового вибору, або вибору з поверненням. Але коли генеральна сукупність є нескінченною множиною або скінченною, достатньо великою за кількістю елементів множиною, а вибірка за своїм об'ємом складає лише незначну частину цієї кількості, відміною між цими двома видами вибору можна нехтувати.

Функція розподілу вибірки. Вибіркове середнє і вибіркова дисперсія. Нехай здійснено вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ за характеристикою ξ з генеральної сукупності (знайдено значення $x_1, x_2, ..., x_n$ характеристики ξ внаслідок проведення експериментів) з невідомою функцією розподілу $F(x)$ (теоретичною функцією розподілу). Математичне сподівання і дисперсію для цього теоретичного розподілу надалі позначатимемо відповідно $a = M\xi$ і $\sigma^2 = D\xi$. Визначимо з певною мірою надійності функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання a і дисперсію σ^2. Для того щоб розв'язати цю задачу (а також деякі інші задачі), вводять поняття функції розподілу вибірки, вибіркового середнього і вибіркової дисперсії, до розгляду яких ми і переходимо. Нехай задано вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ за характеристикою ξ з генеральної сукупності і x – довільне число і нехай $F_n(x) = \dfrac{\nu}{n}$, де ν – число тих x_i, i = 1, 2, ..., n, для яких $x_i < x$. Функцію $F_n(x) = \dfrac{\nu}{n}$, $x \in R$,

називають ***функцією розподілу вибірки***.

Приклад 6.23. Знайти функцію розподілу вибірки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$.

Розв'язування: Найменше, x_i , i = 1, 2, 3, 4, 5, дорівнює 1, отже, $F_5(x) = 0$, якщо $-\infty < x \le 1$. Число тих x_i , i = 1, 2, 3, 4, 5, для яких $x_i < 2$, а саме $x_1 = 1$ і $x_3 = 1$, дорівнює 2, отже, $F_5(x) = \dfrac{2}{5}$, якщо $1 < x \le 2$. Число тих x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, для яких $x_i < 3$, а саме $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $x_3 = 1$, дорівнює 3, отже, $F_5(x) = \dfrac{3}{5}$, якщо $2 < x \le 3$. Оскільки

$x_4 = x_5 = 3$ – найбільше значення x_i, і = 1, 2, 3, 4, 5, то $F_5(x) = 1$ якщо $3 < x < +\infty$. Шукана функція розподілу вибірки

$$F_5(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{5}, 1 < x \leq 2; \\ \frac{3}{5}, 2 < x \leq 3; \\ 1, 3 < x \leq +\infty. \end{cases}$$

Можна показати, що функція розподілу вибірки має властивості, аналогічні властивостям теоретичної функції розподілу.

Нехай знову задано вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ за характеристикою ξ з генеральної сукупності. ***Вибірковим середнім*** називають число

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

а ***вибірковою дисперсією*** – число

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 .$$

Приклад 6.24. Знайти вибіркове середнє і вибіркову дисперсію для вибірки попереднього прикладу.

Розв'язування: За формулами (2) і (3) маємо $\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+1+3+3) = 2$, $s^2 = \frac{1}{5}(1+4+1+9+9) - 2^2 = \frac{24}{5} - 4 = 0{,}8.$

Майже в кожному з більш широких курсів математичної статистики, ніж даний, описано способи обчислення вибіркових середніх і вибіркових дисперсій для випадків, коли безпосереднє застосування формул (2) і (3) приводить до громіздких обчислень.

Зауважимо, що оскільки вибіркове середнє і вибіркова дисперсія є функціями від випадкових величин $x_1, x_2, ..., x_n$, то й вони самі є випадковими величинами.

Приклад 6.25. Задана генеральна сукупність, яка характеризує річний прибуток фермерів (в тис. грн..).

7,10,9,10,11,12,13,14,13,15,14,15,14,16,12,14,16,14,16,15,5,7,8,5,7,9 ,10,9,8,4,7, 8,10,9,4,8,11,9,11,8,10,11,12,9,12,7,6,8,5,3,6,9,10,6,5,11,9, 7,6,7,10,9,8,11,6,5,10,8,7,6,9,8,10,7,10,12,7,8,10,12,11,9,10,8,11,12, 14, 10, 8,14,7,10,8,12,13,10,9,13,12,14,10,12,14,15,13,14,12,12,13, 15, 14, 12,9,16,10,12,15,16,10,14,17,18,17,14,12,15,16,18,14,15,12,15, 14, 16,12,16,21,18,12,15,18,20,16,15,12,9,12,21,20,16,12,9, 8,2, 12,8,18, 16,18,14,11,16,18,21,19,11,14,19,16,21,16,18,14,6,11,9,16,18,15,12, 16,22,18,24,16,20,24,18,20,22,16,16,15,10,15,17,14,13,9,7,12,17,12,14, 7,13,15, 19,13,12,9,14,15,19,12,17,13,9.

Зробити вибірку з 20-и елементів підряд та виконати такі вправи:

1) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;

2) обчислити числові характеристики вибірки (об’єм, математичне сподівання, дисперсію);

3) побудувати полігон частот та відносних частот та гістограму;

4) знайти моду, медіану та розмах.

Вибірку здійснювати шляхом вибору 20 елементів підряд, починаючи з деякого k, яке рівне номеру по списку.

Розв’язування: Нехай $k = 29$. Здійснимо вибірку 20 елементів підряд, починаючи з 29-ого: $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 8$, $x_5 = 10$, $x_6 = 9$, $x_7 = 4$, $x_8 = 8$, $x_9 = 11$, $x_{10} = 9$, $x_{11} = 11$, $x_{12} = 8$, $x_{13} = 10$, $x_{14} = 11$,

$x_{15} = 12$, $x_{16} = 9$, $x_{17} = 12$, $x_{18} = 7$, $x_{19} = 6$, $x_{20} = 8$. Найменше x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, дорівнює 4, отже $F_{20}(x) = 0$, якщо $-\infty < x \le 4$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких x_i менше за найменше x_i з усіх крім $x_i = 4$, тобто для яких $x_i < 6$, а саме $x_2 = 4$ і $x_7 = 4$, дорівнює 2. Отже $F_{20}(x) = \frac{2}{20} = 0{,}1$, якщо $4 < x \le 6$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких x_i менше за найменше x_i з усіх крім $x_i = 4$ і $x_i = 6$, тобто для яких $x_i < 7$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$ і $x_{19} = 6$, дорівнює 3. Отже $F_{20}(x) = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0{,}15$, якщо $4 < x \le 6$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких x_i менше за найменше x_i з усіх крім $x_i = 4$ і $x_i = 6$, тобто для яких $x_i < 7$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$ і $x_{19} = 6$, дорівнює 3. Отже $F_{20}(x) = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0{,}15$, якщо $6 < x \le 7$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких $x_i < 8$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$, $x_{19} = 6$, $x_3 = 7$ і $x_{18} = 7$ дорівнює 5. Отже $F_{20}(x) = \frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 0{,}25$, якщо $7 < x \le 8$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких $x_i < 9$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$, $x_{19} = 6$, $x_3 = 7$, $x_{18} = 7$, $x_1 = 8$, $x_4 = 8$, $x_8 = 8$, $x_{12} = 8$ і $x_{20} = 8$ дорівнює 10. Отже $F_{20}(x) = \frac{10}{20} = 0{,}5$, якщо $8 < x \le 9$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких $x_i < 10$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$, $x_{19} = 6$, $x_3 = 7$, $x_{18} = 7$, $x_1 = 8$, $x_4 = 8$, $x_8 = 8$, $x_{12} = 8$, $x_{20} = 8$, $x_6 = 9$, $x_{10} = 9$ і $x_{16} = 9$ дорівнює 13. Отже $F_{20}(x) = \frac{13}{20} = \frac{65}{100} = 0{,}65$, якщо $9 < x \le 10$. Число тих x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 20$, для яких $x_i < 11$, а саме $x_2 = 4$, $x_7 = 4$, $x_{19} = 6$, $x_3 = 7$,

$x_{18}=7$, $x_1=8$, $x_4=8$, $x_8=8$, $x_{12}=8$, $x_{20}=8$, $x_6=9$, $x_{10}=9$, $x_{16}=9$, $x_5=10$ і $x_{13}=9$ дорівнює 15. Отже $F_{20}(x)=\frac{15}{20}=\frac{75}{100}=0{,}75$, якщо $10<x\le 11$.

Число тих x_i, $i=1,2,3,...,20$, для яких $x_i<12$, а саме $x_2=4$, $x_7=4$, $x_{19}=6$, $x_3=7$, $x_{18}=7$, $x_1=8$, $x_4=8$, $x_8=8$, $x_{12}=8$, $x_{20}=8$, $x_6=9$, $x_{10}=9$, $x_{16}=9$, $x_5=10$, $x_{13}=10$, $x_9=11$, $x_{11}=11$ і $x_{14}=11$ дорівнює 18. Отже $F_{20}(x)=\frac{18}{20}=0{,}9$, якщо $11<x\le 12$. Оскільки $x_{15}=12$ і $x_{17}=12$ – найбільше значення x_i, $i=1,2,3,...,20$, то $F_{20}(x)=1$, якщо $12<x\le+\infty$. Отже, шукана функція розподілу вибірки

$$F_{20}(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } -\infty<x\le 4;\\ 0{,}1, \text{ якщо } 4<x\le 6;\\ 0{,}15, \text{ якщо } 6<x\le 7;\\ 0{,}25, \text{ якщо } 7<x\le 8;\\ 0{,}5, \text{ якщо } 8<x\le 9;\\ 0{,}65, \text{ якщо } 9<x\le 10;\\ 0{,}75, \text{ якщо } 10<x\le 11;\\ 0{,}9 \text{ якщо } 11<x\le 12;\\ 1, \text{ якщо } 12<x<+\infty.\end{cases}$$

Об’єм дорівнює 20. Обчислимо вибіркове середнє, бо воно і є математичним сподіванням: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

$$\bar{x}=\frac{1}{20}(8+4+7+8+10+9+4+8+11+9+11+8+10+11+$$

$$+12+9+12+7+6+8) = 172/20 = 8{,}6 \text{ – математичне сподівання.}$$

Обчислимо вибіркову дисперсію: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2} - (\overline{x})^2$. $s^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^{\,2} - (8{,}6)^2 =$

$$= \frac{1}{20}\cdot(64+16+49+64+100+81+16+64+121+$$

$$+81+121+64+100+121+144+81+144+49+36+64) - 73{,}96 =$$

$= 1580/20 - 73{,}96 = 79 - 73{,}96 = 5{,}04$ – вибіркова дисперсія.

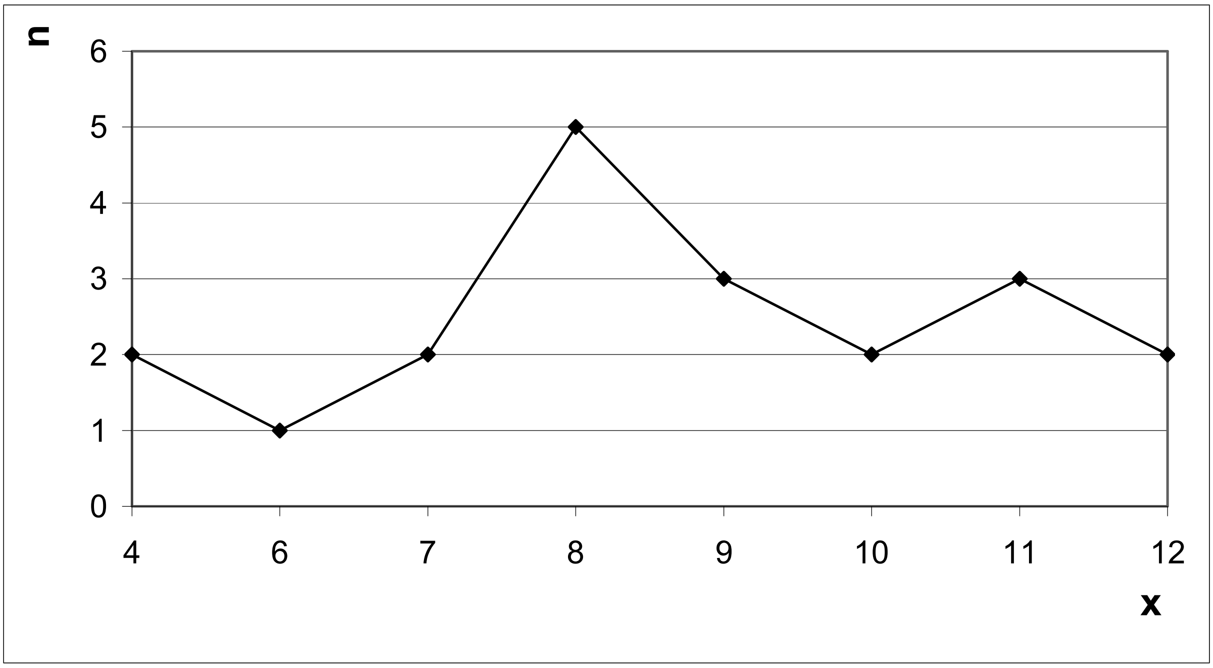
Впорядкуємо елементи вибірки за величиною і дістанемо варіаційний ряд:

4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12.

Статистичний ряд запишемо у вигляді таблиці:

x_i	4	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	1	2	5	3	2	3	2

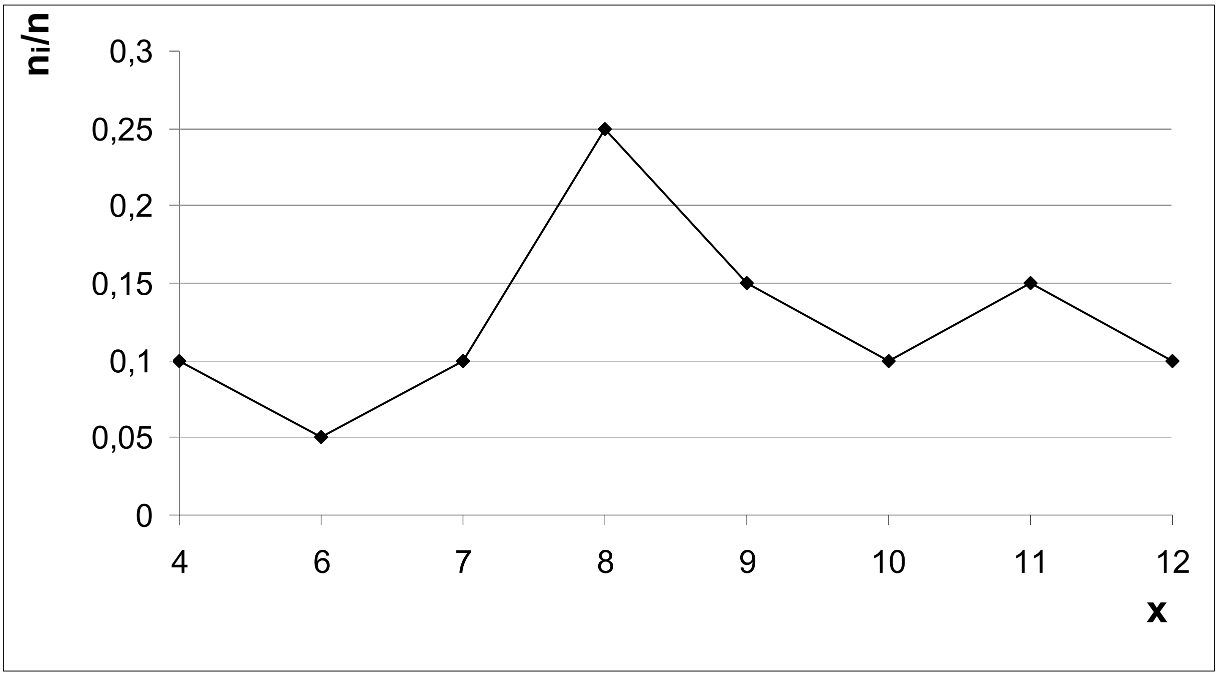
Для контролю, знаходимо: $\sum n_i = 20$. Побудуємо полігон частот:



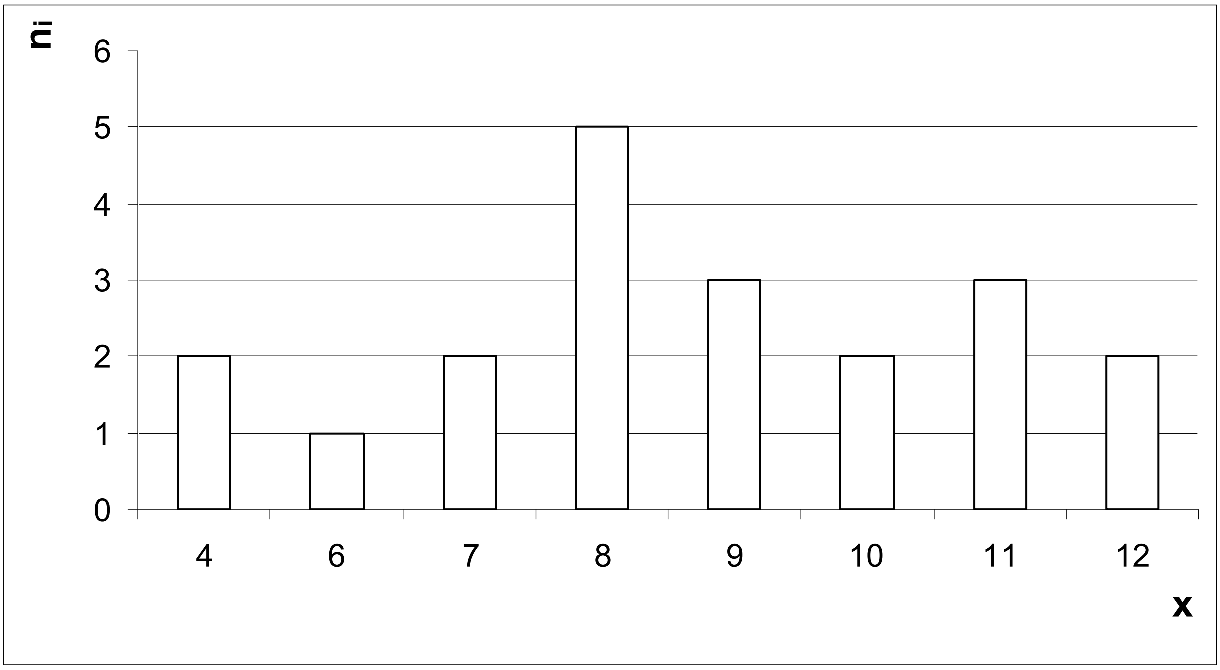
Знайдемо відносні частоти (n=20):

x_i	4	6	7	8	9	10	11	12
n_i	2	1	2	5	3	2	3	2
n_i/n	0,1	0,05	0,1	0,25	0,15	0,1	0,15	0,1

Побудуємо полігон відносних частот:



Побудуємо гістограму частот:



Знайдемо медіану та моду статистичного розподілу. Розглянемо варіаційний ряд: 4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12.

Обсяг сукупності n=20, тобто парний, то $2k = 20$. Звідси $k = 10$. Отже медіаною варіаційного ряду буде $Me = \frac{x_{10} + x_{11}}{2}$. Тут $x_{10} = 8$, $x_{11} = 9$.

Отже $Me = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$. Найбільша частота нашого розподілу дорівнює 5 і вона відповідає варіанті 8. Тому мода $Mo = 8$.

Розмах вибірки $\omega = 12 - 4 = 8$.

Навчальне видання

ДОВГИЙ Олег Ярославович

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності "Географія"

Підп. до друку 10.09. 2010 р.. Формат 60x84/$_{16}$. Папір офсетний.
Гарнітура "Times New Roman". Ум. друк. арк. 7,8.
Тираж 200 пр. Зам. №. 131.

ISBN 978-966-640-134-9

Видавець
Видавництво Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ, вул. С. Бандери, 1
Тел. 71-56-22. E-mail: vdvcit@pu.if.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2718 від 12.12.2006.