

Міністерство освіти, науки, молоді і спорту України
Прикарпатський університет імені Василя Стефаника

Кафедра алгебри та геометрії

Методичні рекомендації до основного курсу «Алгебра та геометрія» напрямів «Фізика» і «Прикладна фізика»

Підготував
Доцент Атаманюк Богдан Васильович

Затверджено протоколом засідання кафедри алгебри та геометрії № 2 від 17.10.2011 р.
Рецензенти: д.ф.-м.н. Загороднюк А.В., к.ф.-м.н. Никифорчин О.Р.

Івано-Франківськ
2011

Робоча програма з лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Список використаної літератури:

- [1] Александров П.С. «Курс аналітичної геометрії і лінійної алгебри» М.: «Наука», 1979р.
- [2] Діскант В.І., Береза Л.Р. «Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії» К.: «Вища школа», 2001р.
- [3] Ільїн В.А. Позняк Е. Г. «Аналітична геометрія» М.: «Наука», 1988р.
«Лінійна алгебра» М.: «Наука», 1984р. (24.14я73 И46)
- [4] Рудавський Ю. К., Костробій П.П. «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» Львів: «Бескид Біт», 2002р.

I семестр

Лекція №1

Дії з векторами. Скалярний добуток та його властивості.

Література:.

[3] Ильин В. А. – Позняк Е. Г. «Аналитическая геометрия»

[4] Рудавський Ю.К. Розділ 3, §6,7.

Практична №1.

Дії з векторами. Скалярний добуток. Ортогональність та колінеарність векторів.

Аудиторно: Діскант - № 332-340.

Д/з №1: Діскант № 341-357.

Лекція №2

Дії з векторами. Векторні добутки, їх властивості і застосування.

Література:.

[3] глава 2 §3

[4] Розділ 3, §8,10.

Практична №2

Дії з векторами:

- 1) Векторний добуток;
- 2) Подвійний векторний добуток
- 3) Застосування до знаходження площ та колінеарності векторів

Аудиторно: Діскант - № 387-389.

Д/з №2: Діскант № 358-378.

Лекція №3

Дії з векторами.

- 1) Змішані добутки;
- 2) Їх властивості та застосування до об'ємів кубів;
- 3) Застосування до компланарності векторів.

Література:.

[3] глава 2 §3

[4] Розділ 3, §9.

Практична №3

Дії з векторами:

- 1) Змішаний добуток;
- 2) Застосування до знаходження тетраедра;
- 3) Застосування до знаходження відстані від точки до прямої в просторі;
- 4) Застосування до відстаней між мимобіжними

Аудиторно: Діскант - № 379-386.

Д/з №3: Діскант № 396-402; 459 – 468.

Лекція №4

- 1) Різні види рівняння прямої на площині.
- 2) Відстань від точки до прямої на площині.

Література::

[1] глава 1 §5

[3] глава 5 §1,2.

[4] Розділ 4, §12.

Практична №4

Різні види рівняння прямої на площині

Аудиторно: Діскант - № 489-506.

Д/з №4: Діскант № 507-522.

Лекція №5

Різні види рівняння прямої в просторі.

- 1) Канонічний запис;
- 2) Параметричний запис;
- 3) Системний запис;
- 4) Відстань від точки до прямої в просторі;
- 5) Перехід від системного запису до канонічного

Література::

[1] глава 1 §6

[3] глава 4 §5.

[4] Розділ 5, §16.

Практична №5

Різні види рівняння прямої в просторі. Перехід від системного запису до канонічного

Аудиторно: Діскант - № 557-562.

Д/з №5: Діскант № 563-600.

Лекція №6

- 1) Різні види рівняння площини у просторі.
- 2) Відстань від точки до площини у просторі.
- 3) Відстань між мимобіжними прямими.
- 4) рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних

Література:

[3] глава 5 §3,5.

[4] Розділ 5, §15, 17.

Практична №6

Різні види рівняння площини у просторі

Аудиторно: Діскант - № 597-606.

Д/з №6: Діскант № 523-556.

Лекція №7

Задачі на пряму та площину у просторі

Література:

[3] глава 5 §5 (п.1 -14).

[4] Розділ 5, §17.

Практична №7

Векторна алгебра в задачах

1) Задачі про бісектриси, висоти, медіани на площині та в просторі;

2) Обчислення довжин, площ і об'ємів.

Аудиторно: Діскант - № 162-178.

Д/з №7: Діскант № 179-196.

Лекція №8

Матриці. Дії з матрицями. Алгоритм знаходження оберненої матриці

Література:

[3] розділ 5 §1.

[2] Розділ 1.

Практична №8

Дії з матрицями. Добуток матриць.

Аудиторно: Діскант - № 1-10.

Д/з №8: Діскант № 11-60.

Лекція №9

1) Визначники та їх властивості.

2) Правило Сарруса.

3) Визначник Вандермонда.

4) Визначник Грама.

5) Мінори

Література:

[3] доповнення до глави 1.

[4] Розділ 1, §2.

Практична №9

1) Визначники та їх властивості;

2) Правила обчислення визначників.

Різні види рівняння прямої на площині

Аудиторно: Діскант - № 63-76.

Д/з №9: Діскант № 99-122.

Лекція №10

Системи лінійних рівнянь

1) Однорідні та неоднорідні системи. Запис розв'язків.

2) Теорема Кронеккера - Капеллі.

3) Метод Гауса.

Література:

[1] глава 11 §7, глава 12 §5,

[2] § 33

[3] доповнення до глави 1.

[4] Розділ 2, §3, 4, 5.

Практична №10

Методи розв'язування систем. Метод Гауса.

Аудиторно: Діскант - № 278-280.

Д/з №10: Діскант № 281-297.

Лекція №11

- 1) Теорема про ранг матриці (про базисний мінор).
- 2) Матричний метод.
- 3) Правило Крамера.

Література:

[1] глава 11 §6

[2] § 1,3, § 3,2

[4] Розділ 2, § 4, 5.

Практична №11

Методи розв'язування систем.

- 1) Правило Крамера;
- 2) Матричний метод.

Аудиторно: Діскант - № 266-277.

Д/з №11: Діскант № 252-265.

Лекція №12

- 1) Теорема про фундаментальну систему розв'язків. Методи знаходження рангу матриці.
- 2) Метод Гауса. Зведення до трапецієвидної форми.
- 3) Метод окантовуючих мінорів.

Література:

[1] глава 11 §7, теор.12

[4] Розділ 2, § 5 (п.5).

Практична №12

Методи розв'язування систем.

- 1) Метод Гауса. Зведення до трапецієвидної форми;
- 2) Метод окантовуючих мінорів.

Аудиторно: Діскант - № 241-265.

Д/з №12: Діскант № 301-313.

II семестр

Лекція №1

Лінійні простори:

- 1) Базис та розмірність;
- 2) Теорема про лінійну залежність та незалежність векторів;
- 3) Теорема про суму розмірностей;
- 4) Теорема єдиності розкладу за базисом;
- 5) Пряма сума векторних просторів і теорема єдиності розкладу вектора з прямої суми

Література::

[1] глава 11 §1, 2, 4, 5

[2] § 2.2.2

[3] глава 2 §1.

[4] Розділ 3, §6,+ Розділ 6, §19.

Практична №1.

Лінійні простори.

- 1) Базис та розмірність;
- 2) Формули переходу від однієї системи координат до іншої.

Аудиторно: Діскант - № 203-208.

Д/з №1: Діскант № 209-218, +219-227.

Лекція №2

Геометрична інтерпретація розв'язків системи рівнянь з трьома невідомими.

Література::

[1] глава 12 §5, теорема 2.

[2] § 5.2

[4] Розділ 2, §3 + §5, п.6.

Практична №2

Геометрична інтерпретація розв'язків системи рівнянь з трьома невідомими.

Аудиторно: Діскант - № 622-625.

Д/з №2: Діскант № 622-631.

Лекція №3

Рівняння ліній другого порядку.

- 1) еліпс;
- 2) гіпербола;
- 3) парабола.

Література::

[1] глава 2 §1, 2, 3

[2] розділ 8, § 8.1

[3] глава 6 §1

[4] Розділ 4, §13.

Практична №3

Рівняння ліній другого порядку.

- 1) еліпс;
- 2) гіпербола;
- 3) парабола.

Аудиторно: Діскант - № 778-780 +854-860.

Д/з №3: Діскант № 860-890 (парабола); 801-812 (еліпс), 813 -853 (гіпербола).

Лекція №4

Ортогональні інваріанти кривих другого порядку.

- 1) Інваріанти.
- 2) Центральний випадок.
- 3) Параболічний випадок.

Література:

[1] глава 5 § 1,2,3,4.

[2] розділ 8, § 8.3

[3] глава 6 § 5.

[4] Розділ 4, §13.

Практична №4

Зведення кривих другого порядку до канонічного виду за допомогою ортогональних інваріантів.

Аудиторно: Діскант - № 946-950.

Д/з №4: Діскант № 951-991.

Лекція №5

Класифікація поверхонь другого порядку.

- 1) Еліпсоїди;
- 2) Гіперболоїди;
- 3) Параболоїди;
- 4) Конуси;
- 5) Циліндри

Література:

[1] глава 7 §1,2,3,4,5

[2] ст.235-237 (таблиця видів)

[3] глава 7 §1,2,3.

[4] Розділ 5, §18.

Практична №5

- 1) Еліпсоїди;
- 2) Гіперболоїди;
- 3) Параболоїди;
- 4) Конуси;
- 5) Циліндри.

Аудиторно: Діскант - № 1015-1018.

Д/з №5: Діскант № 1020-1041.

Лекція №6

Ортогональні перетворення. Групи $SO(2)$, $SO(3)$.

Література:

[1] глава 17 §1,2,3

[2] §4.4

[3] глава 3 §3 п.6.

[4] Розділ 6, §20, п.5.

Практична №6

- 1) ортогональний базис;
- 2) ортогональні перетворення;
- 3) ортогональні матриці.

Аудиторно: Діскант - № 396-402.

Д/з **№6**: Діскант № 400-411.

Лекція №7

Білінійні та квадратичні форми

Література:

[1] глава 14 §2

[2] розділ 7, §7.1

[4] Розділ 6, §22, п.1,2.

Практична №7

Методи зведення квадратичних форм до канонічного виду.

- 1) Метод Лагранжа;
- 2) Метод Якобі;
- 3) Метод ортогональних перетворень.

Аудиторно: Діскант - № 734-737.

Д/з **№7**: Діскант № 722-733.

Лекція №8

Знакододатні форми. Критерій Сильвестра.

Література:

[1] глава 14 §8

[2] розділ 7, §7.5

[4] Розділ 6, §22 (п.1.2).

Практична №8

Метод ортогональних перетворень для зведення квадратичних форм до канонічного виду.

Аудиторно: Діскант - № 738-740. (Критерій Сильвестра)

Д/з **№8**: Діскант № 741-752 +758-764.

Лекція №9

Лінійні оператори

- 1) Дії з векторами.
- 2) Власні вектори та власні значення.
- 3) Інваріантні підпростори.

Література:

[1] глава 13 §1,2,3,5 теорема 5.

[2] розділ 6, §6.1, 6.2, 6.4, 6.3

[4] Розділ 6, §20, 21.

Практична №9

Лінійні оператори. Власні вектори та власні значення.

Аудиторно: Діскант - № 675-678.

Д/з №9: Діскант № 661-674.

Лекція №10

Лінійні оператори

- 1) Ядро та образ.
- 2) Теорема про суму рангу і дифекту.

Література:

[1] глава 13 §4, §5, теорема 1,2,3.

[2] розділ 6, § 6.8.

[4] Розділ 6, §20 (п.3).

Практична №10

- 1) Ядро та образ лінійного оператора.
- 2) Дії з лінійними операторами.

Аудиторно: Діскант - № 650-660.

Д/з №10: Діскант № 705-715.

Лекція №11

Лінійні оператори

- 1) Самоспряжені оператори.
- 2) Матриця лінійного оператора.

Література:

[2] розділ 6, § 6.7

[4] Розділ 6, § 20, (п.4,5,6).

Практична №11

Самоспряжені лінійні оператори.

Аудиторно: Діскант - № 686-696.

Д/з №11: Діскант № 697-703.

Лекція №12

Матриця лінійного оператора.

Література:

[1] глава 13, §2.

[2] розділ 6, § 6.2, §6.5, §6.6.

[4] Розділ 6, § 20 (п.2,4,5).

Практична №12

1) Перетворення матриці при переході до нового базису;

3) Матриця у базисі із власних векторів..

Аудиторно: Діскант - № 637-649.

Д/з №12: Діскант № 679-696.

Лекція №13

Системи координат

1) Декартова, полярна, сферична та циліндрична системи координат.

2) Формули переходу від декартової системи координат до полярної.

Література:

[1] глава 1 §2,4

[2] розділ 8, §8.2

[3] глава 6 §3 п.5.

[4] розділ 3, §6, п.6 + розділ 4, §13, п.5.

Практична №13

Декартова та полярна система координат.

Аудиторно: Діскант - № 910-921.

Д/з №13: Діскант № 924-943.

Лекція №14

Евклідові простори як підпростори лінійних просторів.

1) Нерівність Коші-Буняковського;

2) Ортогональність;

3) Визначник Грама та його застосування до знаходження об'ємів кубів і тетраєдрів.

Література:

[2] розділ 4, § 4.2, §4.3, §4.7.

[4] Розділ 6, § 19 (п. 4,5,6,7,8,9).

Практична №13

1) Визначник Грама;

2) Векторні добутки в E^n ;

3) Змішані добутки в E^n .

Аудиторно: Діскант - № 459-468.

Д/з №14: Діскант № 469-488.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА ДЛЯ ФІЗИКІВ 80 задач на 4 варіанти.

Варіант 1 (20 задач).

№ 1. Розв'язати систему методом Гаусса та описати суть методу:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

№ 2. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

№ 3. Розв'язати матричне рівняння та описати алгоритм знаходження оберненої матриці:
 $Ax = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

№ 4. Знайти всі розв'язки системи та описати метод знаходження фундаментальної

системи розв'язків:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = \epsilon \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = \epsilon \end{cases}$$

(*) № 5. Довести формулу для подвійного векторного добутку:
$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$$

№ 6. Довести властивість скалярного добутку: $\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

№ 7. Довести, що операція диференціювання є лінійним оператором.

№ 8. Знайти власні вектори та власні значення оператора: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

№ 9. Довести властивість: визначник звичайної матриці дорівнює визначнику транспонованої матриці $\det A = \det A^T$

№ 10. Дано два лінійно незалежні вектори: \vec{a} і \vec{b} . Знайти параметр λ , при якому наступні два вектори будуть лінійно залежними: $\lambda \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

№ 11. Довести, що коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні, то вектори $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_2 + \vec{a}_3$, $\vec{a}_3 + \vec{a}_1$ також лінійно незалежні.

№ 12. Довести, що сума вектор-медіан трикутника рівна нульовому вектору.

№ 13. Довести єдиність розкладу вектора з прямої суми.

№ 14. Записати рівняння площини, яка проходить через три задані точки: $M_1(2;3;1)$, $M_2(3;1;4)$, $M_3(2;1;5)$.

№ 15. Довести, що в паралелограмі сума квадратів довжин діагоналей

дорівнює сумі квадратів довжин усіх його сторін.

№ 16. Виразити довжину бісектриси через довжини трьох сторін трикутника.

№ 17. Знайти довжину висоти трикутника, опущену з вершини $A(4;4)$ на основу, що проходить через точки $B(-6,-1)$, $C(-2,-4)$.

№ 18. Записати рівняння спільного перпендикуляра до двох мимобіжних

$$L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3} \quad L': \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{1}$$

№ 19. Знайти висоту $h = |SH|$ піраміди $SABC$, у якій всі кути при вершині прямі, довжини ребер $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ відповідно рівні a , b , c .

№ 20. Дано вершини тетраедра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Знайти його об'єм та довжину висоти, опущеної з вершини D .

Варіант 2 (20 задач).

№ 1. Розв'язати систему методом Гаусса та описати суть методу:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \\ -7x_1 + x_2 - 14x_3 = 37 \end{cases}$$

№ 2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$

№ 3. Розв'язати матричне рівняння та описати алгоритм знаходження оберненої матриці:

$$XA = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 4. Знайти всі розв'язки системи та описати метод знаходження фундаментальної

системи розв'язків:
$$\begin{cases} x - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x - 9x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

(*) № 5. Довести тотожність Якобі для подвійного векторного добутку:

$$\langle \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \vec{c} \rangle + \langle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle, \vec{a} \rangle + \langle \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle, \vec{b} \rangle = 0, \text{ використовуючи формулу } \langle \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle.$$

№ 6. Довести властивість скалярного добутку: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$.

№ 7. Знайти власні значення та власні вектори такого лінійного оператора:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_3 = 2x_2 + 3x_3 \end{cases}, \text{ відповідна матриця якого } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ 8. Знайти власні значення та власні вектори такого лінійного оператора: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

№ 9. Довести, що коли переставити місцями два рядки (або два стовбці) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.

№ 10. Дано два лінійно незалежні вектори: \vec{a} і \vec{b} . Знайти параметр λ , при якому наступні два вектори будуть лінійно залежними: $\vec{\lambda a + \vec{b}}$ і $\vec{a + \lambda b}$.

№ 11. Довести, що для будь-якої трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарними будуть такі набори векторів $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}$.

№ 12. Довести, що медіани трикутника діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

№ 13. Довести, що два вектори є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли вони є колінеарними. Довести, що три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

№ 14. Розкласти вектор \vec{PM} з полюса P до баріцентру M (точка перетину медіан) даного трикутника через вектори з полюса до його вершин.

№ 15. Дано довжини усіх сторін трикутника a, b, c . Знайти довжини медіани.

(*) № 16. Довести, що із рівності двох бісектрис трикутника ABC випливає, що цей трикутник рівнобедрений.

№ 17. Нехай задано трикутник ABC : $A(4;4)$, $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$ координатами своїх вершин. Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута C .

№ 18. Задано координати вершин трикутної піраміди $DABC$: $A(0;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(1;1;0)$, $D(2;-\sqrt{3})$. Знайти довжини всіх її висот.

№ 19. Знайти площу трикутника, якщо задано координати його вершин $A(-1;0;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$

№ 20. Знайти відстань між двома мимобіжними прямими $l: \vec{r} = \vec{r}_1 + a\vec{t}$ і $L: \vec{r} = \vec{r}_2 + a_2\vec{z}$.

Варіант 3 (20 задач).

№ 1. Дослідити систему на сумісність:
$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

№ 2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{vmatrix}$

№ 3. Розв'язати матричне рівняння та описати алгоритм знаходження оберненої матриці:

$$AXB=C \text{ при } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ 4. Знайти всі розв'язки системи та описати метод знаходження фундаментальної

системи розв'язків:
$$\begin{cases} 3x - 5y + z = \epsilon \\ x + 2y - z = \epsilon \end{cases}$$

(*) № 5. Довести формулу для подвійного векторного добутку:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

№ 6. Довести властивість скалярного добутку: $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$

№ 7. Знайти власні значення та власні вектори такого лінійного оператора: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

№ 8. Довести, що коли визначник має нульовий рядок або нульовий стовпчик, то цей визначник рівний нулю.

№ 9. Дано два лінійно незалежні вектори: \vec{a} і \vec{b} . Знайти параметр λ , при якому наступні два вектори будуть лінійно залежними: $\lambda\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

№ 10. Дано три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Довести, що наступні три вектори компланарні $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $-\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}$.

№ 11. Розкласти вектор бісектриси CD за довжинами та векторами $a = CA$, $b = CB$ бічних сторін трикутника.

№ 12. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо задані координати його вершин.

№ 13. Скласти рівняння еліпса, який проходить через задану точку $M(-2\sqrt{5}, 2)$

фокуси якого знаходяться симетрично на осі абсцис відносно початку координат, причому

відстань між фокусами дорівнює $2c = 6\sqrt{3}$ (тут $a^2 = b^2 + c^2$).

№ 14. Довести, що великі медіани тетраедра (відрізки, які з'єднують вершини із точками перетину медіан протилежних граней) діляться у відношенні 3:1, починаючи від вершини.

№ 15. Довести еквівалентність двох різних означень скалярного добутку.

№ 16. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

№ 17. Знаючи координати вершини $A(3; -4)$ трикутника ABC та рівняння двох висот $(B) x - 2y - 1 = 0$ і $(C) x - 7y - 6 = 0$ із сусідніх вершин, записати рівняння усіх сторін даного трикутника.

№ 18. Задано дві прямі в системному записі. Знайти кут між такими прямими

$$L_1: \begin{cases} 3x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

№ 19. Довести, що площа трикутника із векторів-медіан дорівнює три четвертих площі основного трикутника.

№ 20. Записати перехід від системного запису рівняння прямої в просторі до канонічного.

Варіант 4 (20 задач)

№ 1. Розв'язати систему та описати суть методу фундаментальної системи розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$

№ 2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & \log 2 \\ \log 2 & 1 \end{vmatrix}$.

№ 3. Розв'язати матричне рівняння та описати алгоритм знаходження оберненої матриці:

$$AX = B \text{ при } A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

№ 4. Знайти всі розв'язки системи та описати метод знаходження фундаментальної

системи розв'язків: $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = \epsilon \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = \epsilon \end{cases}$

(*) № 5. Довести формулу для змішаного та векторного добутку:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

№ 6. Довести властивість скалярного добутку: $\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0$.

№ 7. Знайти власні значення та власні вектори такого лінійного оператора: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

№ 8. Довести, що коли визначник має два однакові рядки або два однакові стовпці, то він дорівнює нулю.

№ 9. Дано два лінійно незалежні вектори: \vec{a} і \vec{b} . Знайти параметри α і β , при яких виконується рівність: ~~$\vec{a} + \vec{b} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$~~ .

№ 10. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Знайти при яких значеннях параметрів λ і μ наступні два вектори $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ колінеарні.

№ 11. Довести єдиність розкладу вектора за базисом.

№ 12. Дано координати вершин трикутника. Записати рівняння медіани, бісектриси, висоти та сторони трикутника.

№ 13. Рівняння лінії в полярній системі координат записується формулою ~~$\rho \cos \varphi = 1$~~ . Записати це рівняння в декартовій системі координат і знайти вид лінії.

№ 14. В довільному шестикутнику з'єднані через одну середини сторін. Довести, що в утворених двох трикутниках баріцентри (точки перетину медіан) співпадають.

№ 15. Виразити довжину бісектриси через довжини бічних сторін трикутника та частин основи, на які бісектриса ділить цю основу.

№ 16. Знайти відстань від точки до прямої на площині та в просторі.

№ 17. Знаючи координати заданої точки $M(-3|1|3)$ та рівняння прямої ~~$L: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{1}$~~ в просторі в канонічному вигляді, записати рівняння перпендикуляра до цієї прямої через задану точку та знайти відстань від точки до прямої в просторі.

№ 18. Знайти відстань між паралельними площинами, які задані загальними рівняннями площини у просторі.

№ 19. Довести, що об'єм тетраедра дорівнює одній шостій модуля змішаного добутку будь-яких трьох його некомпланарних векторів - ребер.

№ 20. Дано рівняння двох сторін трикутника: $4x+3y-5=0$, $x-3y+1=0$ і координати точки перетину його медіан $M(2;2)$. Записати рівняння третьої сторони трикутника.