Федак І.В.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Івано-Франківськ

2018

УДК 51(075)
ББК 22.1
Ф45

Друкується за рішенням Вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рецензенти:

Никифорчин О.Р., завідувач кафедри алгебри і геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, доктор фізико-математичних наук, професор

Мойсишин В.М., завідувач кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу, доктор технічних наук, професор

Федак І.В.
Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге). – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 144с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми дисципліни «Функціональні рівняння» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика» вищих навчальних закладів III – IV рівнів акредитації. Містить основні методи розв’язування функціональних рівнянь та лінійних різницевих рівнянь, задачі для самостійного розв’язування. Може бути використаний в позакласній роботі з учнями при підготовці до математичних олімпіад та турнірів.

УДК 51(075)
ББК 22.1

Передмова

Функціональні рівняння відносяться до одного з найдавніших, але й досі недостатньо вивчених, розділів математичного аналізу.

Постановка задач, пов'язаних з функціональними рівняннями часто є досить простою, а їх розв'язування не вимагає якоїсь спеціальної підготовки. Але, як правило, при цьому завжди важливим компонентом є глибоке логічне мислення, знання основних методів розв'язування таких рівнянь та їх творче осмислення. У зв'язку з цим функціональні рівняння є майже невід'ємним атрибутом різноманітних олімпіад і турнірів юних математиків.

Уже класичним стало функціональне рівняння Коші та звідні до нього рівняння, які є характеристичними рівняннями ряду елементарних функцій. Широке застосування мають також лінійні різницеві рівняння, які за своїми властивостями близькі до лінійних диференціальних рівнянь.

Пропонований Вашій увазі посібник написаний у відповідності до програми курсу «Функціональні рівняння» для студентів спеціальності «Математика» Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Його мета – ознайомити майбутніх спеціалістів з основними підходами до розв'язування функціональних рівнянь.

Що ж стосується ряду інших функціональних рівнянь та класів таких рівнянь, то рекомендуємо читачам звернутися до текстових та електронних ресурсів, наведених в кінці посібника.

Враховуючи, що значна частина розглянутих прикладів взята з завдань різноманітних змагань юних математиків, даний посібник може бути використаний вчителями та учнями загальноосвітніх шкіл, ліцеїв і гімназій для підготовки до математичних олімпіад та турнірів.

У другому виданні посібника виправлені виявлені автором описки з видання 2017 року.

Розділ І. Функції та їх властивості

§1.1. Поняття функції. Оборотні та обернені функції. Складена функція. Елементарні функції

Функція – одне з основних не лише математичних, а й загально наукових понять. Кажуть, що на множині X визначена *функція* $f: X \to Y$, якщо кожному дійсному числу $x \in X \subset R$ за певним законом f поставлено у відповідність дійсне число $y \in Y \subset R.$ При цьому записують $y = f(x).$ Множину X називають *областю визначення*, а множину $Y -$ *областю значень* функції. Їх відповідно позначають $D(f)$ та $E(f).$

У загальному випадку запис $f: X \to Y$ означає, що функція f відображає всю множину X у множину $Y,$ тобто область значень функції не обов'язково повинна співпадати з усією множиною Y.

Якщо для кожного $y \in Y = E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок $x \in X = D(f),$ то функцію $y = f(x)$ називають *оборотною*, а відповідність $f^{-1}: Y \to X,$ яка кожному такому $y \in Y$ зіставляє цей єдиний розв'язок $x = f^{-1}(y),$ – функцією, *оберненою* до $f(x).$ Оборотна функція кожне своє значення $y \in Y$ набуває лише при одному значенні аргументу $x \in X$.

Важливий клас оборотних функцій утворюють монотонні функції. Функція $f: X \to Y$ називається *монотонно зростаючою*, якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2).$ У випадку протилежної нерівності $f(x_1) > f(x_2)$ функцію $f(x)$ називають *монотонно спадною*.

Якщо задані функції $g: X \to U$ та $f: U \to Y,$ то функцію $y: X \to Y,$ визначену рівністю $y = f(g(x)),$ називають *складеною функцією* або ж *композицією функцій* f та g.

Зі шкільного курсу математики відомі лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні функції та обернені до них. Надалі ми будемо розглядати лише функції, які можна отримати з них за допомогою скінченної кількості арифметичних дій чи композицій. Такі функції називають *елементарними*.

§1.2. Найпростіші функціональні співвідношення та найпростіші функціональні рівняння

Маючи область визначення та закон f, за яким побудована функція, ми однозначно можемо знайти її множину значень. Навпаки, за множиною значень і законом f можна визначити, якою могла би бути область визначення такої функції, причому для оборотної функції відповідь теж буде однозначною. Але задача про встановлення закону f лише за відомими областю визначення та множиною значень функції є не зовсім коректною. Тому, як правило, додатково задають окремі співвідношення для значень шуканої функції.

Означення. *Функціональним рівнянням* називається рівняння, в яких шукана функція пов'язана з відомими функціями з допомогою арифметичних дій та операції утворення складеної функції. При цьому під *розв'язком* такого рівняння розуміють функцію, яка на заданій множині перетворює його у тотожність.

Використовують також термін «*функційні рівняння*».

Розглянемо приклади таких співвідношень:

1). $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=0,\ x\in\mathbb{R}.$

Розв'язками цього функціонального рівняння є всі парні функції, визначені на множині дійсних чисел, і тільки вони.

2). $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0,\ x\in\mathbb{R}.$

Відповідно отримуємо як розв'язки всі непарні функції, визначені на множині дійсних чисел.

3). $f(x+T)=f(x),\ x\in\mathbb{R}.$

Для кожного фіксованого $T>0$ множину розв'язків такого рівняння утворюють всі періодичні функції з періодом T.

До найпростіших функціональних рівнянь відносять також рівняння вигляду $f(\varphi(x))=g(x),$ де $f(x)-$ шукана функція, $g(x)-$ довільна відома функція, $\varphi(x)-$ відома оборотна функція.

Для розв'язування такого рівняння покладемо $t=\varphi(x)$. Тоді $x=\varphi^{-1}(t)$. Отже, отримуємо $f(t)=g(\varphi^{-1}(t))$. Таким чином, маємо єдиний розв'язок $f(x)=g(\varphi^{-1}(x))$, визначений для тих $x\in D(\varphi)$, для яких $\varphi^{-1}(x)\in D(g)$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)=x+2,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}.$$

Розв'язання. Покладемо $t=\dfrac{2x-1}{x-1},\ x\neq 1.$ Тоді

$$t(x-1)=2x-1,\ (t-2)x=t-1,\ x=\frac{t-1}{t-2},\ t\neq 2.$$

Отже,

$$f(t)=\frac{t-1}{t-2}+2=\frac{3t-5}{t-2},\ t\neq 2;\ f(x)=\frac{3x-5}{x-2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}.$$

Зауважимо, що покладаючи у заданому рівнянні $x=0$, знайдемо $f(1)=2$. Це ж значення маємо і підставляючи $x=1$ у знайдений вище розв'язок $f(x)$. Але підставляти $x=1$ у саме рівняння ми не можемо.

Узагальнюючи, відзначимо, що аналогічно можуть бути розв'язані довільні рівняння вигляду

$$f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=g(x),\ \ \Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0,\ cx+d\neq 0,\ cx-a\neq 0.$$

§1.3. Границя та неперервність функції. Властивості функцій, неперервних на відрізку

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь буває доцільним шукати їхні розв'язки в класі неперервних функцій або ж використовувати властивості неперервних функцій для їх дослідження. Нагадаємо означення та властивості таких функцій.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо $f(x)$ неперервна у точці $x_0 \in X$, то $f(x_n) \to f(x_0)$ для довільної послідовності точок $x_n \in X$ такої, що $x_n \to x_0$. І навпаки, якщо для кожної такої послідовності $f(x_n) \to f(x_0)$, то $f(x)$ неперервна у точці $x_0 \in X$. Функція, неперервна у кожній точці своєї області визначення, називається *неперервною функцією*.

Зауважимо, що неперервними функціями будуть також лінійні комбінації, добутки та композиції неперервних функцій, а їх частка буде неперервною для всіх тих значень аргумента, для яких знаменник не перетворюється в нуль. Зокрема, всі елементарні функції є неперервними на своїх областях визначення.

Наведемо також основні теореми про властивості функцій, неперервних на проміжках:

<u>Теорема 1.</u> (*перша теорема Больцано-Коші*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків. Тоді між точками a та b існує така точка c, в якій ця функція перетворюється в нуль: $f(c) = 0,\ a < c < b$.

Зокрема, якщо на проміжку $[a;b]$ функція $f(x)$ строго монотонна, то така точка c єдина.

<u>Теорема 2.</u> (*друга теорема Больцано-Коші*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$ і на кінцях цього проміжку набуває різні значення: $f(a) = A$,

$f(b)=B$. Тоді для кожного числа C, яке лежить між A та B, між точками a та b існує така точка c, що $f(c)=C$.

Якщо на проміжку $[a;b]$ функція $f(x)$ строго монотонна, то така точка c єдина.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку (замкнутому або ні, скінченному або нескінченому), то значення, які вона набуває, також суцільно заповнюють деякий проміжок.

Теорема 4. Нехай функція $y=f(x)$ визначена, монотонно зростає (спадає) і неперервна на деякому проміжку. Тоді на відповідному проміжку її значень існує однозначна обернена функція $x=g(y)$, яка також монотонно зростає (спадає) і є неперервною.

Теорема 5. (*перша теорема Вейєрштраса*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$. Тоді на цьому проміжку вона обмежена зверху та знизу, тобто існують такі скінченні числа m та M, що $m \le f(x) \le M$ при $a \le x \le b$.

Теорема 6. (*друга теорема Вейєрштраса*). Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$. Тоді на цьому проміжку вона набуває свого найменшого значення m та найбільшого значення M, тобто на проміжку $[a;b]$ існують такі точки x_1 та x_2, що $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$.

Теорема 7. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$ та набуває на ньому найменшого значення m та найбільшого значення M. Тоді її значення суцільно заповнюють проміжок $[m;M]$.

Зокрема, у разі строгої монотонності функції $f(x)$ кожне її значення y з проміжку $[m;M]$ набувається рівно при одному значенні аргумента x з проміжку $[a;b]$.

§1.4. Похідна та її застосування. Властивості функцій, диференційованих на відрізку

Функція $f(x)$ називається *диференційованою в точці* $x_0 \in X$, якщо границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in X$, існує та є скінченною. Значення такої границі називають *похідною функції* $f(x)$ *в точці* $x_0 \in X$ і позначають $f'(x_0)$.

Якщо функція $f(x)$ диференційована в кожній точці проміжку X, то її називають *диференційованою* на X.

Зауважимо, що диференційованими функціями будуть також лінійні комбінації, добутки та композиції диференційованих функцій, а їх частка буде диференційованою в усіх тих точках $x_0 \in X$, для яких знаменник не перетворюється в нуль. Зокрема, всі елементарні функції є диференційованими на своїх областях визначення.

Відзначимо також, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1.4 про існування оберненої функції, в точці $x_0 \in X$ має скінченну і відмінну від нуля похідну $f'(x_0)$, то для оберненої функції $x = g(y)$ у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ також існує похідна, яка дорівнює $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Наведемо основні теореми про властивості функцій, диференційованих на проміжках:

<u>Теорема 8.</u> (*теорема Ферма*). Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку X і у внутрішній точці c цього проміжку набуває найбільше (найменше) значення. Якщо в цій точці існує скінченна похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

<u>Теорема 9.</u> (*теорема Ролля*). Нехай: 1) функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$; 2) існує

скінченна похідна $f'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$; 3) на кінцях проміжку функція набуває рівні значення $f(a)=f(b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c, в якій похідна перетворюється в нуль: $f'(c)=0,\ a<c<b$.

Теорема 10. (*теорема Лагранжа*). Нехай: 1) функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a;b]$; 2) існує скінченна похідна $f'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b.$$

Теорема 11. (*теорема Коші*). Нехай: 1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені і неперервні на замкнутому проміжку $[a;b]$; 2) існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ принаймні на відкритому проміжку $(a;b)$; 3) $g'(x)\neq 0$ на проміжку $(a;b)$. Тоді між точками a та b існує така точка c, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ a<c<b.$$

Теорема 12. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X і має всередині нього скінченну похідну $f'(x)$, а на кінцях цього проміжку (якщо вони належать X) зберігає неперервність. Для того, щоб $f(x)$ на проміжку X була сталою, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)=0$ всередині X.

Теорема 13. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку X і має всередині нього скінченну похідну $f'(x)$, а на кінцях цього проміжку (якщо вони належать X) зберігає неперервність. Для того, щоб $f(x)$ на проміжку X була монотонно зростаючою (спадною), достатньо, щоб всередині X виконувалася умова $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$).

Розділ ІІ. Функціональне рівняння Коші та звідні до нього рівняння. Метод Коші

§2.1. Неперервні адитивні функції. Рівняння Коші

Адитивними функціями називаються функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх дійсних значень x та y задовольняють рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Таке рівняння називають *рівнянням Коші*.

Будемо розв'язувати це рівняння, використовуючи *метод підстановок*, який ще називають *методом Коші*. Спочатку знайдемо його неперервні розв'язки.

Нехай $x=y=0$. Тоді маємо $f(0+0)=f(0)+f(0)$, звідки знаходимо $f(0)=0$.

Підставимо тепер $y=-x$. З рівності $f(0)=f(x)+f(-x)$ отримуємо $f(-x)=-f(x)$. Тому розв'язками рівняння Коші можуть бути лише непарні функції.

Зауважимо, що з рівняння Коші випливає рівність

$$f(x_1+\ldots+x_n)=f(x_1)+\ldots+f(x_n).$$

Покладаючи $f(1)=a$, при $x_1=\ldots=x_n=1$ з неї отримаємо $f(n)=na$. А при $x_1=\ldots=x_n=\dfrac{1}{n}$ будемо мати $a=nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$, тобто $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}a$.

Нехай тепер $x_1=\ldots=x_m=\dfrac{1}{n}$. Тоді $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=mf\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{m}{n}a$.

Враховуючи непарність функції f маємо також $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=-f\left(\dfrac{m}{n}\right)=-\dfrac{m}{n}a$. Крім того, $f(0)=0=0\cdot a$. Тому $f(x)=ax$ для всіх $x\in\mathbb{Q}$.

Якщо ж $x \notin \mathbb{Q}$, то розглянемо довільну послідовність раціональних чисел x_n яка збігається до x. Оскільки функція f неперервна, то $f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n = ax$.

Тому $f(x) = ax$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Перевірка показує, що тут a – довільне дійсне число.

Отже, в класі неперервних функцій всі адитивні функції є лінійними.

Зауважимо, що умова неперервності використовувалася лише для знаходження значень функції f при ірраціональних значеннях аргумента.

Відзначимо також, що функціональне рівняння Коші в класі неперервних функцій можна було розв'язувати ще й так.

Покладаючи $x = y = 0$, з рівності $f(0+0) = f(0) + f(0)$ знаходимо $f(0) = 0$.

Будемо шукати функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = x\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – неперервна функція, $\varphi(0) = a$. Тоді

$$(x+y)\varphi(x+y) = x\varphi(x) + y\varphi(y).$$

Покладаючи тут $x = y$, отримаємо $2x \cdot \varphi(2x) = 2x\varphi(x)$. Тому для всіх дійсних $x \neq 0$ маємо $\varphi(2x) = \varphi(x)$. Зрозуміло, що ця рівність правильна також для $x = 0$, бо тоді обидві її частини дорівнюють a.

Далі, для довільного $x \neq 0$ з цієї ж рівності маємо

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots.$$

Оскільки $\frac{x}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$, а функція $\varphi(x)$ неперервна, то $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) \to \varphi(0) = a$ при $n \to \infty$. Тоді також $\varphi(x) \to a$ при $n \to \infty$. Але $\varphi(x)$ не залежить від n, тому $\varphi(x) = a$.

Враховуючи, що значення x можна вибирати довільно, для всіх дійсних x маємо $\varphi(x) \equiv a$. Звідси $f(x) = ax$.

Підстановкою у рівняння Коші переконуємось, що знайдені функції $f(x) = ax$ задовольняють його при всіх дійсних a.

Наведемо також геометричну інтерпретацію отриманого результату.

Для шуканої адитивної функції маємо

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x+y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Отже, неперервна функція f не є ні опуклою, ні вгнутою. Тому вона може бути лише лінійною, тобто $f(x) = ax + b$. Але, як ми вже встановили вище, $f(0) = 0$, тому $b = 0$.

Зауважимо, що умова неперервності для такого висновку є суттєвою.

§2.2. Адитивні функції, обмежені на деякому проміжку

Послабимо вимоги до адитивної функції f, замінивши умову неперервності на умову її обмеженості на деякому замкнутому проміжку $[a; a+T]$.

Розглянемо функцію g таку, що для всіх дійсних x

$$g(x) = f(x) - \frac{f(T)}{T} x.$$

Оскільки

$$g(x+y) = f(x+y) - \frac{f(T)}{T}(x+y) =$$

$$= f(x) - \frac{f(T)}{T} x + f(y) - \frac{f(T)}{T} y = g(x) + g(y),$$

то функція g також є адитивною. Крім того, як і функція f, вона обмежена на проміжку $[a; a+T]$.

З адитивності функції g для всіх дійсних значень x випливає рівність $g(x+T)=g(x)+g(T)$. Тому функція g є періодичною з періодом T, отже, обмеженою на всій числовій прямій. При цьому $g(0)=f(0)=0$.

Доведемо, що $g(x)\equiv 0$.

Нехай існує таке $x_0 \neq 0$, що $g(x_0)=y_0 \neq 0$. Внаслідок адитивності для кожного цілого значення n отримаємо $g(nx_0)=ny_0$, що суперечить обмеженості функції g.

З тотожності $g(x)\equiv 0$ випливає, що $f(x)\equiv \dfrac{f(T)}{T}x$, тобто кожна обмежена на $[a;a+T]$ адитивна функція є лінійною.

Зауважимо, що умову обмеженості для функції f також можна послабити, вимагаючи її обмеженість лише зверху або лише знизу. Пропонуємо читачам обґрунтувати це самостійно.

Що ж стосується питання про існування нелінійних адитивних функцій, то воно довго залишалося відкритим. Лише у 1905 році позитивну відповідь на нього дав німецький математик Г. Гамель.

§2.3. Основні рівняння, які зводяться до рівняння Коші

До рівняння Коші зводиться багато функціональних рівнянь. Наведемо приклади основних з них, шукаючи їх розв'язки в класі неперервних функцій.

<u>Приклад 2.</u> $f(x+y)=f(x)f(y)$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай $y=x=\dfrac{t}{2}$. Тоді $f(t)=f^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\geq 0$. Отже, значення функції f невід'ємні.

Якщо існує значення аргумента y_0, для якого $f(y_0)=0$, то $f(x+y_0)=f(x)\cdot f(y_0)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, тобто $f(x)\equiv 0$.

В іншому разі для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ справджується рівність

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Покладемо $\varphi(x) = \ln f(x)$. Разом з $f(x)$ функція $\varphi(x)$ неперервна і задовольняє рівняння Коші $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Тому $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Отже, $f(x) = e^{ax} = b^x$, де $b = e^a$.

<u>Приклад 3.</u> $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $x \in (0;\infty)$, $y \in (0;\infty)$.

Розв'язання. Враховуючи множину значень показникової функції, зробимо заміни $x = e^t$, $y = e^s$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

У результаті для всіх $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність

$$f(e^t \cdot e^s) = f(e^t) + f(e^s).$$

Позначивши $g(t) = f(e^t)$, приходимо до рівняння Коші

$$g(t+s) = g(t) + g(s),\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$$

Оскільки, разом з $f(x)$, функція $g(x)$ неперервна, то $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$f(x) = g(t) = at = a \ln x = \log_b x,\ x \in (0;\infty),$$

де $b = e^{1/a}$ при $a \neq 0$ та $f(x) \equiv 0$ при $a = 0$.

<u>Приклад 4.</u> $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $x \in (0;\infty)$, $y \in (0;\infty)$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, зробимо заміни $x = e^t$, $y = e^s$, $t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$. У результаті для всіх $t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(e^t \cdot e^s) = f(e^t) \cdot f(e^s)$.

Якщо тепер $h(t) = f(e^t)$, то приходимо до рівняння $h(t+s) = h(t) \cdot h(s)$, $t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$, яке, згідно з прикладом 2, зводиться до рівняння Коші.

Разом з $f(x)$ функція $h(x)$ є неперервною. Тому в класі неперервних функцій розв'язками цього рівняння є функції $h(x) \equiv 0$, звідки $f(x) \equiv 0$, та $h(x) = b^x$, $b > 0$, звідки відповідно

$$f(x)=h(t)=b^t=b^{\ln x}=b^{\log_b x^{\ln b}}=x^{\mu},\ x\in(0;\infty),\ \mu=\ln b\in\mathbb{R}.$$

Ще раз до функціональних рівнянь з прикладів 2 – 4 ми повернемося у параграфі 3.2 наступного розділу, розглядаючи там функціональні означення показникової, логарифмічної та степеневої функцій.

§2.4. Інші рівняння, які зводяться до рівняння Коші

Крім наведених вище прикладів до рівняння Коші зводиться й цілий ряд інших функціональних рівнянь, які ми будемо розв'язувати в класах неперервних на своїх областях визначення функцій.

Приклад 5. Знайдіть усі неперервні функції, які для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ x+y\neq 0$ задовольняють рівняння

$$f\left(\frac{1}{x+y}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$. Разом з функцією $f(x)$ вона неперервна при $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ x+y\neq 0$ задовольняє рівняння Коші

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

Тому $g(x)=ax,\ a\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Отже, $f(x)=\frac{a}{x},\ a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Приклад 6. Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

у класі неперервних на своїх областях визначення функцій.

Розв'язання. Якщо існує y_0, для якого $f(y_0)=0$, то

$$f\left(x+y_0\right)=\frac{f\left(x\right)\cdot f\left(y_0\right)}{f\left(x\right)+f\left(y_0\right)}=0$$

для всіх $x\in X$ – області визначення функції $f\left(x\right)$, тобто $f\left(x\right)\equiv 0$. Але це неможливо, бо у такому разі для всіх $x\in X$ знаменник у правій частині рівності перетворюється в нуль. Тому $f\left(x\right)$ може набувати лише відмінних від нуля значень.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{1}{f\left(x+y\right)}=\frac{1}{f\left(x\right)}+\frac{1}{f\left(y\right)}$$

Розглянемо функцію $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}$. Разом з функцією $f(x)$ вона неперервна на множині X і для всіх $x\in X$, $y\in X$ задовольняє рівняння Коші $g\left(x+y\right)=g\left(x\right)+g\left(y\right)$. Тому $g\left(x\right)=ax$. Враховуючи обмеження, накладені на функцію $f\left(x\right)$, звідси отримуємо $f\left(x\right)=\dfrac{1}{ax}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

<u>Приклад 7.</u> Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f(x-y)=f(x)-f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

у класі неперервних функцій.

Розв'язання. Підставивши $y=x$, знайдемо $f\left(0\right)=0$.

Підставляючи тепер $x=0$, будемо мати $f(-y)=-f(y)$ для всіх $y\in\mathbb{R}$. Тому розв'язками цього рівняння можуть бути лише непарні функції.

І, нарешті, підставивши $y=-t$, отримаємо

$$f(x+t)=f(x)-f(-t)=f(x)+f(t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},$$

тобто шукана неперервна функція $f(x)$ задовольняє рівняння Коші. Тому $f(x)=ax$, $x\in\mathbb{R}$.

Підстановкою в початкове рівняння переконуємося, що a може набувати довільних дійсних значень.

Звертаємо увагу читачів на необхідність такої перевірки, оскільки в процесі розв'язування ми використовували замість довільних аргументів підстановки їх конкретних значень. Вже в наступному, здавалось би, аналогічному прикладі ми побачимо, що серед функцій вигляду $f(x)=ax$ не всі з них будуть розв'язками заданого рівняння.

Приклад 8. Розв'яжіть у класі неперервних функцій рівняння
$$f(x^{2n+1}-y^{2n+1})=f^{2n+1}(x)-f^{2n+1}(y),\ n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Підставивши $y=x$, знайдемо $f(0)=0$.

Підставляючи тепер $y=0$, будемо мати $f(x^{2n+1})=f^{2n+1}(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Далі, при підстановці $x=0$, отримаємо
$$f(-y^{2n+1})=-f^{2n+1}(y)=-f(y^{2n+1}),\ y\in\mathbb{R}.$$

Позначивши $x^{2n+1}=s,\ y^{2n+1}=-t$, приходимо до рівності
$$f(s+t)=f(x^{2n+1}-y^{2n+1})=f^{2n+1}(x)-f^{2n+1}(y)=f(s)+f(t),$$
справедливої для всіх $s\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$. Тому неперервними розв'язками заданого функціонального рівняння можуть бути лише функції $f(x)=ax,\ x\in\mathbb{R}$.

Підставимо $f(x)=ax$ у задане рівняння. Нескладно переконатися, що тотожність
$$a(x^{2n+1}-y^{2n+1})\equiv(ax)^{2n+1}-(ay)^{2n+1},\ n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$
справджується лише за умови $a=a^{2n+1},\ n\in\mathbb{N}$, тобто для $a=0$, $a=1$ та $a=-1$.

Отже, остаточно отримуємо такі три розв'язки: $f(x)=0$, $f(x)=x$ та $f(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Приклад 9. Знайдіть усі неперервні розв'язки рівняння
$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді
$$f(x+y)+1=\big(f(x)+1\big)\big(f(y)+1\big)$$

і розглянемо функцію $g(x) = f(x)+1$. Вона, разом з функцією $f(x)$, є неперервною і для всіх $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y).$$

Згідно з прикладом 2, неперервними розв'язками такого рівняння є функції $g(x) \equiv 0$ та $g(x) = b^x,\ b > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Звідси відповідно отримуємо $f(x) \equiv -1$ та $g(x) = b^x - 1,\ b > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

<u>Приклад 10.</u> Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

у класі неперервних строго монотонних функцій в деякому околі нуля X.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$. Разом з функцією $f(x)$ вона в околі нуля X є неперервною і строго монотонною та набуває значень з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Тому рівність з умови можна записати у вигляді

$$\operatorname{tg} g(x+y) = \operatorname{tg}\big(g(x)+g(y)\big).$$

Звідси $g(x+y) = g(x)+g(y)+n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Підставивши $x = 0$, отримуємо $g(y)+n\pi = 0$, звідки, з врахуванням множини значень функції g, випливає, що $n = 0$.

Отже, неперервна функція g задовольняє рівняння Коші, тому $g(x) = ax$, $x \in X$. Враховуючи строгу монотонність такої функції, отримуємо, що $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Тому розв'язком заданого функціонального рівняння є функція

$$f(x) = \operatorname{tg}(ax),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \in X.$$

§2.5. Неоднорідні функціональні рівняння Коші

Неоднорідними функціональними рівняннями Коші називають рівняння вигляду:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\varphi(x,y),$$

де $\varphi(x,y)$ – деяка відома функція змінних x та y.

Оскільки $f(x+y)-f(x)-f(y)$ – симетрична функція своїх аргументів, то будемо вимагати, щоб і $\varphi(x,y)$ була симетричною, тобто задовольняла умову $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.

Розв'язки таких рівнянь шукатимемо у вигляді суми $f(x)=g(x)+h(x)$, де $h(x)$ – довільна функція, яка є розв'язком рівняння, тобто $h(x+y)\equiv h(x)+h(y)+\varphi(x,y)$.

Підставивши $f(x)=g(x)+h(x)$ в задане рівняння, для функції $g(x)$ отримаємо співвідношення $g(x+y)=g(x)+g(y)$, яке є рівнянням Коші. Його ще називають *однорідним рівнянням Коші*.

Розв'язуючи неоднорідні рівняння Коші в класі неперервних функцій, додатково вимагають, щоб функції $\varphi(x,y)$ та $h(x)$ також були неперервними. При цьому функцію $g(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in X$, називають *загальним розв'язком* однорідного, а функцію $h(x)$ – *частковим розв'язком* неоднорідного рівняння Коші.

Таким чином, *загальний розв'язок неоднорідного рівняння Коші* дорівнює сумі загального розв'язку однорідного та довільного часткового розв'язку неоднорідного рівняння Коші.

Приклад 11. Знайдіть всі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ при всіх дійсних x,y.

Розв'язання. З тотожності $\dfrac{(x+y)^2}{2}\equiv\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+xy$ випливає, що функція $h(x)=\dfrac{x^2}{2}$ задовольняє дане рівняння. Тому його загальним розв'язком у класі неперервних функцій є функція $f(x) = ax + \frac{x^2}{2}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 12. Знайдіть усі многочлени $f(x)$, для яких при всіх дійсних x, y виконується рівність

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y).$$

Розв'язання. З тотожності $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ випливає, що функція $h(x) = x^3$ задовольняє цю рівність. Враховуючи, що кожен многочлен є неперервною функцією, отримуємо розв'язок $f(x) = x^3 + ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 13. Знайдіть усі неперервні функції $f(x)$, визначені на множині невід'ємних чисел, які для будь-яких невід'ємних чисел x та y задовольняють рівність

$$f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy.$$

Розв'язання. Очевидно, що функція $h(x) = x$, $x \geq 0$ задовольняє дане рівняння. Покладемо $f(x) = x + g(x)$. Тоді для функції $g(x)$ при невід'ємних x, y виконується рівність

$$g((x+y)^2) = g(x^2) + g(y^2).$$

Нехай $g(x) = \varphi\left(\sqrt{x}\right)$. Тоді $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всіх невід'ємних x, y. Отже, $\varphi(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Тому $g(x) = a\sqrt{x}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, а $f(x) = x + a\sqrt{x}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

§2.6. Представлення розв'язків функціональних рівнянь у вигляді добутку двох функцій

Розв'язуючи рівняння Коші, в одному зі способів ми представляли шукану функцію у вигляді добутку двох функцій. Такий підхід часто буває ефективним при розв'язуванні функціональних рівнянь вигляду $f(x+y) = \varphi\left(x, y\right) f(x) f(y)$ чи

$f(x \cdot y) = \varphi(x, y) f(x) f(y)$, де $\varphi(x, y)$ – симетрична функція своїх аргументів. Їхній розв'язок доцільно представити у вигляді добутку $f(x) = h(x) g(x)$, в якому функція $g(x)$ задовольнятиме рівняння Коші чи звідне до нього рівняння.

Приклад 14. Знайдіть усі неперервні розв'язки рівняння

$$f(x+y) = c^{xy} f(x) f(y),\ c > 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння двома способами.

I спосіб. Якщо $c = 1$, то ми маємо рівняння з прикладу 2, розв'язками якого є функції $f(x) \equiv 0$ та $f(x) = b^x$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тому надалі вважаємо, що $c \neq 1$.

Нехай $y = x = \frac{t}{2}$. Тоді $f(t) = a^{\frac{t^2}{2}} f^2\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$. Отже, значення функції f невід'ємні.

Якщо при цьому існує таке y_0, для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x + y_0) = a^{xy_0} f(x) f(y_0) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто $f(x) \equiv 0$.

В іншому разі для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ справджується рівність

$$\log_c f(x+y) = \log_c f(x) + \log_c f(y) + xy.$$

Нехай $g(x) = \log_c f(x)$. Разом з $f(x)$ функція $g(x)$ неперервна і задовольняє неоднорідне рівняння Коші $g(x+y) = g(x) + g(y) + xy$. Тому (див. приклад 11)

$$g(x) = ax + \frac{x^2}{2},\ a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

Отже, $f(x) = c^{ax + \frac{x^2}{2}}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

II спосіб. Шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді добутку $f(x) = c^{\frac{x^2}{2}} g(x)$. Оскільки $c^{\frac{(x+y)^2}{2}} \equiv c^{xy} \cdot c^{\frac{x^2}{2}} \cdot c^{\frac{y^2}{2}}$, то для функції g маємо рівняння $g(x+y) = g(x) g(y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, розв'язками якого, згідно з прикладом 2, є функції $g(x)\equiv 0$ та $g(x)=c^{ax}$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Відповідно отримуємо $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=c^{\frac{x^2}{2}}\cdot c^{ax}=c^{ax+\frac{x^2}{2}}$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Застосовний даний метод і при розв'язуванні цілого ряду інших функціональних рівнянь.

<u>Приклад 15.</u> Знайдіть усі неперервні розв'язки рівняння

$$f(x\cdot y)=y^{\alpha}f(x)+x^{\alpha}f(y),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Нехай $f(x)=x^{\alpha}g(x)$. Скорочуючи тепер обидві частини рівняння на $x^{\alpha}y^{\alpha}$, для неперервної функції g отримуємо рівняння

$$g(x\cdot y)=g(x)+g(y),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),$$

розв'язками якого, згідно з прикладом 3, є функції $g(x)=\log_b x$, $b>0, b\neq 1$, $x\in(0;\infty)$, та $g(x)\equiv 0$. Звідси отримуємо розв'язки $f(x)=x^{\alpha}\log_b x$, $b>0, b\neq 1$, $x\in(0;\infty)$, та $f(x)\equiv 0$ відповідно.

§2.7. Розв'язування різних функціональних рівнянь методом підстановок

При розв'язуванні ряду попередніх рівнянь ми надавали аргументам x та y певних конкретних значень і з отриманих співвідношень отримували нову інформацію про властивості шуканої функції. При цьому функції, які не задовольняють такі властивості, автоматично вилучалися з претендентів на розв'язки функціонального рівняння. То ж вкінці залишалося лише перевірити обмежений круг функцій, чи перетворюють вони задану функціональну рівність у тотожність. Розглянемо приклади розв'язування інших функціональних рівнянь таким методом, в яких відсутня вимога неперервності шуканої функції.

Приклад 16. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких при довільних дійсних x та y виконується рівність

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y).$$

Розв'язання. Підставивши $x=y=1$, отримаємо $f(1)=f^2(1)$, звідки випливає, що $f(1)=0$ або $f(1)=1$.

Якщо $f(1)=0$, то, підставляючи лише $y=1$, знаходимо $f(x)\equiv 0$.

Якщо ж $f(1)=1$, то, підставляючи лише $y=1$, приходимо до рівності $x+f(x)=(x+1)f(x)$, звідки знаходимо $f(x)=1$ при $x\neq 0$ та $f(0)=a$. Перевірка показує, що тут $a-$ довільне дійсне число. Справді, при $x\neq 0$, $y\neq 0$ рівність з умови перетворюється в тотожність $x+y\equiv x+y$, а, наприклад, при $y=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ та всіх $a\in\mathbb{R}$ отримуємо $ax\equiv axf(x)$.

Зауважимо, що, вимагаючи в умові прикладу 16 неперервності функції $f(x)$, ми отримали би лише два розв'язки: $f(x)\equiv 0$ та $f(x)\equiv 1$.

Приклад 17. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних x та y виконується рівність

$$f(x+y)=f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-f\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$

Розв'язання. Покладемо $y=\frac{\pi}{2}$. Тоді $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(0)\sin x$.

Якщо $f(0)=a$, то $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-a\sin x$. Звідси $f(x)=a\cos x$.

Перевіркою встановлюємо, що знайдена функція задовольняє задане рівняння при всіх $a\in\mathbb{R}$.

Приклад 18. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для будь-яких дійсних x та y задовольняють рівність

$$f\left(x^2+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y^2\right).$$

Розв'язання. Покладаючи $x=y=0$, одержимо $f\left(0\right)=2f\left(0\right)$, звідки $f\left(0\right)=0$. Якщо тепер $y=-x^2$, то $f\left(x\right)+f\left(x^4\right)=0$.

Якщо ж $y=0$, а x – довільне дійсне число, то $f\left(x^2\right)=f\left(x\right)$. Замінюючи тут x на x^2, одержимо $f\left(x^4\right)=f\left(x^2\right)=f\left(x\right)$. Тому $f\left(x\right)+f\left(x\right)=0$, звідки $f\left(x\right)\equiv 0$.

Перевірка показує, що така функція справді задовольняє задане рівняння для довільних дійсних x та y.

Приклад 19. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних x та y справджується рівність

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=1-x-y.$$

Розв'язання. Покладемо $x=f\left(y\right)$. Тоді $f\left(0\right)=1-f\left(y\right)-y$. Якщо $y=0$, то звідси маємо $f\left(0\right)=1-f\left(0\right)$, тобто $f\left(0\right)=\frac{1}{2}$. Тоді $f\left(y\right)=\frac{1}{2}-y$. Отже, якщо розв'язок $f\left(x\right)$ даного функціонального рівняння існує, то $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-x$.

Оскільки при цьому

$$x-f\left(y\right)=x-\left(\frac{1}{2}-y\right)=x+y-\frac{1}{2},$$

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=\frac{1}{2}-\left(x+y-\frac{1}{2}\right)=1-x-y,$$

то така функція задовольняє задане рівняння при довільних дійсних x та y.

Зауважимо, що розв'язувати це функціональне рівняння можна було ще й так. З отриманої вище рівності $f(0)=1-f(y)-y$ робимо висновок, що його розв'язок має вигляд $f(x)=a-x$. Підставляючи таку функцію в ліву частину рівняння, отримаємо

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=a-\left(x+y-a\right)=2a-x-y.$$

Тому $2a=1$, $a=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

При цьому ми не лише знайшли шукану функцію, а й заодно перевірили, що вона задовольняє задане рівняння.

Застосуємо аналогічний підхід й до розв'язування однієї з задач сорокової Міжнародної математичної олімпіади.

<u>Приклад 20.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних x та y справджується рівність

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1,$$

Розв'язання. Покладемо $f(y)=x$ і запишемо задану рівність у вигляді $f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$. Звідси отримуємо, що

$$f\left(x\right)=\frac{f\left(0\right)+1-x^2}{2}=a-\frac{x^2}{2}.$$

Підставляючи тут $x=0$, нескладно переконатися, що $a=1$. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що функція $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ задовольняє задане рівняння для будь-яких дійсних x та y.

Також звертаємо увагу читачів, що підстановка $x=f(y)$ у прикладі 19, чи $f(y)=x$ у прикладі 20, дала змогу позбутися суперпозиції функцій в умові, отже, сприяла спрощенню заданого функціонального рівняння.

Розділ III. Функціональні означення елементарних функцій

§3.1. Функціональне означення лінійної функції

Розглядаючи функціональне рівняння Коші, ми встановили, що в класі неперервних функцій всі його розв'язки мають вигляд $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Розглянемо тепер рівняння Коші

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

за наступних умов:

1) $f(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty;\infty)$;

2) $f(1)=k$.

Розв'язок функціонального рівняння Коші, який задовольняє умови 1, 2, називається *лінійною функцією* і позначається $f(x)=kx$.

Наступний приклад ілюструє загальніший підхід до означення лінійної функції.

<u>Приклад 21.</u> Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Розв'язання. Підставимо в рівняння $x=t+s$, $y=0$. Тоді $f\left(\frac{t+s}{2}\right)=\frac{f(t+s)+f(0)}{2}$ і, крім того, $f\left(\frac{t+s}{2}\right)=\frac{f(t)+f(s)}{2}$, тому $f(t+s)=f(t)+f(s)-f(0)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$.

Нехай $f(x)=g(x)+f(0)$. Тоді неперервна функція $g(x)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$ задовольняє рівняння Коші $g(t+s)=g(t)+g(s)$. Тому $g(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Отже, $f(x) = ax + f\left(0\right) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Перевірка показує, що така функція задовольняє задане рівняння при кожному $b \in \mathbb{R}$.

Функцію $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ називають *загальною лінійною функцією*.

Розв'язане нами рівняння не єдине функціональне рівняння, загальним неперервним розв'язком якого є функція $f(x) = ax + b$.

<u>Приклад 22.</u> Знайдіть усі неперервні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які задовольняють рівняння $f\left(x + y\right) + f\left(x - y\right) = 2f\left(x\right)$.

Розв'язання. Зробивши заміну $t = x + y$, $s = x - y$, отримаємо рівняння

$$\frac{f\left(t\right) + f\left(s\right)}{2} = f\left(\frac{t + s}{2}\right),\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$$

Звідси, згідно з прикладом 21, знаходимо розв'язок $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Відзначимо також, що до рівняння з прикладу 21 зводиться й рівняння Лобачевского $f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \sqrt{f\left(x\right) f\left(y\right)}$.

Безпосередньо з умови випливає, що його розв'язками можуть бути лише невід'ємні функції.

Якщо при цьому існує таке y_0, що $f\left(y_0\right) = 0$, то, підставляючи $y = y_0$, отримуємо $f(x) \equiv 0$.

В іншому разі, логарифмуючи обидві частини рівняння, приходимо до рівності $\ln f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{\ln f\left(x\right) + \ln f\left(y\right)}{2}$, тобто для функції $g\left(x\right) = \ln f\left(x\right)$ маємо $g\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{g\left(x\right) + g\left(y\right)}{2}$.

Якщо функція $f\left(x\right)$ неперервна, то функція $g\left(x\right)$ також неперервна, отже, $g(x)=ax+b$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. Тоді $f(x)=e^{ax+b}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Лінійною функцією в класі неперервних функцій є й розв'язок наступного функціонального рівняння.

Приклад 23. Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння $f\left(x+y\right)-f\left(x-y\right)=2f\left(y\right)$.

Розв'язання. Підставивши в рівняння $x=0$, отримаємо, що $f\left(-y\right)=-f\left(y\right)$ для всіх $y\in\mathbb{R}$. Тому рівняння можна записати у вигляді $f\left(x+y\right)+f\left(y-x\right)=2f\left(y\right)$. Порівнюючи його з рівнянням прикладу 22, отримуємо, що $f(x)=ax+b$.

Для знаходження значень a та b підставимо цю функцію в початкове рівняння. З тотожності

$$a\left(x+y\right)+b-a\left(x-y\right)-b\equiv 2\left(ay+b\right)$$

знаходимо, що $a\in\mathbb{R}$, $b=0$.

Отже, остаточно отримуємо $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

§3.2. Функціональні означення показникової, логарифмічної та степеневої функцій

Як ми вже встановили у прикладі 2, неперервними розв'язками функціонального рівняння

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

є функції $f\left(x\right)\equiv 0$ та $f\left(x\right)=b^x$, де b – довільне додатне дійсне число, $x\in\mathbb{R}$.

Розглянемо тепер це рівняння з такими додатковими умовами:

1) $f(x)$ неперервна на інтервалі $\left(-\infty;\infty\right)$;

2) $f(x)\neq 0$;

3) $f(1)=a$, $\left(a>0,\ a\neq 1\right)$.

Розв'язок такого рівняння, який задовольняє умови 1 – 3, називають *показниковою функцією* і позначають $f(x)=a^x$.

З прикладу 3 ми отримали, що неперервними розв'язками функціонального рівняння

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),$$

є функції $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=\log_b x$, де b – довільне додатне відмінне від 1 дійсне число, $x\in(0;\infty)$.

Розглянемо тепер це рівняння з наступними додатковими умовами:

1) $f(x)$ неперервна і відмінна від сталої функція на інтервалі $(0;\infty)$;

2) $f(a)=1,\ (a>0,\ a\neq 1)$.

Розв'язок такого рівняння, який задовольняє умови 1, 2, називають *логарифмічною функцією* і позначають $f(x)=\log_a x$.

І, нарешті, з прикладу 4 маємо, що неперервними розв'язками функціонального рівняння

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),$$

є функції $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=x^{\mu}$, $\mu\in\mathbb{R}$, $x\in(0;\infty)$.

Розглянемо це рівняння з додатковими умовами:

1) $f(x)$ неперервна і відмінна від сталої функція на інтервалі $(0;\infty)$;

2) $f(a)=b,\ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1)$.

Розв'язок такого рівняння, який задовольняє умови 1, 2, називають *степеневою функцією* і позначають $f(x)=x^{\mu}$. При цьому $\mu=\log_a b$.

§3.3. Функціональні означення тригонометричних функцій

Розглянемо в класі неперервних функцій функціональне рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

Підставивши $x=y=0$, отримаємо $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$, звідки $f(0)=0$ або $f(0)=1$.

Якщо $f(0)=0$, то, підставляючи $y=0$, отримуємо $f(x)\equiv 0$.

Якщо ж $f(0)=1$, то підстановка $x=0$ приводить до рівності $f(y)+f(-y)=2f(y)$, звідки випливає, що $f(-y)=f(y)$ для всіх $y\in\mathbb{R}$, тобто шукана функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є парною.

Крім того, внаслідок неперервності, така функція набуватиме додатних значень в деякому околі нуля, тобто існує таке $c>0$, що $f(x)>0$ для всіх $x\in[0;c]$.

Припустимо, що $f(c)\le 1$. Тоді існує таке $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, що $f(c)=\cos\varphi$. Підставляючи у рівняння $x=y=c$, з рівності $f(2c)+f(0)=2f(c)f(c)$ знайдемо $f(2c)=2\cos^2\varphi-1=\cos 2\varphi$.

Доведемо методом математичної індукції, що $f(nc)=\cos n\varphi$ для всіх натуральних n.

Для $n=1$ та $n=2$ така рівність правильна.

Припустимо, що при деякому $n\ge 3$ справджуються рівності:

$$f((n-2)c)=\cos(n-2)\varphi,\ f((n-1)c)=\cos(n-1)\varphi.$$

Тоді при $x=(n-1)c$, $y=c$ з заданого функціонального рівняння отримуємо

$$f(nc)=f((n-1)c+c)=2f((n-1)c)f(c)-f((n-1)c-c)=$$
$$=2\cos(n-1)\varphi\cdot\cos\varphi-\cos(n-2)\varphi=\cos n\varphi,$$

що й треба було довести.

Підставимо тепер у задане рівняння $x=y=\frac{c}{2}$. Тоді

$$f^2\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{f(c)+f(0)}{2}=\frac{\cos\varphi+1}{2}=\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Звідси методом математичної індукції легко встановити, що $f\left(\frac{c}{2^n}\right)=\cos\frac{\varphi}{2^n}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Отже, разом з попереднім результатом, отримуємо $f\left(\frac{mc}{2^n}\right)=\cos\frac{m\varphi}{2^n}$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Враховуючи, що довільне додатне дійсне число x можна подати як границю послідовності чисел вигляду $\frac{m}{2^n}$, та неперервність і парність функції f, будемо мати $f(cx)=\cos\varphi x$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Звідси випливає, що $f(x)=\cos ax$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Підстановкою у початкове рівняння переконуємося, що тут $a-$ довільне дійсне число.

Отриманий результат може бути використаний для функціонального означення функції $f(x)=\cos x$.

Тригонометричним косинусом називають розв'язок рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

який задовольняє умови:

1) $f(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty;+\infty)$;

2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

3) $f(x)\neq 0$, якщо $0\leq x<\frac{\pi}{2}$.

Означення інших тригонометричних функцій можуть бути сформульовані таким чином.

Функція $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ називається *тригонометричним синусом* і позначається $f(x)=\sin x$.

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ називається *тригонометричним тангенсом* і позначається $f(x)=\operatorname{tg} x$.

Функція $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ називається *тригонометричним котангенсом* і позначається $f(x)=\operatorname{ctg} x$.

§3.4. Функціональні означення гіперболічних функцій

Розв'язуючи в попередньому параграфі в класі неперервних функцій функціональне рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

ми у випадку $f(0)=1$ отримали існування такого $c>0$, що $f(x)>0$ для всіх $x\in[0;c]$, і припустили, що $f(c)\le 1$.

Нехай тепер $f(c)>1$. Тоді знайдеться таке φ, що $f(c)=\operatorname{ch}\varphi$, де $\operatorname{ch}\varphi=\dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}$. Тому, повторюючи міркування параграфа 3.4 з заміною всюди $\cos$ на ch, отримаємо розв'язок $f(x)=\operatorname{ch} ax$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Отриманий результат може бути використаний для функціонального означення гіперболічного косинуса.

Гіперболічним косинусом називають розв'язок рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

який задовольняє умови:

1) $f(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty;+\infty)$;
2) $f(0)\ne 0$;
3) $f(1)=\dfrac{e+e^{-1}}{2}$.

Цю функцію позначають $f(x)=\operatorname{ch} x$

Означення інших гіперболічних функцій можуть бути сформульовані таким чином.

Функція $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}, & x\ge 0,\\ -\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-1}, & x<0.\end{cases}$ називається *гіперболічним синусом* і позначається $f\left(x\right)=\operatorname{sh}x$.

Функція $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ називається *гіперболічним тангенсом* і позначається $f\left(x\right)=\operatorname{th}x$.

Функція $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ називається *гіперболічним котангенсом* і позначається $f\left(x\right)=\operatorname{cth}x$.

§3.5. Поняття про функціональне рівняння Д'Аламбера та умови існування його розв'язків

Розглянемо у класі неперервних функцій рівняння

$$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2f\left(x\right)g\left(y\right),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

де $g\left(y\right)$ – деяка фіксована неперервна функція. Таке рівняння називають *рівнянням Д'Аламбера*.

Якщо $g\left(y\right)\equiv 1$, то отримуємо рівняння прикладу 22, загальним розв'язком якого є $f(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$.

А замінивши $g\left(y\right)$ на $f\left(y\right)$, приходимо до рівняння

$$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2f\left(x\right)f\left(y\right),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

яке ми досліджували у параграфах 3.3 та 3.4.

Очевидно, що $f\left(x\right)\equiv 0$ є розв'язком рівняння Д'Аламбера за довільної функції $g\left(y\right)$. Тому опишемо вимоги, які має задовольняти функція $g\left(y\right)$, щоб воно мало ненульові розв'язки.

Припустимо, що існує таке x_0, що $f(x_0) \neq 0$. Тоді

$$2f(x_0)g(y) = f(x_0+y) + f(x_0-y) =$$
$$= f(x_0-(-y)) + f(x_0+(-y)) = 2f(x_0)g(-y),$$

тобто $g(y) = g(-y)$ для всіх $y \in \mathbb{R}$. Тому функція $g(y)$ має бути парною. Крім того, покладаючи $x = x_0$, $y = 0$, знайдемо $g(0) = 1$.

Отримані тут необхідні умови не є достатніми. Загальний розв'язок рівняння Д'Аламбера в класі неперервних функцій можна описати так:

1) якщо $g(y) \equiv 1$, то $f(x) = ax + b$;

2) якщо $g(y) = \cos \omega y,\ \omega \neq 0$, то $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$;

3) якщо $g(y) = \mathrm{ch}\,\omega y,\ \omega \neq 0$, то $f(x) = a\,\mathrm{ch}\,\omega x + b\,\mathrm{sh}\,\omega x$;

4) якщо $g(y)$ – довільна інша функція, то $f(x) \equiv 0$,

де $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Обґрунтуємо, наприклад, висновок 2.

Приклад 24. У класі неперервних функцій розв'яжіть рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos\omega y,\ \omega \neq 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Зробивши в заданому рівнянні підстановки: 1) $x = \frac{\pi}{2\omega}$, $y = t + \frac{\pi}{2\omega}$; 2) $x = 0$, $y = t$; 3) $x = t + \frac{\pi}{2\omega}$, $y = \frac{\pi}{2\omega}$, з врахуванням формули зведення отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(t+\dfrac{\pi}{\omega}\right) + f(-t) = 2f\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)\sin\omega t, \\ f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos\omega t, \\ f\left(t+\dfrac{\pi}{\omega}\right) + f(t) = 0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, $t \in \mathbb{R}$, де $a = f(0)$, $b = f\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ – довільні дійсні числа.

Розділ IV. Циклічні групи дробово-лінійних підстановок

§4.1. Найпростіші приклади циклічних підстановок

Функцію φ називають *циклічною функцією* $n-$*го порядку*, якщо n – найменше натуральне число, для якого справджується тотожність $\varphi\left(\varphi\left(...\varphi\left(x\right)...\right)\right)\equiv x$, в лівій частині якої функція φ фігурує n разів.

Очевидно, що єдиною циклічною функцією першого порядку є функція $\varphi\left(x\right)\equiv x$. Однак практичного застосування для розв'язування функціональних рівнянь вона не має.

Розглянемо найпростіші циклічні функції другого порядку та їх використання в процесі розв'язування функціональних рівнянь. Такими є функції: $\varphi\left(x\right)=-x$, $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ та $\varphi\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}$.

Приклад 25. Розв'яжіть рівняння:

а). $f\left(x\right)-2xf\left(-x\right)=x+3,\ x\in\mathbb{R}$;

б). $f\left(x\right)-2xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+3,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

в). $f\left(x\right)-2xf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=x+3,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Розв'язання. Зробимо у заданих рівняннях такі підстановки:

а). Замінимо x на $-x$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f\left(-x\right)+2xf\left(x\right)=-x+3$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння а). Звідси $\left(1+4x^2\right)f\left(x\right)=x+3-2x^2+6x$, тобто

$$f\left(x\right)=\frac{-2x^2+7x+3}{4x^2+1}.$$

б). Замінимо x на $\frac{1}{x}$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}f(x)=\frac{1}{x}+3$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння б). Звідси $(1-4)f(x)=x+3+2+6x$, тобто

$$f(x)=-\frac{7x+5}{3},\ x\neq 0.$$

в). Замінимо x на $-\frac{1}{x}$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}f(x)=-\frac{1}{x}+3$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до рівняння в). Звідси $(1+4)f(x)=x+3-2+6x$, тобто

$$f(x)=\frac{7x+1}{5},\ x\neq 0.$$

Зауважимо, що аналогічно можуть бути зведені до системи двох рівнянь функціональні рівняння такого загального вигляду

$$F\left(x, f(x), f\left(\varphi(x)\right)\right)=0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція другого порядку. При цьому друге рівняння системи матиме вигляд $F\left(\varphi(x), f\left(\varphi(x)\right), f(x)\right)=0$.

Звертаємо увагу читачів на те, що не завжди така система матиме розв'язок, або що її розв'язок буде єдиним.

<u>Приклад 26.</u> Розв'яжіть рівняння:

а). $f(x)-xf\left(\frac{1}{x}\right)=x+3,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

б). $f(x)-xf\left(\frac{1}{x}\right)=x-1,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Розв'язання. Замінимо у заданих рівняннях x на $\frac{1}{x}$. Відповідно отримаємо такі рівняння:

а). $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}+3$. Помножимо обидві його частини на x і додамо до заданого рівняння. В результаті будемо мати $0\cdot f(x)=4x+4$ для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, що не справджується для жодної функції $f(x)$. Отже, задане рівняння не має розв'язків.

б). $f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{1}{x}-1$. Поступаючи аналогічно як у попередньому випадку, приходимо до рівності $0\cdot f(x)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, яка правильна для довільної функції $f(x)$.

Повертаючись до початкового рівняння, зауважимо, що одним з його розв'язків є функція $h(x)=x$. Тому будемо шукати розв'язки такого рівняння у вигляді суми $f(x)=g(x)+x$. Тоді для функції $g(x)$ отримаємо рівняння $g\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}g(x)=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, одним з розв'язків якого є функція $g(x)\equiv 0$.

Припустимо тепер, що існує таке $x_0\neq 0$, для якого $g(x_0)=y_0\neq 0$. Якщо при цьому $g\left(\frac{1}{x_0}\right)=\frac{y_0}{x_0}$, то така функція також буде розв'язком. Перебравши всі такі $x_0\neq 0$ та $y_0\neq 0$, отримаємо всі шукані функції $g(x)$, а разом з ними і нескінченну множину розв'язків початкового рівняння.

§4.2. Циклічні дробово-лінійні підстановки другого порядку

Розглянемо функцію $\varphi(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, $x\in\mathbb{R}$, $cx+d\neq 0$, і накладемо умови: $ad\neq bc$, тобто $\varphi(x)\neq const$, та $a\neq d$, якщо $b=c=0$, тобто не справджується тотожність $\varphi(x)\equiv x$.

Знайдемо

$$\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=\frac{a\varphi\left(x\right)x+b}{c\varphi\left(x\right)x+d}=\frac{a\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=$$

$$=\frac{a\left(ax+b\right)+b\left(cx+d\right)}{c\left(ax+b\right)+d\left(cx+d\right)}=\frac{\left(a^2+bc\right)x+ab+bd}{\left(ac+cd\right)x+bc+d^2}.$$

Звідси отримуємо, що $\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)\equiv x$ за виконання таких умов:

$$a^2+bc=bc+d^2\neq 0,\ ab+bd=0,\ ac+cd=0.$$

Запишемо ці умови у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases}\left(a-d\right)\left(a+d\right)=0,\\ b\left(a+d\right)=0,\\ c\left(a+d\right)=0.\end{cases}$$

Якщо $a+d\neq 0$, то отримуємо $a=d\neq 0$, $b=c=0$, тобто функцію $\varphi\left(x\right)\equiv x$ першого порядку циклічності.

Якщо ж $a+d=0$ і при цьому $a^2+bc\neq 0$, то дробово-лінійна функція $\varphi\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією другого порядку.

Приклад 27. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(x\right)-xf\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Розв'язання. Замінимо x на $\varphi\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Оскільки

$$\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=\frac{\varphi\left(x\right)+1}{\varphi\left(x\right)-1}=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=x,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},$$

то при цьому отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{x+1}{x-1}f\left(x\right)=3.$$

Помножимо обидві його частини на x і додамо до заданого.

В результаті отримаємо $\left(1 - x \cdot \frac{x+1}{x-1}\right) f(x) = 3 + 3x$, звідки знаходимо $f(x) = \frac{3\left(1 - x^2\right)}{x^2 + 1}$, $x \neq 1$.

Звернемо увагу читачів на те, що для функції $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ми мали $a = b = c = 1$, $d = -1$, тобто вимоги для другого порядку її циклічності $a + d = 0$ та $a^2 + bc \neq 0$ виконувалися.

Повертаючись до найпростіших циклічних підстановок, відзначимо, що вони отримуються при наступних значеннях параметрів:

$\varphi(x) = -x$ при $a = 1$, $b = c = 0$, $d = -1$,

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$ при $a = d = 0$, $b = c = 1$,

$\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ при $a = d = 0$, $b = -1$, $c = 1$.

§4.3. Циклічні дробово-лінійні підстановки третього порядку

Використовуючи значення виразу

$$\varphi(\varphi(x)) = \frac{\left(a^2 + bc\right)x + ab + bd}{(ac + cd)x + bc + d^2},$$

з попереднього параграфа, та міркуючи аналогічно, легко отримати, що для всіх допустимих значень x тотожність $\varphi(\varphi(\varphi(x))) \equiv x$ справджується за виконання таких умов:

$$\begin{cases} (a-d)\left(a^2 + ad + d^2 + bc\right) = 0, \\ b\left(a^2 + ad + d^2 + bc\right) = 0, \\ c\left(a^2 + ad + d^2 + bc\right) = 0. \end{cases}$$

Якщо при цьому $a^2 + ad + d^2 + bc \neq 0$, то маємо циклічну функцію $\varphi(x) \equiv x$ першого порядку.

Якщо ж $a^2+ad+d^2+bc=0$, то функція $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією третього порядку за виконання, як це випливає з параграфа 4.2, додаткової умови $a+d\neq 0$.

<u>Приклад 28.</u> Розв'яжіть рівняння

$$f(x)-2f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=3x,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}.$$

Розв'язання. Для функції $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ маємо $a=c=d=1$, $b=-3$, $a+d=2\neq 0$, $a^2+ad+d^2+bc=0$. Тому вона є циклічною функцією третього порядку. Отже, $\varphi(\varphi(\varphi(x)))\equiv x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Знайдемо також

$$\varphi(\varphi(x))=\frac{\varphi(x)-3}{\varphi(x)+1}=\frac{\dfrac{x-3}{x+1}-3}{\dfrac{x-3}{x+1}+1}=\frac{x+3}{1-x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},$$

Замінивши у заданому рівнянні x на $\varphi(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$, отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)-2f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)=3\cdot\frac{x-3}{x+1}.$$

У ньому також замінимо x на $\dfrac{x-3}{x+1}$ і прийдемо до рівняння

$$f\left(\frac{x+3}{1-x}\right)-2f(x)=3\cdot\frac{x+3}{1-x}.$$

Помножимо обидві частини другого рівняння на 2, третього – на 4 і додамо такі три рівняння. В результаті будемо мати

$$-7f(x)=3x+6\cdot\frac{x-3}{x+1}+12\cdot\frac{x+3}{1-x}.$$

Звідси знаходимо $f(x)=\dfrac{3\left(x^3-2x^2-25x-6\right)}{7\left(1-x^2\right)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Узагальнюючи, відзначимо, що вказаним способом рівняння вигляду

$$F\left(x, f(x), f\left(\varphi(x)\right)\right)=0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція третього порядку, може бути зведене до системи трьох рівнянь При цьому друге рівняння системи матиме вигляд

$$F\left(\varphi(x), f\left(\varphi(x)\right), f\left(\varphi\left(\varphi(x)\right)\right)\right)=0,$$

а третє –

$$F\left(\varphi\left(\varphi(x)\right), f\left(\varphi\left(\varphi(x)\right)\right), f(x)\right)=0.$$

Не завжди така система матиме розв'язок. Наприклад, при розв'язуванні функціонального рівняння $f(x)-f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=3x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, ми в кінцевому результаті прийшли би до рівняння

$$0\cdot f(x)=3x+3\cdot\frac{x-3}{x+1}+3\cdot\frac{x+3}{1-x},$$

яке для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ не задовольняє жодна з функцій.

§4.4. Циклічні дробово-лінійні підстановки четвертого порядку та їх застосування

Продовжуючи й далі міркувати аналогічно, для виконання тотожності $\varphi\left(\varphi\left(\varphi\left(\varphi(x)\right)\right)\right)\equiv x$ на множині допустимих значень x отримаємо таку систему умов:

$$\begin{cases}(a-d)(a+d)\left(a^2+d^2+2bc\right)=0,\\ b(a+d)\left(a^2+d^2+2bc\right)=0,\\ c(a+d)\left(a^2+d^2+2bc\right)=0.\end{cases}$$

Якщо $a^2+d^2+2bc\neq0$, то при $a+d=0$ матимемо вже відому нам умову циклічності другого порядку, а при $a+d\neq0$ отримаємо функцію $\varphi(x)\equiv x$.

Якщо ж $a^2+d^2+2bc=0$, то за умови $a+d\neq 0$ функція $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ є циклічною функцією четвертого порядку.

Проілюструємо застосування циклічних дробово-лінійних підстановок четвертого порядку до розв'язування функціональних рівнянь.

Приклад 29. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}\to\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння $xf(x)+2f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1.$

Розв'язання. Для функції $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ маємо:

$$\varphi(\varphi(x))=-\frac{1}{x},\ \varphi(\varphi(\varphi(x)))=-\frac{x+1}{x-1},\ \ \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))=x.$$

Отже, отримуємо таку лінійну систему з чотирьох рівнянь:

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1,\quad \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=1,\quad -\frac{x+1}{x-1}f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=1.$$

З неї знаходимо $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

Пропонуємо читачам самостійно узагальнити цей метод на розв'язування функціональних рівнянь вигляду

$$F\big(x, f(x), f(\varphi(x))\big)=0,$$

де F – деяка відома функція, а φ – довільна циклічна функція четвертого порядку.

§4.5. Циклічні дробово-лінійні функції довільного порядку

Аналізуючи результати попередніх параграфів, логічно поставити питання про існування циклічних, в тому числі й дробово-лінійних, функцій довільного порядку.

Не ставлячи собі за мету знайти всі такі функції, будемо шукати їх у вигляді

$$\varphi(x)=\frac{x\cos\alpha-\sin\alpha}{x\sin\alpha+\cos\alpha},\ x\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0.$$

Для зручності композицію n таких функцій позначимо $\varphi_n(x)$.

Методом математичної індукції доведемо, що

$$\varphi_n(x)=\frac{x\cos n\alpha-\sin n\alpha}{x\sin n\alpha+\cos n\alpha}$$

для всіх допустимих значень x та всіх $n\in\mathbb{N}$.

Для $n=1$ така рівність правильна.

Припустивши, що вона правильна для $n=k$, для $n=k+1$ отримаємо

$$\varphi_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x\cos k\alpha-\sin k\alpha}{x\sin k\alpha+\cos k\alpha}\cdot\cos\alpha-\sin\alpha}{\dfrac{x\cos k\alpha-\sin k\alpha}{x\sin k\alpha+\cos k\alpha}\cdot\sin\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{x(\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-\sin k\alpha\cdot\sin\alpha)-(\sin k\alpha\cdot\cos\alpha+\cos k\alpha\cdot\sin\alpha)}{x(\sin k\alpha\cdot\cos\alpha+\cos k\alpha\cdot\sin\alpha)+(\cos k\alpha\cdot\cos\alpha-\sin k\alpha\cdot\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{x\cos(k+1)\alpha-\sin(k+1)\alpha}{x\sin(k+1)\alpha+\cos(k+1)\alpha}.$$

Звідси, внаслідок принципу математичної індукції, випливає її правильність для всіх натуральних n.

Виберемо тепер $\alpha=\dfrac{\pi}{n}$. Тоді $\sin n\alpha=0$, $|\cos n\alpha|=1$. Отже, $\varphi_n(x)\equiv x$. При цьому дробово-лінійна функція

$$\varphi(x)=\frac{x\cos\dfrac{\pi}{n}-\sin\dfrac{\pi}{n}}{x\sin\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{\pi}{n}},\ x\neq -ctg\frac{m\pi}{n},\ m=\overline{1,n-1},$$

буде циклічною функцією порядку n.

Цікавим є й питання щодо лінійних циклічних функцій. Нескладно переконатися, що композицією n функцій вигляду $\varphi(x)=ax+b$ є функція $\varphi_n(x)=a^n x+\left(1+a+...+a^{n-1}\right)b$.

При цьому $\varphi_n(x)\equiv x$, якщо $a=1, b=0$, $\varphi(x)\equiv x$, а для парних n – ще й у разі $a=-1, b\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=-x+b$. Для кожного $b\in\mathbb{R}$ така функція є циклічною функцією другого порядку.

Приклад 30. Розв'яжіть рівняння

$$f(x)-2xf(2-x)=x+3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Замінимо x на $2-x$ і розглянемо отримане при цьому рівняння $f(2-x)-2(2-x)f(x)=5-x$ в системі з заданим рівнянням. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2x$ і додамо його до початкового рівняння. Звідси отримуємо $\left(4x^2-8x+1\right)f(x)=x+3+2x(5-x)$, тобто $f(x)=\dfrac{-2x^2+11x+3}{4x^2-8x+1}$.

§4.6. Розв'язування різних функціональних рівнянь зведенням до систем рівнянь

Розглядаючи наведені вище приклади функціональних рівнянь, які зводяться до систем рівнянь, ми завжди одним з аргументів функції f мали x. Розглянемо аналогічні приклади рівнянь дещо іншого роду.

Приклад 31. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}.$$

Розв'язання. Позначимо $\dfrac{x+1}{x-1}=t$. Звідси $x=1+\dfrac{2}{t-1}$, тому запишемо задане рівняння у вигляді

$$f(t)-2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t-1}{2},\ t\neq 0.$$

Замінимо тепер t на $\frac{1}{t}$. В результаті отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{1}{t}\right)-2f(t)=\frac{1-t}{2t},\ t\neq 0.$$

Помножимо обидві його частини на 2 і додамо до попереднього рівняння. Тоді $-3f(t)=\frac{t-1}{2}+\frac{1-t}{t}$, отже, маємо $f(t)=\frac{-t^2+3t-2}{6t}$, тобто $f(x)=\frac{-x^2+3x-2}{6x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

Приклад 32. Розв'яжіть рівняння

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}.$$

Розв'язання. Зробимо заміни: 1) $x=t$, 2) $x=\frac{1}{1-t}$, 3) $x=\frac{t-1}{t}$. В результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f\left(\frac{t-1}{t}\right)=\frac{2\left(1-t^2\right)}{t}, \\ f\left(\frac{t-1}{t}\right)+f(t)=\frac{2\left(2t-t^2\right)}{t-1}, \\ f(t)+f\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{2(2t-1)}{t(t-1)}. \end{cases}$$

Віднявши від суми другого та третього рівнянь системи перше рівняння, знайдемо

$$f(t)=\frac{2t-t^2}{t-1}+\frac{2t-1}{t(t-1)}-\frac{1-t^2}{t}=\frac{t+1}{t-1}.$$

Отже, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

Відзначимо, що в окремих випадках підстановки можуть бути не такими очевидними.

Приклад 33. Розв’яжіть рівняння

$$2f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)-f\left(\frac{x}{x-1}\right)=3x,\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2};1\right\}.$$

Розв’язання. Замінивши x на $\frac{2x-1}{x+1}$, отримаємо рівняння

$$2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=\frac{6x-3}{x+1}.$$

Помножимо обидві його частини на 2 і додамо до заданого рівняння. В результаті знайдемо $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{x^2+5x-2}{x+1}$.

Позначимо $\frac{x}{x-1}=t$. Звідси $x=\frac{t}{t-1}$. Отже,

$$f(t)=\frac{\left(\frac{t}{t-1}\right)^2+\frac{5t}{t-1}-2}{\frac{t}{t-1}+1}=\frac{4t^2-t-2}{(t-1)(2t-1)}.$$

Тому $f(x)=\frac{4x^2-x-2}{(x-1)(2x-1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2};1\right\}.$

Розглянемо ще й такий приклад зведення функціонального рівняння до системи рівнянь.

Приклад 34. Для кожного $a\in\mathbb{N}$ розв’яжіть рівняння

$$2f(x)+f(a-x)=1-xf(a),\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв’язання. Замінивши послідовно x на $a-x$, на a та на 0, разом із заданим рівнянням отримаємо систему чотирьох рівнянь

$$\begin{cases}2f(x)+f(a-x)=1-xf(a),\\ 2f(a-x)+f(x)=1-(a-x)f(a),\\ 2f(a)+f(0)=1-af(a),\\ 2f(0)+f(a)=1.\end{cases}$$

З двох останніх рівнянь системи знайдемо $f(a)=\frac{1}{2a+3}$.

Підставивши знайдене значення в перші два рівняння, для визначення функції $f(x)$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2f(x)+f(a-x)=1-\dfrac{x}{2a+3}, \\ 2f(a-x)+f(x)=1-\dfrac{a-x}{2a+3}. \end{cases}$$

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що її розв’язком є функція $f(x)=\dfrac{a+1-x}{2a+3},\ x\in\mathbb{R}$.

І, нарешті, приклад підстановок, які не є дробово-лінійними.

<u>Приклад 35.</u> Розв’яжіть рівняння

$$f(x)+f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)=\sqrt[n]{x^n+1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\},$$

якщо $n-$ довільне непарне натуральне число, більше за 1.

Розв’язання. Провівши заміни: 1) $x=\sqrt[n]{\dfrac{t^n-1}{t^n}}$, 2) $x=\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-t^n}}$ та $x=t$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f\left(\sqrt[n]{\dfrac{t^n-1}{t^n}}\right)+f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-t^n}}\right)=\sqrt[n]{\dfrac{2t^n-1}{t^n}}, \\ f\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{1-t^n}}\right)+f(t)=\sqrt[n]{\dfrac{t^n-2}{t^n-1}}, \\ f(t)+f\left(\sqrt[n]{\dfrac{t^n-1}{t^n}}\right)=\sqrt[n]{t^n+1}. \end{cases}$$

Нескладно переконатися, що її розв’язком є функція

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{t^n+1}+\sqrt[n]{\frac{t^n-2}{t^n-1}}-\sqrt[n]{\frac{2t^n-1}{t^n}}\right).$$

§4.7. Зведення до систем рівнянь функціональних рівнянь з вільними змінними

До систем рівнянь можуть бути зведені й функціональні рівняння з вільними змінними, як ми це робили в прикладі 24. Розглянемо ряд інших рівнянь такого роду.

<u>Приклад 36.</u> Розв'яжіть рівняння

$$xf(y)-yf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ y\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Підставивши в рівняння $y=0$, для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ отримаємо рівність $xf(0)=f(0)$, яка можлива лише за умови $f(0)=0$.

Підставимо тепер $y=2$ і в отриманому при цьому рівнянні

$$xf(2)-2f(x)=f\left(\frac{2}{x}\right),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

замінимо x на $\dfrac{2}{x}$. Позначивши $f(2)=a$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} ax-2f(x)=f\left(\dfrac{2}{x}\right), \\ \dfrac{2a}{x}-2f\left(\dfrac{2}{x}\right)=f(x). \end{cases}$$

З неї маємо $\dfrac{2a}{x}-2\big(ax-2f(x)\big)=f(x)$, тобто

$$f(x)=\frac{2a}{5}\left(\frac{1}{x}-x\right)=c\left(\frac{1}{x}-x\right),\ c=\frac{2f(2)}{5},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Перевірка показує, що c може бути довільним дійсним числом. Нагадаємо, що, крім цього, також $f(0)=0$.

<u>Приклад 37.</u> Розв'яжіть рівняння

$$f\left(2^x+y\right)=f(x)+f\left(2^y\right),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Зробимо такі чотири підстановки:

1) $x=0,\ y=0$; 2) $x=1,\ y=2$; 3) $x=0,\ y=t$; 4) $x=t,\ y=0$.

В їх результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+f(1), \\ f(4)=f(1)+f(4), \\ f(1+t)=f(0)+f\left(2^t\right), \\ f\left(2^t\right)=f(t)+f(1). \end{cases}$$

Звідси знаходимо $f(0)=f(1)=0$ та $f\left(2^t\right)=f(1+t)=f(t)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. З врахуванням заданого рівняння для $y=2^x$ маємо

$$f(x)=f(x+1)=f\left(2^{x+1}\right)=f\left(2^x+2^x\right)=$$

$$=f(x)+f\left(2^{2^x}\right)=f(x)+f\left(2^x\right)=f(x)+f(x),$$

звідки знаходимо єдиний розв'язок $f(x)\equiv 0$.

Частковим випадком зведення до системи рівнянь є метод відокремлення змінних. Він ґрунтується на тому, що тотожність $g(x)\equiv g(y)$ можлива лише умови, що $g(x)\equiv c$ та $g(y)\equiv c$.

<u>Приклад 38.</u> Розв'яжіть рівняння

$$f(x\cdot y)=y^{\alpha}f(x)+x^{\beta}f(y),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),$$

де $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$.

Розв'язання. Оскільки $f(x\cdot y)=f(y\cdot x)$, то також

$$y^{\alpha}f(x)+x^{\beta}f(y)=x^{\alpha}f(y)+y^{\beta}f(x).$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо $\dfrac{f(x)}{x^{\beta}-x^{\alpha}}=\dfrac{f(y)}{y^{\beta}-y^{\alpha}}$ при $x\neq1,\ y\neq1$. Тоді $\dfrac{f(x)}{x^{\beta}-x^{\alpha}}=c$, тобто $f(x)=c\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right),\ x\neq1.$

Перевірка показує, що тут c − довільне дійсне число.

Крім того, з початкового рівняння при $x=y=1$ знаходимо $f(1)=0$. Тому $f(x)=c\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)$ для всіх $x\in(0;\infty)$, $c\in\mathbb{R}$.

Розділ V. Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування функціональних рівнянь

§5.1. Степеневі функціональні рівняння

Степеневими функціональними рівняннями називають рівняння вигляду

$$f^{n}(x)+a_1(x)f^{n-1}(x)+\ldots+a_k(x)f^{n-k}(x)+\ldots+a_{n-1}(x)f(x)+a_n(x)=0,$$

де $a_k(x)$ – деякі відомі функції, $k=\overline{1,n}$.

Позначивши $f(x)=y$, приходимо до звичайного степеневого рівняння відносно y.

У випадку, коли всі функції $a_k(x)=\alpha_k$ є константами, отримуємо степеневе функціональне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$f^{n}(x)+\alpha_1 f^{n-1}(x)+\ldots+\alpha_k f^{n-k}(x)+\ldots+\alpha_{n-1}f(x)+\alpha_n=0,$$

розв'язування якого зводиться до розв'язування звичайного степеневого рівняння $y^n+\alpha_1 y^{n-1}+\ldots+\alpha_k y^{n-k}+\ldots+\alpha_{n-1}y+\alpha_n=0$.

<u>Приклад 39.</u> Розв'яжіть рівняння

$$f^{3}(x)-2f^{2}(x)-f(x)+2=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Позначивши $f(x)=y$, отримаємо кубічне рівняння $y^3-2y^2-y+2=0$, коренями якого є числа: $y_1=-1$, $y_2=1$, $y_3=2$. Тому неперервними розв'язками заданого функціонального рівняння є функції: $f_1(x)\equiv-1$, $f_2(x)\equiv1$, $f_3(x)\equiv2$. Крім них, таке рівняння має й нескінченну кількість інших розв'язків. Сукупність всіх його розв'язків утворюють всі можливі функції, множини значень яких є не порожніми підмножинами множини $\{-1;1;2\}$.

<u>Приклад 40.</u> Розв'яжіть рівняння

$$f^{4}(x)+\left(1-x^2\right)f^{2}(x)-x^2=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\left(f^2(x)-x^2\right)\left(f^2(x)+1\right)=0.$$

Звідси випливає, що його розв'язками є всі ті функції, які задовольняють тотожність $|f(x)|\equiv|x|$. З них неперервними є лише дві функції: $f(x)=x$ та $f(x)=-x$.

Зауважимо, що аналогічно можна розв'язати й функціональні рівняння такого загального вигляду: $F\left(x, f(x)\right)=0$, де $F\left(x,y\right)$ – довільна задана функція, для якої рівняння $F\left(x,y\right)=0$ може бути розв'язане відносно змінної y.

§5.2. Метод невизначених коефіцієнтів

Систему функцій $\left\{a_1\left(x\right),a_2\left(x\right),...,a_n\left(x\right)\right\}$ називають *лінійно незалежною*, якщо тотожність $c_1a_1\left(x\right)+c_2a_2\left(x\right)+...+c_na_n\left(x\right)\equiv 0$ справджується лише за умови $c_1=c_2=...=c_n=0$.

Прикладами лінійно незалежних систем функцій є:

1) $\left\{1,x,x^2,...,x^n\right\}$;

2) $\left\{1,\sin x,\cos x,...,\sin nx,\cos nx\right\}$;

3) $\left\{\lambda_1^x,\lambda_2^x,...,\lambda_n^x\right\}$, де $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – попарно різні додатні числа.

Зокрема, лінійна незалежність першої з них випливає з того, що рівняння ненульового степеня може мати лише скінченну кількість дійсних чи комплексних коренів.

Метод невизначених коефіцієнтів для розв'язування функціональних рівнянь полягає в тому, що шуканий розв'язок записують у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних функцій $f\left(x\right)=c_1a_1\left(x\right)+c_2a_2\left(x\right)+...+c_na_n\left(x\right)$. Таку функцію підставляють у задане рівняння і прирівнюють коефіцієнти біля однакових $a_k\left(x\right),\ k=\overline{1,n},$ у його лівій та правій частинах. З отриманої системи рівнянь знаходять $c_k,\ k=\overline{1,n}$.

Приклад 41. Розв'яжіть рівняння
$$2f(x)+f(2-x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння є квадратичною функцією, то будемо шукати частковий розв'язок цього рівняння у вигляді $h(x)=ax^2+bx+c$.

Підставимо цю функцію в задане рівняння замість $f(x)$ і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x в лівій та правій частинах тотожності
$$2\left(ax^2+bx+c\right)+a\left(2-x\right)^2+b\left(2-x\right)+c\equiv x^2.$$

З отриманої при цьому системи рівнянь
$$\begin{cases}2a+a=1,\\ 2b-4a-b=0,\\ 2c+4a+2b+c=0,\end{cases}$$
знаходимо: $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=-\frac{4}{3}$. Отже,
$$h(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-4\right).$$

Якщо тепер $f\left(x\right)=g\left(x\right)+h(x)$, то для функції $g\left(x\right)$ отримуємо рівняння $2g(x)+g(2-x)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Припустимо, що існує таке $x_0\in\mathbb{R}$, що $g\left(x_0\right)\neq 0$. Тоді для $x=x_0$ та $x=2-x_0$ повинні справджуватися рівності: $2g(x_0)+g(2-x_0)=0$ та $2g(2-x_0)+g(x_0)=0$. Але нескладно переконатися (пропонуємо читачам зробити це самостійно), що таке можливе лише за умови $g\left(x_0\right)=0$.

Отримана суперечність доводить, що $g\left(x\right)\equiv 0$. Тому
$$f\left(x\right)=h(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-4\right).$$

Приклад 42. Знайдіть принаймні одну функцію $f\left(x\right)$, визначену на множині невід'ємних дійсних чисел, для якої

$$\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(x\right)\ldots\right)\right)}_{2017}=\left(1+\sqrt{x}\right)^2,\ x\in[0;+\infty).$$

Розв'язання. Запишемо функцію f у вигляді $f\left(x\right)=\left(a+b\sqrt{x}\right)^2$.

Спочатку підберемо коефіцієнти a та b так, щоб виконувалася тотожність $f\left(f\left(x\right)\right)\equiv\left(1+\sqrt{x}\right)^2$. Оскільки

$$f\left(f\left(x\right)\right)=\left(a+b\sqrt{f\left(x\right)}\right)^2=\left(a+b\left|a+b\sqrt{x}\right|\right)^2=\left(a+ab+b^2\sqrt{x}\right)^2$$

для всіх невід'ємних a,b,x, то така тотожність буде справджуватися, якщо $a+ab=1$ та $b^2=1$. Звідси знаходимо $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ та $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)^2$.

Отриманий результат дає підставу припустити, що одним з розв'язків заданого в умові функціонального рівняння є функція $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2017}+\sqrt{x}\right)^2$.

Доведемо загальніше твердження: для кожного $n\in\mathbb{N}$ композиція $f_n\left(x\right)$ n функцій вигляду $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2$ тотожно дорівнює $\left(1+\sqrt{x}\right)^2$, $x\in[0;+\infty)$. Для цього достатньо довести, що $f_k\left(x\right)\equiv\left(\frac{k}{n}+\sqrt{x}\right)^2$ для всіх $k\le n$.

Для $k=1$ це очевидно. А з припущення справедливості такої тотожності для деякого $k<n$, отримуємо, що

$$f_{k+1}\left(x\right)\equiv f\left(f_k\left(x\right)\right)\equiv\left(\frac{1}{n}+\sqrt{\left(\frac{k}{n}+\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(\frac{k+1}{n}+\sqrt{x}\right)^2.$$

Тому $f_n\left(x\right)\equiv\left(1+\sqrt{x}\right)^2$, і для $n=2017$ маємо $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2017}+\sqrt{x}\right)^2$.

§5.3. Функціональні рівняння в класі многочленів

Метод невизначених коефіцієнтів, який ми розглядали в попередньому параграфі особливо ефективний при розв'язуванні функціональних рівнянь у класі многочленів.

Приклад 43. Розв'яжіть у класі многочленів функціональне рівняння Коші $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Розв'язання. Якщо $f(x)=const$, то отримуємо $f(x)\equiv 0$.

Нехай тепер $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ − многочлен степеня n, де $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$. Підставляючи цю функцію в рівняння Коші, для всіх дійсних чисел x та y отримаємо рівність

$$a_0+a_1(x+y)+...+a_n(x+y)^n=$$
$$=\left(a_0+a_1x+...+a_nx^n\right)+\left(a_0+a_1y+...+a_ny^n\right).$$

Для $n\geq 2$ така тотожність неможлива, бо її ліва частина містить відмінні від нуля доданки вигляду $a_nC_n^kx^ky^{n-k}, 1\leq k\leq n-1,$ які відсутні в її правій частині. Тому $n=1$. Отже, $f(x)=a_0+a_1x$.

З тотожності $a_0+a_1(x+y)\equiv(a_0+a_1x)+(a_0+a_1y)$ отримуємо, що $a_0=0$, $a_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, тобто $f(x)=a_1x$, $a_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Враховуючи також розв'язок $f(x)\equiv 0$, остаточно будемо мати $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$.

Приклад 44. Знайдіть усі многочлени $f(x)$, для яких при кожному $x\in\mathbb{R}$ справджується рівність

$$f(f(x))-f(x)=x^4+2x^3-x^2-2x.$$

Розв'язання. Нехай $f(x)$ є многочленом степеня $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Тоді многочлен у лівій частині рівності матиме степінь n^2. Отже, така рівність можлива лише за умови $n=2$. Тому розв'язок будемо шукати у вигляді $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

Підставляючи цю функцію в рівняння, приходимо до тотожності

$$a\left(ax^2+bx+c\right)^2+b\left(ax^2+bx+c\right)+c-\left(ax^2+bx+c\right)\equiv x^4+2x^3-x^2-2x.$$

Запишемо цю тотожність у вигляді

$$a^3x^4+2a^2bx^3+\left(ab^2+2a^2c+ab-a\right)x^2+$$
$$+\left(2abc+b^2-b\right)x+\left(ac^2+bc\right)\equiv x^4+2x^3-x^2-2x$$

і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x в її лівій та правій частинах, починаючи від найстаршого степеня. Послідовно знайдемо $a=1,\ b=1,\ c=-1$. Отже, $f\left(x\right)=x^2+x-1$.

Приклад 45. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які для кожного дійсного x задовольняють рівність $P(P(x))=(x^2+2017x+2017)P(x)$.

Розв'язання. Очевидно, що $P\left(x\right)\equiv 0$ задовольняє умову.

Нехай тепер $P(x)$ не є тотожнім нулем і має степінь $n,\ n\geq 0$. Тоді у заданій рівності многочлен зліва має степінь n^2, а справа – степінь $n+2$. З рівності $n^2=n+2$ знайдемо $n=2$.

Далі, міркуючи як в попередньому прикладі, многочлен $P(x)$ можна було б шукати у вигляді $P(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0,$ прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x у лівій та правій частинах отриманих виразів. Ми поступимо дещо хитріше.

Підставивши у задану рівність замість x довільний (дійсний чи комплексний) корінь квадратного тричлена $P(x)$, отримаємо $P(0)=0$. Звідси випливає, що обидва його корені є дійсними і $P(x)=ax\left(x+q\right),\ a\neq 0$. Враховуючи умову задачі, приходимо до тотожності

$$a\cdot ax\left(x+q\right)\cdot\left(ax\left(x+q\right)+q\right)\equiv(x^2+2017x+2017)\cdot ax\left(x+q\right),$$

яка рівносильна тотожності

$$a^2x^2+a^2qx+aq\equiv x^2+2017x+2017.$$

З системи рівнянь $a^2 = 1,\ a^2 q = 2017,\ aq = 2017$ знаходимо $a = 1,\ q = 2017$. Отже, $P(x) = x\left(x + 2017\right) = x^2 + 2017x.$

Скористаємося аналогічною ідеєю і для розв'язування наступної задачі. Але спочатку обґрунтуємо наступне твердження.

Лема. Нехай многочлен $H(x)$ такий, що $H(x+a) = H(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, де $a \neq 0$ – довільна константа. Тоді $H(x) \equiv c$.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді рівняння $H(x) = 0$, ліва частина якого є многочленом ненульового степеня, матиме нескінченну кількість різних дійсних чи комплексних коренів: $x_0,\ x_0 + a,\ x_0 + 2a,\ x_0 + 3a,\ \ldots$. Але, як відомо, кількість різних нулів такого многочлена, не перевищує його степеня.

<u>Приклад 46.</u> Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівняння

$$(x+1)P(x) = (x-2)P(x+1),\ x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Підставивши в задану рівність $x = -1$, отримаємо $P(0) = 0$. Аналогічно, підставивши $x = 2$, знайдемо $P(2) = 0$. Тому $P(x) = x\left(x-2\right)Q(x)$, де $Q(x)$ – деякий многочлен, для якого справджується рівність

$$(x+1)\cdot x\left(x-2\right)Q(x) = (x-2)\cdot\left(x+1\right)\left(x-1\right)Q(x+1)$$

або ж $xQ(x) = \left(x-1\right)Q(x+1)$.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що $Q(1) = 0$. Тому $Q(x) = \left(x-1\right)H\left(x\right)$, де $H(x)$ – многочлен, який задовольняє умову $x\cdot\left(x-1\right)H\left(x\right) = \left(x-1\right)\cdot xH\left(x+1\right)$, тобто $H\left(x\right) = H\left(x+1\right)$.

Звідси, внаслідок доведеної вище леми, мамо $H\left(x\right) = c$. Тоді $Q(x) = c\left(x-1\right),\ P(x) = cx\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

Підстановкою в задане рівняння переконуємося, що тут c – довільне дійсне число.

§5.4. Функціональні рівняння та періодичні функції

Повертаючись до леми, яку ми доводили в попередньому параграфі, відзначимо, що з тотожності $H(x+a)\equiv H(x)$ випливає періодичність функції $H(x)$ з періодом a. Звідси також можна було би прийти до висновку, що многочлен $H(x)$ може бути лише нульового степеня, тобто $H(x)\equiv c$.

Розглянемо також інші функціональні співвідношення, які при всіх допустимих значеннях x задовольняють лише періодичні функції. Значну частину таких співвідношень легко отримати з допомогою циклічних функцій.

Нехай $\varphi(t)$ – довільна циклічна функція порядку n. Тоді композиція n таких функцій $\varphi_n(t)\equiv t$. Розглянемо рівняння

$$f\left(x+T\right)=\varphi\Big(f\left(x\right)\Big),\, T\neq 0.$$

Послідовно знаходимо:

$$f\left(x+2T\right)=\varphi\Big(f\left(x+T\right)\Big)=\varphi\Big(\varphi\Big(f\left(x\right)\Big)\Big)=\varphi_2\Big(f\left(x\right)\Big),$$

$$f\left(x+3T\right)=\varphi_3\Big(f\left(x\right)\Big),\ \ldots,\ f\left(x+nT\right)=\varphi_n\Big(f\left(x\right)\Big)=f\left(x\right).$$

Отже, кожен розв'язок такого рівняння є періодичною функцією з періодом nT.

Приклад 47. Доведіть, що всі розв'язки функціонального рівняння $f\left(x+\pi\right)=\dfrac{f\left(x\right)+1}{f\left(x\right)-1}$ є періодичними функціями з періодом 2π та дослідіть чи кожна періодична функція з таким періодом задовольняє це рівняння.

Розв'язання. Знайдемо

$$f\left(x+2\pi\right)=\frac{f\left(x+\pi\right)+1}{f\left(x+\pi\right)-1}=\frac{\dfrac{f\left(x\right)+1}{f\left(x\right)-1}+1}{\dfrac{f\left(x\right)+1}{f\left(x\right)-1}-1}=f\left(x\right).$$

Тому функція $f(x)$ періодична з періодом 2π.

Нехай тепер $f(x)=\sin x$, період якої також дорівнює 2π. Підставивши її в задане функціональне рівняння, з врахуванням формул зведення отримаємо рівність $-\sin x=\dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}$, яка не є тотожністю. Тому не кожна періодична функція з періодом 2π задовольняє це рівняння.

Для наступного узагальнення зауважимо, що для функції $f(x)=\sin x$ з періодом $2\pi=8\cdot\dfrac{\pi}{4}$ справджується рівність

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x.$$

<u>Приклад 48.</u> Доведіть, що кожна функція, яка задовольняє умову $f(x+\alpha)+f(x-\alpha)=\sqrt{2}f(x)$, $\alpha\neq 0$, є періодичною функцією з періодом $T=8\alpha$.

Розв'язання. Замінивши x на $x+\alpha$ та на $x-\alpha$, отримаємо $f(x+2\alpha)+f(x)=\sqrt{2}f(x+\alpha)$ та $f(x)+f(x-2\alpha)=\sqrt{2}f(x-\alpha)$ відповідно. Додавши ці рівності, з врахуванням заданої умови будемо мати

$$2f(x)+f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)=\sqrt{2}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\right)=2f(x),$$

звідки випливає, що $f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)=0$.

Замінивши в останній рівності x на $x+2\alpha$, отримаємо, що $f(x+4\alpha)+f(x)=0$, тобто $f(x+4\alpha)=-f(x)$. Тому

$$f(x+8\alpha)=-f(x+4\alpha)=f(x),$$

що й треба було довести.

Відзначимо також, що періодичність функції, яка задовольняє певне функціональне співвідношення, можна використати й для обчислення значень цієї функції в окремих точках її області визначення.

Приклад 49. Обчисліть $f(2017)$, якщо $f(1)=2017$ і для всіх $x\in\mathbb{R}$ справджується рівність $f(x)=f(x-1)f(x+1)$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)\neq 0$, то з умови випливає, що також $f(0)\neq 0$ та $f(2)\neq 0$. Підставляючи послідовно замість x натуральні числа n, отримаємо, що $f(n)\neq 0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Враховуючи сказане, для натуральних чисел $x=n$ запишемо задану рівність у вигляді $f(x+1)=\dfrac{f(x)}{f(x-1)}$. Тоді

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x+1)}{f(x-1)f(x+1)}=\frac{1}{f(x-1)}.$$

Отже,

$$f(x+5)=f((x+3)+2)=\frac{1}{f((x+3)-1)}=\frac{1}{f(x+2)}=f(x-1).$$

Тому $f(2017)=f(2011)=...=f(7)=f(1)=2017$.

Зауважимо, що можна було міркувати ще й так.

Замінимо x на $x+1$ і помножимо отриману при цьому рівність $f(x+1)=f(x)f(x+2)$ на задану в умові. Якщо $f(x)\neq 0$ та $f(x+1)\neq 0$, то отримаємо $f(x-1)f(x+2)=1$, звідки випливає, що $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x-1)}$ та $f(x+5)=\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x-1)$.

§5.5. Функціональні рівняння з обмеженнями на область визначення та множину значень функції

Розв'язуючи функціональне рівняння Коші, ми встановили, що на множині раціональних чисел його розв'язками є лише лінійні функції, та зауважували на множині всіх дійсних чисел існують також розривні адитивні нелінійні функції.

Для цього ж рівняння за умови обмеженості адитивної функції на деякому відрізку ми також довели, що така функція може бути тільки лінійною. Відповідно, без такої умови можуть існувати й нелінійні адитивні функції.

Таким чином, розв'язок функціонального рівняння суттєво залежить не лише від самого рівняння, а й від тих обмежень, які накладені на область визначення чи множину значень шуканої функції. При цьому при розширенні таких множин загальна кількість розв'язків може як і збільшуватися, так і зменшуватися.

Зокрема, повертаючись до прикладу 13, відзначимо, що неперервними розв'язками функціонального рівняння

$$f((x+y)^2)=f(x^2)+f(y^2)+2xy$$

на множині невід'ємних дійсних чисел були функції $f(x)=x+a\sqrt{x}$, $a\in\mathbb{R}$. Але на множині всіх дійсних чисел таке рівняння матиме єдиний розв'язок $f(x)=x$.

Розглянемо інші приклади рівнянь такого роду.

<u>Приклад 50.</u> Розв'яжіть функціональне рівняння

$$f\left(x+f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$$

у класі функцій $f:\left[0;1\right]\to\mathbb{R}$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)=0$, $x\in\left[0;1\right]$, є розв'язком. Припустимо, що існує $x_0\in\left[0;1\right]$ таке, що $f(x_0)=a\neq 0$.

Підставивши $x=x_0$, отримаємо $f\left(x_0+a\right)=f\left(x_0\right)$, тобто функція f визначена й для $x=x_0+a$.

Далі, для $x=x_0+a$, отримаємо, що $f\left(x_0+2a\right)=f\left(x_0+a\right)$, тобто функція f визначена й для $x=x_0+2a$.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що функція f повинна бути визначена для $x=x_0+na$ при кожному натуральному n.

Але, яким би не було число $a\neq 0$, знайдеться такий номер $n=n_0$, за якого $x=x_0+n_0a\notin\left[0;1\right]$, що суперечить умові задачі.

Отже $f(x)=0$ – єдиний розв'язок.

Відзначимо, що при розв'язуванні цього рівняння ми суттєво використали умову обмеженості області визначення функції. Наступний приклад демонструє, як можна використати для обґрунтування властивостей функції, заданої функціональним співвідношенням, обмеженість множини її значень.

Приклад 51. Доведіть, що кожна обмежена функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняє умову
$$f(x)+f(x+5)=f(x+2)+f(x+3)$$
є періодичною.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x)=f(x)-f(x+2)$. Для неї рівняння з умови набуває вигляду $g(x)=g(x+3)$. Це означає, що ця функція періодична з періодом 3, отже, й з періодом 6.

Нехай $h(x)=g(x)+g(x+2)+g(x+4)$. Функція h також періодична з періодом 6, тобто для всіх $x\in\mathbb{R}$ та всіх натуральних чисел n справджуються рівності
$$h(x)=h(x+6)=h(x+12)=\ldots=h(x+6n).$$

Доведемо, що $h(x)\equiv 0$. Для цього зауважимо, що
$$h(x)=\big(f(x)-f(x+2)\big)+\big(f(x+2)-f(x+4)\big)+$$
$$+\big(f(x+4)-f(x+6)\big)=f(x)-f(x+6).$$

Припустимо, що існує точка x_0 така, що $h(x_0)=y_0\neq 0$. Тоді
$$f(x_0)-f(x_0+6n)=h(x_0)+h(x_0+6)+\ldots+h\big(x_0+6(n-1)\big)=ny_0$$
для всіх натуральних значень n, що суперечить умові обмеженості функції f. Звідси випливає, що $f(x)-f(x+6)\equiv 0$, тобто функція f є періодичною з періодом 6.

Зазначимо, що умову $f(x)+f(x+5)=f(x+2)+f(x+3)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють також необмежені при $a\neq 0$ лінійні функції $f(x)=ax+b$, які не є періодичними. Існують також розривні неперіодичні розв'язки цього рівняння.

§5.6. Функціональні рівняння на дискретних множинах

Розглянемо тепер задачі про відшукання функцій, які визначені і набувають своїх значень на множинах натуральних цілих чи раціональних чисел.

Приклад 52. Функція f визначена і набуває значень на множині невід'ємних цілих чисел. Знайдіть усі можливі значення $f\left(2017\right)$, якщо для всіх n з цієї множини справджується рівність

$$f\left(f\left(n\right)\right)+f\left(n\right)=2n+3.$$

Розв'язання. При $n=0$ отримуємо $f\left(f\left(0\right)\right)+f\left(0\right)=3$. Оскільки функція f набуває лише невід'ємних цілих значень, то звідси випливає, що $f\left(0\right)$ може набувати значень тільки з множини $\{0;1;2;3\}$. Розглянемо кожну таку можливість окремо.

Нехай $f\left(0\right)=0$. Тоді з попередньої рівності приходимо до суперечності: $f\left(0\right)=3$.

Нехай $f\left(0\right)=1$. Тоді отримуємо $f\left(1\right)+1=3$, тобто $f\left(1\right)=2$. Методом математичної індукції доведемо, що при цьому $f\left(n\right)=n+1$ для всіх невід'ємних цілих чисел n. Справді, для $n=0$ така рівність правильна. Припустимо, що вона правильна для деякого цілого невід'ємного числа $n=k$. Тоді, підставивши $n=k$ в початкове рівняння, отримаємо $f\left(k+1\right)+k+1=2k+3$, звідки маємо $f\left(k+1\right)=k+2$. Таким чином, внаслідок принципу математичної індукції, наше твердження доведене. Отже, в такому разі $f\left(2017\right)=2018$.

Нехай $f\left(0\right)=2$. Тоді $f\left(2\right)+2=3$, $f\left(2\right)=1$. Підставивши $n=2$ в початкове рівняння, знайдемо $f\left(1\right)=6$. Підставляючи тепер $n=2$, приходимо до суперечності з умовою: $f\left(6\right)+6=5$, тобто $f\left(6\right)=-1$.

І, нарешті, розглянемо останню можливість $f(0)=3$. Тоді $f(3)+3=3$, отже, $f(3)=0$. Тому, підставляючи в початкове рівняння $n=3$, отримаємо, що також $f(0)=9$. Таким чином, ми довели, що єдиним значенням $f(2017)$ є число 2018.

Звертаємо увагу читачів, що при розв'язуванні цього прикладу ми скористалися тим, що у множині невід'ємних цілих чисел є найменший елемент, тобто скористалися так званим *принципом крайнього*. Такий підхід є ефективним і при розв'язуванні інших задач, в яких фігурують обмежені зверху чи знизу множини.

Узагальнюючи, відзначимо, що в тому ж класі функцій рівняння $f(f(n))+f(n)=2n+3k,\ k\in\mathbb{N},$ має єдиний розв'язок $f(n)=n+k$, а рівняння $f(f(n))+f(n)=2n+3k+1,\ k\in\mathbb{N},$ та $f(f(n))+f(n)=2n+3k-1,\ k\in\mathbb{N},$ розв'язків не мають.

<u>Приклад 53.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такі, що $f(f(m)+f(n))=m+n$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що f – ін'єктивна функція. Справді, якщо $f(m)=f(n)$, то $f(m)+f(n)=f(n)+f(n)$.

Отже, внаслідок заданої в умові рівності, отримуємо

$$m+n=f(f(m)+f(n))=f(f(n)+f(n))=n+n,$$

тобто $m=n$.

Нехай $f(1)=a\in\mathbb{N}$. Якщо $a=1$, то, припускаючи, що $f(k)=k$ для деякого $k\in\mathbb{N}$, при $m=k$, $n=1$ з умови задачі отримуємо $f(k+1)=f(f(k)+f(1))=k+1$. Звідси, внаслідок принципу математичної індукції, $f(n)=n$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Доведемо, що інших розв'язків рівняння не має. Дійсно, якщо $f(1)=2$, то, покладаючи $m=n=1$, отримаємо, що також

$$f(4)=f(2+2)=f(f(1)+f(1))=1+1=2.$$

А це суперечить ін’єктивності функції f.

Нехай тепер $f(1)=a\geq 3$. З рівності

$$f\left(f(m+k)+f(n-k)\right)=(m+k)+(n-k)=m+n=f\left(f(m)+f(n)\right)$$

та ін’єктивності функції f для всіх натуральних чисел m, n та $k,\ k<n,$ отримуємо $f(m+k)+f(n-k)=f(m)+f(n)$.

Підставивши тут $m=1,\ n=2a,\ k=a-2$, запишемо останню рівність у вигляді $f(a-1)+f(a+2)=f(1)+f(2a)$. Оскільки

$$f(1)=a,\ f(2a)=f(a+a)=f\left(f(1)+f(1)\right)=1+1=2,$$

$$f(a+2)=f\left(f(1)+f(2a)\right)=1+2a,$$

то звідси знаходимо $f(a-1)=1-a<0$, що суперечить умові.

Отже, єдиним розв’язком рівняння є функція $f(n)=n,\ n\in\mathbb{N}$.

<u>Приклад 54.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(x+y)=f(x)f(y)$ для всіх $x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q}$ та $f(1)=2$.

Розв’язання. Підставивши $x=1,\ y=0$, знайдемо $f(0)=1$.

Нехай тепер $x=t,\ y=1-t$. Тоді для всіх $t\in\mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(t)f(1-t)=f(1)=2$, звідки випливає, що $f(t)\neq 0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$.

Крім того, при $x=y=\dfrac{t}{2}$ отримуємо

$$f(t)=f\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)=f\left(\frac{t}{2}\right)f\left(\frac{t}{2}\right)=f^2\left(\frac{t}{2}\right)\geq 0.$$

Тому функція f набуває лише додатних значень.

Далі, підставивши $x=t,\ y=-t$, отримуємо $f(t)f(-t)=1$, тобто $f(-t)=\dfrac{1}{f(t)}$.

Методом математичної індукції для всіх $n\in\mathbb{N}$ доведемо рівність $f(nx)=f^n(x)$. Для $n=1$ вона очевидна. Припустимо, правильність такої рівності для деякого натурального $n=k$. Тоді для $n=k$, внаслідок заданого рівняння, будемо мати

$$f\left((k+1)x\right)=f\left(kx+x\right)=f\left(kx\right)f\left(x\right)=f^{k}\left(x\right)f\left(x\right)=f^{k+1}\left(x\right),$$

що, внаслідок принципу математичної індукції, й завершує доведення.

Покладаючи в доведеній рівності $x=1$, для всіх $n\in\mathbb{N}$ отримаємо $f\left(n\right)=f^{n}\left(1\right)=2^{n}$. Тоді, покладаючи $x=\dfrac{m}{n}$, будемо мати $2^{m}=f\left(m\right)=f^{n}\left(\dfrac{m}{n}\right)$. Звідки, враховуючи додатність значень функції f, отримуємо $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=2^{\frac{m}{n}}$ для всіх $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Оскільки також $f\left(-\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{m}{n}\right)}=\dfrac{1}{2^{\frac{m}{n}}}=2^{-\frac{m}{n}}$ та $f\left(0\right)=1=2^{0}$, то $f\left(x\right)=2^{x}$ для всіх $x\in\mathbb{Q}$.

§5.7. Функціональні рівняння та монотонність функції

Як ми бачили в прикладі 53, при розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь буває важливо встановити *ін'єктивність* шуканої функції, тобто, що така функція при різних значеннях аргумента набуває різних значень.

Зрозуміло, що кожна строго монотонна функція є ін'єктивною. Навпаки, не кожна ін'єктивна функція є строго монотонною. Але такою буде кожна неперервна ін'єктивна функція.

Розглянемо застосування монотонності функцій до розв'язування функціональних рівнянь.

Приклад 55. Знайдіть усі неперервні розв'язки рівняння

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Спочатку доведемо ін'єктивність функції f. Справді, якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то, двічі застосувавши до цієї рівності функцію f, внаслідок заданої умови отримаємо $x_1 = x_2$. Отже, шукана неперервна функція є строго монотонною.

Припустимо, що така функція монотонно спадає. Тоді функція $f(f(x))$ буде монотонно зростаючою, $f(f(f(x)))$ – монотонно спадною. Зокрема, монотонно спадною буде і функція, записана у лівій частині рівняння, і вона не зможе тотожно дорівнювати зростаючій функції $g(x) = x$.

Нехай тепер f – монотонно зростаюча функція. Припустимо, що існує таке значення x_0, для якого $f(x_0) > x_0$. Тоді

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0, \; f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

Остаточно отримуємо, що в точці x_0 значення лівої частини рівності більше за x_0, що суперечить умові.

Аналогічно доводимо, що не існує такого x_0, для якого $f(x_0) < x_0$. Тому $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що існують також розривні функції, які не є монотонними, але задовольняють це рівняння для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, $f(x) = x, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2;3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$.

Зазначимо також, що іноді монотонність шуканої функції, можна встановити і за відсутності умови її неперервності.

<u>Приклад 56.</u> Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння $f(f(x) + y^2) = x + f^2(y)$.

Розв'язання. Позначимо $f(0) = a$ і підставимо $x = t$, $y = 0$. Тоді $f(f(t)) = t + a^2$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Зокрема, при $t = 0$ отримаємо $f(a) = a^2$. Навпаки, якщо підставити $x = 0$, $y = t$, то будемо мати $f(a + t^2) = f^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Звідси маємо, що $f\left(a+t^2\right)+a^2 = f(a)+f^2(t)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$.

Застосуємо функцію f до обох частин останньої рівності:

$$f\left(f\left(a+t^2\right)+a^2\right)=f\left(f(a)+f^2(t)\right).$$

Враховуючи умову задачі, отримаємо рівність

$$a+t^2+f^2(a)=a+f^2\left(f(t)\right),\ t\in\mathbb{R},$$

яку, з врахуванням отриманих вище результатів, можна записати у вигляді $t^2+a^4=\left(t+a^2\right)^2$, $t\in\mathbb{R}$. Оскільки при цьому $2a^2t\equiv 0$, то $a=0$. Тому $f\left(t^2\right)=f^2(t)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$, тобто функція f набуває невід’ємних значень при невід’ємних значеннях аргумента.

Якщо $f(x_0)=0$ для деякого $x_0>0$, то, покладаючи $x=x_0$, $y=t$, будемо мати $f\left(t^2\right)=x_0+f^2(t)$, що суперечить тотожності $f\left(t^2\right)\equiv f^2(t)$. Отже, $f(x)>0$ для всіх $x>0$.

Далі, зауваживши, що при $a=0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$ справджується рівність $f\left(f(t)\right)=t$, підставимо в задане рівняння $x=f(t)$, $y=s$ і запишемо його у вигляді $f\left(f\left(f(t)\right)+s^2\right)=f(t)+f^2(s)$ або ж

$$f\left(t+s^2\right)=f(t)+f\left(s^2\right).$$

Звідси для всіх $t\in\mathbb{R}$, $s\neq 0$ отримуємо нерівність

$$f\left(t+s^2\right)-f(t)=f\left(s^2\right)>0,$$

з якої випливає, що функція f є строго монотонно зростаючою.

Отже, з тотожності $f\left(f(x)\right)\equiv x$, міркуючи аналогічно, як у попередньому прикладі, отримуємо єдиний розв’язок $f(x)=x$.

§5.8. Функціональні рівняння та теореми про властивості неперервних функцій

При розв’язуванні рівняння з прикладу 55, ми скористалися властивістю монотонності ін’єктивних неперервних функцій. Ще раз використаємо цю властивість у наступному прикладі.

Приклад 57. Доведіть, що рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$, не має неперервних розв'язків.

Розв'язання. З рівності $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ отримуємо

$$x_1=f\left(f\left(x_1\right)\right)=f\left(f\left(x_2\right)\right)=x_2.$$

Отже, функція f є ін'єктивною та, внаслідок неперервності, строго монотонною. Тому $f\left(f\left(x\right)\right)$ – монотонно зростаюча функція і вона не може дорівнювати e^{-x}.

Наведемо також застосування інших властивостей неперервних функцій.

Приклад 58. Доведіть, що не існує неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f\left(x+1\right)f\left(x\right)+f\left(x+1\right)+1=0.$$

Розв'язання. Припустимо, що існує така точка $x_0\in\mathbb{R}$, для якої $f\left(x_0\right)=0$. Тоді, підставивши $x=x_0-1$, отримаємо суперечність $1=0$. Враховуючи неперервність функції f, звідси випливає, що вона може набувати лише значень одного знаку. Якщо при цьому $f\left(x\right)>0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, то ліва частина рівняння також набуває лише додатних значень і не може дорівнювати 0.

Нехай тепер $f\left(x\right)<0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Записавши рівняння у вигляді $f\left(x+1\right)\left(f\left(x\right)+1\right)=-1$, отримаємо, що $f\left(x\right)+1>0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Тому функція f може набувати значень лише з інтервалу $\left(-1;0\right)$. Але в такому разі $f\left(x+1\right)f\left(x\right)>0$ та $f\left(x+1\right)+1>0$. Тому записана в умові рівність також не справджується.

Приклад 59. Знайдіть усі неперервні функції $f:\left[1;2\right]\to\left[1;2\right]$ такі, що $f\left(1\right)=2$ та для $f\left(f\left(x\right)\right)f\left(x\right)=2$ всіх $x\in\left[1;2\right]$.

Розв'язання. При $x=1$ з умови отримуємо $f(2)=1$. Внаслідок неперервності функції f звідси випливає, що вона набуває всі проміжні значення з відрізка $[1;2]$. Тому для кожного $y\in[1;2]$ знайдеться таке $x\in[1;2]$, що $f(x)=y$. Для всіх таких $y\in[1;2]$ з умови прикладу отримуємо рівність $f(y)y=2$, тобто $f(y)=\frac{2}{y}$.

Перевірка показує, що $f(x)=\frac{2}{x}$, $x\in[1;2]$, є розв'язком.

§5.9. Метод граничного переходу

Розв'язуючи рівняння з прикладу 54, ми обмежилися лише знаходженням значень шуканої функції для раціональних значень аргумента. Нехай тепер така функція є неперервною. Тоді для кожного ірраціонального числа x розглянемо послідовність раціональних чисел $x_n\to x$. Внаслідок неперервності функції f знаходимо $f(x)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{x_n}=2^x$, тобто в класі неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рівняння $f(x+y)=f(x)f(y)$ з умовою $f(1)=2$ має єдиний розв'язок $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Такий спосіб розв'язування функціональних рівнянь в класі неперервних функцій називають *методом граничного переходу*. Він вже був застосований нами при розв'язуванні рівняння Коші. Розв'яжемо з його допомогою ще деякі функціональні рівняння.

<u>Приклад 60.</u> Знайдіть усі неперервні в точках $x=0$, $x=1$ та $x=-1$ функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(x^3+y)=f(x)+f(y^3)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Підставивши $x=y=0$, знайдемо $f(0)=0$. Якщо тепер лише $y=0$, то отримаємо $f(x^3)=f(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Покладаючи тут $x=\sqrt[3]{t}$, будемо мати $f(t)=f\left(\sqrt[3]{t}\right)$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Звідси отримуємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(t)=f\left(\sqrt[3]{t}\right)=f\left(\sqrt[9]{t}\right)=\ldots=f\left(\sqrt[3n]{t}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{t}=1$ для всіх $t>0$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{t}=-1$ для всіх $t<0$, то, враховуючи неперервність функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ в точках $x=\pm1$, для всіх $t>0$ отримаємо $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt[3n]{t}\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{t}\right)=f(1)$, а для всіх $t<0$, будемо мати $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt[3n]{t}\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{t}\right)=f(-1)$.

Враховуючи також неперервність шуканої функції в точці $x=0$, звідси отримуємо, що $f(x)\equiv f(0)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Приклад 61. Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax+b)=f(x),\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Розглянемо кілька можливих випадків:

1). $a=0$. Тоді зразу отримуємо розв'язок $f(x)=f(b)=const$.

2). $a=1,\ b=0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні функції.

3). $a=1,\ b\neq0$. Розв'язками рівняння є всі періодичні з періодом $T=|b|$ неперервні функції.

4). $a=-1,\ b=0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні непарні функції.

5). $a=-1,\ b\neq0$. Розв'язками рівняння є всі неперервні функції, графіки яких симетричні відносно прямої $x=\dfrac{b}{2}$.

6). $0<|a|<1,\ b\in\mathbb{R}$. Будемо в заданому рівнянні послідовно замінювати $x\in\mathbb{R}$ на $ax+b$. У результаті отримаємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(x)=f(ax+b)=f\left(a^2x+(a+1)b\right)=\ldots=f\left(a^nx+\left(a^{n-1}+\ldots+a+1\right)b\right),$$

де n – довільне натуральне число.

Враховуючи неперервність функції f, звідси знаходимо

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(a^n x+\left(a^{n-1}+\ldots+a+1\right)b\right)=$$

$$=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(a^n x+\left(a^{n-1}+\ldots+a+1\right)b\right)\right)=f\left(\frac{b}{1-a}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Перевірка показує, що функція $f(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$, є розв'язком рівняння при кожному $c\in\mathbb{R}$.

7). $|a|>1,\ b\in\mathbb{R}$. Позначимо $ax+b=t$. Звідси маємо $x=\dfrac{t-b}{a}$. Отже, рівняння можна записати у вигляді $f(t)=f\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$. Будемо в ньому послідовно замінювати $t\in\mathbb{R}$ на $\dfrac{t-b}{a}$.

У результаті отримаємо такий ланцюжок рівностей:

$$f(t)=f\left(\frac{t-b}{a}\right)=f\left(\frac{t}{a^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)b\right)=\ldots=f\left(\frac{t}{a^n}-\left(\frac{1}{a^n}+\ldots+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)b\right).$$

Звідси, враховуючи неперервність функції f, знаходимо

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{t}{a^n}-\left(\frac{1}{a^n}+\ldots+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)b\right)=$$

$$=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t}{a^n}-\left(\frac{1}{a^n}+\ldots+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)b\right)\right)=f\left(\frac{ab}{1-a}\right),\ t\in\mathbb{R}.$$

Отже, як і в попередньому випадку, отримуємо розв'язок $f(x)=c,\ x\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$.

Відзначимо, що з переходом до змінної $y=kx+m$ аналогічно можуть бути знайдені всі неперервні розв'язки рівняння $f(ax+b)=f(kx+m),\ k\neq 0$.

<u>Приклад 62.</u> Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ задовольняють рівняння $f(x)=f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Розв'язання. Спочатку будемо вважати, що $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Далі, послідовно замінюючи x на $\frac{x}{1-x}$, отримаємо:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{1-nx}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Перейшовши при $n \to \infty$ до границі в рівності $f(x) = f\left(\frac{x}{1-nx}\right)$, знайдемо $f(x) = f(0)$ для всіх $x \neq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

А, враховуючи неперервність функції f, звідси отримуємо, що також $f(x) = f(0)$ й для всіх $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Перевірка показує, що функція $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняє задане рівняння при кожному $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Зауважимо, що для визначення значень функції f в точках $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ можна було міркувати інакше. Підставивши в задане рівняння $x = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, отримаємо рівність $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Аналогічно при $x = \frac{1}{n-1}$, $n \geq 3$ будемо мати $f\left(\frac{1}{n-1}\right) = f\left(\frac{1}{n-2}\right)$. Таким чином, приходимо до ланцюжка рівностей:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n-1}\right) = \ldots = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1),\ n \in \mathbb{N}.$$

З іншого боку, для $x = \frac{1}{3}$ в отриманій вище рівності $f(x) = f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$, послідовно замінюючи x на $\frac{x}{1-2x}$, будемо мати ланцюжок рівностей:

$$f(x)=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)=f\left(\frac{x}{1-4x}\right)=\ldots=f\left(\frac{x}{1-2nx}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що $f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2n}{3}}\right)=f(0)$. Тому $f(x)=f(0)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, і в умові задачі достатньо було вимагати неперервності функції f лише в одній точці $x=0$.

Відзначимо також, що іноді для здійснення граничного переходу замість неперервності достатньо вимагати тільки обмеженість функції в околі однієї з точок її області визначення.

<u>Приклад 63.</u> Знайдіть усі обмежені в деякому околі точки $x=0$ функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють умову

$$2f(2x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=2(2x+1).$$

Розв'язання. Позначимо $2x=t$ і запишемо рівняння у вигляді

$$f(t)=\frac{1}{2}f\left(\frac{t}{4}\right)+t+1,\ t\in\mathbb{R}.$$

Зрозуміло, що також

$$f\left(\frac{t}{4}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{t}{16}\right)+\frac{t}{4}+1,\ f\left(\frac{t}{16}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{t}{64}\right)+\frac{t}{16}+1,\ \ldots,\ t\in\mathbb{R}.$$

Тому для кожного натурального n справджується рівність

$$f(t)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{t}{4^n}\right)+\left(1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}\right)t+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Перейшовши в ній до границі при $n\to\infty$, з врахуванням обмеженості функції f у деякому околі точки $x=0$ отримаємо $f(t)=\frac{8}{7}t+2$. Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що функція $f(x)=\frac{8}{7}x+2$, $x\in\mathbb{R}$, є розв'язком.

§5.10. Функціональні рівняння в класах диференційованих функцій

Скориставшись висновками, отриманими при розв'язуванні прикладу 61, знайдемо розв'язки деяких функціональних рівнянь у класах диференційованих функцій.

<u>Приклад 64.</u> Знайдіть усі неперервно диференційовані функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax+b)=af(x),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\},\ b\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Покладемо $g(x)=f'(x)$. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x, отримаємо $g(ax+b)=g(x)$.

Оскільки, за умовою, функція g неперервна, то $g(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Тому також $f'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Отже, $f(x)=cx+d$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, отримаємо тотожність $c(ax+b)+d\equiv a(cx+d)$, з якої при $a\neq 1$ знайдемо $d=\dfrac{bc}{a-1}$. Отже, остаточно маємо $f(x)=c\left(x+\dfrac{b}{a-1}\right),\ c\in\mathbb{R}$.

<u>Приклад 65.</u> Знайдіть усі неперервно диференційовані функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f(4x+1)=2f(2x-1)+3.$$

Розв'язання. Покладемо $g(x)=f'(x)$. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x, для функції g отримаємо рівність

$$g(4x+1)=g(2x-1),\ x\in\mathbb{R}.$$

Нехай тепер $2x-1=t$. Тоді $x=\dfrac{t+1}{2}$, отже, приходимо до рівняння $g(2t+3)=g(t),\ t\in\mathbb{R}$, у класі неперервних функцій. Воно, згідно з прикладом 61, має розв'язки $g(t)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Тому $f'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$, та $f(x)=cx+d$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, з тотожності $c(4x+1)+d\equiv 2(c(2x-1)+d)+3$, знаходимо $d=3(c-1)$. Отже, остаточно маємо $f(x)=cx+3(c-1),\ c\in\mathbb{R}$.

<u>Приклад 66.</u> Знайдіть усі двічі неперервно диференційовані функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють умову

$$f(ax+b)=a^2 f(x),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\},\ b\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Поклавши $g(x)=f''(x)$, двічі здиференціюємо обидві частини рівняння за змінною x. У результаті для неперервної функції g отримаємо рівняння $g(ax+b)=g(x)$, з якого знаходимо $g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Тому також $f''(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Отже, $f'(x)=cx+d$, $f(x)=c\cdot\dfrac{x^2}{2}+dx+e$.

Підставивши цю функцію в задане рівняння, з тотожності

$$\frac{c(ax+b)^2}{2}+d(ax+b)+e\equiv a^2\left(\frac{cx^2}{2}+dx+e\right),$$

при $a\neq 0$ та $a\neq\pm1$ отримаємо $d=\dfrac{bc}{a-1}$, $e=\dfrac{b^2c}{2(a-1)^2}$.

Отже, остаточно маємо

$$f(x)=\frac{c}{2}\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^2,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}.$$

З використанням похідної можуть бути розв'язані й деякі функціональні рівняння з вільними змінними. Проілюструємо цей підхід на прикладі розв'язування неоднорідного функціонального рівняння Коші.

<u>Приклад 67.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які в точці $x=0$ мають скінченну похідну і для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ задовольняють рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$.

Розв'язання. Поклавши $x = y = 0$, з умови знайдемо $f(0) = 0$.

Позначимо $f'(0) = a$ і для $y \neq 0$ запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} + x^2 + xy.$$

Для кожного фіксованого значення x його права частина при $y \to 0$ прямує до $a + x^2$. Тому й $\lim\limits_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = a + x^2$, тобто $f'(x) = a + x^2$. Отже, $f(x) = ax + \frac{x^3}{3} + b$, причому з рівності $f(0) = 0$ маємо $b = 0$.

Підставляючи функцію $f(x) = ax + \frac{x^3}{3}$ в початкове рівняння, переконуємося, що при цьому a може набувати довільних дійсних значень.

Зауважимо, що у випадку однорідного рівняння Коші задача зведеться до розв'язування диференціального рівняння $f'(x) = a$ з початковою умовою $f(0) = 0$.

§5.11. Знаходження неперервно диференційованих розв'язків методом відокремлення змінних

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь у класі неперервно диференційованих функцій метод диференціювання може успішно поєднуватися з методом відокремлення змінних. Проілюструємо такі можливості на прикладах розв'язування функціонального рівняння Коші та звідних до нього рівнянь.

Приклад 68. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y, з рівності похідних лівих частин отримаємо, що для відповідних похідних правих частин справджується рівність $f'(x)=f'(y)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$, що можливо лише за одночасного виконання умов $f'(x)=a$, $f'(y)=a$. Звідси маємо $f(x)=ax+b$. Підставляючи таку функцію в рівняння Коші, переконуємося, що a може бути довільним дійсним числом, $b=0$.

Зауважимо, що аналогічно в класі неперервно диференційованих функцій можна розв'язати й неоднорідне рівняння Коші $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Для нього з рівностей відповідних похідних в його правій частині $f'(x)+2y=f'(y)+2x$ методом відокремлення змінних приходимо до диференціального рівняння $f'(x)-2x=a$, з якого знаходимо $f(x)=x^2+ax+b$. При цьому також a може бути довільним дійсним числом, $b=0$.

Приклад 69. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні прикладу 2, встановимо, що $f(x)\geq 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$, причому, якщо існує таке y_0, для якого $f(y_0)=0$, то $f(x)\equiv 0$. Тому для знаходження інших розв'язків надалі будемо вважати, що $f(x)>0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Далі диференціюємо обидві частини рівняння за змінними x та y. З рівності обох таких похідних лівих частин отримаємо, що й для частинних похідних правих частин рівняння справджується рівність $f'(x)f(y)=f(x)f'(y)$, яку, відокремлюючи змінні, можна записати у вигляді $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(y)}{f(y)}$.

Тоді з диференціального рівняння $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=a$ знаходимо

$$\ln f(x) = ax + \ln c,\ f(x) = ce^{ax} = cb^x \text{, де } b = e^a.$$

Підставивши таку функцію в задане рівняння, отримуємо $c = 1,\ b -$ довільне додатне число.

Приклад 70. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y),\ x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty).$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y, отримаємо рівності $yf'(xy) = f'(x)$ та $xf'(xy) = f'(y)$. Звідси випливає, що $\dfrac{f'(x)}{y} = \dfrac{f'(y)}{x}$, отже, й $xf'(x) = yf'(y)$ для всіх $x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty)$.

Тоді з диференціального рівняння $xf'(x) = a$ знаходимо

$$f(x) = a\ln x + c = \log_b x + c,\ x \in (0;\infty),$$

де $b = e^{1/a}$ при $a \neq 0$, та $f(x) \equiv c$ при $a = 0$. Підстановкою таких функцій в задане рівняння переконуємося, що в обох випадках $c = 0$, а число $b \in (0;+\infty) \setminus \{1\}$.

Приклад 71. Методом відокремлення змінних знайдіть усі неперервно диференційовані розв'язки рівняння

$$f(xy) = f(x)\,f(y),\ x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty).$$

Розв'язання. Підставивши $x = y = \sqrt{t}$, встановимо, що $f(t) \geq 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, причому, якщо існує таке y_0, для якого $f(y_0) = 0$, то $f(x) \equiv 0$. Тому для знаходження інших розв'язків надалі будемо вважати, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Диференціюючи обидві частини рівняння за змінними x та y, отримаємо рівності $yf'(xy) = f'(x)\,f(y)$ та $xf'(xy) = f(x)\,f'(y)$. Звідси маємо, що $\dfrac{f'(x)\,f(y)}{y} = \dfrac{f'(y)\,f(x)}{x}$ для всіх $x > 0,\ y > 0$.

Тому й $\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \dfrac{yf'(y)}{f(y)}$ для всіх $x > 0,\ y > 0$, і з диференціального рівняння $\dfrac{xf'(x)}{f(x)} = a$ знаходимо $\ln f(x) = a\ln x + \ln c,\ c > 0,$ тобто $f(x) = cx^a$. Підстановкою в задане рівняння переконуємося, що $c = 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Як і слід було очікувати, в прикладах 68 – 71 ми отримали ті ж розв'язки, які вже були знайдені нами в класах неперервних функцій.

§5.12. Рівняння та системи функціональних рівнянь з кількома шуканими функціями

Метод відокремлення змінних може бути корисним і при розв'язуванні деяких функціональних рівнянь з кількома невідомими функціями. Його застосування дає змогу звести такі рівняння до систем рівнянь.

Приклад 72. Знайдіть всі пари функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) + g(x+y) - g(x-y) = 4xy + 2\sqrt[3]{y-x}\,.$$

Розв'язання. Покладемо $x + y = t$, $x - y = z$. Тоді $2x = t + z$, $2y = t - z$. Отже, задане рівняння можна записати у вигляді

$$f(t) + f(z) + g(t) - g(z) = t^2 - z^2 - 2\sqrt[3]{z}\ ,.$$

Звідси для всіх $t \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}$ отримаємо рівність

$$f(t) + g(t) - t^2 = g(z) - f(z) - z^2 - 2\sqrt[3]{z} = c\,.$$

Покладаючи в ній $z = t$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} f(t) + g(t) - t^2 = c, \\ g(t) - f(t) - t^2 - 2\sqrt[3]{t} = c, \end{cases}$$

з якої знаходимо $f(t) = -\sqrt[3]{t}$, $g(t) = t^2 + \sqrt[3]{t} + c$.

Перевірка показує, що функції $f(x)=-\sqrt[3]{x}$ та $g(x)=x^2+\sqrt[3]{x}+c$ задовольняють задане рівняння при кожному $c\in\mathbb{R}$.

Наведемо також приклад на дослідження властивостей функцій, заданих системою рівнянь.

<u>Приклад 73.</u> Функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ та $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x), \\ g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y). \end{cases}$$

Знайдіть усі можливі значення $f(0)$ та $g(0)$.

Розв'язання. Підставивши в рівняння системи $x=y=0$, отримаємо систему рівностей

$$\begin{cases} f(0)=2f(0)g(0), \\ g(0)=g^2(0)-f^2(0). \end{cases}$$

Зауважимо, що $g(0)\neq\dfrac{1}{2}$, бо інакше з другої рівності ми отримали би $f^2(0)=-\dfrac{1}{4}$. Тому з першої рівності маємо $f(0)=0$. При цьому друга рівність набуває вигляду $g(0)=g^2(0)$. Отже, $g(0)=0$ або $g(0)=1$.

Якщо $g(0)=0$, то з рівнянь початкової системи при $y=0$ отримуємо $f(x)\equiv 0$ та $g(x)\equiv 0$.

Якщо ж $g(0)=1$, то, разом з $f(0)=0$, таке значення можливе, наприклад, для функцій $f(x)=\sin\omega x$ та $g(x)=\cos\omega x$, $\omega\in\mathbb{R}$.

Продовжимо досліджувати властивості розв'язків заданої системи рівнянь. Враховуючи основну тригонометричну тотожність, накладемо на функції f та g додаткову умову:

$$f^2(x)+g^2(x)\equiv 1.$$

За її виконання з рівнянь системи при $y=-x$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ отримаємо таку систему рівностей:

$$\begin{cases} 0=f(x)g(-x)+f(-x)g(x), \\ 1=g(x)g(-x)-f(x)f(-x). \end{cases}$$

Помножимо першу з них на $f(x)$, а другу – на $g(x)$. Додавши отримані при цьому рівності, будемо мати $g(x)=g(-x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Відповідно з першої рівності для всіх $x\in\mathbb{R}$ отримуємо $f(-x)=-f(x)$. Таким чином, всі такі функції f є непарними, а функції g – парними.

Враховуючи це, знайдемо

$$g(x-y)=g(x)g(-y)-f(x)f(-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y).$$

Тому для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ будемо мати

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)g(y).$$

Повертаючись до означення тригонометричного косинуса, про є йшла мова в параграфі 3.3, накладемо на функцію g ще такі три додаткові умови:

1) $g(x)$ неперервна на інтервалі $(-\infty;+\infty)$;

2) $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$;

3) $g(x)>0$, якщо $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

За їх виконання однозначно отримуємо $g(x)=\cos x$.

Нехай функція f також є неперервною на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ і $f(x)>0$, якщо $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Тоді з рівності $f^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+g^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ отримуємо $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Отже, для всіх $x\in\mathbb{R}$

$$g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)g(-x)-f(-x)f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(x).$$

Звідси, враховуючи означення тригонометричного синуса, отримуємо $f(x) = \sin x$.

Підсумовуючи сказане, відзначимо, що система рівнянь з прикладу 73 разом з накладеними вище додатковими умовами також може бути використана для функціонального означення тригонометричних синуса та косинуса.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що отримані за накладених умов функції $f(x)$ та $g(x)$ є періодичними з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$, не використовуючи при цьому відповідну властивість конкретних функцій $\sin x$ та $\cos x$.

§5.13. Приклади функціональних співвідношень, заданих нерівностями

Чимало змістовних задач можна отримати й розглядаючи функціональні співвідношення, пов'язані з нерівностями.

Приклад 74. Знайдіть усі ін'єктивні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють нерівність $f\left(x^2\right) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Таких ін'єктивних функцій не існує. Для доведення підставимо в задану нерівність $x = 0$ та $x = 1$. Отримані при цьому нерівності $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$ та $f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}$ запишемо у вигляді $\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ та $\left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$ відповідно. Отже, $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$, що суперечить умові ін'єктивності.

Приклад 75. Функція $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ для всіх $x\in[0;1]$ та $y\in[0;1]$ задовольняє нерівність $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y)$. Відомо, що $f(0)=f(1)=0$. Доведіть, що рівняння $f(x)=0$ має нескінченну кількість коренів.

Розв'язання. Підставивши в задану нерівність $x=0$, $y=1$, отримаємо $f\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$. А з підстановки $x=y=\frac{1}{2}$ будемо мати нерівність $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge 0$. Тому $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Міркуючи аналогічно, нескладно довести, що $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

<u>Приклад 76.</u> Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умови $f(x)\le x$ і $f(x+y)\le f(x)+f(y)$.

Розв'язання. Підставивши в задані нерівності $x=y=0$, матимемо $f(0)\le 0$ та $f(0)\le 2f(0)$. Звідси отримуємо $f(0)=0$. Отже, підставивши у другу нерівність $y=-x$, для всіх $x\in R$ будемо мати: $f(x)+f(-x)\ge f(0)=0$. Тому, з врахуванням першої нерівності, $f(x)\ge -f(-x)\ge -(-x)=x$ для всіх $x\in R$. З іншого боку, за першою нерівністю $f(x)\le x$. Отже, $f(x)\equiv x$.

<u>Приклад 77.</u> Функція $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ така, що $\frac{f(x)}{x}$ є монотонно неспадною. Для довільних додатних x та y доведіть нерівність $f(x)+f(y)\le f(x+y)$.

Розв'язання. З умови задачі для довільних додатних x та y отримуємо нерівності $\frac{f(x)}{x}\le\frac{f(x+y)}{x+y}$ та $\frac{f(y)}{y}\le\frac{f(x+y)}{x+y}$. Запишемо їх у вигляді $f(x)\le\frac{xf(x+y)}{x+y}$ та $f(y)\le\frac{yf(x+y)}{x+y}$. То ж залишається тільки додати дві останні нерівності,

Розділ VI. Лінійні різницеві функціональні рівняння

§6.1. Рекурентні співвідношення та формули Біне

Визначимо послідовність дійсних чисел a_n, $n \ge 0$, рівністю

$$a_{n+k} = \mu_1(n)a_{n+k-1} + \mu_2(n)a_{n+k-2} + ... + \mu_k(n)a_n + \mu(n),\ k \ge 1,$$

де $\mu_i(n), 1 \le i \le k,$ та $\mu(n)$ – деякі задані функції, причому $\mu_k(n)$ не є тотожним нулем. Цю рівність називають *лінійним рекурентним співвідношенням порядку* k.

Всі елементи такої послідовності визначаються однозначно, якщо відомі перші k її елементів: $a_0, a_1, ... , a_{k-1}$.

Наведемо приклади рекурентних співвідношень першого порядку:

1). Рівність $a_{n+1} = a_n + d, n \ge 1,$ визначає всі можливі арифметичні прогресії дійсних чисел з різницею d. Зокрема, при $d = a_1 = 1,$ з неї отримуємо послідовність натуральних чисел.

2). Рівність $a_{n+1} = qa_n, n \ge 1,$ задає геометричні прогресії дійсних чисел зі знаменником q. При $q = a_1 = 2$ матимемо послідовність натуральних степенів двійки.

3). Рівність $a_{n+1} = a_n + 2n + 1, n \ge 1,$ при $a_1 = 1$ визначає послідовність квадратів натуральних чисел.

Детальніше зупинимося на рекурентному співвідношенні другого порядку $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \ge 0$.

Якщо $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, то елементи заданої цією рівністю послідовності називають *числами Фібоначчі*. Десять перших таких чисел мають вигляд: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Доведемо методом математичної індукції, що для всіх $n \ge 0$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad \text{(формула Біне).}$$

Для $n=0$ та $n=1$ така рівність правильна. Припустимо, що вона справджується для $n=k$ та $n=k+1$. Тоді для $n=k+2$ отримаємо

$$a_{k+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right).$$

Звідси випливає справедливість формули Біне для всіх $n\geq 0$.

Нехай тепер $a_0=2$, $a_1=1$. Елементи отриманої при цьому послідовності називають *числами Люка*. Десять перших чисел Люка мають вигляд: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76.

Пропонуємо читачам самостійно довести формулу Біне для таких чисел:

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

Може скластися враження, що такі, зовсім неочевидні, формули придумані штучно. Але це не так. Підставимо $a_n=\lambda^n, \lambda\neq 0,$ у рівність $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n\geq 0$. В результаті отримаємо $\lambda^{n+2}=\lambda^{n+1}+\lambda^n$ і після ділення обох частин на $\lambda^n\neq 0$ прийдемо до квадратного рівняння $\lambda^2=\lambda+1$, коренями якого є $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Далі, шукаючи a_n у вигляді $a_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$, залишається тільки підібрати коефіцієнти C_1 та C_2 так, щоб a_0 та a_1 дорівнювали заданим значенням. Детальніше такий метод розглянемо в наступних параграфах.

§6.2. Загальні поняття теорії різницевих рівнянь

Позначаючи $a_n = f(n)$, лінійне рекурентне співвідношення можна записати у вигляді функціонального рівняння

$$f(n+k) = \mu_1(n) f(n+k-1) +$$
$$+\mu_2(n) f(n+k-2) + \ldots + \mu_k(n) f(n) + \mu(n)$$

для функції $f : \mathbb{N} \bigcup \{0\} \to \mathbb{R}$. Тому розглянемо детальніше властивості таких рівнянь.

Різницевим рівнянням називають рівняння вигляду

$$F\big(x, f(x), f(x+h), f(x+2h), \ldots, f(x+kh)\big) = 0,$$

де F – деяка задана функція, крок $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Зрозуміло, що різницеві рівняння є частковими випадками функціональних рівнянь.

Зазначимо, що крок аргумента h можна вважати рівним одиниці, бо заміною x на $x+h$ приходимо до різницевого рівняння саме з таким кроком для функції $g(x) = f(hx)$. Тому надалі будемо покладати $h = 1$.

Окремим випадком таких рівнянь є *лінійне різницеве рівняння*

$$a_0(x) f(x+k) + a_1(x) f(x+k-1) + \ldots +$$
$$+a_{k-1}(x) f(x+1) + a_k(x) f(x) = Q(x).$$

Тут $a_i(x), i = \overline{0;k},$ та $Q(x)$ – деякі відомі функції. Будемо також вважати, що функції $a_0(x)$ та $a_k(x)$ не дорівнюють тотожно нулю. Тоді про таке рівняння кажуть, що воно має *порядок* k.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то лінійне різницеве рівняння називають *однорідним*, в іншому разі – *неоднорідним*.

Якщо всі $a_i(x), i = \overline{0;k},$ є сталими, то отримуємо *лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами*.

Позначимо ліву частину лінійного різницевого рівняння через $L\left[f(x)\right]$ і дослідимо деякі властивості розв'язків однорідних різницевих рівнянь $L\left[f(x)\right]=0$.

Насамперед зауважимо, що у випадку, коли $\sum_{i=0}^{k} a_i(x)\equiv 0$, то розв'язками таких рівнянь будуть довільні періодичні функції з періодом $T=1$, що не виключає також існування інших можливих розв'язків.

З лінійності оператора L випливають наступні властивості:

1). Якщо функція $f(x)$ є розв'язком рівняння $L\left[f(x)\right]=0$, то функція $Cf(x)$ також його розв'язком цього рівняння при довільному (дійсному чи комплексному) значенні сталої C. Справді, $L\left[Cf(x)\right]=CL\left[f(x)\right]=C\cdot 0\equiv 0$.

2). Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є розв'язками рівняння $L\left[f(x)\right]=0$, то функція $f(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)$ також є його розв'язком при довільних значеннях сталих C_1 та C_2.

Справді, $L\left[f(x)\right]=C_1 L\left[f_1(x)\right]+C_2 L\left[f_2(x)\right]=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0$.

Читач легко узагальнить цю властивість на випадок лінійної комбінації довільного числа розв'язків.

3). Якщо комплекснозначна функція $f(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком рівняння $L\left[f(x)\right]=0$, то її дійсна та уявна частини – функції $u(x)$ та $v(x)$ – також задовольняють це рівняння.

Справді, за попередньою властивістю отримуємо тотожність

$$L\left[u(x)+iv(x)\right]=L\left[u(x)\right]+iL\left[v(x)\right]\equiv 0.$$

Тому й $L\left[u(x)\right]\equiv 0$ та $L\left[v(x)\right]\equiv 0$, що й завершує доведення.

Доведемо також важливу надалі властивість розв'язків лінійного неоднорідного різницевого рівняння $L\left[f(x)\right]=Q(x)$:

якщо функція $f_0(x)$ є розв'язком рівняння $L\left[f(x)\right]=0$, а функція $\varphi(x)$ – довільний розв'язок рівняння $L\left[f(x)\right]=Q(x)$, то функція $f(x)=f_0(x)+\varphi(x)$ – також розв'язок рівняння $L\left[f(x)\right]=Q(x)$.

Справді, $L\left[f(x)\right]=L\left[f_0(x)\right]+L\left[\varphi(x)\right]=0+Q(x)\equiv Q(x)$.

Надалі ми, як правило, будемо вважати, що аргументи функції f є цілими числами. Але в окремих випадках знайдені при цьому розв'язки можуть задовольняти задане різницеве рівняння при кожному $x\in\mathbb{R}$.

§6.3. Лінійні однорідні різницеві рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$a_0 f(x+1)+a_1 f(x)=0,\ x\in\mathbb{Z},\ a_0\neq 0,\ a_1\neq 0.$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді $f_1(x)=\lambda^x,\ \lambda\neq 0$. Підставивши цю функцію в рівняння, отримаємо рівність $a_0\lambda^{x+1}+a_1\lambda^x=0$. Оскільки $\lambda^x\neq 0$, то для знаходження числа λ маємо рівняння $a_0\lambda+a_1=0$, яке називають *характеристичним рівнянням*. З нього отримуємо $\lambda=-\dfrac{a_1}{a_0}$, отже, $f_1(x)=\left(-\dfrac{a_1}{a_0}\right)^x$.

Зрозуміло, що функція $f(x)=C\left(-\dfrac{a_1}{a_0}\right)^x$ також задовольняє задане рівняння при кожному $C\in\mathbb{R}$. Її називають *загальним розв'язком* лінійного однорідного різницевого рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

У випадку $-\dfrac{a_1}{a_0}>0$ така функція буде розв'язком рівняння не лише на множині цілих, а й на множині всіх дійсних чисел. А у разі $-\frac{a_1}{a_0}=1$ розв'язками такого рівняння будуть всі періодичні функції з періодом $T=1$, в тому числі і функції $f\left(x\right)=C\cdot 1^x=C$.

Для знаходження часткових розв'язків, як правило, задають додаткову умову $f\left(x_0\right)=y_0$.

Тоді з рівності $C\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^{x_0}=y_0$ знаходимо $C=y_0\cdot\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^{-x_0}$.

<u>Приклад 78.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняють рівняння $f\left(x+1\right)-2f\left(x\right)=0$ та $f\left(1\right)=4$.

Розв'язання. З характеристичного рівняння $\lambda-2=0$ знаходимо його корінь $\lambda=2>0$. Тому загальним розв'язком заданого рівняння є функція $f\left(x\right)=C\cdot 2^x$, $x\in\mathbb{R}$. Враховуючи умову $f\left(1\right)=4$, отримуємо рівність $C\cdot 2^1=4$, звідки маємо $C=2$. Тому остаточно отримуємо $f\left(x\right)=2^{x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

§6.4. Лінійні однорідні різницеві рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні різницеві рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають такий загальний вигляд

$$a_0f\left(x+2\right)+a_1f\left(x+1\right)+a_2f\left(x\right)=0,\ a_0\neq 0,\ a_2\neq 0.$$

Підставляючи тут λ^x, $\lambda\neq 0$, замість $f\left(x\right)$, отримаємо таке *характеристичне рівняння* $a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$. Проаналізуємо його корені в залежності від дискримінанта.

1). $D=a_1^2-4a_0a_2>0$. Тоді характеристичне рівняння має два різні дійсні корені $\lambda_1=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_0}$ та $\lambda_2=\frac{-a_1-\sqrt{D}}{2a_0}$. Цим кореням відповідають лінійно незалежні розв'язки $f_1\left(x\right)=\lambda_1^x$ та

$f_2(x)=\lambda_2^x$. Тому *загальним розв'язком* такого різницевого рівняння буде функція $f(x)=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x$, де C_1 та C_2 – довільні сталі, $x\in\mathbb{Z}$.

Якщо при цьому обидва корені характеристичного рівняння додатні, то ця функція задовольнятиме рівняння для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Якщо ж один з коренів характеристичного рівняння дорівнює одиниці, то розв'язками заданого різницевого рівняння будуть також всі функції вигляду $f(x)=C_1\lambda_1^x+C_2\lambda_2^x+g(x)$, де $g(x)$ – довільна періодична функція з періодом $T=1$.

2). $D=a_1^2-4a_0a_2=0$. Тоді характеристичне рівняння має два однакові дійсні корені $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{-a_1}{2a_0}$. При цьому функція $f_1(x)=\left(-\dfrac{a_1}{2a_0}\right)^x$ є розв'язком заданого лінійного однорідного різницевого рівняння другого порядку.

Доведемо, що й лінійно незалежна з нею функція $f_1(x)=x\cdot\left(-\dfrac{a_1}{2a_0}\right)^x$ також є розв'язком. За умови $a_1^2-4a_0a_2=0$ це безпосередньо випливає з тотожності

$$a_0(x+2)\cdot\left(-\frac{a_1}{2a_0}\right)^{x+2}+a_1(x+1)\cdot\left(-\frac{a_1}{2a_0}\right)^{x+1}+a_2x\cdot\left(-\frac{a_1}{2a_0}\right)^x\equiv 0$$

чи рівносильної до неї тотожності

$$a_0(x+2)\cdot\left(-\frac{a_1}{2a_0}\right)^2+a_1(x+1)\cdot\left(-\frac{a_1}{2a_0}\right)+a_2x\equiv 0.$$

Отже, в даному випадку загальний розв'язок має вигляд $f(x)=(C_1+C_2x)\left(-\dfrac{a_1}{2a_0}\right)^x$, де C_1 та C_2 – довільні сталі, $x\in\mathbb{Z}$.

Якщо при цьому $-\dfrac{a_1}{2a_0}>0$, то така функція задовольнятиме задане рівняння для всіх $x\in\mathbb{R}$. А якщо $-\dfrac{a_1}{2a_0}=1$, то розв'язками цього різницевого рівняння будуть також всі функції вигляду $f\left(x\right)=C_1+C_2x+g\left(x\right)$, $x\in\mathbb{R}$, де $g\left(x\right)-$ довільна періодична функція з періодом $T=1$.

3). $D=a_1^2-4a_0a_2<0$. Тоді характеристичне рівняння має два різні комплексні корені $\lambda_1=\dfrac{-a_1+i\sqrt{-D}}{2a_0}$ та $\lambda_2=\dfrac{-a_1-i\sqrt{-D}}{2a_0}$.

Оскільки для них $\rho=\left|\lambda_1\right|=\left|\lambda_2\right|=\sqrt{\dfrac{a_1^2+\left(4a_0a_2-a_1^2\right)}{4a_0^2}}=\sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}$, то в тригонометричній формі ці корені мають вигляд:

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right),\ \lambda_2=\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\left(\cos\alpha-i\sin\alpha\right),$$

де $\cos\alpha=-\dfrac{a_1}{2\rho a_0}$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{-D}}{2\rho a_0}$, $\alpha\in\left(0;2\pi\right)$.

Враховуючи, що $x\in\mathbb{Z}$, за формулою Муавра отримаємо:

$$\lambda_1^x=\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\alpha x\right)+i\sin\left(\alpha x\right)\right),\ \lambda_2^x=\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\alpha x\right)-i\sin\left(\alpha x\right)\right).$$

Такій парі комплекснозначних розв'язків різницевого рівняння відповідають два його дійснозначні лінійно незалежні розв'язки $f_1\left(x\right)=\left(\dfrac{a_2}{a_0}\right)^{\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha x\right)$ та $f_2\left(x\right)=\left(\dfrac{a_2}{a_0}\right)^{\frac{x}{2}}\sin\left(\alpha x\right)$. Тому загальний розв'язок цього рівняння матиме вигляд

$$f\left(x\right)=\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\left(\alpha x\right)+C_2\sin\left(\alpha x\right)\right),$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі, $x\in\mathbb{Z}$. Підійдуть також $x\in\mathbb{R}$.

Зауважимо, що в кожному з цих випадків для знаходження за загальними розв'язками часткових розв'язків необхідно задати значення шуканої функції в довільних двох різних точках її області визначення.

Зазвичай ці значення задають в точках x_0 та x_0+1. Такі додаткові умови називають *початковими умовами*.

Приклад 79. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, для яких $f(0)=1$, $f(1)=2$, і які для всіх $x\in\mathbb{Z}$ задовольняють рівняння:

а). $f(x+2)+3f(x+1)+2f(x)=0$;

б). $f(x+2)+4f(x+1)+4f(x)=0$;

в). $f(x+2)+4f(x+1)+8f(x)=0$.

Розв'язання. а). З характеристичного рівняння $\lambda^2+3\lambda+2=0$ знаходимо два різні дійсні корені $\lambda_1=-1$ та $\lambda_2=-2$. Тому функція $f(x)=C_1(-1)^x+C_2(-2)^x$ є загальним розв'язком цього різницевого рівняння. З початкових умов для знаходження сталих C_1 та C_2 отримуємо систему рівнянь $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\-C_1-2C_2=2,\end{cases}$ з якої маємо $C_1=4$, $C_2=-3$. Отже, остаточно, $f(x)=4\cdot(-1)^x-3\cdot(-2)^x$.

б). Характеристичне рівняння $\lambda^2+4\lambda+4=0$ має два однакові дійсні корені $\lambda_1=\lambda_2=-2$. Тому загальним розв'язком різницевого рівняння є функція $f(x)=(C_1+C_2x)(-2)^x$. Для сталих C_1 та C_2 з початкових умов отримуємо систему рівнянь $\begin{cases}C_1=1,\\(C_1+C_2)(-2)=2,\end{cases}$ з якої знаходимо $C_1=1$, $C_2=-2$. Отже, шуканою є функція $f(x)=(1-2x)(-2)^x$.

в). З характеристичного рівняння $\lambda^2+4\lambda+8=0$ знаходимо два комплексні корені $\lambda_1=-2+2i$ та $\lambda_2=-2-2i$, для яких

$\rho=|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{8}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тому $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, і загальним розв'язком такого різницевого рівняння є функція $f(x)=8^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{3\pi x}{4}+C_2\sin\frac{3\pi x}{4}\right)$. Враховуючи початкові умови, для знаходження сталих C_1 та C_2 маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1=1, \\ \sqrt{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}C_1+\frac{1}{\sqrt{2}}C_2\right)=2. \end{cases}$$

З неї знаходимо $C_1=1$, $C_2=2$. Отже, шуканим розв'язком заданого рівняння буде функція $f(x)=8^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{3\pi x}{4}+2\sin\frac{3\pi x}{4}\right)$.

§6.5. Лінійні однорідні різницеві рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами

Метод зведення до розв'язування характеристичних рівнянь природним чином переноситься на розв'язування лінійних однорідних різницевих рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$a_0 f(x+k)+a_1 f(x+k-1)+\ldots+a_{k-1}f(x+1)+a_k f(x)=0.$$

Розв'язавши відповідне йому характеристичне рівняння

$$a_0\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_{k-1}\lambda+a_k=0,$$

знайдемо k його коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, які можуть виявитися як дійсними, так і комплексними, всі бути різними, чи деякі з них повторюватися.

Поставивши у відповідність цим кореням систему з k лінійно незалежних розв'язків $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ однорідного різницевого рівняння, отримаємо загальний розв'язок

$$f(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)+\ldots+C_k f_k(x),$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – довільні сталі, $x\in\mathbb{Z}$.

Якщо всі корені характеристичного рівняння будуть дійсними додатними числами, то такий розв'язок задовольнятиме рівняння для всіх $x \in \mathbb{R}$. Якщо при цьому серед коренів характеристичного рівняння буде $\lambda = 1$, то розв'язками заданого різницевого рівняння будуть також всі функції вигляду

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) + g(x),$$

де $g(x)$ – довільна періодична функція з періодом $T = 1$.

Перед тим, як переходити до реалізації такого підходу на практиці, нагадаємо, що система функцій $f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_k(x)$ вважається лінійно незалежною, якщо для виконання тотожності $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) \equiv 0$ необхідно і достатньо рівності нулю всіх коефіцієнтів $C_1, C_2, \ldots, C_k$, про що вже йшла мова в параграфі 5.2. Звідти, зокрема, випливає лінійна незалежність системи функцій $1, x, \ldots, x^{k-1}, k \geq 2$.

Для $k = 2$ лінійна незалежність функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ рівносильна тому, що вони не є пропорційними, чим ми неявно скористалися в попередньому параграфі для пар функцій λ_1^x та λ_2^x при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, λ_1^x та $x\lambda_1^x$, $\rho^x \cos(\alpha x)$ та $\rho^x \sin(\alpha x)$ при $\alpha \in (0; 2\pi)$.

Наведемо без доведення *критерій лінійної незалежності*: для того, щоб система $f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_k(x)$ розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння порядку $k \geq 2$ була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) & \ldots & f_k(x+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x+k-1) & f_2(x+k-1) & \ldots & f_k(x+k-1) \end{vmatrix}$$

не дорівнював нулю.

Застосуємо цей критерій до системи функцій $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \ldots, \lambda_k^x$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – попарно різні числа, дійсні чи комплексні. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \dots & \lambda_2^x \\ \lambda_1^{x+1} & \lambda_2^{x+1} & \dots & \lambda_k^{x+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{x+k-1} & \lambda_2^{x+k-1} & \dots & \lambda_k^{x+k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} \cdot \lambda_1^x \lambda_2^x \dots \lambda_k^x .$$

Звідси за властивостями визначника Вандермонда отримуємо $\Delta = \prod\limits_{1 \le i < j \le k} \left(\lambda_j - \lambda_i \right) \cdot \lambda_1^x \lambda_2^x \dots \lambda_k^x \ne 0$. Тому наведена система функцій є лінійно незалежною.

Зазначимо також, що при множенні кожної функції лінійно незалежної системи на довільну відмінну від тотожного нуля функцію знову отримаємо лінійно незалежну систему функцій.

Перейдемо тепер до дослідження коренів характеристичного рівняння. Можливі такі чотири випадки:

1). Всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ є дійсними і різними. Тоді, внаслідок доведеного вище, відповідну лінійно незалежну систему розв’язків утворюють функції $\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_k^x$.

2). Всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ є дійсними, але серед них є кратні корені. Припустимо, що корінь $\lambda \ne 0$ має кратність m. Такому кореню відповідає лінійно незалежна система $\lambda^x, x\lambda^x, \dots, x^{m-1}\lambda^x$ розв’язків. Оскільки при цьому сума всіх кратностей коренів характеристичного рівняння дорівнює k, то, перебравши всі його корені знову отримаємо лінійно незалежну систему k розв’язків однорідного різницевого рівняння.

3). Нехай тепер характеристичне рівняння має комплексний корінь $\lambda = a + bi$ кратності 1. Оскільки всі коефіцієнти такого рівняння є дійсними, то таку ж кратність матиме і спряжений до нього корінь $\overline{\lambda} = a - bi$. Запишемо їх у тригонометричній формі:

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos\alpha + i\sin\alpha \right), \ \overline{\lambda} = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos\alpha - i\sin\alpha \right),$$

де $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\alpha \in \left(0; 2\pi \right)$.

Тоді цій парі коренів відповідатимуть два лінійно незалежні розв'язки: $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha x\right)$ та $\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\sin\left(\alpha x\right)$. Отже, за наявності простих комплексних коренів загальна кількість лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння порядку k також дорівнюватиме k.

4). І, нарешті, нехай характеристичне рівняння має комплексний корінь $\lambda = a+bi$ кратності m. Тоді таку ж кратність матиме і спряжений до нього корінь $\overline{\lambda} = a-bi$. Їм відповідатимуть такі $2m$ лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння:

$$\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha x\right),\ x\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha x\right),\ \ldots,\ x^{m-1}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\cos\left(\alpha x\right)$$

та

$$\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\sin\left(\alpha x\right),\ x\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\sin\left(\alpha x\right),\ \ldots,\ x^{m-1}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{x}{2}}\sin\left(\alpha x\right).$$

Підсумовуючи сказане, переконуємося, що кожне лінійне однорідне різницеве рівняння порядку k зі сталими коефіцієнтами має k лінійно незалежних розв'язків, які можна знайти, розв'язавши відповідне характеристичне рівняння. Їх сукупність називають *фундаментальною системою розв'язків*.

Приклад 80. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$f\left(x+5\right)+f\left(x+4\right)-f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=0,\ x\in\mathbb{Z}.$$

Розв'язання. Розклавши ліву частину характеристичного рівняння $\lambda^5+\lambda^4-\lambda-1=0$ на множники, запишемо його у вигляді $\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda^2+1\right)=0$. Звідси знаходимо: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=-1,\ \lambda_4=i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ \lambda_4=-i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

Тому загальний розв'язок заданого різницевого рівняння

$$f\left(x\right)=C_1+\left(C_2+C_3x\right)\left(-1\right)^x+C_4\cos\frac{\pi x}{2}+C_5\sin\frac{\pi x}{2},\ x\in\mathbb{Z}.$$

Приклад 81. Знайдіть розв'язок рівняння

$$f(x+4)-5f(x+3)+6f(x+2)=0,\ x\in\mathbb{Z},$$

який задовольняє умови: $f(2)=1,\ f(3)=5.$

Розв'язання. З першого погляду на рівняння може скластися хибне враження, що воно є різницевим рівнянням четвертого порядку. Але, оскільки різниця між найбільшим та найменшим значеннями аргументів функції f, які явно фігурують у рівнянні, дорівнює 2, то й порядок цього рівняння також дорівнює двом.

Нехай $g(x)=f(x+2)$. Тоді для функції g отримаємо $g(x+2)-5g(x+1)+6g(x)=0$. Знайшовши з характеристичного рівняння $\lambda^2-5\lambda+6=0$ його корені $\lambda_1=2$ та $\lambda_2=3$, будемо мати загальний розв'язок $g(x)=C_1\cdot 2^x+C_2\cdot 3^x,\ x\in\mathbb{Z}$. Повертаючись до функції f, запишемо загальний розв'язок заданого рівняння $f(x)=C_1\cdot 2^{x-2}+C_2\cdot 3^{x-2}$.

З врахуванням початкових умов для визначення сталих C_1 та C_2 отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 2C_1+3C_2=5, \end{cases}$ з якої знаходимо $C_1=-2,\ C_2=3$. Отже, шуканою функцією є $f(x)=3^{x-1}-2^{x-1}$.

Приклад 82. За відомими коренями характеристичного рівняння $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\ \lambda_4=\lambda_5=\sqrt{3}+i,\ \lambda_6=\lambda_7=\sqrt{3}-i$ знайдіть загальний розв'язок відповідного їм лінійного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язання. Враховуючи, що в тригонометричній формі

$$\lambda_4=\lambda_5=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ \lambda_6=\lambda_7=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

отримуємо такий загальний розв'язок різницевого рівняння:

$$f(x)=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+(C_4+C_5x)\cos\frac{\pi x}{6}+(C_6+C_7x)\sin\frac{\pi x}{6}\right)\cdot 2^x.$$

§6.6. Часткові розв'язки лінійних неоднорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо тепер лінійне неоднорідне різницеве рівняння

$$a_0(x)f(x+k)+a_1(x)f(x+k-1)+\ldots+$$
$$+a_{k-1}(x)f(x+1)+a_k(x)f(x)=Q(x),\ x\in\mathbb{Z}.$$

Позначаючи його ліву частину через $L[f(x)]$, запишемо це рівняння у вигляді $L[f(x)]=Q(x)$ і припустимо, що функція $\varphi(x)$ задовольняє його при кожному $x\in\mathbb{Z}$.

Будемо шукати $f(x)$ у вигляді суми $f(x)=f_0(x)+\varphi(x)$. З різницевого рівняння та рівності

$$L[f(x)]=L[f_0(x)]+L[\varphi(x)]=L[f_0(x)]+Q(x)$$

отримуємо, що $L[f_0(x)]=0$.

Звідси випливає, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного різницевого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та довільного часткового розв'язку неоднорідного рівняння.

В окремих випадках такий частковий розв'язок може бути знайдений методом невизначених коефіцієнтів. Наведемо без доведення одне загальне правило знаходження таких розв'язків для лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Нехай

$$Q(x)=\alpha^x\left[R_1(x)\cos\beta x+R_2(x)\sin\beta x\right],\ \alpha\neq 0,\ \beta\in[0;2\pi),$$

де $R_1(x)$ та $R_2(x)$ – деякі многочлени.

Якщо $\lambda=\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок шукають у вигляді

$$\varphi(x)=\alpha^x\left[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x\right],$$

де обидві функції $P_1(x)$ та $P_2(x)$ є многочлени степеня, який дорівнює більшому зі степенів многочленів $R_1(x)$ та $R_2(x)$, з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо ж $\lambda=\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$ є коренем характеристичного рівняння кратності m, то покладають

$$\varphi(x)=x^m\alpha^x\left[P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x\right].$$

Підставивши функцію $\varphi(x)$ вказаного вигляду в задане неоднорідне різницеве рівняння, після скорочення на α^x та виконаних спрощень за формулами зведення, прирівняємо коефіцієнти при однакових функціях вигляду $x^k\cos\beta x$ та $x^k\sin\beta x$. З отриманої при цьому системи рівнянь знайдемо всі коефіцієнти многочленів $P_1(x)$ та $P_2(x)$.

У випадку $\beta=0$, тобто $Q(x)=\alpha^x R(x)$, відповідні часткові розв'язки неоднорідних різницевих рівнянь матимуть вигляд $\varphi(x)=P(x)\alpha^x$, якщо $\lambda=\alpha$ не є коренем характеристичного рівняння, та $\varphi(x)=x^m P(x)\alpha^x$, якщо корінь $\lambda=\alpha$ має кратність m. При цьому степінь многочлена $P(x)$ з невизначеними коефіцієнтами дорівнює степеню многочлена $R(x)$.

Зазначимо, що у випадку $Q(x)=Q_1(x)+Q_2(x)+\ldots+Q_n(x)$, де кожна з функцій $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ має вказаний вище вигляд, тільки для різних пар (α,β), частковий розв'язок неоднорідного рівняння може бути знайдений як сума $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_n(x)$, доданки якої дорівнюють частковим розв'язкам рівнянь $L[f(x)]=Q_k(x)$, $1\le k\le n$.

<u>Приклад 83.</u> За відомими коренями характеристичного рівняння $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, $\lambda_4=\lambda_5=\sqrt{3}+i$, $\lambda_6=\lambda_7=\sqrt{3}-i$ вкажіть загальний вигляд часткового розв'язку лінійного неоднорідного різницевого рівняння $L[f(x)]=Q(x)$, якщо

$$Q(x)=(x+1)\cdot 2^x-3^x+x\cos\frac{\pi x}{2}-2^x\cdot\sin\frac{\pi x}{6}.$$

Розв'язання. Числа $\lambda = 3$ та $\lambda = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ не є коренями характеристичного рівняння, $\lambda = 2$ є його коренем кратності 3, а $\lambda = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ має кратність 2. Тому частковий розв'язок заданого неоднорідного рівняння має такий загальний вигляд:

$$\varphi(x) = (A_1 + A_2x)x^3\cdot 2^x + A_3\cdot 3^x + (A_4 + A_5x)\cos\frac{\pi x}{2} +$$
$$+(A_6 + A_7x)\sin\frac{\pi x}{2} + x^2\left(A_8\cos\frac{\pi x}{6} + A_9\sin\frac{\pi x}{6}\right)\cdot 2^x.$$

<u>Приклад 84.</u> Знайдіть загальний розв'язок рівняння
$$f(x+2) + 2f(x+1) - 3f(x) = 16x + (3x+1)\cdot 2^x + 3^x\cdot\cos\pi x,\ x\in\mathbb{Z}.$$

Розв'язання. З характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ знаходимо його корені $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = -3$. Тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція
$$f_0(x) = C_1 + C_2\cdot(-3)^x.$$

Для знаходження часткових розв'язків неоднорідного рівняння розглянемо три функції: $Q_1(x) = 16x$, $Q_2(x) = (3x+1)\cdot 2^x$ та $Q_3(x) = 3^x\cdot\cos\pi x$.

Оскільки $\lambda = 1$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1, то для першої з них частковий розв'язок шукаємо у вигляді $\varphi_1(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$. При цьому для знаходження коефіцієнтів a та b отримуємо тотожність
$$a(x+2)^2 + b(x+2) + 2\left(a(x+1)^2 + b(x+1)\right) - 3\left(ax^2 + bx\right) \equiv 16x,$$
яка після спрощень набуває вигляду $8ax + 6a + 4b \equiv 16x$. З неї, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знаходимо $a = 2$, $b = -3$. Отже, $\varphi_1(x) = 2x^2 - 3x$.

Оскільки $\lambda = 2$ не є коренем характеристичного рівняння, то для другої з них частковий розв'язок шукаємо у вигляді $\varphi_2(x) = (ax+b)\cdot 2^x$. Для знаходження a та b маємо тотожність

$$\left(a(x+2)+b\right)\cdot 2^{x+2} + 2\left(a(x+1)+b\right)\cdot 2^{x+1} - 3(ax+b)\cdot 2^x \equiv (3x+1)\cdot 2^x,$$

яка після скорочення на 2^x та очевидних спрощень набуває вигляду $3ax+10a+3b \equiv 3x+1$. Звідси знаходимо $a=1$, $b=-3$ та $\varphi_2(x) = (x-3)\cdot 2^x$.

Число $\lambda = -3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому для третьої функції частковий розв'язок шукаємо у вигляді $\varphi_3(x) = x(a\cos\pi x + b\sin\pi x)\cdot 3^x$. Тоді для знаходження a та b отримаємо тотожність

$$(x+2)\left(a\cos\pi(x+2) + b\sin\pi(x+2)\right)\cdot 3^{x+2} +$$
$$+2(x+1)\left(a\cos\pi(x+1) + b\sin\pi(x+1)\right)\cdot 3^{x+1} -$$
$$-3x(a\cos\pi x + b\sin\pi x)\cdot 3^x \equiv 3^x\cdot\cos\pi x.$$

Скорочуючи на 3^x та використовуючи формули зведення, запишемо цю тотожність у вигляді $12a\cos\pi x + 12b\sin\pi x \equiv \cos\pi x$. Отже, $a = \frac{1}{12}$, $b=0$, $\varphi_3(x) = \frac{x3^{x-1}}{4}\cdot\cos\pi x$.

Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння представляється у вигляді

$$f(x) = C_1 + C_2\cdot(-3)^x + 2x^2 - 3x + (x-3)\cdot 2^x + \frac{x3^{x-1}}{4}\cdot\cos\pi x.$$

<u>Приклад 85.</u> Знайдіть розв'язок різницевого рівняння

$$f(x+2) - 4f(x+1) + 4f(x) = 2^{x+3},\ x\in\mathbb{R},$$

який задовольняє початкові умови $f(0)=1$ та $f(1)=6$.

Розв'язання. З характеристичного рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ знаходимо його корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $f_0(x) = (C_1 + C_2x)\cdot 2^x$.

Оскільки $2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$ та $\lambda = 2$ є коренем характеристичного рівняння кратності 2, то частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $\varphi(x) = ax^2 \cdot 2^x$.

З тотожності $a(x+2)^2 \cdot 2^{x+2} - 4a(x+1)^2 \cdot 2^{x+1} + 4ax^2 \cdot 2^x \equiv 8 \cdot 2^x$ після скорочення на 2^x та очевидних спрощень знаходимо $a = 1$.

Тому $\varphi(x) = x^2 \cdot 2^x$, і функція $f(x) = \left(C_1 + C_2 x + x^2\right) \cdot 2^x$ є загальним розв'язком заданого неоднорідного рівняння. Враховуючи початкові умови, знаходимо $C_1 = C_2 = 1$. Отже, остаточно маємо $f(x) = \left(1 + x + x^2\right) \cdot 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що при розв'язуванні попереднього рівняння ми записали функцію $Q(x)$ в дещо зміненому вигляді. Корисною буде зміна форми запису $Q(x)$ і в наступному прикладі.

Приклад 86. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$f(x+2) + f(x) = 4\sin^2 \frac{\pi x}{4}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. З характеристичного рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ знаходимо його корені $\lambda_1 = i$ та $\lambda_2 = -i$. Тому

$$f_0(x) = C_1 \cos\frac{\pi x}{2} + C_2 \sin\frac{\pi x}{2}.$$

Враховуючи рівність $4\sin^2 \frac{\pi x}{4} = 2 - 2\cos\frac{\pi x}{2}$ і наявність серед коренів характеристичного рівняння числа $\lambda = i$ та відсутність серед них числа $\lambda = 1$, будемо шукати частковий розв'язок заданого неоднорідного рівняння у вигляді

$$\varphi(x) = a + x\left(b\cos\frac{\pi x}{2} + c\sin\frac{\pi x}{2}\right).$$

З тотожності

$$a + (x+2)\left(b\cos\frac{\pi(x+2)}{2} + c\sin\frac{\pi(x+2)}{2}\right)a +$$

$$+x\left(b\cos\frac{\pi x}{2}+c\sin\frac{\pi x}{2}\right)\equiv 2-2\cos\frac{\pi x}{2},$$

прирівнюючи коефіцієнти при однакових лінійно незалежних функціях в її лівій та правій частинах, знаходимо $a=b=1,\ c=0$.

Тому $\varphi(x)=1+x\cos\frac{\pi x}{2}$, $f(x)=1+(C_1+x)\cos\frac{\pi x}{2}+C_2\sin\frac{\pi x}{2}$.

§6.7. Знаходження розв'язків лінійних різницевих рівнянь першого порядку методом варіації довільної сталої

Спочатку розглянемо рівняння

$$f(x+1)-f(x)=Q(x),$$

в якому функція $Q(x)$ є довільною.

Покладемо $f(0)=y_0$ і додамо рівності:

$$f(1)-f(0)=Q(0),$$
$$f(2)-f(1)=Q(1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(n)-f(n-1)=Q(n-1).$$

У результаті отримаємо $f(n)=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}Q(k),\ n\in\mathbb{N}$.

Замінивши аргумент n на x, для всіх $x\in\mathbb{N}$ знаходимо

$$f(x)=y_0+\sum_{k=0}^{x-1}Q(k).$$

Перевіркою переконуємося, що тут y_0 може бути довільним дійсним числом.

Приклад 87. Розв'яжіть рівняння

$$f(x+1)-f(x)=2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Враховуючи сказане вище, для всіх $x\in\mathbb{N}$ отримаємо $f(x)=y_0+2\sum_{k=0}^{x-1}k=y_0+(x-1)x,\ y_0\in\mathbb{R}$. Але нескладно переконатися, що знайдена функція $f\left(x\right)=y_0+\left(x-1\right)x$, $y_0\in\mathbb{R}$. задовольняє задане рівняння для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Перейдемо тепер до загального лінійного неоднорідного різницевого рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0 f\left(x+1\right)+a_1 f\left(x\right)=Q\left(x\right),\ a_0\neq 0,\ a_1\neq 0,\ x\in\mathbb{N}\bigcup\left\{0\right\}.$$

Щоб воно діленням на a_0 не зводилося до розглянутого вище рівняння, додатково будемо вважати, що $a_0+a_1\neq 0$.

З параграфа 6.3 відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $f_0\left(x\right)=C\left(-\dfrac{a_1}{a_0}\right)^x$, $C\in\mathbb{R}$.

Будемо шукати загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння у вигляді $f\left(x\right)=C\left(x\right)\left(-\dfrac{a_1}{a_0}\right)^x$.

Підставивши цю функцію в рівняння, отримаємо

$$a_0C\left(x+1\right)\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^{x+1}+a_1C\left(x\right)\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^x=Q\left(x\right),$$

звідки випливає, що

$$C\left(x+1\right)-C\left(x\right)=-\frac{Q\left(x\right)}{a_1}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^{-x}.$$

Позначимо праву частину останньої рівності через $H\left(x\right)$ і покладемо $C\left(0\right)=C$. Звідси для всіх $x\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$C\left(x\right)=C+\sum_{k=0}^{x-1}H\left(k\right),\ C\in\mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння

$$f\left(x\right)=\left(C+\sum_{k=0}^{x-1}H\left(k\right)\right)\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^x,\ C\in\mathbb{R}.$$

Такий метод його знаходження називають *методом варіації довільної сталої*.

Приклад 88. Розв'яжіть рівняння

$$f(x+1)-2f(x)=4x\cdot 2^x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $f(x+1)-2f(x)=0$ є функція $f_0(x)=C\cdot 2^x$, де $C\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. Тому загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $f(x)=C(x)\cdot 2^x$.

Підставивши таку функцію в початкове рівняння отримаємо рівність $C(x+1)-C(x)=2x$, з якої, як наслідок прикладу 87, знайдемо $C(x)=C+(x-1)x$, $C\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. Отже,

$$f(x)=\left(x^2-x+C\right)\cdot 2^x,\ C\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}.$$

§6.8. Лінійні різницеві рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами

1). Розглянемо лінійне однорідне різницеве рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$f(x+1)+P(x)f(x)=0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді $f(x+1)=\varphi(x)f(x)$, де $\varphi(x)=-P(x)f(x)=0$, і покладемо $f(0)=y_0$.

Перемножимо рівності:

$$f(1)=f(0)\varphi(0),$$
$$f(2)=f(1)\varphi(1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f(n)=f(n-1)\varphi(n-1).$$

У результаті отримаємо $f(n)=y_0\cdot\prod\limits_{k=0}^{n-1}\varphi(k)$, $n\in\mathbb{N}$.

Замінивши аргумент n на x, для всіх $x\in\mathbb{N}$ знаходимо

$$f(x)=y_0\cdot\prod_{k=0}^{x-1}\varphi(k).$$

Як показує перевірка, значення y_0 може бути довільним дійсним числом.

<u>Приклад 89.</u> Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$f(x+1)-\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що функція $\varphi(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ визначена для всіх $x\in\mathbb{R}$, і для всіх $k\in\mathbb{N}$ справджується рівність $k^2+k+1=(k+1)^2-(k+1)+1$. Тому для всіх $n\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$f(n)=y_0\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\varphi(k)=y_0\cdot\frac{0^2+0+1}{0^2-0+1}\cdot\frac{1^2+1+1}{1^2-1+1}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2-2+1}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}=y_0\cdot\left((n-1)^2+(n-1)+1\right)=y_0\cdot\left(n^2-n+1\right).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ функція $f(x)=C\cdot\left(x^2-x+1\right)$ задовольняє задане рівняння при довільному $C\in\mathbb{R}$.

2). Розглянемо тепер лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$f(x+1)+P(x)f(x)=Q(x).$$

Будемо шукати його розв'язок як добуток $f(x)=u(x)v(x)$.

Підставляючи цей добуток у різницеве рівняння, запишемо це рівняння у вигляді:

$$u(x+1)\big(v(x+1)-v(x)\big)+\big[u(x+1)+P(x)u(x)\big]=Q(x).$$

Виберемо довільну відмінну від тотожного нуля функцію $u(x)$ таку, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю. З пункту 1) випливає, що цю умову задовольняє, наприклад, функція $u(x)=\prod_{k=0}^{x-1}\varphi(k),\ x\in\mathbb{N}$.

Оскільки $u(x+1)=\prod_{k=0}^{x}\varphi(k)$, то для визначення функції $v(x)$ отримаємо рівняння

$$v(x+1)-v(x)=\frac{Q(x)}{\prod_{k=0}^{x}\varphi(k)}.$$

Позначивши його праву частину через $\Psi(x)$, знайдемо $v(x)=C+\sum_{m=0}^{x-1}\Psi(m)$, $C\in\mathbb{R}$. Отже, загальний розв'язок такого лінійного неоднорідного рівняння матиме вигляд:

$$f(x)=\prod_{k=0}^{x-1}\varphi(k)\cdot\left(C+\sum_{m=0}^{x-1}\Psi(m)\right),\ C\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{N}.$$

<u>Приклад 90.</u> Знайдіть розв'язок рівняння

$$f(x+1)-\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}f(x)=2x\left(x^2+x+1\right),\ x\in\mathbb{R},$$

який задовольняє початкову умову $f(0)=1$.

Розв'язання. Як ми вже встановили у прикладі 89, загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є функція $f_0(x)=C\cdot\left(x^2-x+1\right)$, $C\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$. То ж, покладаючи $C=1$, візьмемо $u(x)=x^2-x+1$. Оскільки при цьому $u(x+1)=x^2+x+1$, то для визначення функції $v(x)$ отримаємо рівняння $v(x+1)-v(x)=2x$. Його загальним розв'язком, згідно з прикладом 87, є функція $v(x)=x^2-x+C$, $C\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$.

Тому загальним розв'язком заданого лінійного неоднорідного різницевого рівняння буде функція

$$f(x)=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+C\right),\ C\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}.$$

Враховуючи початкову умову, знайдемо $C=1$. Отже, остаточно отримуємо $f(x)=\left(x^2-x+1\right)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Розділ VII. Функціональні рівняння математичних олімпіад та турнірів

§7.1. Функціональні рівняння обласних етапів Всеукраїнських математичних олімпіад та турнірів

Задачі на розв'язування функціональних рівнянь часто зустрічаються на різноманітних математичних змаганнях. Деякі з них, не акцентуючи на цьому увагу, ми вже проаналізували в попередніх розділах. Наведемо приклади інших задач такого роду.

Приклад 91. Знайдіть усі многочлени $P(x)$, які для кожного $x \in \mathbb{R}$ задовольняють рівність $P(x+x^2) = P(x) + P(x^2)$.

(Обласний турнір юних математиків, 2008 рік).

Розв'язання. Нехай $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, де $a_n \neq 0$, $n \geq 2$. Тоді $P(x+x^2)$ містить доданок $na_n x^{2n-1}$, а в сумі $P(x)+P(x^2)$ коефіцієнт біля x^{2n-1} дорівнює нулю. Отже, $n \leq 1$. Якщо $x=0$, то маємо $P(0)=P(0)+P(0) \Rightarrow P(0)=0$. Тому $P(x)=ax$. Перевірка показує, що такий многочлен є розв'язком при кожному дійсному значенні a.

Приклад 92. Дослідіть, чи існують такі многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a та b і для всіх дійсних чисел x виконуються рівності:

а) $P\left(x+x^2\right) = x + x^2 + \ldots + x^{2013} + x^{2014}$;

б) $Q\left(x+x^2+x^3\right) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2010} + ax^{2011} + bx^{2012} + x^{2013}$.

(Обласний турнір юних математиків, 2013 рік).

Розв'язання. а). Не існує. Підставивши $x=1$, отримуємо $P(2) = 2014$. А, підставивши $x=-2$, будемо мати

$$P(2) = (-2+4) + (-8+16) + \ldots + \left(-2^{2013} + 2^{2014}\right) = 2 + 8 + \ldots + 2^{2013} \neq 2014.$$

б). Підставляючи $x=-1$ та $x=i$, відповідно отримуємо $Q(-1)=-a+b-1$ та $Q(-1)=b-1+(2-a)i$. Прирівнюючи дійсні та уявні частини цих значень, приходимо до системи рівнянь $-a+b-1=b-1$ та $2-a=0$, яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена $Q(x)$ також не існує.

<u>Приклад 93.</u> Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких для всіх дійсних x, y виконується рівність $f^2(x)+f(x)f(y)=x^2+xy$. Чи існують розривні функції, які також задовольняють цю рівність для всіх дійсних $x,\ y$?

(Обласний турнір юних математиків, 2007 рік).

Розв'язання. Підставивши у задане рівняння $y=x$, отримаємо $f^2(x)=x^2$, звідки $|f(x)|=|x|$. Припустимо, що існують такі дійсні аргументи t та z, що $f(t)=t$, $f(z)=-z$. Поклавши $x=t$, $y=z$, отримаємо $-tz=tz$. Тому принаймні один з цих аргументів дорівнює нулю. Отже, рівняння має лише розв'язки: $f(x)=x$ та $f(x)=-x$. Обидва вони є неперервними функціями.

<u>Приклад 94.</u> Знайдіть усі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$f\left(y+f(x)\right)=f\left(x^2-y\right)+4f(x)y.$$

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 11 клас).

Розв'язання. Покладемо в цьому рівнянні послідовно $y=-f(x)$ та $y=x^2$. Тоді для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконуватимуться рівності: $f\left(x^2+f(x)\right)=4\left(f(x)\right)^2$ та $f\left(x^2+f(x)\right)=4x^2f(x)$. Прирівнявши для $x=0$ праві частини цих рівностей, одержимо $f(0)=0$. Оскільки $f(x)$ не може дорівнювати нулю для інших x, то з рівності правих частин маємо $f(x)=x^2$ для $x\neq 0$. Перевірка показує, що функція $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, задовольняє дане рівняння.

<u>Приклад 95.</u> Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x)=0,5$ має принаймні один дійсний корінь, та $f(x)-f(y)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x\neq 0$, $y\neq 0$. Знайдіть $f(-1)$.

(III етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1998 рік, 11 клас).

Розв'язання. Позначимо $f(-1)=a$. Тоді для всіх $x\neq 0$ виконується рівність $f(x)-a=af(x)-af\left(\frac{1}{x}\right)$. Замінивши в ній x на $\frac{1}{x}$, отримаємо $f\left(\frac{1}{x}\right)-a=af\left(\frac{1}{x}\right)-af(x)$.

Додавши дві останні рівності, одержимо співвідношення $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)-2a=0$. Отже, $f(x)-a=af(x)-a\left(2a-f(x)\right)$, тобто $f(x)(1-2a)=a(1-2a)$. Звідси знаходимо $a=\frac{1}{2}$, бо при інших a ми отримали би, що $f(x)\equiv a\neq\frac{1}{2}$, і рівняння $f(x)=\frac{1}{2}$ не мало би жодного кореня, що суперечить умові задачі.

Зауважимо, що принаймні одна така функція, яка задовольняє умови задачі, існує. Наприклад, $f(x)\equiv\frac{1}{2}, x\neq 0$.

<u>Приклад 96.</u> Дослідіть, чи існують такі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, відмінні від $f(x)\equiv x$, для яких для всіх дійсних значеннях x, y виконується рівність $f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)=x+y$.

(Обласний турнір юних математиків, 2011 рік).

Розв'язання. Підставивши в задане рівняння $x=t,\ y=0$, отримаємо $f\left(f\left(f(t)\right)\right)=t,\ t\in\mathbb{R}$. Нехай тепер $x=t, y=-f\left(f(t)\right)$. Звідси випливає, що $f(0)=t-f\left(f(t)\right)$ та $f\left(f(t)\right)=t-c$, де $c=f(0)$. При $t=0$ будемо мати $f(c)=-c$. Крім того, звідси випливає ще й рівність $f\left(f\left(f(t)\right)\right)=f(t-c),\ t\in\mathbb{R}$. Отже, $f(t-c)=t, t\in\mathbb{R}$.

Покладаючи $t=2c$, знайдемо $f(c)=2c$. Тому $-c=2c$, тобто $c=0$. Отже, $f(t)=t$. Тому розв'язків, відмінних від $f(x)\equiv x$, задане рівняння не має.

<u>Приклад 97.</u> Знайдіть усі визначені на множині всіх дійсних чисел числові функції f такі, що для будь-яких $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f\left(xf(y)\right)+f\left(y+f(x)\right)-f\left(x+yf(x)\right)=x$.

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2013 рік, 11 клас).

Розв'язання. З умови задачі маємо:

$$x=y=0\Rightarrow f(0)+f\left(f(0)\right)-f(0)=0\Rightarrow f\left(f(0)\right)=0;$$

$$x=y=1\Rightarrow f\left(f(1)\right)+f\left(1+f(1)\right)-f\left(1+f(1)\right)=1\Rightarrow f\left(f(1)\right)=1;$$

$$x=1, y=0\Rightarrow f\left(f(0)\right)+f\left(f(1)\right)-f(1)=1\Rightarrow 0+1-f(1)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow f(0)=f\left(f(1)\right)=1.$$

Враховуючи тепер значення $f(1)=0$ та $f(0)=1$, отримаємо:

$$x=1, y=t, t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(f(t)\right)+f(t)=1\Rightarrow f\left(f(t)\right)\equiv 1-f(t);$$

$$x=t, t\in\mathbb{R}, y=0\Rightarrow f(t)+f\left(f(t)\right)-f(t)=t\Rightarrow f\left(f(t)\right)\equiv t.$$

Звідси випливає, що $1-f(t)=t$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Як показує перевірка, функція $f(x)=1-x,\ x\in\mathbb{R}$, є розв'язком рівняння.

<u>Приклад 98.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f\left(x+f\left(f(y)\right)\right)=y+f\left(f(x)\right)$ для всіх $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$.

(ІІІ етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2017 рік, 10 клас).

Розв'язання. Запишемо задане рівняння таким чином:
$$f\left(y+f\left(f\left(x\right)\right)\right)=x+f\left(f\left(y\right)\right).$$

Подіємо на обидві його частини функцією f. Враховуючи умову задачі, будемо мати
$$f\left(f\left(y+f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=f\left(x+f\left(f\left(y\right)\right)\right)=y+f\left(f\left(x\right)\right).$$

Оскільки при фіксованому x значення $t=y+f\left(f\left(x\right)\right)$ пробігає множину всіх дійсних чисел, то з останньої рівності випливає, що $f\left(f\left(t\right)\right)=t$ для всіх $t\in\mathbb{R}$.

Отже, початкове співвідношення можна записати у вигляді $f\left(x+y\right)=y+x$ чи $f\left(x\right)=x$. Як показує перевірка, така функція справді є розв'язком.

<u>Приклад 99.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такі, що для всіх натуральних $n\geq 2$ виконується рівність
$$f\left(n\right)=f\left(f\left(n-1\right)\right)+f\left(f\left(n+1\right)\right).$$

(Обласний турнір юних математиків, 2005 рік).

Розв'язання. Нехай $f(m)=k-$ найменше значення такої функції при $n\geq 2$. Оскільки $f\left(f\left(m-1\right)\right)\geq 1,$ то при $f\left(m+1\right)\neq 1$ одержимо, що $f\left(f\left(m+1\right)\right)\geq k.$ Отже, задана рівність для такого $n=m\geq 2$ виконуватися не буде. Якщо ж $f\left(m+1\right)=1,$ то $k=1.$ Але у такому випадку при $n=m$ ліва частина заданої рівності дорівнює 1, а права не менша 2. Отже, вказаної функції не існує.

<u>Приклад 100.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ які для всіх дійсних x та y задовольняють рівність
$$f\left(x+y\right)=\left\{f\left(x\right)\right\}+\left\{f\left(y\right)\right\}.$$

(VII Соросівська олімп. з математики, I етап, 10 клас).

Розв'язання. Для $x=y=0$ маємо $f\left(0\right)=2\left\{f\left(0\right)\right\}.$ Оскільки $f\left(0\right)=\left[f\left(0\right)\right]+\left\{f\left(0\right)\right\},$ то $\left[f\left(0\right)\right]=\left\{f\left(0\right)\right\},$ тобто $f\left(0\right)=0.$

Підставимо тепер $x \in \mathbb{R}$, $x = y = 0$. З рівності $f(x) = \{f(x)\}$ отримаємо, що $0 \le f(x) < 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому задане функціональне рівняння можна записати у вигляді

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Методом математичної індукції нескладно довести, що при цьому $f(nx) = nf(x)$ для всіх натуральних n та всіх $x \in \mathbb{R}$.

Якщо б існувало таке x_0, для якого $f(x_0) > 0$, то знайшлося б таке $n \in \mathbb{N}$, за якого справджувалась би нерівність $f(nx_0) \ge 1$.

З отриманої суперечності випливає, що єдиним розв'язком заданого рівняння є функція $f(x) \equiv 0$.

Наведемо також приклад олімпіадної задачі, в якій функціональна залежність задана нерівністю, при розв'язуванні якої доводиться використовувати властивості диференційованих функцій.

Приклад 101. Чи існує функція f, яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну в усіх точках та задовольняє наступні умови:

а) при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) \ge f(x + \sin x)$;

б) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

(III етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1999 рік, 11 клас).

Розв'язання. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - f(x + \sin x)$. За умовою задачі $F(x) \ge 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому $F(\pi n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $F(x)$, як і $f(x)$, має похідні у всіх точках, то за теоремою Ферма в таких її точках мінімуму $F'(\pi n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}$. Отже, $f'(\pi n) - (1 + \cos \pi n)\, f'(\pi n + \sin \pi n) = 0,\ n \in \mathbb{Z}$.

Звідси випливає, що $f'(\pi n) = 0$, для всіх $n \in \mathbb{Z}$. А це суперечить умові задачі. Тому такої функції f не існує.

§7.2. Функціональні рівняння заключних етапів Всеукраїнських олімпіад та турнірів

Функціональні рівняння часто зустрічаються й на заключних етапах Всеукраїнських олімпіад чи турнірів юних математиків. Наведемо приклади розв'язування таких рівнянь.

Приклад 102. Нехай для всіх дійсних x функція $f(x)$ задовольняє співвідношення

$$(x-1)f(x+1)-(x+1)f(x-1)=4x(x^2-1).$$

а). Доведіть, що функція $f(x)$ є неперіодичною.

б). Чи може функція $f(x)$ бути многочленом?

в). Чи може функція $f(x)$ бути не многочленом?

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1996 рік, 11 клас).

Розв'язання. Нескладно переконатися, що функція $\varphi(x)\equiv x^3$ є розв'язком, звідки зразу отримуємо позитивну відповідь на п. б).

Будемо шукати функцію $f(x)$ у вигляді $f(x)=g(x)+x^3$. Підставивши її в задане рівняння, отримаємо співвідношення

$$(x-1)g(x+1)-(x+1)g(x-1)=0.$$

З нього знаходимо $g(1)=0$ та $g(-1)=0$. А для всіх інших x будемо мати рівність $\frac{g(x+1)}{x+1}=\frac{g(x-1)}{x-1}$, звідки випливає, що $g(x)=x\cdot h(x)$, де $h(x)-$ довільна періодична з періодом $T=2$ функція така, що $h(1)=0$. Отже, $f(x)=x\cdot h(x)+x^3$, тобто функція $f(x)$ є неперіодичною. Покладаючи $h(x)=\sin\pi x$, бачимо, що вона може бути й не многочленом.

Приклад 103. Знайдіть усі пари многочленів f та g таких, що для всіх дійсних значень x та y виконується рівність

$$f(xy)=f(x)+g(x)f(y).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 1998 рік, 10 клас).

Розв'язання. Покладаючи $y=0$, для всіх дійсних значень x отримаємо рівність $f(0)=f(x)+g(x)f(0)$, з якої випливає, що $f(x)=c\cdot(1-g(x))$, де $c=f(0)$.

Якщо $c=0$, то звідси зразу знаходимо $f(x)\equiv 0$, а $g(x)$ – довільний многочлен.

Якщо ж $c\neq 0$, то, підставивши таку функцію в початкове рівняння, після очевидних спрощень для знаходження многочлена g отримаємо рівняння $g(xy)=g(x)g(y)$.

Оскільки кожен многочлен є неперервною функцією, то з нього знаходимо $g(x)\equiv 0$ або $g(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$. Відповідно будемо мати $f(x)=c$, та $f(x)=c\cdot(1-x^n)$, де $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Враховуючи, що многочлен $f(x)\equiv 0$ задовольняє рівняння при довільному $g(x)$, значення $c=0$ теж підійде.

Приклад 104. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(0)=\frac{1}{2}$, і для всіх дійсних значень x та y виконується рівність

$$f(x+y)=f(x)f(2001-y)+f(y)f(2001-x).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 10 клас).

Розв'язання. Поклавши $x=y=0$, знайдемо $f(2001)=\frac{1}{2}$.

Нехай тепер лише $y=0$. Враховуючи, що $f(0)=f(2001)=\frac{1}{2}$, для всіх $x\in\mathbb{R}$ отримаємо рівність $f(x)=f(2001-x)$. Тому, підставивши в задане рівняння $y=2001-x$, для всіх $x\in\mathbb{R}$ будемо мати $2f^2(x)=\frac{1}{2}$. Оскільки, крім того, при $y=x$ для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується нерівність $f(2x)=2f^2(x)\geq 0$, то отримуємо єдиний розв'язок $f(x)\equiv\frac{1}{2}$.

Приклад 105. Чи існує така функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка для всіх дійсних значень x та y задовольняє рівняння

$$f(x\cdot y)=\max\{f(x);y\}+\min\{f(y);x\}.$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2001 рік, 11 клас).

Розв'язання. Такої функції не існує. Легко бачити, що $\max\{a;b\}+\min\{a;b\}=a+b$. Підставивши $x=y=1$, отримаємо суперечність $f(1)=\max\{f(1);1\}+\min\{f(1);1\}=f(1)+1$.

Приклад 106. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, які одночасно задовольняють такі три умови:

1). $f(1)=1$;

2). $f(n+2)+(n^2+4n+3)f(n)=(2n+5)f(n+1)$ для всіх $n\in\mathbb{N}$;

3). $f(m)$ ділиться без остачі на $f(n)$ для будь-яких натуральних чисел $m>n$.

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2004 рік, 10 клас).

Розв'язання. Нехай $f(2)=k$. Тоді $f(3)=7k-8$, і для подільності $f(3)$ на $f(2)$ необхідно, щоб натуральне число k було дільником числа 8. Розглянемо можливі варіанти.

$k=1$ не задовольняє, бо тоді $f(3)=-1\notin\mathbb{N}$.

$k=2$. За індукцією доводимо, що $f(n)=n!$.

$k=4$. Аналогічно встановлюємо, що $f(n)=\dfrac{(n+2)!}{6}$.

$k=8$ не задовольняє, бо тоді $f(4)=312$ не ділиться на $f(3)=48$.

Приклад 107. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, які для всіх дійсних значень x та y задовольняють рівняння

$$f(x+y)+f(xy-1)=(f(x)+1)(f(y)+1).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2007 рік, 10 клас).

Розв'язання. Підставляючи по черзі $x=y=0$ та $x=0$, $y=-1$, отримаємо таку систему рівностей: $f(0)+f(-1)=(f(0)+1)^2$ та $2f(-1)=(f(0)+1)(f(-1)+1)$. Звідси $f(0)=0$ та $f(-1)=1$.

Маючи ці значення функції, підставимо $x=y=-1$. З рівності $f(-1)+f(0)=(f(-1)+1)^2$ знайдемо $f(-2)=4$.

І, нарешті, підставивши $x=1$, $y=-1$, з отриманої при цьому рівності $f(0)+f(-2)=(f(1)+1)(f(-1)+1)$ знайдемо $f(1)=1$.

Підставимо тепер $x=n$, $y=1$ і запишемо задане рівняння у вигляді $f(n+1)=2(f(n)+1)-f(n-1)$. Методом математичної індукції нескладно переконатися, що $f(n)=n^2$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Аналогічно, записавши для цього останню рівність у вигляді $f(n-1)=2(f(n)+1)-f(n+1)$, доводимо, що $f(n)=n^2$ для всіх від'ємних цілих чисел. Тому шуканою є функція $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{Z}$.

Наведемо також приклад олімпіадної задачі, в якій функціональна залежність задана нерівністю.

<u>Приклад 108.</u> Чи існує функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ така, що будь-яких дійсних чисел x та y справджується нерівність

$$f(x-f(y))\le x-yf(x).$$

(IV етап Всеукр. олімп. юних математиків, 2016 рік, 10 клас).

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Позначимо $f(0)=a$ і підставимо в задану нерівність $y=0$. Тоді для всіх $x\in\mathbb{R}$ отримаємо $f(x-a)\le x$. Замінивши тут x на $x+a$, для всіх дійних x будемо мати нерівність $f(x)\le x+a$.

Підставимо тепер у початкову нерівність $x=f(y)$. Далі послідовно отримаємо $a\le f(y)-yf(f(y))\le y+a-yf(f(y))$, тобто $yf(f(y))\le y$ для всіх $y\in\mathbb{R}$.

Тому для всіх від'ємних значень y повинен справджуватися ланцюжок нерівностей: $1 \le f\left(f\left(y\right)\right) \le f\left(y\right)+a \le y+2a$, що, очевидно, є неможливим. Отже, вказаної в умові функції не існує.

Розглянемо й пов'язані з функціями та функціональними рівняннями дві задачі заключного етапу XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

<u>Приклад 109.</u> Про функцію $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (біекцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f\left(n\right)\to+\infty$, якщо $n\to+\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f. Чи можна стверджувати, що $f^{-1}\left(n\right)\to+\infty$, якщо $n\to+\infty$?

Розв'язання. Не можна. Наприклад, для функції

$$f\left(n\right)=\begin{cases} 2n, & n\in Z_{+}, \\ -n, & n=-2k+1,\ k\in N, \\ \dfrac{n}{2}, & n=-2k,\ k\in N, \end{cases}$$

маємо $f\left(n\right)\to+\infty$ при $n\to+\infty$. Але для функції

$$f^{-1}\left(n\right)=\begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n=2k,\ n\in Z_{+}, \\ -n, & n=2k-1, k\in N, \\ 2n, & n=-k, k\in N, \end{cases}$$

$f^{-1}\left(n\right)$ для непарних n не прямує до $+\infty$ при $n\to+\infty$.

<u>Приклад 110.</u> Для натурального k знайдіть усі такі функції $f:\left(0,+\infty\right)\to\left(0,+\infty\right)$, що для будь-яких додатних чисел $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{2k}$, добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{f\left(x_{2i-1}\right)+f\left(x_{2i}\right)}{x_{2i-1}+x_{2i}}=1.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $k \geq 2$.

Підставивши $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1,$ отримаємо $f^n(1) = 1.$ А оскільки $f(x)$ набуває лише додатних значень, то $f(1) = 1.$

Підставимо тепер $x_1 = a,$ $x_2 = \frac{1}{a},$ де $a > 0,$ $a \neq 1,$ та $x_3 = x_4 = \ldots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1.$ Враховуючи, що $f(1) = 1,$ отримаємо рівність $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}.$

Покладемо $x_1 = a,$ $x_3 = \frac{1}{a},$ $a > 0,$ $a \neq 1,$ залишаючи решта аргументів одиницями. Тоді $\left(f(a)+1\right)\left(f\left(\frac{1}{a}\right)+1\right) = (a+1)\left(\frac{1}{a}+1\right),$ звідки маємо $f(a)\,f\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$ Отже, $f(a) = a$ або $f(a) = \frac{1}{a}.$

Припустимо, що для відмінних від одиниці додатних чисел a та b одночасно виконуються рівності $f(a) = a,$ $f(b) = \frac{1}{b}.$ Тоді $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a},$ $f\left(\frac{1}{b}\right) = b.$ Тому, підставивши $x_1 = a,$ $x_2 = b,$ $x_3 = \frac{1}{a},$ $x_4 = \frac{1}{b},$ та залишаючи решта аргументів одиницями, отримаємо співвідношення $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$ звідки випливає рівність $ab+1 = a+b,$ тобто $(a-1)(b-1) = 0,$ яка можлива лише при $a = 1$ та $b = 1.$

З доведеного випливає, що при $k \geq 2$ розв'язками заданого функціонального рівняння можуть бути лише функції $f(x) = x$ та $f(x) = \frac{1}{x}.$

Як показує перевірка, обидві такі функції задовольняють це рівняння.

Нехай тепер $k=1$. Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо: $f(1)=1$ та $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$. Отже, для функції $g(x)=f(x)-x$ будемо мати: $g(1)=0$ та $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=0$, $a>0$, $a\neq 1$.

Нехай $g(x)$ – довільна функція, визначена на інтервалі $(0;1)$, яка задовольняє на ньому нерівності $-x<g(x)<\frac{1}{x}$. Тоді, покладаючи $g(1)=0$ та $g(x)=-g\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>1$, отримаємо, що функція $f(x)=g(x)+x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння при $k=1$.

Навпаки, для кожного розв'язку $f(x)>0$ функція $g(x)=f(x)-x$ задовольняє накладені на неї вище умови. При цьому нерівність $g(x)>-x,\ x\in(0;1)$, очевидна, а $g(x)<\frac{1}{x}$, $x\in(0;1)$ випливає з нерівності

$$-g(x)+\frac{1}{x}=g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)>0,\ x\in(0;1).$$

Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при $k=1$. Зокрема, покладаючи $g(x)=0$ та $g(x)=\frac{1}{x}-x$, отримаємо отримані нами для $k\geq 2$ розв'язки $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}$ відповідно. Але, крім них, при $k=1$ задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(0;1), \\ 1, & x=1, \\ x-1, & x\in(1;+\infty). \end{cases}$$

§7.3. Вибрані задачі зарубіжних та міжнародних змагань юних математиків

Функціональні рівняння та нерівності характерні й для багатьох зарубіжних та міжнародних олімпіад з математики.

Приклад 111. Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють тотожність $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$.

(Болгарія, 1968 рік)

Розв'язання. Для $x=y=1$, отримаємо $2f(1)=2f^2(1)$, звідки випливає, що $f(1)=0$ або $f(1)=1$.

Якщо $f(1)=0$, то, покладаючи $y=1$, знайдемо $f(x)\equiv 0$.

Якщо ж $f(1)=1$, то для $y=1$ будемо мати тотожність $f(x)+x\equiv(x+1)f(x)$, тобто $x\big(f(x)-1\big)\equiv 0$. Звідси для всіх $x\neq 0$ отримуємо $f(x)=1$ та $f(1)=\alpha$. Як показує перевірка, α може бути довільним дійсним числом.

Приклад 112. Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задовольняє тотожність

$$f(xy)\equiv\frac{f(x)+f(y)}{x+y},\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ x+y\neq 0.$$

Чи існує таке значення $x\in\mathbb{R}$, для якого $f(x)\neq 0$?

(Нью-Йорк, 1978 рік)

Розв'язання. Підставивши $y=0$, для всіх $x\neq 0$ отримаємо $f(0)=\dfrac{f(x)+f(0)}{x}$. Якщо $f(0)=a$, то $f(x)=a(x-1)$.

Для $a=0$ звідси маємо $f(x)\equiv 0$. А для $a\neq 0$ отримуємо, що $f(x)$ може набувати значення 0 хіба що в точці $x=1$. Але при $f(1)=0$ з умови задачі для $x=2$, $y=1$ отримуємо рівність $f(2)=\dfrac{f(2)}{3}$, з якої випливає, що також $f(2)=0$. Тому $f(x)\equiv 0$.

Приклад 113. Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, які задовольняють умову $f(1)=2$ і тотожність

$$f(xy)\equiv f(x)f(y)-f(x+y)+1,\ x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q}.$$

(Міжнародна математична олімпіада, 1980 рік).

Розв'язання. Підставляючи $y=1$, для всіх $x\in\mathbb{Q}$ отримаємо $f(x)=2f(x)-f(x+1)+1$, тобто $f(x+1)=f(x)+1$.

Звідси, покладаючи $x=0$, знайдемо $f(0)=1$. Крім того, методом математичної індукції встановимо, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ $f(x+n)\equiv f(x)+n$.

Покладаючи тут $x=0$, отримаємо $f(n)=n+1,\ n\in\mathbb{N}$. А при $x=-n$ знайдемо $f(-n)=-n+1$. Тому $f(x)=x+1$ для всіх $x\in\mathbb{Z}$.

Підставимо тепер $x=\dfrac{1}{n},\ y=n,\ n\in\mathbb{N}$. Тоді

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}\right)f(n)-f\left(\frac{1}{n}+n\right)+1,$$

звідки, враховуючи $f(1)=2,\ f(n)=n+1,\ f\left(\dfrac{1}{n}+n\right)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+n$, знайдемо $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}+1$.

І, нарешті, покладаючи $x=p,\ p\in\mathbb{Z},\ y=\dfrac{1}{q},\ q\in\mathbb{N}$, отримаємо

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(p)f\left(\frac{1}{q}\right)-f\left(p+\frac{1}{q}\right)+1=$$

$$=(p+1)\left(\frac{1}{q}+1\right)-\left(p+\frac{1}{q}+1\right)+1=\frac{p}{q}+1.$$

Таким чином, $f(x)=x+1$ для всіх $x\in\mathbb{Q}$.

Зауважимо, що у разі неперервності шуканої функції ми граничним переходом отримали би $f(x)=x+1$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.

<u>Приклад 114.</u> Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівність

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

для всіх дійсних чисел a, b, c таких, що $ab+bc+ca=0$.

(Міжнародна математична олімпіада, 2004 рік).

Розв'язання. Підставимо $a=b=c=0$. Тоді $3P(0)=2P(0)$. Отже, $P(0)=0$. Якщо тепер $a=x\in\mathbb{R}$, $b=c=0$, то з рівності $P(x)+P(0)+P(-x)=2P(x)$ отримаємо $P(-x)\equiv P(x)$. Таким чином, шуканий многочлен має такий загальний вигляд:

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k x^{2k}.$$

Безпосередньою перевіркою нескладно переконатися, що для $n=2$ цей многочлен задовольняє умову задачі за довільних дійсних значень C_1 та C_2. Доведемо, що інших розв'язків немає.

Зауважимо, що числа $a=6x$, $b=3x$, $c=-2x$ задовольняють умову $ab+bc+ca=0$ при кожному $x\in\mathbb{R}$. Тому за умовою задачі для кожного $k\le n$ повинна справджуватися тотожність

$$C_k(6x-3x)^{2k}+C_k(3x+2x)^{2k}+C_k(-2x-6x)^{2k}\equiv 2C_k(6x+3x-2x)^{2k}.$$

Але для $k\ge 3$ вона можлива лише за умови $C_k=0$, бо для них справджується нерівність $3^{2k}+5^{2k}+(-8)^{2k}>8^{2k}>2\cdot 7^{2k}$.

І, на завершення, розглянемо ще одну задачу міжнародної олімпіади, в якій функціональна залежність задана нерівністю.

<u>Приклад 115.</u> Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, для яких виконується умова $f(n+1)>f(f(n))$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

(Міжнародна математична олімпіада, 1997 рік).

Розв'язання. Нехай число k – найменший елемент множини значень функції f, яка є підмножиною множини натуральних чисел. При цьому $k=f(m)$ для деякого $m\in\mathbb{N}$.

Якщо $m>1$, то за умовою задачі $k=f(m)>f\left(f(m-1)\right)$, що суперечить вибору k як найменшого елемента. Тому $k=f(1)$.

Аналогічно, розглядаючи функцію f для $n\geq 2$, встановимо, що серед її значень найменшим є значення $f(2)$ причому $f(2)>f(1)$. Справді, з рівності $f(2)=f(1)$ та умови задачі отримали би суперечність $k=f(1)=f(2)>f\left(f(1)\right)$.

Такі міркування можуть бути продовжені, і ми отримаємо нескінченний ланцюжок нерівностей:

$$f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots,$$

тобто функція f є монотонно зростаючою. Оскільки при цьому $f(1)\geq 1$, то звідси випливає, що $f(n)\geq n$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Припустимо, що $f(n)>n$ для деякого $n\in\mathbb{N}$. Тоді $f(n)\geq n+1$ і, внаслідок монотонності, $f\left(f(n)\right)\geq f(n+1)$, що суперечить умові $f(n+1)>f\left(f(n)\right)$. Отже, $f(n)=n$ для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, така функція задовольняє умову задачі.

Задачі для самостійного розв’язування

Вправи до розділу I

1.1. Вкажіть область визначення та множину значень функції $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+2}$. Знайдіть обернену до неї функцію.

1.2. Дослідіть функцію $f\left(x\right)=2x^2+x-3$ на монотонність.

1.3. Дослідіть на парність функції: а). $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$; б). $f\left(x\right)=x+\sqrt{x^2+1}$; в). $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1.4. Доведіть, що функція $f\left(x\right)=2x^2+x-3$ не є періодичною.

1.5. Знайдіть за означенням найменший додатний період функції $f\left(x\right)=\sin 2x$.

1.6. Доведіть, що функція $f(x)=A\cos x$ задовольняє рівняння

$$f(x+y)=f(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-f\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\sin x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

при кожному $A\in\mathbb{R}$.

1.7. Розв’яжіть рівняння $f\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=x-1,\ x\in R\setminus\{-2;2\}$.

1.8. Визначте значення функції $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ у точці $x=1$ так, щоб вона стала неперервною для всіх $x\in\mathbb{R}$. Чи буде така неперервна функція диференційованою в точці $x=1$? Якщо так, то знайдіть її похідну в цій точці за означенням похідної.

1.9. Функція $f\left(x\right)$ визначена для всіх $x\in\mathbb{R}$. Відомо, що для кожного $x\in\mathbb{R}$ та кожного $h\neq 0$ виконується нерівність

$$\left|f\left(x+h\right)-f\left(x-h\right)\right|<h^2.$$

Доведіть, що $f\left(x\right)\equiv const$.

1.10. Функція $f\left(x\right)$ неперервна на $\left[0;1\right]$ і диференційована на $\left(0;1\right)$, причому $f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$. Доведіть, що $f'\left(x\right)=f\left(x\right)$ в деякій точці $x\in\left(0;1\right)$.

Вправи до розділу II

2.1. Доведіть, що кожна монотонна на деякому відрізку $[a;b]$ адитивна функція f є лінійною функцією.

2.2. Розв'яжіть методом Коші в класі неперервних функцій рівняння $f(x+y)+f(x-y)=2\big(f(x)+f(y)\big)$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

2.3. Розв'яжіть у класі неперервних функцій неоднорідне рівняння Коші $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

2.4. Розв'яжіть у класі неперервних функцій рівняння:

а). $f(x+y)=f(x)+y$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$;

б). $f(x+y)-f(x-y)=4xy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

2.5. Розв'яжіть у класі неперервних функцій рівняння:

а). $f(x+y)=\big(f(x)\big)^y$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$;

б). $f(x\cdot y)=\big(f(x)\big)^y$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$;

в). $f(x+y)=f(x)\cdot e^y$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$;

г). $f(x+y)=\big(f(x)\big)^{\ln f(y)}$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$.

Нагадаємо, що степенево-показникові функції вигляду u^v розглядаються лише за умови, що функція u набуває додатних значень.

2.6. Знайдіть двома способами у класі неперервних функцій усі розв'язки рівняння $f(x+y)=2^{xy}f(x)f(y)$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$:

а) шукаючи розв'язок як добуток двох функцій;

б) логарифмуючи обидві частини рівняння.

2.7. Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для будь-яких дійсних x та y виконується рівність $f\big(x\cdot f(y)\big)=x^2y^4$.

2.8. Доведіть, що не існує функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка одночасно задовольняє дві наступні умови:

а) множина значень f співпадає з $\mathbb{R}$;

б) для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$f\big(f(x)\big)=\big(f(x)+1\big)(x+1).$$

Вправи до розділу III

3.1. Чи існує лінійна функція, яка для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє рівняння:

а). $2f(x+2)+f(4-x)=2x+7$;

б). $f(x+3)-f(2-x)=2x+3$;

в). $f(x+2)-f(1-x)=2x+1$.

3.2. Знайдіть усі розв'язки рівняння

$$f(x^2)-f(y^2)=(x+y)\big(f(x)-f(y)\big),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$$

які задовольняють початкові умови: $f(0)=1$, $f(1)=2$.

3.3. Розв'яжіть у класі неперервних функцій рівняння

$$f(x^y)=\big(f(x)\big)^{f(y)},\ x \in (0;+\infty),\ y \in (0;+\infty),\ f(x)>0.$$

3.4. Знайдіть усі розв'язки рівняння

$$f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)\cos x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

3.5. Доведіть, що наступні два рівняння не мають розв'язків, відмінних від $f(x)\equiv 0$:

а). $f(x+y)+f(x-y)=yf(x),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$;

б). $f(x+y)+f(x-y)=4f(x),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$.

Вправи до розділу IV

4.1. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, які для всіх дійсних $x \neq 0$ задовольняють наступні рівняння: а). $f(x)-xf(-x)=\dfrac{1}{x}$; б). $f(x)-xf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$; в). $f(x)-xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$.

4.2. Розв'яжіть рівняння $f(x)+2f\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)=x+1,\ x \neq 2$.

4.3. Доведіть, що при кожному $a \neq 0$ функція $\varphi(x)=\dfrac{a^2}{a-x}$ є циклічною функцією третього порядку.

4.4. Розв'яжіть рівняння $f(x)+f\left(\dfrac{4}{2-x}\right)=x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0;2\}$.

4.5. Розв’яжіть рівняння $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

4.6. Розв’яжіть рівняння

$$f\left(\frac{x}{1-x}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=x,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}.$$

4.7. Розв’яжіть рівняння

$$f(x+y)=\alpha^x f(y)+\beta^y f(x),\ x\in(0;\infty),\ y\in(0;\infty),$$

де $\alpha\in(0;+\infty)\setminus\{1\},\ \beta\in(0;+\infty)\setminus\{1\},\ \alpha\neq\beta$:

а) зведенням до системи трьох рівнянь;

б) методом відокремлення змінних.

Вправи до розділу V

5.1. Розв’яжіть рівняння $f^3(x)-f^2(x)+f(x)-1=0,\ x\in\mathbb{R}$.

5.2. Знайдіть усі квадратичні функції, які задовольняють рівняння $3f(1-x)-f(x)=2x^2-10x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

5.3. Розв’яжіть у класі многочленів рівняння

$$f^2(x)-f\left(f(x)\right)=x^2-3x+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

5.4. Доведіть, що функція, задана рівністю $f(x+1)=\frac{4}{2-f(x)}$ є періодичною на своїй області визначення.

5.5. Доведіть, що кожна обмежена функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняє умову

$$f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

є періодичною.

5.6. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, для яких при кожному $n\in\mathbb{N}$ справджується рівність $f\left(f(n)\right)+f^2(n)=n^2+3n+3$.

5.7. Доведіть, що не існує неперервної функції, яка для всіх $x\in\mathbb{R}$ задовольняє умову $f\left(f(x)\right)=1-x$.

5.8. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких з рівності $x+e^x=y+e^y$ випливає, що $f(x)=f(y)$.

5.9. Розв’яжіть рівняння $f(x)=2f(2x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, у класі обмежених в околі точки $x_0=0$ функцій.

5.10. Знайдіть усі неперервно диференційовані розв’язки рівняння $f(2x+1)=2f(x)+3$, $x\in\mathbb{R}$.

5.11. Знайдіть усі двічі неперервно диференційовані розв’язки рівняння $4f(3x)-9f(2x)=6x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

5.12. Розв’яжіть рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2\left(f(x)+f(y)\right),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

у класі двічі неперервно диференційованих функцій.

5.13. Розв’яжіть рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, $x\in\mathbb{R}$, у класі неперервно диференційованих функцій, звівши його до диференціального рівняння.

5.14. Методом відокремлення змінних розв’яжіть рівняння

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}.$$

5.15. Дослідіть, чи існують такі функції f та g, які не є тотожними нулями і для всіх $x\in\mathbb{R}$ та $y\in\mathbb{R}$ задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x), \\ g(x+y)=g(x)g(y)+f(x)f(y). \end{cases}$$

Вправи до розділу VI

6.1. Числа Пелля визначаються рівностями: $P_0=0$, $P_1=1$, $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$, $n\ge 0$. Запишіть загальну формулу для елементів послідовності таких чисел.

6.2. Знайдіть розв’язок рівняння $f(x+2)-3f(x+1)=0$, $x\in\mathbb{R}$, який задовольняє початкову умову $f(1)=3$.

6.3. Знайдіть розв’язок рівняння

$$f(x+2)-4f(x+1)-5f(x)=0,\ x\in\mathbb{Z},$$

який задовольняє початкові умови: $f(0)=2$, $f(1)=4$.

6.4. Знайдіть загальні розв’язки наступних однорідних різницевих рівнянь:

а). $f(x+3)-6f(x+2)+12f(x+1)-8f\left(x\right)=0,\ x\in\mathbb{R}$;

б). $f(x+2)-2f(x+1)+2f\left(x\right)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

6.5. За відомими коренями $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2,\ \lambda_4=-1+\sqrt{3}i$, $\lambda_4=-1-\sqrt{3}i$ характеристичного рівняння запишіть:

а) загальний розв'язок відповідного однорідного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами;

б) загальний вигляд часткового розв'язку відповідного неоднорідного рівняння, якщо $Q\left(x\right)=x+\left(1+\cos\dfrac{\pi x}{3}\right)\cdot 2^x$.

6.6. Знайдіть розв'язок рівняння

$$f(x+2)+4f(x)=4\sin^3\frac{\pi x}{2},\ x\in\mathbb{R},$$

який задовольняє такі початкові умови: $f(0)=0,\ f(1)=-\dfrac{2}{3}$.

6.7. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$f(x+1)-f(x)=6x^2,\ x\in\mathbb{R}.$$

6.8. Методом варіації довільних сталих знайдіть загальний розв'язок рівняння $f(x+1)-4f\left(x\right)=2^{x+1},\ x\in\mathbb{R}$.

6.9. Розв'яжіть рівняння:

а). $f(x+1)-\dfrac{2x+1}{2x-1}f(x)=0,\ x\in\mathbb{Z}$;

б). $f(x+1)-\dfrac{2x+1}{2x-1}f(x)=2x+1,\ x\in\mathbb{Z}$.

Вправи до розділу VII

7.1. Нехай $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Обчисліть значення суми

$$S=f\left(0\right)+f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+\ldots+f\left(\frac{2016}{2017}\right)+f\left(1\right).$$

Як зміниться це значення для $f(x)=\dfrac{9^x}{9^x-3}$?

7.2. Неперервна функція f визначена на відрізку $[0;1]$ і задовольняє на ньому тотожність $f\left(f\left(x\right)\right)\equiv x^2$. Доведіть, що для всіх $x\in\left(0;1\right)$ виконуються нерівності $x^2<f\left(x\right)<x$. Наведіть приклад такої функції.

7.3. Наведіть приклад хоч одного многочлена $P\left(x\right)$, для якого $P\left(x\right)\geq 2017\cdot P'\left(x\right)$ при кожному $x\in\mathbb{R}$.

7.4. Чи існує функція $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ така, що для всіх $n\in\mathbb{Z}$

$$f\left(f\left(n\right)-2n\right)=2f\left(n\right)+n?$$

7.5. Знайдіть усі неперервні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких $f\left(1\right)=2$ та для всіх дійсних чисел x та y виконується рівність

$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)f\left(x\right)-f\left(x+y\right)+1;$$

7.6. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які задовольняють умови:

1) для всіх дійсних чисел x та y виконується рівність

$$f\left(2x\right)=f\left(x+y\right)f\left(y-x\right)+f\left(x-y\right)f\left(-x-y\right);$$

2) $f\left(x\right)\geq 0$ для всіх дійсних x.

7.7. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що для всіх дійсних чисел x та y виконується рівність $f\left(xy+f\left(x\right)\right)=xf\left(y\right)+f\left(x\right)$.

7.8. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, які для всіх $x\in\mathbb{Q}$ одночасно задовольняють наступні дві умови:

а). $f(x+1)=f(x)+1$; б). $f(x^2)=f^2(x)$.

7.9. Нехай функція $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ задовольняє нерівність $f\left(n\right)+f\left(n+2\right)\leq 2f\left(n+1\right)$. Доведіть, що на площині існує така пряма, яка містить нескінченну кількість точок з координатами $\left(n;f\left(n\right)\right)$.

7.10. Знайдіть усі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, які для всіх дійсних чисел x, y, z, t задовольняють нерівність

$$f\left(x+y\right)+f\left(x+z\right)+f\left(x+t\right)+f\left(y+z\right)+f\left(y+t\right)+f\left(z+t\right)\geq$$
$$\geq 6f\left(x-3y+5z+7t\right).$$

Відповіді та вказівки до розв'язування вправ

1.1. $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $E(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, скористайтеся рівністю $f(x)=2-\dfrac{5}{x+2}$; $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{2-x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

1.2. Спадає на інтервалі $(-\infty;-0,25)$ та зростає на інтервалі $(-0,25;+\infty)$. Скористаєтеся рівністю $f(x)=2(x+0,25)^2-3,125$.

1.3. а). Парна. б). Ні парна, ні непарна. в). Непарна.

1.4. Рівняння $2x^2+x-3=0$ має лише два дійсні корені.

1.5. $T=\pi$. Запишіть тотожність $\sin 2(x+T)\equiv\sin 2x$ у вигляді $2\sin T\cdot\cos(2x+T)\equiv 0$ і знайдіть звідси T.

1.6. Підставте цю функцію у рівняння і скористайтеся формулами зведення.

1.7. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-x}$, $x\in R\setminus\{-2;2\}$.

1.8. Оскільки $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=2x+3$ для всіх $x\neq 1$, то слід покласти $f(1)=5$. При цьому

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1}=2.$$

1.9. Замініть $x-h$ на x і запишіть задану нерівність у вигляді

$$\left|\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\right|<\frac{|h|}{2}.$$

Далі, перейшовши до границі при $h\to 0$, доведіть, що $f'(x)\equiv 0$.

1.10. Для функції $g(x)=f(x)e^{-x}$ скористайтеся теоремою Ролля на відрізку $[0;1]$ та рівністю $g'(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}$.

2.1. Обґрунтуйте, що така функція є обмеженою на цьому відрізку значеннями $f(a)$ та $f(b)$.

2.2. $f(x)=ax^2$, $a\in R$. Послідовно виконайте наступні дії: підстановкою $y=0$ знайдіть $f(0)=0$; підстановками $y=x$ та

$y=-x$ доведіть парність функції; покладаючи $f(1)=a$, доведіть за індукцією, що $f(n)=an^2$, $n\in\mathbb{N}$; доведіть за індукцією, що $f\left(\frac{1}{2^m}\right)=\left(\frac{1}{2^m}\right)^2\cdot a$, $m\in\mathbb{N}$; обґрунтуйте, що $f\left(\frac{n}{2^m}\right)=\left(\frac{n}{2^m}\right)^2\cdot a$; скористайтеся граничним переходом; зробіть перевірку.

2.3. $f(x)=ax-1$, $a\in\mathbb{R}$. Врахуйте, що функція $h(x)\equiv-1$ задовольняє рівняння і покладіть $f(x)=g(x)-1$.

2.4. а). $f(x)=x+a$, $a\in\mathbb{R}$. Шукайте розв'язок у вигляді $f(x)=g(x)+x$. б). $f(x)=x^2+a$, $a\in\mathbb{R}$. Шукайте розв'язок у вигляді $f(x)=g(x)+x^2$.

2.5. а). $f(x)\equiv1$; б). $f(x)=a^x$, $a\in(0;+\infty)$; в). $f(x)=ae^x$, $a\in(0;+\infty)$; г). $f(x)\equiv1$ та $f(x)=e^{a^x}$, $a\in(0;+\infty)$. Логарифмуйте обидві частини рівнянь за основою e і покладіть $g(x)=\ln f(x)$.

2.6. $f(x)\equiv0$ або $f(x)=2^{h(x)}$, де $h(x)=\frac{x^2}{2}+ax$, $a\in\mathbb{R}$.

а). Шукайте розв'язок у вигляді добутку $f(x)=g(x)\cdot2^{\frac{x^2}{2}}$.

б). Доведіть, що $f(x)\geq0$, і у випадку $f(x)>0$ логарифмуйте обидві частини рівняння за основою 2.

2.7. $f(x)=x^2$. Для $y=1$ та $f(1)=a$ отримаємо $f(ax)\equiv x^2$. При цьому $a\neq0$. Тому $f(x)=cx^2$. Доведіть, що $c=1$.

2.8. Для $x=-1$ маємо $f(f(-1))=0$. Якщо $f(a)=-1$, то для $x=a$ отримуємо $f(-1)=0$, тому й $f(0)=f(f(-1))=0$. Але тоді для $x=0$ з другої умови маємо суперечність $0=1$.

3.1. а). Існує. $f(x)=2x-3$; б). Не існує; в). Такими є всі функції $f(x)=x+b$, де $b\in\mathbb{R}$. У кожному з випадків шукайте розв'язок у вигляді $f(x)=ax+b$.

3.2. $f(x)=x+1$. Нехай $f(x)=x+1+g(x)$, де $g(0)=g(1)=0$.

Тоді $g(x^2)-g(y^2)=(x+y)(g(x)-g(y))$ для всіх $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$. Для $y=0$ маємо $g(x^2)\equiv xg(x)$, тому функція g – непарна, і $g(-1)=0$. Далі послідовно підставте $y=1$ та $y=-1$ і доведіть, що $g(x)\equiv 0$.

3.3. $f(x)\equiv 1$ та $f(x)=x$. Якщо існує таке α, для якого $f(\alpha)\neq 1$, то підставимо $x=\alpha$, $y=zt$. Тоді за умовою задачі

$$(f(\alpha))^{f(zt)}=f(\alpha^{zt})=f\left(\left(\alpha^z\right)^t\right)=\left(f\left(\alpha^z\right)\right)^{f(t)}=$$

$$=\left(\left(f(\alpha)\right)^{f(z)}\right)^{f(t)}=\left(f(\alpha)\right)^{f(z)f(t)}\Rightarrow f(zt)=f(z)f(t).$$

Враховуючи цю рівність, підставимо $x=\alpha$, $y=z+t$. Тоді

$$(f(\alpha))^{f(z+t)}=f(\alpha^{z+t})=f\left(\alpha^z\cdot\alpha^t\right)=f\left(\alpha^z\right)f\left(\alpha^t\right)=$$

$$=\left(f(\alpha)\right)^{f(z)}\left(f(\alpha)\right)^{f(t)}=\left(f(\alpha)\right)^{f(z)+f(t)}\Rightarrow f(z+t)=f(z)+f(t).$$

З адитивності функції f отримуємо, що $f(x)=kx$. А з її мультиплікативності знаходимо $k=1$.

3.4. $f(x)=a\sin x$, $a\in\mathbb{R}$. Для $y=\dfrac{\pi}{2}$ позначте $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a$. Далі, з рівності $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=a\cos x$ визначте $f(x)$.

3.5. а). Виконайте послідовно такі три підстановки: $x=y=0$, $y=x\in\mathbb{R}$ та $y=-x\in\mathbb{R}$. При цьому відповідно отримаємо $f(0)=0$, $f(2x)\equiv xf(x)$ та $f(2x)\equiv -xf(x)$. Тому $f(x)\equiv 0$.

б). Підстановкою $x=y=0$ отримайте $f(0)=0$ і припустіть, що $f(a)=b\neq 0$ для деякого $a\neq 0$. Далі виконайте такі чотири підстановки: $x=y=a$; $x=2a,\ y=a$; $x=3a,\ y=a$; $x=2a,\ y=2a$. Порівняйте отримані двома способами значення $f(4a)$.

4.1. а). $f(x)=\dfrac{1-x}{x\left(x^2+1\right)}$; б). $f(x)=\dfrac{1-x^3}{2x}$; в). Таких не існує.

4.2. $f(x)=\dfrac{x^2-7x-4}{3(2-x)}$. Циклічна підстановка $\varphi(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$.

4.3. Знайдіть $\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=\dfrac{ax-a^2}{x}$ та $\varphi\left(\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)\right)\equiv x$.

4.4. $f(x)=\dfrac{x^3-4x+8}{2x\left(x-2\right)}$. Циклічна підстановка $\varphi(x)=\dfrac{4}{2-x}$.

4.5. $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x\left(x-1\right)}$. Циклічна підстановка $\varphi(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4.6. $f(x)=-\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{2x\left(x+1\right)}$. Підстановками $x=t$, $x=\dfrac{1}{1-t}$ та $x=\dfrac{t-1}{t}$ отримайте систему трьох рівнянь і знайдіть $f\left(-\dfrac{1}{t}\right)$.

4.7. $f(x)=c\left(\beta^x-\alpha^x\right),\ c\in\mathbb{R}$.

а). Спочатку підстановкою $x=y=0$ знайдіть $f(0)=0$. Далі виконайте такі три підстановки: $x=t,\ y=-t$, $x=1,\ y=-t$ та $x=-t,\ y=1$ і з отриманої системи визначте $f\left(t\right)$.

б). Враховуючи симетричність лівої частини рівняння, відокремте змінні в рівності $\alpha^x f(y)+\beta^y f(x)=\alpha^y f(x)+\beta^x f(y)$.

5.1. $f(x)\equiv 1$. Запишіть рівняння у вигляді

$$\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)+1\right)=0.$$

5.2. $f(x)=x^2+x$. Скористайтеся методом невизначених коефіцієнтів.

5.3. $f(x)=1-x$. Доведіть, що $f(x)$ є многочленом не вище другого степеня і використайте метод невизначених коефіцієнтів.

5.4. Доведіть, що $f(x+2)=\dfrac{2f(x)-4}{f(x)}$, $f(x+3)=f(x)$.

5.5. За аналогією з прикладом 51 доведіть, що період $T=1$.

5.6. $f(n)=n+1$. Підставте $n=1$ і розгляньте випадки $f(1)=1$ та $f(1)=2$. Завершіть розв’язання за індукцією.

5.7. Доведіть ін’єктивність, отже, й монотонність такої функції. Врахуйте, що при цьому ліва та права частини рівняння будуть мати різну монотонність.

5.8. Всі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Запишіть рівність у вигляді $e^x-e^y=y-x$ і для функції e^x скористайтеся теоремою Лагранжа: $e^x-e^y=e^c\left(x-y\right)$, де c лежить між x та y. Але $e^c\neq-1$, то $x=y$.

5.9. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{3}$. Проведіть заміну $2x=t$ і запишіть рівняння у вигляді $f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{t}{2}\right)-\dfrac{t}{4}$. Далі використайте граничний перехід.

5.10. $f\left(x\right)=a\left(x+1\right)-3,\ a\in\mathbb{R}$. Покладіть $g\left(x\right)=f'\left(x\right)$.

5.11. $f\left(x\right)=ax^2-x+1,\ a\in\mathbb{R}$. Покладіть $g\left(x\right)=f''\left(x\right)$.

5.12. $f\left(x\right)=ax^2,\ a\in R$. Підстановкою $y=0$ переконайтеся, що $f\left(0\right)=0$. Тоді для $y=x$ отримайте рівність $f\left(2x\right)=4f\left(x\right)$. Двічі здиференціювавши її, розгляньте функцію $g\left(x\right)=f''\left(x\right)$.

5.13. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}+ax,\ a\in R$. Доведіть, що $f(0)=0$, і в рівності $\dfrac{f\left(x+y\right)-f\left(x\right)}{y}=\dfrac{f\left(y\right)-f\left(0\right)}{y}+x$ знайдіть границі при $y\to0$.

5.14. $f\left(x\right)\equiv0$ та $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$, де a – довільна стала. Для $f\left(x\right)\neq0$ запишіть рівняння у вигляді $\dfrac{x\left(1-f\left(x\right)\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{y\left(f\left(y\right)-1\right)}{f\left(y\right)}$.

5.15. Наприклад, $f\left(x\right)=\operatorname{sh}\omega x$ та $g\left(x\right)=\operatorname{ch}\omega x,\ \omega\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

6.1. $P_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}},\ n\geq0$.

6.2. $f\left(x\right)=3^x$. Розгляньте функцію $g\left(x\right)=f\left(x+1\right)$.

6.3. $f\left(x\right)=5^x+\left(-1\right)^x$.

6.4. а). $f\left(x\right)=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)\cdot2^x$;

б). $f\left(x\right)=\left(C_1\cos\dfrac{\pi x}{4}+C_2\sin\dfrac{\pi x}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x$.

6.5. а). $f_0(x)=C_1+C_2x+C_3\cdot 2^x+x\left(C_4\cos\frac{2\pi x}{3}+C_5\sin\frac{2\pi x}{3}\right)\cdot 2^x$;

б). $\varphi(x)=(ax+b)x^2+cx\cdot 2^x+\left(d\cdot\cos\frac{\pi x}{3}+e\cdot\sin\frac{\pi x}{3}\right)\cdot 2^x$.

6.6. $f(x)=(1-2^x)\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3}x\sin\frac{3\pi x}{2}$. Для спрощення правої частини скористайтеся формулою $4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$.

6.7. $f(x)=2x^3-3x^2+x+c$, $c\in\mathbb{R}$. Врахуйте, що

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

6.8. $f(x)=C\cdot 4^x-2^x$, $C\in\mathbb{R}$.

6.9. а). $f(x)=c(1-2x)$, $c\in\mathbb{R}$; б). $f(x)=(2x-1)(x+c)$, $c\in\mathbb{R}$.

7.1. $S=1009$. Двічі доведіть рівності: $f(x)+f(1-x)=1$.

7.2. Доведіть, що на інтервалі $(0;1)$ не існує таких x_1 та x_2, для яких $f(x_1)\equiv x_1$ та $f(x_2)\equiv x_2^2$. З неперервності f, зробіть висновок про збереження знаку функціями $g(x)=f(x)-x^2$ та $h(x)=x-f(x)$. Обґрунтуйте, що він не може бути від'ємним.

Підходить, наприклад, $f(x)=x^{\sqrt{2}}$.

7.3. Наприклад, $P(x)=x^2+2017^2$.

7.4. Існує. Наприклад, $f(n)=\begin{cases} n, & n\geq 0, \\ -3n, & n<0. \end{cases}$

7.5. $f(x)=x+1$. Скористайтеся результатами прикладу 113 і завершіть доведення граничним переходом.

7.6. $f(x)=0$ та $f(x)=0{,}25$. Для $x=y=0$ отримайте, що $f(0)=0$ або $f(0)=0{,}25$. Проаналізуйте ці два варіанти окремо.

7.7. $f(x)\equiv 0$ та $f(x)=x$. Припустивши, що $f(a)=f(b)\neq 0$, з системи двох рівностей $f(ab+f(a))=af(b)+f(a)$ та $f(ab+f(b))=bf(a)+f(b)$ отримаємо $a=b$, тобто ін'єктивність функції f, відмінної від $f(x)\equiv 0$. Підставивши тепер в рівняння $y=0$, з тотожності $f(f(x))\equiv f(x)$ будемо мати $f(x)=x$.

7.8. $f(x)=x$, $x\in\mathbb{Q}$. За першою умовою доведіть, що $f(x+n)=f(x)+n$ для всіх $x\in\mathbb{Q}$ та всіх $n\in\mathbb{Z}$. Далі для $p\in\mathbb{Z}$ та $q\in\mathbb{N}$ скористайтеся рівностями:

$$f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2f\left(\frac{p}{q}\right)q+q^2=\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q\right)^2=f^2\left(\frac{p}{q}+q\right)=f\left(\left(\frac{p}{q}+q\right)^2\right)=$$

$$=f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2+2p+q^2\right)=f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)+2p+q^2=f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2p+q^2.$$

Звідси маємо $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$.

7.9. Нехай $g(n)=f(n+1)-f(n)$. Тоді з умови задачі маємо $g(n+1)\le g(n)$ для всіх $n\in\mathbb{N}$, тобто функція g – не зростаюча. Доведемо, що вона невід'ємна.

Справді, з нерівності $g(k)\le -1$ при деякому $k\in\mathbb{N}$ для $n\ge f(k)$ отримуємо суперечність:

$$f(k+n)=f(k)+\sum_{i=k}^{k+n-1}g(i)\le f(k)+g(k)\cdot n\le f(k)-n\le 0.$$

Отже, з нерівностей $g(1)\ge g(2)\ge\ldots\ge g(n)\ge\ldots\ge 0$ випливає існування такого цілого числа $m\ge 0$ та натурального числа n_0, що $g(n)=m$ для всіх $n\ge n_0$. Тоді з рівності $f(n+1)-f(n)=m$ для таких n отримуємо, що деяка пряма вигляду $y=mx+a$ містить нескінченну кількість вказаних в умові точок.

7.10. $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. З підстановки $x=a\in\mathbb{R}$, $y=z=t=0$ отримайте нерівність $f(0)\ge f(a)$, а з підстановки $x=y=t=\frac{a}{2}$, $z=-\frac{a}{2}$ прийдіть до нерівності $f(0)\le f(a)$.

Список рекомендованої літератури

1. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными / Пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
2. *Брайман В.Б., Кукуш О.Г.* Відкриті студентські олімпіади механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: 1995 – 2014: навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 188 с.
3. *Бродский Я.С., Слипенко А.К.* Функциональные уравнения. – К.: Вища школа, 1983. – 96 с.
4. *Войцехівська В.* Функціональні рівняння. – К.: ТОВ «Праймдрук», 2012. – 48 с.
5. *Вороний О.М.* Функціональні рівняння в олімпіадній математиці: Методичний посібник. – Кіровоград: РВВ КДПУ імені В. Винниченка, 2010. – 68 с.
6. *Гургула С.І., Савчук Я.І.* Збірник задач студентських математичних олімпіад. – Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2014. – 357 с.
7. *Гринчук Л.В., Сорока О.О.* Функціональні рівняння та методи їх розв'язування. – Хмельницький: ОІППО, 2012. – 40 с.
8. Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1987. – 416 с.
9. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
10. *Курченко О.О., Рабець Л.В.* Задачі студентських олімпіад з математики: навчальний посібник. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – 166 с.
11. *Лихтарников Л.М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. – СПб: Лань, 1997. – 160 с.
12. *Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А.* Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. – Київ: Техніка, 2003. – 541 с.
13. *Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А.* Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Львів: Каменяр, 2010. – 549 с.
15. *Мітельман І.М.* Розвязуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного. – Одеса: ТЕС, 2014. – 67 с.

16. *Пенцак Є.Я., Юрчишин А.С.* Функційні рівняння: Методичний посібник. – Львів: РВВ Львів. ун-ту, 1998. – 112 с.
17. *Садовничий В.А., Подколзин А.С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1978. – 208 с.
18. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. – Житомир: ЖДПУ, 2002. – 298 с.
19. *Федак І.В.* Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.
20. *Федак І.В.* Обласні турніри юних математиків: 2005 – 2016 рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 160 с.
21. *Федак І.В.* Олімпіади з математики: 1987–2016 роки. Завдання, відповіді. – Х.: ВГ «Основа», 2016. – 239 с.
22. *Федак І.В.* Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 100 с.
23. *Фомин Д.В., Кузнецова Г.М.* Международные математические олимпиады. – М.: Дрофа, 1988. – 160 с.
24. *Ясінський В.А*. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
25. *Ясінський В.А*. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції. – Харків: ВГ «Основа», 2005. – 96 с.
26. *Ясінський В.А., Панасенко О.Б.* Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра. – Вінниця: Середняк Т.К., 2015. – 272 с.
27. Матеріали Всеукраїнських турнірів юних математиків імені профессора М.Й. Ядренка 1998 – 2016 рр.
28. Матеріали Всеукраїнських олімпіад з математики 2010 – 2017 рр.
29. Матеріали Міжнародних математичних олімпіад 1989 – 2018 рр.

Електронні ресурси

http://www.tym.in.ua – сайт Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

http://www.matholymp.com.ua – сайт Київських і Всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики.

http://www.imo-official.org – офіційний сайт міжнародних олімпіад з математики.

http://eqworld.ipmnet.ru – міжнародний науково-освітній сайт.

Зміст