Прикарпатский национальный университет
имени Василия Стефаника

Львовский государственный университет
безопасности жизнедеятельности

Р. М. Таций, М. Ф. Стасюк,
В. В. Мазуренко, О. О. Власий

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Львов ◦ 2017

ББК 22.161.6
УДК 517.926
MSC 34A30, 34A36, 34A37

Рекомендовано Ученым советом Прикарпатского национального университета имени Василия Стефаника

Рецензенты:

Каленюк П. И., д-р физ.-мат. наук, проф., директор Института прикладной математики и фундаментальных наук Национального университета "Львовская политехника";

Лазакович Н. В., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета;

Радыно Я. В., чл.-кор. НАН Беларуси, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета;

Сухорольский М. А., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Национального университета "Львовская политехника".

Обобщенные квазидифференциальные уравнения: Пер. с укр. / Р. М. Таций, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко, О. О. Власий. – Львов: Изд-во ЛГУ БЖД, 2017. – 303 с.

ISBN 978-966-2405-84-2

В монографии впервые систематически изложена теория обобщенных квазидифференциальных уравнений, активно развивающаяся последние несколько десятилетий. В основе теории лежит концепция квазипроизводных, позволяющая свести к минимуму требования гладкости коэффициентов уравнений. Лучшему пониманию теоретического материала способствует большое число детально разобранных примеров, часть из которых имеет явно выраженный прикладной характер.

Для ученых, аспирантов и студентов, специализирующихся в области дифференциальных уравнений, механиков и инженеров, имеющих дело с дискретно-непрерывными моделями.

ISBN 978-966-2405-84-2

9 789662 405842

Оглавление

Предисловие

Идея создания этой книги возникла у первых двух авторов достаточно давно. Однако сама книга в том виде, который она имеет сейчас, появилась в некоторой степени случайно. Весной 1994 года вышел из печати препринт с одноименным названием [97] как результат работы семинара "Дискретно-непрерывные краевые задачи" при кафедре высшей математики Львовской политехники. В нем, преимущественно в декларативной форме, была изложена концепция квазипроизводных и построена общая теория скалярных и векторных квазидифференциальных уравнений с коэффициентами-мерами и правыми частями — обобщенными производными высших порядков от функций локально ограниченной вариации. Изложенная теория стала фундаментом дальнейших научных исследований в этом направлении [17–20, 58–61, 64–68, 70, 71, 89–97, 99–113, 165, 166], результаты которых докладывались на многочисленных научных конференциях, и была положена в основу лекций, которые в виде специальных курсов читались авторами на протяжении последних десяти лет в Национальном университете "Львовская политехника", Прикарпатском национальном университете имени Василия Стефаника, Львовском государственном университете безопасности жизнедеятельности, Университете Казимира Великого (Польша), Люблинской Политехнике (Польша).

Небольшой тираж (100 экз.) этого препринта быстро разошелся и за короткое время это издание стало библиографической редкостью. Поэтому возникла необходимость опубликовать его расширенный вариант. Однако, по причинам объективного и субъективного характера, такая публикация задерживалась. В то же время за те 17 лет, что прошли с момента опубликования препринта, изложенная в нем теория обогатилась новыми важными результатами, которые гармонично дополняют предыдущие исследования, с учетом чего не включить их в эту монографию было бы неуместным.

Основную часть монографии составляют результаты, полученные авторами самостоятельно или в соавторстве. Из других результатов приведены (порой без строгих математических доказательств, но всегда с указанием источников, где их можно найти) только результаты, имеющие непосредственное отношение к вопросам, которые рассматриваются в этой монографии. Это касается прежде всего параграфа, посвященного мерам Стилтьеса и функциям ограниченной вариации, их порождающим, а также неравенству Гронуолла-Беллмана и его обобщениям.

Монография состоит из введения и пяти глав. Во введении читатель будет иметь первую возможность познакомиться с центральным объектом монографического исследования — *квазидифференциальным уравнением* (КДУ). Надеемся также, что благодаря сделанному там краткому обзору работ, посвященных теории КДУ (начиная от уравнений с непрерывными и суммируемыми по Лебегу коэффициентами и заканчивая уравнениями с распределениями в коэффициентах), читатель сможет лучше сориентироваться в современных вопросах этой теории. Сразу отметим, что из широкого спектра литературы мы сосредоточили внимание лишь на работах, тесно соприкасающихся или идейно близких к тематике этой монографии.

В первой главе дано определение неклассического интеграла Римана–Стилтьеса, изучены его свойства (условие скачка, теорема о подстановке, формула Дирихле и формула интегрирования по частям), на их основе исследованы линейные матричные интегральные уравнения и соответствующие системы дифференциальных уравнений с мерами. Важной проблемой, возникающей при изучении последних, есть тот факт, что пространство обобщенных функций не является алгеброй, — в нем нельзя определить умножение, которое бы унаследовало основные свойства умножения непрерывных функций. Именно поэтому в отдельном параграфе (см. § 6) обсуждается вопрос о произведении меры на функцию ограниченной вариации и выяснены условия, при которых такое произведение корректно в обобщенном смысле. Прямым следствием такого обсуждения является построение специального класса допустимых функций, в котором существует единственное решение начальной задачи для дифференциальной системы с мерами, посредством фундаментальной матрицы представимое в форме Коши и удовлетворяющее определенным условиям скачка в точках разрывов коэффициентов системы.

Вторая глава посвящена развитию концепции квазипроизводных и построению линейной (элементарной) теории КДУ с коэффициентами-мерами и правыми частями — обобщенными производными высших порядков от функций локально ограниченной вариации. Здесь, в частности:

путем наложения определенных условий на коэффициенты уравнения выделен широкий класс корректных обобщенных КДУ, при исследовании которых не возникает проблема умножения функционалов, и указана процедура приведения таких уравнений к дифференциальным системам с мерами;

введено понятие решения исходного и сопряженного с ним КДУ и указан способ определения соответствующих им квазипроизводных, обладающих свойством взаимообусловленности в том смысле, что в случае, если квазипроизводные для одного из уравнений определены, то квазипроизводные для другого уравнения определяются однозначно;

для однородных взаимно сопряженных КДУ с коэффициентами-мерами сформулированы в терминах соответствующих им квазипроизводных и доказаны теоремы о существовании и единственности решений начальных задач, а также указана характеристика их (решений) гладкости;

введено понятие квазивронскиана решений исходного и сопряженного уравнений, для каждого из уравнений получен аналог формулы Лиувилля–Остроградского–Якоби, введено понятие фундаментальной системы решений (ФСР) и выяснена структура общего решения;

установлен максимальный порядок обобщенной производной от функции локально ограниченной вариации в правой части неоднородного КДУ, для которого уравнение остается корректным даже при условии, что точки сингулярности коэффициентов уравнения и правой части совпадают.

Одним из центральных результатов второй главы является структура фундаментальной матрицы, соответствующей КДУ с коефициентами-мерами. Как выяснилось, ее удается построить с помощью лишь одной "функции Коши" и ее смешанных квазипроизводных в смысле исходного и сопряженного уравнений. Это позволило установить тесную связь между решениями этих уравнений, а также получить представление функции Коши и ее смешанных квазипроизводных через ФСР. Отметим, между прочим, тот факт, что поскольку для обыкновенных дифференциальных уравнений (так же, как и для квазидифференциальных) квазипроизводные в смысле исходного и сопряженного уравнений, вообще говоря, не совпадают, то структура фундаментальной матрицы до сих пор не была известна даже для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементы линейной теории обобщенных КДУ в пространстве вектор-функций читатель найдет в третьей главе монографии.

В четвертой главе изучаются обобщенные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ-особенностями и тесно связанные с ними два специальных класса обобщенных КДУ — так называемые вырожденные и частично вырожденные уравнения. Специфическая структура коэффициентов последних позволяет не только явно находить вид соответствующей им матрицы Коши, но и конструктивно представлять решения этих уравнений в виде сплайнов. Практический интерес к таким уравнениям вызван, в частности, их применением для получения приближенного решения КДУ общего вида.

Приближенным методам решения обобщенных КДУ и дифференциальных систем с мерами как раз и посвящена заключительная пятая глава монографии. Сначала для КДУ с обобщенными коэффициентами дано понятие и предложена процедура построения точных рекуррентных соотношений, которые являются аналогами точных разностных схем [115, 117] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее, с использованием одного специального обобщения неравенства Гронуолла–Беллмана, получены условия, при которых приближенное решение дифференциальной системы с мерами можно получить аппроксимацией функций, порождающих эти меры. Наконец, на примере обобщенного КДУ произвольного порядка рассмотрены такие два важные на практике способы аппроксимации коэффициентов, как L-аппроксимация (линеаризация) и D-аппроксимация (дискретизация), которые при относительно незначительной вычислительной трудоемкости позволяют получать результаты с нужной точностью.

Все главы монографии авторы старались изложить достаточно подробно, с полными доказательствами и замечаниями, иллюстративными, контрольными и модельными примерами (в частности, теоретический материал последних двух глав постоянно иллюстрируется примерами) так, чтобы содержание монографии было понятно не только специалистам, но и аспирантам и студентам старших курсов, которые уже занимаются или только интересуются (квази)дифференциальными уравнениями, а также механикам и инженерам, которые на практике имеют дело с подобными задачами.

Следует отметить, что изложенная в этой монографии общая теория обобщенных КДУ легла в основу теории дискретно-непрерывных самосопряженных и несамосопряженных краевых задач [**18**–**20**, **58**–**61**, **64**–**68**, **70**, **71**, **102**, **103**, **106**–**108**, **111**, **112**, **165**, **166**] и построения приближенных методов их решения [**17**, **90**, **99**, **100**, **109**]. Этим проблемам мы надеемся в ближайшее время посвятить отдельные монографии.

Считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность академику НАН Украины *Анатолию Михайловичу Самойленко* и член-корреспонденту НАН Беларуси *Якову Валентиновичу Радыно* за неизменную поддержку этого научного направления.

Львов, февраль 2011 г. *Авторы*

Введение

A major task of mathematics to-day is to harmonize the continuous and the discrete, to include them in one comprehensive mathematics, and to eliminate obscurity from both.

Главная задача математики наших дней состоит в достижении гармонии между континуальным и дискретным, включении их в единое математическое целое и удалении из них всего неясного.

E.T. Bell, Men of Mathematics, I
Penguin Books, London, 1953.

Исследования различных физических процессов, учитывающих естественное единство дискретного (сосредоточенные величины) и непрерывного (распределенные величины), приводят к необходимости создания адекватных математических моделей. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями, содержащими слагаемые вида $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$ [22, 42, 47, 76]. При условии недостаточной гладкости коэффициента $p(x)$ такие уравнения уже нельзя привести (с помощью операции n-кратного дифференцирования) к обыкновенным дифференциальным. Чтобы подчеркнуть этот важный факт, в научной литературе их называют *квазидифференциальными* уравнениями (КДУ).

Впервые термин "*квазидифференциальное уравнение*" встречается в работах Д. Шина [124–126]. Собственно, ему и принадлежит идея введения квазипроизводных (тем не менее сам термин "*квазипроизводная*" он не употребляет), которая позволяет отказаться от требований гладкости коэффициентов или свести их к минимуму. В своих работах [**127**, **128**] автор рассматривал довольно общие КДУ вида

$$f^{[n]} - lf = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.1}$$

где

$$f^{[0]} = P_{00}f,\ f^{[k]} = iP_{kk}\frac{d}{dx}f^{[k-1]} + \sum_{\nu=0}^{k-1} P_{k\nu}f^{[\nu]},\ k = \overline{1,n},\ i = \sqrt{-1},$$

и сопряженные с ними

$$g^{\{n\}} - lg = 0, \quad \operatorname{Im} l \neq 0, \quad a < x < b, \tag{0.2}$$

где

$$g^{\{0\}} = Q_{00}g, \quad g^{\{k\}} = iQ_{kk}\frac{d}{dx}g^{\{k-1\}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{k\nu}g^{\{\nu\}},\ k = \overline{1,n},$$

$$Q_{k\nu} = \overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}}, \quad \nu \leqslant k, \quad k,\nu = \overline{0,n},$$

при условии, что комплекснозначные функции $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu = \overline{0,n}$, определены и измеримы на (a,b), а функции $P^{-1}_{kk}(x)$, $k = \overline{0,n}$, и $P_{k\nu}(x)$, $\nu < k$, $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, квадратично суммируемы (по Лебегу[1)]) на каждом конечном замкнутом сегменте $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. При этом функции $f(x)$ и $g(x)$ считаются решениями уравнений (0.1) и (0.2) соответственно, если выражения $f^{[k]}(x)$ и $g^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,n-1}$, являются абсолютно непрерывными и удовлетворяют равенствам (0.1) и (0.2) почти везде на (a,b).

В работе [**127**] для уравнений (0.1) и (0.2) доказаны теоремы о существовании и единственности решений начальных задач и установлена связь между ними. Показано также, что дифферен-

---

1) Лебег Анри Леон (Lebesgue Henri Leon, 1875–1941) — французский математик, профессор Парижского университета, член Парижской АН (1922), иностранный член-корр. АН СССР (1929).

циальные выражения $f^{[n]}$ и $g^{\{n\}}$ являются самосопряженными (по Лагранжу[2)]), если и только если функции $P_{k\nu}(x)$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu=\overline{0,n}$, почти везде на (a,b) удовлетворяют равенствам

$$\overline{P_{n-\nu,n-k}P^{-1}_{n-\nu,n-\nu}P_{n-k,n-k}} = P_{k\nu}, \quad \nu \leqslant k,$$
$$k=\overline{0,n-[n/2]},\ \nu=\overline{0,[n/2]}.$$

Понятно, при таких условиях $Q_{k\nu} = P_{k\nu}$, $\nu \leqslant k$, $k,\nu=\overline{0,n}$, и $f^{[k]} = g^{\{k\}}$. Обобщая известные результаты Г. Вейля[3)] [**183**] и В. Виндау [**186**] о количестве суммируемых с квадратом решений для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков на КДУ вида (0.1), Д. Шин получил следующие результаты:

(А) *количество m линейно независимых решений уравнения (0.1), принадлежащих к $L_2(0,\infty)$, при $n=2k$ и $\operatorname{Im} l \neq 0$ удовлетворяет неравенству $m \geqslant k$.*

(Б) *имеет место альтернатива: $m=k$, либо $m=n$.*

Впоследствии И. М. Глазман [**23**] показал, что результат (Б) как у В. Виндау, так и у Д. Шина является несколько ошибочным и что на самом деле m удовлетворяет неравенству $k \leqslant m \leqslant n$.

В роботе [**128**] дано применение теории неограниченных симметричных операторов к КДУ (0.1) и (0.2) подобно тому, как это ранее сделал М. Стоун[4)] [**178**] для уравнений второго порядка.

[2)] Лагранж Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis, 1736–1813) — французский математик и механик, профессор Артиллерийской школы в Турине, Нормальной и Политехнической школ в Париже, член Берлинской АН (1759), Парижской АН (1772), иностранный член Петербургской АН (1776).

[3)] Вейль Герман (Weyl Hermann, 1885–1955) — немецкий математик и физик, ученик Д. Гильберта, профессор Цюрихского технологического института, Геттингенского университета, Принстонского института перспективных исследований, член Национальной АН США, награжден Международной премией им. М. И. Лобачевского (1927).

[4)] Стоун Маршалл Харви (Stone Marshall Harvey, 1903–1989) — американский математик, профессор Колумбийского, Гарвардского, Йельского, Чикагского и Массачусетского университетов, член Национальной АН США (1938), президент Американского математического общества (1943, 1944).

Попутно отметим, что сингулярные КДУ являются не только одной из основных областей применения этой теории, но и одним из источников ее возникновения и развития. Так, исследования Вейля впервые позволили выявить характерные черты будущей теории неограниченных симметричных операторов. После создания этой теории результаты Вейля были истолкованы с более общей точки зрения Стоуном. Как известно, исходным пунктом теории Вейля является альтернатива: случай "предельного круга" (Grenzkreisfall) — случай "предельной точки" (Grenzpunktfall). Аналогичная альтернатива была обнаружена Н. И. Ахиезером[5)] и М. Г. Крейном[6)] при изучении проблемы моментов на оси [**4**, **6**]. С точки зрения теории операторов в гильбертовом пространстве обе эти альтернативы имеют общую природу.

Идеи Шина оказались достаточно плодотворными и впоследствии были развиты в различных аспектах в трудах М. Г. Крейна [**50**, **51**], Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [**5**, **24**], М. А. Наймарка [**72**], С. А. Орлова [**77**–**79**], А. В. Штрауса [**129**–**132**], В. И. Когана, Ф. С. Рофе-Бекетова и А. М. Холькина [**44**, **45**, **82**, **172**] и других авторов.

Так, отдельные главы фундаментальных работ [**5**,**50**,**72**] посвящены самосопряженому квазидифференциальному выражению

[5)] Ахиезер Наум Ильич (1901–1980) — украинский математик, работал в учебных заведениях и научно-исследовательских институтах в Киеве, Нежине, Харькове, Алма-Ате, Москве, профессор Харьковского университета, чл.-корр. АН УССР (1934), председатель Харьковского математического общества (с 1947), лауреат премии им. П. Л. Чебышева АН СССР (1949), награжден медалью Л. Эйлера АН СССР (1957).

[6)] Крейн Марк Григорьевич (1907 –1989) — украинский математик, работал в учебных заведениях и научно-исследовательских институтах в Донецке, Одессе, Куйбышеве, Харькове, Киеве, профессор Одесского инженерно-строительного института, член-корр. АН УССР (1939), член Харьковского, Московского и Американского математических обществ, лауреат премии им. М. М. Крылова.

четного порядка

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(p_{n-k}(x) y^{(k)}\right)^{(k)} \tag{0.3}$$

и соответствующему КДУ

$$l(y) = f(x) \tag{0.4}$$

с измеримыми на интервале (a, b) и локально суммируемыми на этом интервале (т. е. суммируемыми на каждом его компактном подинтервале) коэффициентами $p_0^{-1}(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и правой частью $f(x)$. Для выражения (0.3) вводятся квазипроизводные

$$y^{[k]} = \frac{d^k y}{dx^k},\ k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n};$$
$$y^{[n+k]} = p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} y^{[n+k-1]},\ k = \overline{1, n-1},$$

и ставится задача с начальными условиями

$$y^{[k]}(x_0) = c_k,\ k = \overline{0, 2n-1} \tag{0.5}$$

для КДУ (0.4), которая имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций вместе со своими производными до $(2n-1)$-го порядка включительно. Доказательство этого факта (который остается верным также для уравнений $l(y) - \lambda y = f(x)$ с произвольным комплексным параметром λ) основывается на приведении задачи (0.4), (0.5) посредством вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[2n-1]}\right)^\top$ к виду

$$Y' = A(x)\, Y + f(x), \tag{0.6}$$

$$Y(x_0) = Y_0,\ x_0 \in I,$$

с измеримыми и локально суммируемыми на интервале (a, b) матрицей $A(x)$ и вектором $f(x)$, и последующим применением метода последовательных приближений Пикара[7]. Кроме того, в работах построена теория самосопряженных расширений симметрических операторов, порожденных самосопряженным квазидифференциальным выражением (0.3) и проведен спектральный анализ таких операторов.

Отметим, что теория операторов играет важную роль в современной математике и физике. Спектральный анализ дифференциальных операторов, то есть исследование спектра и разложение заданной функции по собственным функциям дифференциального оператора, является основным математическим аппаратом при решении задач теории колебаний, квантовой механики, атомной физики, акустики, физики твердого тела, механики жидкостей. При этом особенно важным является исследование сингулярных дифференциальных операторов, например, операторов, заданных на бесконечном интервале. Такие операторы могут иметь не только дискретный, но и непрерывный спектр, вследствие чего разложение по их собственным функциям представимо в виде интеграла Стилтьеса[8] (по спектральной функции распределения).

Вопросы, связанные с конструкцией резольвент и спектральных функций, а также с выяснением кратности спектра самосопряженных квазидифференциальных операторов четного порядка, изучались в работах [**78**, **79**, **129**–**132**].

---

[7] Пикар Шарль Емиль (Picard Charles Émile, 1856–1941) — французский математик, профессор Сорбонны и Высшей нормальной школы в Париже, член Парижской АН (1889), иностранный член-корр. Петербургской АН (1895), член Лондонского королевского общества (1909), Французской АН (1924), почетный член АН СССР (1925).

[8] Стилтьес Томас Иоаннес (Stieltjes Thomas Joannes, 1856–1894) — голландский математик, работник Лейденской обсерватории, профессор университета в Тулузе, чл.-корр. Петербургской АН (1894).

Для дифференциальных уравнений $l(y) = \lambda y$ произвольного четного или нечетного порядка m с непрерывными операторными коэффициентами общий вид самосопряженных краевых задач на конечном промежутке $[0, b]$ получено в статье [**82**]. Примененный в ней метод основывается на понятии эрмитового бинарного отношения, которое задается в произвольном гильбертовом пространстве. Оказывается, что определение такого отношения эквивалентно заданию определенных краевых условий, описывающих самосопряженные расширения для операции $l(y)$. Операции, которые рассматривались в цитированной работе, задаются выражением

$$l(y) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big\{\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)} - \\ - i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k-1)} + \big(q_{n-k}(x)y^{(k-1)}\big)^{(k)}\Big]\Big\} + p_n(x)y$$

в случае четного m и выражением

$$l(y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)} + \big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big] + \\ + \big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\},$$

если m нечетное. К тому же отмечено, что условия непрерывности коэффициентов можно ослабить, если рассматривать $l(y)$ как квазидифференциальную операцию. Собственно, так она понимается в работе Ф. Уолкера [**182**], где скалярные коэффициенты допускаются суммируемыми, а операция нечетного порядка определяется выражением

$$l(y) = (-1)^n\Big\{i\Big[q_0(x)\big(q_0(x)y^{(n)}\big)'\Big]^{(n)} + \big(p_0(x)y^{(n)}\big)^n\Big\} \; +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big\{i\Big[\big(q_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k+1)}+\big(q_{n-k}(x)y^{(k+1)}\big)^{(k)}\Big]+ \\ +\big(p_{n-k}(x)y^{(k)}\big)^{(k)}\Big\}.$$

Путем применения теории систем первого порядка в монографии [3] получены двусторонние оценки для размерности $N(\lambda)$ линейного многообразия решений с $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$ уравнения $l(y) = \lambda\omega(x)y$ с локально суммируемой на интервале (a,b) весовой функцией $\omega(x)>0$ почти везде на (a,b), а также установлено, что, если при некотором значении комплексного параметра λ все решения этого уравнения принадлежат к $L_2\big([0,\infty];\omega(x)dx\big)$, то этот факт имеет место для всех λ. Подобные вопросы для уравнений с матричными коэффициентами различными методами исследовались в [14, 45], а для уравнений с комплексными коэффициентами — в [44].

Монография [172] посвящена, прежде всего, исследованию связей между спектральными и осциляционными свойствами бесконечных систем дифференциальных уравнений произвольного порядка, которые могут быть представлены в форме дифференциального уравнения с операторнозначными (ограниченными) коэффициентами. Вдобавок авторы рассматривают также много вопросов (например, построение фундаментальной системы решений операторного дифференциального уравнения с краевыми условиями на бесконечности, описание самосопряженных расширений для бесконечных систем дифференциальных уравнений на конечном или бесконечном интервале с использованием уже упоминавшегося метода бинарных отношений и т.д.), которые не только играют ключевую роль при исследовании главной проблематики книги, но и представляют самостоятельный интерес.

Среди работ зарубежных математиков по теории квазидифференциальных операторов, кроме цитируемой работы [182], отметим также труды К. Кодаиры[9] [157], И. Вайдмана [184, 185], А. Зеттла, У. Эверитта, Л. Маркуса [138–144, 187].

Так, в [138] можно найти обзор ряда результатов по проблеме индексов дефекта операторов, начиная с фундаментальной работы Вейля за 1910 г. и до 1976 г. включительно. В статье [184] в гильбертовом пространстве $L_r^2(a,b)$ функций, квадратично интегрируемых на интервале (a,b) относительно веса $r(x)$, изучается спектральная теория операторов, порожденных дифференциальными выражениями вида

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Big\{-\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\Big\}$$

с измеримыми на (a,b) и локально суммируемыми на этом интервале коэффициентами $p^{-1}(x)$, $q(x)$ и $r(x)$, причем $p(x) > 0$ и $r(x) > 0$ почти везде на (a,b). В роботе [185] эти исследования развиты на случай формально самосопряженных квазидифференциальных выражений произвольного порядка

$$l(y) = \frac{1}{r(x)}\Bigg\{\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\big(p_j(x)y^{(j)}\big)^{(j)} + \\ + \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j\Big[\big(q_j(x)y^{(j)}\big)^{(j+1)} - \big(q_j^*(x)y^{(j+1)}\big)^{(j)}\Big]\Bigg\}$$

с измеримыми на (a,b) матричными коэффициентами $r(x)$, $p_j(x)$ и $q_j(x)$, где $r(x)$ — положительно определенная для почти всех $x \in (a,b)$ матрица, $p_j(x)$ — эрмитовы матрицы. Кроме того, в

[9] Кодаира Кунихико (Kodaira Kunihiko, 1950 г.р.) — японский математик, профессор Токийского, Гарвардского и Стэнфордского университетов, профессор Принстонского института перспективных исследований, член Национальной АН США (1978), лауреат золотой медали и премии Дж. Филдса (1954).

случае четного $n=2k$ предполагается, что матрицы $p_k(x)$ являются регулярными для всех $x \in (a,b)$, а функции $|p_k^{-1}|$, $|p_{k-1}-q_{k-1}^*p_k^{-1}q_{k-1}|$, $|p_k^{-1}q_{k-1}|$, $|p_j|$, $j=\overline{0,k-2}$, $|q_j|$, $j=\overline{0,k-2}$, $|r|$ — локально суммируемыми на (a,b); в случае нечетного $n=2k+1$ требуется, чтобы матрицы $q_k(x)$ были абсолютно непрерывными на (a,b), $\hat{q}_k(x)=q_k(x)-q_k^*(x)$ — регулярными для всех $x\in(a,b)$, а $|\hat{q}_k^{-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}q_{k-1}|$, $|\hat{q}_k^{-1}(p_k+q_k')|$, $|p_j(x)|$, $j=\overline{0,k-1}$, $|q_j(x)|$, $j=\overline{0,k-1}$, $|r(x)|$ — локально суммируемыми на (a,b).

Для $m=1$ подобный класс квазидифференциальных выражений изучался в работах [**139**, **143**, **187**], где

$$l(y)=(y^{[n-1]})'-\sum_{i=1}^{n}f_{ni}(x)y^{[i-1]},$$

причем $y^{[0]}=y$, $y^{[i]}=f_{i,i+1}^{-1}(x)\Big[\big(y^{[i-1]}\big)'-\sum\limits_{j=1}^{n}f_{ij}(x)y^{[j-1]}\Big]$, а функции $f_{ij}(x)$ для всех i,j определены и локально суммируемыми на интервале (a,b), $f_{ij}(x)=0$ почти везде на (a,b) при $2\leqslant i+1<j$, и $f_{i,i+1}(x)\neq 0$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$. Некоторые дополнительные замечания относительно линейных КДУ сделаны в [**142**]. Квазидифференциальные выражения, содержащие только члены четного порядка $\big(p_j(x)y^{(j)}\big)^{(j)}$, изучались в [**157**]. Вопросы факторизации (разложения на множители) квазидифференциальных операторов рассмотрены в [**141**]. В статье [**144**] исследованы дифференциальные вектор-операторы, порожденные счетным числом квазидифференциальных выражений на действительной оси. Изучению краевых задач для обыкновенных дифференциальных и квазидифференциальных операторов посвящена работа [**140**].

В роботах В. Я. Дерра [34–36] исследуются близкие к (0.1) КДУ вида

$$q_P^n x \equiv p_{nn}(t)\frac{d}{dt}q_P^{n-1}x + \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk}(t)q_P^k x = f(t), \tag{0.7}$$

где

$$q_P^0 x = p_{00}(t)x, \quad q_P^k x = p_{kk}(t)\frac{d}{dt}q_P^{k-1}x + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(t)q_P^\nu x, \;\; k = \overline{1,n},$$

$$P = \{p_{ik}\}, \quad p_{ik} = 0, \;\; k > i,$$

з действительными коэффициентами $p_{ik}(t)$, $k \leqslant i$, и локально суммируемыми на интервале (a,b) функциями $p_{ii}^{-1}(t)$, $p_{ik}(t)p_{ii}^{-1}(t)$, $f(t)p_{nn}^{-1}(t)$. На случай таких уравнений переносятся основные факты теории осцилляции, вводится понятие обобщённой задачи Валле-Пуссена[10)], решение которой ищется в классе функций с кусочно абсолютно непрерывными квазипроизводными. В [37] решение обычного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах определяется как решение соответствующего КДУ. Отметим также, что существенные результаты в теории КДУ на графах получены Ю. В. Покорным и его учениками. Полное представление об их достижениях и актуальные вопросы в этом направлении можно получить из монографии [38].

Поскольку мы затронули уже КДУ с обобщенными функциями[11)] в коэффициентах, то будет уместным вспомнить также о работах по обыкновенным дифференциальным уравнениям с

[10)] Валле-Пуссен Шарль Жан де Ла (de La Vallee-Poussin Charles Jean, 1866–1962) — бельгийский математик, профессор Лувенского университета, член Бельгийской АН (1909).

[11)] Локально интегрируемые функции и δ-функции описывают распределения (плотности) масс, зарядов, сил и т. п., поэтому обобщенные функции называют еще *распределениями* (Л. Шварц, 1950).

обобщенными коэффициентами. Как известно, краевые задачи для таких уравнений успешно изучаются математиками и механиками издавна. До введения понятия δ-функции точечные сингулярности появлялись в задачах в форме специфических условий сопряжения для решения и его производных в точках, которые с точки зрения современной теории относятся к сингулярным носителям коэффициентов уравнения. Такие исследования, по большому счету, имели частный характер, так как касались уравнений конкретного вида. Уравнения, коэффициенты которых содержат импульсные особенности типа δ-функции и её производных, описывают процессы в физических системах с дискретно-непрерывным распределением параметров — стержни, пластины, оболочки с сосредоточенными в точках, на линиях, отдельных поверхностях массами и моментами инерции, несущими слоями нулевой толщины и т.п.

Существенный толчок для развития эта тематика получила благодаря фундаментальным работам М. Г. Крейна и И. С. Каца (см. приложение II монографии [3] и библиографию там) по дифференциальным уравнениям второго порядка, моделирующие свободные колебания струны, масса которой допускает кроме непрерывного, ещё и точечное распределение. С математической точки зрения исследования связаны с обобщенным дифференциальным выражением

$$l_{MQ}(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^+(x) - \int\limits_{c+0}^{x+0} y(s)dQ(s)\right], \tag{0.8}$$

где $M(x)$ — неубывающая на некотором конечном или бесконечном интервале функция, $Q(x)$ — разность двух неубывающих функций, $y^+(x)$ — правосторонняя производная функции $y(x)$.

В случае, если $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывные и почти везде на интервале $M'(x) = \rho(x)$, $Q'(x) = q(x)$, дифференциальное уравнение $l_{MQ}(y) - \lambda y = 0$ равносильно уравнению

$$-y'' + q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0.$$

Дифференциальное выражение (0.8) для $Q(x) = \mathrm{const}$ изучалось В. Феллером[12)] [**146–148**]. Его работа [**146**] весьма примечательна тем, что в ней дается внутреннее аксиоматическое определение операции $-\dfrac{d}{dM(x)}y^{+}(x)$. Благодаря Феллеру такие дифференциальные операции начали применяться в теории марковских процессов. Однако автор определял операцию так, что она теряла смысл при наличии в функции $M(x)$ интервалов постоянства. Вследствие этого его результаты оказались недостаточно общими, потому что не охватывали важный случай дискретных марковских процессов таких, как например, процессы размножения и гибели [**43**] (их исследования приводят к дифференциальной операции, связанной со стилтьесовой струной [**3**, §13]).

Со спектральной теорией неоднородной нагруженной струны тесно связана (см., например, [**75**]) еще одна спектральная теория — теория операторов Шрёдингера[13)] с сингулярными (а именно, сосредоточенными на дискретном множестве точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) потенциалами

[12)] Феллер Вильям (Feller William, 1906–1970) — американский математик, работал в Стокгольме консультантом по математическим методам в статистике, экономике и биологии, профессор Корнеллского и Принстонского университетов, член Национальной АН США (1960), редактор журнала "Mathematical Reviews"(1939–1945).

[13)] Шрёдингер Эрвин (Schrödinger Erwin, 1887–1961) — австрийский физик-теоретик и математик, один из основателей квантовой механики, работал в высших технических школах в Штутгарте, Бреслау, Цюрихе, профессор Венского, Йенского, Берлинского, Оксфордского и Грацкого университетов, директор Института высших исследований в Дублине, почетный член АН СССР (1934), лауреат Нобелевской премии (1933).

$$L_{X,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(x - x_k), \quad L_{X,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta'(x - x_k),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — интенсивности точечных взаимодействий [14]. Такие операторы являются точно разрешимыми (в том смысле, что их резольвенты строятся в явном виде, следовательно, удается вычислить спектры и характеристики рассеивания) математическими моделями квантово-механических систем [**134**, **180**]. Историю исследования одномерных операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями можно найти в монографиях [**134**, **135**], которые содержат достаточно полную библиографию по этой тематике. Более поздним исследованиям в этом направлении посвящены работы [**26**–**29**, **74**, **149**, **151**, **152**, **156**, **158**, **167**–**169**, **173**–**175**, **188**–**190**].

В последние годы интенсивно растет количество публикаций (как теоретического, так и прикладного характера) по теории дифференциальных уравнений и систем уравнений с распределениями в коэффициентах, что свидетельствует об актуальности постановок задач, сочетающих континуальность с дискретностью. Многие задачи математической физики, электротехники, теории автоматического управления, квантовой механики, атомной физики приводят к необходимости создания достаточно развитой теории таких уравнений. Интерес к дифференциальным уравнениям с обобщенными коэффициентами объясняется еще и тем, что в рамках этой теории представляется возможным с единой точки зрения исследовать как обыкновенные дифференциальные уравнения, так и дифференциальные уравнения с особенностями импульсного типа и разностные уравнения. В монографии О. Ф. Фи-

[14] В точных моделях квантовой механики относительно производной δ' различают два физических феномена: δ'-взаимодействие и точечное дипольное взаимодействие (δ'-потенциал) [**179**].

липпова [119] сделан обзор работ отечественных и зарубежных авторов, где исследуются различные классы дифференциальных уравнений с обобщенными функциями, входящими в уравнение в виде слагаемых, в том числе дифференциальные уравнения с импульсами, линейные (и простейшие нелинейные) уравнения с обобщенными функциями в правой части, линейные системы, не разрешенные относительно производных и обладающие разрывными решениями, рассматриваются также дифференциальные уравнения, содержащие обобщенные функции в коэффициентах. Указаны некоторые классы уравнений и систем, которые с помощью замены переменных сводятся к системам Каратеодори[15)], что позволяет доказать существование решений и исследовать их свойства. Рассматриваются различные предельные переходы от дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями к уравнениям с обобщенными функциями. В монографии приводится многочисленная библиография, которая дает полное представление о состоянии исследований (разумеется на момент опубликования монографии) в этом направлении. Что касается исследований по общей и спектральной теории обобщенных КДУ, возникших в течение двух-трех последних десятилетий, обратим внимание на работы [17–19, 30, 31, 58, 61, 67, 68, 70, 71, 89, 90, 92, 95, 97, 99, 100, 102–110, 113, 165, 166].

Еще одним важным направлением в плане обобщений обыкновенных дифференциальных уравнений является исследование динамических систем с разрывными траекториями или, как их еще называют, дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Такие задачи возникли на заре нелинейной механики

15) Каратеодори Константин (Caratheodory Constantin, 1873–1950) — немецкий математик, профессор Ганноверского, Геттингенского, Берлинского, Мюнхенского и Афинского (ректор с 1939) университетов.

и заинтересовали физиков возможностью адекватно описывать процессы в нелинейных колебательных системах.

Система уравнений с импульсным воздействием описывается

а) системой дифференциальных уравнений, характеризующей эволюцию рассматриваемого процесса

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{0.9}$$

б) некоторым множеством $\mathcal{F}_t$ расширенного фазового пространства $M \times \mathbb{R}$;

в) оператором $\mathcal{A}_t$, определенным на множестве $\mathcal{F}_t$ и отображающим его на множество $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{A}_t \mathcal{F}_t$ расширенного фазового пространства. В более компактной форме это выглядит так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (t,x) \notin \mathcal{F}_t, \quad \Delta x\big|_{(t,x)\in\mathcal{F}_t} = \mathcal{A}_t x - x. \tag{0.10}$$

Решением задачи (0.10) является функция $x = \varphi(t)$, которая (в обычном смысле) удовлетворяет системе уравнений (0.9) вне множества $\mathcal{F}_t$ и имеет разрывы первого рода в тех точках t, для которых $(t,x) \in \mathcal{F}_t$. Величина скачка решения вычисляется по формуле $\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = \mathcal{A}_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0)$.

За последние 30 лет заметно увеличилось число работ по исследованию дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в разных математических школах как в нашей стране, так и за ее пределами [**40**, **85**, **122**, **145**, **170**]. Однако наиболее систематические и глубокие исследования были проведены киевской школой нелинейной механики, представители которой успешно развивают такие направления, как общие вопросы, теория устойчивости и теория управления, краевые и многоточечные задачи, методы численно-аналитического и асимптотического интегрирования [**7**, **8**, **80**, **83**–**85**, **87**, **88**, **133**].

Известно [98], что любое линейное КДУ с помощью введения квазипроизводных удается свести к линейной дифференциальной системе первого порядка вида

$$Y' = C'(x)\,Y + F'(x). \tag{0.11}$$

Если $C(x)$ и $F(x)$ абсолютно непрерывные [3], то система (0.11) эквивалентна интегральному уравнению

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t) + F(x) - F(x_0) \tag{0.12}$$

с интегралом Лебега. Такая ситуация имеет место для квазидифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами; при этом (0.11) является системой типа Каратеодори и допускает запись в виде (0.6). Эквивалентность сохраняется и тогда, когда $C(x)$ абсолютно непрерывна, а $F(x)$ имеет ограниченную вариацию [122] или, когда $C(x)$ и $F(x)$ непрерывные функции ограниченной вариации [160]. При этом дифференцирование и равенство в (0.11) понимаются в смысле теории обобщенных функций и, кроме того, в последнем из этих случаев в уравнении (0.12) будет фигурировать классический интеграл Римана–Стилтьеса[16)].

Все это не обобщается непосредственно на случай, когда $C(x)$ является разрывной функцией ограниченной вариации, даже при условии $F(x) \equiv 0$. В этом случае разрывы матрицы-функции $C(x)$ обязательно порождают разрывы решения $Y(x)$ и к тому же в одних и тех же точках. Поэтому интеграл Стилтьеса в уравнении (0.12) может не существовать (см. [73, с. 214]). Теория обобщенных функций здесь также ничего не дает, потому

[16)] Риман Георг Фридрих Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard, 1826–1866) — немецкий математик, профессор Геттингенского университета.

что, например, произведение δ-функции Дирака[17)] на её неопределенный интеграл (функцию Хевисайда[18)]) не существует (см. §6). Следовательно, не определено также произведение матричной меры Стилтьеса [**122**, с. 160] $C'(x)$ на функцию ограниченной вариации.

Однако, если для функций ограниченной вариации различать значения $Y(x)$, $Y(x{-}0)$, $Y(x{+}0)$ и по отдельности рассматривать левый $Y(x){-}Y(x{-}0)$ и правый $Y(x{+}0){-}Y(x)$ скачки, то удается определить интеграл в уравнении (0.12), когда $C(x)$ и $Y(x)$ являются разрывными функциями ограниченной вариации. При различных предположениях (например, если $Y(x) = Y(x-0)$, или $Y(x){=}Y(x+0)$, или же $Y(x) = [Y(x-0)+Y(x+0)]/2$ и т.д.) получают различные условия существования решения уравнения (0.12) и соответственно системы (0.11), отличаются и сами решения. В книгах [**40**, **119**] отмечено, что известные определения решения системы (0.11) в такой ситуации реализуются в рамках трех основных подходов.

Первый подход связан с попытками формализации этой системы в рамках теории распределений и сводится к проблеме умножения обобщенных функций на разрывные. Сначала на основе секвенциального подхода [**2**] вводится определение произведения меры на функцию ограниченной вариации, а далее соответствующим образом дается определение решения системы (0.11) [**40**, **136**, **160**, **161**]. Весьма интересны также работы

17) Дирак Поль Адриен Морис (textsc Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1984) — английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики, профессор Кембриджского университета, член Лондонского королевского общества (1930), иностранный член АН СССР (1931), лауреат Нобелевской премии (1933).

18) Хевисайд Оливер (Heaviside Oliver, 1850–1925) — английский физик и инженер, член Лондонского королевского общества (1891).

[**1**, **39**, **81**, **137**, **162**], в которых исследуются дифференциальные уравнения в пространствах "новых"[19] обобщенных функций.

Второй подход предложен в работе Я. Курцвейля [**159**] и предусматривает формальный переход к интегральному уравнению (0.12), в котором интеграл понимается в смысле Перрона–Стилтьеса[20], Лебега–Стилтьеса или как неклассический интеграл Римана–Стилтьеса [**9**, **154**, **171**, **176**, **177**]. При таком подходе, понятно, скачки решения будут зависеть от значений функции $C(x)$ в точках разрыва.

Третий подход основан на идее аппроксимации элементов матрицы $C(x)$ последовательностями гладких функций [**56**], [**40**, с. 148]. При этом решение системы (0.11), которая определяется границей своих гладких приближений, совпадает с решением интегрального уравнения (0.12).

Для иллюстрации описанных выше подходов рассмотрим начальную задачу

$$y' = \frac{1}{2}\delta(x)y, \quad y(-1) = y_0, \tag{0.13}$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака (см. с. 48). На основании результатов работы [**40**] решение задачи (0.13) имеет вид

$$y(x) = y_0 \exp\left\{\frac{1}{2}H_+(x)\right\}, \tag{0.14}$$

где $H_+(x)$ — функция Хевисайда, непрерывная слева (разрывная справа) в точке $x = 0$: $\quad H_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

[19] Новые обобщенные функции, как и распределения, определяются как границы последовательностей гладких функций, однако принципиальное отличие их от распределений заключается в том, что при этом "запоминается" сам способ аппроксимации.

[20] Перрон Оскар (Perron Oscar, 1880–1975?) — немецкий математик, профессор Мюнхенского и Гейдельберского университетов.

Решением этой же задачи, которое понимается в смысле работ [**136**, **160**, **161**], является функция

$$y(x) = y_0\left[\frac{2}{3}H_+(x) + 1\right],$$

очевидно, не совпадающая с функцией (0.14).

В рамках второго подхода задаче (0.13) следует поставить в соответствие интегральное уравнение

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} y(t)\ d[\alpha H_+(t) + (1{-}\alpha)H_-(t)], \tag{0.15}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а $H_-(x)$ — функция Хевисайда, разрывная слева в точке $x = 0$: $\quad H_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Понятно, что при разных значениях α решения уравнения (0.15) определяются по-разному: при $\alpha = 1$ (этот случай соответствует тому, что решения задачи (0.13) априори являются непрерывными слева)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_+(x)\right];$$

при $\alpha = 0$ (решения, по определению, должны быть непрерывными справа)

$$y(x) = y_0\left[1 + \frac{1}{2}H_-(x)\right];$$

если считать, что $\alpha = 1/2$ (например, из соображений симметрии, или принимая, по определению, решения таковыми, что удовлетворяют условию $y(x) = [y(x{-}0) + y(x{+}0)]/2$), то

$$y(x) = y_0\left\{1 + \frac{1}{4}[H_+(x) + H_-(x)]\right\}.$$

Наконец, пусть $H_k(x)$ — последовательность абсолютно непрерывных функций, поточечно сходящаяся на промежутке $[-1,1]$ к функции $H_+(x)$. Поставим ей в соответствие последовательность функций $y_k(x) = y_0 \exp\{\frac{1}{2}H_k(x)\}$, которые являются решениями начальных задач

$$y_k' = \frac{1}{2}H_k'(x)y_k, \quad y_k(-1) = y_0. \tag{0.16}$$

Здесь $H_k'(x)$ является δ-последовательностью, аппроксимирующей δ-функцию Дирака, поэтому задачу (0.16) можно считать гладкой аппроксимацией исходной задачи (0.13). Очевидно, что последовательность $y_k(x)$ поточечно сходится к функции (0.14) и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $H_k(x)$.

Как видим, понятие решения для дифференциальных уравнений с распределениями неоднозначно и главной причиной этого является тот факт, что пространство обобщенных функций не является алгеброй — в нем нельзя определить умножение, которое бы унаследовало основные свойства умножения непрерывных функций. Именно поэтому при выборе того или иного определения решения требуется более полно учитывать характер предельного перехода, приводящего к рассматриваемому уравнения. Этого недостатка лишен подход, принятый в работе [**98**] и которого мы будем придерживаться здесь. В рамках этого подхода в качестве решения системы (0.11) понимается вектор-функция ограниченной вариации, удовлетворяющая системе в смысле теории распределений, к тому же указываются эффективные (в терминах матриц $C(x)$ и $F(x)$) условия, при которых система (0.11) является корректной, то есть, при ее исследовании не возникает проблема умножения функционалов.

В заключительной главе монографии рассматриваются также приближенные методы решения обобщенных квазидифференциальных уравнений и дифференциальных систем с мерами. В частности, один из подходов заключается в построении для таких уравнений точных рекуррентных соотношений (ТРС), которые являются аналогами точных разностных схем.

Точные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами впервые были получены А. Н. Тихоновым[21)] и А. А. Самарским[22)] [**114**–**116**]. Ими же был апробирован алгоритм приближенной реализации точных разностных схем — усеченные схемы m-го ранга. Последние имеют максимальный порядок точности $O\big(h^{2(m+1)}\big)$, где h — величина шага сетки. Следовательно, за счет выбора достаточно большого m можно получить трехточечные схемы произвольного порядка.

Впоследствии эти результаты были распространены на системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [**62**], дифференциальные уравнения четвертого порядка [**15**], нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [**53**–**55**, **150**], задачи с вырождением, а также задачи

---

21) Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993) — российский математик и геофизик, профессор Московского университета (декан факультета вычислительной математики и кибернетики с 1970 по 1990), работал в Институте теоретической геофизики АН СССР, заместитель директора (с 1953) и директор (с 1978) Института прикладной математики АН СССР, член-корр. (1939) и академик (1966) АН СССР, лауреат Сталинской (1953), Государственной (1976) и Ленинской (1966) премий, премии им. М. В. Ломоносова (1963), награжден золотой медалью М. В. Келдыша (1990).

22) Самарский Александр Андреевич (1919–2008) — российский математик, ученик А. Н. Тихонова, зав. отдела в Институте прикладной математики АН СССР, профессор Московского университета, директор Института математического моделирования РАН (с 1990), член-корр. (1966) и академик (1976) АН СССР, лауреат Государственной (1954, 1999) и Ленинской (1962) премий.

Штурма–Лиувилля[23] [**10**, **11**, **63**]. В этих работах исследованы вопросы существования и единственности точных схем, их приведение к дивергентной форме и точность усеченных разностных схем для задач с кусочно-гладкими коэффициентами. Точные разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения $2m$-го порядка изучались в работе [**49**].

В работах [**163**, **164**] рассматривается проблема построения точной двухточечной (компактной) разностной схемы и ее реализации посредством двухточечных схем произвольного порядка точности для системы дифференциальных уравнений первого порядка с дополнительными двухточечными краевыми условиями.

Роботы [**25**, **117**] посвященны построению и исследованию однородных разностных схем для одномерной краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \equiv (0;1), \tag{0.17}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{0.18}$$

где $k(x)$ — измеримая функция и $0 < M_1 \leqslant k(x) \leqslant M_2 < \infty$; $q(x) = Q'(x)$, $Q(x) \in W_p^\lambda(\Omega)$ $(p \geqslant 2,\ 0 < \lambda \leqslant 1)$, причем $\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx \geqslant 0$ для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$; $f(x) = F'(x)$, $F \in W_q^s(\Omega)$ $(q \geqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1)$. Коэффициенты $q(x)$ и $f(x)$ уравнения (0.17) являются обобщенными производными функций из пространства Соболева[24] W_p^λ $(0 < \lambda \leqslant 1,$

---

[23] Штурм Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François, 1803–1885) — швейцарский математик, профессор Сорбонны и Политехнической школы в Париже, член Парижской АН (1836) и иностранный член-корр. Петербургской АН (1836).

Лиувилль Жозеф (Liouville Joseph, 1809–1882) — французский математик, профессор Политехнической школы и Коллеж де Франс в Париже, член Парижской АН (1839) и иностранный член-корр. Петербургской АН (1840). Основатель журнала "Journal de mathématiques pure et appliquée"(1883).

[24] Соболев Сергей Львович (1908–1989) — российский математик, работал в Сейсмологическом институте АН СССР, Математическом институте им.

$2 \leqslant p \leqslant \infty$). Сюда, в частности, входят случаи, когда коэффициенты есть δ-функции ($p\lambda < 1$), либо кусочно-непрерывные функции ($p = \infty$, $\lambda = 1$).

На основе свойств шаблонных функций, являющихся решениями в обобщенном (слабом) смысле определенных задач Коши для уравнения (0.17), в этих работах получено точную трехточечную разностную схему для задачи (0.17), (0.18), установлена ее единственность и возможность представления в дивергентной форме, исследована консервативность разностной схемы, которая является необходимым и достаточным условием ее (схемы) сходимости, предложен алгоритм приближенного отыскания шаблонных функций. Кроме того, с помощью усеченных шаблонных функций построена усеченная трехточечная разностная схема m-го ранга, имеющая точность $O\big(h^{2(m+1)-n}\big)$, причем величина n потери порядка точности зависит от гладкости коэффициентов. По мере роста гладкости коэффициентов растет также и скорость сходимости усеченной схемы. В частности, когда коэффициенты являются кусочно-гладкими, полученные в [**25**, **117**] результаты совпадают с результатами работ [**114**–**116**].

В. А. Стеклова АН СССР, Институте атомной энергии, профессор Московского и Новосибирского университетов, директор Института математики Сибирского отделения АН СССР, академик АН СССР (1939), почетный член Московского математического общества (1987).

Условные обозначения

(i) $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно.

(ii) $[a,b]$, $I=(\alpha,\beta)$ — соответственно замкнутый и открытый интервалы действительной оси $\mathbb{R}$.

(iii) $\overline{1,n}$ — набор целых чисел от 1 до n: $\{1,2,\ldots,n\}$

(iv) $\omega_\nu = \{a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu \leqslant b\}$ — сетка на отрезке $[a,b]$; для равномерной сетки $x_k = kh$, $k=\overline{0,\nu}$, $h = \frac{b-a}{\nu}$.

(v) $\mathbb{C}^{p\times q}$ — линейное пространство комплексных $(p\times q)$-матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{p,q}$ с нормой $|A|=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|$; $\mathbb{C}^{p\times 1}=\mathbb{C}^p$, $\mathbb{C}^1=\mathbb{C}$.

(vi) $A^\top$, $\overline{A}$, A^{-1} — матрицы соответственно транспонированная, комплексно сопряженная и обратная к матрице A.

(vii) $A^* = \left(\overline{A}\right)^\top$ — матрица, эрмитово сопряженная к матрице A.

(viii) $\det A$ — определитель (детерминант) квадратной матрицы A.

(ix) $\operatorname{tr} A = a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{pp}$ — след квадратной матрицы A.

(x) δ_{ij} — символ Кронекера[25]: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

(xi) $E = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{p}$ — единичная матрица размера $p\times p$. Если есть необходимость указать порядок матрицы, то используем обозначение E_p.

---

[25] Кронекер Леопольд (Kronecker Leopold, 1823–1891) — немецкий математик, профессор Берлинского университета, член Берлинской АН (1861), иностранный член-корр. Петербургской АН (1872).

(xii) 0 — нулевой элемент: число, вектор или матрица. При необходимости для нулевой $(p\times p)$-матрицы используем обозначение O_p.

(xiii) $\Theta_M(x)$ — характеристическая функция множества M:

$$\Theta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M;\\ 0, & x\notin M.\end{cases}$$

(xiv) $C_{p\times q}(I)$, $AC_{p\times q}(I)$ — пространства матричных функций $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, все элементы $a_{ij}(x)$ которых являются соответственно непрерывными и абсолютно непрерывными на I скалярными функциями; $C_{p\times 1}(I)=C_p(I)$, $AC_{p\times 1}(I)=AC_p(I)$ и $C_1(I)=C(I)$, $AC_1(I)=AC(I)$.

(xv) $\bigvee\limits_a^b(A)$ — полная вариация матрицы-функции $A(x)$, равная сумме полных вариаций всех ее элементов $a_{ij}(x)$:

$$\bigvee_a^b(A)=\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^q\sup_\sigma\sum_{k=1}^n\bigl|a_{ij}(x_k)-a_{ij}(x_{k-1})\bigr|$$

(здесь $\sigma\colon a\leqslant x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n\leqslant b$ — произвольное разбиение отрезка $[a;b]$). В случае открытого интервала I будем считать, что $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на I, если $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на произвольном замкнутом подинтервале $[a,b]\subset I$ и вариации $\bigvee\limits_a^b(A)$ ограничены в их совокупности: $\bigvee\limits_I(A)=\sup\limits_{b\geqslant a}\bigvee\limits_a^b(A)<\infty$.

(xvi) $BV_{p\times q}[a,b]$ — пространство матриц-функций $A\colon I\to\mathbb{C}^{p\times q}$, все компоненты $a_{ij}(x)$ которых являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|A\|_{BV}=|A(a)|+\bigvee\limits_a^b(A)$; $BV_{p\times 1}[a,b]=BV_p[a,b]$ и

$BV_1[a,b] = BV[a,b]$. Если $A(x)$ дополнительно непрерывна справа, то используем обозначения $BV^+_{p\times q}[a,b]$, $BV^+_p[a,b]$, $BV^+[a,b]$.

(xvii) $BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ — пространство матриц-функций $A\colon I \to \mathbb{C}^{p\times q}$, все компоненты $a_{ij}(x)$ которых являются непрерывными справа функциями локально ограниченной на интервале I вариации, т. е. $a_{ij} \in BV^+[a,b]$ для произвольного $[a,b] \subset I$; $BV^{+,loc}_{p\times 1}(I) = BV^+_{loc,p}(I)$ і $BV^+_{loc,1}(I) = BV^+_{loc}(I)$.

(xviii) $\Delta A(x) = A(x) - A(x-0)$ — скачок матрицы-функции $A \in BV^{+,loc}_{p\times q}(I)$ в точке x.

(xix) $L^{2,loc}_{p\times q}(I)$ — пространство матриц-функций $A\colon I \to \mathbb{C}^{p\times q}$, все элементы $a_{ij}(x)$ которых являются локально суммируемыми с квадратом модуля по Лебегу на интервале I скалярными функциями; $L^{2,loc}_{p\times 1}(I) = L^2_{loc,p}(I)$ и $L^2_{loc,1}(I) = L^2_{loc}(I)$.

(xx) $A_\nu(x) \rightrightarrows A(x)$ на $[a,b]$ — равномерная сходимость последовательности матриц-функций $\{A_\nu(x)\}_{\nu=1}^\infty$, которая означает, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |A(x) - A_\nu(x)| = 0$.

(xxi) $\overline{\mathcal{D}}_0(I)$ — пространство непрерывных векторных функций $I \to \mathbb{C}^p$ с компактным носителем (основных функций), сопряженным к которому является пространство $\overline{\mathcal{D}}_0'(I)$ векторных распределений (обобщенных функций).

(xxii) (f,φ) — значение функционала f на основной функции $\varphi(x)$: $(f,\varphi) = \sum\limits_{i=1}^p (f_i,\varphi_i)$ для $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I)$, $f \in \overline{\mathcal{D}}_0'(I)$.

(xxiii) $H(x-x_s)$ — смещенная функция Хевисайда:

$$H(x-x_s) = \begin{cases} 0, & x < x_s, \\ 1, & x > x_s. \end{cases}$$

(xxiv) $\delta(x-x_s)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке x_s.

(xxv) КДР — квазидифференциальное уравнение.

(xxvi) ФСР — фундаментальная система решений.

(xxvii) ТРС — точное рекуррентное соотношение.

(xxviii) ТДФ — точная двухточечная формула.

1

Обобщенные интегральные и дифференциальные системы

§ 1. Функции ограниченной вариации и меры

В этом параграфе кратко представим определения и утверждения, касающиеся двух важных классов функций, которые понадобятся нам при изложении основного материала книги, — это функции ограниченной вариации и меры [**3**, **48**, **73**, **122**].

Определение 1.1. Действительная или комплекснозначная скалярная функция $f(x)$, определенная на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси $\mathbb{R}$, называется *функцией ограниченной вариации* на этом отрезке, если выражение

$$V_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1.1}$$

допускает фиксированную верхнюю границу для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного разбиения $\sigma\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Наименьшую общую верхнюю границу всех таких выражений называют *полной вариацией* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\bigvee_a^b(f) = \sup_\sigma\{V_\sigma(f)\}.$$

Таким образом, приведенные леммы позволяют выяснить структуру меры $g' = dg$, если известна структура функции $g(x)$. В частности, если $g(x)$ есть кусочно непрерывно-дифференцируема на I функция, которая в точках $\{x_s\}$ имеет разрывы первого рода со скачками $\Delta g(x_s)$, и таким образом

$$g(x) = g_c(x) + \sum_s \Delta g(x_s) H(x - x_s),$$

то

$$g' = g_c'(x) + \sum_s \Delta g(x_s) \delta(x - x_s).$$

Здесь $g_c'(x)$ совпадает с обычной производной $g'_{кл}(x)$, которая существует почти везде на I (за исключением точек $\{x_s\}$).

Предыдущие леммы остаются в силе также для векторных распределений со значениями из пространства $\mathbb{C}^p$ [**122**, с. 253].

§ 2. Матричный неклассический интеграл Римана–Стилтьеса

Пусть имеем матрицы-функции $F \in BV^{+,loc}_{m\times k}(I), G \in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Тогда в силу свойства 7) из §1 верными являются представления:

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x), \quad G(x) = G_c(x) + G_d(x),$$

где $F_c(x)$ и $G_c(x)$ — непрерывные составляющие функций $F(x)$ и $G(x)$, а $F_d(x)$ и $G_d(x)$ — их функции скачков (дискретные составляющие):

$$F_d(x) = \sum_{y \leqslant x} [F(y) - F(y-0)], \quad y \in I,$$

$$G_d(x) = \sum_{y \leqslant x} [G(y) - G(y-0)].$$

а после предельного перехода — неравенство

$$g(x) \leqslant c_0 + c_1 \int\limits_a^x g(t) d \bigvee_a^t (f). \tag{2.15}$$

Поскольку функция $\bigvee\limits_a^t (f)$ неубывающая и непрерывная справа на отрезке $[a, b]$, то из неравенства (2.15) в силу леммы 2.2 следует оценка

$$g(x) \leqslant c_0 \cdot \exp\Big\{ c_1 \bigvee_a^x (f) - \bigvee_a^a (f) \Big\} = c_0 \cdot \exp\Big\{ c_1 \bigvee_a^x (f) \Big\},$$

что и требовалось доказать. ■

Неравенство (2.13) будем называть *обобщенным неравенством Гронуолла–Беллмана*.

§ 3. Однородное матричное интегральное уравнение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Y(x) = Y(x_0) + \int\limits_{x_0}^x dC(t) Y(t), \tag{3.1}$$

где $Y(x)$ — n-мерный вектор, $C \in BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $x_0 \in I$.

Как известно [**3**], это уравнение имеет единственное решение $Y(x)$, которое принадлежит пространству $BV^{+}_{loc,n}(I)$, и скачки которого определяются формулой

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) Y(x-0) \quad \forall x \in I. \tag{3.2}$$

Это утверждение эквивалентно тому, что интегральное уравне-

§ 5. Сопряженное матричное интегральное уравнение

Как известно из § 3, функция Коши $B(x,s)$ по переменной x удовлетворяет уравнению (3.3). Ответ на вопрос, какому уравнению удовлетворяет функция $B(x,s)$ по переменной s, дает следующая

Теорема 5.1. *Функция $B(x,s)$ по переменной s удовлетворяет интегральному уравнению*

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)d\widehat{C}(t), \tag{5.1}$$

где

$$\widehat{C}(x) = C(x) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} \left[E + \Delta C(y)\right]^{-1} \left[\Delta C(y)\right]^2. \tag{5.2}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (3.1) в виде

$$B(x,s) - E = \int_s^x dC(t)\big[B(t,s) - E\big] + C(x) - C(s). \tag{5.3}$$

Применяя к (5.3) формулу (4.2) решения неоднородного уравнения, приходим к равенству

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)dC(t) - \sum_{s\leqslant y\leqslant x} B(x,y)\left[\Delta C(y)\right]^2. \tag{5.4}$$

Перепишем (5.4), используя свойство (e) из теоремы 3.2:

$$B(x,s) = E + \int_s^x B(x,t)dC(t) -$$
$$- \sum_{s\leqslant y\leqslant x} B(x,y-0)\left[E + \Delta C(y)\right]^{-1} \left[\Delta C(y)\right]^2.$$

Это значит, что функция $B(x,s)$ по переменной s является ре-

§ 6. О произведении распределений и первообразных мер

При исследовании дифференциальных уравнений с мерами в коэффициентах естественным образом возникает проблема умножения обобщенных функций (распределений Шварца). Как известно [**16**, с. 37], произведение любых двух обобщенных функций f и g не всегда существует.

Для определения такого произведения нужно, чтобы функции f и g, грубо говоря, обладали свойством: насколько f "нерегулярна"в окрестности произвольной точки, настолько g должна быть "регулярной" в этой окрестности, и наоборот. С такой точки зрения неопределено (*некорректно*) произведение функции Хевисайда на ее обобщенную производную — меру Дирака. Согласно секвенциальному подходу [**2**, с. 274], произведение обобщенных функций f и g существует на интервале I, если последовательность произведений сверток $(f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n)$ сходится (в обобщенном смысле) на I для любой δ-последовательности δ_n. Эта (слабая) граница называется произведением обобщенных функций f и g: $(f\cdot g,\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}\big((f*\delta_n)\cdot(g*\delta_n);\varphi\big)$, $\varphi\in\mathcal{D}(I)$. В рамках этого определения упомянутое произведение $H(x-x_s)\cdot\delta(x-x_s)$ не существует (некорректно), поскольку его значение зависит от выбора последовательности δ_n.

Для того, чтобы исследовать корректность произведений $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$, где $F'(x)$, $G'(x)$ — обобщенные производные функций $F(x)$ и $G(x)$, предположим, что $F\in BV^{+,loc}_{m\times k}(I)$ и $G\in BV^{+,loc}_{k\times n}(I)$. Запишем их дискретные составляющие в виде

$$\begin{aligned} F_d(x)&=\sum_{x_s\leqslant x}\Delta F(x_s)=\sum_{s}\Delta F(x_s)H(x-x_s),\\ G_d(x)&=\sum_{x_s\leqslant x}\Delta G(x_s)=\sum_{s}\Delta G(x_s)H(x-x_s), \end{aligned}\tag{6.1}$$

§ 7. Линейные дифференциальные системы с мерами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad x \in I, \tag{7.1}$$

где $Y(x)$ — неизвестная n-мерная вектор-функция, $C(x)$ — матрица-функция из пространства $BV^{+,loc}_{n\times n}(I)$, $C'(x)$ — ее обобщенная производная (следовательно дифференцирование и равенство в (7.1) понимаются в обобщенном смысле).

Заметим, что скачки матрицы-функции $C(x)$ порождают также скачки решения $Y(x)$ уравнения (7.1) и к тому же в одних и тех же точках, поэтому произведение $C'(x)Y(x)$, вообще говоря, неоднозначно (см. §6).

Определение 7.1. Будем считать, что вектор Y принадлежит к *допустимому классу* $\mathfrak{D}^n_C(I)$, если:

1) $Y \in BV^+_{loc,n}(I)$,
2) $\Delta C(x)\Delta Y(x) = 0 \ \forall x \in I$.

Определение 7.2. *Решением уравнения* (7.1) есть вектор-функция $Y(x)$ из допустимого класса $\mathfrak{D}^n_C(I)$, удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле:

$$(\varphi, Y') = (\varphi, C'Y) \quad \forall \varphi \in \overline{\mathcal{D}}_0(I).$$

Для системы (7.1) поставим задачу Коши об отыскании решения, удовлетворяющего начальному условию

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I. \tag{7.2}$$

Теорема 7.3. *В классе функций $\mathfrak{D}^n_C(I)$ задача (7.1), (7.2) эквивалентна интегральному уравнению*

$$Y(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} dC(t)Y(t), \quad x_0, x \in I. \tag{7.3}$$

Теорема 7.6. *Если однородная система* (7.1) *корректна, то для существования решения уравнения* (7.10) *в классе* $\mathfrak{D}^n_C(I)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\Delta C(x)\Delta F(x) = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{7.11}$$

Доказательство. Действительно, скачок решения уравнения (7.10) имеет вид

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x)Y(x-0) + \Delta F(x),$$

что после умножения слева на $\Delta C(x)$ приводит к равенству

$$\Delta C(x)\Delta Y(x) = \left[\Delta C(x)\right]^2 Y(x-0) + \Delta C(x)\Delta F(x),$$

откуда и следует доказательство. ■

Замечание 7.7. При выполнении системы условий (7.5), (7.11) неоднородное уравнение (7.8) естественно также назвать *корректным*.

§ 8. Существование и единственность решения начальной задачи

Метод приведения начальных задач для (корректных) систем дифференциальных уравнений с мерамы к эквивалентным интегральным уравнениям позволяет в полной мере использовать полученные в предыдущих параграфах результаты для построения линейной теории: достаточно в соответствующих формулах положить $\Delta C(x)\Delta Y(x)=0$, $[\Delta C(x)]^2=0$ и $\Delta C(x)\Delta F(x)=0$ $\forall x\in I$. Такой подход в некоторой степени является альтернативным к результатам работ [**93**], [**98**].

2

Основы концепции квазипроизводных

§ 9. Предварительные замечания

Прежде, чем перейти к определению основных понятий, рассмотрим некоторые примеры скалярных дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - a_1(x)y = 0, \tag{9.1}$$

где $y(x)$ — неизвестная функция действительной переменной $x \in I$, $a_1(x) = b_1'(x)$, причем $b_1 \in BV_{loc}^+(I)$, обычным образом сводится к дифференциальной системе первого порядка

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \tag{9.2}$$

где

$$Y = (y, y')^\top, \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

то, очевидно, $\left[\Delta C(x)\right]^2 = 0$ для любого $x \in I$ и, таким образом, система (9.2) корректна. Если под решением дифференциального

§ 10. Начальная задача для квазидифференциального уравнения с мерами

Рассмотрим квазидифференциальное выражение $(m, n \in \mathbb{N})$

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \big(a_{ij}(x) y^{(n-i)}\big)^{(m-j)}, \tag{10.1}$$

где функция $y(x)$ определена на некотором интервале I действительной оси $\mathbb{R}$. Квазидифференциальные выражения вида (10.1) с достаточно гладкими, а также локально суммируемыми по Лебегу на интервале I коэффициентами $a_{ij}(x)$ в различных аспектах исследовалось многими авторами (см. библиографию в [**72**]).

Мы же ослабляем требования к коэффициентам квазидифференциального выражения (10.1) и всюду далее считаем, что выполняются следующие предположения:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на I функция;

(II) $a_{i0}, a_{0j} \in L^2_{loc}(I)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$;

(III) $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$, де $b_{ij} \in BV^+_{loc}(I)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Из данных условий видно, что в выражении (10.1) выполнять операцию $(m - j)$-кратного дифференцирования нельзя из-за недостаточной гладкости его коэффициентов. Если даже попробовать и провести дифференцирование в обобщенном смысле, то от решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{10.2}$$

мы вынуждены будем требовать достаточной гладкости для того, чтобы операции умножения в левой части этого уравнения были законными (а не только формальными) с точки зрения теории обобщенных функций. Всех этих трудностей удается избежать, если применить концепцию квазипроизводных.

§ 11. Сопряженное квазидифференциальное уравнение с мерами

Чтобы получить вид сопряженного с (10.2) КДУ, а также выражения для его квазипроизводных, рассмотрим согласно определению 9.4 сопряженную с (10.7) обобщенную дифференциальную систему

$$Z'(x) = -\big(C'(x)\big)^* Z(x). \tag{11.1}$$

Используя конкретный вид (с. 90) матрицы $C'(x)$, получаем следующие определения.

Определение 11.1. *Сопряженным* с (10.1) называется квазидифференциальное выражение

$$L^*_{mn}[z] \equiv \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\big(\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}\big)^{(n-i)}. \tag{11.2}$$

Определение 11.2. *Квазипроизводными* функции $z(x)$ в смысле сопряженного уравнения $L^*_{mn}[z] = 0$ назовем функции $z^{\{k\}}(x)$, $k = \overline{0,q}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &z^{\{j\}} = z^{(j)}, \quad j = \overline{0,m-1}; \quad z^{\{m\}} = -\sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{0j}(x)z^{(m-j)};\\ &z^{\{m+i\}} = -\big(z^{\{m+i-1\}}\big)' - \sum_{j=0}^{m}\overline{a}_{ij}(x)z^{(m-j)}, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Очевидно, что $z^{\{q\}} \equiv -L^*_{mn}[z]$. Отметим также, что в случае, если определены квазипроизводные (10.3), квазипроизводные (11.3) определяются однозначно из системы (11.1).

Рассмотрим теперь начальную задачу

$$L^*_{mn}[z] = 0, \tag{11.4}$$

$$z^{\{k\}}(x_0) = z_0^k, \quad k = \overline{0,q-1}, \tag{11.5}$$

§ 12. Линейная теория обобщенных квазидифференциальных уравнений

На основе полученных выше результатов теперь можно строить линейную теорию однородных КДУ с мерами аналогично тому, как это делается, например, для определенных классов КДУ с суммируемыми коэффициентами.

Пусть функции $\varphi_k(x), k = \overline{1, q}$, и $\psi_l(x), l = \overline{1, q}$, являются решениями исходного

$$L_{mn}[y] = 0 \tag{12.1}$$

и сопряженного

$$L^*_{mn}[z] = 0 \tag{12.2}$$

КДУ соответственно. Составим матрицы-функции

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_q(x) \\ \varphi_1^{[1]}(x) & \varphi_2^{[1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[q-1]}(x) & \varphi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \varphi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

и

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \cdots & \psi_q(x) \\ \psi_1^{\{1\}}(x) & \psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{\{q-1\}}(x) & \psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Определители

$$W(x) \equiv W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_q(x)] = \det \Phi(x)$$

и

$$V(x) \equiv V[\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_q(x)] = \det \Psi(x)$$

§ 13. Структура фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения с мерами

Приведенные в настоящем параграфе результаты не требуют конкретного вида КДУ и в этом плане есть следствием общих положений концепции квазипроизводных. Более того, полученная далее структура фундаментальной матрицы абстрактного КДУ, убеждает в том, что такая концепция — в самой природе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть

$$l_n\big[y(x)\big] = 0 \tag{13.1}$$

корректное КДУ порядка n, приводящееся к линейной дифференциальной системе первого порядка

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad \big[\Delta C(x)\big]^2 = 0 \ \forall\, x \in I, \tag{13.2}$$

где $Y = \big(y, y^{[1]}, \ldots, y^{[n-1]}\big)^{\top}$ — неизвестная вектор-функция, $y^{[i]}(x)$, $i=\overline{0,n-1}$, — некоторым образом введенные квазипроизводные.

Определение 13.1. Матрицу-функцию $B(x,s)$, которая по переменной x удовлетворяет системе (13.2) и в точке $x=s \in I$ начальному условию $B(s,s)=E_n$, будем называть *фундаментальной матрицей*, соответствующей КДУ (13.1).

Определение 13.2. *Функцией Коши* КДУ (13.1) называем функцию $K(x,s)$, которая по переменной x является решением этого уравнения и в точке $x=s \in I$ удовлетворяет начальным условиям

$$K^{[i]}(s,s) = 0, \ \ i = \overline{0, n-2}, \qquad K^{[n-1]}(s,s) = 1. \tag{13.3}$$

Пусть также

$$l_n^*[z(x)] = 0 \tag{13.4}$$

сопряженное КДУ, а $z^{\{j\}}(x)$, $j = \overline{0, n-1}$, — квазипроизводные функции $z(x)$ в смысле сопряженного уравнения.

§ 14. Конструкция элементов фундаментальной матрицы

В предыдущем параграфе для произвольного абстрактного КДУ мы получили с помощью одной лишь функции Коши $K(x,s)$ и ее смешанных квазипризводных в смысле исходного и сопряженного уравнений структуру нормальной при $x=s$ фундаментальной матрицы $B(x,s)$, соответствующей этому уравнению. Однако, при исследовании задач как прикладного, так и теоретического характера не менее важно знать также конструкцию элементов этой матрицы, т. е. уметь строить функцию Коши и ее смешанные квазипроизводные. Способ их построения из ФСР как раз и является предметом рассмотрения настоящего параграфа.

Если пользоваться определением (13.2), то для построения функции Коши $K(x,s)$ КДУ (13.1) необходимо решить неоднородную систему n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[i]}(s) = 0, \quad i = \overline{0, n-2}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^{[n-1]}(s) = 1, \end{cases}$$

где φ_k, $k = \overline{1, n}$, — произвольная ФСР уравнения (13.1). Если это делать, например, методом Крамера[3)], то необходимо вычислить $n+1$ определителей n-го порядка, что даже при небольших n является процедурой достаточно трудоемкой.

Следующая теорема позволяет свести процесс построения функции Коши (так же ее смешанных квазипроизводных) к вычислению всего лишь двух определителей n-го порядка, что гораздо упрощает трудоемкость данной процедуры.

3) Крамер Габриэль (Cramer Gabriel, 1704-1752) — швейцарский математик, ученик И. Бернулли, профессор Женевской академии.

§ 15. Неоднородное квазидифференциальное уравнение с распределениями

Рассмотрим однородное КДУ

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\big)^{(m-j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \quad (15.1)$$

коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого удовлетворяют указанным в § 10 предположениям (I)–(III), а правая часть удовлетворяет условию

(IV) $f_k \in BV^+_{loc}(I)$, $k = \overline{0,l}$.

Прежде всего зададимся целью выяснить, при каком максимальном значении l уравнение (15.1) является корректным. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 15.1. *Если $l \leqslant m-1$, то при условиях (I)–(IV) КДУ (15.1) корректное, т. е. приводится к корректной обобщенной дифференциальной системе.*

Доказательство. Считая, что $0 \leqslant l \leqslant m-1$, введем квазипроизводные $y^{[\nu]}(x)$, $\nu = \overline{0,q}$, в смысле КДУ (15.1) следующим образом:

$$y^{[i]} = y^{(i)},\ i = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x)y^{(n-i)};$$

$$y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)},\ j = \overline{1, m-l-1};$$

$$y^{[n+j]} = -\left(y^{[n+j-1]}\right)' + \sum_{i=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(n-i)} + f'_{m-j}(x),\ j = \overline{m-l, m}.$$

$$(15.2)$$

§ 16. Обобщенное обыкновенное дифференциальное уравнение

Для математиков интересным (как с теоретической, так и с практической точек зрения) является обыкновенное дифференциальное выражение

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.1}$$

с обобщенными коэффициентами

$$a_i(x) = b_i'(x),\ b_i \in BV_{loc}^{+}(I),\ i = \overline{1, n}.$$

На первый взгляд кажется, что дифференциальное выражение $L_n[y]$ является частным случаем квазидифференциального выражения $L_{mn}[y]$ вида (10.1), если в последнем положить $m = 0$, $a_{00}(x) \equiv 1$, $a_{i0}(x) \equiv -a_i(x)\ \forall\, i = \overline{1, n}$. Однако, в таком частном случае мы бы получили дифференциальное выражение с суммируемыми[4)] по Лебегу коэффициентами, в то время, как в дифференциальном выражении (16.1) условия на коэффициенты существенно ослаблены. Тем не менее, результаты §§ 10–15 легко адаптировать для случая дифференциального выражения (16.1), принимая во внимание, что в силу (10.3) квазипроизводные $y^{[i]}(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, дифференциального выражения $L_n[y]$ совпадают с обычными производными $y^{(i)}(x)$.

Прежде всего выясним, какое дополнительное ограничение нужно наложить на функцию $b_1(x)$, чтобы дифференциальное уравнение

$$L_n[y] = 0 \tag{16.2}$$

было корректным.

[4)] Из структуры матрицы $C'(x)$ (см. с. 90) видно, что за счет гладкости функции $a_{00} \equiv 1$ условие (II) можно заменить условием $a_{i0} \in L(I), i=\overline{1, n}$.

3

Векторные и матричные обобщенные квазидифференциальные уравнения

§ 17. Начальные задачи для векторных квазидифференциальных уравнений с мерами

Рассмотрим однородное векторное КДУ

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\bigl(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)}\bigr)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.1)$$

где $\bar{Y}\colon I \to \mathbb{C}^p$ — неизвестная вектор-функция, $A_{ij}\colon I \to \mathbb{C}^{p\times p}$ есть заданные матричные функции, в отношении которых требуем выполнения следующих условий:

(V) $A_{00}^{-1}(x)$ — локально ограничена и измерима на I;

(VI) $A_{i0}, A_{0j} \in L_{p\times p}^{2,loc}(I)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$;

(VII) $A_{ij}(x)=B'_{ij}(x)$, где $B_{ij}\in BV_{p\times p}^{+,loc}(I)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Вместе с векторным уравнением (17.1) рассмотрим также операторное (матричное) КДУ

$$L_{mn}[Y] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\bigl(A_{ij}(x)Y^{(n-i)}\bigr)^{(m-j)} = 0, \qquad (17.2)$$

где теперь $Y\colon I \to \mathbb{C}^{p\times p}$. Это КДУ назовем *ассоциированным* с уравнением (17.1).

§ 18. Линейная теория матричных обобщенных квазидифференциальных уравнений

Пусть матрицы-функции $\Phi_i(x)$, $k=\overline{1,q}$, и матрицы-функции $\Psi_j(x)$, $l=\overline{1,q}$, являются решениями исходного

$$L_{mn}[Y]=0 \tag{18.1}$$

и сопряженного $L^*_{mn}[Z]=0$ матричных КДУ соответственно. Составим блочные матрицы

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x) \\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x) \end{pmatrix}$$

и

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \cdots & \Psi_q(x) \\ \Psi_1^{\{1\}}(x) & \Psi_2^{\{1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{1\}}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1^{\{q-1\}}(x) & \Psi_2^{\{q-1\}}(x) & \cdots & \Psi_q^{\{q-1\}}(x) \end{pmatrix}$$

Определители $\mathcal{W}(x)=\det\Phi(x)$ и $\mathcal{V}(x)=\det\Psi(x)$ этих матриц назовем *квазивронскианами* решений $\Phi_k(x)$ и $\Psi_l(x)$ соответственно.

Теорема 18.1. *Для произвольной точки $x_0\in I$ квазивронскианы $\mathcal{W}(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ удовлетворяют равенствам*

$$\mathcal{W}(x)=\mathcal{W}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A_{01}(t)A_{00}^{-1}(t)-A_{00}^{-1}(t)A_{10}(t)\right]dt\right\}, \tag{18.2}$$

$$\mathcal{V}(x)=\mathcal{V}(x_0)\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\operatorname{tr}\left[A_{10}^*(t)A_{00}^{*-1}(t)-A_{00}^{*-1}(t)A_{10}^*(t)\right]dt\right\}. \tag{18.3}$$

§ 19. Структура фундаментальной матрицы

Пусть

$$L_{mn}\big[Y(x)\big]=0 \tag{19.1}$$

и

$$L^*_{mn}\big[Z(x)\big]=0 \tag{19.2}$$

— корректные матричные КДУ, которые с помощью некоторым образом введенных квазипроизводных $Y^{[k]}$, $k=\overline{0,q}$, и однозначно определенных при этом квазипроизводных $Z^{\{k\}}$ (или наоборот) приводятся к эквивалентным обобщенным линейным дифференциальным системам первого порядка

$$\mathcal{Y}'(x)=\mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) \tag{19.3}$$

и

$$\mathcal{Z}'(x)=-\big(\mathcal{C}'(x)\big)^*\mathcal{Z}(x)$$

соответственно, где

$$\mathcal{Y}=\big(Y,Y^{[1]},\dots,Y^{[q-1]}\big)^\top,\quad \mathcal{Z}=\big(Z^{\{q-1\}},\dots,Z^{\{1\}},Z\big)^\top,$$

причем $Y,Z:\ I\to\mathbb{C}^{p\times p}$.

Определение 19.1. Матрицу-функцию $\mathcal{B}(x,s)$, которая по переменной x удовлетворяет системе (19.3) и при $x=s\in I$ начальному условию $\mathcal{B}(s,s)=E_{qp}$, называем *фундаментальной матрицей, соответствующей матричному КДУ* (19.1).

Определение 19.2. *Матричной функцией Коши* операторного КДУ (19.1) называем матрицу-функцию $\mathcal{K}(x,s)$, которая по переменной x является решением этого уравнения и в точке $x=s\in I$ удовлетворяет начальным условиям

$$\mathcal{K}^{[i]}(s,s)=O_p\ \ (i=\overline{0,n-2}),\quad \mathcal{K}^{[n-1]}(s,s)=E_p. \tag{19.4}$$

§ 20. Конструкция элементов фундаментальной матрицы

Для матричного КДУ (19.1) произвольного порядка q опишем аналогичный предложенному в §14 способ построения матрицы-функции Коши $\mathcal{K}(x,s)$ и ее смешанных квазипроизводных посредством ФСР $\Phi_k(x)$, $k=\overline{1,q}$, данного уравнения.

Теорема 20.1. *Пусть* $\varphi_{kl}^{ij}(x)$, $k,l=\overline{1,p}$, $i,j=\overline{1,q}$ *— это элемент, расположенный на пересечении* k*-й строки и* l*-го столбца в* $(p\times p)$*-матрице* $\Phi_j^{[i-1]}(x)$, *а*

$$\mathcal{W}(x)=\det\left(\Phi_j^{[i-1]}(x)\right)_{i,j=1}^{q}\equiv\det\left(\left(\varphi_{kl}^{ij}(x)\right)_{k,l=1}^{p}\right)_{i,j=1}^{q}$$

есть квазивронскиан ФСР. Тогда функция Коши $\mathcal{K}(x,s)$ *матричного КДУ* (19.1) *и ее смешанные квазипроизводные* $\mathcal{K}^{*\{j\}*[i]}(x,s)$ *являются матрицами размера* $p\times p$, *каждый элемент которых представим в виде отношения двух функциональных определителей*

$$K_{kl}^{*\{j\}*[i]}(x,s)=\frac{\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)}{\mathcal{W}(s)},\quad k,l=\overline{1,p},\quad i,j=\overline{0,q-1},$$

где каждый из определителей $\mathcal{W}_{kl}^{ij}(x,s)$ *отличается от квазивронскиана* $\mathcal{W}(s)$ *одной лишь строкой*

$$\left(\varphi_{k1}^{i+1,1}(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_{kp}^{i+1,1}(x)\ \ \ldots\ldots\ \ \varphi_{k1}^{i+1,q}(x)\ \ \ldots\ \ \varphi_{kp}^{i+1,q}(x)\right),$$

которая имеет номер $(q-j-1)p+l$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_q(x)\\ \Phi_1^{[1]}(x) & \Phi_2^{[1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[1]}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi_1^{[q-1]}(x) & \Phi_2^{[q-1]}(x) & \cdots & \Phi_q^{[q-1]}(x)\end{pmatrix}$$

§ 21. Неоднородное векторное квазидифференциальное уравнение с распределениями

Рассмотрим векторный аналог неоднородного КДУ

$$L_{mn}[\bar{Y}] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\big(A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)}\big)^{(m-j)} = \\ = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\bar{F}_k^{(k+1)}(x), \quad (21.1)$$

где матричные коэффициенты $A_{ij}(x)$ удовлетворяют указанным в §17 условиям (V)–(VII), а правая часть удовлетворяет условию

(VIII) $\bar{F}_k \in BV^{+}_{loc,p}(I), \ k = \overline{0, m-1}$.

Определение 21.1. *Квазипроизводными* векторной функции $\bar{Y}(x)$ в смысле КДУ (21.1) назовем вектор-функции $\bar{Y}^{[k]}(x), \ k = \overline{0, q}$, определяемые формулами

$$\bar{Y}^{[i]} = \bar{Y}^{(i)}, \ i = \overline{0, n-1}; \quad \bar{Y}^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} A_{i0}(x)\bar{Y}^{(n-i)};$$

$$\bar{Y}^{[n+j]} = -\,\big(\bar{Y}^{[n+j-1]}\big)' + \sum_{i=0}^{n} A_{ij}(x)\bar{Y}^{(n-i)} + \bar{F}'_{m-j}(x), j = \overline{1, m}.$$

С помощью квазипроизводных векторное КДУ записывается в эквивалентном виде

$$\mathcal{Y}'(x) = \mathcal{C}'(x)\mathcal{Y}(x) + \mathcal{F}'(x), \quad (21.2)$$

где $\mathcal{Y} = \big(\bar{Y}, \bar{Y}^{[1]}, \ldots, \bar{Y}^{[q-1]}\big)^{\top}$, блочная матрица-мера $\mathcal{C}'(x)$ та же, что и раньше (см. с. 135), а

$$\mathcal{F}' = \big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \bar{F}'_{m-1}(x), \bar{F}'_{m-2}(x), \ldots, \bar{F}'_{0}(x)\big)^{\top}.$$

Понятно, что обобщенная дифференциальная система (21.2) является корректной, так как выполняются условия (17.6) и

$$\Delta\mathcal{C}(x)\Delta\mathcal{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in I.$$

4

Структура решений обобщенных квазидифференциальных уравнений

§ 22. Системы дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ-особенностями

Пусть на интервале I задано некое конечное упорядоченное множество точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$. Рассмотрим неоднородную обобщенную дифференциальную систему вида

$$Y' - \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} C_k\delta(x-x_k)\right)Y = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x)\Theta_k(x) + \sum_{k=1}^{N} S_k\delta(x-x_k), \quad (22.1)$$

где $Y(x)$ — неизвестная p-мерная вектор-функция, $\Theta_k(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $I_k = [x_k, x_{k+1})$, а коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

(I) $A_k(x) \in C_{p\times q}(I_k), \quad k = \overline{0, N-1};$

(II) $C_k \in \mathbb{C}^{p\times p}, \quad k = \overline{1, N};$

(III) $R_k(x) \in C_p(I_k), \quad k = \overline{0, N-1};$

(IV) $S_k \in \mathbb{C}^p, \quad k = \overline{1, N}.$

Через ω^* обозначим множество носителей обобщенных коэффициентов системы (22.1). Для этой системы поставим начальное условие

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{22.2}$$

Отметим, что система (22.1) является системой вида (7.8). Таким образом, для нее справедлива теорема 8.1, которую теперь можно переформулировать следующим образом.

Теорема 22.1. *Для существования единственного решения $Y(x)$ из допустимого класса $\mathfrak{D}^p_C(I)$ начальной задачи* (22.1), (22.2) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$C_k^2 \equiv 0, \quad C_k S_k \equiv 0, \quad k = \overline{1, N}. \tag{22.3}$$

Это решение представимо в форме Коши (8.2), *а его скачки в точках $x_k \in \omega^*$ определяются формулой*

$$\Delta Y(x_k) = C_k Y(x_k - 0) + S_k = C_k Y(x_k) + S_k. \tag{22.4}$$

В дальнейшем будем рассматривать только корректные системы вида (22.1), т. е. будем считать условия (22.3) выполненными.

§ 23. Построение фундаментальной матрицы

Определение 23.1. Однородную систему

$$Y'(x) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) \Theta_k(x) \right) Y(x),$$

которая соответствует системе (22.1), назовем *определяющей*.

§ 24. Структура решения неоднородной дифференциальной системы

Теорема 24.1. *Решение задачи* (22.1), (22.2) *на полуинтервале* $[x_0, x_N)$ *представимо в виде*

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k} B_k(x, x_j) Z_j + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s) R_k(s) ds \right\} \Theta_k(x), \quad (24.1)$$

где

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_j = \widetilde{C}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{B}_{j-1}(x_j, s) R_{j-1}(s) ds + S_j, \ \ j \geq 1. \quad (24.2)$$

В точке $x = x_N$ *значение решения вычисляется по формуле*

$$Y(x_N) = \sum_{j=0}^{N} B_N(x_N, x_j) Z_j. \quad (24.3)$$

Доказательство. Решение начальной задачи (22.1), (22.2) на полуинтервале $[x_0, x_N)$ ищем в виде

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(x) \Theta_k(x), \quad (24.4)$$

где $Y_k(x)$ есть решение этой задачи на частном полуинтервале $I_k = [x_k, x_{k+1})$. На интервале (x_k, x_{k+1}) система (22.1) имеет вид

$$Y_k' = A_k(x) Y_k + R_k(x). \quad (24.5)$$

Соответствующая ей фундаментальная матрица есть $\widetilde{B}_k(x, s)$. Решение системы (24.5) запишем в форме Коши (8.4):

$$Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k) P_k + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s) R_k(s) ds, \quad (24.6)$$

где P_k — некоторый неизвестный p-мерный вектор.

§ 25. Рекуррентное представление решения

Отметим, что на практике для отыскания решения задачи (22.1), (22.2) вместо громоздких формул (24.1)–(24.3) целесообразнее пользоваться полученными ниже, в теореме 25.1, рекуррентными формулами, которые для построения решения на каждом следующем полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$ требуют дополнительного вычисления предельного значения решения на предыдущем полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ в единственной точке x_k.

Теорема 25.1. *Решение начальной задачи* (22.1), (22.2) *можно найти по следующим рекуррентным формулам:*

$$Y_0(x) = \widetilde{B}_0(x, x_0)Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \widetilde{B}_0(x, s)R_0(s)ds, \;\; x \in [x_0, x_1), \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned} Y_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\big[\widetilde{C}_k Y_{k-1}(x_k - 0) + S_k\big] + \\ + \int\limits_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)R_k(s)ds, \;\; x \in [x_k, x_{k+1}), \;\; k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \tag{25.2}$$

$$Y_N(x_N) = \widetilde{C}_N Y_{N-1}(x_N - 0) + S_N. \tag{25.3}$$

Доказательство. Для $k = 0$, т. е. на полуинтервале $[x_0, x_1)$, система (22.1) не содержит никаких обобщенных компонент и, таким образом, представляет собой систему с непрерывными коэффициентами. Следовательно, ее решение на данном полуинтервале представимо в форме Коши (25.1).

Для $k = 1$, т. е. на $[x_1, x_2)$, решение системы (22.1) можно записать в форме Коши с некоторым начальным вектором Y_1:

$$Y_1(x) = \widetilde{B}_1(x, x_1)Y_1 + \int\limits_{x_1}^{x} \widetilde{B}_1(x, s)R_1(s)ds. \tag{25.4}$$

где $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ выражены формулами (25.11) и (25.14).

В точке $x=\pi \in \omega^*$ значение решения следует вычислять по отдельной формуле (25.3):

$$Y(\pi) = \widetilde{C}_2 Y_1(\pi-0) + S_2 = \begin{pmatrix} -2\pi e^{\pi} + \frac{\pi^2}{4} e^{\frac{\pi}{2}} \\ (2\pi - 1)e^{\pi} - \frac{\pi^2+4}{4} e^{\frac{\pi}{2}} + 2 \\ -(2\pi+5)e^{\pi} + (\pi+3)e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \end{pmatrix}.$$

▲

§ 26. Приведение краевой задачи к начальной

Докажем утверждение, которое лежит в основе одного специального метода решения краевых задач для дифференциальной системы (22.1), заключающегося в приведении краевой задачи к начальной.

Систему (22.1) рассмотрим вместе с краевыми условиями:

$$PY(x_0) + QY(x_N) = U, \tag{26.1}$$

где $P, Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $U \in \mathbb{C}^p$.

Теорема 26.1. *Если*

$$\det\left[P + QB_N(x_N, x_0)\right] \neq 0, \tag{26.2}$$

то при условиях корректности (22.3) *существует единственное решение краевой задачи* (22.1), (26.1), *которое представимо в виде* (24.1)–(24.3) *или* (25.1)–(25.3), *где начальный вектор вычисляется по формуле*

$$Y_0 = \left[P + QB_N(x_N, x_0)\right]^{-1} \left[U - Q\sum_{j=1}^{N} B_N(x_N, x_j) Z_j\right]. \tag{26.3}$$

где

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}\cos 2x + 5 \\ -\frac{1}{24}\sin 2x \end{pmatrix},$$

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin 4x - \frac{1}{8}\cos^2 2x - \frac{13}{3}\cos 2x + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{3}\cos^2 2x + \frac{16}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos x \end{pmatrix}.$$

▲

§ 27. Квазидифференциальные уравнения с кусочно-непрерывными коэффициентами и δ -особенностями

Рассмотрим обобщенное КДУ

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (27.1)$$

с коэффициентами вида

1) $a_{00}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x),$

2) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x),\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m},\ i\cdot j = 0;$

3) $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{ij}^k(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta_k(x),\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$

4) $f_r(x) = \sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_r^k(x)\Theta_k(x) + \sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\delta_k(x),\ r = \overline{0,m-1},$

где $y\colon I \to \mathbb{C}$ — неизвестная функция, $\widetilde{a}_{ij}^k(x)$, $\widetilde{f}_r^k(x)$ — непрерывные на полуинтервале $I_k = [x_k, x_{k+1})$ функции, a_{ij}^k, f_r^k — действительные числа. Для КДУ (27.1) квазипроизводные вводятся

$$
-\sum_{j=1}^{N-1}\left(\begin{matrix} 0 \\ \mathcal{I}_{j-1}(x_j)+\left[\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j)+s_j\right]\sum\limits_{i=j}^{N-1} b_i(x_{i+1},x_i)\end{matrix}\right)\Bigg].
$$

После несложных преобразований, связанных с вычислением обратной матрицы и матричного произведения, имеем

$$
Z_0=\left(\begin{matrix} t_0 \\ \dfrac{t_N-t_0-\sum\limits_{j=1}^{N}\mathcal{I}_{j-1}(x_j-0)-\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left(\mathcal{I}^{[1]}_{j-1}(x_j-0)+s_j\right)\sum\limits_{i=j}^{N-1} b_i(x_{i+1}-0,x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i(x_{i+1}-0,x_i)}\end{matrix}\right). \tag{27.27}
$$

Подставив выражения (27.25)–(27.27) в формулу (27.24) и упростив, получим решение краевой задачи (27.19), (27.20), первая координата которого есть решение $y(x)$ краевой задачи (27.17), (27.18), а вторая — его квазипроизводная. ▲

§ 28. Частично вырожденные квазидифференциальные уравнения

Рассмотрим один специальный класс КДУ.

Определение 28.1. *Частично вырожденным КДУ* назовем уравнение вида (27.1)

$$
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \tag{28.1}
$$

со следующими предположениями относительно коэффициентов и правой части:

1) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1} a_{ij}^k\Theta_k(x),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i\cdot j=0;$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N} a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

§ 29. Вырожденные квазидифференциальные уравнения

Рассмотрим еще один специальный класс КДУ.

Определение 29.1. *Вырожденным КДУ* назовем уравнение вида

$$(-1)^m\Big(a_{00}(x)y^{(n)}\Big)^{(m)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\Big(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\Big)^{(m-j)}=$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_r^{(r+1)}(x) \quad (29.1)$$

со следующими предположениями относительно его коэффициентов и правой части:

1) $a_{00}(x)=\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{a}_{00}^k(x)\Theta_k(x), a_{00}^k(x)\in C(I_k),\ k=\overline{0,N-1};$

2) $a_{ij}(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_{ij}^k\delta(x-x_k),\ a_{ij}^k\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m};$

3) $f_r(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}f_r^k\Theta_k(x),\ f_r^k\in\mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1}.$

Пользуясь формулами (15.2), запишем квазипроизводные, соответствующие вырожденному КДУ (29.1), с учетом специфики его коэффициентов:

$$y^{[i]}=y^{(i)},\ i=\overline{0,n-1};\qquad y^{[n]}=a_{00}(x)y^{(n)};$$
$$y^{[n+j]}=-\big(y^{[n+j-1]}\big)'+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}. \quad (29.2)$$

С их помощью вырожденное КДУ (29.1) обычным образом приводится к обобщенной дифференциальной системе вида (28.2), причем матрицы C_k и векторы S_k остаются теми же, а матрицы

5

Приближенное решение обобщенных квазидифференциальных уравнений

§ 30. Точное рекуррентное соотношение для обобщенного квазидифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим начальную задачу

$$(a_{00}(x)y')' + (a_{10}(x)y)' - a_{01}(x)y' - a_{11}(x)y = f'(x), \qquad (30.1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (a_{00}y' + a_{10}y)\Big|_{x=x_0} = y_0^1, \quad x_0 \in I, \qquad (30.2)$$

считая, что коэффициенты КДУ (30.1) удовлетворяют следующим условиям:

(I) $a_{00}^{-1}(x)$ — ограничена и измерима на I функция;

(II) $a_{10}, a_{01} \in L_2(I)$;

(III) $a_{11}(x) = \alpha'_{11}(x)$, где функция $\alpha_{11}(x)$ принадлежит пространству $BV_{loc}^{+}(I)$ и имеет разрывы первого рода в конечном числе точек;

(IV) $f(x) \in BV_{loc}^{+}(I)$.

Введем произвольным образом сетку

$$\omega_\nu = \left\{x_k \in I,\ k = \overline{0,\nu}\ :\ x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu\right\}. \qquad (30.3)$$

§ 31. Точное рекуррентное соотношение для обобщенного квазидифференциального уравнения произвольного порядка

Рассмотрим начальную задачу для КДУ порядка q $(= m+n)$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\bigl(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\bigr)^{(m-j)} = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}f_k^{(k+1)}(x), \quad (31.1)$$

$$y^{[r]}(x_0) = y_0^r, \quad r=\overline{0,q-1}, \quad x_0\in I, \quad (31.2)$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $f_k(x)$ удовлетворяют указанным в § 10 и §15 условиям (I)–(IV), а квазипроизводные $y^{[r]}(x)$ определяются выражениями (15.2).

Введем сетку ω_ν вида (30.3) и построим для начальной задачи (31.1), (31.2) некоторое $(q+1)$-точечное рекуррентное соотношение

$$\alpha_k^0 u(x_k)+\alpha_k^1 u(x_{k+1})+\ldots+\alpha_k^q u(x_{k+q}) = \eta_k, \quad k=\overline{0,\nu-q}, \quad (31.3)$$

$$u(x_0)=\varphi_0,\ u(x_1)=\varphi_1,\ \ldots\ ,\ u(x_{q-1})=\varphi_{q-1}, \quad (31.4)$$

где α_k^i, $i=\overline{0,q}$, η_k — некоторые функционалы на пространстве $BV_{loc}^{+}(I)$, а φ_j, $j=\overline{0,q-1}$, — некоторые сеточные функции.

Определение 31.1. Соотношение вида (31.3), (31.4) назовем *точным рекуррентным соотношением* (ТРС), или эквивалентной рекуррентной формулой для начальной задачи (31.1), (31.2), если выполняются следующие условия:

1) α_k^j, $j=\overline{0,q}$, η_k — функционалы от коэффициентов уравнения (31.1);

2) $u(x) = y(x)$, $x\in\omega_\nu$, де $y(x)$ — точное решение начальной задачи (31.1), (31.2), а $u(x)$ — решение задачи (31.3), (31.2).

§ 32. Точная двухточечная рекуррентная формула

Рассмотрим теперь начальную задачу (7.8), (7.9). Выбрав два произвольных узла $x_k < x_{k+1}$ сетки (30.3) и используя представление (8.4) решения начальной задачи в форме Коши, получим двухточечную рекуррентную формулу вида (31.10):

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} B(x_{k+1},t)dF(t),\ k=\overline{0,\nu-1}, \tag{32.1}$$

где Y_0 определяется исходя из начального условия (7.9). Рекуррентная формула (32.1) является точной для задачи (7.8), (7.9) в том смысле, что вычисленные по этой формуле значения $Y_k,\ k=\overline{0,\nu}$, совпадают со значениями точного решения $Y(x)$ начальной задачи (7.8), (7.9) в узлах x_k сетки ω_ν.

Очевидно, для однородной начальной задачи (7.1), (7.2) точная двухточечная (двучленная) формула (ТДФ) имеет вид

$$Y_{k+1} = B_{k+1,k}Y_k,\ k=\overline{0,\nu-1}. \tag{32.2}$$

Замечание 32.1. Стоит отметить, что двухточечная рекуррентная формула (32.1) является точной также для начальной задачи (31.1), (31.2) (которая эквивалентна задаче (7.8), (7.9)), причем в том смысле, что компоненты $y_k^{[i]},\ i=\overline{0,q-1},\ k=\overline{0,\nu}$, вектора Y_k совпадают со значениями точного решения $y(x)$ этой задачи и его квазипроизводных $y^{[i]}(x),\ i=\overline{1,q-1}$, в узлах сетки $x_k \in \omega_\nu$.

Построим ТДФ (32.1) для неоднородного частично вырожденного КДУ (28.1) с начальными условиями

$$y^{[i]}(x_0) = y_0^i, \quad y_0^i \in \mathbb{R},\ i=\overline{0,q-1}, \tag{32.3}$$

Поскольку $f_r(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} f_r^j\Theta_j(x),\ f_r^j \in \mathbb{R},\ r=\overline{0,m-1}$, то вектор

▼ Для вычисления $B_{k+1,k} = B(x_{k+1}, x_k)$ в формуле (32.1) воспользуемся выражением (31.24). Тогда

$$Y_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_k, \; k = \overline{0, \nu-1}, \tag{32.4}$$

$$Y_0 = (0, 0, 1, -1)^{\top}. \tag{32.5}$$

Заметим также, что ТДФ (32.4), (32.5) является точной и для начальной задачи (31.5), (31.19) в силу замечания 32.1. ▲

§ 33. Аппроксимация решений квазидифференциальных уравнений

В задачах аппроксимации и, в частности, при приближенном решении интегральных и дифференциальных уравнений важную роль играют теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Римана–Стилтьеса. Напомним некоторые известные результаты. Как и в случае интегралов Римана, имеет место

Теорема 33.1 [**155**, с. 69]**.** *Пусть* $g \in BV[a, b]$, *а последовательность функций* $f_n(x)$ *такова, что интеграл* $\int\limits_a^b f_n(x)dg(x)$ *существует для* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a, b]$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ *также существует и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dg(x) = \int\limits_a^b f(x)dg(x).$$

Другой вариант теоремы, не требующий равномерной сходимости $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ выглядит так.

Следует иметь в виду, что D-аппроксимацию можно осуществить только при условиях $[\Delta C_\nu(x)]^2 = 0$, $\Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x) = 0$ на $[a, b]$, т. е., в общем, не для всех элементов $c_{ij}(x)$, $f_j(x)$.

В предыдущем разделе приведены конструктивные формулы для отыскания решений обобщенных дифференциальных систем вида (22.1), однако при условии, если известна фундаментальная матрица соответствующей определяющей системы. Понятно, что такую матрицу не всегда удается построить точным способом. Следовательно, применяя к элементам матриц $A_k(x)$ описанные выше L- и D-аппроксимации или, возможно, некоторые другие способы аппроксимации (важным при этом является соблюдение условий теоремы 33.7), можно при относительно незначительной вычислительной трудоемкости получать (что, собственно, и проиллюстрировано на конкретных примерах в последнем параграфе монографии) приближенные решения с нужной точностью.

§ 34. Примеры построения приближенных решений

Пример 34.1. Для иллюстрации метода D-апроксимации построим приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{IV} - 5y'' + 4y = 0 \tag{34.1}$$

и начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1, \tag{34.2}$$

и вычислим приближенное значение решения этой задачи в точке $x = 1$.

▼ *Первый способ.* Сначала найдем приближенное значение $y(1)$ решения задачи Коши (34.1), (34.2) с помощью ТДФ, в процессе построения которой как раз и используем D-аппроксимацию коэффициентов (точнее, их первообразных) дифференциального уравнения (34.1).

С помощью вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}, y^{[3]}\right)^{\top}$, где квазипроизводные введены, как и раньше в примере 31.4, по формулам (31.16), задача Коши (34.1) (34.2) легко приводится к исходной задаче

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{34.3}$$

$$Y(0) = (0, 0, 1, -1)^{\top}. \tag{34.4}$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку

$$\omega_\nu = \{x_k = kh,\ k = \overline{0, \nu}\}$$

с шагом $h = x_{k+1} - x_k = 1/\nu$. Применим D-аппроксимацию к коэффициентам $C_{32} = 5$ и $C_{41} = 4$ (точнее, к их первообразным $c_{32} = 5x + \mathrm{const}$ и $c_{41} = 4x + \mathrm{const}$). Тогда по формуле (33.20) имеем

$$C_{32} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (5x_k - 5x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 5\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k),\ \ x \in [0, 1],$$

$$C_{41} \approx \sum_{k=1}^{\nu-1} (4x_k - 4x_{k-1})\,\delta(x - x_k) = 4\sum_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k),\ \ x \in [0, 1].$$

Таким образом, обобщенная дифференциальная система

$$Y_\nu' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & -1 \\ 4\sum\limits_{k=1}^{\nu-1} h\delta(x - x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\nu \tag{34.5}$$

является приближенной к дифференциальной системе (34.3).

Начальный вектор для приближенной системы выбираем в соответствии с начальным условием (34.4), т. е. $Y_\nu(0) = Y(0)$.

Система (34.5) является системой вида (31.22) и, следовательно, для нее имеет место ТДФ (см. пример 32.2)

$$Y_\nu(x_{k+1}) = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & h & -\frac{h^2}{2} \\ 0 & 5h & 1+5h^2 & -h-\frac{5}{2}h^2 \\ 4h & 4h^2 & 2h^3 & 1-\frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix} Y_\nu(x_k),$$

$k = \overline{0, \nu-1}$, причем

$$Y_\nu(0) = (0, 0, 1, -1)^\top. \tag{34.6}$$

Выбирая разное число точек деления, найдем приближенное значение решения задачи (34.1), (34.2) в точке $x = 1$, которое будет первой координатой вектора $Y_\nu(x_\nu)$. Полученные значения приведены во 2-м столбце таблицы 1.

Второй способ. Решим приближенно задачу (34.1), (34.2) при помощи ТРС. Полученной вследствие применения D-апроксимации обобщенной дифференциальной системе (34.5) соотвествует вырожденное КДУ

$$y_\nu^{IV} - 5\left(\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*) y_\nu'\right)' + 4\sum_{k=1}^{\nu} h\delta(x - x_k^*) y_\nu = 0, \tag{34.7}$$

которое является приближенным для уравнения (34.1).

Из вида квазипроизводных (31.16) и начального вектора (34.6) легко получить следующие начальные условия для уравнения (34.7):

$$y_\nu(0) = y_\nu'(0) = 0, \quad y_\nu''(0) = y_\nu'''(0) = 1. \tag{34.8}$$

Используя результаты примера 31.5, видим, что ТРС для начальной задачи (34.7), (34.8) выражается формулой (здесь $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0, \nu}$):

Таблица 1. *Приближенное значение* $y(1)$ *для задачи* (34.1), (34.2)

ν	ТДФ	$\varepsilon_1\times 10^3$	ТРС	$\varepsilon_2\times 10^3$	МСР	$\varepsilon_3\times 10^3$
100	0.95240307	0.04495	0.95240307	0.04495	0.94704780	5.40022
200	0.95243678	0.01124	0.95243678	0.01124	0.94976818	2.67984
400	0.95244521	0.00281	0.95244527	0.00275	0.95111322	1.33480
800	0.95244732	0.00070	0.95244670	0.00132	0.95178198	0.66604
1600	0.95244785	0.00018	0.95244996	0.00194	0.95212856	0.31946

$$\widetilde{y}_{k+4} - \left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+3} + \left(6+10h^2+\frac{8}{3}h^4+\frac{5}{3}h^6\right)\widetilde{y}_{k+2} - \\ - \left(4+5h^2-\frac{2}{3}h^4\right)\widetilde{y}_{k+1} + \widetilde{y}_k = 0, \quad k=\overline{0,\nu-4},$$

$$\widetilde{y}_0 = 0,\ y_1 = \frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6},\ \widetilde{y}_2 = 2h^2+\frac{4h^3}{3}+\frac{5h^4}{2}+\frac{5h^5}{4}-\frac{h^6}{3}-\frac{h^7}{9},$$

$$\widetilde{y}_3 = \frac{9h^2}{2}+\frac{9h^3}{2}+15h^4+10h^5+\frac{17h^6}{2}+ \\ +\frac{161h^7}{36}-\frac{25h^8}{6}-\frac{5h^9}{3}+\frac{2h^{10}}{9}+\frac{2h^{11}}{27}.$$

Результаты, полученные этим способом при разном числе точек деления, приведены в 4-м столбце таблицы 1. В этой таблице для сравнения приведены также результаты (см. 6-ой столбец), полученные при решении задачи (34.1) (34.2) классическим методом конечных разностей. Кроме того, в 3-м, 5-м и 7-м столбцах этой таблицы для удобства указаны (умноженные на 10^3) абсолютные погрешности ε_1, ε_2, ε_3 соответственно для точной двухточечной формулы (ТДФ), точного рекуррентного соотношения (ТРС) и метода конечных разностей (МКР).

Отметим, что точное значение решения задачи Коши (34.1), (34.2) равно $y(1) = -\frac{1}{3}e+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{12}e^{-2} \approx 0.95244802218267.$ ▲

Пример 34.2. Рассмотрим шарнирно закрепленный на двух концах $x=0$ и $x=\pi$ сжатый стержень длины $l=\pi$ и переменной жесткости $g(x)=\frac{c}{1+\sin x}$ $(c>0)$. Для отыскания критической силы $P_{\text{кр}}$ необходимо решить задачу на собственные значения

$$y''+p(1+\sin x)y=0, \quad p=P/c, \tag{34.9}$$

$$y(0)=y(\pi)=0, \tag{34.10}$$

первое собственное значение которой $p_1=P_{\text{кр}}/c$ как раз и даст нужный результат.

▼ *Первый способ.* Для отыскания приближенного решения краевой задачи (34.9), (34.10) используем D-аппроксимацию. На отрезке $[0,\pi]$ введем равномерную (для удобства) сетку $\omega_\nu=\{x_k=kh,\ k=\overline{0,\nu}\}$ с шагом $h=x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{\nu}$.

Применим к первообразной $\alpha(x)=x-\cos x+\text{const}$ коэффициента $a(x)=1+\sin x$ дискретизацию, т. е. на полуинтервале $[x_k,x_{k+1})$ аппроксимируем ее постоянной функцией:

$$\alpha(x)\approx\alpha(x_k)=x_k-\cos x_k+\text{const}, \quad x\in[x_k,x_{k+1}).$$

Тогда на отрезке $[0,\pi]$ первообразная $\alpha(x)$ аппроксимируется ступенчатой функцией вида (33.18):

$$\alpha(x)\approx\alpha_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu}(x_k-\cos x_k+\text{const})\Theta_k(x), \quad x\in[0,\pi].$$

Найдем скачок функции $\alpha_\nu(x)$ в точке $x_k=kh$ $(k=\overline{1,\nu})$:

$$\Delta\alpha_\nu(x_k)=\alpha_\nu(x_k)-\alpha_\nu(x_{k-1})=x_k-\cos x_k+\text{const}-\\ -(x_{k-1}-\cos x_{k-1}+\text{const})=h-\cos kh+\cos(k-1)h.$$

Таким образом, согласно (33.20) имеем

$$a(x)\approx\alpha'_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\nu}[h-\cos kh+\cos(k-1)h]\,\delta(x-x_k). \tag{34.11}$$

Тогда вырожденное КДУ

$$y_\nu'' + p\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x - x_k) y_\nu = 0,$$

где

$$\alpha_\nu^k = h - \cos kh + \cos(k-1)h = \frac{\pi}{\nu} - \cos\frac{\pi k}{\nu} + \cos\frac{\pi(k-1)}{\nu}, \tag{34.12}$$

является, очевидно, приближенным для уравнения (34.9).

Полученное КДУ имеет вид уравнения из примера 30.6 (см. задачу (30.22)), в котором

$$c_0 = 0, \quad c_k = p\alpha_\nu^k, \;\; x_k^* = x_k \;\; (k = \overline{1, N}, \;\; N = \nu).$$

Поэтому ТРС для этого уравнения определяется формулой (30.25), где в силу (30.24) $M_k = -c_k = -p\alpha_\nu^k$, и, следовательно, соотношение (30.25) запишется в виде (здесь $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k), \;\; k = \overline{0, \nu}$)

$$\widetilde{y}_{k+1} - (2 - ph\alpha_\nu^k)\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, \nu - 1}. \tag{34.13}$$

Из краевого условия на левом конце $y(0) = 0$ имеем $\widetilde{y}_0 = 0$. Выбрав $\widetilde{y}_1$ равным произвольной ненулевой константе[4)] (например, $\widetilde{y}_1 = 1$), из рекуррентной формулы (34.13) найдем $\widetilde{y}_\nu = y_\nu(\pi)$, которое, очевидно, будет зависеть от p, т. е. $\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_\nu(p)$. Тогда из краевого условия $y(\pi) = 0$ получим *характеристическое уравнение* $\widetilde{y}_\nu(p) = 0$, корни которого (т. е. собственные значения p) можно найти, например, методом деления отрезка пополам.

В таблице 2 для сравнения приведены результаты, полученные (при $\nu = 1600$) разными методами: МВ — *метод Вайнштейна*[5)],

[4)] Поскольку собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя.

[5)] Вайнштейн Альберт Львович (1892–1970) — российский экономист и статистик, один из основоположников российской школы экономико-математического анализа.

Таблиця 2. *Собственные значения задачи* (34.9), (34.10); $\nu = 1600$

p	MB	MФ	MP	MD
p_1	0.54031883	0.54031789	0.54031885	0.54031883
p_2	–	–	–	2.37174805
p_3	5.4486360	5.4477473	5.4486362	5.4486358
p_4	–	–	–	9.762195318
p_5	15.312608	15.292913	15.312608	15.3120518

MФ — *метод Фикеры*[6)], MP — *метод Ритца*[7)], MD — *метод D-аппроксимации.*

Второй способ. Для сравнения построим приближенное решение краевой задачи (34.9), (34.10), используя иной способ аппроксимации коэффициентов — L-аппроксимацию.

Применим к функции $\alpha(x) = x - \cos x + \mathrm{const}$ линеаризацию, т. е. на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ приблизим ее отрезком прямой, проходящей через точки $\big(x_k, \alpha(x_k)\big)$ и $\big(x_{k+1}, \alpha(x_{k+1})\big)$. Тогда согласно (33.17) имеем

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{h - \cos(k+1)h + \cos kh}{h}\,\Theta_k(x)$$

или в обозначениях (34.12)

$$a(x) \approx \alpha'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x). \tag{34.14}$$

[6)] Фикера Гаэтано (Fichera Gaetano, 1922–1996) — итальянский математик, ученик М. Пиконе, профессор Университета Триеста, Римского университета и Национального института высшей математики.

[7)] Ритц Вальтер (Ritz Walter, 1878–1909) — швейцарский физик-теоретик и математик, учился на одном курсе с А. Эйнштейном и М. Гроссманом, работал в Геттенгенском и Лейденском университетах, в Институте Кайзера, в Высшей нормальной школе.

Следовательно, исходное уравнение (34.9) аппроксимируется КДУ

$$y_\nu'' + p\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,\Theta_k(x)y_\nu = 0. \tag{34.15}$$

Последнее является частным случаем уравнения (30.1), а потому ТРС для него запишется в виде (30.20)–(30.21). Для построения функции Коши $\widetilde{K}_\nu(x,s)$ КДУ (34.15) на полуинтервале $[x_k, x_{k+1})$, т. е. уравнения

$$y_\nu'' + p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\,y_\nu = 0,$$

воспользуемся результатами примера 14.2. Поскольку на отрезке $[0,\pi]$ функция $\cos x$ монотонно убывает, то $\cos x_{k+1} < \cos x_k$. Тогда, учитывая, что $p>0$, имеем

$$p\,\frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h} = p\,\frac{h - \cos(k+1)h + \cos kh}{h} > 0,$$

поэтому по формуле (14.5) находим

$$\widetilde{K}_\nu(x,s) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\,\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Поскольку квазипроизводные в смысле уравнения (34.15) и сопряженного с ним уравнения (см. §11) определяются по формулам

$$y_\nu^{[1]}(x) = y_\nu'(x), \quad z_\nu^{\{1\}}(s) = -z_\nu'(s),$$

то

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x,s) = \frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial\widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial s} = \cos\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s),$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x,s) = -\frac{\partial^2 \widetilde{K}_\nu(x,s)}{\partial x \partial s} = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}(x-s).$$

Тогда

$$\widetilde{K}_\nu(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu(x_k,x_{k-1}) = \sqrt{\frac{h}{p\alpha_\nu^{k+1}}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{[1]}(x_k,x_{k-1}) = \cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_{k+1},x_k) = \widetilde{K}_\nu^{\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = \cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}},$$

$$\widetilde{K}_\nu^{[1]\{1\}}(x_k,x_{k-1}) = -\sqrt{\frac{p\alpha_\nu^{k+1}}{h}}\sin\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (30.20) и учитывая в силу (30.7), что $M_k = 0$, после упрощения получим

$$\widetilde{y}_{k+1} - 2\cos\sqrt{ph\alpha_\nu^{k+1}}\widetilde{y}_k + \widetilde{y}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1,\nu-1},$$

где, как и раньше, $\widetilde{y}_k = y_\nu(x_k)$, $k = \overline{0,\nu}$.

Далее, для отыскания собственных значений задачи (34.9), (34.10) так же, как и в первом способе, построим при помощи аналогичной процедуры характеристическое уравнение и используем метод деления отрезка пополам.

Для удобства в таблице 3 приведены результаты приближенного вычисления первого собственного значения с помощью L- и D-аппроксимации. ▲

Замечание 34.3. Задачу (34.9), (34.10) можно решить также посредством ТДФ, построенной для соответствующей приближенной системы, которую можно получить путем как D-, так и L-апрокисмации. Предлагаем читателю решить задачу этими методами самостоятельно и сравнить полученные результаты со значениями, приведенными в таблице 3.

Таблица 3. *Первое собственное значение задачи* (34.9), (34.10)

ν	*D-аппроксимация*	*L-аппроксимация*
100	0.54031183	0.54057761
200	0.54031710	0.54038353
400	0.54031842	0.54033503
800	0.54031875	0.54032290
1600	0.54031883	0.54031987

Следующий модельный пример иллюстрирует необходимость использования L-аппроксимации.

Пример 34.4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую вал в слабо деформированном состоянии под действием сжатия и кручения [**47**, с. 26]:

$$\begin{cases} -g(x)z'' = Pz - My', \\ -g(x)y'' = Py + Mz', \end{cases} \tag{34.16}$$

где $g(x) = (1+\sin x)^{-1}$ — жесткость на изгиб, P — осевая сжимающая сила, M — крутящий момент. Для вала длиной $l=\pi$ с закрепленными концами краевые условия для системы (34.16) имеют вид

$$z(0) = z(\pi) = 0; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{34.17}$$

Известно, что под действием достаточно большого крутящего момента M вал может терять устойчивость в форме винтообразной линии: с ростом крутящего момента сначала имеет место только скручивание, а дальше при определенном критическом крутящем моменте ось винтообразно деформируется. Если вал к тому же испытывает влияние со стороны осевой сжимающей силы $(P>0)$, то эта винтообразная деформация наступает раньше, т. е. при меньшей величине крутящего момента. Напротив, появление растягивающей осевой силы $(P<0)$ увеличивает критический момент, повышая тем самым устойчивость вала.

Используя D- и L-аппроксимацию, найдем соотношение между параметрами P и M, которое, собственно, и будет служить условием устойчивости вала.

▼ Введем матрицу

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда краевую задачу (34.16), (34.17) можно записать в векторном виде следующим образом:

$$\bar{Y}''+A(x)\bar{Y}'+B(x)\bar{Y}=0, \tag{34.18}$$

$$\bar{Y}(0)=\bar{Y}(\pi)=0,$$

где $\bar{Y}=(z,y)^{\top}$, $A(x)=M(1+\sin x)J$, $B(x)=P(1+\sin x)E_2$. Далее рассмотрим матричное дифференциальное уравнение, ассоциированное с уравнением (34.18) (см. §17),

$$Y''+A(x)Y'+B(x)Y=0, \tag{34.19}$$

вместе с краевыми условиями

$$Y(0)=Y(\pi)=O_2. \tag{34.20}$$

С помощью вектора $\mathcal{Y}=(Y,Y')^{\top}$ уравнение (34.19) приведем к обобщенной дифференциальной системе первого порядка

$$\mathcal{Y}'=\begin{pmatrix}O_2 & E_2\\ -B(x) & -A(x)\end{pmatrix}\mathcal{Y}. \tag{34.21}$$

Введем на отрезке $[0,\pi]$ равномерную сетку

$$\omega_\nu=\{x_k=kh,\ k=\overline{0,\nu}\}$$

с шагом $h=x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{\nu}$. Чтобы найти приближенное решение системы (34.21), применим D-аппроксимацию к элементу $B(x)$. Поскольку

$$B(x)=\begin{pmatrix} P(1+\sin x) & 0 \\ 0 & P(1+\sin x)\end{pmatrix}$$

и $P=\mathrm{const}$, то дискретизацию применяем к первообразной для функции $1+\sin x$. При этом воспользуемся полученной в примере 34.2 аппроксимацией (34.11):

$$1+\sin x\approx\sum_{k=1}^{\nu}[h-\cos kh+\cos(k-1)h]\delta(x-x_k).$$

Тогда

$$B_\nu(x)\approx\begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k) & 0 \\ 0 & P\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta(x-x_k)\end{pmatrix}=$$

$$=P\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_\nu^k\delta_k(x-x_k)E_2, \quad (34.22)$$

где $\alpha_\nu^k=h-\cos kh+\cos(k-1)h$.

К элементу $A(x)$ применить D-аппроксимацию не получится, так как при этом матрица скачков приближенной системы выглядела бы следующим образом:

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x)=\begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -\Delta B_\nu & -\Delta A_\nu\end{pmatrix}$$

и, очевидно, не удовлетворяла бы условию корректности $\left[\Delta\mathcal{C}_\nu(x)\right]^2=0\,\forall x\in[0,\pi]$ (см. (17.6)). Именно поэтому, применим к элементу $A(x)$ L-аппроксимацию. Поскольку

$$A(x)=\begin{pmatrix} 0 & -M(1+\sin x) \\ M(1+\sin x) & 0\end{pmatrix},$$

то линеаризировать будем снова первообразную функции $1+\sin x$. Только теперь применим полученную в примере 34.2 аппроксимацию (34.14):

$$1+\sin x \approx \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x).$$

Тогда

$$A_\nu(x) \approx \begin{pmatrix} 0 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) \\ M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)J. \quad (34.23)$$

Используя выражения (34.22) и (34.23), запишем дифференциальную систему

$$\mathcal{Y}'_\nu = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ -P\sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_\nu^k \delta(x-x_k)E_2 & -M\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} \frac{\alpha_\nu^{k+1}}{h}\Theta_k(x)J \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu, \quad (34.24)$$

которая, очевидно, является аппроксимацией системы (34.21). Пусть $\mathcal{B}_\nu(x,s)$ — фундаментальная матрица системы (34.24). По аналогии с (32.2) построим ТДФ

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1})\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), \quad k=\overline{1,\nu}. \quad (34.25)$$

С учетом свойства (d) фундаментальной матрицы (см. теорему 3.2) и структуры матрицы скачков

$$\Delta\mathcal{C}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} O_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & O_2 \end{pmatrix}$$

дифференциальной системы (34.24) имеем

$$\mathcal{B}_\nu(x_k, x_{k-1}) = (E_4 + \Delta\mathcal{C}_\nu(x_k))\,\mathcal{B}_\nu(x_k - 0, x_{k-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}), \tag{34.26}$$

где $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x, s)$ — фундаментальная матрица определяющей системы на полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$, т. е. системы

$$\mathcal{Y}_\nu' = \begin{pmatrix} O_2 & E_2 \\ O_2 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h}\cdot J \end{pmatrix} \mathcal{Y}_\nu. \tag{34.27}$$

Подставляя выражение (34.26) в ТДФ (34.25), получим соотношения

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 \\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k, x_{k-1}) \mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}), \; k = \overline{1, \nu}. \tag{34.28}$$

Построим фундаментальную матрицу $\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x, s)$, используя теорему 19.4. Для этого найдем матрицу-функцию Коши $\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x, s)$ КДУ

$$Y_\nu'' + M\frac{\alpha_\nu^k}{h} J Y_\nu' = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu, \tag{34.29}$$

эквивалентного системе (34.27). Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция Коши этого КДУ определяется выражением

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\nu^{k-1}(x, s) = \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right],$$

где $J_\nu^k = M\frac{\alpha_\nu^k}{h} J$, $k = \overline{1, \nu}$. Учтем также, что квазипроизводные в смысле уравнения (34.29) и сопряженного с ним уравнения согласно (17.3) и (17.13) имеют вид

$$Y_\nu^{[1]}(x) = Y_\nu'(x), \quad Z_\nu^{\{1\}}(s) = -Z_\nu'(s) + J_\nu^k Z_\nu(s).$$

Тогда в силу теоремы 19.4 фундаментальная матрица системы (34.27) будет выглядеть следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x, s) = \begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2 - e^{-J_\nu^k(x-s)}\right] \\ O_2 & e^{-J_\nu^k(x-s)} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\nu^{k-1}(x_k,x_{k-1})=\begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2-e^{-J_\nu^k h}\right]\\ O_2 & e^{-J_\nu^k h}\end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу в формулу (34.28), получим ТДФ для системы (34.24), которая одновременно является приближенной для системы (34.21):

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k)\ =\ \begin{pmatrix} E_2 & O_2\\ -P\alpha_\nu^k E_2 & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & \left(J_\nu^k\right)^{-1}\left[E_2-e^{-J_\nu^k h}\right]\\ O_2 & e^{-J_\nu^k h}\end{pmatrix}\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}). \tag{34.30}$$

Можно показать (см., например, [**33**, с. 54]), что

$$e^{-tJ}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix},$$

поэтому

$$e^{-J_\nu^k h}=e^{-M\alpha_\nu^k J}=\begin{pmatrix}\cos M\alpha_\nu^k & \sin M\alpha_\nu^k\\ -\sin M\alpha_\nu^k & \cos M\alpha_\nu^k\end{pmatrix}=$$
$$=\cos M\alpha_\nu^k\cdot E_2-\sin M\alpha_\nu^k\cdot J.$$

Вычислим также $\left(J_\nu^k\right)^{-1}$:

$$\left(J_\nu^k\right)^{-1}\ =\ \begin{pmatrix}0 & -M\frac{\alpha_\nu^k}{h}\\ M\frac{\alpha_\nu^k}{h} & 0\end{pmatrix}^{-1}\ =\ \begin{pmatrix}0 & \frac{h}{M\alpha_\nu^k}\\ -\frac{h}{M\alpha_\nu^k} & 0\end{pmatrix}\ =\ -\frac{h}{M\alpha_\nu^k}J.$$

Если эти выражения подставить в (34.30) и выполнить умножения блочных матриц, то ТДФ будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{Y}_\nu(x_k)=\begin{pmatrix} E_2 & G_\nu^k\\ -P\alpha_\nu^k\cdot E_2 & H_\nu^k\end{pmatrix}\mathcal{Y}_\nu(x_{k-1}),\, k=\overline{1,\nu}, \tag{34.31}$$

где

$$G_\nu^k=\frac{h}{M\alpha_\nu^k}\left[\sin M\alpha_\nu^k\cdot E_2-\left(1-\cos M\alpha_\nu^k\right)\cdot J\right],$$

$$H_\nu^k = \left[\cos M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}\sin M\alpha_\nu^k\right]E_2 - \\ - \left[\sin M\alpha_\nu^k - \frac{Ph}{M}(1 - \cos M\alpha_\nu^k)\right]J.$$

Из краевого условия (34.20) на левом конце следует, что первая компонента блочного вектора $\mathcal{Y}_\nu(0)$ равна O_2. Выбрав вторую компоненту этого вектора равную любой ненулевой (к примеру, единичной) матрице, так что $\mathcal{Y}_\nu(0) = (O_2, E_2)^\top$, по рекуррентной формуле (34.31) найдем $\mathcal{Y}_\nu(\pi)$, которое, очевидно, будет зависеть от параметров P и M. Тогда из краевого условия (34.20) на правом конце получим уравнение

$$\det \mathcal{Y}_\nu^1(P, M) = 0,$$

где $\mathcal{Y}_\nu^1(P, M)$ — первая блочная компонента вектора $\mathcal{Y}_\nu(\pi; P, M)$. Это и есть *характеристическое уравнение* для определения P и M. Последовательно задавая значения крутящего момента M, будем вычислять значения осевой сжимающей силы P. При $M = 0$ или $P = 0$ исходная задача значительно упрощается и поэтому решается независимо. В таблице 4 приведены числовые результаты, а на рис. 1 — кривая зависимости значений сжимающей силы P от значений крутящего момента M.

Напоследок заметим, что в случае, когда вал имеет постоянное поперечное сечение и, следовательно, $g(x) = \mathrm{const}$, задача (34.16), (34.17) исследовалась в работе [**13**], где получено условие устойчивости в виде соотношения $\frac{M^2}{4g^2} + \frac{P}{g} = \frac{\pi^2}{l^2}$. ▲

Таблица 4. *Зависимость между параметрами P и M*

M	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
P	0.540	0.539	0.536	0.530	0.522	0.512	0.499	0.484
M	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75
P	0.467	0.448	0.426	0.402	0.376	0.347	0.317	0.283
M	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.09	
P	0.248	0.210	0.170	0.128	0.083	0.036	0	

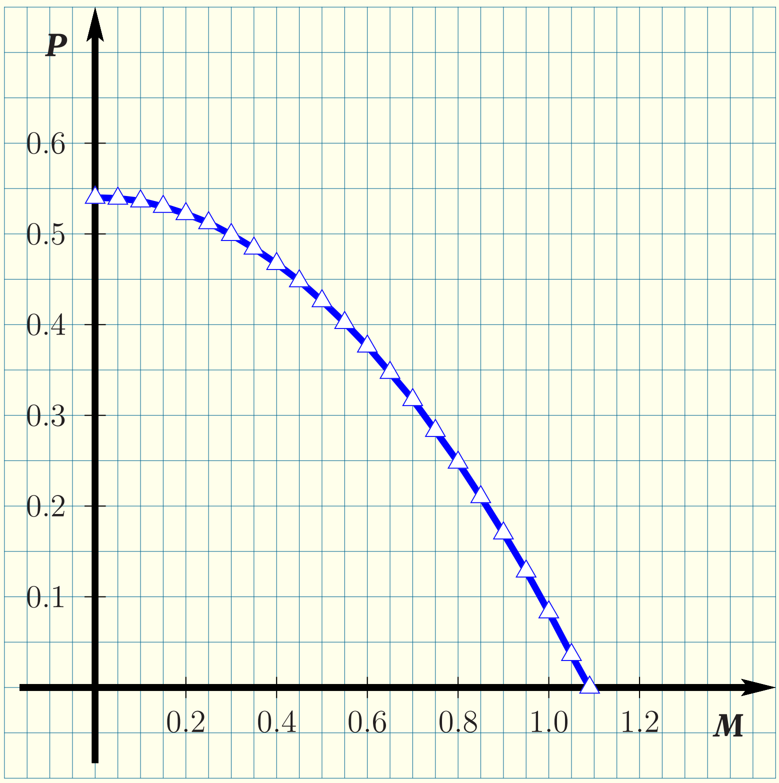

Рис. 1. Кривая зависимости сжимающей силы от крутящего момента

Литература

[1] Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Об общем методе построения алгебр обобщенных функций // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318, №2. – С. 267–270. 30

[2] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 311 с. 29, 46, 69, 235

[3] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 749 с. 19, 23, 24, 28, 40, 50, 53, 55, 57, 73

[4] Ахиезер Н. И. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи математ. наук. – 1941. – №9. – С. 126–156. 15

[5] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 544 с. 15

[6] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. – Х.: ГНТИУ, 1938. – 265 с. 15

[7] Ахметов М. У., Перестюк Н. А., Тлеубергенова М. А. Управление линейными импульсными системами // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №3. – С. 307–314. 27

[8] Ахметов М. У., Сеилова Р. Д. Ранговые признаки управляемости для краевой задачи линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №6. – С. 723–730. 27

[9] Ашордиа М. Т. О задачи Коши для системы обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. ин-та прикл. матем. – Тбил. ун., 1987. – №22. – С. 5–41. 30

[10] Багмут И. Г. Разностные схемы высокого порядка точности для уравнений типа Лежандра // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1972. – Т.12, №3.34

[11] Балоян Н. М., Молокович Ю. М. К вопросу о разностных схемах высокого порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярной особенностью // Изв. ВУЗов. Математ. – 1975. – №7. – С. 10–18. 34

[12] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Изд. ИЛ, 1954. – 216 с.

[13] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика: Пер. с нем. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1950. – 900 с. 269

[14] Брук В.М. О числе линейно независимых, квадратично интегрируемых решений систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ. – 1975. – 5. – С. 25–33. 19

[15] Бурханов Ш. А., Макаров В. Л. О точных и усеченных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, №9. – С. 1502–1514. 33

[16] Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с. 46, 69, 235

[17] Власій О. О. Про збіжність наближених розв'язків квазідиференціальних рівнянь // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2005. – №540. – С. 62–64. 6, 11, 26

[18] Власій О. О., Мазуренко В. В. Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.73–86. 6, 11, 26

[19] Власий О. О., Мазуренко В. В., Таций Р. М. Об одном классе дискретно-непрерывных краевых задач для векторных квазидифференциальных уравнений // Актуальные проблемы современного анализа: Сб. научн. Трудов. – Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2009. – С.19–36. 6, 11, 26

[20] Власій О. О., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – №.660 – С.34–38. 6, 11

[21] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с. 134

[22] Гащук П., Зорій Л.-М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технол., 1999. – 372 с. 12

[23] Глазман И. Об индексе дефекта дифференциальных операторов // ДАН СССР. – 1949. – Т.64, №2. – С. 151–154. 14

[24] Глазман И. М. К теории сингулярных дифференциальных операторов // Успехи. мат. наук. – 1950. – Т.5, №6(40). – С. 102–135. 15

[25] Годев К. Н., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., Самарский А. А. Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями // Матем. сборник. – 1986. – Т. 131(173), №2(10). – С. 159–184. 34, 35

[26] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом // Доповіді НАН України. – 2009. – №5. – С. 16–21. 25

[27] Головатий Ю. Д., Манько С. С. Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173–207. 25

[28] Голощапова Н. И., Заставный В. П., Маламуд М. М. Положительно определенные функции и спектральные свойства оператора Шрёдингера с точечными взаимодействиями // Мат. заметки. – 2011. – V. 90, №1. – P. 151–156. 25

[29] Голощапова Н. И., Оридорога Л. Л. Одномерный оператор Шрёдингера с δ- и δ'-взаимодействиями // Мат. заметки. – 2008. – V. 84, №1. – P. 127–131. 25

[30] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов четного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №4. – С. 19–24. 26

[31] Горюнов А. С., Михайлец В. А. О расширениях симметрических квазидифференциальных операторов нечетного порядка // Доклады НАН Украины. – 2009. – №9. – С. 27–31. 26

[32] Гохман Э. Х. Интеграл Стильтьеса и его приложения. – М.: ГИФМИ. – 1958.

[33] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с. 55, 268

[34] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: неосциляция решений. – Ижевск, 1984. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ, №1749. 22

[35] Дерр В. Я. Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи. – Ижевск, 1984. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ, №2994. 22

[36] Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №11. – С. 1861–1872. 22

[37] Дерр В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэфициентах // Доклады АН СССР. – 1988. – Т.298, №2. – С. 269–272. 22

[38] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев и др. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с. 22

[39] Егоров Ю. В. К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, вып. 5(275). – С. 3–40. 30, 47

[40] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы, модели и приложения. – М.: Наука, 1991. – 256 с. 27, 29, 30

[41] Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін. – Львів: Вид.-во НУ"ЛП 2001. – 244 с. 170

[42] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я. и др. – Киев: Наук. думка, 1981. – 272 с. 12

[43] Кац И. С. Спектральная теория струны и патологические процессы размножения и гибели // Функц. анализ и его прил. – 2005. – Т. 39, №2. – С. 74–78. 24

[44] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. К вопросу о дефектных числах симметрических дифференциальных операторов с комплексными коэффициентами // Матем. физ. и функц. ан. – 1971. – 2. – С. 45–60. 15, 19

[45] Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С. О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка: Препр. / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низк. температур. – Харьков, 1973. – 60 с. 15, 19

[46] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. ИЛ, 1958. – 474 с. 110

[47] Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 503 с. 12, 149, 263

[48] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с. 40, 47, 245, 247

[49] Корнеев В. Г. О точных сеточных схемах // Вычислит. матем. и матем. физика. – 1982. – Т. 22, №3. – С. 646–654. 34

[50] Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II // Матем. сборник. – 1947. – Т. 20(62), №3. – С.431–495; Т. 21(63), №3. – С. 365–404. 15

[51] Крейн М. Г. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74, №1. – С. 9–12. 15

[52] Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Г.С. и др. – К.: Вища шк., 1974. – 472 с. 109, 125, 171, 188

[53] Кутнів М. В. Про точність триточкових різницевих схем m-го рангу для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 43–49. 33

[54] Кутнів М. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами третього роду // Вісник Львів. унів. Серія прикл. матем. та інформ. – 2002. - Вип. 4. – С. 61–66. 33

[55] Кутнив М. В., Макаров В. Л., Самарский А. А. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60. 33

[56] Левин А. Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения // Вестн. Ярославского унив. – 1974. – Вып. 8. – С. 122–144. 30

[57] Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщенные интегралы. – 2-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2011. – 280 с. 247

[58] Мазуренко В. Про коливання балок з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів. – 2000. – Т. 2. – С. 255–259. 6, 11, 26

[59] Мазуренко В. В. Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткінсона // Доповіді НАН України. – 2001. – №8. – С. 19–22. 6, 11

[60] Мазуренко В. В., Таций Р. М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. – С. 328–336. 6, 11

[61] Мазуренко В. В., Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Про властивості матриці Ґріна систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів // Вісник Прикарпатського університету: Математика. Фізика. – 2007. – Вип. 3. – С. 21–29. 6, 11, 26

[62] Макаров В. Л., Макаров И. Л., Приказчиков В. Г. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, №7. – С. 1194–1205. 33

[63] Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М. Точные и усеченные разностные схемы для задачи Штурма-Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, №7. – С. 1265–1275. 34

[64] Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25. 6, 11

[65] Махней О. В. Узагальнений несамоспряжений оператор другого порядку на півосі // Вісник Львів. нац. універ. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 92–101. 6, 11

[66] Махней О. В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 147–156. 6, 11

[67] Махней О. В. Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С.64–72. 6, 11, 26

[68] Махней А. В., Таций Р. М. Асимптотика собственных значений и собственных функций сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, №8. – С. 1044–1051. 6, 11, 26

[69] Махней О. В., Тацій Р. М. Розвинення за власними векторфункціями у випадку простих власних значень сингулярного квазідиференціального оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №3. – С. 16–27. 6, 11, 26

[70] Махней О. В., Тацій Р. М. Разложение по собственным функциям в случае простых собственных значений сингулярного квазидифференциального оператора // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №2. – С. 179–187. 6, 11, 26

[71] Махней О. В., Тацій Р. М. Асимптотична поведінка власних значень і власних функцій крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння // Математичні студії. – 2007. – Т. 29, №2. – С. 165–174. 6, 11, 26

[72] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1954. – 352 с. (2-е изд.) – М.: Наука, 1969. – 528 с. 15, 86

[73] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с. 28, 40, 42, 245

[74] Нижник Л. П. Одномерный оператор Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева // Функц. ан. и его прил. – 2006. – V. 40, №2. – С. 74–79. 25

[75] Нижник Л. П. Оператор Шрёдингера с δ'-взаимодействием // Функц. ан. и его прил. – 2003. – V. 37, №1. – С. 85–88. 24

[76] Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с. 12, 81

[77] Орлов С. А. Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 92, №3. – С. 483–486. 15

[78] Орлов С. А. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №3. – С. 538–541. 15, 17

[79] Орлов С. А. Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 111, №6. – С. 1175–1177. 15, 17

[80] Перестюк Н. А., Остапенко Е. В. Управляемое импульсное воздействие в играх с фиксированным временем окончания // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №8. – С. 1112–1118. 27

[81] Радыно Н. Я. О решениях линейных дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций, содержащих медленно растущие распределения // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. н. – 1999. – №1. – С. 18–22. 30

[82] Рофе-Бекетов Ф. С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1969. – 8. – С. 3–24. 15, 18

[83] Самойленко А. М., Бойчук А. А. Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №4. – С. 564–568. 27

[84] Самойленко А. М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсным воздействием // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 319, №1. – С. 63–67. 27

[85] Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Наукова думка, 1987. – 287 с. 27

[86] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с. 158

[87] Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И. Проблема “биений” в импульсных системах: Препр. / АН УССР. Ин-т мат. – 1990. – №11. – С. 1–46. 27

[88] Слюсарчук В. Е. Общие теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №7. – С. 954–964. 27

[89] Стасюк М. Ф. Структура розв’язків звичайних диференціальних і квазідиференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 33–36. 6, 26

[90] Стасюк М. Ф., Власій О. О. Рекурентне співвідношення для узагальненого квазідиференціального рівняння другого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 82–87ю 6, 11, 26

[91] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. До дослідженя коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 43–47. 6

[92] Стасюк М. Ф., Таций Р. М. Структура решений обобщенного квазидифференциального уравнения 2-го порядка // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1984. – №182. – С. 120–122. 6, 26

[93] Стасюк *М.* Ф., Таций Р. *М.* Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С. 89–90. 6, 75

[94] Стасюк *М.* Ф., Тацій Р. *М.* Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1990. – №242. – С. 91–92. 6

[95] Стасюк *М.* Ф., Тацій Р. *М.* Диференціальні рівняння з коефіцієнтами – узагальненими функціями вищих порядків // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. – 1991. – № 251. – С. 111–113. 6, 26

[96] Стасюк *М.*, Тацій Р. *М*атричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник НУ "Львів. політех.": Фіз.-мат. науки. – Вип. 566. – 2006. – С. 33–40. 6

[97] Тацій Р. *М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ. – 1994. – №2-94. – С. 1–54. 6, 26

[98] Тацій Р. *М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. Держ. ун-т ім. І.Франка. - Львів, 1994. – 37 с. 28, 32, 75

[99] Тацій Р. *М.*, Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // *М*ат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №4. – С. 49–55. 6, 11, 26

[100] Тацій Р. *М.*, Власій О. О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її

застосування // Доповіді НАН України. – 2007. – №9. – С. 17–20. 6, 11, 26

[101] Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165–167. 6

[102] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, №1. – С. 43–53. 6, 11, 26

[103] Тацій Р. М., Мазуренко В. В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – 16, №1. – С. 61–75. 6, 11, 26

[104] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1989. – №4. – С. 25–28. 6, 26

[105] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазідиференціальних рівнянь // Доклады АН УРСР. Сер. А. – 1991. – №1. – С. 16–19. 6, 26

[106] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Власій О. О., Живічинські М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 18–27. 6, 11, 26

[107] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про спектральні властивості однієї дискретно-неперервної крайової задачі //

Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1996. – №229. – С. 165–170. 6, 11, 26

[108] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Неоднорідна дискретно-неперервна крайова задача для векторного КДР // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1998. – №346. – С. 120–124. 6, 11, 26

[109] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Про апроксимацію розв'язків дискретно-неперервних крайових задач // Вісник ДУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 1999. – №364. – С. 163–173. 6, 11, 26

[110] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В. Конструкція елементів фундаментальної матриці квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2004. – №518. – С. 30–35. 6, 26

[111] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Кісілевич В. В., Мазуренко В. В. Узагальнені дискретно-неперервні крайові задачі для векторного квазідиференціального рівняння четвертого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка": Прикл. математика. – 2000. – №407. – С. 21–27. 6, 11

[112] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Про порядок зростання розв'язків звичайного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами як функцій параметра // Вісник НУ "Львів. політех.": Прикладна матем. – 2000. – №411. – С. 311–317. 6, 11

[113] Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2009. – №10. – С. 7–37. 6, 26

[114] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности // Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 131, №3. – С. 514–517. 33, 35

[115] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №1. – С. 5–63. 10, 35

[116] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Вычислит. математика и матем. физика. – 1961. – Т. 1, №3. – С. 425–440. 33, 35

[117] Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Уч. пособ. – М.: Высш. шк., 1987. – 296 с. 10, 34, 35

[118] Самарский А. А. Теория разностных схем: Уч. пособ. – М.: Наука, 1977. – 656 с. 221, 228, 235

[119] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с. 26, 29

[120] Фихтегольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2 – М.: Физматлит, 2001. – 810 с. 212

[121] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с. 55

[122] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с. 27, 28, 29, 40, 48, 49

[123] Шилов Г. Е. Математический анализ. 2-й спец. курс. – М.: Изд.МГУ, 1984. – 201 с.

[124] Шин Д. Теорема существования квази-дифференциального уравнения n-го порядка // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 515–518. 12, 84

[125] Шин Д. О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]} = lu, I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$ // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 519–522. 12, 84

[126] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18, №8. – С. 523–526. 12, 84

[127] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7(49), №3. – С. 479–527. 13, 84

[128] Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55), №1. – С. 39–70. 13, 14

[129] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциальных операторов // Известия АН СССР. Серия математ. – 1955. – 19. – С. 201–220. 15, 17

[130] Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 115, №1. – С. 67–70. 15, 17

[131] Штраус А. В. Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка // Известия АН СССР. Серия математ. – 1957. – 21. – С. 785–808. 15, 17

[132] Штраус А. В. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 155, №4. – С. 771–774. 15, 17

[133] Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №8. – С. 1132–1135. 27

[134] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner. – 2nd revised ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p. 25

[135] Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. 25

[136] Antosik P., Ligeza J. Products of measures and functions of finite variations // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, 1975. Sofia, 1979. – P. 20–26. 29, 31

[137] Colombeau J. F. New generalized functions and multiplication of distributions. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1989. – 372 p. 30

[138] Everitt W. N. On the deficiency index problem for ordinary differential operators 1910-1976 // Differential Equations (Proceedings of The 1977 Uppsala International Conference). – P. 62–81. 20

[139] Everitt W. N. Linear ordinary quasi-differential expressions. – Proceedings of the 1983 Beijing Symposium on Differential Equations and Differential Geometry. – Science Press, University of Beijing, P.R. China, 1986. – P. 1–28. 20, 21

[140] Everitt W. N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators // Math. Surveys and Monographs. – Vol. 61. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 20, 21

[141] Everitt W. N., Muldowhey I. S., Thandi N. Factorization of quasi-differential operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 113, No. 1. – P. 93–98. 20, 21

[142] Everitt W. N., Race D. Some remarks on linear ordinary quasi-differential expressions // Proc. London Math. Soc. – 1987. – Vol. 3-54, No. 2. – P. 300–320. 20, 21

[143] Everitt W. N., Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1979. – Vol. 27, No. 3. – P. 363–397. 20, 21

[144] Everitt W. N., Zettl A. Differential operators generated by a countable number of quasi-differential expressions on the real line // Proc. London Math. Soc. – 1992. – Vol. 3-64, No. 3. – P. 524–544. 20, 21

[145] Fang H. The existence of periodic solutions of impulsive differential equations of mixed type // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 2000. – Vol. 21, No. 3. – P. 291–296. 27

[146] Feller W. On second order differential operators // Ann. Math. – 1955. – Vol. 61. – P. 90–105. 24

[147] Feller W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions // Ill. J. Math. – 1957. – Vol. 1, No. 4. – P. 459–504. 24

[148] Feller W. The birth and death processes as diffusion processes // Journ. Math. Pur. Appl. – 1959. – Vol. 38. – P. 301–345. 24

[149] Frayer C., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V., Perry P. A. Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials: I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS systems // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, No. 11. – 115007 (25 p). 25

[150] Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L. Three point difference schemes of variable order for nonlinear BVPs on the half axis. Technical Report // Friedrich Schiller University Jena, Department of Mathematics and Computer Science; 05 04, 2005. – P. 1–37. 33

[151] Goloschapova N., Oridoroga L. On the Negative Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators with Point Interactions // Integr. Equ. Oper. Theory. – 2010. – Vol. 67. – P. 1–14. 25

[152] Golovaty Yu. D., Hryniv R. O. On norm resolvent convergence of Schrödinger operators with δ'-like potentials // J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. – Vol. 43, No. 15. – 155204 (14 p). 25

[153] Halas Z., Tvrdý M. Continuous dependence of solutions of generalized linear differential equations on a parameter // Funct. Differ. Equ. – 2009. – Vol. 16, No. 2. – P. 299–313. 247

[154] Hildebrandt T. H. On systems of linear differentio-Stiltjes-integral equations // Illinois Journ. Math. – 1959. – Vol. 3, No. 3. – P. 352–373. 30, 54, 60, 100, 140

[155] Hildebrandt T. H. Introduction to the theory of integration. – Academic Press, New York – London, 1963. – 385 p. 244, 245

[156] Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V. Eigenvalue asymptotics for Sturm–Liouville operators with singular potentials // J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 238, No. 1. – P. 27–57. 25

[157] Kodaira K. On ordinary differential equations of any even order and the correponding eigenfunction expansions // Amer. J. Math. – 1950. – Vol. 72. – P. 502–544. 20, 21

[158] Kostenko A. S., Malamud M. M. 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differ. Equatios. – 2010. – Vol. 241, No. 2. – P. 253–304. 25

[159] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czech. Math. J. – 1958. – Vol. 8, No. 3. – P. 360–388. 30

[160] Ligeza J. Cauchy's problem for system of linear differential equations with distributional coefficients // Coloq. math. – 1975. – Vol. 33, No. 2. – P. 295–303. 28, 29, 31

[161] Ligeza J. On distributional solution of some systems of linear differential equuatios // Casop. pro pestov. mat. – 1977. – Vol. 102, No. 1. – P. 37–41. 29, 31

[162] Ligeza J. Generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombean algebra // Math. Bochem. – 1993. – Vol. 118, No. 2. – P. 123–146. 30

[163] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, No. 4. – P. 464–493. 34

[164] Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M. A two point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Jenaer schriften zur mathematik und informatik. Eingag: 03.03. – 2003. – P. 1–24. 34

[165] Makhney O. V., Tatsiy R. M. The Structure of Cauchy Function of a Vector Quasidifferential Equation // Matematychni Studii. – 2004. – Vol. 21, No. 1. – P. 221–224. 6, 11, 26

[166] Mazurenko V., Stasyuk M., Tatsiy R. On boundary value problem for the system of ordinary differential equations with distributions as coefficients // Matematychni Studii. – 2009. – Vol. 31, No. 1. – P. 65–74. 6, 11, 26

[167] Mikhailets V., Molyboga V. One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2008. – Vol. 14, No. 2. – P. 184–200. 25

[168] Mikhailets V., Molyboga V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials // Methods Funct. Anal. Topol. – 2009. – Vol. 15, No. 1. – P. 31–40. 25

[169] Ogurisu O. On the number of negative eigenvalues of a Schrödinger operator with point interactions // Lett. Math. Phys. – 2008. – Vol. 85. – P. 129–133. 25

[170] Pandit S. G. Differential systems with impulsive perturbations // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 86, No. 2. – P. 553–560. 27

[171] Pandit S. G., Deo S. G. Differential systems involving impulses / Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 954. – Springer-Verlag, Berlin, 1982. – 102 p. 30

[172] Rofe-Beketov F. S., Kholkin A. M. Spectral Analysis of Differential Operators. Interplay Between Spectral and Oscillatory Properties. – USA: World Scientific, 2005. – 438 p. 15, 19

[173] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, No. 6. – P. 814–832. 25

[174] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. On the properties of mappings associated with inverse Sturm-Liouville problems // Proc. Steklov. Inst. Math. – 2008. – Vol. 261. – P. 218–237. 25

[175] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Inverse Problems for Sturm–Liouville Operators with Potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability // Func. Analysis and Its Applications. – 2010. – Vol. 44, No. 4. – P. 270–285. 25

[176] Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O. Differential and Integral Equations. – Praha: Academia, 1979. – 249 p. 30

[177] Stallard S. Functions of bounded variations as solutions of differential systems // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 13. – P. 366–373. 30

[178] Stone M. H. Linear Transformation in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. – New York: A.M.S., 1932. – 622 p. 14

[179] Šeba P. Some remarks on the δ'-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, No. 1. – P. 111–120. 25

[180] Titchmarsh E. C. A problem in relativistic quantum mechanics // Proc. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 3-11, No. 1. – P. 169–192. 25

[181] Tvrdý. Differential and integral equations in the space of regulated functions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 25. – P. 1–104. 247

[182] Walker Ph. W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – Vol. 9, No. 1. – P. 151–159. 18, 20

[183] Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugenhörigen Entwicklungen Willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1910. – 68. – S. 220-269. 14

[184] Weidmann J. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren // Math. Zeitschr. – 1967. – Vol. 98, No. 4. – P. 268–302. 20

[185] Weidmann J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators / Lecture Notes in Mathematics, 1258. – Springer-Verlag, 1987. – 303 p. 20

[186] Windau W. Über lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die dazugehörigen

Darstellungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – 1921. – 83. – S. 256–279. 14

[187] Zettl A. Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mount. Journal of Math. – 1975. – Vol. 5. – P. 453–474. 20, 21

[188] Zolotaryuk A. V., Christiansen P. L., Iermakova S. V. Scattering properties of point dipole interactions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2006. – Vol. 39. – P. 9329–9338. 25

[189] Zolotaryuk A. V. Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187–191. 25

[190] Zolotaryuk A. V. Boundary conditions for the states with resonant tunnelling across the δ'-potential // Phys. Lett. A. – 2010. – Vol. 374, No. 15-16. – P. 1636–1641. 25

Именной указатель

Предметный указатель

ДЛЯ ЗАМЕТОК

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Роман Марьянович Таций
Марта Федоровна Стасюк
Виктор Владимирович Мазуренко
Олеся Орестовна Власий

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дизайн обложки *Олеся Таций*
Технические редакторы *Виктор Мазуренко, Олеся Власий*
Редактор перевода *Орест Фурикевич*
Главный редактор *Василий Слюсарчук*

Подписано в печать 14.04.2017. Формат издания 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «CM PsCyr».
Условн. печатн. лист. 17,5. Тираж 300 экз.

Издательство ЛГУ БЖД
Свидетельство ДК №2038 от 02.02.2005 г.
79007, Украина, г. Львов, ул. Клепаровская, 35,
тел./факс: (032) 233-32-40, 233-24-79
e-mail.: ndr@ubgd.lviv.ua