ББК 85. 125. 1
Д – 28

Курс математики: Навч.-метод. посібник для студентів спеціальності ”Початкове навчання” / Довгий О.Я., Межиловська Л.Й., Ткачук О.М., Файчак З.Є. – Івано-Франківськ: Плай, 2005. – 107 с.

ISBN

Затверджено Вченою Радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Колектив викладачів секції математики кафедри теорії і методики початкового навчання, ураховуючи досвід навчально-методичної роботи зі студентами педагогічних спеціальностей, пропонує посібник, який відповідає тому обсягу знань з математики, яким студенти мають володіти, щоб мати фундамент для подальшого успішного навчання в інституті. Посібник включає короткий зміст текстів лекцій та практичні завдання, а також перелік того, що студент повинен вміти і знати. Викладений в посібнику матеріал є чітко структурований: розбитий на окремі логічно завершені модулі, що дає змогу використати його при кредитно-модульній системі навчання.

Рекомендується для студентів факультетів підготовки вчителів молодших класів педагогічних інститутів.

З м і с т

стр.

Множини, їх види і способи задання, відношення між множинами

1. Поняття про множину. Елементи множини. Способи задання множин. Скінченні і нескінченні множини. Порожня множина. Числові множини.
2. Підмножина. Число підмножин. Власні і невласні підмножини. Відношення між множинами: рівність множин, нестроге і строге включення.
3. Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна.

1. ***Поняття множини*** є одним з фундаментальних неозначуваних понять математики. Воно береться безпосередньо з досвіду і не зводиться до простіших понять.

Під множиною розуміють сукупність тих чи інших об'єктів, об'єднаних за деякими характерними ознаками (клас, загін, бригада, зграя, рій, колекція, набір тощо).

Об'єкти будь-якої природи, які входять до множини, називають її елементами. Елементами множини можуть бути і самі множини. Множини позначають великими, а їхні елементи – малими буквами латинського алфавіту. Наприклад, запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A; запис $a \notin A$, або $a \overline{\in} A$, означає, що a не належить A.

Множину можна задати такими способами:

1. *Переліком елементів.* Наприклад, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Причому порядок елементів у запису множини значення не має. Вважається, що всі елементи множини різні.

2. *За допомогою характеристичних властивостей, які* мають всі елементи даної множини. Наприклад, цю ж множину A можна записати так: $A = \{x \mid x$ – парні числа першого десятка$\}$, або $A = \{x | x \in \mathrm{N},\ x \le 10,\ x \vdots 2\}$.

Є одноелементні, двоелементні множини, множини, що містять багато елементів, безліч їх.

Множина, що складається із обмеженого числа елементів, називається ***скінченною***. Наприклад, множина одноцифрових чисел, множина вершин квадрата. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається ***нескінченною*** (числові множини R, Z…).

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою*** і позначається символом Ø. Наприклад, множина $B = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x < 0\} = \varnothing$, множина розв’язків рівняння $x^2 + 1 = 0$, множина Карлсонів Івано-Франківська. Множини, елементами яких є числа, називають ***числовими***. Окремі найважливіші числові множини мають загальноприйняті позначення і назви. Деякі, наприклад:

N — множина натуральних чисел;

N_0 — множина цілих невід'ємних чисел;

Z — множина цілих чисел;

Q — множина раціональних чисел;

R — множина дійсних чисел

[*a; b*] — числовий відрізок $\{x \mid a \le x \le b\}$.

2. З елементів будь-якої непорожньої множини можна утворити нові множини, які є частинами початкової множини або, як говорять, її ***підмножинами***. Так, розглядаючи множину учнів школи, можна виділяти такі її частини: множина окремих класів, множина відмінників, множина учасників художньої самодіяльності тощо. Дамо тепер строге означення підмножини.

Множина *B* називається ***підмножиною*** множини *A*, якщо кожний елемент множини *B* є елементом множини *A*.

Нехай множина $M = \{a, b, c\}$. Запишемо всі підмножини цієї множини: Ø, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Можна довести, що число всіх підмножин множини, яка містить *n* елементів, дорівнює 2^n. Множину всіх підмножин *M* позначають через *P*(*M*) і називають ***булеаном*** множини *M* (на честь англійського математика Д. Буля). Таким чином, якщо $M = \{a, b, c\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$.

Якщо множина A є підмножиною множини B, то говорять, що множина A включається в множину B, або позначають на письмі $A \subset B$ (A включається в B, B містить A).

Підмножина B множини A називається ***власною підмножиною*** або ***правильною частиною*** *множини* A, якщо B є непорожня множина і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B.

Так, власними підмножинами множини M є всі її підмножини, крім Ø і самої множини M, які називають ***невласними підмножинами***.

Слід чітко розрізняти смисл знаків $\in$ (належить) і $\subset$ (включається). Так, для множини $M = \{a, b, c\}$ маємо $\{a\} \subset M$, але $\{a\} \notin M$, бо множина M не містить елемента $\{a\}$ (множина M не містить одноелементну множину $\{a\}$, але містить елемент a, тобто $a \in M$).

Розглянемо ще одне з важливих понять.

Дві множини A і B називаються ***рівними***, тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки, тобто якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Рівність множин A і B записують так: $A = B$. Тоді означення рівності двох множин можна записати так:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ і } B \subset A,$$

де символ $\Leftrightarrow$ означає “тоді і тільки тоді”.

Якщо множини A і B не рівні, то пишуть $A \neq B$.

Приклади:

1. Якщо $A = \{x, y, z\}$, $B = \{y, x, z\}$, то $A = B$.
2. Якщо $A = \{12, 15, 18\}$, $B = \{x \mid x \in N, 10 \le x \le 20, x \vdots 3\}$, то $A = B$.
3. Якщо $A = \{x, y, z, n\}$, $B = \{y, z, n\}$, то $A \neq B$, бо $x \in A$, але $x \notin B$.

Для чіткого символьного позначення власної і невласної підмножини, існують два різновиди знака $\subset$. Так $\subseteq$ – знак нестрогого включення, який в записі $B \subseteq A$ означає, що B міститься в A (B – підмножина A). $\subset$ – знак строгого включення, який означає, що $B \subseteq A$ і B не збігається з A (B – власна підмножина A).

Відношення нестрогого включення має такі властивості:

1° $A \subseteq A$ (*рефлексивність*);

2° якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ (*антисиметричність*);

3° якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (*транзитивність*).

Відношення рівності має такі властивості:

1° $A = A$ (*рефлексивність*);

2° якщо $A = B$, то $B = A$ *(симетричність)*;

3° якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$ (*транзитивність*).

Будь-які дві множини перебувають між собою в одному з таких відношень:

1. *Виключення* – обидві множини не порожні і не містять спільних елементів. Наприклад: $A = \{5, 18, n\}$ і $M = \{a, b, c, 7, 19\}$.

2. *Перерізу* – обидві множини не порожні, містять хоча б один спільний елемент, а також кожна з них містить хоча б один такий елемент, якого немає в іншій з двох розглядуваних. Наприклад: $B = \{5, 1, n\}$ і $M = \{a, b, c, 1, 19, 5\}$.

3. *Включення* – коли одна з них є власною підмножиною іншої. Наприклад: $N = \{a, b, c, 7, 19\}$і $C = \{7, 19, a\}$.

4. *Рівності* – коли в кожній з них немає такого елемента, якого немає в іншій.

3. Природною є домовленість про те, що розглядувані в кожному конкретному випадку множини є підмножинами деякої більш об'ємної множини, тобто так званої ***універсальної множини***. Універсальну множину позначають U. Це поняття має відносний характер і є стабільним тільки для певної ситуації в певний час. Одна й та сама множина M в одних випадках може бути підмножиною однієї універсальної множини, а в других – іншої, або ж універсальною множиною.

Приклади:

1) Для множини M парних додатних чисел універсальною множиною може бути: множина N, множини – Z, Q і т. д.
2) Множина простих чисел, множина парних невід'ємних чисел, множина невід'ємних чисел, кратних 5, множини членів арифметичної прогресії з першим членом 3 і різницею 12 є

підмножинами множини цілих невід'ємних чисел N_o, яка в даному випадку є універсальною для названих множин.

3) Множина трикутників є підмножиною множини многокутників, яка розглядається як універсальна, і в той же час вона сама є універсальною по відношенню до різних видів трикутників.

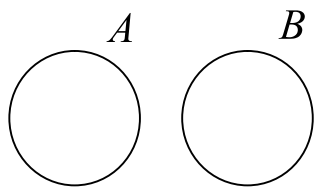
Тобто універсальна множина є постачальником елементів для тієї сукупності множин, які в даний час розглядаються.

Для унаочнення деяких міркувань про множини користуються геометричними схемами, які називаються ***діаграмами Ейлера-Венна***.

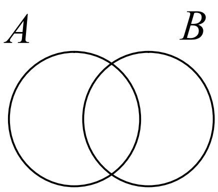
Множину на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо кругом. Універсальну множину U на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо прямокутником. Підмножини універсальної множини U зображуватимемо кругами, розміщеними всередині прямокутника.

Розглянемо всі випадки відношень між двома множинами A і B і зобразимо ці множини з допомогою кругів Ейлера-Венна:

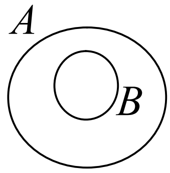
1. *Виключення*:



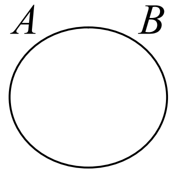
2. *Перерізу*:



3. *Включення*:



4. *Рівності*:



Якщо, наприклад, існують множини A і B, які не мають спільних елементів, а множина C має спільні елементи як і з множиною A так і з множиною B, то з допомогою кругів Ейлера-Венна ці множини можна зобразити як на рис.1.

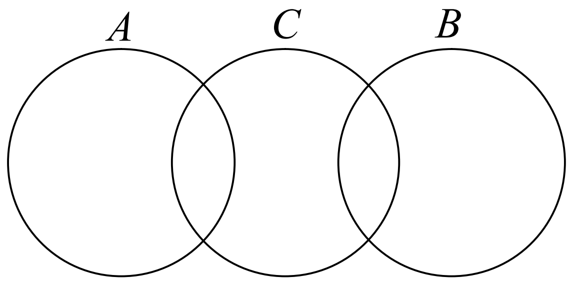


Рис.1

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: поняття множини, позначення множини, способи задавання і запису різних видів множин, означення і властивості відношення перерізу, відношення включення і відношення рівності множин, поняття підмножини, поняття власної і невласної підмножини, формулу кількості підмножин будь-якої скінченної множини, поняття універсальної множини;

у м і т и: записувати множини переліком елементів і за допомогою характеристичної властивості; позначати числові множини, показувати їх на числовій прямій і у вигляді відрізків; Зображати на кругах Ейлера-Венна множини, відношення перерізу, відношення включення і відношення рівності між множинами; використовувати при обчисленнях формулу числа підмножин скінченої n – елементної множини.

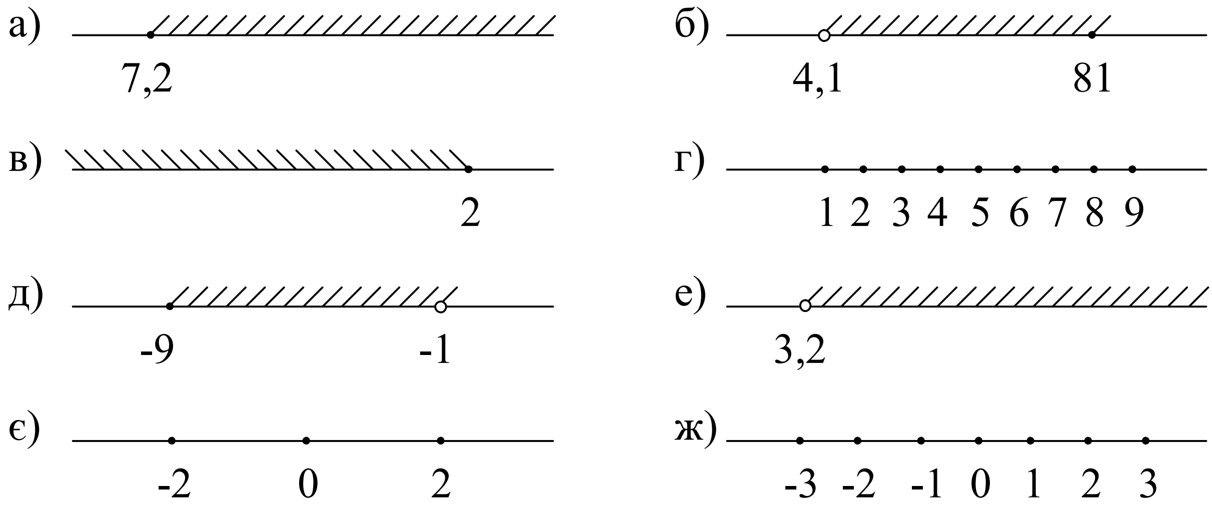
Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Наведіть приклади множин, що складаються з об'єктів наступних видів: а) тварин; б) рослин; в) абстрактних понять; г) цілих чисел; д) геометричних фігур; е) геометричних величин.

2. A – множина многокутників. Чи належить цій множині: а) восьмикутник; б) паралелограм; в) відрізок; г) паралелепіпед; д) круг; е) півкруг?

3. Позначимо через P множину простих чисел, через L – множину парних цілих чисел. Вкажіть, котрим з цих множин належать числа 7, 11, 12, 18, 115, 271, 321, 612, 318, 233. Запишіть відповідь за допомогою символу $\in$.

4. Вказати характеристичну властивість кожної числової множини, зображеної на графіку:



5. Перечисліть елементи наступних множин: A – множина непарних чисел на відрізку [1;15]; B – множина натуральних чисел, менших за 8; C – множина натуральних чисел, більших за 10, але менших за 12; D – множина двоцифрових чисел, що діляться на 10; E – множина натуральних дільників числа 18; F - множина чисел, що по абсолютній величині (модулю) дорівнюють $\frac{2}{3}$.

6. Зобразіть на числовій прямій наступні множини:

a) $\{x \mid x\in R;\ -2\le x\le 0\}$;
b) $\{x \mid x\in Z;\ -3\le x\le 3\}$;
c) $\{x \mid x\in R;\ 3{,}2\le x\le 8\}$;
d) $\{x \mid x\in R;\ x>4{,}6\}$;
e) $\{x \mid x\in N;\ x\le 5\}$.

7. Позначте довільну точку O і побудуйте множину точок P, таких, що: а) $|OP| = 3$ *см*. б) $|OP| \le 3$ *см*. в) $|OP| \ge 3$ *см*.

8. Що ви можете сказати про наступні множини: множина паралелограмів з не рівними протилежними сторонами; множина

квадратів без центра симетрії; множина натуральних чисел, менших за 1; множина цілих двозначних чисел, менших за 9.

9. Виясніть, в якому відношенні знаходиться кожна пара множин і зобразіть ці відношення при допомозі кругів Ейлера-Венна:

а) $A = \{m, n, p\}$ і $B = \{k, m, n\}$;
б) $A = \{m, n, p\}$ і $B = \{n, m, p\}$;
в) $A = \{m, n, p\}$ і $B = \{p, m, n\}$;
г) $A = \{m, n, p\}$ і $B = \{k, l\}$.

10. M – множина цифр в запису числа 323233. K – множина цифр в запису числа 3222329. Виясніть, які із наступних висловлень правильні (істинні, вірні):

а) множина M є підмножиною множини K;
б) множина K є підмножиною множини M;
в) множини K і M рівні;
г) множини K і M перетинаються.

11. Розв'яжіть наступні рівняння:

$(2x - 6)(9 - x) = 0$; $x^2(3 - x)(4x - 36) = 0$; $2x^2 - 24x + 54 = 0$.

В якому відношенні перебувають множини їх розв'язків?

12. З множини цілих невід'ємних чисел виділили підмножини:

X – множина одноцифрових чисел; Y – множина складених чисел; P – множина непарних чисел.

Накресліть діаграму Ейлера-Венна, що зображає ці множини.

13. Скільки підмножин має множина $A = \{a, b, c, d\}$. Запишіть всі власні підмножини множини A. Скільки серед них трьохелементних множин?

14. Побудувати діаграму Ейлера-Венна для множин $A, B, C,$ якщо відомо, що $A \subset B$, $B \subset C$. В якому відношенні знаходяться множини A і C?

15*. Дано множини:

$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, 4\}$; $C = \{4, 2, c\}$; $D = \{a, b, 3\}$; $E = \{1, b\}$.

Знайти: $a, в, c, d,$ знаючи, що $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset B$.

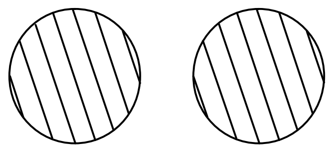
Операції над множинами

1. Об'єднання множин.
2. Переріз множин.
3. Різниця множин. Доповнення.
4. Властивості операцій над множинами.

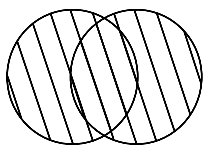
1. ***Об'єднанням*** (додаванням) множин A і B називається множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначається $A \cup B$. За означенням: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B$, або $x \in A$ і $x \in B\}$.

Розглянемо всі випадки відношень в яких можуть перебувати ті чи інші дві множини і зобразимо штриховою на кругах Ейлера-Венна об’єднання цих множин:

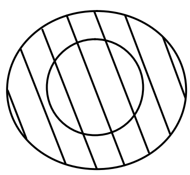
1. *Виключення*:



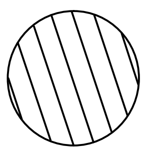
2. *Перерізу*:



3. *Включення*:



4. *Рівності*:

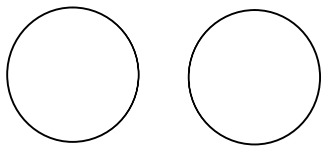


Під об’єднанням скінченої кількості множин (більше двох) розумітимемо результат послідовного об’єднання: другої множини з першою, третьої з об’єднанням перших двох і т.д.

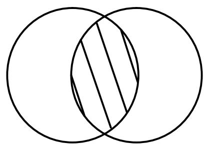
2. ***Перерізом*** множин A і B називається множина, що містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин одночасно. Позначається: $A \cap B$. Отже, за означенням $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

Розглянемо всі випадки відношень в яких можуть перебувати ті чи інші дві множини і зобразимо штриховою на кругах Ейлера-Венна переріз цих множин:

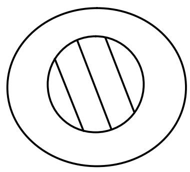
1. *Виключення*: $A \cap B = \varnothing$



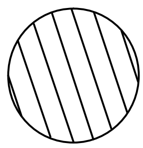
2. *Перерізу*:



3. *Включення*:



4. *Рівності*:



Поняття «переріз множин» можна поширити на будь-яку кількість множин. Під перерізом скінченої кількості множин (більше двох) розумітимемо результат послідовного перерізу: другої множини з першою, третьої з перерізом перших двох і т.д.

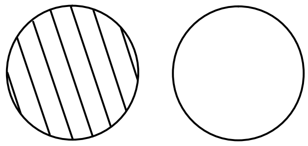
3. ***Різницею*** множин A і B називається множина, яка складається з елементів множини A, які не належать B.

Позначається $A \setminus B$. За означенням $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$. Операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням множин. Різниця універсальної множини **U** і її будь-якої підмножини A називається ***доповненням*** підмножини A до універсальної множини і позначається $U \setminus A$ або $\overline{A}$.

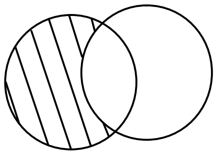
Якщо $B \subset A$, то різницю множин A і B називають доповненням підмножини B до множини A і позначають $\overline{B_A}$, тобто $A \setminus B = \overline{B_A}$.

Розглянемо всі випадки відношень в яких можуть перебувати ті чи інші дві множини і зобразимо штриховою на кругах Ейлера-Венна різницю цих множин:

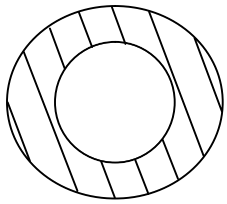
1. *Виключення*: $A \setminus B = A$



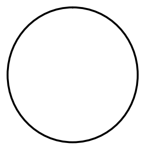
2. *Перерізу*:



3. *Включення*: $A \setminus B = \overline{B_A}$, $B \setminus A = \varnothing$



4. *Рівності*: $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \varnothing$



Якщо над множинами проводять операції об’єднання, перерізу і різниці і в виразі відсутні дужки, то спочатку виконують операції перерізу, а потім, по порядку слідування, об’єднання і різницю.

Якщо, наприклад, існують множини A і B, які не мають спільних елементів, а множина C має спільні елементи як і з множиною A так і з множиною B, то з допомогою кругів Ейлера-Венна множина $A \cup B \cap C$ це заштрихована область не як на рис. 2а (на цьому рисунку зображено множину $(A \cup B) \cap C$), а як на рис.2б.

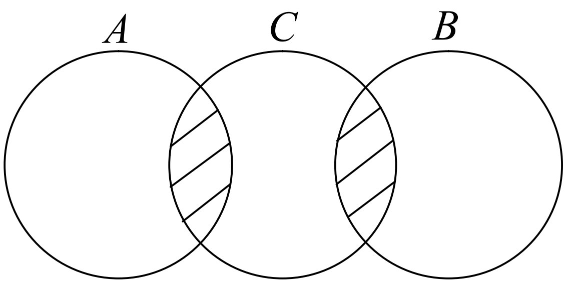


Рис.2а

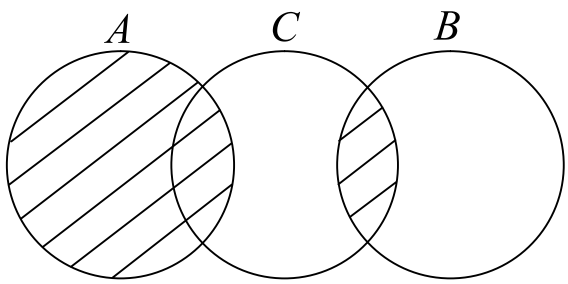


Рис.2б

4. Властивості операцій над множинами:

1°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення;

2°. $A \cup B = B \cup A$ – переставна (комутативна) властивість операції об'єднання;

3°. $A \cap B = B \cap A$ – переставна (комутативна) властивість операції перерізу;

4°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції об'єднання;

5°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції перерізу;

6°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції перерізу відносно об'єднання;

7°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції об'єднання відносно перерізу;

8°. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – I-ий закон де-Моргана;

9°. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – II-ий закон де-Моргана;

10°. $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$;

11°. $A \cup \varnothing = A$;

12°. $A \cup A = A$;

13°. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

14°. $A \cap A = A$.

Всі властивості і закони легко доводяться з допомогою кругів Ейлера-Венна.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення перерізу, об'єднання і різниці двох множин, поняття доповнення до підмножини; їх символічні позначення; властивості і закони операцій над множинами; порядок виконання операцій над множинами;

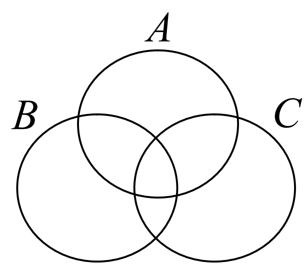
у м і т и: виконувати операції над множинами; зображати на кругах Ейлера-Венна закони об'єднання, перерізу множин і дистрибутивні закони, а також різницю множин і доповнення до підмножини і їх властивості; знаходити характеристичні властивості множин, що містять в собі різні множини і операції над ними.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Відомо, що A – множина всіх натуральних дільників числа 12, B – множина всіх натуральних дільників числа 32. Назвіть елементи множини $A \cap B$ і проілюструйте розв'язок на діаграмі Ейлера-Венна.

2. Перечисліть і запишіть натуральні числа, що належать перерізу $A \cap B$, якщо множині A належать дійсні числа, більші за (– 4,1) але менші 10, а множині B – дійсні числа, більші за 0, але менші 12,3.

3. В множині чотирикутників на площині виділено наступні підмножини: A – чотирикутники, діагоналі яких взаємно перпендикулярні, B – чотирикутники, довжини діагоналей яких рівні; C – чотирикутники діагоналі яких в точці перетину діляться пополам. Які фігури належать множинам: а) $A \cap C$; б) $B \cap C$; в) $A \cap B$; г) $A \cap B \cap C$?



4. Три множини A, B і C зображено на малюнку справа. Позначте штриховою області, що зображають наступні множини (для кожного випадку зробіть окреме креслення): а) $B \cap C$; б) $C \cap B$; в) $A \cap B$; г) $A \cap B \cap C$; д) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$. Як коротше записати множину у випадку д)?

5. $A = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x < 5\}$; $B = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x > 1\}$ Знайти об'єднання цих множин. Чи вірно, що: $4 \in A \cup B$; $-3 \in A \cup B$; $6 \in A \cup B$?

6. Дано множини: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Перечисліть елементи, що входять у множини: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \cup \mathrm{D}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} \cap \mathrm{D}$; $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$; $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{C} \cup \mathrm{D})$.

7. Позначте на числовій прямій елементи перерізу і об'єднання наступних множин:

а) $C = \{\, x \mid x \in R;\ -3{,}5 < x < 2\}$, $D = \{\, x \mid x \in R;\ -2 < x < 5\}$;

б) $C = \{\, x \mid x \in R,\ -7 \le x < 0\}$, $D = \{\, x \mid x \in R,\ 0 \le x \le 5\}$;

в) $C = \{\, x \mid x \in R;\ 4{,}5 > x \ge 3\}$, $D = \{\, x \mid x \in R,\ -3{,}7 < x \le 1{,}7\}$;

г) $C = \{\, x \mid x \in R; 12 \le x \le 20\}$, $D = \{\, x \mid x \in R;\ 11 \le x \le 21\}$.

8. Дано множини: $I = \{x \mid x \in R;\ 0 \le x \le \frac{19}{11}\}$; $L = \{x \mid x \in R;\ -2 \le x \le \frac{12}{7}\}$; $J = \{x \mid x \in R;\ -1 \le x \le 1\}$. Вкажіть характеристичну властивість елементів множини: а)$(I \cup L) \cap J$; б)$I \cup L \cap J$.

9. Виясніть на основі яких законів операцій над множинами виконано наступні перетворення:

а) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap (C \cap B)$;

б) $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C = C \cap A \cup C \cap B$.

10. Накресліть два трикутники так, щоб їх перерізом:

а) була точка; б) був трикутник; в) був відрізок; г) був чотирикутник.

11. Яка з двох множин є підмножиною другої:

а) A і $A \cap B$;

б) A і $A \cup B$.

12. Дано множини: $A = \{x \mid x \in \mathrm{R};\ -1 \le x \le 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathrm{R};\ 0 \le x \le 14\}$; $C = \{x \mid x \in \mathrm{R};\ -2 \le x \le 0\}$. Зобразіть на числовій прямій множини: $(A \cup C) \cap B$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$.

13. Дано множини E і F. Зобразіть ці множини за допомогою діаграми Ейлера-Венна і позначте штриховою множину $E \cap F$, якщо:

а) $E \subset F$; б) $F \subset E$; в) $E \cap F = \varnothing$; г) $E = F$.

14. Сформулюйте властивості елементів множини $P \cap Q \cap S$ і перечисліть її елементи, якщо:

$P = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x < 20\}$; $\mathrm{Q} = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x < 20;\ x$ – парне число$\}$; $S = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x < 20;\ x$ – кратне до $3\}$.

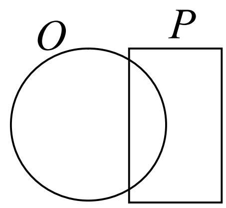
15. Розташуйте два кути так, щоб їх перерізом був трикутник; був промінь; була точка; був відрізок; був чотирикутник.

16. Сформулюйте характеристичну властивість елементів множини $K = M \cup P$, якщо M – множина парних натуральних чисел, а P – множина двозначних натуральних чисел. Вкажіть, які з наступних висловлень істинні, а які хибні: $12 \in K$, $8 \notin K$, $13 \in K$, $0 \notin K$, $-24 \in K$, $139 \notin K$.

17. P – множина всіх прямокутників; Q – множина всіх ромбів. Які фігури належать множинам $P\cap Q$; $P\cup Q$.

18. Множини $A = \{x \mid x\in \mathrm{N},\ x < 9\}$, $B = \{x \mid x\in \mathrm{Z},\ -4 < x \leq 9\}$ задати переліком елементів. Знайти множини $A \setminus B$, $B \setminus A$. Зобразіть дані випадки співвідношення між множинами на кругах Ейлера-Венна. Які елементи входять у множину $(A \setminus B)\cup(B \setminus A)$?

19. P – множина двозначних натуральних чисел, Q – множина всіх парних натуральних чисел. Зобразіть множини P і Q на діаграмах Ейлера-Венна. Які числа належать множині $P \setminus Q$, а які множині $Q \setminus P$?



20. На малюнку справа зображено дві геометричні фігури. Множину точок кола позначимо через O, а множину точок прямокутника – через P. Зробіть чотири малюнки і позначте штриховою наступні множини: $O\cup P$, $O\cap P$, $O \setminus P$, $P \setminus O$.

21. Порівняйте за допомогою кругів Ейлера-Венна множини: $(C\setminus D)\cup(D\setminus C)$ і $(C\cup D)\setminus(C\cap D)$, якщо $C\cap D \neq \varnothing$, $C \setminus D \neq \varnothing$, $D \setminus C \neq \varnothing$ (множини перетинаються між собою).

22. Позначимо через N^1 доповнення до множини N у множині всіх цілих чисел. Чи вірно, що: $(-4) \in \mathrm{N}^1$; $0 \in \mathrm{N}^1$; $-13 \in \mathrm{N}^1$; $8 \in \mathrm{N}^1$; $5{,}3 \notin \mathrm{N}^1$; $0 \notin \mathrm{N}^1$.

23. Дано множини A і B, причому $A\subset \mathrm{U}$, $B\subset \mathrm{U}$, $A\cap B\neq\varnothing$. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна наступні множини і вкажіть серед них рівні: $\overline{A\cap B}$, $A\cap \overline{B}$, $\overline{A}\cap \overline{B}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cup \overline{B}$, $\overline{A}\cup B$.

24. Вкажіть порядок виконання операцій над множинами:
$X\cap Y\cup Z\cap Q$; $(X\setminus Y)\cap Z$; $X \setminus Y\cap Z$; $X\cap \overline{Y}$; $X\cup Y \setminus Z$; $X \setminus Y\cup Z$; $\overline{X} \cup Y \setminus Z\cap Q$; $X\cap \overline{\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}} \cap Q$; $\overline{X} \cup \overline{\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}} \cap Q$.

25. Доведіть, що для довільних множин A, B, C справедлива рівність:

а) $A\cap(B \setminus C) = (A\cap B) \setminus (A\cap C)$;

б) $(A\cup B) \setminus C = (A \setminus C)\cup(B \setminus C)$.

26. Виясніть, на основі яких законів операцій над множинами виконано наступні перетворення:

а) $A \cap B \cap \overline{A} \cap C = A \cap \overline{A} \cap B \cap C = (A \cap \overline{A}) \cap (B \cap C) = \varnothing$;

б) $(A \setminus B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \setminus (B \cap \overline{B}) = \overline{A} \cap B$;

в) $\overline{A \cup B} \cap A = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap A = (\overline{A} \cap A) \cap \overline{B} = \varnothing$.

27. Знайти доповнення до множини B у множині A, якщо: $A = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x \le 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x < 5\}$.

28. Нехай універсальна множина – множина студентів першого курсу. Назвати доповнення наступних множин: відмінників; спортсменів; студентів, які є відмінниками і спортсменами; студентів, які є відмінниками або спортсменами; студентів, які не є ні спортсменами, ні відмінниками.

29. Нехай M – множина трикутників, A – множина рівнобедрених трикутників, B – множина прямокутних трикутників. Описати множини: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A_M}$, $\overline{B_M}$, $\overline{(A \cup B)_M}$, $\overline{(A \cap B)_M}$.

30. Знайти переріз і різницю фігур заданих аналітично: а) $y \le 4 - x^2$ і $y \ge x^2$; б) $x^2 + y^2 \le 25$ і $y > 1 - x$.

31. Задача-жарт. У Івася 7 яблук, у Василька 5 яблук. Скільки буде яблук, якщо від Івасевих 7 яблук відняти Василькових 5 яблук? Розглянути випадок із спільними яблуками, а також випадок без спільних яблук.

32. Дано: множина A – множина розв'язків рівняння $x + 5 = 9$, множина B – множина розв'язків рівняння $7x + 5 = 12$, множина C – множина розв'язків сукупності $\left[\begin{array}{l} x + 5 = 9 \\ 7x + 5 = 12 \end{array}\right.$. Задати переліком елементів множини $D = A \cup B$, $F = A \cap B$. В якому відношенні перебувають множини а) D і C; b) F і C?

33*. Дано: множина A – множина пар, які є розв'язками рівняння $2x + 5y = 15$, множина B – множина пар, які є розв'язками рівняння $7x + 2y = 6$. Задати переліком елементів множину $C = A \cap B$. Чи можливо задати переліком елементів множину $D = A \cup B$?

Декартів добуток

1. Упорядкована пара. Кортеж.
2. Декартів добуток. Число елементів декартового добутку.
3. Властивості декартового добутку.

1. Два елементи a і b, розміщені в певному порядку, називають ***впорядкованою парою*** (a, b). Елементи упорядкованої пари називаються її ***компонентами***, або ***координатами***.

Пари (a_1, b_1) і (a_2, b_2) називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Упорядковану пару ще інакше називають ***кортежем довжини*** **2** і позначають (a, b).

Аналогічно вводиться поняття упорядкованої трійки (a, b, c), упорядкованої n-ки $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Упорядкована n-ка елементів множини A називається кортежем довжини n, складеним з елементів даної множини A.

Приклади кортежів: слово – кортеж, складений із букв; запис числа – кортеж із цифр; речення – кортеж із слів; ще може бути кортеж машин і т. д.

2. Декартів добуток часто називають прямим добутком.

Декартовим добутком двох множин A і B називається множина всіх пар (a, b), де $a \in A$ *і* $b \in B$. Позначається $A \times B$.

Множину декартового добутку скорочено можна записати так: $A \times B = \{(a,b) | \, a \in A, b \in B\}$.

Якщо $A = B$, то *декартовий* добуток $A \times A$ позначають через A^2 і називають декартовим або прямим квадратом множини A.

Очевидно, що коли хоча б одна з множин A або B нескінченна, то $A \times B$ є також нескінченною множиною.

За аналогією з декартовим добутком двох множин можна розглядати декартові добутки довільного скінченого числа m множин.

Декартовим добутком трьох множин A, B і C називається множина всіх кортежів (a, b, c), де $a \in A$, $b \in B$ і $c \in C$. Позначається декартовий добуток трьох множин A, B і C так $A \times B \times C$, тобто:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Якщо $A = B = C$, то декартовий добуток $A \times A \times A$ позначають через A^3 і називають декартовим або прямим кубом множини A.

Число елементів $n(A \times B)$ декартового добутку двох множин A і B дорівнює добутку чисел елементів першої і другої множини, тобто: $$n(A \times B) = n(A) \times n(B).$$

Аналогічно, число елементів $n\,(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m)$ декартового добутку будь-якої скінченої кількості множин $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ дорівнює добутку чисел елементів всіх цих множин, тобто:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m) = n(A_1) \times n(A_2) \times n(A_3) \times \ldots \times n(A_m).$$

3. Декартів добуток не комутативний:

$$A \times B \neq B \times A,$$

якщо $A \neq B$.

Декартів добуток має такі властивості:

1°. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

2°. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

3°. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

4°. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

5°. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

6°. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Всі ці властивості доводяться на основі означення рівності множин і відповідних операцій над множинами.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення і запис декартового добутку множин; властивості декартового добутку множин; способи задавання і запису декартового добутку множин;

у м і т и: знаходити множину декартового добутку даних множин, та кількість її елементів; визначати властивості декартового добутку; встановлювати зв'язок розв'язку задач з поняттям декартового добутку множин; зображати елементи декартового добутку множин на координатній площині.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Скільки цифр у записі числа 200432? Скільки різних цифр у записі цього ж числа? Яка довжина кортежу (2, 0, 0, 4, 3, 2)? Вкажіть першу і п'яту компоненти цього кортежу.

2. Складіть множин $A \times B$ і $B \times A$, якщо: а) $A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; б) $A = \{1\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $A = \varnothing$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Дано множину $A = \{a, b, c\}$. Скажіть декартів добуток $A \times A$. Скільки елементів містить ця множина?

4. Утворіть множину всіх двозначних чисел, в яких число десятків належить множині $A = \{9, 7, 1\}$, а число одиниць – множині $B = \{5, 4, 0\}$. Як пов'язаний розв'язок цієї задачі з поняттям декартового добутку?

5. Дано множини $X = \{1, 2, 3\}$ та $Y = \{а, б, в\}$. Вкажіть серед наступних множин підмножини декартового добутку $X \times Y$:
а) $\{(1, а), (2, б), (3, в)\}$; б) $\{(1, а), (1, б), (2, а), (б, 2)\}$
в) $\{(2, б), (3, а), (4, а), (3, б)\}$;
г) $\{(1,а), (2,б), (1,в), (2,а), (2,б), (2,в), (3,а), (3,б), (3,в)\}$.
Скільки всього підмножин має множина $X \times Y$?

6. Зобразіть елементи декартового добутку множин A і B на координатній площині, якщо: а) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{0, 1\}$; б) $A = B = \{-1, 0, 1\}$; в) $A = \{x \mid x \in N, 3 \le x \le 7\}$; $B = \{y \mid y \in N; 4 \le y \le 9\}$; г) $A = \{x \mid x \in R; 3 \le x \le 7\}$; $B = \{y \mid y \in R; 4 \le y \le 9\}$.

7. Розв'яжіть задачу і встановіть, яким чином її розв'язок пов'язаний з поняттям декартового добутку. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 скласти всі двозначні числа, які: а) починаються цифрою 4; б) закінчуються цифрою 2; в) містять однакові цифри; г) починаються і закінчуються цифрою 5; д) починаються цифрою 2 або 3.

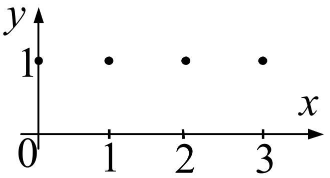
8. Зобразіть в прямокутній системі координат множину X^2, якщо $X = \{x \mid x \in R, -2 < x < 7\}$.

Чи належать цій множині пари:

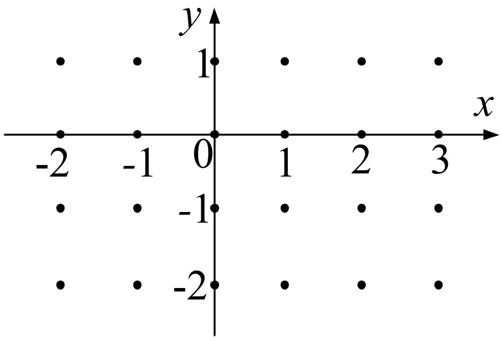
$(-3,5)$; $(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; $(0, 0)$; $(0, -4)$; $(6, 6)$?

9. Всі елементи декартового добутку множин X і Y зображені на координатній площині:

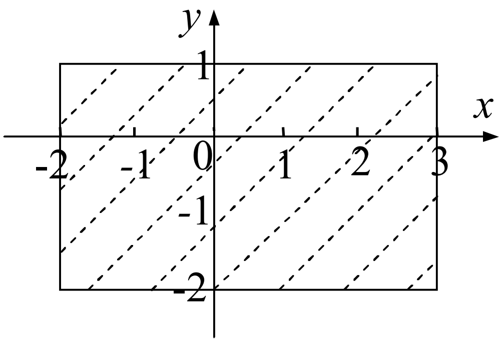
а)



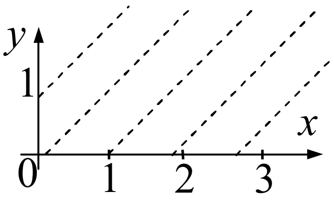
б)



в)



г)



Задайте для кожного випадку множини X і Y.

10. Знайти декартів добуток $M \times M$, якщо $M = \{3, 5, 7\}$. Записати підмножину A пар, в яких перша компонента не більша за другу. Записати підмножину B пар, в яких перша компонента не менша за другу. Вказати всі пари, які належать кожній з множин: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

11. Розглянути всі можливі випадки – які і скільки елементів може містити множина D, якщо кожен її елемент є двоцифрове число, і, якщо відомо, що цифри кількості десяток всіх чисел даної множини D утворюють множину $\{1, 2, 3\}$, а цифри кількості одиниць – множину $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Вказати, в якому випадку множина D буде містити мінімальну кількість елементів, а в якому максимальну.

12. Зобразіть в прямокутній системі координат множину $X \times Y$, якщо $X = \{x \mid x \in R, -2 < x \leq 7\}$, $Y = \{y \mid y \in N, -2 \leq y < 7\}$.

13. Дано множини $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{а, б, в\}$, $C = \{2, 3\}$, $D = \{а\}$. В якому відношенні знаходяться множини $A \times B$, $C \times D$.

14*. Зобразити геометрично декартовий добуток: а) трикутника і відрізка; б) кола і прямої.

Бінарна відповідність і відношення між елементами множин

1. Бінарна відповідність.
2. Наочні способи подання відповідностей.
3. Типи відповідностей.
4. Обернена відповідність.
5. Відображення множини "в" і "на" множину. Рівнопотужні множини. Зчислені множини.
6. Бінарні відношення.
7. Способи задання відношень.
8. Відношення обернене і протилежне даному.

1. В загальному ***бінарна відповідність*** між елементами множин A і B визначається самим словом бінарний ("бінарний" від латинського слова bis, що означає "двічі", і показує, що мова йде про дві множини A і B). Наприклад: "Дівчина a навчається в ВУЗі b", де $a \in A, b \in B$ (a належить множині A дівчат, а b – множині B ВУЗів).

Дане інтуїтивне, описове поняття ***відповідності*** можна замінити цілком конкретним математичним об'єктом – множиною пар (підмножиною відповідного декартового добутку), компоненти яких перебувають у даній відповідності.

Бінарною відповідністю, визначеною у множинах A і B, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$.

Множина A – ***множина відправлення***, B – ***прибуття*** *відповідності α*. Разом їх називають базовими множинами відповідності α. Зрозуміло, що відповідність $\alpha \subset A \times B$. Дану відповідність позначають так: $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Якщо між елементами a, b існує відповідність α, то позначають це так: $(a,b) \in \alpha$, або $a\alpha b$, або $\alpha(a) = b$.

При відповідності $A \xrightarrow{\alpha} B$ ***образом*** елемента $a \in A$ називають множину тих $b \in B$ (тих елементів з множини B), для яких $\alpha(a) = b$, тобто $(a,b) \in \alpha$. ***Прообразом*** елемента $b \in B$ називають множину тих $a \in A$, для яких $\alpha^{-1}(b) = a$, тобто $(a,b) \in \alpha$.

Множину всіх перших компонентів пар відповідності α називають ***областю визначення*** відповідності α. Множину всіх других компонентів пар відповідності α називають ***областю значень*** відповідності α.

Якщо дві множини A і B, співпадають, $A = B$, то, між двома елементами однієї множини A, говорять не про відповідність, а про ***відношення на множині***.

2. Відповідність можна подати різними мовами (способами):
а) теоретико-множинною мовою (у вигляді множини пар);
б) мовою матриць (таблиць);
в) мовою графів.

Перша з них є зрозумілою з самого означення відповідності.

Дві останні відносяться до наочних способів подання відповідностей. Розглянемо їх.

Нехай $A = \{2;\ 3;\ 6;\ 12)$, $B = \{2;\ 3;\ 4\}$ і відповідність $\alpha \subset A \times B$ має вигляд:

α = {(2, 2), (3, 3), (6, 2), (6, 3}, (12, 2), (12, 3), (12, 4)},

тобто змістовно α означає подільність чисел з множини A на числа з множини B.

Випишемо по вертикалі всі елементи множини A, а по горизонталі – множини B (рис. 3). Якщо пара $(a, b) \in \alpha$, де $a \in A, b \in B$, то на перетині відповідного рядка і стовпця записуємо 1, у противному разі записуємо 0. Одиниця і нуль тут визначають істинність висловлень про належність пар даній відповідності. Так, у рядку, де міститься елемент 6, є дві одиниці і один нуль. Це означає, що висловлення (6, 2)$\in \alpha$ (або “6 кратне 2”), (6, 3)$\in \alpha$ (або “6 кратне 3”) істинні, а висловлення (6, 4)$\in \alpha$ (або “6 кратне 4”) – хибне. Таку прямокутну таблицю з нулів і одиниць називають ***матрицею даної відповідності***.

Графом називають систему точок (вершин графа) і стрілок (орієнтовних ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. Як подання відповідностей за допомогою графів розглянемо попередній приклад. Випишемо елементи множини A, а під ними елементи множини B (рис. 4). Якщо $(a, b) \in \alpha$, то проводимо

$A \backslash B$	2	3	4
2	1	0	0
3	0	1	0
6	1	1	0
12	1	1	1

Рис. 3

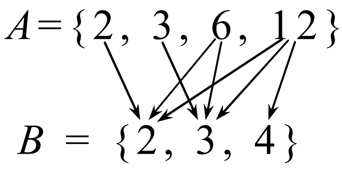


Рис. 4

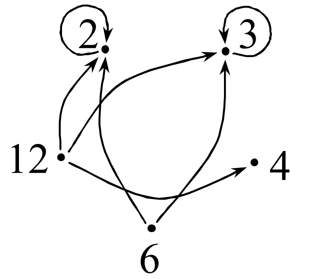


Рис. 5

стрілку від a до b. Виконавши таку побудову для всіх пар з α, дістанемо граф відповідності α.

Граф відповідності будують ще й так. Зображують елементи множин A і B на площині не в лінійній послідовності, а, наприклад, точками на колі, і сполучають стрілками елементи, які перебувають у даній відповідності α. При цьому спільні елементи (якщо такі є) множин A і B виписують один раз. Парі виду (a, a) відповідатиме стрілка від a до a (петля графа) (рис. 5).

За допомогою таблиць і графів можна задавати (або ілюструвати) лише скінченні відповідності з порівняно невеликою кількістю елементів. Для нескінченних відповідностей такими способами можна ілюструвати лише деякі їх скінченні частини. Такі скінченні частини таблиць і графів дають часто досить наочне уявлення про зміст нескінченних відповідностей.

3. Серед великої різноманітності відповідностей виділяють деякі характерні їхні типи.

1. ***Порожня відповідність*** ($\alpha = \varnothing$). Матриця цієї відповідності складається тільки з нулів, а граф – з одних точок (жодної стрілки немає).

2. ***Повна відповідність*** ($\alpha = A \times B$), її матриця немає жодного нуля, у графі від кожного елемента множини A йдуть стрілки до кожного елемента множини B.

3. ***Відповідність всюди визначена у множині відправлення***. Це відповідність $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини A є першими компонентами пар відповідності α. Область визначення

такої відповідності співпадає з її множиною відправлення. Кожен рядок матриці цієї відповідності містить принаймні одну одиницю, проте стовпці можуть складатися лише з нулів. У графі цієї відповідності від кожного елемента множини *A* йдуть стрілки.

4. ***Сюр'єктивна відповідність***. Це відповідність на всю множину прибуття $\alpha \subset A \times B$, причому усі елементи множини *B* є другими компонентами пар відповідності *α*. Кожен стовпець матриці цієї відповідності містить принаймні одну одиницю, проте рядки можуть складатися лише з нулів. У графі такої відповідності стрілки напрямлені до кожного елемента множини *B*.

5. ***Ін'єктивна відповідність***. Це така відповідність, що елементи з множини прибуття містять не більше одного прообразу. У графі такої відповідності до кожного елемента множини *B* не напрямлено взагалі, або напрямлено лише одну стрілку. Кожен стовпець матриці цієї відповідності містить не більше однієї одиниці.

6. ***Функціональна відповідність*** або ***функція***. Це така відповідність, коли кожному елементу з множини відправлення відповідає не більше як один елемент. Характерною особливістю функціональної відповідності є її однозначність. У графі такої відповідності від кожного елемента множини *A* не напрямлено взагалі, або напрямлено лише одну стрілку. Кожен рядок матриці цієї відповідності містить не більше однієї одиниці.

7. ***Відображення***. Це всюди визначена функціональна відповідність. У графі такої відповідності від кожного елемента множини *A* напрямлено лише одну стрілку. Кожен рядок матриці цієї відповідності містить лише одну одиницю.

Серед відображень розрізняють відображення $\alpha \subset A \times B$ (відображення *A* на *B*), якщо в *B* є елементи, які не мають прообразів (в матриці є стовпці лише з самих нуликів) і сюр’єктивне відображення *A* на *B* (відображення на всю множину прибуття), якщо кожний елемент з *B* має хоча б один прообраз (в матриці кожен стовпець містить хоча б одну одиницю).

8. ***Бієктивна відповідність***. Це сюр'єктивне відображення, яке є ще ін'єктивним. Тобто це одночасно всюди визначена і сюр'єктивна, і ін'єктивна, і функціональна відповідність. З означень

сюр’єктивного відображення і ін’єктивної відповідності слідує, що кожен рядок і кожен стовпець матриці цієї відповідності містить лише одну одиницю. Характерною особливістю бієктивної відповідності є те, що кожен елемент множини відправлення, прибуття містить єдиний відповідно образ, прообраз. У графі такої відповідності від кожного елемента множини A напрямлено лише одну стрілку і до кожного елемента множини B напрямлено лише одну стрілку. Зрозуміло, що в такому випадку, кількість елементів множини відправлення має дорівнювати кількості елементів множини прибуття.

4. ***Оберненою відповідністю*** до відповідності $\alpha \subset A \times B$, називають таку відповідність, яка є підмножиною декартового добутку $B \times A$ і складається з тих і тільки тих пар (b, a), для яких $(a, b) \in \alpha$.

Відповідність, обернену до α, позначають через α^{-1}. Таким чином, $(b, a) \in \alpha^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha$.

Оберненим відображенням до відображення $A \xrightarrow{f} B$, називають таке відображення f^{-1}, що коли для кожного $x \in A$ і кожного $y \in B$ виконується $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, тобто $f^{-1}(f(x)) = x$.

Ті відображення, які мають обернені відображення називають ***оборотними відображеннями***. Кожне бієктивне відображення є оборотним і навпаки.

5. ***Відображення множини*** A ***на множину*** B – це таке відображення, коли область значень відображення збігається з областю прибуття. Іншими словами, коли в множині B немає елементів, які б не були образами деякого або деяких елементів множини A.

Відображення множини A ***в множину*** B – це таке відображення, коли в множині B можуть бути і елементи, які не є образами того чи іншого елемента множини A.

Якщо відображення f є бієктивним, то його називають ***взаємнооднозначним*** відображенням.

Кожна множина характеризується ***потужністю***. Потужність скінченої множини дорівнює числу її елементів. Наприклад, множина $A = \{a, b, c, p, e\}$ має 5 елементів. Це число і буде її потужністю. Позначається так: $n(A) = 5$. Ця множина рівнопотужна множині пальців руки.

Множини A і B називають ***рівнопотужними*** (***еквівалентними***, ***рівносильними***) тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне біективне (взаємно однозначне) відображення $A \xrightarrow{f} B$. Позначають на письмі дві рівнопотужні множини A і B так: $A \sim B$.

Відношення рівнопотужності множин має властивості рефлексивності, симетричності, транзитивності. На властивості транзитивності рівнопотужних множин здійснюється розподіл місць у театрі, кіно, в рейсових автобусах. Тут A – множина тих місць, на які продано квитки, B – множина проданих квитків, C – множина людей, які купили квитки з B.

Поняття рівнопотужності множин використовується для уточнення поняття скінченої і нескінченної множини, яке розуміється нами лише на інтуїтивній основі.

Множина A є ***скінчена***, якщо не існує взаємно однозначного відображення цієї множини на деяку свою підмножину A_1, таку, що $A_1 \neq A$.

Множину A називають ***нескінченною***, якщо вона рівнопотужна деякій своїй власній підмножині, тобто якщо $A \sim A_1$, де $A_1 \subset A$ і $A_1 \neq A$. Наприклад, A – множина додатних парних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних 6, $B \subset A$, $A \sim B$ ($2 \to 6$, $4 \to 12$, $6 \to 18, \ldots$), тобто можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами цих множин. Отже A – нескінченна множина.

Множину, що має ту саму потужність, що і множина натурального ряду чисел, називають ***зчисленною***. Множина дійсних чисел не є зчисленною.

6. Раніше було розглянуто відповідність, в якій множини відправлення і прибуття збігаються. Нам вже відомо, що такі відповідності називають ***відношеннями***, і при цьому говорять про відношення у множині.

Аналогічно, як і при відповідності, множину перших компонентів пар даного відношення називають областю визначення даного відношення, а множину других компонентів пар – областю його значень.

Бінарним відношенням, визначеним у множині *M,* називають кожну підмножину декартового добутку $M \times M$, або декартового квадрата M^2.

Так, відношення "*a* паралельна *b*", "*a* перпендикулярна до *b*" розглядають у множині прямих на площині; відношення "*a* ділиться на *b*", "*a* взаємно-просте з *b*" – у множині натуральних чисел N тощо. Кожне рівняння (нерівність) з двома змінними, а також їхні системи у фіксованій числовій множині *M* є прикладами відношень у *M*.

Відношення, як і відповідності, можна зображати за допомогою таблиць (матриць) і графів. При зображенні за допомогою графів можуть бути стрілки від *a* до *a* (петлі), наприклад, для відношення подільності, а разом із стрілкою від *a* до *b* також стрілка від *b* до *a*, наприклад, для відношень паралельності й перпендикулярності. Звичайно, елементи множини, на якій розглядається відношення, зображуються на площині один раз і розміщуються довільно.

7. Відношення можна задати одним з трьох способів:

1). На скінченій множині – *переліком пар*, які задає дана відповідність. Цей спосіб задання відповідності ще інакше називають матрицею, графіком або таблицею.

2). Вказавши на *характеристичну властивість* усіх пар, які задає дана відповідність. Наприклад, "$x < y$" на множині чисел, "$a \perp b$" на множині прямих.

3). На числових множинах – *графіком* на координатній площині. Коли графіком є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, її заштриховують.

8. Відношення $\overline{\varphi}$ між елементами множини *X* називається ***протилежним до відношення*** φ, якщо воно є доповненням відношення φ до декартового квадрата X^2. Відношення $\overline{\varphi}$ можна задати як заперечення даного відношення φ.

Відношення φ^{-1} називається ***оберненим до відношення*** φ, якщо $\varphi^{-1}(y) = x$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x) = y$, де $x \in X$, $y \in Y$. Відношення φ^{-1} можна задати переліком всіх пар, помінявши в кожній парі відношення φ місцями перший і другий компоненти. Щоб дістати граф відношення φ^{-1}, треба у графі відношення φ змінити напрям стрілок.

Перетином двох відношень називається відношення, графіком якого є перетин графіків даних відношень, а ***об'єднанням*** – відношення, графік якого є об'єднанням графіків даних відношень.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення бінарної відповідності між елементами двох множин і однієї множини; означення оберненої відповідності; стрілкове і матричне представлення бінарної відповідності; типи відповідностей; означення рівнопотужних і скінчених множин; означення бінарних відношень; характеристику різних способів задавання відношень; поняття відношення оберненого і протилежного даному;

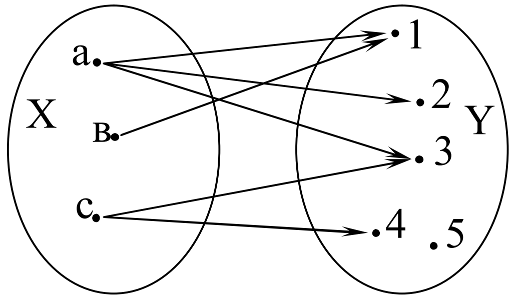
у м і т и: визначати пари чисел, які знаходяться у даній відповідності чи даному відношенню; будувати графіки бінарних відношень; знаходити обернені і протилежні до них відношення; вказувати область визначення і область значень даного відношення; задавати відношення різними способами, в тому числі рівнянням чи нерівністю з двома змінними; визначати їх властивості.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Елементи множини $A = \{12, 17, 19, 10, 21\}$ і множини $B = \{2, 3, 4, 9\}$ знаходяться у відношенні *K*: "число *a* кратне до числа *b*", $a \in A, b \in B$. Побудуйте граф відношення *K*. Перечисліть всі пари чисел, які знаходяться у відношенні *K*. Вкажіть область визначення і область значень відношення *K*.

2. Дано множину $A = \{3, 6, 9, 12\}$. а) перечисліть елементи множини $A \times A$. б) виділіть з множини $A \times A$ підмножину тих пар, в яких перша компонента більша за другу. Яке відношення задає ця

підмножина? Побудуйте граф цього відношення; в) виділіть з множини $A\times A$ підмножину пар, в яких перша компонента не менша за другу. Яке відношення задає ця підмножина? Побудуйте граф.



3. На малюнку справа дано граф відношення між елементами множин X і Y. Перечисліть елементи області визначення і області значень даного відношення. Перечисліть всі пари елементів, що знаходяться в даному відношенні. Побудуйте його графік.

4. Відношення P задано на множині $X = \{a, b, c, d, e\}$. Множина пар, які знаходяться у відношенні P, є $\{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (d; e), (e; c), (c; c)\}$. Побудуйте граф відношення P. Вкажіть область вивчення і область значень відношення P. Чи симетричне дане відношення?

5. Множина пар елементів з множини $A = \{6, 7, 8, 9\}$, які знаходяться у відношенні P, є $\{(6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 7), (8, 9), (8, 8), (9, 9)\}$. Виясніть, які із наступних висловлень істинні: а) P – відношення “менше”; б) P – відношення “не більше”; в) P – відношення “не менше”; г) P – відношення “менше або дорівнює”.

6. Дано множини $X = \{x \mid x \in Z;\ -3 \leq x \leq 0\}$, $Y = Z$, між елементами цих множин задано відношення R: “число x менше числа y на 2”. Задайте граф і графік відношення R. Дослідіть його властивості.

7. Відношення P між елементами множин $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y = \{4, 5, 6\}$ задано множиною пар $\{(2; 5), (2; 6), (3; 4), (3; 5)\}$. Задайте відношення: а) протилежне даному; б) обернене даному; в) протилежне оберненому.

8. Відношення між елементами множин P і K задано рівнянням $y = 3x + 1$. Побудуйте графік цього відношення, якщо: а) $P = \{0, 1, 2, 3, 5\}$; $K = \mathrm{Z}$; б) $P = K = \mathrm{Z}$; в) $P = K = \mathrm{R}$.

9. На множині X відношення T задано при допомозі нерівності $y \leq 2x$. Побудуйте графік відношення T, якщо:

а) $X = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$
б) $X = \{x \mid x \in R,\ -2 \le x \le 4\}$
в) $X = \mathrm{R}$.

10. Довести, що наступні речення із змінними x і y задають бінарні відношення на множині R, і побудувати графіки цих відношень: $x = y$; $x = y + 4$; $y = x + 4$; $x < y$; $x > y + 4$; $x \div y = 3 \div 4$; $xy = 6$.

11. Задайте відношення, протилежне і обернене даному: “число x менше числа y в 3 рази”, $x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}$.

12. Знайти область визначення і множину значень для відповідності $a \ge b$, якщо a, b – натуральні числа і $-4 \le a \le 7$, $2 \le b < 11$.

13. Зобразити на координатній площині такі множини точок: а) $\{(x, y) \mid (x, y) \in R^2,\ y \le x + 1\}$; b) $\{(x, y) \mid (x, y) \in D^2,\ (x + 1) \le (y - 1)\}$.

14. Побудувати таблицю і граф відповідності між множиною днів тижня і множиною навчальних предметів, які ви вивчаєте в цьому семестрі. Виписати всі пари в яких: а) на першому місці стоїть вівторок; б) на другому місці стоїть педагогіка.

15. Навести приклади двох будь-яких відповідностей між числовими множинами таких, щоб в одному прикладі область визначення відповідності збігалася з областю її відправлення, тобто щоб відповідність була всюди визначена, а у другому прикладі щоб область визначення була правильною підмножиною області відправлення.

16. Дано множини A = {помаранчевий, зелений, білий, жовтий}, B = {сніг, апельсин, молоко, ялинка}. За певною ознакою знайти і зобразити відповідність між цими множинами. Побудувати граф оберненої відповідності і задати її переліком пар.

Властивості бінарних відношень. Упорядковані множини

1. Властивості відношень на множині.
2. Відношення еквівалентності. Розбиття множин на класи.
3. Відношення порядку і його властивості.
4. Упорядковані множини.
5. Лінійно впорядковані множини. Повний порядок.
6. Властивості дискретності і щільності лінійно упорядкованих множин.

1. Розглядаючи різні відношення, можна помітити, що деякі з них схожі між собою в одному і відмінні – в іншому. Так, для відношень "*a* ділиться на *a*" і "*a* менше від *a*" на множині N висловлення "*a* ділиться на *a*" – істинне, а висловлення "*a* менше від *a*" – хибне, тобто *a* знаходиться у відношенні "подільності" до *a*, але не у відношенні "менше" до *a*. Водночас для обох цих відношень при будь-яких натуральних *a*, *b*, *c* істинними будуть такі висловлення: "якщо *a* кратне *b* і *b* кратне *c*, то *a* кратне *c*", "якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$" які характеризують транзитивну властивість. Це саме можна сказати й про інші відношення та властивості.

Отже, треба виділити найбільш загальні й істотні властивості відношень та покласти їх в основу характеристики найважливіших і найпоширеніших типів відношень.

Відношення α, визначене у множині M, називають:

рефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ виконується $(a,a) \in \alpha$ (*a* знаходиться у відношенні α само до себе). Відношення "подільності", "паралельності прямих", "рівності" є рефлексивними, а відношення "більше", "менше", "перпендикулярності" – ні;

антирефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ твердження $(a,a) \in \alpha$ не виконується (*a* не знаходиться у відношенні α само до себе). Антирефлексивними є відношення "більше", "менше" у числових множинах і перпендикулярності – у множині прямих на площині;

арефлексивним (***нерефлексивним***), якщо деякі елементи $a \in M$ не знаходяться у відношенні $(a,a) \in \alpha$, а деякі елементи $a \in M$ знаходяться у відношенні $(a,a) \in \alpha$.

симетричним, якщо для будь-яких $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha \Rightarrow (b,a) \in \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b також перебуває у відношенні α до a). Відношення "паралельності", "перпендикулярності" прямих на площині, "подібності" геометричних фігур є симетричними;

антисиметричним, якщо для кожних $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b і $a \neq b$, то b не перебуває у відношенні α до a). Антисиметричними є відношення "більше або дорівнює" ($\geq$), "менше або дорівнює" ($\leq$), "є підмножиною" ($\subseteq$);

асиметричним, якщо для кожних $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha \Rightarrow (b,a) \notin \alpha$ (якщо a перебуває у відношенні α до b, то b не перебуває у відношенні α до a). Асиметричними є відношення "подільності", "більше", "менше";

транзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до c, то a перебуває у відношенні α до c);

антитранзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \notin \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до c, то a не перебуває у відношенні α до c);

транзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \in \alpha$ (якщо a знаходиться у відношенні α до b, а b – у відношенні α до c, то a перебуває у відношенні α до c);

атранзитивним, якщо відношення не є ні транзитивним ні антитранзитивним;

зв'язним, якщо для будь-яких $a,b \in M$ виконується властивість $a \neq b \Rightarrow (a,b) \in \alpha$, або $(b,a) \in \alpha$ (якщо $a \neq b$, то a перебуває у відношенні α до b, або навпаки). Зв'язними є відношення "більше", “менше”, а відношення “подільності”, “паралельності”, “”перпендикулярності” – ні.

Як бачимо, різні за змістом відношення можуть мати спільні властивості. Це дає змогу класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями.

У процесі розвитку та практичної діяльності викристалізовувалися найважливіші групи відношень, зокрема відношення еквівалентності, порядку, функціональне (функція).

2. Відношення α, визначене у множині M, називають *відношенням* ***еквівалентності*** або ***еквівалентністю*** в M, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Для того щоб відношення α було відношенням еквівалентності, повинні виконуватися всі три властивості.

Приклади відношень еквівалентності:

1. Відношення рівності визначене на довільній множині M має всі три властивості, отже воно є відношенням еквівалентності.

$a = a$ – рефлексивність;

$a = b \Leftrightarrow b = a$ – симетричність;

$(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow a = c$ – транзитивність.

2. Відношення паралельності на множині прямих.

$a \parallel b$ – рефлексивність;

$a \parallel b \Leftrightarrow b \parallel a$ – симетричність;

$(a \parallel b) \wedge (b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$ – транзитивність.

3. Відношення паралельності на множині площин.

4. Відношення подібності на множині фігур (трикутників,…).

5. Відношення “мати однакове прізвище” на певній множині M людей.

6. Відношення «навчатися в одному класі» на множині учнів школи.

7. Відношення рівносильності на множині M рівнянь.

За допомогою відношення еквівалентності виконується досить поширена операція – *розбиття* не порожньої множини на підмножини, які називають ***класами***, або *класами еквівалентності*.

Покажемо, як зв'язані на множині M відношення еквівалентності з поняттям розбиття цієї множини.

Кожне розбиття S множини M визначає, при тому тільки єдине, відношення еквівалентності α, і навпаки, кожному відношенню еквівалентності α на M відповідає, при тому тільки єдине, розбиття S множини M.

Будь-яке відношення еквівалентності α здійснює, при тому тільки єдине, розбиття S множини M на класи, і навпаки, кожне розбиття S множини M визначає, при тому тільки єдине, відношення еквівалентності α.

Відношення еквівалентності α здійснює розбиття S множини M на класи, так що:

1) кожен елемент множини належить одному і тільки одному класу;

2) будь-які два елементи одного класу перебувають у даному відношенні еквівалентності;

3) будь-які два елементи, що належать різним класам, не перебувають у цьому відношенні.

Наприклад: *Відношення паралельності на множині площин* розбиває цю множину на класи еквівалентності (стопи паралельних площин) так, що:

1) будь-яка площина належить одному і тільки одному із цих класів;

2) будь-які дві площини одного класу паралельні між собою;

3) будь-які дві площини різних класів не паралельні між собою.

Тут класи еквівалентності послужили джерелом утворення нового поняття – напряму нормалі стопа площин (перпендикулярної (нормальної) прямої стопа площин: кожен із класів еквівалентності площин, тобто кожна стопка паралельних площин, задає напрям своєї нормалі.

Або, наприклад, якщо за відношення еквівалентності взяти відношення паралельності прямих на площині, то відповідне йому розбиття є множиною всіх напрямків на площині, а кожний клас еквівалентності є множиною паралельних прямих (їх пучком).

Відношення еквівалентності наочно зображується системою повних графів, побудованих на класах еквівалентності. ***Повним*** називають граф, в якого всі точки сполучено стрілками і всі вершини мають петлі. Між кожною парою точок проходять дві протилежні стрілки (властивість симетричності), тоді для простоти рисунка їх замінюють відрізком, який сполучає ці точки.

3. Одним із основних понять сучасної математики є *поняття структури **порядку***.

Поняття про порядок розміщення об'єктів у множинах використовується досить часто. Так, говорять про порядок розміщення будинків на вулицях міста чи села, прізвищ у списку учнів класу, чисел у натуральному ряді, цифр у записі числа, слів у реченні.

Структури порядку визначаються бінарними відношеннями порядку на множині.

Досі ми розглядали множини, порядок розміщення елементів яких нас не цікавив. Проте вже в декартовому добутку множин порядок розміщення був не абияким: елементами декартового добутку $A \times B$ є такі пари елементів, у яких перший компонент обов'язково належить множині *A,* а другий – *B.* Тобто, в будь-якій такій парі елемент множини *A* передує елементу множини *B*.

У повсякденному житті часто користуємося виразами: “передує”, “слідує за”, “ближче”, “далі”, “вище”, “нижче” і т. д. Наприклад, понеділок “передує” вівторку і “слідує за” неділею.

Абстрагуючись від конкретних множин і об'єктів, які є їх елементами, вважатимемо, що коли між елементами множини *M* встановлено відношення «передує», тобто елементи множини розміщено так, що для будь-якої пари елементів *x* і *y* можна вказати, який із них передує іншому, то на множині установлене *відношення **строгого** порядку*.

Замість “*x* передує *y*“ коротко пишуть $x < y$ і тоді “*y* слідує за *x*”, $y > x$, тобто відношення строгого порядку антисиметричне. Оскільки в множині елементи різні (не повторюються), то цілком зрозуміло, що ніякий елемент не передує сам собі. Отже, це відношення антирефлексивне. Якщо ж один елемент передує другому, а другий – третьому, то тим більше перший з цих елементів передує третьому, тобто відношення транзитивне.

Таким чином, відношення строгого порядку на множині A визначається трьома умовами:

1) *антирефлексивність:* для будь-якого $x \in A$ не має місця $x < x$;

2) *антисиметричність:* для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, таких, що $x < y$ і $x \neq y$, не має місця $y < x$;

3) *транзитивність:* для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, і $z \in A$ таких, що $x < y$, а $y < z$, має місце $x < z$.

Наприклад, відношення “менше” на множині $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ є відношенням строгого порядку, бо:

1) $(x < y$ і $y < z) \Rightarrow x < z$ – відношення транзитивне $(1 < 4$ і $4 < 6) \Rightarrow 1 < 6$; $(1 < 6$ і $6 < 8) \Rightarrow 1 < 8$; $(4 < 6$ і $6 < 9) \Rightarrow 4 < 9$;…..

2) $1 < 4 \Rightarrow \overline{4 < 1}$; $4 < 6 \Rightarrow \overline{6 < 4}$;… – відношення антисиметричне.

3) $\overline{1 < 1}$; $\overline{4 < 4}$;… – відношення антирефлексивне.

Отже відношення “менше” на даній множині є відношенням строгого порядку. Граф цього відношення (рис. 6) не має петель. Будь-яку пару чисел (x, y), таку, що $x < y$, зв’язує тільки одна стрілка, яка йде від x до y. Графіком відношення є така множина: $\{(1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (6, 8), (6, 9), (8, 9)\}$.

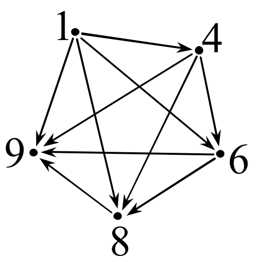


Рис. 6

Уточнимо відношення порядку таким означенням.

Відношення α, визначене у множині M, називають відношенням ***строгого** порядку,* якщо воно транзитивне і асиметричне, і відношенням ***нестрогого** порядку,* якщо воно транзитивне і антисиметричне.

З означення випливає, що відношення строгого порядку – антирефлексивне, а нестрогого – рефлексивне. Серед відношень строгого порядку є такі відношення: “більший”, “грубіший”, “швидший”, “важчий”, “темніший”, “густіший”, “старший”, “молодший”. Відношеннями нестрогого порядку у множині чисел є «більше або дорівнює» , «менше або дорівнює», або відношення подільності у множині N натуральних чисел є також відношенням нестрогого порядку.

4. Множина називається ***упорядкованою***, якщо відносно будь-яких її елементів x і y встановлено, який з них слідує за другим (або, навпаки, який передує другому), причому задовольняються умови антирефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Це може бути, наприклад, множина членів сім'ї, елементи якої упорядковані за віком.

Звичайно, з натуральних чисел можна утворити і невпорядковану множину, при умові, коли нас не цікавить порядок слідування елементів, а лише якась інша умова, наприклад, нас цікавлять лише парні числа першого десятка. Елементи цієї множини можна записати в будь-якому порядку:

а) в порядку зростання: (2, 4, 6, 8, 10);

б) в порядку спадання: (10, 8; 6, 4, 2);

в) як завгодно: {6, 4, 2, 8, 10).

Елементи множини можуть бути упорядковані за будь-якою ознакою (за кольором, за формою і т. ін.). Так, щоб легше користуватися словником, у ньому слова упорядковують за буквами, які стоять “швидше” в алфавіті. Числові множини здебільшого впорядковані за величиною чисел.

Початковим елементом упорядкованої множини називають елемент, якому не передує ніякий інший елемент, тобто початковий елемент не має попереднього. Елемент, який не має наступного, називають ***останнім***. Звичайно, не всяка множина має початковий або останній елемент. У множині натуральних чисел початковим елементом є 1, останнього елемента немає.

Якщо $a > b$ і якщо для будь-якого елемента $x \neq a$ і $x \neq b$ із того, що $a > x$, слідує, що x не $> b$, то вважають, що a безпосередньо слідує за b.

5. Відношення порядку в упорядкованій множині називають *відношенням* ***лінійного*** або ***цілковитого порядку***, якщо це відношення зв'язне. Пригадаємо, відношення φ на множині M називається зв'язним, якщо для будь-яких двох елементів цієї множини $a \neq b$ виконується або $a\ \varphi\ b$, або $b\ \varphi\ a$. Відношення порядку, яке не має властивості зв'язності, називають *відношенням* ***часткового порядку***. Відповідно множину називають ***лінійно-упорядкованою*** або ***частково упорядкованою*** множиною.

Наприклад відношення "x кратне y" на множині натуральних чисел є відношенням часткового і нестрогого порядку: це відношення рефлексивне (a кратне a) і не для будь-якої пари нерівних натуральних чисел виконується одне з двох або a кратне b, або b кратне a.

Відношення "$a > b$" – відношення лінійного і строгого порядку на множині натуральних чисел; це відношення антирефлексивне і для будь-якої пари натуральних чисел таких, що $a \neq b$, виконується одна із умов: або $a > b$ або $b > a$.

Якщо в упорядкованій множині M кожна непорожня множина має найменший елемент, то такий порядок називають ***повним***, а множину – ***цілком упорядкованою***.

Повний порядок – завжди лінійний, оскільки будь-яка двоелементна підмножина даної множини має найменший елемент, а отже, для будь-якої пари різних елементів цілком упорядкованої множини хоч би одне із співвідношень $a > b$ або $b > a$ правильне.

6. Лінійно упорядковані множини мають ряд властивостей. Розглянемо деякі з них.

Нехай a, b, c – елементи множини M, упорядкованої деяким відношенням. Якщо відомо, що елемент a перебуває в цьому відношенні з елементом b і елемент b перебуває в цьому відношенні з елементом c, то говорять, що елемент b лежить між елементами a і c.

Наприклад, якщо множина натуральних чисел упорядкована відношенням "$x < y$", то з того, що $2 < 5$ і $5 < 7$, слідує, що число 5 лежить між числами 2 і 7.

Множина X, яка є лінійно впорядкованою, називається ***дискретною***, якщо між будь-якими двома її елементами лежить лише скінчена множина елементів. Наприклад: множина цілих чисел, множина натуральних чисел.

Лінійно впорядкована множина називається ***щільною***, якщо для будь-яких різних елементів цієї множини існує елемент множини, що лежить між ними. Наприклад: множина раціональних чисел, дійсних чисел.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення: найважливіших і найхарактерніших типів відношень; відношення еквівалентності; відношення строгого і нестрогого порядку; лінійно впорядкованої множини; множини з повним порядком;

у м і т и: класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями; розбивати множину на класи еквівалентності; відрізняти відношення строгого і нестрогого порядку, цілковитого та часткового порядку.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. На рисунках зображено графи різних відношень, які задані на множині $D = \{2, 3, 5, 7, 9\}$. Вкажіть серед них графи: транзитивного відношення; антисиметричного відношення; рефлексивного відношення; відношення еквівалентності; відношення порядку.

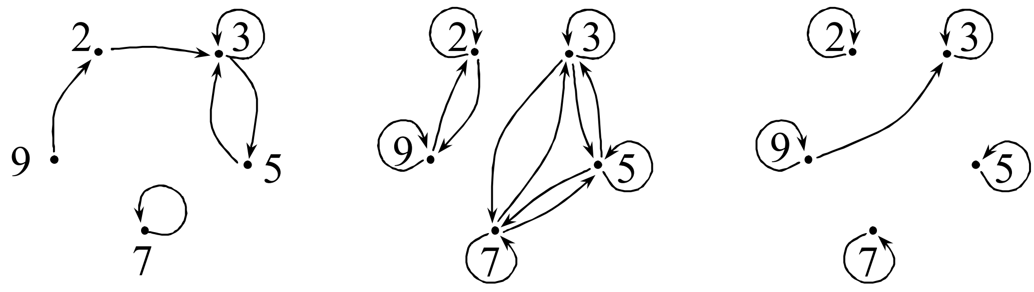


Рис. а) Рис. б) Рис. в)

2. Показати, що відношення рівнопотужності в будь-якій системі скінчених множин є відношення еквівалентності.

3. На множині $X = \{3,\ 5,\ 11,\ 9,\ 7\}$ задано відношення $x > y$. Побудувати граф і графік цього відношення. Показати, що це відношення є відношенням строгого порядку.

4. Довести, що множина всіх цілих чисел **Z** лінійно упорядкована відношенням “$x < y$”.

5. Накреслити граф і графік відношення “більше або дорівнює” на множині $\{9, 7, 6, 4\}$. Якого порядку є це відношення? Чому?

6. В сім'ї чотири дитини, і всі дівчатка. Чи є відношення “бути сестрою” на множині дітей цієї сім'ї відношенням еквівалентності?

7. Накреслити граф відношення “мати одну і ту саму остачу при діленні з остачею на 3” на множині $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Чи є це відношення відношенням еквівалентності? Знайти розбиття множини за цим відношенням.

8. Побудувати граф відношення $x = y + 3$ між елементами множини $\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

9. Побудувати графи відношень на множині людей: “бути сестрою”, “бути братом”, “бути начальником”. Визначити властивості цих відношень.

10. Розбити всі натуральні числа від 1 до 30 на класи так, щоб до одного класу ввійшли числа, які мають одну і ту саму остачу при діленні на 7. Скільки дістали класів? За яким відношенням еквівалентності зроблено це розбиття?

11. Дано множини: X – множина букв латинського алфавіту, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, f\}$, $C = \{a, b, d\}$, $D = \{d, k, l, m, n\}$, $E = \{k, l, m, n\}$. Розгляньте відношення “бути підмножиною” на множині $L = \{X, A, B, C, D, E\}$. Покажіть, що дане відношення є відношенням нестрогого порядку. Перевірте чи воно лінійне.

Поняття про комбінаторні задачі

1. Правило суми.
2. Правило добутку.
3. Розміщення без повторень.
4. Розміщення з повтореннями.
5. Перестановки без повторень.
6. Перестановки з повтореннями.
7. Комбінації і їх властивості.
8. Трикутник Паскаля.

Людині щоденно приходиться міркувати – як скерувати собою в тій чи іншій ситуації. Варіантів іноді дуже багато і щоб зробити те чи інше розміщення, чи переміщення, той чи інший вибір, тобто як скомбінувати (в гарному розумінні цього слова), розумному керівнику потрібно добре подумати. Однією з областей матеметики, яка нам може допомогти досягти оптимального (найкращого за тим або іншим критерієм) керування, є комбінаторика. Дана математика, в наш час, досягла надзвичайної популярності.

Розглянемо два самі елементарні і майже очевидні правила, які за повного осмислення будь-якої комбінаторної задачі, можуть її розв'язати. Це правило суми й правило добутку.

1. Якщо множини A і B не перетинаються, то число елементів множини $A \cup B$ дорівнює сумі чисел елементів множин A і B, тобто:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Це є ***правило суми***.

Справедливе також і ***узагальнене правило суми***:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$$
$$= n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m).$$

Наприклад, в магазині, для вибору однієї ручки з трьох масляних, десяти чорнильних і п'яти шарикових, потрібно зробити один з 18 (3 + 10 + 5 = 18) можливих виборів.

В попередній задачі фігурують три множини, які попарно не перетинаються. Якщо ж множини перетинаються, тобто містять спільні елементи, то щоб два рази ці спільні елементи не враховувати, потрібно при застосуванні правила суми їх один раз відняти.

Отже *формули правила суми* набудуть такого вигляду:

а) для двох множин:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

б) для трьох множин:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + \\ + n(A \cap B \cap C).$$

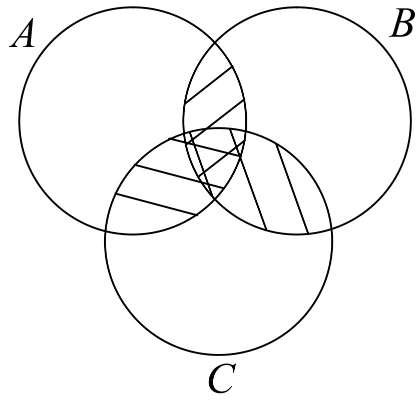


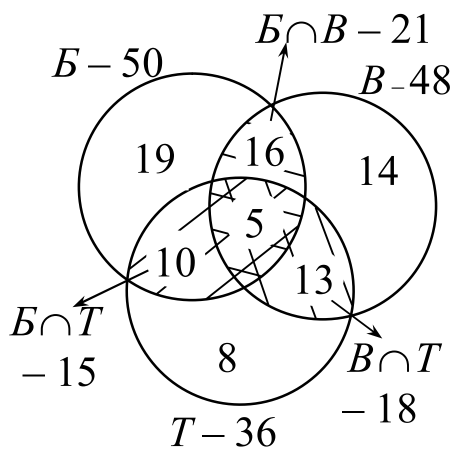
Рис. 7

Виведення цієї формули очевидне з кругів Ейлера-Венна (рис.7).

Подібно буде і для m множин.

Наприклад, задача: на першому курсі педагогічного факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються баскетболом, 48 – волейболом, 36 – тенісом, баскетболом і волейболом – 21, баскетболом і тенісом – 15, волейболом і тенісом – 18. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?

Розв'язання. 1-й спосіб (аналітичний). Позначимо через $Б$ – множину студентів, які займаються баскетболом, $В$ – волейболом і $Т$ – тенісом. Так, як є студенти, які займаються двома і трьома видами спорту, то ці три множини за умовою попарно перетинаються. За правилом суми визначимо, скільки студентів займаються хоча б одним з цих трьох видів спорту:



$$n(Б \cup В \cup Т) = n(Б) + n(В) + n(Т) - \\ - n(Б \cap В) - n(Б \cap Т) - n(В \cap Т) + \\ + n(Б \cap В \cap Т) =$$

$$= 50 + 48 + 36 - 15 - 18 - 21 + 5 = 85 \text{ (студентів).}$$

Тоді іншими видами спорту займаються: $95 - 85 = 10$ (студентів).

2-й спосіб. Розв'язок задачі очевидний з допомогою діаграм Ейлера поданих на рисунку ($19 + 16 + 14 + 10 + 5 + 13 + 8 = 85$).

2. *Правило **добутку***: число елементів декартового добутку скінчених множин дорівнює добутку чисел елементів у кожній з даних множин. Іншими словами: якщо елемент a_1 можна вибрати n_1 способами, а після його вибору елемент a_2 можна вибрати n_2 способами і т. д., а елемент a_n після вибору всіх попередніх – n_k способами, то тоді кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можна вибрати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Наприклад всіх чотирицифрових чисел у десятковій системі числення є 9000 ($9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$; в числі на першому місці нуль не може бути, тому перша цифра вибирається з множини з дев'яти елементів).

3. Нехай множина M містить m елементів. ***Розміщенням*** з m елементів по n ***без повторення*** елементів називається будь-який кортеж довжини n, елементи якого відрізняються між собою, складений з m елементів множини M.

У розміщеннях, які вводяться за цим означенням, немає однакових елементів.

Приклади

1. Розміщень з двох елементів a і b по два може бути тільки два: (a, b), (b, a). Вони відрізняються лише порядком.

2. Розміщень з трьох елементів a, b, c по два є шість: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).

Розміщення (a, b) і (a, c) відрізняються елементами, а розміщення (a, c) і (c, a) – порядком.

Кількість розміщень з m елементів по n позначають через A_m^n. З означення випливає, що $m \geq n$.

Формула числа розміщень з m елементів по n випливає з правила добутку і дорівнює:

$$A_m^n = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1)),$$

де m – це кількість елементів множини M, $m-1$ – кількість елементів множини M без одного елемента, $m-2$ – без двох, $m-(n-1)$ – кількість елементів множини M без $(n-1)$-ого елемента.

Тобто, число розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше серед яких m.

Формулу числа розміщень з m елементів по n можна переписати і так:

$$A_m^n = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Приклади

1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 8, 9, щоб жодна з них у цих числах не повторювалась?

Розв'язання. Чисел буде стільки, скільки можна скласти розміщень з шести елементів 4, 2, 5, 7, 3, 9 по три, бо кожне таке розміщення дає тризначне число, тобто

$A_6^3 = 6\cdot(6-1)\cdot(6-(3-1)) = 6\cdot5\cdot4 = 120$(чисел) – за формулою.

Або за правилом добутку $A_6^3 = 6\cdot5\cdot4 = 120$(чисел).

2. Скільки непарних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 4, 8, 9, якщо кожну цифру у кожному числі можна використовувати тільки один раз?

Розв'язання. Усього двоцифрових чисел у даному випадку можна утворити $A_4^2 = 4\cdot(4-(2-1)) = 4\cdot3 = 12$.

Кількість чисел, яка закінчуватиметься цифрами 2, 4, 8, 9, однакова і дорівнює 12 : 4 = 3. Отже, цифрою 9 (єдиною непарною цифрою серед даної множини) закінчується три числа, які й є шуканими непарними числами. Їх можна і перерахувати: 29, 49, 89.

Можна міркувати і так. Якщо відкинути цифру 9 в усіх здобутих непарних двоцифрових числах, то одноцифрових чисел буде стільки, скільки можна їх записати з цифр 2, 4, 8, тобто 3.

4. Оскільки розміщенням є впорядкована сукупність об'єктів (кортеж), то в них можуть бути й повторення однакових елементів. Таким є, наприклад, кортежі цифр у зображеннях чисел, кортежі нот у зображеннях музикальних фраз і т. д. Таким чином дістаємо розміщення з повторенням.

Розміщенням з повторенням з m елементів по n, $m, n \in \mathrm{N}$, називається будь-який кортеж довжини n, який складається з елементів множини $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ і в якому хоча б один елемент повторюється.

Розміщення з повтореннями і без повторень тісно пов'язані з поняттям декартового (прямого) добутку множин. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Нехай $M = \{a, b\}$. Знайдемо прямий квадрат M^2 та прямий куб M^3 цієї множини. Дістанемо:

$M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$;

$M^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$.

Як бачимо, всі можливі розміщення з повтореннями з двох елементів множини M по два дістаємо з M^2, а всі можливі розміщення з цих самих елементів по три – з M^3. Розміщення без повторень дістаємо з M^2 вилученням усіх розміщень з повтореннями. Розміщень з повторенням з даної двоелементної множини M можемо робити скільки завгодно і якої завгодно довжини, треба тільки взяти відповідну кількість прямих (декартових) множників.

Можна показати, що все, сказане вище для множини $M = \{a, b\}$ стосується й будь-якої скінченної множини.

Позначивши через $\overline{A}_m^n$ число всіх різноманітних розміщень з повтореннями елементів множини $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ по n, дістанемо

$$\overline{A}_m^n = m^n,$$

де m – кількість елементів множини M.

Дана формула є наслідком того, що вибір на кожне місце кортежа довжиною n проводиться з усіх m елементів множини M.

Приклад.

1. Скільки чотирицифрових чисел можна записати з цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в записі числа можуть повторюватися?

Розв'язання. Всього дано шість цифр. Очевидно, що шукане число дорівнює числу всіх розміщень з повтореннями елементів із множини з шести елементів по чотири, тобто $6^4 = 1296$.

5. Будь-який кортеж довжини m над множиною $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$, в якого всі компоненти різні, називають ***перестановкою*** (***перестановкою без повторень***) елементів множини M.

Такий чином, перестановка елементів множини M – це розміщення з m елементів по m цієї ж множини.

Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m.

Згідно з означенням,

$$P_m = A_m^m = (m-1)(m-2)\ \ldots\ 2 \cdot 1 = m!$$

Тобто, число перестановок без повторень з m елементів дорівнює добутку від m до 1 послідовних натуральних чисел, тобто $m!$.

Приклади

1. Скількома способами можна розсадити 19 студентів по 19-и місцям?

Розв'язання.

$$P_{19} = 19! = 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 121645100408832000 \text{ (способами).}$$

2. Серед усіх перестановок цифр числа 531289 скільки є таких, які починаються числом 39?

Розв'язання. Оскільки дві цифри 3 і 9 забираються, то переставляти будемо всього чотири цифри. Отже чисел, які задовольняють умову задачі, є:

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

3. Скільки десятицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається тільки один раз?

Розв'язання. Кортежів довжиною десять з даних десяти цифр буде: $P_{10} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 3628800$. З однаковою першою компонентою буде: 3628800:10 = 362880. Так, як на першому місці в числі стояти нуль не може, то віднімемо від знайденого числа всіх кортежів довжиною десять, число кортежів з однаковою першою компонентою (тобто нулем) і отримаємо шукану кількість:

$$3628800 - 362880 = 3265920 \text{ (чисел)}.$$

6. Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Будь-який кортеж довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ над множиною M, в якому елемент a_1 повторюється k_1 разів, елемент a_2 – k_2 разів і т. д., елемент a_m – k_m разів, називається ***перестановкою з повтореннями***.

Число всіх перестановок з повтореннями позначають символом – $P_{k_1,k_2,...,k_m}$, в яких елемент a_1 повторюється k_1 разів, a_2 – k_2 разів і т.д., a_m – k_m разів.

Число $P_{k_1,k_2,...,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ з повтореннями з елементів $a_1, a_2, ..., a_m$, які повторюються відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$ разів дорівнює:

$$P_{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ... \cdot k_m!}.$$

Доведення.

Відомо, що кількість всіх перестановок з l елементів дорівнює $l!$. Якщо серед цих l елементів є k_1 однакових, то їх перестановка між собою не змінить кортежа довжини l. Отже це слід врахувати і поділити на кількість перестановок між собою k_1 однакових елементів, тобто на $k_1!$. Якщо серед цих l елементів є ще й k_2 однакових інших елементів, то слід поділити ще й на $k_2!$. І т.д. Тобто отримаємо формулу числа $P_{k_1,k_2,...,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ з повтореннями з елементів $a_1, a_2, ..., a_m$, які повторюються відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$ разів:

$$P_{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ... \cdot k_m!}.$$

Приклад.

Скільки шестицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, якщо цифра 7 повторюється в кожному числі два рази, цифра 6 – три рази, а цифра 9 – один раз?

Розв'язання. Числа, які можна записати таким чином, є кортежі довжини 6 складені з елементів даної множини чисел {7, 8, 9} з відповідною, з умови, кількістю повторень рівною: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$. Тобто, це є перестановки з повторенням і їх кількість рівна:

$$P_{2,3,1} = \frac{(2+3+1)!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{6!}{2\cdot 6} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60 (\text{чисел}).$$

7. Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – довільна не порожня множина. Будь-яка підмножина $A \in M$, яка містить n елементів, називається ***комбінацією*** (***вибіркою***, ***сполученням***) з m елементів по n.

З цього означення випливає, що комбінація – це множина, і що дві різні комбінації з m елементів по n відрізняються принаймні одним елементом.

Число всіх комбінацій з m елементів по n дорівнює числу всіх розміщень з m елементів по n, розділеному на число всіх перестановок з n елементів, тобто:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{\dfrac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \frac{p_m}{P_n P_{m-n}}.$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}.$$

Основні властивості числа C_m^n.

1°. $C_m^0 = 1$, $C_0^0 = 1$, $C_m^m = 1$.

Ці властивості слідують з означення.

2°. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Доведення:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{n+m-m} P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_{m-(m-n)}} = C_m^{m-n}.$$

3°. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Доведення:

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} + \frac{P_m}{P_{n+1} P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n \left(P_{m-(n+1)}(m-n)\right)} +$$

$$+ \frac{P_m}{(n+1) P_n P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}} \left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}} \frac{(n+1)+(m-n)}{(m-n)(n+1)} = \frac{P_m (1+m)}{P_n (n+1) P_{m-(n+1)} (m-n)} =$$

$$= \frac{P_{m+1}}{P_{n+1} P_{m-n}} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Приклади.

1. Для подорожі на річку, 60 дітей вишикували одних за другими по три дитини в одному ряді. Скількома способами вожатий може вибрати три дитини в перший ряд, а скількома в останній?

Розв'язання.

Відповідь на перше і друге питання є тією самою, бо це звичайна вибірка трьох дітей із усіх 60, тобто:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{3! \cdot (60-3)!} = \frac{60!}{3! \cdot 57!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2} = 34220 \text{(способами)}.$$

2. Для участі в змаганнях, з групи в дев'ятнадцять чоловік потрібно вибрати чотири команди, в складі 8, 7, 1 і 2 чоловіки у кожній, причому, кожний чоловік може брати участь в змаганнях лише один раз і в одній команді. Скількома різними способами можна вибрати чотири команди?

Розв'язання. З дев'ятнадцять чоловік можна вибрати $C_{19}^8 = \frac{19!}{8! \cdot 11!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 75582$ способами першу команду в складі восьми чоловік. Після того, як вибрано першу команду, можна $C_{11}^7 = \dfrac{11!}{7!\cdot 4!} = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2} = 330$ способами вибрати другу команду в складі семи чоловік з одинадцяти чоловік. Після цього одного з чотирьох можна вибрати $C_4^1 = 4$ способами. І нарешті, останню команду в складі двох чоловік можна вибрати $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3$ способами.

Три команди можна вибрати:

$C_{19}^8 \cdot C_{11}^7 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 75582\cdot 330\cdot 4\cdot 3 = 299304720$ способами.

8. Співвідношення $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$, можна переписати інакше і отримати співвідношення $C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n = C_m^n$, з якого, маючи C_{m-1}^{n-1} і C_{m-1}^n можна обчислити C_m^n. На основі цього, використовуючи лише операцію додавання відповідних чисел, побудовано схему, яку називають ***трикутником Паскаля***.

Схему будують так. У першому рядку записують 1. У другому рядку записують дві одиниці: одну – зліва, а другу – справа від одиниці, записаної в першому рядку. У третьому рядку знову записують дві одиниці: одну – зліва від лівої другого рядка, а другу – справа від правої одиниці другого рядка. Крім того, між цими одиницями записують число 2, яке є сумою двох одиниць

$$
\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & & m=0 \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & m=1 \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & & m=2 \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & & m=3 \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & & m=4 \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & m=5 \\
C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6 & m=6
\end{array}
$$

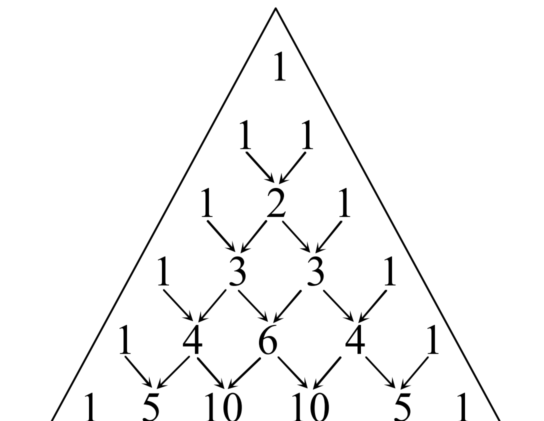


Рис. 8

попереднього рядка.

У четвертому рядку записують суму першого і другого, другого і третього числа третього рядка, причому суми розміщують між доданками; зліва й справа знову пишуть одиниці і так продовжують далі. Процес утворення трикутника Паскаля показано на рис. 8. Якщо до якогось числа напрямлено дві стрілки, то це означає, що дане число є сумою тих чисел, звідки виходять стрілки. Дальше трикутник можна продовжувати зазначеним вище способом. Наприклад, нехай треба знайти числа $C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$. Для цього вибираємо горизонтальну лінію з $m = 6$ і дістаємо послідовно зліва направо всі числа, записані в цьому рядку: $C_6^0 = 1\ C_6^1 = 6, C_6^2 = 15, C_6^3 = 20, C_6^4 = 15, C_6^5 = 6, C_6^6 = 1.$

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: правила суми і добутку, формули і смисл різних видів комбінаторних з'єднань без повторень та з повтореннями;

у м і т и: встановлювати вид комбінаторної задачі і використовувати формули для підрахунку числа розміщень і перестановок без повторення і з повтореннями та комбінацій, виводити властивості комбінацій, користуватися трикутником Паскаля.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Скількома способами можна вибрати голосний звук із слова "математика"?

2. Скількома способами студент може вибрати два факультативних курси з шести можливих?

3. Скількома способами можуть бути виставлені оцінки вісьмом студентам, які здали екзамени, якщо відомо, що лише два з них отримали п'ятірки, і лише два з них отримали незадовільні оцінки?

4. Скількома способами можна утворити з групи в 12 чоловіків і 8 жінок комісію, в яку входили б три чоловіки і дві жінки?

5. Скількома способами можна утворити групу з трьох солдатів і одного офіцера, якщо є двадцять солдатів і п'ять офіцерів?

6. Скількома способами можна скласти список студентів групи, в якій налічується 25 студентів?

7. Скількома способами можна скласти наряд з одного сержанта і 3 солдат, якщо у військовому підрозділі всього 7 сержантів і 80 солдат?

8. Скількома способами можна скласти команду з восьми учасників шахового гуртка I курсу, шести учасників II курсу і десяти учасників III курсу так, щоб у неї з I курсу входило три студенти, а з II і III курсів – по два студенти?

9. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи, якщо які-небудь два студенти відмовляються поселитися разом?

10. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи?

11. Скількома способами можна розсадити 19 студентів на 80 місць?

12. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний учитель викладатиме у двох класах?

13. Скількома способами можна розподілити премії по чотири книжки для преміювання трьох учнів, якщо купили 12 різних книжок?

14. Скількома способами можна з групи з 20 студентів треба вибрати трьох делегатів на конференцію?

15. Скількома способами можна доїхати з пункту C в пункт L, якщо з пункту C до пункту L проходять дві автодороги через пункт A і три автодороги – через пункт B, причому пункти A і B не зв'язані автодорогами?

16. Скількома способами можна вишикувати 9 чоловік в один ряд?

17. Скількома способами можна вибрати п'ять осіб на п'ять посад з восьми кандидатів на ці посади?

18. Скількома способами можна вибрати один предмет: або ручку, або олівець, якщо є 7 ручок і 5 олівців?

19. Скількома способами можна вибрати на підсумкову наукову студентську конференцію по одній доповіді з кожного гуртка, якщо всього на математичному гуртку інституту підготовили чотири доповіді, на природознавчому – три доповіді, на психологічному – дві і літературному – п'ять?

20. Скількома способами можна вибрати з 19 чоловік старосту, замісника старости і профорга?

21. Скількома способами може бути утворена бригада в складі 3 чоловік для виїздних комісій, щоб до неї входив хоча б один лікар, якщо всього є 2 лікарі та 7 медсестер?

22. Скількома способами із восьми роз і шести жоржин можна скласти букет так, щоб у ньому було дві рози і три жоржини?

23. Скількома способами з восьми різних квіток можна скласти букет так, щоб він містив непарну їх кількість і не менше трьох?

24. Скількома способами групу студентів з 26 чоловік можна розбити на дві підгрупи так, щоб в одній з них було 10 студентів, а в другій – 16?

25. Скільки трицифрових чисел, кратних 5, можна зобразити цифрами 0, 3, 5, 7, 9?

26. Скільки трицифрових чисел можна написати за допомогою цифр: 0, 2, 9, 4, 7, так, щоб в числі жодна з цифр не повторювалася?

27. Скільки тризначних чисел можна утворити з множини цифр $\{2, 4, 5, 6, 8\}$? Скільки двозначних? чотиризначних?

28. Скільки різних п'ятицифрових натуральних чисел можна утворити з множини цифр $\{1, 3, 4, 7\}$?

29. Скільки різних площин можна провести через n точок у просторі, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

30. Скільки різних восьмизначних чисел можна утворити з цифр 2, 3 при умові, що цифра 2 повторюється п'ять разів, а цифра 3 – три рази?

31. Скільки потрібно різних предметів, щоб можна було утворити 110 розміщень по два предмети в кожному?

32. Скільки перестановок цифр числа 7342 починаються цифрою 7?

33. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр: 4, 2, 5, 6, 8, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз у кожному числі?

34. Скільки можна утворити трицифрових чисел у десятковій системі числення так, щоб вони складалися з різних цифр?

35. Скільки існує ін'єктивних відображень триелементної множини в чотириелементну?

36. Скільки всього існує відображень триелементної множини в чотириелементну?

Поняття. Висловлення. Алгебра висловлень

1. Поняття.
2. Висловлення.
3. Логічні операції над висловленнями.
4. Формули. Таблиці істинності.
5. Рівносильні формули.
6. Тотожно істинні формули (логічні закони).
7. Логічне слідування.

1. ***Поняття*** – форма наукового пізнання, що відбиває істотне у виучуваних об'єктах і закріплюється спеціальними термінами. Математичні поняття часто позначають не тільки термінами (назва), а й символами – знаками.

Суть математичних понять, як і будь-яких інших понять, розкривається за допомогою означень, у яких вказуються необхідні і достатні ознаки, що дають змогу відрізнити дане поняття чи об'єкти, які в ньому відображуються, від інших понять чи об'єктів.

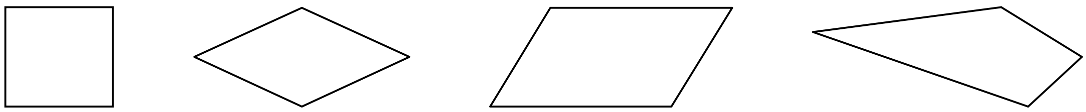
Проте не для кожного поняття можна вказати такі ознаки. Справді, які ознаки має, наприклад, точка? Вона не має вимірів... А пряма? Вона має тільки довжину, але не має ширини. Однак ці ознаки має і будь-яка інша лінія. Суть таких понять розкривається в пропедевтичному курсі математики описово, а пізніше, в систематичному курсі математики, відношення цих понять з іншими можуть розкриватися за допомогою системи аксіом.

В математиці до початкових, тобто неозначуваних понять належать поняття «точка», «пряма», «площина», «величина», «одиниця», «множина», «передує» і деякі інші. Решта понять означаються.

Такий поділ понять на означувані і неозначувані є до деякої міри умовним: так, наприклад, поняття «лежить між» можна прийняти за початкове, як це було у шкільних підручниках з геометрії, а можна дати йому означення, як у підручнику з геометрії для 6 класу: «Точка C лежить між точками A і B, якщо ці три точки різні і $AC + BC = AB$». При виборі, які саме поняття в тій чи іншій науці прийняти за початкові, неозначувані, виходять з того, щоб їх кількість була найменшою, а самі поняття – найпростішими для інтуїтивного сприймання. Поняття «множина» задовольняє таким вимогам: воно досить просте для розуміння, доступне кожному учню. З конкретними множинами (цукерок, кубиків, іграшок) діти постійно оперують ще в дошкільному віці. Тобто, формування математичних понять в учнів тісно пов'язане з теорією множин, оскільки задана певною умовою множина є обсягом деякого поняття.

Кожному поняттю характерний його *зміст* і *обсяг*. ***Зміст*** – фіксована сукупність істотних ознак. ***Обсяг*** – сукупність обєктів, які належать цьому поняттю, тобто яким властиві фіксовані істотні ознаки. Так, у зміст поняття «натуральне число» входять ознаки: 1) бути цілим числом, 2) бути більшим нуля. Обсягом цього поняття є сукупність усіх натуральних чисел, тобто чисел, які використовуються при лічбі: 1, 2, 3, 4, 5, ... Лише при розбитті певних речей або ж явищ за певними ознаками чи критеріями – формується обсяг поняття.

Розглянемо чотири різні поняття «квадрат», «ромб», «паралелограм» і «чотирикутник».



Як відомо квадрат – це чотирикутник у якого всі сторони і кути рівні. Зменшимо зміст цього поняття, невимагаючи рівності кутів, отримаємо поняття ромба, обсяг якого є більшим, бо квадрат також є ромбом. Подібним чином зменшуючи зміст поняття ромб, приходимо до понять паралелограма, чотирикутника, обсяги яких є більшими. Тобто зміст і обсяг поняття відносяться обернено і характеризується *законом* ***оберненої*** (*але не обернено-пропорційної, як інколи пишуть*) *залежності*: чим ширше обсяг поняття, тим вужче його зміст. Так, обсяг поняття «чотирикутник» ширший обсягу поняття «паралелограм», останній ширше обсягу поняття «прямокутник», а характеристичних ознак найменше у чотирикутника (многокутник: має чотири сторони), більше у паралелограма (ті ж та ще: протилежні сторони попарно паралельні) і ще більше у прямокутника (ті ж, що в паралелограма, та ще: кути прямі або діагоналі рівні).

Правильне означення поняття повинне містити мінімальне число ознак, тобто лише необхідні і достатні ознаки, які б виділяли його з іншого поняття, ширшого за обсягом. Ніяких зайвих ознак, які можна довести на основі інших, в означенні не повинно бути.

Найбільш поширеним видом означення є означення через найближчий рід і видову ознаку Так, поняття «прямокутник» можна означити і через поняття «чотирикутник», але тоді довелося б вказувати більше ознак, бо чотирикутник не є найближчим родовим поняттям по відношенню до поняття «прямокутник». Найбільш доцільним буде таке означення: «Прямокутником називається паралелограм, у якого є прямий кут» (досить вказати на один прямий кут, бо тоді можна довести, що всі його кути прямі). Квадрат вводиться як прямокутник (рід), у якого всі сторони рівні (видова ознака), або ж як ромб (рід), у якого є прямий кут (видова ознака).

Суть будь-якої класифікації зводиться до того, що елементи однієї множини за певними ознаками розбивають на дві або кілька множин так, щоб кожен елемент входив в одну і тільки в одну з підмножин.

Приклади.

1. Множину натуральних чисел N в залежності від кількості дільників можна розбити на три підмножини:

1) прості числа – мають тільки два дільники – само себе і 1;

2) складені числа – мають більше двох дільників;

3) одноелементна множина – $\{1\}$, одиниця має лише один дільник – 1. Ці три підмножини попарно не перетинаються, тобто їхній переріз є порожня множина, а їхнє об'єднання – вся множина натуральних чисел.

2. Множину цілих чисел можна розбити на три підмножини:

1) додатні цілі або натуральні числа $N \subset Z$;

2) від'ємні цілі числа $Z^{-} \subset Z$;

3) число нуль (не є ні додатним, ні від'ємним) $\{0\} \subset Z$.

Ці три підмножини попарно не перетинаються.

3. Множину трикутників можна розбити на дві підмножини:

1) рівнобедрені трикутники (мають принаймні дві рівні сторони);

2) різносторонні трикутники.

Множина рівнобедрених трикутників також ділиться на дві підмножини: 1) рівносторонні і 2) рівнобедрені, але не рівносторонні.

Щоб не допускати при класифікації помилок, слід пам'ятати дві умови: переріз підмножин повинен бути порожнім, а об'єднання їх повинно утворювати саму цю множину (жоден елемент не залишається не охопленим однією з підмножин).

4. Чому не можна ділити функції на парні й непарні, як це часто роблять учні за аналогією з поділом натуральних чисел?

Відповідь. Тому, що крім парних і непарних функцій є ще функції, які не належать ні до парних, ні до непарних.

Загальна схема означення «через найближчий рід і видові відмінності» на мові множин може бути такою: $B = \{x \mid x \in A \text{ і } P(x)\}$ – клас B складається з об'єктів x, які належать A (найближчому роду) і мають властивість P (видова відміна) або на мові властивостей: $x \in B \Leftrightarrow x \in A$ і $P(x)$, або $B(x) \Leftrightarrow A(x)$ і $P(x)$.

Таке означення є явним означенням, в якому чітко виділено поняття, яке означається, і поняття, за допомогою яких означається. Процес формально логічного означення є процесом зведення одного поняття до другого з більш широким обсягом, другого – до третього з ще більш широким обсягом і т. д. Цей процес не може бути нескінченним. Врешті прийдемо до деякого первинного, неозначуваного поняття. Наведемо приклад такої послідовності означень.

1. Квадрат – ромб з прямим кутом.

2. Ромб – паралелограм з рівними суміжними сторонами.

3. Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

4. Чотирикутник – многокутник з чотирма сторонами.

5. Многокутник – фігура, обмежена замкнутою ламаною лінією.

6. Ламана лінія – лінія, утворена відрізками прямих, причому кінець першого відрізка є початком другого і т. д. Якщо початок першого і кінець останнього збігаються, ламана лінія називається замкнутою.

7. Відрізок – частина прямої, обмежена з обох боків точками.

8. Фігура – множина точок.

Як бачимо, в результаті зведення одного поняття до іншого дійшли до неозначуваних понять – множина, точка, пряма.

Наведемо приклад означення, яке не можна віднести до означення через найближчий рід і видові ознаки: “Пряма називається перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини”.

Означення повинно бути чітким і не містити зайвих ознак, які можуть бути доведені.

Наприклад, означення «Паралелограмом називається чотирикутник, у якого сторони паралельні», неправильне, в ньому пропущено слово «попарно», внаслідок чого виходить, ніби всі чотири сторони між собою паралельні. Такий чотирикутник взагалі не може існувати. Означення «Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні і рівні між собою», містить зайву ознаку – рівність протилежних сторін, яку можна довести на основі паралельності протилежних пар сторін.

Досить поширеною помилкою в означеннях математичних понять є означення через «родове поняття», яке для даного поняття не є ні родом, ні видом. Наприклад, у колишньому підручнику з геометрії А. П. Кисельова промінь означається як «пряма, обмежена з однієї сторони». Але промінь не є видом прямої, обсяги цих понять не перетинаються. Промінь не має усіх властивостей прямої. Так, пряма ділить площину на дві півплощини, промінь цієї властивості не має. Промінь – це частина прямої, обмежена з одного боку, а відрізок – частина прямої, обмежена з двох боків. Однак учні, а інколи і вчителі початкових класів часто вважають, що «пряма – це нескінченний відрізок» або «відрізок – це пряма, обмежена з двох боків».

5. Чи правильне означення двогранного кута: «Двогранним кутом називається кут, утворений двома півплощинами, що виходять з однієї прямої»?

Відповідь. Таке означення неправильне, хоч його часто можна почути в школі не тільки від учнів, а й від учителів математики. Двогранний кут не є видом кута. «Двогранний кут – це фігура, утворена двома півплощинами, що виходять з однієї прямої». Відношення між поняттями «кут» і «двогранний кут» можна зобразити кругами Ейлера, які не мають спільних точок.

Математичний вираз – це число або два чи декілька чисел, з'єднаних між собою знаками дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування) та дужками, які вказують на порядок дій, якщо це треба. Результат, який дістаємо після виконання зазначених дій, називається *числовим значенням виразу* або просто значенням виразу. Два математичні вирази, з'єднані знаком “ = ”, “ > ”, “ < ”, “≥”, “≤”, називаються відповідно рівністю чи нерівністю.

Рівності та нерівності можуть бути *правильними* (істинними) і *неправильними* (хибними).

Приклад.

Рівність 2+2 = 4 – істинна, а рівність 2+2 = 5 – хибна, 2+2 < 5 – правильна нерівність.

2. Люди, висловлюючись, передають свої судження й умовиводи, тобто фіксують їх за допомогою речень. Висловлення – основний об'єкт вивчення математичної логіки. ***Висловленнями*** називають такі речення відносно яких можна поставити запитання: істинні вони чи хибні? Ці речення обов'язково є розповідні чи стверджувальні. Тобто ***висловленням*** *називається твердження, про яке можна сказати або дізнатися,* ***істинне*** (*правильне*) *воно чи* ***хибне*** (*неправильне*).

Ще прикладами висловлень є такі: 1). Якщо кожний з доданків ділиться на 3, то їхня сума також ділиться на 3. 2). Число (–5) менше числа (–8). 3). Число 2 – просте число. 4). Чайковський – англійський композитор. 5). Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за його сторону.

Наші знання дають підставу твердити, що висловлення 1, 3 і 5 – правильні, або істинні, а висловлення 2 і 4 – хибні. Терміни «висловлення», «істинне висловлення», «хибне висловлення» належать до неозначуваних понять, їх розуміння дається нам досвідом, суспільною практикою.

Наступні два речення: 6). «Піди купи хліба». 7). «Скільки днів до нового року?» не є висловленнями, бо відносно них немає сенсу ставити запитання, істинні вони чи хибні, вони не мають значень істинності.

Подібно тому як в геометрії розглядають лише форму фігури не беручи до уваги з чого вона зроблена, в математичній логіці абстрагуються від конкретного змісту висловлення, вивчаючи його тільки з точки зору того, істинне вони чи хибне.

З наведених вище висловлень 2) – 5) не можна виділити більш коротші. Такі висловлення називають ***елементарними*** або *атомарними*, *неподільними*.

Висловлення 1) не елементарне, з нього можна виділити два самостійних висловлення: «кожний з доданків ділиться на 3» і «їхня сума також ділиться на «3». Висловлення 1) утворено з цих двох висловлень за допомогою словосполучення «якщо ..., то ...».

Якщо якесь конкретне висловлення, наприклад, «Івась – учень сьомого класу», треба позначити буквою, то пишуть *A*: «Івась – учень сьомого класу». При цьому говорять, що *A* – це ім'я висловлення «Івась – учень сьомого класу». Якщо висловлення А істинне, то записують $A = 1$ (або і); якщо *A* – хибне, то $A = 0$ (або х). Зазначимо, що тут 1 і 0 – не числа, а просто символи для позначення істинності або хибності.

Твердження $x + 3 = 5$ не є висловленням, бо при одних значеннях *x* воно істинне (при $x = 2$), при інших – хибне. Такі твердження називають *висловлювальними формами або предикатами* про які йтиме мова пізніше.

Прості висловлення позначають великими (іноді маленькими) буквами латинського алфавіту.

З простих висловлень за допомогою сполучників «і», «або», «якщо..., то...» можна утворити ***складені*** висловлення.

3. При утворенні складених висловлень (це особливо стосується математичних текстів) найчастіше вживають сполучники «і», «або» (у виключаючому і не виключаючому розумінні), «якщо ..., то ...», «тоді і тільки тоді, якщо ...» і частку «не».

Візьмемо, наприклад, такі висловлення: *A*: «Запис натурального числа *m* закінчується нулем», *B*: «Натуральне число *m* ділиться на 5» (*m* – назва якогось конкретного числа). За допомогою сполучників можна дістати чимало інших висловлень, істинних і хибних. Наприклад, «Якщо запис натурального числа *m* закінчується нулем, то натуральне число *m* ділиться на 5», «Натуральне число *m* закінчується нулем і натуральне число *m* не ділиться на 5» і т. д.

Наша природна мова, з арсеналу якої математична логіка бере висловлення, створювалася тисячоліттями стихійно як засіб спілкування і не організована так строго і точно, як, наприклад, математична мова, вона певною мірою відображає складність усього процесу мислення. Тому неможливо повністю математизувати різноманітну практику оперування з висловленнями, оскільки така математизація має досить наближений характер. Можна сказати так: всього математизувати не можна, але те, що математизовано, не повинно суперечити повсякденній звичній практиці оперування з висловленнями.

Розглянемо ***логічні операції***, які дають змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складні висловлення. Оскільки нас цікавить тільки значення істинності висловлень, то означення логічних операцій дає метод встановлення значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин (компонентів).

Заперечення. Цю операцію позначають знаком $\overline{}$ (у літературі зустрічаються й інші позначення). У звичайній мові цій операції відповідає частка «не». Запис $\bar{A}$ читається: «не *A*», «неправильно, що *A*».

Запереченням висловлення *A* називається висловлення «не *A*», яке істинне тоді і тільки тоді, коли *A* хибне. Таблиця істинності заперечення висловлення має вигляд:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Нехай, наприклад *A*: «5 кратне 3», *B*: «7 – просте число». Очевидно, що $A = 0$, $B = 1$. Тоді $\overline{A}$: «Неправильно, що 5 кратне 3» (або $\overline{A}$ «5 не кратне 3) і $\overline{A} = 1$. Аналогічно $\overline{B}$: «Неправильно, що 7 – просте число» (або $\overline{B}$ «7 не просте число») і $\overline{B} = 0$.

Операція заперечення майже адекватно передає смисл застосування частки «не» в практиці розмовної та письмової мови.

Диз'юнкція. Ця операція позначається знаком $\vee$. У звичайній мові їй відповідає сполучник «або» в невиключаючому розумінні. Запис $A \vee B$ читається як «*A* диз'юнкція *B*», або як «*A* або *B*».

Диз'юнкцією двох висловлень *A*, *B* називається таке висловлення $A \vee B$ («*A* або *B*»), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні. Таблиця істинності диз'юнкції двох висловлень має вигляд

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Очевидно також, що, маючи складене висловлення, утворене за допомогою операції диз'юнкції, можна виділити в ньому елементарні частини (компоненти). Висловлення «Я сьогодні піду в театр або дочитаю цікаву книжку» містить елементарні компоненти A: «Я сьогодні піду в театр», B: «Я сьогодні дочитаю цікаву книжку» і може бути символічно записане у вигляді $A \vee B$.

Операцію диз'юнкції іноді називають ***логічним додаванням***.

Множиною істинності диз'юнкції «$\vee$» висловлень є об'єднання «$\cup$» множин істинності даних висловлень. Знак диз'юнкції «$\vee$» схожий із знаком об'єднання множин «$\cup$».

Кон'юнкція. Цю операцію позначають здебільшого знаком $\wedge$ (є й інші позначення цієї операції, наприклад &). У звичайній мові їй відповідає сполучник «і». Запис $A \wedge B$ читається як «A кон'юнкція B» або як «A і B».

Кон'юнкцією двох висловлень A і B називається висловлення $A \wedge B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A і B істинні. Таблиця істинності кон'юнкції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Операцію кон'юнкції іноді називають ***логічним добутком***.

Множиною істинності кон'юнкції «$\wedge$» висловлень є переріз множин істинності даних висловлень «$\cap$». Знак кон'юнкції «$\wedge$» схожий із знаком перерізу множин «$\cap$».

Імплікація. Важливу роль у логіці і особливо в математиці відіграє операція імплікації, яку позначають знаком $\Rightarrow$ або $\rightarrow$, $\supset$. Запис $A \Rightarrow B$ читається: “A імплікує B”. Часто для читання цієї операції застосовують словосполучення: “Якщо A, то B”, “з A слідує B”, “B є наслідком з A”. Висловлення A називають ***умовою*** (*антицедентом*) імплікації $A \Rightarrow B$, а висловлення B – ***наслідком*** (*консеквентом*).

Імплікацією двох висловлень A і B називають висловлення $A \Rightarrow B$ ("Якщо A, то B"), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а B – хибне. Таблиця істинності імплікації двох висловлень має вигляд:

A	B	A ⇒ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операція $\Rightarrow$ тільки частково відображає смисл сполучника «якщо ..., то ...», У звичайній розмовній мові цей сполучник застосовують у різноманітних значеннях. Так, щоб виразити причинну залежність ("Якщо тіло вільно падає, то воно набуває прискорення 9, 81 м/сек^2"), щоб виразити мету й засоби ("Якщо хочеш успішно здати екзамен з математики, то треба сумлінно вчити все що скаже викладач") тощо. У звичайному розумінні висловлення "якщо A, то B" передбачає смисловий зв'язок між висловленнями A і B. Проте в математичній логіці зміст висловлення не беруть до уваги, ним нехтують, а оцінюють висловлення лише двома значеннями: "істина" і "хибність", а засобами цих оцінок неможливо відобразити всю різноманітність смислових зв'язків, які можуть існувати між поняттями.

Наприклад.

1. A: «Сьогодні добра погода» = 1, B: «Сьогодні біля моря багато відпочиваючих» = 1. Тоді складене висловлення $A \Rightarrow B$: «Якщо сьогодні добра погода, то біля моря багато відпочиваючих» – істинне.

2. A: «Число 36 : 24», B: «Число 36 : 6», імплікація $A \Rightarrow B$ – істинна, бо $A = 0$, значення істинності висловлення B тут ролі не відіграє, тоді як імплікація $B \Rightarrow A$ – хибна, бо $B = 1$, $A = 0$.

3. Складене висловлення «Якщо я стомлений, то я не можу працювати» можна подати у вигляді імплікації $A \Rightarrow B$, де A: «Я стомлений», B: «Я не можу працювати».

Означення операцій $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$ в цілому сприймаються як такі, що в достатній мірі узгоджуються з повсякденною практикою вживання відповідних сполучників, а означення операції імплікації на перший погляд може викликати певне непорозуміння: як це з хибності може випливати й хибність і істина? На це питання можна було б відповісти досить коротко: «так прийнято за означенням». Проте всі означення мають певну підставу. Підставою для наведеного вище означення імплікації є те, що воно добре погоджується з математичною практикою. Не зупиняючись на цьому детально розглянемо лише два приклади.

Приклади

1. Нехай A: “8 кратне 5 і 7 кратне 5”; B: “(8 + 7) кратне 5”. Очевидно, що $A = 0$, $B = 1$. З того, що обидва доданки не діляться на 5, дістали, що їхня сума ділиться на 5, тобто з хибності дістали істину і імплікація $A \Rightarrow B$ є істинна.

2. Нехай тепер A: “8 кратне 5 і 6 кратне 5” = 0, B: “(8 + 6) кратне 5” = 0. Отже з того, що кожний з доданків не ділиться на 5, дістали, що їхня сума теж не ділиться на 5, тобто з хибності дістали хибність і імплікація $A \Rightarrow B$ є істинна.

3. Нехай A: «Обидві частини рівності можна ділити на будь-яке число», B: «$4 = 4$». Покажемо, що з A виходить B. Для цього розглянемо очевидну рівність $4 \cdot 0 = 4 \cdot 0$ і скористаємось висловленням A, тобто розділимо обидві її частини на 0. Дістали висловлення B.

Аналогічно $4 \cdot 0 = 5 \cdot 0$ з висловлення A можна дістати таке, наприклад, хибне висловлення C: «$4 = 5$» і взагалі скільки завгодно істинних і хибних висловлень.

Висловлення $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ називається *імплікацією*, ***протилежною даній***, імплікація $B \Rightarrow A$ – ***оберненою даній***, а імплікація $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – ***оберненою до протилежної***.

Еквіваленція. Цю операцію позначають символом $\Leftrightarrow$. Запис $\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$ читається: «A еквівалентне B», У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення «A тоді і тільки тоді, коли B», «A необхідно й достатньо для B», «A, якщо і тільки якщо B».

Еквіваленцією двох висловлень A і B називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B мають однакові значення істинності, тобто коли вони одночасно істинні, або одночасно хибні. Таблиця істинності еквіваленції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Приклади.

1. A: «Число 3231 кратне 9», B: «Сума цифр числа 3231 кратна 9». Висловлення $A \Leftrightarrow B$: «Число 3231 кратне 9 тоді і тільки тоді, коли сума цифр числа 3231 кратна 9» – істинне, бо $A = 1$, $B = 1$.

2. Нехай AB – перпендикуляр до відрізка CD. Позначимо A: «Кожна точка перпендикулярна AB рівновіддалена від кінців CD», B: «Перпендикуляр AB проходить через середину CD». Тоді висловлення $A \Leftrightarrow B$ істинне.

3. Складене висловлення «Добуток двох чисел дорівнює, нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю» можна подати у вигляді еквіваленції $A \Leftrightarrow B$ двох висловлень»: A: «Добуток двох чисел дорівнює нулю», B: «Хоча б один із множників дорівнює нулю». Очевидно, що тут $A \Leftrightarrow B = 1$.

Зауваження. Ілюструючи на прикладах застосування логічних операцій $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, компоненти підбиралися так, щоб вони були спорідненими за змістом, як це робиться в повсякденній практиці.

І в цьому випадку складені висловлення в результаті формального застосування логічних операцій дістаємо осмисленими. Таким висловленням чисто механічно, згідно з означенням, приписувались відповідні значення істинності.

Проте поняття «споріднені за змістом висловлення» не точне і значною мірою суб'єктивне. Тому в математичній логіці однаково застосовують логічні операції до всіх висловлень, тим більше, що в ній, як уже зазначалося, всі висловлення розглядаються тільки з точки зору їхньої істинності, без урахування змісту. Це означає, що в результаті застосування логічних операцій можна, наприклад, дістати таке беззмістовне висловлення: «Якщо число 78 ділиться на 5, то Архімед – англійський математик». Надамо, згідно з означенням, цьому складеному висловленню значення «істина» і поставимося до цього спокійно, навряд чи таке висловлення в практиці систематичного міркування коли-небудь знадобиться, від нього немає ніякої шкоди, це наслідок уніфікованого підходу в математичній логіці до поняття висловлення. Те саме можна сказати й про всі висловлення з неспоріднених за змістом компонентів.

4. Аналогічно тому, як з чисел і букв (під якими також розуміють числа) за допомогою арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення складають певні вирази, перетворюють їх, спрощують, знаходять їхнє числове значення, у математичній логіці з одних висловлень за допомогою скінченого числа застосувань логічних операцій $\bar{\ }$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, утворюють нові, складніші висловлення. Найпростішими прикладами складених висловлень є, такі: $\bar{A}$, $A \vee B$, $\bar{A} \wedge B$ і т. д.

Кожне складене висловлення зображується певним логічним виразом, або, як називають у математичній логіці, – ***формулою***. При цьому треба вказати правила однозначного порядку читання таких формул, тобто ***правила однозначного порядку виконання*** *відповідних логічних операцій*, які застосовано в даній формулі.

1. Порядок виконання логічних операцій визначають дужками, які називають *технічними символами*. Спочатку виконують логічні операції (а отже, відповідно й читають висловлення) в самих внутрішніх дужках, потім у наступній за нею дужці і так далі, поки не буде виконано останню в такому порядку логічну операцію.

2. Якщо у формулі відсутні дужки, то *порядок виконання логічних операцій такий*: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, тобто першою виконується кон'юнкція, якщо ця операція відсутня або вже виконана, то виконується диз'юнкція і т. д. Наприклад, у формулі $B \vee A \wedge C \Rightarrow A$ спочатку виконують кон'юнкцію ($A \wedge C$). потім – диз'юнкцію $B \vee A \wedge C$ і останньою – імплікацію.

3. Вираз, що міститься під знаком операції заперечення, в дужки не беруть, але вважають його таким, який знаходиться в дужках, і обчислення його виконують окремо.

Поняття формули можна ввести строго за індуктивним означенням, а саме:

а) кожне з елементарних висловлень є формулою;

б) якщо A, B – формули, то формулами є також і такі вирази: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$;

в) ніякі інші логічні вирази, крім тих, які утворені за правилами п.п. а) і б) не є формулами.

Тут великі латинські букви A, B використовують для позначення певних конкретних формул (є іменами цих формул).

Логічні вирази $(\bar{A} \Rightarrow B) \wedge C \Rightarrow B$; $A \vee (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, згідно з п. б), є формулами. Вирази $\Rightarrow A \vee B$, $\wedge A$, згідно з п. в) не є формулами. Розглянемо ще приклади символічного запису і читання складених висловлень.

Приклади

1. Записати у вигляді формули таке складене висловлення, виділивши в ньому компоненти: «Якщо запис натурального числа закінчується нулем, то це число ділиться на 5; запис натурального числа не закінчується нулем; то, натуральне число не ділиться на 5».

Це складене висловлення має дві компоненти:

A: «Запис натурального числа закінчується нулем», O: «Це число ділиться на 5». Використовуючи ці позначення, наведене висловлення запишемо так: «$A \Rightarrow O$; $\overline{A}$; отже, $\overline{O}$», тобто з того що $A \Rightarrow O$ і $\overline{A}$, виходить $\overline{O}$. Звідси дістаємо символічний запис даного висловлення у вигляді такої формули:

$$(A \Rightarrow O) \wedge \overline{A} \Rightarrow \overline{O}.$$

Кожне складене висловлення при певних значеннях (1 або 0) його компонентів є істинним або хибним. Компонента в цьому випадку відіграє роль змінної, яка може набувати лише одне з двох значень: 1 або 0. *Такі змінні називають **логічними***. Оскільки кожна формула містить скінчену кількість таких змінних, а кожна змінна набуває лише двох значень, то існує лише скінчена кількість різних наборів значень змінних формули і можна обчислити всі значення, яких набуває дана формула. Кожній формулі алгебри висловлень можна поставити у відповідність її таблицю істинності.

Для формул з двома різними логічними змінними є тільки чотири різних набори їхніх значень, для формул з трьома різними змінними – вісім наборів. Взагалі можна довести, що коли формула містить n різних логічних змінних, то існує 2^n різних наборів значень цих змінних.

Розглянемо побудову таблиць істинності для формул:

$$H\text{: } \overline{A} \Rightarrow A \vee B\text{; } F\text{: } (\overline{A} \vee B) \wedge (B \Rightarrow C).$$

A	B	$\overline{A} \Rightarrow A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Щоб показати хід обчислення значень формули F, побудуємо три колонки значень під формулою F: для $(\overline{A} \vee B)$, для $B \Rightarrow C$ і для значень формули F. Звичайно в таблицях записують лише одне значення істинності всієї формули, а результати проміжних обчислень не записують, оскільки обчислення з символами 1 і 0 виконуються досить просто усно, але цей раз ми запишемо і результати проміжних обчислень:

A	B	C	$\overline{A}$	$(\overline{A} \vee B)$	$B \Rightarrow C$	$(\overline{A} \vee B) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

5. Побудуємо таблиці істинності для формул: $(A \Rightarrow B)$ і $(\overline{A} \vee B)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Як бачимо, при однакових наборах значень їхніх компонентів A і B ці формули набувають однакових значень істинності. Дві формули називають ***рівносильними***, якщо вони на однакових наборах значень компонентів (логічних змінних) набувають однакових значень істинності.

Якщо формули F і H рівносильні, то пишуть $F = H$.

Звертаємо увагу на рівносильність $(A \Rightarrow B)$ і $(\overline{A} \vee B)$, оскільки вона дає змогу замінити операцію $\Rightarrow$ операціями $\overline{\ }$, і $\vee$.

Аналогічно можна показати, що справедлива рівносильність $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, згідно з якою можна замінити операцію $\Leftrightarrow$ на $\Rightarrow$ і $\wedge$, а отже, на $\overline{\ }$, $\vee$, $\wedge$.

Таким чином, у логіці можна було б обмежитися трьома операціями: $\overline{\ }$, $\vee$, $\wedge$. · Крім того, можна показати, що розглянуті п'ять логічних операцій зводяться до однієї з таких трьох пар операцій: ($\overline{\ }$, $\Rightarrow$), ($\overline{\ }$, $\vee$), ($\overline{\ }$, $\wedge$). Застосовуючи математичну логіку в техніці, користуються в основному набором з трьох логічних операцій $\overline{\ }$, $\vee$, $\wedge$. За допомогою них зручно описувати роботу різних технічних систем. Проте існує багато і таких застосувань логіки, зокрема в математиці, де зручно користуватися операціями імплікації та еквіваленції.

Випишемо ряд рівносильностей, справедливість яких можна довести за допомогою таблиць істинності, або які просто випливають із відповідних означень. Ці рівносильності характеризують основні властивості операцій $\overline{\ }$, $\vee$, $\wedge$. Інші рівносильності можна дістати з них методом алгебраїчних перетворень.

1°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

2°. $A \vee B = B \vee A$, – переставна (комутативна) властивість.

3°. $A \wedge B = B \wedge A$, – переставна (комутативна) властивість.

4°. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ – сполучна (асоціативна) властивість.

5°. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ – сполучна (асоціативна) властивість.

6°. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – перша розподільна (дистрибутивна) властивість.

7°. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – перша розподільна властивість.

8°. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ – закон де Моргана.

9°. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ – закон де Моргана.

10°. $A \vee \overline{A} = 1$ – закон виключеного третього.

11°. $A \vee 0 = A$.

12°. $A \vee A = A$.

13°. $A \wedge 0 = 0$.

14°. $A \wedge A = A$.

15°. $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

16°. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

17°. $A = A$ – закон тотожності.

18°. $A \wedge \overline{A}$ – закон несуперечливості.

19°. Закон двоїстості – якщо в тотожностях замінити $\wedge$ на $\vee$ (і навпаки), то тотожність не порушиться.

20°. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – закон контрапозиції.

21°. $A \wedge (A \Rightarrow B) = B$ – стверджувальний модус.

22°. $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) = \overline{A}$ – заперечливий модус.

23°. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – закон силогізму.

Дані властивості безпосередньо випливають з означення, їх можна довести усно, або з допомогою таблиць істинності.

Таблиця для перевірки властивості 7° має вигляд:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Сукупність усіх висловлень разом з визначеними на ній логічними операціями $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і основними властивостями цих операцій називають *алгеброю висловлень*.

Розглянемо кілька прикладів рівносильних перетворень в алгебрі висловлень.

Приклади.

1. $A \vee 1 = 1$. З властивості 13° дістаємо $\overline{A} \wedge 0 = 0$. Застосувавши операцію заперечення до обох частин останньої рівносильності, матимемо: $\overline{\overline{A} \wedge 0} = \overline{0}$. Згідно з властивостями 1° і 9°, $\overline{\overline{A}} \vee \overline{0} = \overline{0}$, звідки $A \vee 1 = 1$.

2. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$– закон контрапозиції. З властивостей 1°, 2°, і 5° маємо: $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B = \overline{A} \vee \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

3. $A \wedge 1 = A$. Скориставшись властивостями 1°, 8°, 11°, дістанемо

$\overline{A} \vee 0 = \overline{A}, \quad \overline{\overline{\overline{A} \vee 0}} = \overline{\overline{A}}, \quad \overline{\overline{A}} \wedge 1 = \overline{\overline{A}}, \quad A \wedge 1 = A.$

Кожна наступна із записаних рівностей виходить з попередньої. Надалі в таких випадках записуватимемо це символічно за допомогою знака $\Rightarrow$ (імплікації) і вживатимемо його замість слова «виходить». Тоді виведення рівносильності $A \wedge 1 = A$ запишеться так:

$\overline{A} \vee 0 = \overline{A} \;\Rightarrow\; \overline{\overline{\overline{A} \vee 0}} = \overline{\overline{A}} \;\Rightarrow\; \overline{\overline{A}} \wedge 1 = \overline{\overline{A}} \;\Rightarrow\; A \wedge 1 = A.$

4. $A \vee A \wedge B = A$ – закон поглинання. Скориставшись властивістю 6° і прикладами 1 і 3, дістанемо:

$A \vee A \wedge B = A \wedge 1 \vee A \wedge B = A \wedge (1 \vee B) = A \wedge 1 = A.$

6. Побудувавши таблиці істинності, наприклад, для формул: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, покажемо, що для всіх можливих наборів значень істинності їхніх компонентів ці формули набувають тільки значення 1 (істина) тобто, якими б не були висловлення *A, B, C* (істинними чи хибними) дані складені висловлення будуть завжди істинними. Такі формули, а отже, й відповідні висловлення називають ***тотожно істинними*** або ***тавтологіями***. Вони мають особливе значення для логіки. Кожна така формула є логічним законом, яким користуються при утворенні правильних, логічно грамотних умовиводів.

Наприклад, наведені нижче тотожно істинні формули визначають такі досить поширені логічні закони:

$A \vee \overline{A}$ – *закон виключеного третього*: кожне висловлення або істинне, або хибне і третього бути не може.

$A \Rightarrow A$ – *закон тотожності*: кожне висловлення є логічним висновком із самого себе.

$\overline{A \wedge \overline{A}}$ – *закон протиріччя*: кожне висловлення не може бути одночасно і істинним, і хибним.

$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ – *правило висновку* (лат. modus ponens): висновок в імплікації $A \Rightarrow B$ є наслідком з неї та її умови A. У математиці це правило утворення умовиводів досить широко застосовується.

$\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{A}$ – *правило заперечення умови* (лат. modus tollens): заперечення $\overline{A}$ умови імплікації $A \Rightarrow B$ є наслідком з неї і заперечення $\overline{B}$ її висновку.

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – *закон силогізму*: якщо з A виходить B, з B виходить C, то з A виходить C.

Є багато інших логічних законів, значно складніших.

Крім побудови таблиць істинності, є інші способи з'ясування питання про те, чи є дана формула тотожно істиною. Якщо, наприклад, формула має вигляд $A \Rightarrow B$, то щоб впевнитися, що вона тотожно істинна, досить довести, що не може існувати такого набору значень логічних змінних, при яких A було б істинним, а B – хибним. Проілюструємо цей спосіб на прикладі закону силогізму. Формула $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$, згідно з означенням імплікації, може бути хибною лише тоді, коли $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) = 1$, $A \Rightarrow C = 0$. Остання формула хибна лише при $A = 1$, $C = 0$. Проте підібрати таке значення істинності для B, щоб формула $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ була істиною при $A = 1$, $C = 0$, неможливо, бо при $B = 1$ маємо $B \Rightarrow C = 0$, а при $B = 0$ маємо $A \Rightarrow B = 0$.

Отже, для формули $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ не можна підібрати значень істинності для *A, B, C*, які перетворили б її в хибне висловлення, тобто вона тотожно істинна.

Другим, полярним до поняття тотожно істинної формули, є поняття тотожно хибної формули, або суперечності.

Формула називається ***тотожно хибною*** або ***суперечністю***, якщо вона при всіх можливих наборах значень компонентів набуває значення 0 (хибність). Очевидно, щоб дістати суперечність, досить взяти заперечення від тотожно істинної формули. Суперечливими є, наприклад, такі формули:

$$A \wedge \overline{A}, \quad \overline{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})}, \quad \overline{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$$

7. Розглянемо таблиці істинності двох найпростіших формул: $A \Leftrightarrow B$ і $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Формула $A \Rightarrow B$ набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких формула $A \Leftrightarrow B$ набуває значення 1.

Формула B називається ***логічним наслідком*** з формули A (або B логічно виходить з формули A), якщо B набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких формула A набуває значення 1.

Якщо B логічно виходить з A, то пишуть $A \,|{=}\, B$. Таким чином з $A \Leftrightarrow B \,|{=}\, A \Rightarrow B$. Згідно з означенням, будь-яка формула логічно виходить з тотожно хибної формули (суперечності) і тотожно істинна формула логічно виходить з будь якої формули. У зв'язку з цим, якщо A – тотожно істинна, то записуватимемо $|{=}\, A$.

Між поняттям логічного слідування і тотожною істиністю формул є такий зв'язок у вигляді теореми: формула B логічно виходить з формули A тоді і тільки тоді, коли формула $A \Rightarrow B$ тотожно істинна, тобто: $(A \,|{=}\, B) \Leftrightarrow (\,|{=}\, \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})$.

Доведення. Нехай $A \,|{=}\, B$. Це означає, що немає такого набору значень логічних змінних, при якому $A = 1$, $B = 0$, тобто формула $A \Rightarrow B$ не може набувати значення 0, а отже, $|{=}\, A \Rightarrow B$.

Нехай $|{=}\, A \Rightarrow B$. Це означає, що коли на якомусь наборі значень логічних змінних $A = 1$, то й $B = 1$, бо в противному разі на цьому наборі мали б $A \Rightarrow B = 0$, що суперечить умові.

Теорему доведено.

У ряді випадків цю теорему можна застосовувати для з'ясування того, чи логічно правильно зроблено певний умовивід.

Приклад.

1. Нехай A: «Запис натурального числа закінчується нулем», B: «Це число ділиться на 5». Розглянемо два висловлення C: $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}$, D: $\overline{A}$ і з'ясуємо, чи логічно випливає з C висловлення D, чи ні. Для цього перевіримо, чи є формула $C \Rightarrow D$: $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ тотожно істинною. Як вже відомо, $|{=}\, (A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Отже, $C \,|{=}\, D$.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означувані і неозначувані математичні поняття; про залежність між змістом і обсягом поняття; зв’язок вчення про множини з вченням про висловлення; на які два види поділяються висловлення у математичній логіці; означення і позначення заперечення, диз’юнкції, кон’юнкції, імплікації і еквіваленції; таблиці їх істинності; порядок виконання, які зустрічаються в певній формулі, якщо у формулі є дужки і коли їх немає; основні властивості логічних операцій; зв'язок між еквіваленцією та іншими логічними операціями; зв'язок між імплікацією та іншими логічними операціями; логічні закони (закони де Моргана);

у м і т и: утворити складені висловлення з простих; встановити значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин; позначати на письмі логічні операції; записати у вигляді формули складені висловлення; довести цю формулу, склавши таблицю істинності висловлень, що стоять у правій і лівій частинах формули; побудувати таблиці істинності для складених висловлень; ілюструвати на прикладах застосування логічних операцій та їх законів; визначати еквівалентні формули та тотожно істинні формули (тавтології).

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Порівняти зміст і обсяг поняття паралелограм.

2. Вважатимемо істинними прості висловлення: A –"Падає теплий дощик"; B –"Кругом все зацвіло"; C – "В полі виросла висока трава". Побудувати заперечення кожного з них і подвійні заперечення та зробити висновок про їх істинність. Сформулювати складені висловлення, що відповідають виразам $A\vee B$, $A\vee C$, $B\vee C$, $A\wedge B$, $\overline{A}\wedge B$, $A\vee B\wedge C$, $A\wedge B\vee C$, $A\vee \overline{B}\wedge \overline{C}$ і зробити висновок про їх істинність.

3. Чи можна визначити значення істинності висловлення A, якщо: а) $A\wedge B$ –"і"; б) $A\wedge B$ –"х", B – "і"; в) $A\vee B$ – "і"; г) $A\vee B$ – "х".

4. Чи можна визначити значення істинності висловлення $A\vee B$, якщо: а) A – істинне, б) B – істинне, в) A – хибне, г) B – хибне?

5. Відомо, що A – «і», B – «і», C – «х», D – «х». Знайдіть значення істинності висловлень:

а) A або $\overline{C}$; б) $\overline{A}$ і B;
в) D або B; г) $\overline{D}$ і $\overline{A}$;
д) $\overline{\overline{C}\text{ і }A}$; ж) A і B або C;
з) C і D або A; е) $\overline{B}$ або D;
і) $\overline{C}$ і A і $\overline{D}$.

6. Записати інакше складені висловлення і зробити висновок про їх істинність: а) $5 \geq 3$; б) $(x-1)^2 \geq 0$; в) $4-5 \geq -1$; г) $(-4)^2 \leq 0$; $-3 < -5 < 2$.

7. Розв’яжіть логічну задачу: чотири студентки педфаку – Оля, Ніна, Світлана, Алла зайняли у змаганні перші чотири місця. На запитання, хто яке місце посів, було дано три різні відповіді: “Оля – перше, а Ніна – друге”, “Оля – друге, а Алла – третє”, “Світлана – друге, а Алла – третє”. Яке місце посіла кожна студентка, якщо у кожній відповіді одна частина правильна, а друга хибна?

8. Перед чемпіонатом з футболу троє учнів засперечалися, яке місце займе кожна з чотирьох команд. Висловлено такі прогнози:

Сергій: “Динамо” – перше, а “Спартак” – друге”,

Микола: “Торпедо” – друге, а “Локомотив” – четверте,

Павло: “Спартак” – перше, а “Локомотив” – третє.

Виявилось, що в кожному випадку висловлені одна частина істинна, а друга – хибна. Яке місце посіла кожна команда, коли жодні дві команди не посіли те саме місце і всі чотири місця було розподілено між цими командами?

9. Вкажіть порядок виконання операцій над висловленнями:

а) $A \wedge (B \vee C)$; б) $A \wedge B \vee C$; в) $A \vee B \wedge C \vee D$; г) $\overline{A} \wedge B$; д) $\overline{A \vee B}$

10. За допомогою таблиці істинності довести рівності:

а) $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = A \wedge B \vee A \wedge \overline{B}$; б) $A \wedge \overline{A} \vee B \wedge \overline{\overline{B}} \vee C = B \vee C$;

в) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = (A \wedge \overline{A}) \vee B$.

11. Обчислити значення істинності таких формул:

а) $F = \overline{A \wedge \overline{B} \vee C} \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge \overline{C}$ при $A =$ ”і”, $B =$ ”х”, $C =$ ”і”;

б) $F = A \wedge \overline{B} \vee \overline{\overline{C \wedge D} \vee B \wedge \overline{D}}$ при $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$.

12. Вважатимемо істинними висловлення “Якщо іде дощ (A), квітка закриває пелюстки (B)”. Побудувати висловлення, що відповідають формулам: $\overline{A} \Rightarrow B$; $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$; $A \Rightarrow \overline{B}$; $A \Leftrightarrow B$; $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$; $\overline{A} \vee B$. Що можна сказати про істинність кожного з них, виходячи з означення імплікації і еквіваленції?

13. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі:

$\overline{A} \vee (C \Rightarrow A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B \wedge \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \wedge B) \wedge A$.

14. Скласти таблицю істинності для формул:

а) $\overline{(A\vee B)}\wedge C$; б) $\overline{A\wedge B\vee\overline{A\wedge B}}$; в) $(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee C)$.

15. Задано висловлення: p – “m і n – невід’ємні цілі числа”, q – “$m+n=m\cdot n$”, r – “$m=0$”, s – “$n=0$”, t – “$m=2$”, u – “$n=2$”.

Сформулювати висловлення: $p\Rightarrow[q\Leftrightarrow(r\wedge s\vee t\wedge u)]$.

16. Записати логічною формулою твердження: ”Якщо ціле число n ділиться на 30, то воно ділиться на 3 і на 10, а також на 5 і на 6”.

17. Дано висловлення:

а) якщо сьогодні температура нижче – 20$^\circ C$, то сьогодні ясно;

б) якщо я навчався на першому курсі педінституту, то я закінчив середню школу;

в) якщо 1 – 4 = 3, то $K=1$ є коренем рівняння $x-4=3$;

г) якщо у мене температура 38°, то я хвора.

В кожній імплікації виділіть умову і висновок. Сформулюйте імплікації, обернені заданим.

18. Чи є серед даних формул тавтології: $A\Rightarrow(B\Rightarrow A)$; $A\vee\overline{B}\Rightarrow C$; $\overline{A}\wedge B\Leftrightarrow\overline{A}$?

19. Істинне чи хибне твердження: а) $A\wedge B\wedge C\Rightarrow\overline{A}\vee B=B\wedge\overline{C}$; б) $A\wedge B\wedge C\Rightarrow\left(\overline{\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}=B\wedge\overline{C}\Leftrightarrow A\right)$; в) $A\wedge B\wedge C\Rightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}=\overline{B\wedge\overline{C}\vee A}$?

20. Знайти значення істинності висловлень: а) $\sqrt{9}=3$ і $\sqrt{9}=-3$; б) $13\le 5$; в) $-5<4\le 4$; г) $-11<12\le 11$; д) $-12<11\ne 11$; е) $\sqrt{13}\ge 5$.

21. Побудувати запере речення до висловлень і вказати, що істинне – дане висловлення чи його заперечення: а) $27\,\vdots\,7$; б) $9\ge 9$; в) $2+5=7$; г) $52>61$; д) $2+5<7-1$; е) $2+(2+5)\cdot 2-17<7-1/2$.

22. Відомо, що якщо висловлення B істинне, то висловлення D хибне. Чи можна на основі цього стверджувати, що якщо B хибне, то D істинне? Наведіть приклад, який підтверджує вашу відповідь.

Предикати. Квантори

1. Предикати.
2. Операції над предикатами і їх множини істинності.
3. Квантори.
4. Переходи між кванторами існування і загальності.
5. Логічне слідування і рівносильність предикатів.

1. Часто значення істинності висловлення змінюється залежно від зміни множини об'єктів, яких воно стосується. Наприклад, твердження "x ділиться на 9", а також твердження "t парне число" не є висловленнями, бо не можна сказати істинні вони чи хибні. Якщо замість змінної x підставити в перше речення, наприклад, числа 18, 27, 36, 45, дістанемо істинне висловлення, якщо ж підставити, наприклад, 44, дістанемо хибне висловлення, бо 44 не ділиться на 9. Друге речення буде правильним (істинним) висловленням при $t = 2$, $t = 4$, $t = 6$ і т. д. і хибним при $t = 1$; $t = 3$; $t = 5$; $t = 7$ і т. д.

Через те, що ці твердження при одних значеннях змінних є істинні, при інших – хибні, вони не є висловленнями. Такі твердження називають *предикатами* (висловлювальними формами, логічними функціями, змінними висловленнями).

Тобто, речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об'єктів з певної множини M перетворюються у висловлення, називають ***предикатами*** (*висловлювальними формами, логічними функціями, змінними висловленнями*).

Отже ми від логіки висловлень перейшли до такого ступеня математичної логіки, як *логіка предикатів*, який має досконалішу символіку, виразні, багаті засоби вираження різних тверджень, досконалі засоби аналізу логічних міркувань.

Дані твердження "x ділиться на 9", "t парне число" є висловлювальними формами від однієї змінної, одномісними висловлювальними формами, або логічними функціями однієї змінної. Ще вони є змінними висловленнями зі значеннями або істини або хибності. Задамо цим твердженням назви h і p відповідно. Тоді їх можна записати таким чином: $h(x)$: "x ділиться на 9" і $p(t)$: "t парне число".

Слово «предикат» у перекладі з латинської мови означає «присудок». Наприклад, у реченні $h(x)$, що означає "x ділиться на

9”, підметом є змінна x, а присудком – «ділиться», а решта слів пояснювальні (“на що ділиться”? на 9).

Предикати $h(x)$, чи $p(t)$ визначають, як перший, так і другий, відповідно два одномісні відображення, визначені на множині N натуральних чисел, з множиною значень у дво-елементній множині $\{0; 1\}$, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями хибності та істини. Так само, наприклад, предикат $d(m)$: “m – студент” визначає відображення d, визначене на множині імен конкретних людей з множиною значень в $\{0; 1\}$. Отже, можна уявити собі предикат як логічну функцію, яка кожній змінній ставить у відповідність один і тільки один елемент із множини $\{1, 0\}$ (істинне, хибне).

Область визначення предиката – це область визначення його змінної. Областю визначення предикатів $h(x)$ і $p(t)$ є числова множина $M = \mathrm{N}$ об'єктів, а областю визначення предиката $d(m)$ є множина імен конкретних людей. Характерною особливістю будь-якого предиката є те, що множина значень завжди є двоелементна множина $\{1, 0\}$ (істинне, хибне).

Отже, ***одномісним предикатом*** називається деяке відображення h, визначене на деякій множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M \mapsto \{0; 1\}$.

Вираз $h(x)$ називають ***висловлювальною формою*** *предиката h*. Будь-який предикат $h(x)$ розбиває область визначення $M_h = M$ на дві підмножини, на одній із яких він перетворюється в істинне висловлення, на другій – в хибне. Першу з цих множин називають ***множиною істинності*** предиката $h(x)$ і позначають через T_h.

Логічні функції, або предикати, можуть бути і від двох або кількох змінних.

Двомісним предикатом називається відображення f, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення: $M^2 \overset{f}{\mapsto} \{0;1\}$, де $M^2 = M \times M$.

Двомісні предикати визначають відношення між об'єктами. Розглянемо, наприклад, бінарне відношення “x кратне y” на множині N, яке кожній парі декартового квадрата $(x, y) \in \mathrm{N}^2$ ставить у відповідність один і тільки один елемент множини $\{1, 0\}$, тобто визначає логічну функцію двох змінних. Позначимо її через $h(x, y)$. Множина істинності T_h цієї функції є підмножиною N^2, тобто

$T_h \subset \mathrm{N}^2$ і $T_h = \{(x, y) \mid h(x, y)\}$. Отже: $T_h = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{N}^2, h(x, y)\} =$ $= \{(1, 1),\ (2, 1),\ (3, 1), \ldots,\ (2, 2),\ (4, 2), \ldots,\ (3, 3),\ (6, 3), \ldots\ (4, 4), \ldots,$ $(5, 5), \ldots, (6, 6), \ldots\}$. Зрозуміло, що в цьому прикладі множина істинності предиката $h(x, y)$, множина T_h, є нескінченною, бо нескінченною множиною є множина визначення цього предиката, множина $M_h = \mathrm{N}$ і отже нескінченною множиною є множина N^2 .

Якщо двомісний предикат визначений на множині M, то його характеристичною множиною є підмножина прямого квадрата M^2 області визначення. Так, для предиката $h(x, y)$: "x кратне y" визначеного на множині N ***характеристичною*** множиною є множина $\mathrm{N}_h^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{N} \wedge x \text{ кратне } y\}$. Очевидно, що множина $\mathrm{N}_h^2 = T_h$, бо це є множина таких пар (x, y) з натуральних чисел, в яких перша компонента ділиться на другу, тобто множина істинності предиката $h(x, y)$.

Рівняння, нерівності та їх системи є найпоширенішими в математиці прикладами предикатів.

Наприклад, розглянемо тримісний предикат $h(x, y, z)$: "$x + y = z$" визначений на деякій числовій множині M. Характеристичною множиною, а інакше – областю істинності, цього предиката є підмножина всіх трійок декартового добутку M^3, а точніше множина $M_h^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in M \wedge \text{"}x + y = z\text{"}\}$. І наприклад, якщо $M = \{-3, 0, 1, 2\}$, то $M_h^3 = \{(-3, 0, -3), (0, -3, -3), (0, 0, 0), (0, 1, 1),$ $(0, 2, 2), (1, 0, 1), (1, 1, 2), (2, 0, 2)\}$, тобто це всі кортежі довжиною три, компоненти яких належать множині M і притому сума двох перших компонентів дорівнює третьому.

Предикат називається ***тотожно істинним***, якщо його область істинності збігається з універсальною множиною, на якій він розглядається, і ***тотожно хибним***, якщо множина його істинності порожня.

Предикати називаються ***рівносильними***, якщо їхні області істинності збігаються.

По-аналогії, до означення двомісного предиката, ***n-місним предикатом*** називається відображення f, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M^n \overset{f}{\mapsto} \{0; 1\}$.

Прикладом n-місного предиката може бути невизначене рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ на множині дійсних, чи цілих, чи натуральних чисел (з шкільного курсу відомо, що рівняння називається невизначеним, якщо воно має більше чим один єдиний розв'язок).

Предикат визначений на Ø, тобто предикат, в якого множина предметних змінних є порожньою, можна вважати **нуль-місним** предикатом. Зрозуміло, що такий предикат не залежатиме від області визначення і буде звичайним висловленням.

Аналогічно як і в випадку з висловленнями означаються *елементарні* предикати (предикати, з яких не можна виділити простіших) і всі операції над ними, тобто *логіку висловлень* можна розглядати як частинний випадок *логіки предикатів*.

Таблиця 1.

Предикати	**Область істинності**
$\overline{h(x)}$ заперечення предиката $h(x)$	$\mathrm{U} \setminus T_h$ – доповнення множини істинності предиката $h(x)$ до універсальної множини
$h(x) \vee p(x)$ диз'юнкція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$T_h \cup T_p$ – об'єднання множин істинності предикатів $h(x)$ і $p(x)$
$h(x) \wedge p(x)$ кон'юнкція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$T_h \cap T_p$ – переріз множин істинності предикатів $h(x)$ і $p(x)$
$h(x) \Rightarrow p(x)$ імплікація предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$\mathrm{U} \setminus (T_h \setminus T_p)$ – доповнення множини $T_h \setminus T_p$ на якій істинний лише предикат $h(x)$ і хибний предикат $p(x)$ до універсальної множини
$h(x) \Leftrightarrow p(x)$ еквіваленція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$\mathrm{U} \setminus (T_h \setminus T_p) \cup \mathrm{U} \setminus (T_p \setminus T_h)$ або $(T_h \cap T_p) \cup \big((\mathrm{U} \setminus T_h) \cap (\mathrm{U} \setminus T_p)\big)$

2. Перейдемо до алгебри над предикатами. За допомогою логічних операцій – *заперечення*, *диз'юнкції*, *кон'юнкції*, *імплікації*, й *еквіваленції* із предикатів можна сконструювати нові предикати, для яких область істинності визначають за одним відповідним з наведених в таблиці 1 ***правил***.

Як бачимо з таблиці область істинності еквіваленції предикатів $h(x)$ і $p(x)$ подана двома виразами. Рівність цих виразів очевидна за допомогою кругів Ейлера (рис. 9) (тут зображено частковий випадок).

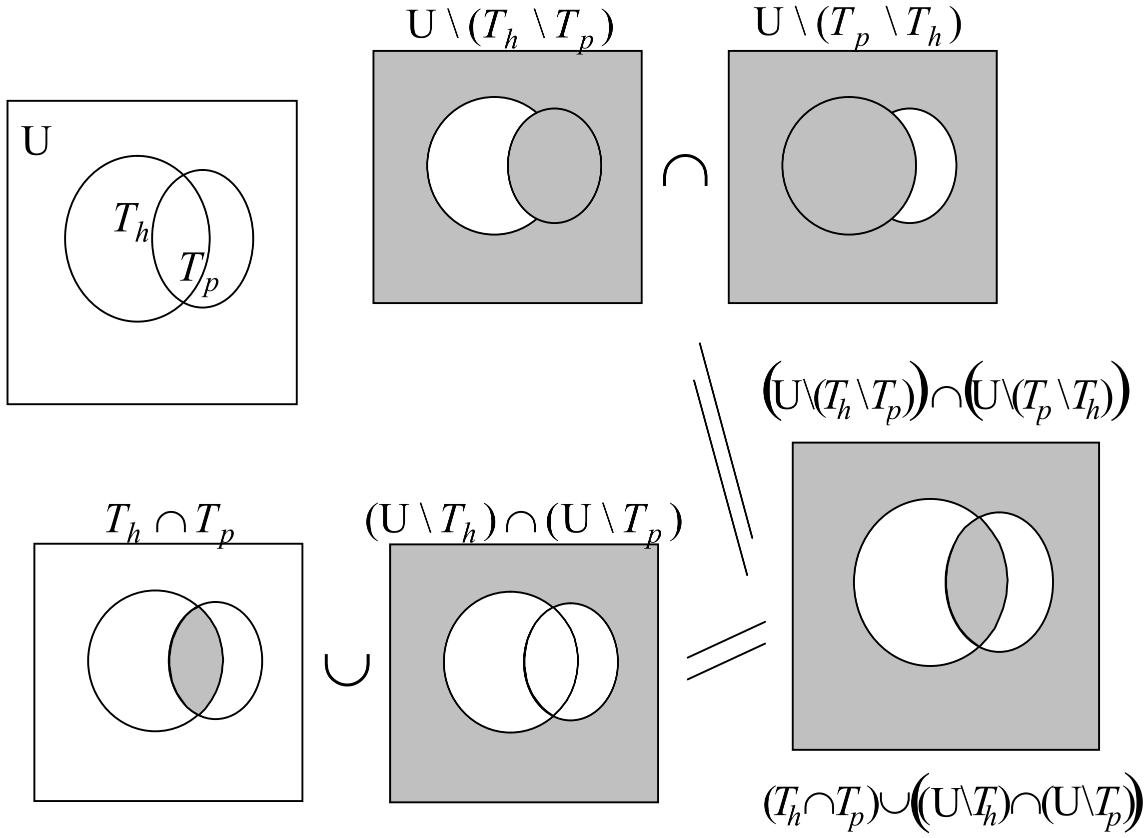


Рис. 9.

Так, дійсно, якщо $a \in T_{h(x)\Leftrightarrow p(x)} \Rightarrow h(a) \Leftrightarrow p(a) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(h(a) = 1 \wedge p(a) = 1\right) \vee \left(h(a) = 0 \wedge p(a) = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in T_h \wedge a \in T_p\right) \vee \left(a \in \mathrm{U} \setminus T_h \wedge a \in \mathrm{U} \setminus T_p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\mathrm{U} \setminus T_h \cap \mathrm{U} \setminus T_p\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow a \in \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{h(x)\Leftrightarrow p(x)} \subseteq \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right).$$

І навпаки, $a \in \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(h(a) = 1 \wedge p(a) = 1\right) \vee \left(h(a) = 0 \wedge p(a) = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(a) \Leftrightarrow p(a) = 1 \Rightarrow a \in T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \subseteq T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)}.$$

Отже $T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)} = \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right)$.

Аналогічно можна довести справедливість решти правил.

3. Часто у висловленнях використовуються слова «всі», «для всіх», «будь-які», «існує», «хоч би один», «знайдеться» тощо. В математиці прийнято замість слів «всі», «будь-які» використовувати знак $\forall$ – ***квантор загальності*** (перевернута вниз перша буква англійського слова All – всі). Замість слів "існує", "хоч би один" використовується знак $\exists$ – ***квантор існування*** (перевернута вліво перша буква англійського слова Exists – існує), $\exists!$ означає "існує тільки один". Операції, про які йдеться, називаються *операціями квантифікації* або *операціями зв'язування квантором змінних.* Змінна, яка міститься під знаком квантора, називається зв'язаною змінною, а змінна, яка не міститься під знаком квантора – вільною змінною.

Розглянемо висловлення "$\exists\, x \in R, \forall y \in R : x + y = x$". Дане висловлення є хибним, бо не існує такого дійсного числа x, щоб в результаті додавання до нього будь-якого дійсного числа y, отримували x. Розглянемо інше висловлення "$\exists\, x \in R, \forall y \in R : x + y = y$". Дане висловлення є істинним, бо насправді існує таке дійсне число x (це число нуль), що в результаті додавання до нього будь-якого дійсного числа y, отримаємо y. Ще строгіше, невтративши істинності, останнє висловлення можна переписати в такому вигляді "$\exists! x \in R, \forall y \in R : x + y = y$", бо це число x є нуль і воно єдине.

Попередні висловлення отримано з двомісних предикатів "$x + y = x$" і "$x + y = y$" шляхом зв'язування обох змінних.

Операції квантифікації при зв'язуванні кванторами всіх змінних предиката перетворюють його у висловлення. Якщо ж в n-місному предикаті, виконуючи операції квантифікації, зв'язують кванторами m змінних, то в результаті отримують $n - m$-місний предикат.

Означимо операції з використанням квантора загальності і квантора існування для одномісних предикатів більш строгіше. Отже:

Квантором загальності називається така операція $\forall$, яка кожному одномісному предикату $f(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\forall x) : f(x)$

(читається: “Для будь-якого x виконується $f(x)$”), яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $a \in M$ $f(a) = 1$.

Квантором існування називається така операція $\exists$, яка кожному одномісному предикату $f(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\exists x): f(x)$ (читається: “Існує таке x, що виконується $f(x)$”, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне $a \in M$ таке, що $f(a) = 1$.

Переставляння місцями різнойменних кванторів $\forall, \exists$ може призвести до утворення відмінного не тільки за змістом а й за значенням істинності висловлення. Для переконання в цьому розглянемо предикат $p(x, y)$: “x кратне y”, визначений на множині N. За допомогою застосування кванторів, можемо утворити з нього вісім таких висловлень:

1. $(\forall x)(\forall y): p(x, y)$ – “Для будь-якого x і для будь-якого y виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є хибним.

2. $(\forall y)(\forall x): p(x, y)$ – “Для будь-якого y і для будь-якого x виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є також хибним.

3. $(\exists x)(\exists y): p(x, y)$ – “Існує таке x та існує таке y, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

4. $(\exists y)(\exists x): p(x, y)$ – “Існує таке y та існує таке x, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є також істинним.

5. $(\exists x)(\forall y): p(x, y)$ – “Існує таке x, що для будь-якого y виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є хибним.

6. $(\forall y)(\exists x): p(x, y)$ – “Для будь-якого y існує таке x, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

7. $(\forall x)(\exists y): p(x, y)$ – “Для будь-якого x існує таке y що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

8. $(\exists y)(\forall x): p(x, y)$ – “Існує таке y, що для будь-якого x виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

За допомогою кванторів можна записати кожне математичне твердження так, щоб було точно відомо, яких об'єктів воно стосується. Наприклад, твердження “Для будь-яких двох чисел існує таке третє число, яке є їхньою сумою”, використовуючи предикат $h(x, y, z)$: “$x + y = z$”, можна записати так: $(\forall x)(\forall y)(\exists z): h(x, y, z)$.

Твердження, що є означенням паралельності прямих, можна символічно записати так: $(\exists\alpha)(k\in\alpha\wedge l\in\alpha\wedge(k=l)\vee(k\cap l=\varnothing)$, де α – площина, k і l – дві прямі. Прочитається це твердження так: “Дві прямі k і l називаються паралельними, якщо вони лежать на одній площині і збігаються, або не мають жодної спільної точки”.

Такі компактні записи мають свої переваги. Вони сприяють кращому зосередженню уваги на основній суті означуваного поняття, глибокому його аналізу, міцному запам'ятовуванню і, що дуже важливо, дають змогу чисто алгебраїчно перетворювати ці поняття, а саме міркування перетворювати в обчислення.

Наведені вище приклади символічних записів є фактично формули логіки предикатів, аналогічні формулам алгебри висловлень. В утворенні таких формул можуть брати участь, крім предикатів і кванторів – також логічні операції $\overline{}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ алгебри висловлень.

Точніше поняття формули логіки предикатів визначається індуктивно:

1) кожний нуль-місний предикат, тобто висловлення є формулою;

2) кожний елементарний предикат є формулою;

3) якщо $F(x)$ – формула, а x – вільна змінна (крім x у формулі $F(x)$ можуть існувати й інші вільні змінні), то вирази $(\exists x): F(x), (\forall x): F(x)$ є формулами;

4) якщо A і B – формули, причому вільні змінні формули A позначені іншими буквами, ніж зв'язані змінні формули B , а вільні змінні формули B – іншими буквами, ніж зв'язані змінні формули A, то вирази $\overline{A}, \overline{B}$, $A\vee B$, $A\wedge B$, $A\Rightarrow B$, $A\Leftrightarrow B$, також є формулами;

5) ніяких інших формул, крім зазначених в пп. 2) – 4) немає.

При утворенні формул логіки предикатів треба бути уважнішим, ніж в алгебрі висловлень. Так, вираз $(\exists x): f(x,y)\vee q(x)$ не є формулою, бо змінна x у першій формулі зв'язана, а в другій – вільна.

4. Розглянемо висловлення $\overline{\exists x: h(x)}$ тобто “Неправильно, що існує таке x, для якого виконується h”. Дане висловлення означає те саме, що й висловлення “Для кожного x виконується $\overline{h}$”, тобто $(\forall x): \overline{h(x)}$.

Перевіримо рівносильність цих двох висловлень, тобто, що:

$$\overline{\exists x : h(x)} = (\forall x) : \overline{h(x)}.$$

Нехай $\overline{(\exists x) : h(x)}$ є істинне висловлення. Тоді $(\exists x) : h(x)$ є хибне висловлення. За означенням квантора існування це означає, що для довільного $a \in M$ не виконуватиметься $h(a)$, тобто виконуватиметься $\overline{h(a)}$ і отже $\overline{h(a)}$ є істинне висловлення для довільного $a \in M$. А за означенням квантора загальності для предиката $h(x)$ дістаємо, що $(\forall x) : \overline{h(x)}$ є істинне висловлення. Отже, з істинності отримали істиність.

Нехай тепер $\overline{(\exists x) : h(x)}$ є хибне висловлення. Тоді $(\exists x) : h(x)$ є істинне висловлення. За означенням квантора існування це означає, що для довільного $a \in M$ виконуватиметься $h(a)$, а отже $\overline{h(a)}$ є хибне висловлення для довільного $a \in M$. А за означенням квантора загальності для предиката $h(x)$ дістаємо, що $(\forall x) : \overline{h(x)}$ є хибне висловлення. Отже, з хибності отримали хибність.

Отже,

$$\left(\overline{(\exists x) : h(x)} = 1 \Rightarrow (\forall x) : \overline{h(x)} = 1\right) \wedge \left(\overline{(\exists x) : h(x)} = 0 \Rightarrow (\forall x) : \overline{h(x)} = 0\right).$$

Тобто, отримаємо $\overline{(\exists x) : h(x)} = (\forall x) : \overline{h(x)}$ і рівносильність доведено.

Розглянемо також висловлення $\overline{(\forall x) : h(x)}$, тобто “Неправильно, що для кожного x виконується h”. Дане висловлення означає те саме, що й висловлення “Існує таке x, для якого виконується $\overline{h}$”, тобто $(\exists x) : \overline{h(x)}$. Аналогічно можна довести і цю рівносильність, тобто:

$$\overline{(\forall x) : h(x)} = (\exists x) : \overline{h(x)}.$$

Розглянуті рівносильності виконуються й для довільної скінченої кількості кванторів.

Наприклад, маємо формулу $(\exists x)(\forall y)(\exists z) : F(x, y, z)$, де $F(x, y, z)$ довільна формула логіки предикатів. Тоді, застосовуючи поступово рівносильні перетворення, дістаємо: $\overline{(\exists x)(\forall y)(\exists z) : F(x, y, z)} =$

$$= (\forall x)\overline{(\forall y)(\exists z) : F(x, y, z)} = (\forall x)(\exists y)\overline{(\exists z) : F(x, y, z)} = (\forall x)(\exists y)(\forall z) : \overline{F(x, y, z)}$$

,

тобто кожний квантор існування переходить у квантор загальності і навпаки.

У математиці дуже часто користуються запереченнями різних понять, тобто визначають умови, коли даний об'єкт не належить до певного поняття, або іншими словами, до множини, яка становить обсяг даного поняття.

Наприклад, запишемо умови, при яких прямі k і t, k, $t \in\alpha$, не паралельні.

Виконаємо операцію заперечення формули, яка описує умови, коли прямі k і t паралельні. Дістаємо:

$$\overline{(\exists\alpha):(k\in\alpha\wedge t\in\alpha\wedge((k=t)\vee(k\cap t=\varnothing)))}=$$
$$=(\forall\alpha):\overline{(k\in\alpha)}\vee\overline{(t\in\alpha)}\vee(k\neq t)\wedge(k\cap t\neq\varnothing).$$

Таким чином, дістаємо дві умови, коли прямі k і t не паралельні, а саме:

а) $(\forall\alpha):\overline{(k\in\alpha)}\vee\overline{(t\in\alpha)}$, тобто прямі k і t не лежать в одній площині, такі прямі називають мимобіжними;

б) коли прямі не збігаються і мають спільні точки, тобто, коли вони перетинаються.

5. Розглянемо дві одномісні формули логіки предикатів (це, як нам вже відомо, можуть бути і два елементарні одномісні предикати) $F(x)$ і $E(x)$ визначені на множині M з характеристичними множинами M_F і M_E відповідно, причому $M_F\subset M_E$. Тоді при підстановці замість імен конкретних елементів з M імплікація $F(x)\Rightarrow E(x)$ завжди буде істиною, бо при $F(a) = 1$ для $a\in M$ $E(a)=1$. При цьому говорять, що предикат $E(x)$ логічно виходить з предиката $F(x)$ і скорочено позначають так: $F(x) \mid = E(x)$.

Отже, якщо на множині M визначені дві одномісні формули логіки предикатів $F(x)$ і $E(x)$, а M_F і M_E – відповідні їм характеристичні множини, то з того, що $M_F\subset M_E$, випливає, що $E(x)$ ***логічно слідує*** *з* $F(x)$. І навпаки, якщо $E(x)$ ***логічно слідує*** *з* $F(x)$ тоді $M_F\subset M_E$.

Отже:

$$M_F\subset M_E \Leftrightarrow F(x) \mid = E(x)$$

Наприклад, предикат $h(x)$: “$x^2-1=0$” логічно слідує з предиката $p(x)$: “$x-1=0$” на множині цілих чисел, бо $M_h = \{-1, 1\}$, $M_p = \{1\}$, тобто $M_p\subset M_h$, а отже: $p(x) \mid = h(x)$. А якщо ще задано предикат $m(x)$: “$-9\le x\le 5$” на цій же множині, то очевидно, що $M_p\subset M_m$, а отже: $h(x) \mid = m(x)$ і $M_p\subset M_m$, а отже: $p(x) \mid = m(x)$. Тобто логічне слідування, так, як і відношення включення, має властивості *рефлексивності*, *антисиметричності* і *транзитивності*.

Якщо в імплікації $F(x)\Rightarrow E(x)$ $E(x)$ є логічним наслідком $F(x)$, то говорять, що $F(x)$ є достатня умова для $E(x)$, *а* $E(x)$ – необхідна умова для $F(x)$.

Наприклад, щоб число ділилося на 9, необхідно, але недостатньо, щоб воно ділилося на 3, тобто “$x \vdots 3$” є необхідна умова для “$x \vdots 9$”, а для того щоб число ділилося на 3 достатньо, щоб воно ділилося на 9, але це не є необхідним, тобто “$x \vdots 9$” є достатня умова для “$x \vdots 3$”. В імплікації $(x \vdots 9)\Rightarrow(x \vdots 3)$ предикат “$x \vdots 3$” є логічним наслідком предиката “$x \vdots 9$”.

Розглянемо ще дві одномісні формули логіки предикатів $E(x)$ і $F(x)$, які є логічними наслідками одна одної, тобто $E(x)$ є логічним наслідком $F(x)$, і навпаки, $F(x)$ є логічним наслідком $E(x)$. В цьому випадку, з того, що $M_F \subset M_E$ і $M_E \subset M_F$, слідує, що $M_F = M_E$, тобто множини істинності їх збігаються, а предикати рівносильні. В цьому випадку $F(x)$ є необхідною і достатньою умовою для $E(x)$ і, навпаки, $E(x)$ є необхідною і достатньою умовою для $F(x)$ і для всіх x з області визначення предикатів $E(x)$ і $F(x)$ істинна еквіваленція $F(x)\Leftrightarrow E(x)$.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: означення: предиката, його області визначення, множини істинності, характеристичної множини, логічних операцій, які виконуються над предикатами, а саме: заперечення, кон’юнкції, диз’юнкції, імплікації та еквіваленції; правила та формули за якими знаходяться їх множини істинності; зв’язок між логічними операціями над предикатами з операціями над відповідними характеристичними множинами; смисл і призначення квантора загальності і квантора існування, зв’язок між ними; поняття формули логіки предикатів; означення: логічного слідування для предикатів і рівносильності предикатів;

у м і т и: позначити предикат, знаходити його область визначення, множину істинності; навести приклади одно- , дво- і тримісних предикатів; за допомогою логічних операцій – диз’юнкції, кон’юнкції, заперечення і імплікації із предикатів конструювати нові предикати; визначати область істинності одержаних складених предикатів і зображати їх на діаграмах Ейлера-Венна, будувати заперечення висловлення з квантором;

визначати: який предикат є логічним наслідком іншого, рівносильні предикати.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Серед нижче наведених записів виділити висловлення, числові вирази, вирази зі змінною, предикати: а)$(22+43)\cdot 2$; б)$7z+2y-11$; в)$x+1=0$; г)$z \le x+y$; д)$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}x>0$; е)$x<y$.

2. На множині N – натуральних чисел заданий предикат $h(x)$: „$\frac{17}{18}-\frac{4}{9}x^2=\frac{1}{2}$” і предикат $p(x)$: ”$0<x\le 2\frac{1}{2}$”.

а) Знайдіть множини істинності T_h і T_p відповідно предикатів $h(x)$ і $p(x)$;

б) В якому відношенні знаходяться попарно всі три множини T_h, T_p і N ?

3. На множині N – натуральних чисел задано предикати $h(x)$: “$2-x^2=1$” і $p(x)$: “$2\frac{1}{4}<x\le\frac{7}{2}$”. Знайти характеристичні множини цих предикатів.

4. Подати предикат $E(x)$: “$x^2 - 1 = 0$” у вигляді диз’юнкції двох простих предикатів і знайти його множину істинності.

5. Подати предикат $F(x)$: “$\frac{x+1}{3x-5}>0$” у вигляді диз’юнкції двох кон’юнкцій елементарних предикатів. Знайти множину істинності цього предиката.

6. На числовій множині $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ заданий предикат $F(x)$: “Число x є коренем рівняння $x^2 - 3x = 0$”. Знайти множину істинності цього предиката; утворити заперечення і визначити множину істинності заперечення.

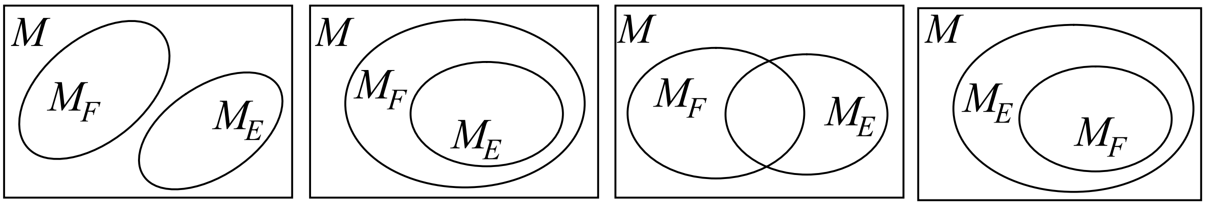
7. На множині геометричних фігур задані предикати: $C(x)$: “Фігура x – трикутник” і $D(x)$: “Фігура x – многокутник”. Утворіть кон’юнкцію і диз’юнкцію цих предикатів, знайдіть їх множину істинності і дайте графічну ілюстрацію.

8. На множині студентів групи задані предикати $F(t)$: “Студент t грає в шахи” і $E(t)$: ”Студент t вміє плавати”. Користуючись звичайною мовою прочитайте предикати: а) $F(t)\wedge E(t)$; б) $F(t)\vee E(t)$; в) $\overline{F(t)}\wedge\overline{E(t)}$; г) $\overline{F(t)\vee E(t)}$; д) $\overline{F(t)\wedge E(t)}$; е) $F(t)\vee\overline{E(t)}$.

9. Предикати $F(x)$, $E(x)$, $R(x)$ задані на деякій множині M. Відомо, що переріз множин істинності предикатів $F(x)$, $E(x)$, $R(x)$ дорівнює порожній множині. Зобразити при допомозі діаграм Ейлера-Венна множини істинності наступних предикатів: а) $F(x)\wedge E(x)\wedge R(x)$; б) $F(x)\vee E(x)\vee R(x)$; в) $\overline{F(x)}\wedge\overline{E(x)}\wedge\overline{R(x)}$; г) $\overline{F(x)\vee E(x)\vee R(x)}$; д) $\overline{F(x)\wedge E(x)\wedge R(x)}$; е) $F(x)\vee\overline{E(x)}\vee\overline{R(x)}$; є) $F(x)\vee\overline{E(x)}\vee R(x)$; ж) $\overline{F(x)}\wedge\overline{E(x)}\wedge R(x)$; з) $\overline{F(x)\wedge\overline{E(x)}\wedge R(x)}$; к) $\overline{F(x)\vee\overline{E(x)}\wedge\overline{R(x)}}$.

10. На множині M – натуральних двозначних чисел задані предикати: $F(m)$: ”$m \geq 87$”, $E(m)$: “$m < 90$”, $R(m)$: “$m > 90$ ”. Знайдіть множину істинності таких імплікацій: а) $F(m) \Rightarrow E(m)$; б) $E(m) \Rightarrow R(m)$; в) $R(m) \Rightarrow F(m)$.

11. Предикати $F(m)$, $E(m)$ задані на деякій множині M. Відношення між їхніми характеристичними множинами, відповідно M_F і M_E, показано на рисунку. Вкажіть серед цих чотирьох рисунків



ті, для яких істинні висловлення: а) предикат $E(m)$ слідує із предиката $F(m)$; б) предикат $F(m)$ слідує із предиката $E(m)$; в) предикат $F(m)$ не слідує із предиката $E(m)$ і предикат $E(m)$ не слідує із предиката $F(m)$.

12. На множині $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ задані предикати $F(m)$: ”число m кратне 3” і $E(m)$: ”$m - 1 < 0$”. Визначте множину істинності предикатів: а) $F(m)\Rightarrow E(m)$; б) $\overline{F(m)}\Rightarrow\overline{E(m)}$.

13. Нехай предикати $h(x)$: “$x + 4 < 0$”, $p(x)$: “$3x + 2 > 0$” визначені на множині R. Знайти характеристичні множини для предикатів $h(x)\vee p(x)$, $h(x)\wedge\overline{p(x)}$, $\overline{h(x)}$, $\overline{p(x)}$, $h(x)\Rightarrow p(x)$.

14. Записати характеристичну множину предикатів $h(x, y)$: “$x + y = 8$”, $p(x, y)$: “$x + y < 8$”, визначених на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

15. Запишіть істинні значення і заперечення поданих висловлень, записавши їх попередньо в символічній формі:

а) існують такі числа, які не діляться самі на себе;

б) існує ціле число, на яке не ділиться жодне ціле число;

в) існує ціле число, на яке не ділиться жодне інше число;

г) існує найменше ціле число, яке націло ділиться на два задані цілі числа.

16. Прочитайте такий символічний запис:

а) $(\forall x)$ $[(x \in \mathrm{Z}) \Rightarrow (x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$;

б) $(\exists x)$ $[(x \in \mathrm{R}) \wedge (x^2 = 2)]$; в) $(\forall x)$ $(\forall y)$ $[x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow (xy \neq 0)]$.

17. Запишіть символічно означення: функція $f(x)$ визначена на множині X називається неперервною в точці x_0, якщо точка x_0 та її окіл $Q(x_0)$ належать області визначення функції і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$ значення функції $f(x)$ задовольняють нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

18. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення: а) об’єднання двох множин A і B; б) перерізу двох множин A і B; в) різниці двох множин A і B; г) декартового добутку двох множин A і B.

19. Записати символікою логіки предикатів речення:

а) існує таке непарне число, яке буде взаємно простим з числом 15;

б) якщо будь-яке число ділиться на парне число, то воно також буде парним;

в) для будь-яких двох чисел існує третє число, яке є їхньою сумою;

г) всі ті, хто люблять математику – люблять мислити, а всі ті, хто не люблять математики – не люблять мислити.

20. Яке з висловлень на множині дійсних чисел істинне:

$(\forall x)(x^2 + 1 = 0)$; $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$; $(\exists x)(x^2 + 1 > 0)$; $(\forall x)(x^2 + 1 > 0)$; $(\forall x)(x^2 \geq 0)$; $(\forall x)(x^2 > 0)$; $(\exists y)(\forall x)(x - y = 0)$; $(\forall y)(\exists x)(x - y = 0)$; $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$?

21. На множині N – натуральних чисел задано предикати $h(m)$: “$2 - m = 1$” і $p(m)$: “$m + 1 = 0$”. Утворити хоча б три предикати, кожен з яких є логічним наслідком кожного з даних двох предикатів $h(m)$ і $p(m)$.

Теореми

1. Будова теорем.
2. Види теорем.
3. Необхідні і достатні умови.
4. Доведення теорем.
5. Правильні і неправильні міркування.

1. Величезна кількість теорем в математиці охоплюються порівняно невеликою кількістю їхніх рівносильних, різноманітних за змістом, стандартних формулювань.

Наприклад, можна розглянути таку теорему:

Якщо дріб дорівнює нулю, то величина, що стоїть в чисельнику дорівнює нулю.

Формулювання теореми передбачає, очевидно, що вона справджується для довільних чисел з множини R. Отже, її можемо записати у вигляді формули так:

$$(\forall a)(\forall b)\left(\left(\frac{a}{b}=0\right)\Rightarrow(a=0)\right), \qquad a,b\in R.$$

Запис $\left(\frac{a}{b}=0\right)\Rightarrow(a=0)$ є змістом теореми, а записи $(\forall a),(\forall b)$, $(a,b\in R)$ описують множину об'єктів, для яких теорема справджується (пояснююча частина теореми, необхідний коментарій до неї). Якщо позначити

$A\sim$ «$\frac{a}{b}=0$», $B\sim$ «$a=0$», то скорочено теорему можемо записати так:

$(\forall a)(\forall b)(A\Rightarrow B)$, $a,b\in R$.

де A – умова теореми, B – наслідок.

Ця теорема легко приводиться до скороченого вигляду. Бувають теореми-властивості: “Центр кола описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині його гіпотенузи”, як їх приводиться до скороченого вигляду. Цю теорему скорочено можемо записати так:

$(\forall a)(\exists b)(\exists c)A(a,b,c)$, де a – прямокутний трикутник, b – центр кола описаного навколо a, c – середина гіпотенузи a. $A(a,b,c)\sim$ ”$b=c$”.

Скорочено цю теорему можемо записати і так:

$(\forall a)(\exists b)(\exists c)$ (a – прямокутний трикутник, b – центр кола описаного навколо a, c – середина гіпотенузи $a \Rightarrow b = c$).

Тут частина коментарія стає умовою теореми, а зміст теореми її – наслідком.

Розглянемо ще такий поширений в математиці тип теорем. Це є теореми існування, які обґрунтовують існування різноманітних математичних об'єктів: розв'язків рівнянь, геометричних фігур, тощо.

Наприклад.

Теорема існування суми в множині Z цілих чисел: $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(c = a + b),\ a, b, c \in Z$.

Теорема існування між будь-якими двома дійсними числами a, b третього числа c (щільність множини дійсних чисел): $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(a < c < b),\ a, b, c \in R$.

Теорема існування точки S рівновіддаленої від усіх вершин Δ ABC: $(\forall \Delta ABC)(\exists S)(d(A, S) = d(B, S) = d(C, S))$, $\Delta ABC \in T$, $S \in (ABS)$, де T – множина трикутників на площині (ABC), d – відстань між відповідними точками.

Кожну з цих теорем можна також подати у вигляді умовного твердження $A \Rightarrow B$ з відповідними коментаріями. Так, теорему про щільність множини дійсних чисел можна записати у вигляді: $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(a, b, c \in R) \Rightarrow (a < c < b)$.

Таким чином, практично кожну теорему можна подати у вигляді $A \Rightarrow B$, де A, B – предикати від предметних змінних (однієї чи кількох), з відповідними коментаріями, A – умова теореми, B – наслідок. Таку форму теореми називають канонічною.

2. З шкільного курсу математики нам відомо такі види теорем: дана теорема; теорема, обернена до даної; теорема, протилежна даній; теорема, обернена до протилежної, або протилежна оберненій. Дослідимо, як зв'язані між собою ці теореми.

Розглядаючи будь-яку теорему переписану в своїй канонічній формі $A \Rightarrow B$, з її двох предикатів A і B та їхніх одночасних заперечень $\overline{A}$ і $\overline{B}$ можна утворити чотири імплікації (теореми):

1) $A \Rightarrow B$ – ***дана теорема***;

2) $B \Rightarrow A$ – ***теорема, обернена до даної*** (*конверсія імплікації* 1));

3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – ***теорема, протилежна до даної*** (*конверсія контрапозиції* 4));

4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – ***теорема, обернена до протилежної***, або ***протилежна до оберненої*** (*контрапозиція імплікації* 1)).

Ці всі теореми називають спряженими між собою.

Ці чотири теореми утворені так, що в ролі даної теореми можна взяти будь-яку з них, і тоді інші три будуть спряженими з нею. Структура цих теорем така, що вони *попарно рівносильні* між собою, а саме: $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, $B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. Рівносильність цих пар теорем добре ілюструється за допомогою так званого логічного квадрата (рис. 10).

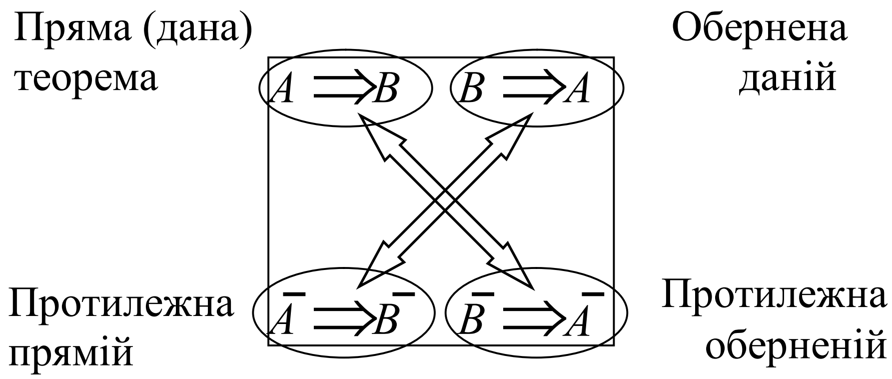


Рис.10

Таким чином, замість доведення безпосередньо даної теореми, можна довести теорему, обернену до протилежної, і цим буде доведена справедливість даної теореми, бо ці теореми одночасно істинні або хибні. Часто так і буває, що довести протилежну теорему простіше, ніж дану.

Наведемо приклади ***спряжених*** теорем.

Приклади.

1. 1) Протилежні сторони паралелограма попарно рівні між собою – *дана теорема.*

Обернене твердження також істинне, тобто є теоремою. Тоді за логічним квадратом будуть істинними всі чотири твердження, тобто матимемо ще три теореми.

2) Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно рівні, є паралелограмом – *обернена теорема*.

3) У чотирикутника. не паралелограма, протилежні сторони попарно нерівні – *теорема, протилежна прямій* (*заданій*).

4) Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно не рівні,

не є паралелограмом – *теорема, протилежна оберненій.*

2. Нехай A: "CL є медіаною рівностороннього трикутника", B: "CL є висотою рівностороннього трикутника". Тоді:

1) $A \Rightarrow B$: "Якщо CL є медіаною рівностороннього трикутника, то CL є висотою рівностороннього трикутника" – *дана теорема*;

2) $B \Rightarrow A$: "Якщо CL є висотою рівностороннього трикутника, то CL є медіаною рівностороннього трикутника" – *теорема, обернена до даної*;

3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$: "Якщо CL не є медіаною рівностороннього трикутника, то CL не є висотою рівностороннього трикутника" – *теорема, протилежна даній*;

4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$: "Якщо CL не є висотою рівностороннього трикутника, то CL не є медіаною рівностороннього трикутника" – *теорема, обернена до протилежної.*

2. Нехай a: "$n \vdots 3$", b: "$n \vdots 2$", c: "$n \vdots 6$", де вирази $n \vdots t, \overline{n \vdots t}$ відповідно, означають твердження: "n ділиться на t", "n не ділиться на t". Тоді

1) $a \wedge b \Rightarrow c$: "Якщо $n \vdots 3$ і $n \vdots 2$, то $n \vdots 6$";

2) $c \Rightarrow a \wedge b$: "Якщо $n \vdots 6$, то $n \vdots 3$ і $n \vdots 2$";

3) $\overline{a \wedge b} \Rightarrow c = \left(\overline{a} \vee \overline{b}\right) \Rightarrow \overline{c}$: "Якщо n не $\vdots 3$ або n не $\vdots 2$, то n не $\vdots 6$";

4) $\overline{c} \Rightarrow \overline{a \wedge b} = c \Rightarrow \left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right)$: "Якщо n не $\vdots 6$, то n не $\vdots 3$ або n не $\vdots 2$".

Аналогічно можна дістати такі комплекти з чотирьох теорем і тоді, коли компоненти A і B даної теореми $A \Rightarrow B$ мають будь-яку іншу структуру. Так, до теореми $a \wedge b \Rightarrow c$ існують, крім $c \Rightarrow a \wedge b$ ще й такі обернені теореми: $a \wedge c \Rightarrow b$, $b \wedge c \Rightarrow a$. У цих випадках іноді розширюють поняття оберненої теореми, розглядаючи не одну, а кілька обернених до даної теорем.

Наприклад.

Нехай a: "$n \vdots 3$", b: "$n \vdots 2$", c: "$n \vdots 6$". Тоді можна розглядати ще й такі дві теореми, обернені до даної:

5) $a \wedge c \Rightarrow b$: "Якщо $n \vdots 3$ і $n \vdots 6$ то $n \vdots 2$";

6) $b \wedge c \Rightarrow a$: "Якщо $n \vdots 2$ і, $n \vdots 6$ то $n \vdots 3$".

І в свою чергу ще такі дві теореми, протилежні до оберненої:

7) $\overline{b} \Rightarrow \overline{a} \vee \overline{c}$: "Якщо n не $\vdots 2$, то n не $\vdots 3$ або n не $\vdots 6$";

8) $\overline{a} \Rightarrow \overline{b} \vee \overline{c}$: "Якщо n не $\vdots 3$, то n не $\vdots 2$ або n не $\vdots 6$".

Для довільної теореми виду $A \vee B \Rightarrow C$ розглядають іноді, крім $C \Rightarrow A \vee B$, ще дві обернені $C \Rightarrow A, C \Rightarrow B$. Зазначимо, що теореми, в яких умова має вигляд диз'юнкції, зустрічаються рідко.

У наведених прикладах всі чотири спряжені теореми були істинними. Проте це не завжди так: для висловлень a: “Кут $\alpha = 30°$”, b: “$\sin\alpha = \frac{1}{2}$” теореми $a \Rightarrow b$ і $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ істинними, а теореми $b \Rightarrow a$ і $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ – хибними.

3. Розглянемо з точки зору алгебри висловлень питання про ***необхідні*** й ***достатні*** умови при формуванні теорем.

З означення імплікації випливає, що коли висловлення $A \Rightarrow B$ – істинне, то для істинності A необхідно, щоб істинним було B (при $B = 0$ і $A \Rightarrow B = 1$ A повинно бути хибним), а істинність A достатня для істинності B (при $A = 1$ і $A \Rightarrow B = 1$ є істинним). Тому говорять, що при $A \Rightarrow B = 1$ істинність висловлення A є достатньою умовою для істинності B, а істинність B – необхідною умовою для істинності A.

Необхідна умова може не бути достатньою, а достатня – не завжди необхідною. Справді, якщо $A \Rightarrow B = 1$, то істинність A не обов'язково буде необхідною умовою для істинності B: B є істинним також при $A = 0$, бо $0 \Rightarrow 1 = 1$. Аналогічно істинність B не обов'язково буде достатньою умовою для істинності A: при $B = 1$ імплікація $A \Rightarrow B$ є істинною також і при $A = 0$.

Приклади

1. Позначимо: a: “Запис числа закінчується цифрою 5”, b: “Число ділиться на 5”. Тут істинність a достатня для істинності b: якщо число (ціле) закінчується цифрою 5, то цього вже достатньо, щоб воно ділилося на 5. Проте істинність b не є необхідною для істинності a: число може ділитися на 5 і тоді, коли воно закінчується цифрою 0, а не 5.

2. Нехай a: “Даний многокутник – правильний”, b: “У нього можна вписати коло”. Тоді висловлення a є достатньою умовою для b, але не необхідною, бо існують неправильні многокутники (наприклад, різносторонній трикутник), в які також можна вписати коло. Висловлення b є необхідною умовою для a, але не достатньою, бо якщо в многокутник можна вписати коло, то це ще не означає, що він правильний.

3. Нехай істинним є таке висловлення: “Дівчина йде на прогулянку, якщо її хлопець йде на прогулянку”. Як бачимо, воно є імплікацією таких двох простих висловлень: A: “Дівчина йде на

прогулянку”, B: “Хлопець дівчини йде на прогулянку”, тобто $A \Rightarrow B$. Тут істинність A достатня для істинності B: якщо дівчина йде на прогулянку, то цього вже достатньо, щоб її хлопець йшов на прогулянку (бо вона йде лише тоді, коли йде хлопець). Проте істинність B не є необхідною для істинності A (хлопець може піти на прогулянку і без дівчини. Це вдалий приклад-жарт, але як говорять деякі філософи нашого часу: “В кожному жарті є лише доля жарту”).

Якщо висловлення $B \Rightarrow A$ також істинне, то, аналогічно, істинність B є достатньою умовою для істинності A, а істинність A – необхідна для істинності B. З істинності висловлень $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ виходить істинність їхньої кон'юнкції:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = A \Leftrightarrow B.$$

У цьому випадку A є необхідною й достатньою умовою для B, а B, в свою чергу, є також необхідною й достатньою умовою для A. Як відомо, це передається такими словами: «A є необхідною й достатньою умовою для B”, “A тоді і тільки тоді, коли B”, “Для A необхідно й достатньо, щоб B”.

Розглянемо, як зв'язані терміни “тоді”, “тільки тоді” з термінами “необхідно”, “достатньо”. Вираз “A тоді, коли B” означає “якщо B, то A”, тобто теорему $B \Rightarrow A$, в якій B є достатньою умовою для A, якщо $B \Rightarrow A = 1$. Отже, вираз “A тоді, коли B” означає “A необхідно для B”, або “B достатньо для A”.

Аналогічно вираз “A тільки тоді, коли B” означає: “Якщо не B, то не A”, тобто теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A} = A \Rightarrow B$, в якій A є достатньою умовою для B. Звідси вираз “A тільки тоді, коли B” означає “A достатньо для B” і “B необхідно для A”.

Отже, вираз “A тоді і тільки тоді, коли B” означає “B достатньо для A і A достатньо для B”, “A необхідно і достатньо для B”.

Приклади

1. Нехай a : “Діагоналі чотирикутника у точці перетину діляться навпіл”, b: “Такий чотирикутник – паралелограм”. Тоді $a \Rightarrow b = 1$ і $b \Rightarrow a = 1$, тобто $a \Leftrightarrow b = 1$. Отже, a достатньо для b і b достатньо для a.

2. Якщо a: “$n \vdots 5$”, b : “$n \vdots 3$”, c : “$n \vdots 7$”, d : “$n \vdots 105$”, то, позначивши $A : a \wedge b \wedge c, B : d$, дістанемо, що $A \Leftrightarrow B = 1$, тобто

подільність числа на 105 є необхідною і достатньою умовою для подільності його на 5, 3 і 7.

3. Нехай a : “Даний трикутник – прямокутний”, b : “У даному трикутнику квадрат більшої сторони є сумою квадратів двох інших сторін”. Тоді $a \Leftrightarrow b = 1$ і висловлення a є необхідною й достатньою умовою для b.

4. Теореми можна доводити аналітично, синтетично і аналітико-синтетично. *Аналітично* – це коли наперед видно кожен крок доведення і виходячи з того, що дане твердження істинне, будуємо ланцюг необхідних умовиводів так, щоб кожне попереднє судження було необхідною умовою для наступного. *Синтетично* доводять, коли невідомо з чого почати. Часто теореми доводять *аналітико-синтетично*.

У математиці існує ряд загальних методів доведення теорем, які використовуються найчастіше. Розглянемо деякі з них.

Дедуктивне доведення або ***розв’язування соритів***. Це основний метод математичних доведень. Все доведення є ланцюжок логічних умовиводів (сорит), кожен крок якого ґрунтується на певному логічному законі, аксіомі або даній теоремі. Розв’язання сориту є наслідок застосувань правила силогізму:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3),$$

тобто сорит має таку структуру:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n).$$

Індукцією називається метод дослідження, заснований на спостереженнях і досвіді (induktio – наведення). Не слід змішувати метод математичної індукції (переходу від n до $n+1$) з індуктивними методами. Існує два індуктивних методи: метод неповної індукції і метод повної індукції. ***Метод повної математичної індукції*** відрізняється від ***методу неповної індукції*** тим, що в неповній індукції, розглянувши кілька окремих випадків і помітивши певну закономірність, заключають, що ця закономірність має місце для будь-якого випадку. Через те що не для всіх можливих випадків твердження перевірене, воно може виявитись взагалі і неправильним. Наприклад, при підстановці у квадратний тричлен $x^2 + x + 41$ цілих значень змінної $x = 0$, 1, 2, 3, 4, ..., 39, -1, -2, -3, -4 і т. д. кожен раз дістаємо значення тричлена, що є простим числом. На основі цих окремих випадків можна було б висунути гіпотезу, що значення даного тричлена при всіх цілих значеннях змінної x є прості числа. Проте ця гіпотеза неправильна: уже при $x = 40$ маємо:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41 \cdot 41$$

– складене число. Ще більш очевидно, що при $x = 41$ значення тричлена ділиться на 41.

Доведення методом ***повної індукції*** полягає в розгляді всіх окремих випадків (чисел, фігур тощо), при яких теорема правильна. Цей метод ще називають ***методом вичерпування***. Кількість таких випадків повинна бути скінченою і невеликою за кількістю. Якщо можна розглянути всі можливі випадки і для кожного випадку твердження доведене, то воно буде істинним взагалі.

Наприклад доведемо теорему:

Теорема. Значення виразу $s = a^2 + b^2$, $a, b \in Z$, є число, що при діленні на 4 не має в остачі 3.

Доведення теореми проведемо, розглядаючи три випадки: 1) обидва числа парні; 2) обидва числа непарні; 3) одне число парне, друге – непарне.

1) Нехай a, b – парні, тобто $a = 2m, b = 2n$, $m, n \in Z$. Дістаємо

$$s = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2),$$

тобто $s \vdots 4$, остача дорівнює 0.

2) Нехай a, b – непарні, тобто $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$. Маємо

$$S = a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 =$$

$= 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$, а це означає, що при діленні s на 4 дістаємо остачу 2, а не 3.

3) Нехай a – непарне, b – парне (навпаки буде той самий випадок, бо ми розглядаємо суму, а від перестановки доданків сума не міняється), тобто $a = 2m + 1$, $b = 2n$. Маємо:

$$S = a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 =$$

$= 4(m^2 + n^2 + m) + 1$, а це означає, що при діленні s на 4 дістаємо остачу 1, а не 3.

Теорема доведена.

Для доведення, наприклад теореми про вимірювання величини вписаного в коло кута розглядають випадки: центр кола лежить 1) на одній із сторін кута, 2) всередині кута, 3) поза вписаним кутом.

Конкретний зміст теореми підказує, які саме випадки слід розглядати, а термін “повна індукція” вимагає аналіз усіх їх.

Непряме доведення. Розглянуті два попередні методи доведення теорем є прямими: використовуючи умови теореми, аксіоми, раніше доведені теореми, означення, логічні правила виведення, послідовно будується ланцюг умовиводів, останній з яких і завершував процес доведення.

Розглянемо тепер непряме доведення.

Зведення до абсурду, *або* ***метод від супротивного***. Цей метод ґрунтується на наступних рівносильностях: $A \Rightarrow B = A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$, $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Полягає він в тому, що в теоремі $A \Rightarrow B$ (коментарі теореми опускаємо) припускають, що правильним буде $\overline{B}$. Якщо в результаті цього припущення приходять до неправильного висновку, абсурду, тобто $A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$, або $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$то роблять висновок, що наслідок B теореми $A \Rightarrow B$ правильний.

Цим способом доводять, наприклад, такі теореми.

Теорема 1. Якщо дві різні прямі a і b паралельні третій прямій c, то вони паралельні між собою.

Позначимо S: “$a \parallel c$”, T: “$b \parallel c$”, K: “$a \neq b$”, B: “$a \parallel b$”. Тоді символічно теорема запишеться так:

$S \wedge T \wedge K \Rightarrow B$, або $A \Rightarrow B$, де $A \sim S \wedge T \wedge K$.

Припустимо $\overline{B}$, тобто що a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в якійсь точці P, яка не належить c. Дістаємо, що через точку P поза прямою c можна провести дві прямі a і b, які паралельні c, а це суперечить аксіомі паралельності, тобто є хибним твердженням. Отже, правильним твердженням є B.

Теорема 2. Довести, що коли ab – непарне число, то обидва множники a і b – непарні цілі числа.

Позначимо A: “Добуток ab – непарне число”, T: “a – непарне число”, S: “a – непарне число”. Тоді теорема скорочено запишеться так: $A \Rightarrow S \wedge T$, або $A \Rightarrow B$, де $B \sim S \wedge T$.

Припустимо, що $\overline{B} = \overline{S \wedge T} = \overline{S} \vee \overline{T}$, тобто один із множників a або b є парним числом. Нехай, наприклад, a – парне, тобто $a = 2m, m \in Z$. Тоді $ab = 2mb$ – парне число, тобто дістали $\overline{A}$. Таким чином, довели теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, а цим самим і дану теорему $A \Rightarrow B$.

5. Математична логіка, та й в широкому розумінні цього слова, логіка – повинна допомогти нам робити правильні умовиводи, тобто правильно міркувати. Якщо ці логічні засоби порушуються, використовуються логічно неправильні форми міркувань, то з правильних вихідних даних дістають хибні висновки. Розглянемо, наприклад, такі два висловлення A: "Даний многокутник правильний", B: "У нього можна вписати коло". Складемо з цих висловлень таке неправильне міркування: "Якщо даний трикутник рівносторонній, то в нього можна вписати коло; даний трикутник не є рівносторонній, отже, в нього не можна вписати кола".

Запишемо ці міркування у вигляді формули. Матимемо: $A \Rightarrow B$; $\overline{A}$. Отже, $\overline{B}$, або у вигляді формули $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. Проте ця структура міркування логічно неправильна, бо при $B = 1$, $A = 0$ формула набуває значення "хибність". Таким чином, умовивід логічно неправильний. Він і фактично неправильний, бо, наприклад, коло можна вписати в будь-який трикутник.

Поширеним прикладом неправильних міркувань є непродумане використання неповної індукції, коли загальний висновок зроблено на основі окремих спостережень, експериментів, розгляду скінченої кількості їх. Використання неповної індукції може привести як до правильних, так і до неправильних висновків. Так, побудувавши кілька графіків лінійних рівнянь з двома змінними в прямокутній системі координат і побачивши, що вони є прямими лініями, робимо висновок, що графік кожного лінійного рівняння з двома змінними є пряма лінія. Цей умовивід – правильний. Правильним буде й такий умовивід. Знайдемо кілька прикладів сум послідовних непарних натуральних чисел $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ і т. д. Кожна з цих сум дорівнює квадрату кількості доданків. З цього робимо висновок, що закономірність правильна для будь-якої кількості таких доданків.

Неповна індукція дав змогу тільки підмітати закономірність, сформулювати гіпотезу, яку потім треба обґрунтувати або спростувати, навівши відповідний контрприклад, при якому ця закономірність вже не справджується. Розглянемо приклади, де неповна індукція призводить до хибного результату.

Приклади

1.У XVII ст. математик П. Ф є р м а (1601–1665) помітив, що числа виду $F_n = 2^{2^n} + 1$ при $n = 0,1,2,3,4$ – прості:

$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3,\ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,\ F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257,\ F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$.

Ферма висловив припущення, що при будь-якому $n \in \mathrm{N}$ числа такого виду є простими (їх стали називати простими числами Ферма). Ця гіпотеза була висловлена на основі кількох обчислювальних експериментів, У 1735 р. видатний математик Л.Ейлер (1707–1783) показав, що при $n = 5$, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$, тобто F_5 не є простим числом. Цей контрприклад спростував гіпотезу Ферма.

2. Відомий математик Д.О.Граве (1863-1939) висловив припущення, що числа виду $H_P = 2^{P-1} - 1$, де p – просте число, не діляться на p^2. Це припущення справджується для всіх простих чисел, менших від 1000. Так, при $p = 2$ число $2^{2-1} - 1 = 1$ не ділиться на $2^2 = 4$, при $p = 3$ число $2^{3-1} - 1 = 3$ не ділиться на $3^2 = 9$ і т. д. Проте через деякий час виявилось, що при $p = 1093$ число $2^{1092} - 1$ ділиться на 1093^2. Гіпотезу Граве було спростовано.

Отже: в результаті вивчення даної теми студент повинен

з н а т и: типи теорем (за будовою); чотири види теорем; як зв'язані терміни “тоді”, “тільки тоді” з термінами “необхідно”, “достатньо”; способи і методи доведення теорем;

у м і т и: зводити теореми до канонічної форми; записувати спряжені теореми; розрізняти необхідні і достатні умови; доводити теореми методом від супротивного; знаходити помилки в неправильних міркуваннях.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Записати подані нижче теореми у вигляді формул логіки предикатів, виділити коментарії (пояснюючі частики) умови і наслідок, записати спряжені до них теореми, виділити необхідні й достатні умови:

а) якщо даний чотирикутник ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні;

б) деякі дійсні числа – раціональні;

в) якщо кожне з двох чисел ділиться на третє число, то й сума їх ділиться на це число;

г) діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл;
д) діагоналі рівнобічної трапеції рівні;
е) у рівнобедреному трикутнику дві медіани рівні;
є) опуклий многокутник не може мати більше трьох гострих кутів;
ж) якщо запис числа закінчується нулем, то це число ділиться на 5;
з) якщо вільний член квадратичного рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ дорівнює нулю, то один з коренів цього рівняння дорівнює нулю;
й) якщо в трикутнику один кут тупий або прямий, то два Інші – гострі;
і) у паралелограмі його діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

2. Довести методом від супротивного такі твердження:
а) опуклий многокутник не може мати більше трьох гострих кутів;
б) якщо $\frac{a-b}{a+b}$ – нескоротний дріб, то дріб $\frac{a}{b}$ – також нескоротний;
в) якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – відмінні від нуля вектори, то з рівності $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$ випливає, що $\vec{a}\parallel\vec{b}$;
г) якщо формула $A\wedge B\Rightarrow C$ тотожно істинна, то $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)$ – також тотожно істинна;
д) якщо в деякій площині α дві прямі a і b перпендикулярні до прямої c, то вони паралельні між собою;
е) ні при жодному цілому n частки $\frac{n-6}{15}$ і $\frac{n-5}{24}$ не можуть бути одночасно цілими числами;
е) якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то через вершини цього чотирикутника можна провести коло;
ж) сума й різниця раціонального числа r та ірраціонального числа q – ірраціональні;
з) добуток rq і частка $\frac{r}{q}$, $r\neq 0, q\neq 0$, раціонального числа r та ірраціонального q є числа ірраціональні;
й) число $\sqrt{6}$ – ірраціональне;
і) число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ є ірраціональним.

Список рекомендованої літератури

1. Кужель О.В. Елементи теорії множини і математичної логіки. К.: Радянська школа, 1977.
2. Пышкало А.М. и др. Теоретические основы начального курса математики. М.: Просвещение, 1974.
3. Архипов Б.М. Математика. – Минск, Выш.шк., 1976, с.51-75.
4. Виленкин Н.Я., Пишкало А.М., Рождественская В.Б. Математика. – М.: Просвещение, 1977, с.96-106.
5. Столяр А.А, Лельчук М.П. Математика. Минск, Высшая школа, 1975.
6. Виленкин Н. Я., Лаврова Н, Н., Рождественская В. Б. и др. Задачник-практикум по математике: М. Просвещение, 1977.
7. Конфорович А. Г., Лебедева З. Є. Формування елементарних математичних уявлень у дітей дошкільного віку. К. : Вища шк. Головне вид-во, 1976.
8. Кухар В, М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. 2-е вид. К. : Вища шк. Головне вид-во, 1987.
9. Боровик В. Н. та ін. Математика К.; Вища шк. Головне вид-во, 1980.
10. Пышкало А. М., Стойлова Л, М., Лаврова Н. Н.и др. Сборник задач по математике М.: Просвещение. 1979.

Підписано до друку 26.12.2005 р. Формат 60×84/16.
Папір ксерокс ний. Гарнітура „Times New Roman”.
Ум. друк. арк. 7,8. Тираж 300. Зам.

76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57
Друкарня видавництва „Плай”
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника