МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА

Кафедра готельно-ресторанної та курортної справи

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ КОМПЛЕКС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

Для напряму 140101 «Готельно-ресторанна справа» спеціальності 6.14010101 «Готельно і ресторанна справа»

автор:

викладач Богославець І.М.

Затверджено на засіданні кафедри від 2013 р.

Івано-Франківськ – 2013

Лекція1

Тема: **«Предмет і метод нарисної геометрії та інженерної графіки»**

Питання для розгляду:

1. *Методи проектування*
2. *Проектування точки на дві площини проекцій*
3. *Проектування точки на три площини проекцій.*

*1. Методи проектування***.** Інженерна графіка відноситься до дисциплін, які складають основу загально-інженерної підготовки спеціалістів з вищою освітою.

Метою курсу інженерної графіки являється одержання знань, необхідних інженеру для втілення технічних думок з допомогою креслення, а також розуміння конструкції та принципу роботи представленого на кресленні технічного виробу.

Предметом інженерної графіки являється вміння будувати та читати креслення або графічні моделі геометричних фігур закладених в основу технічних виробів.

Курс інженерної графіки базується на теоретичних основах побудови зображень з використанням елементів нарисної геометрії та нормативів, викладених в стандартах на виконання креслень. Нарисна геометрія, як навчальна дисципліна є теорією відображення на площині фігур розташованих у просторі, та операцій над нами.

Методом нарисної геометрії є метод графічного відображення, суть якого полягає в тому, що кожній фігурі простору, яку називають прообразом, відповідає деяка фігура площини, що називається образом фігури.

Розглядаючи методи проектування необхідно ввести поняття проектування зображення, яке дало б змогу судити про форму і положення в просторі будь-якого предмета. Це зображення повинно володіти певними властивостями:

1. ***Зворотність*** – властивість зображення, що дозволяє однозначно відтворити дійсну форму, розміри предмета і його положення в просторі. Отже ця властивість дає можливість за зображенням виготовити предмет. Графічне зображення, що має властивість зворотності, називається кресленням.
2. ***Наочність*** – властивість зображення, яке викликає у спостерігача просторову уяву про предмет.
3. ***Єдність умовностей***, які прийняті при виконанні зображень. Вони повинні бути такими, щоб кожен спеціаліст міг прочитати зображення, виконане іншою особою.

При викладанні матеріалу будемо дотримуватись таких позначень і символічних знаків:

1. Точки позначаються великими літерами латинського алфавіту без індексів – A, B, C…, з індексами – $A_1, A_2 \ldots A_n$ або цифрами – 1,2,3…
2. Прямі (і всі лінії) – позначаються рядковими літерами латинського алфавіту без індексів – a, b, c, d…, а також з індексами $a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$.
3. Площини (поверхні) позначаються рядковими літерами грецького алфавіту - - α, β, γ…
4. Кути позначаються рядковими літерами грецького алфавіту $\alpha^{\circ}, \beta^{\circ}, \gamma^{\circ}$…
5. Проекції геометричних елементів позначаються такими ж літерами, що й оригінали, з надписом цифр зверху з лівого від літери боку:

   а) горизонтальна проекція – ${}^1A, {}^1a, {}^1\alpha$…;

   б) фронтальна проекція - ${}^2A, {}^2a, {}^2\alpha$…;

   в) профільна проекція - ${}^3A, {}^3a, {}^3\alpha$….
6. Площини проекцій:

   а) горизонтальна - ${}^1\Pi$

   б) фронтальна - ${}^2\Pi$

   в) профільна - ${}^3\Pi$
7. Аксонометричні проекції геометричних елементів позначаються тими ж літерами, що й оригінали з надписом цифри 0 з верхнього лівого боку літери:

   а) аксонометричні проекції точок – ${}^0A, {}^0B, {}^0C$…

   б) аксонометричні проекції прямих (і ліній) – ${}^0a, {}^0b, {}^0c$…

   в) аксонометричні проекції площин (поверхонь) - ${}^0\alpha, {}^0\beta, {}^0\gamma$…
8. Зв’язки між геометричними елементами:

   $\subset$- належність, $\supset$- включення, $\cup$- дотик, // - паралельність, $\equiv$ - співпадання (тотожність)
9. Операції між геометричними елементами:

= - результат дії, $\cap$- перетин, $\cup$- з’єднання, $\cong$- конгруентність, $\sim$ подібність, $\underline{0}$ - мимобіжність, $\rightarrow$ - відображення, $\llcorner$– прямий кут $\wedge$- кон’юнкція (сполучник „і”), $\vee$- диз’юнкція (сполучник “або”), $\Rightarrow$ - імплікація (логічний висновок “якщо …, то”), / - знак заперечення (ні)

10. Відстань між геометричними елементами позначають так: між точками A і B – AB, довжина відрізка AB - $[AB]$, відстань від точки A до площини α - $|A\alpha|$; відстань між площинами α і β -$[\alpha\ \beta]$,

11. Площину α. Задану точками A, B, C - α (ΔABC);

12. Невласні елементи простору (точки , прямі, площини) позначаються такими ж символами із знаком безмежності ∞, який проставляється над символом. Наприклад: A невласна точка A; l, невласна пряма $\bar{l}$; $\overset{\infty}{\alpha}$ невласна площина α.

13. Центри проектування на площини $^1\Pi$, $^2\Pi$ $^3\Pi$ позначаються відповідно $^1\overset{\infty}{S}$; $^2\overset{\infty}{S}$; $^3\overset{\infty}{S}$.

14. Аксонометричні осі позначаються ^0x, ^0y, ^0z, початок аксонометричних осей – ^{00}.

Прийнято зображати точки у вигляді пустотілих кілець діаметром 2÷3 мм

У сучасній нарисній геометрії існує багато різних способів графічного відображення. Найбільш поширеним у креслярській практиці є відображення проекціями та слідами.

Розглянемо відображення проекціями (проектування), яке здійснюється за допомогою фіксованих у просторі точки S (центра проектування) та площини α (площини проекцій).

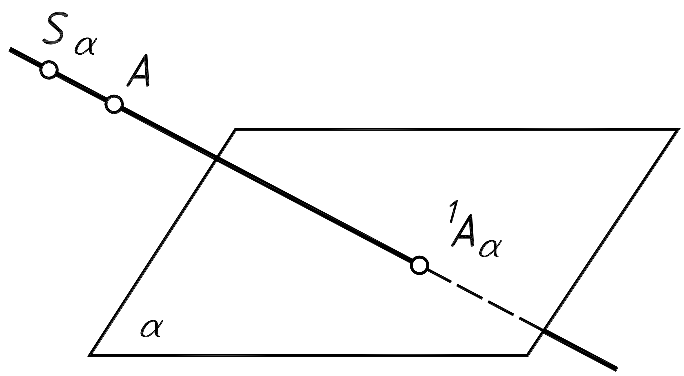


Рис. 1.1

$$A = \alpha \cap SA_\alpha$$

Отже: A_α – проекція точки А на площину α

S_α - A_α – проектуючий промінь або проектуюча пряма

Проекцію ^1A деякої точки A з центра проектування S_α на площину проекцій α є точка перетину площини α з проектуючим променем, який проходить через центр проектування S_α і точку A (рис.1.1).

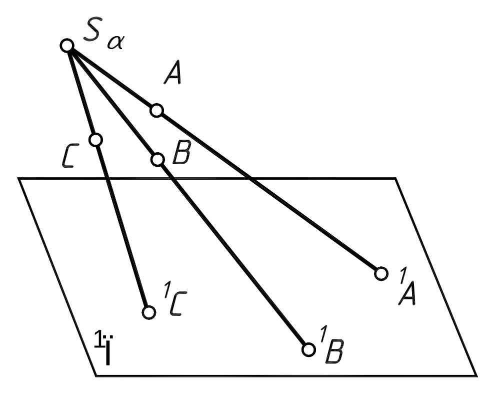
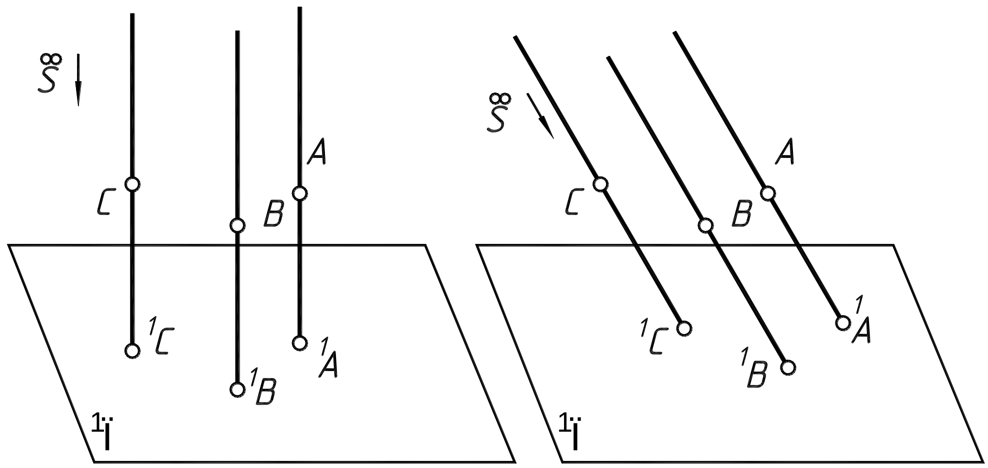


Рис. 1.2

Якщо в просторі виділити деяку точку – центр проектування S_α і задати декілька точок, то вони разом з центром складуть декілька проектуючих променів. Перетнувши ці промені площиною (площиною проекцій), в перетині ми одержимо проекції заданих точок (рис. 1.2).

Якщо центр проектування перенести у безмежність, то проектуючі промені стануть паралельні. Промені такого проектування, яке називають паралельним, складають з площиною прямі (рис.1.3,а) або гострі (рис.1.3,б) кути. В залежності від цього розрізняють прямокутне (ортогональне) і косокутне проектування.



а) *б)*

Рис. 1.3

У відповідності із способом проектування проекції називаються центральними, косокутними або прямокутними.

Центральні і паралельні проекції характеризуються певними властивостями. Поскільки проекцією точки є точка на площині проекцій, то проекцією прямої в загальному випадку є пряма, а проекцією фігури на площину є множина проекцій всіх її точок. Проекцією прямої в загальному випадку є пряма.

Якщо задані центр проектування і площина проекцій, то проекція точки простору визначається однозначно – це точка перетину проектуючого променя з площиною проекцій.

Зворотня задача – побудова точки в просторі за її центральною проекцією, неоднозначна, так як в одну точку на площині проекцій проектується множина точок, які належать проектуючому променю.

Для забезпечення зворотності креслення французьким вченим Гаспаром Монжем (1746-1818) було запропоновано метод, де використовувались два центри проекцій. В методі Монжа площини проекцій $^{1}\Pi$ і $^{2}\Pi$ взаємно перпендикулярні, а центри проектування віддалені у безмежність по напрямках, перпендикулярних до площин проекцій.

Креслення, яке складається з декількох (мінімум двох) зв’язаних між собою проекцій зображеної фігури називається комплексним кресленням. Метод комплексного креслення в прямокутних проекціях називається ***методом Монжа***.

Відмітимо інваріантні (незмінні) властивості, які відповідні паралельному ортогональному проектуванню.

1. Проекцією точки є точка;
2. Проекцією прямої є пряма;
3. Якщо точка належить прямій, то її проекція належить проекції даної прямої;
4. Паралельні прямі проектуються в паралельній проекції прямих;
5. Якщо точка ділить відрізок прямої в деякому співвідношенні, то її проекція ділить проекції цього відрізка в такому – ж співвідношенні;
6. Проекція точки перетину двох прямих являється точкою перетину проекцій цих прямих.
7. Плоска багатокутна фігура проектується у фігуру з такою самою кількістю кутів.
8. При перенесенні плоскої фігури на паралельну площину її конфігурація не змінюється.

2. Проектування точки на дві площини проекцій. Розглядаючи оточуючий нас простір ми можемо прийти до висновку, що самим елементарним об'єктом його є точка. Для побудови проекцій точки використовується метод Г. Монжа. Задамо дві взаємно перпендикулярні площини проекцій – горизонтальну $^1\Pi$, фронтальну $^2\Pi$, і точку A, яка не лежить в цих площинах (рис. 1.4.)

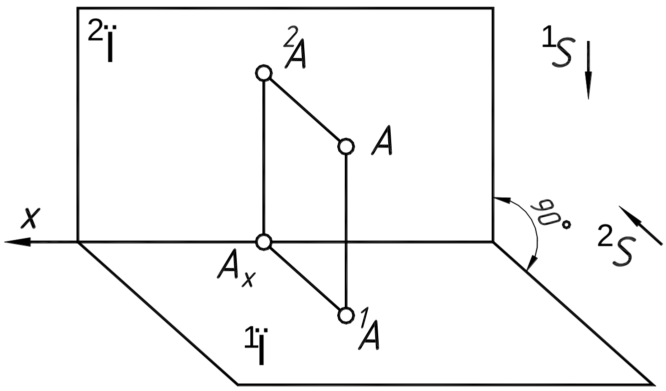


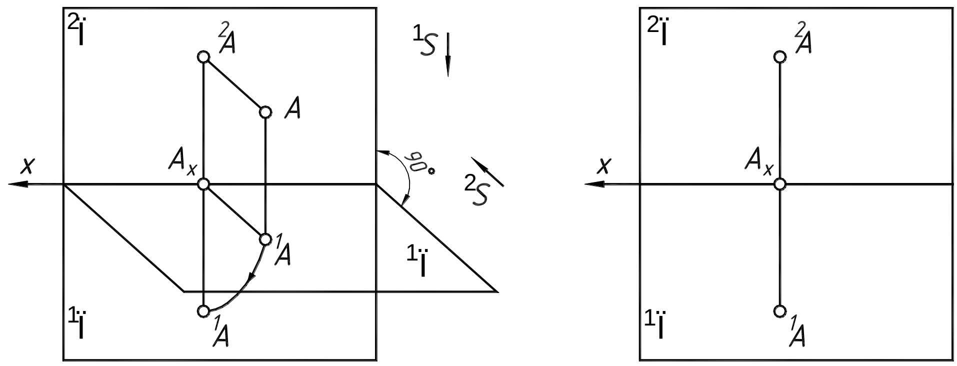
Рис. 1.4

Приймемо напрямок проектування $^1S\perp{}^1\Pi$ і $^2S\perp{}^2\Pi$. Щоб побудувати проекцію точки A на $^1\Pi$ проведемо через точку проектуючу пряму паралельно ^1S і відмітимо точку ^1A її перетину з цією площиною. Площину $^1\Pi$ назвемо горизонтальною площиною проекцій, а точку ^1A – горизонтальною проекцією точки A .

Відповідно площину $^2\Pi$ назвемо фронтальною площиною проекцій. Провівши пряму через точку А паралельно ^2S до перетину з $^2\Pi$, одержимо фронтальну проекцію точки A -^2A. Проекції ^1A і ^2A одержані в результаті ортогонального (прямокутного) проектування, тому вони називаються ортогональними проекціями.

Отже, використовуючи даний метод, ми можемо здійснити як пряму задачу (одержання проекцій точок та відповідні площини проекцій) так і зворотню – по двох проекціях ^1A і ^2A Монжа визначити положення точки A в просторі.

Пряма x, по якій перетинаються площини $^1\Pi$ і $^2\Pi$ називається віссю проекцій. Відрізок $A^1A \equiv {}^2AA_x$ представляє собою відстань від точки A до площини $^2\Pi$. Таким чином, не маючи самої точки, а користуючись лише її двома проекціями, ми можемо визначити, на якій відстані від кожної площини проекцій знаходиться дана точка.



а) б)

Рис. 1.5

Для перетворення просторового зображення точки в двох взаємоперпендикулярних площинах повернемо площину $^1\Pi$ навколо осі x до суміщення з площиною $^2\Pi$ (площиною креслення), як показано стрілками на Рис. 1.5,а. Разом з площиною $^1\Pi$ переміститься і точка ^1A, а також всі інші точки поля проекцій $^1\Pi$. В результаті (рис. 1.5,б) площина креслення несе в собі два поля проекцій – $^1\Pi$ і $^2\Pi$, причому проекції точки A – (^1A і ^2A) розміщені на загальному перпендикулярі до осі проекцій. Такий перпендикуляр називається лінією зв'язку. В цьому випадку про точки ^1A і ^2A говорять, що вони розміщені в проекційному зв'язку.

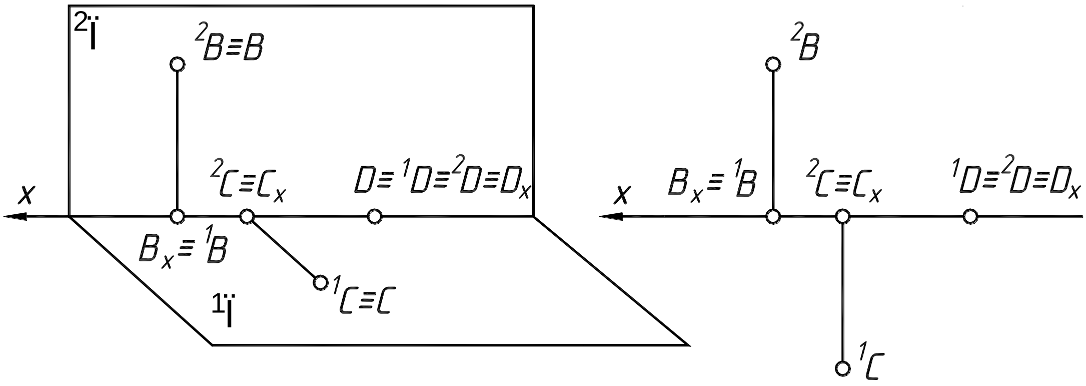
Креслення площина якого є носієм двох полів ортогональних проекцій, розміщених так, що лінія зв'язку перпендикулярна до осі проекцій називається комплексним кресленням або епюром.

Епюром точки називається креслення, на якому зображені дві ортогональні проекції точки, розміщені в проекційному зв'язку. Зображення на рис. 1.5,б представляє собою епюр точки A. Відмітимо, що на епюрі не має самої точки, а дані тільки її проекції.

Положення точки відносно площин проекцій.

Точка не інцедентна ні одній з площин проекцій, називається точкою загального положення (точка A , рис. 1.5)

Розглянемо деякі випадки особливого положення точки. Точка $B \subset {}^2\Pi$ (Рис.1.6,а), її фронтальна проекція ^2B співпадає з самою точкою B ($^2B \equiv B$) так як відстань від точки B до $^2\Pi$ дорівнює нулю то горизонтальна проекція ^1B



а) б)

Рис.1.6

лежить на осі X і співпадає з B_X ($B \equiv {}^1B$). Точка $C \subset {}^1\Pi$. Її горизонтальна проекція ${}^1C \equiv C$, фронтальна ${}^2C \equiv C_X$. Точка $D \subset X$, тому $D \equiv {}^1D \equiv {}^2D \equiv D_X$. Епюр цих точок представлений на Рис. 1.6,б.

якщо точка рівновіддалена від площин ${}^1\Pi$ і ${}^2\Pi$, то вона лежить в площині бісектора яка ділить двухгранний кут між площинами ${}^1\Pi$ і ${}^2\Pi$ наполовину. В цьому випадку ${}^2EE_X = {}^1EE_X$ (рис.1.7).

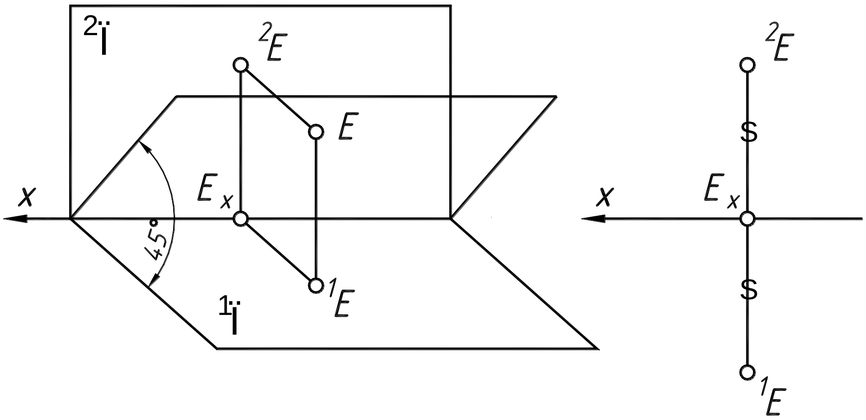
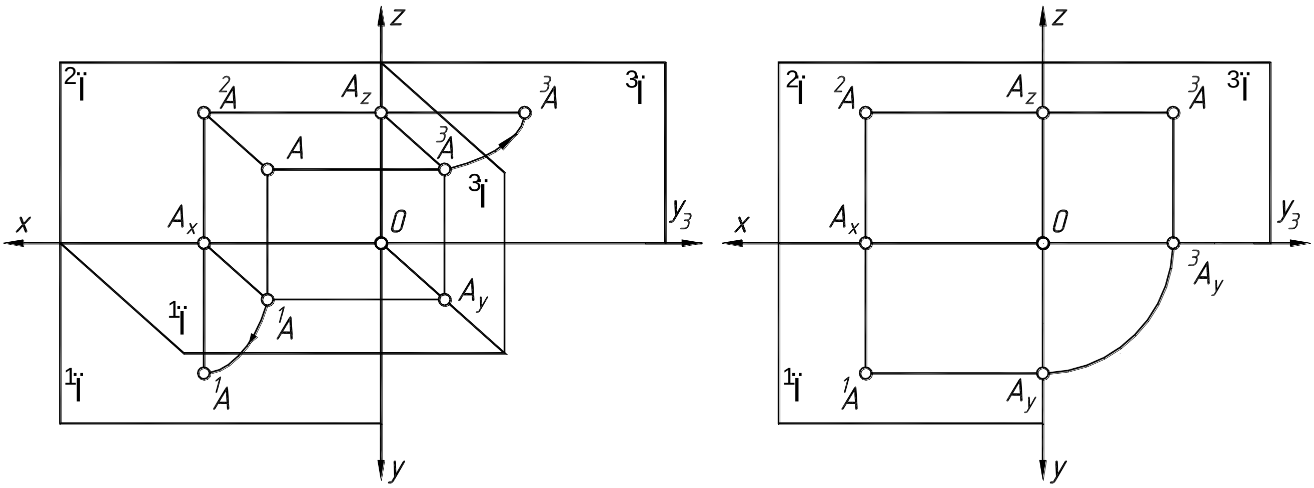


Рис.1.7

3. Проектування точки на три площини проекцій. В багатьох випадках в креслярській практиці необхідно побудувати третю проекцію фігури. Для цього використовується ще одна площина проекцій ${}^3\Pi$, яка перпендикулярна ${}^1\Pi$ і ${}^2\Pi$. Цю площину називають профільною площиною проекцій. Лінія перетину ${}^1\Pi$ і ${}^2\Pi$ позначається літерою Y ,а лінія перетину ${}^2\Pi$ і ${}^3\Pi$ – літерою Z (Рис.1.8).



а) б)

Рис. 1.8

Щоб побудувати профільну проекцію точки A необхідно через цю точку провести перпендикуляр до перетину з ^{3}П і одержимо ^3A. Щоб перейти до креслення, на якому всі три поля проекцій суміщені з однією площиною, повернемо площину ^{3}П навколо осі Z, а ^{1}П навколо осі X до суміщення з ^{2}П. Одночасно і перемістяться точки ^1A і ^3A (рис.1.8б). В результаті на кресленні ми одержимо три проекції точки А, площини ^{1}П, ^{2}П і ^{3}П осі X, Y, Z.

Позначення Y приведене на рис.1.8,а це вісь, яка належить площині ^{1}П; позначення Y_3 – це та ж вісь, яка належить площині ^{3}П. Точка ^3A лежить на лінії зв'язку, яка перпендикулярна осі Z, точкою ^2A. Точка ^3A також знаходиться в проекційному зв'язку ^1A.

Приймаючи, що осі проекцій співпадають з осями прямокутних координат вважаємо, що додатні значення для X будуть в напрямку справа наліво (Рис.1.8,б), для осі Y на площині ^{1}П зверху вниз, на площині ^{3}П – зліва направо, вісь Z – знизу вверх.

Всі положення, які були розглянуті при проектуванні точки на дві площини проекцій, відповідають і для проектування на три площини проекцій.

Запитання для перевірки засвоєних знань:

1. Що таке метод графічного зображення?
2. Для чого використовується графічне зображення?
3. Проекцією чого є точка?
4. Що таке центр проектування?

Завдання для самостійної роботи:

1. Накреслити проекцію точки на площину використовуючи центр проектування.

Список використаної літератури:

1. "Метоличні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". Укладачі: К. В. Сарнацька, Н. С. Дяченко, Г. Г. Допіра, Г. С. Подима
2. «Курс начертательной геометри» В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиєвский
3. Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів "Нарисна геометрія" та " Інженерна графіка". Укладачі: Віткун Н.К., Ізволенська А.Є., Парахіна Н.А., Чорнощокова Л.Д., Київ, КПІ, 1992 - 60с.
4. укл. Білицька Н.В. ГетьманО.Г. «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка» НТУУ «КПІ» 2005

Лекція 2

Тема: **«Відображення елементів простору.»**

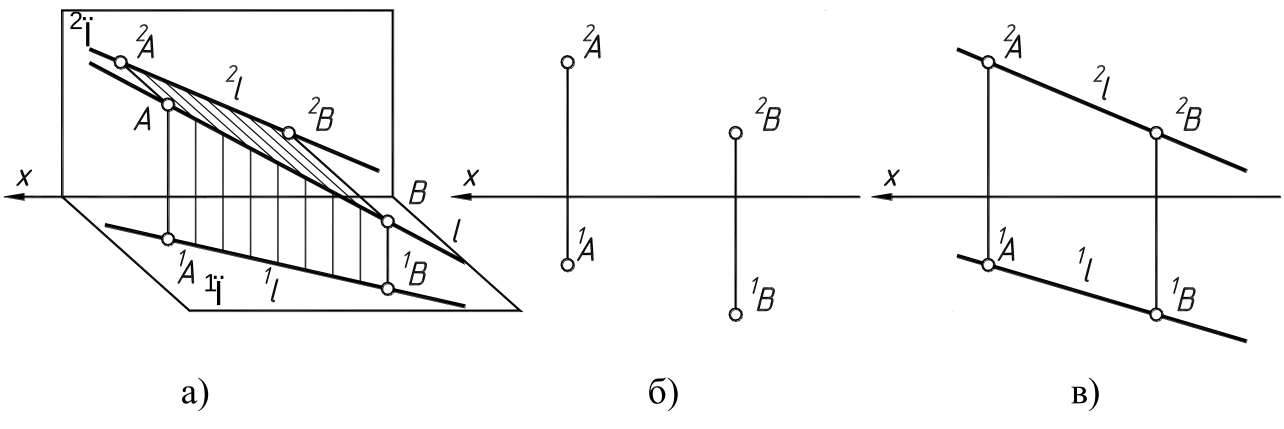
Питання для розгляду:

1 Пряма.
1.1 Пряма загального положення.
1.2. Прямі рівня.
1.3.Проектуючі прямі.
2. Площина.

1. Пряма

- Прямою називають траєкторію найкоротшої відстані між двома точками в просторі.
- Проекції прямої також прямі.
- Визначник прямої – дві точки, тому й на епюрі пряма задається проекціями двох точок.

Задамо в просторі точки *A*, *B* і спроекцюємо їх на дві взаємно перпендикулярні площини. Виконаємо перетворення просторової моделі в плоске зображення.



а) б) в)

Рис.2.1

На рис. 2.1,а задані проекції ${}^1A,{}^2A$ і ${}^1B,{}^2B$ двох точок A і B. Вони визначають положення деякої прямої AB. З'єднавши однойменні проекції точок ${}^1A$ і ${}^1B$, ${}^2A$ і ${}^2B$, одержимо проекції ${}^1A{}^1B$ і ${}^2A{}^2B$ прямої AB. На рис. 2.1,б зображені проекції точок, а на рис. 2.1,в – проекції прямої лінії l, що проходить через задані точки.

Отже, позначення прямої на епюрі може бути представлене двома точками, якщо зафіксований її відрізок, або однією літерою (рядковою літерою латинського алфавіту), якщо задано тільки положення прямої відносно площин проекцій.

Прямі в просторі можуть займати різні положення. Розрізняють наступні положення прямих:

1. Прямі загального положення;
2. Прямі рівня;
3. Проектуючи прямі.

При русі точки по прямій загального положення усі координати точки змінні, по прямій рівня одна з координат постійна, по проектуючих прямих – дві координати постійні.

1.1 Пряма загального положення.

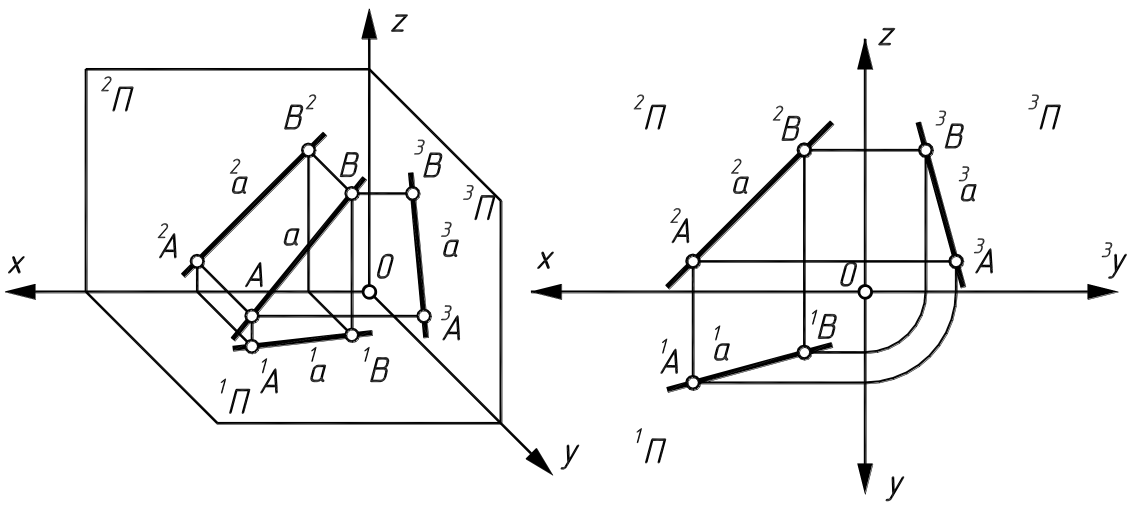


Рис. 2.2

На рис.2.2 представлена пряма a загального положення. Ні одна з проекцій відрізка представленої прямої a не дорівнює натуральній величині відрізка AB. Пряма загального положення не паралельна і не перпендикулярна ні до однієї площини проекцій.

1.2 Прямі рівня. Якщо пряма паралельна одній з площин проекцій (перпендикулярна до однієї з осей), то така пряма називається прямою рівня. Назва цієї прямої співпадає з назвою площини, до якої вона паралельна.

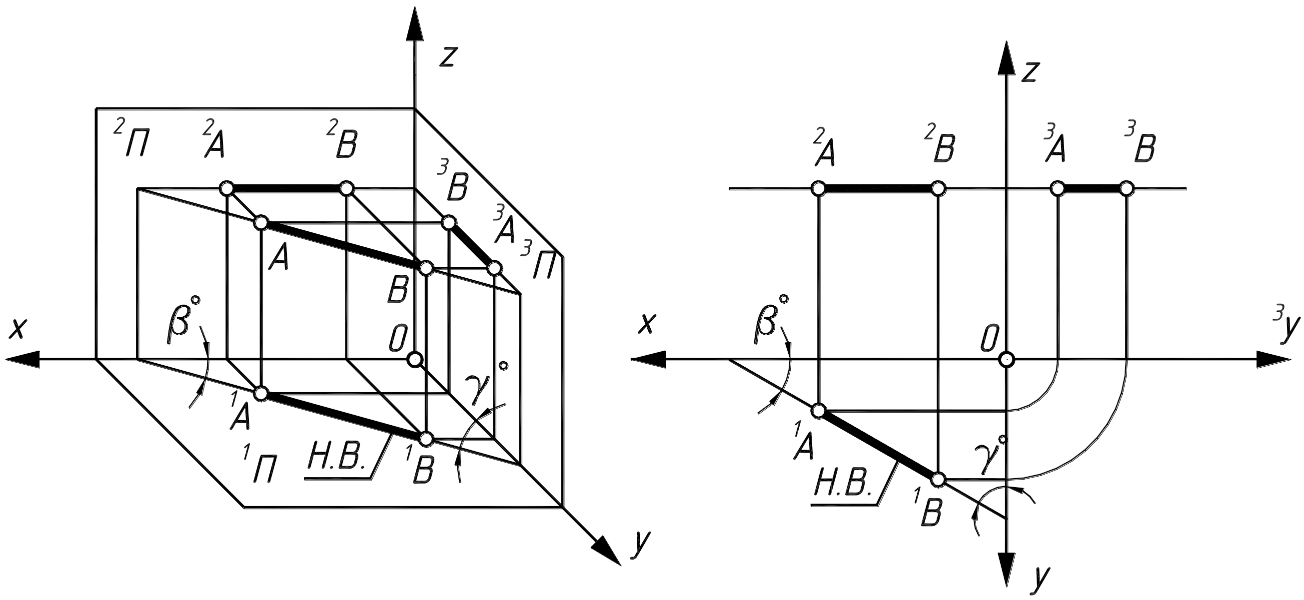


Рис. 2.3

На рис.2.3 представлені просторова модель і епюр горизонтальної прямої рівня. Всі точки цієї прямої знаходяться на однаковій відстані від горизонтальної площини проекцій. На горизонтальну площину проекцій відрізок *AB* прямої проектується в дійсну величину. Кут β° - це кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій, а кут γ°- це кут нахилу прямої до профільної площини проекцій.

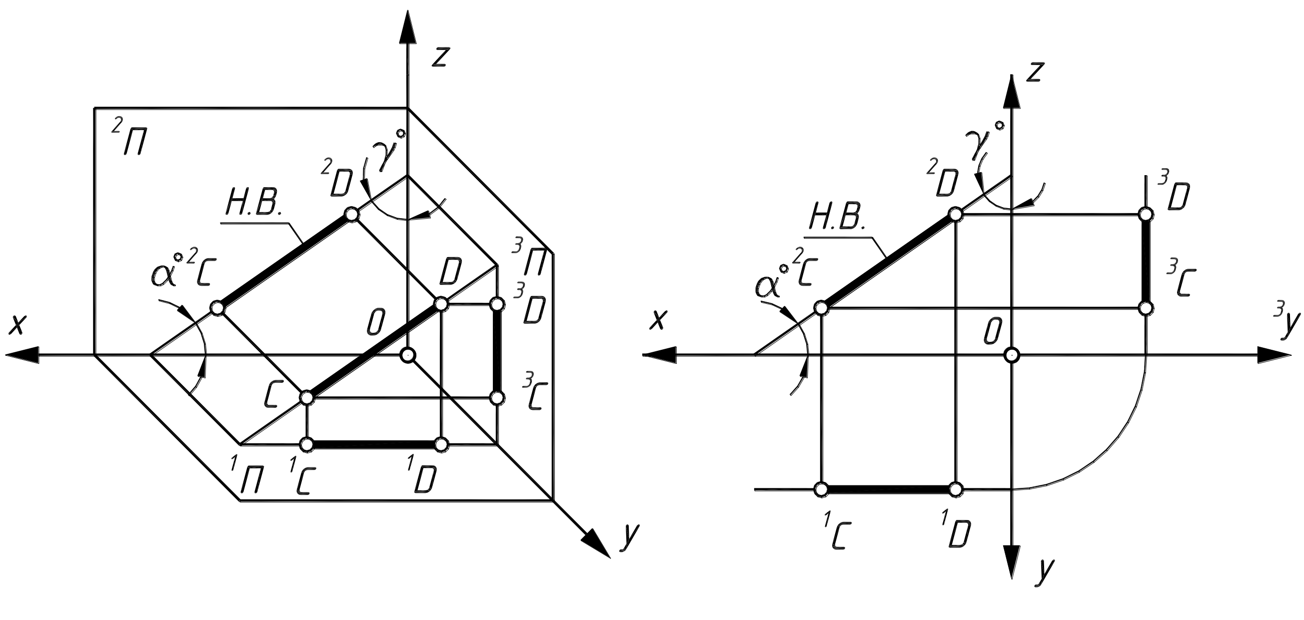


Рис. 2.4

На рис.2.4 представлені просторова модель і епюр фронтальної прямої рівня. Всі точки цієї прямої знаходяться на однаковій відстані від фронтальної площини проекцій. На фронтальну площину проекцій відрізок CD проектується в дійсну величину з кутами нахилу α - до горизонтальної площини проекцій і γ - до профільної.

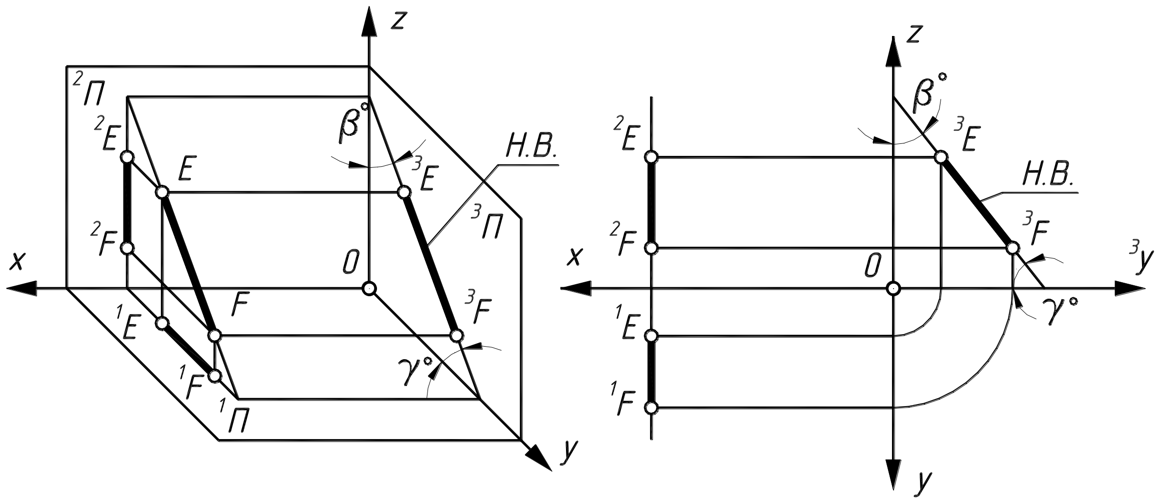


Рис. 2.5

На рис.2.5 представлені просторова модель і епюр профільної прямої рівня. Всі точки цієї прямої знаходяться на однаковій відстані від профільної площини проекцій. На профільну площину проекцій відрізок EF прямої проектується в дійсну величину, а кут α- це кут нахилу прямої EF до горизонтальної площини проекцій, кут β- це кут нахилу прямої EF до фронтальної площини проекцій.

Отже, знаючи особливості проектування прямих рівня, можна використовувати їх для розв'язування позиційних і метричних задач.

1.3 Проектуючі прямі. Проектуючі прямі – це прямі, перпендикулярні до однієї з площин проекцій (паралельні одній осі). Такі прямі носять назву тої площини, до якої вони перпендикулярні: горизонтально-проекцююча пряма, фронтально-проекцююча пряма, профільно-проекцююча пряма).

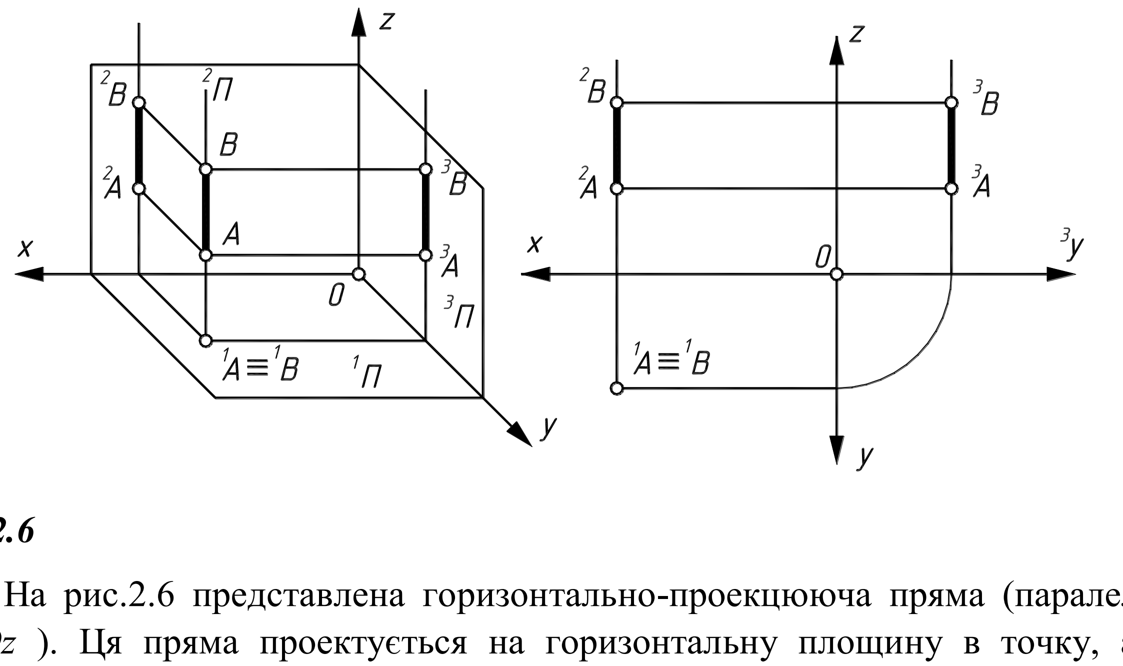


Рис. 2.6

На рис.2.6 представлена горизонтально-проекцююча пряма (паралельна осі *Oz*). Ця пряма проектується на горизонтальну площину в точку, а на фронтальну і профільну площини проекцій – в лінію, паралельну осі *Oz*.

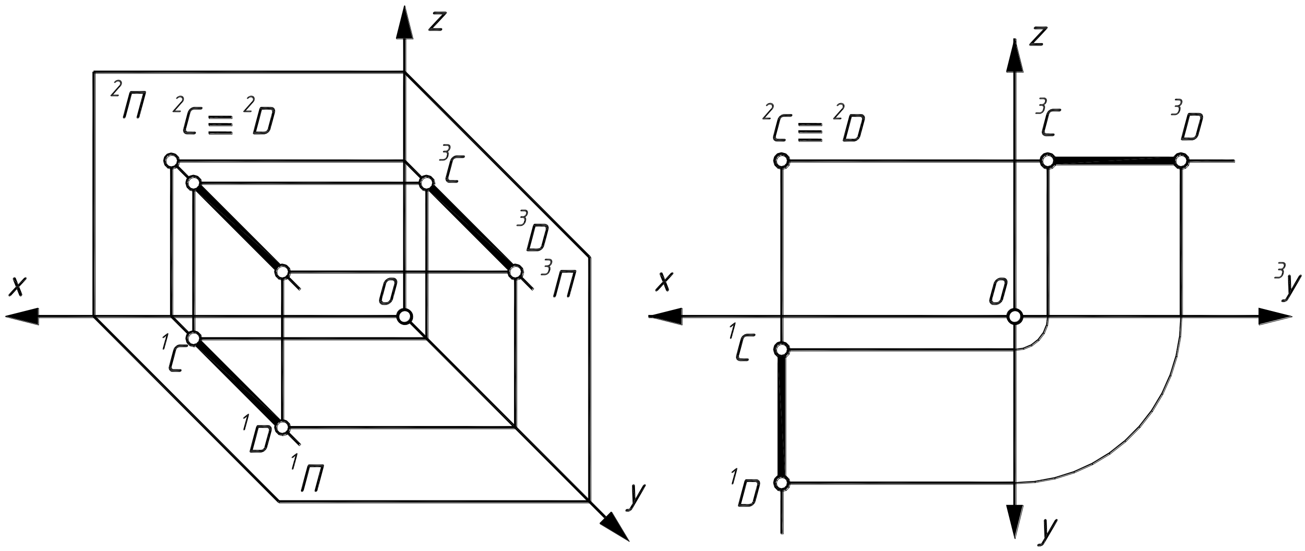


Рис. 2.7

На рис.2.7 представлена фронтально-проекціююча пряма (паралельна осі *Oy*). Ця пряма проектується в точку на фронтальну площину проекцій, а на горизонтальну і профільну площини проекцій – в лінію, паралельну осі *Oy*.

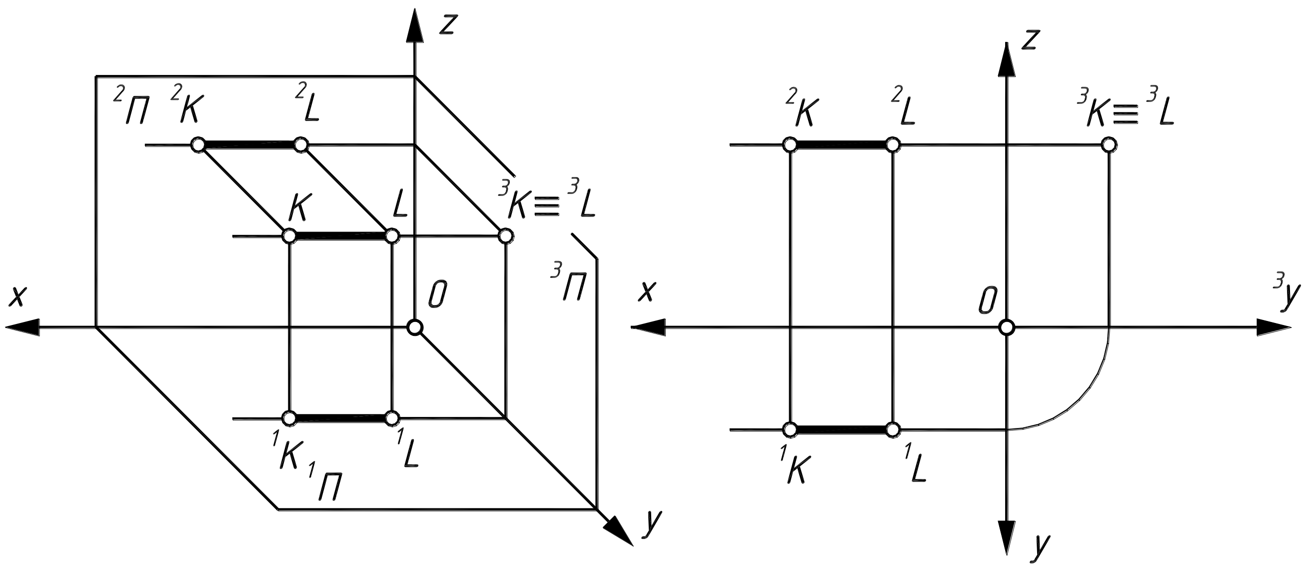


Рис. 2.8

На рис.2.8 подана профільно-проекціююча пряма (паралельна осі *Ox*). Пряма проектується в точку на профільну площину проекцій, а її горизонтальна і фронтальна проекції паралельні осі *Ox*.

Таким чином, розглянуті вище прямі складають другу групу прямих особливого положення, що дають змогу використовувати їх в наступних побудовах.

2. Площина. Із стереометрії відомо, що площина визначена, якщо відомі належні їй:

1. Три точки, що не належать одній прямій (рис. 2.9,а);
2. Пряма і точка, що не належить цій прямій (рис.2.9,б);
3. Дві прямі, що перетинаються (рис.2.9,в);
4. Дві паралельні прямі (рис.2.9,г);
5. Люба плоска фігура, наприклад трикутник (рис.2.9,д ,рис.2.9,е).

   Таким чином, площина може бути заданою однією з перерахованих вище комбінацій елементів. Всі ці випадки задання площини рівноцінні, і можуть бути представлені як модифікація основного визначника площини – три точки, що не лежать на одній прямі.

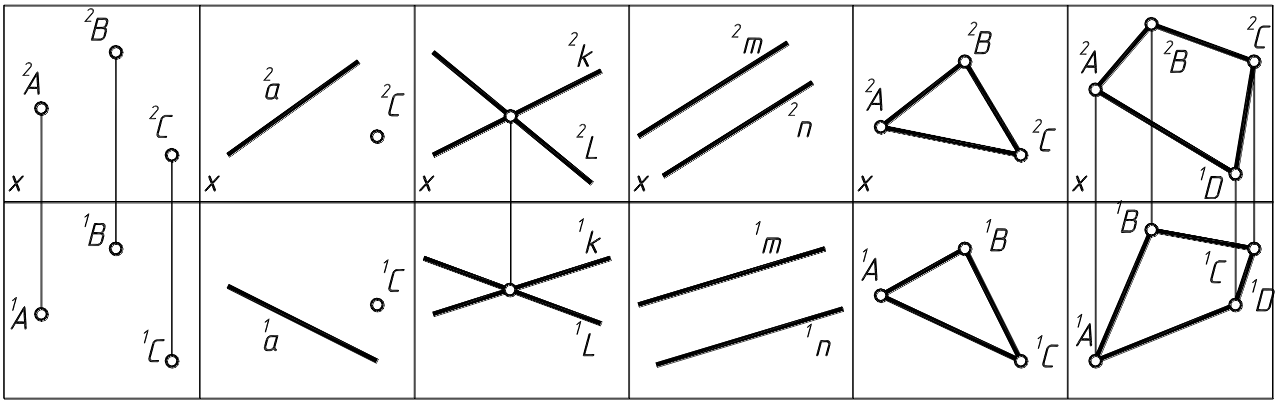


Рис. 2.9

Площина може бути задана також нульовими лініями рівня (рис. 2.10).

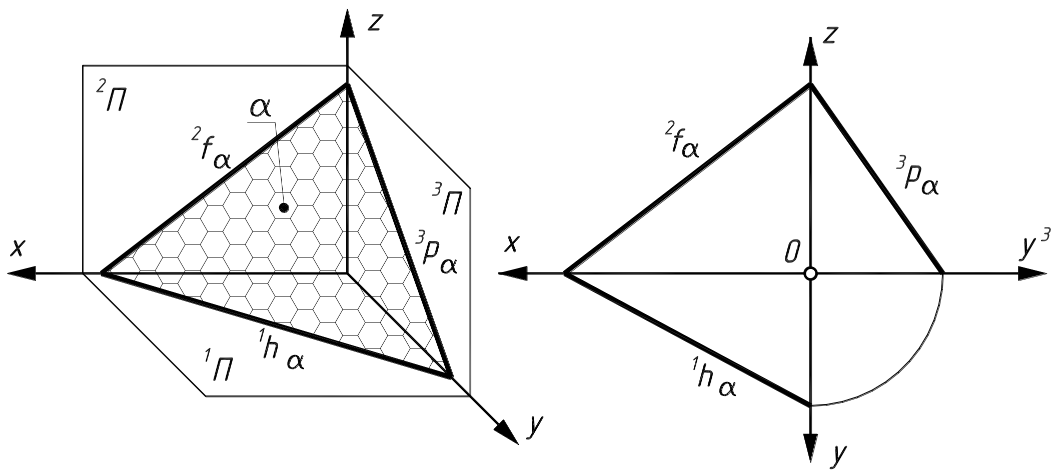


Рис. 2.10

Відносно площин проекцій площина може займати наступні положення:

1. Площина загального положення – це площина, не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій (рис.2.9-2.10).
2. Проекціююча площина – це площина, перпендикулярна тільки до однієї площини проекцій (рис.2.11-2.13).
3. Площина рівня – це площина, перпендикулярна до двох площин проекцій або паралельна одній площині проекції.

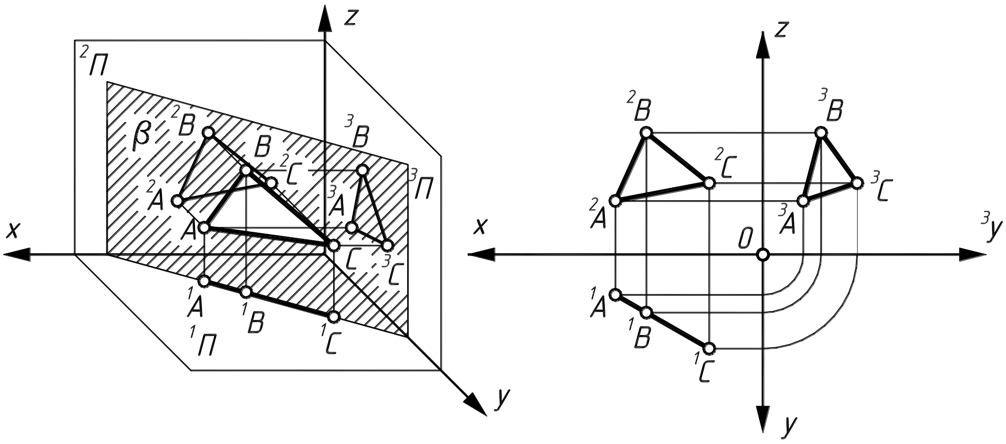


Рис. 2.11. Горизонтально-проектуюча площина

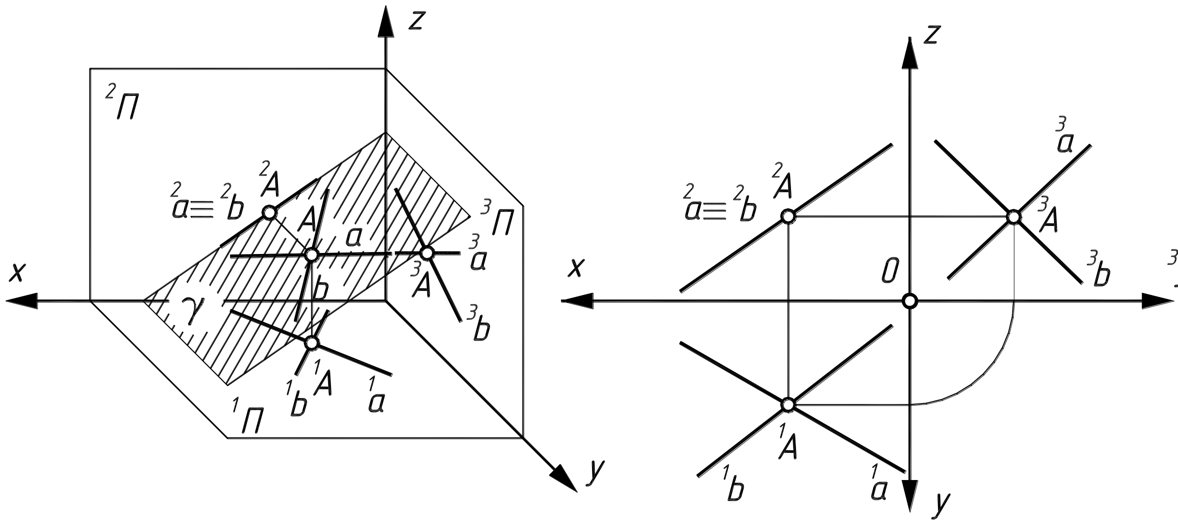


Рис. 2.12. Фронтально-проектуюча площина

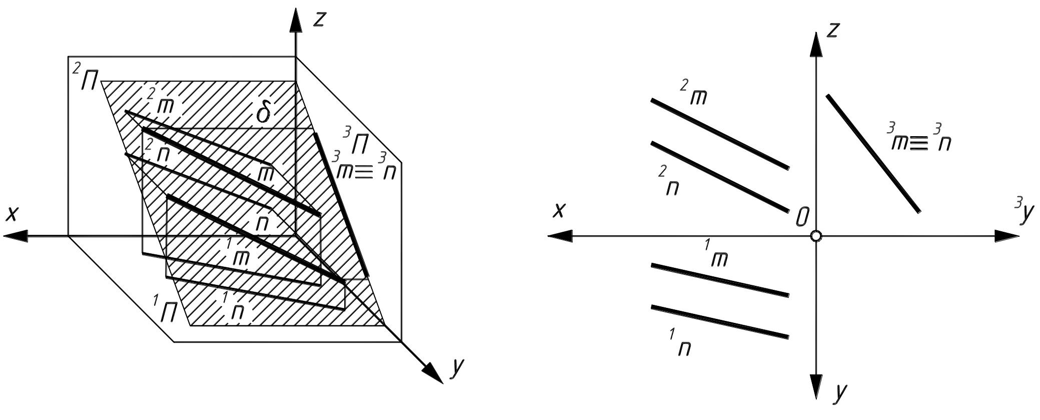


Рис. 2.13. Профільно-проектуюча площина.

Основні властивості проектуючих площин наступні:

1. Горизонтально-проектуюча площина паралельна осі *Oz* і перпендикулярна $^{1}П$; фронтально-проектуюча площина паралельна осі *Oy*; профільно-проектуюча площина паралельна осі *Ox*.

2. Розміри кутів, які проектуючи площини утворюють з площинами проекцій представлені на рис.2.11-2.13 і з площиною $П_1$ це кут α°, з площиною $П_2$ кут β°, з площиною $П_3$-кут γ°. Необхідно відмітити, в розглянутих площинах один з кутів прямий, а два інших в сумі складають 90°. Наприклад, для горизонтально-проектуючої площини $\beta^{\circ}+\gamma^{\circ}=90^{\circ}$.

3. Фігура, яка належить проектуючій площині, проектується у відрізок прямої на площину проекцій, до якої вона перпендикулярна.

4. Якщо проектуюча площина задана трьома точками або двома прямими, то на одній із площин проекцій ці точки знаходяться на одній прямій, а проекції прямих співпадають.

На рис. 2.14-2.16 представлені площини рівня. Назва площини рівня співпадає з назвою площини проекцій, до якої вона паралельна.

Площини рівня ще називають двічі проектуючими площинами.

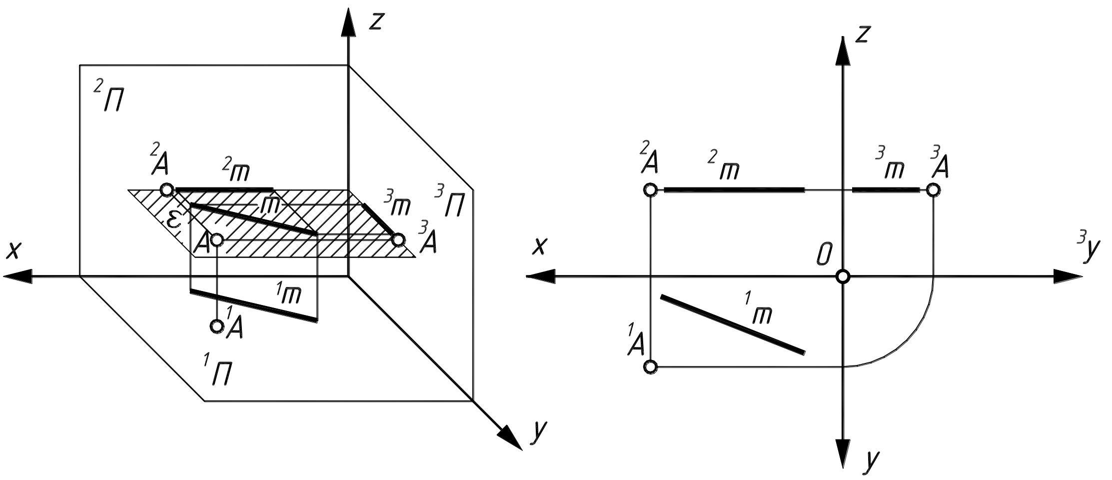


Рис. 2.14. Горизонтальна площина

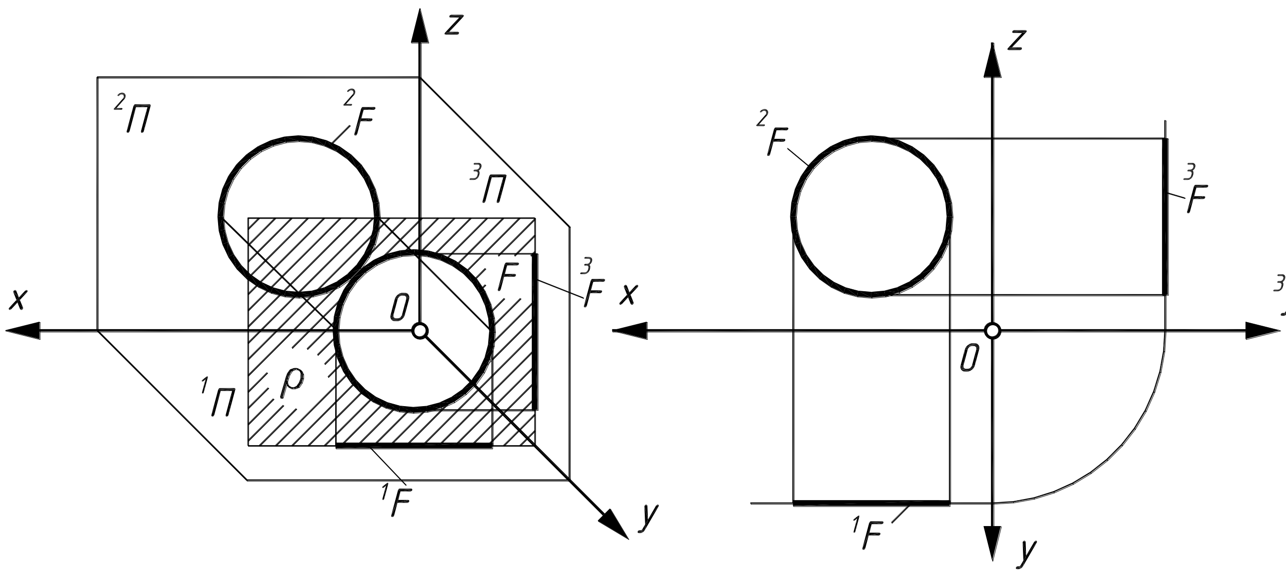


Рис. 2.15. Фронтальна площина

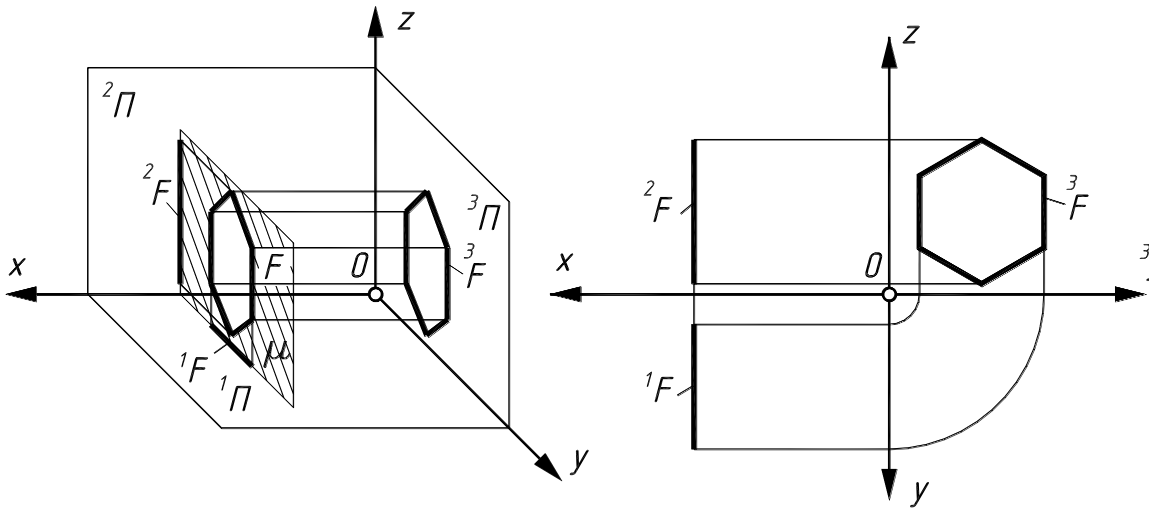


Рис. 2.16. Профільна площина.

Основні властивості площин рівня.

1. Горизонтальна площина рівня паралельна горизонтальній площині проекцій і не має горизонтального сліду. Аналогічно фронтальна і профільна площини рівня не мають відповідно фронтального і профільного слідів.
2. Можна відмітити, що горизонтальна площина перпендикулярна до осі *Oz*, фронтальна перпендикулярна до осі *Oy*, а профільна перпендикулярна до осі *Ox*.
3. Кожна із розглянутих вище площин перпендикулярна зразу до двох площин проекцій, по відношенню до яких вона одночасно являється проектуючою.
4. Дві проекції належної площини рівня фігури, являють проекції відрізків прямих площин проекцій, до яких ця фігура перпендикулярна. Третя проекція являє дійсну величину фігури.
5. Якщо точка і пряма належать площині, паралельній площині проекцій, то відстань від точки до прямої проектується на цю площину без спотворення. Також без спотворення проектується відстань між двома паралельними прямими чи кут між двома прямими, що перетинаються.

Запитання для перевірки засвоєних знань:

5. Чи проектується пряма в пряму?
6. опишіть пряму загального положення.
7. Які існують положення прямих?
8. Визначення площини.

Завдання для самостійної роботи:

5. Накреслити фронтально-проектуючу площину.

Список використаної літератури:

1. "Метоличні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". Укладачі: К. В. Сарнацька, Н. С. Дяченко, Г. Г. Допіра, Г. С. Подима

6. «Курс начертательной геометри» В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиєвский
7. Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів "Нарисна геометрія" та " Інженерна графіка". Укладачі: Віткун Н.К., Ізволенська А.Є., Парахіна Н.А., Чорнощокова Л.Д., Київ, КПІ, 1992 - 60с.
8. укл. Білицька Н.В. ГетьманО.Г. «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка» НТУУ «КПІ» 2005

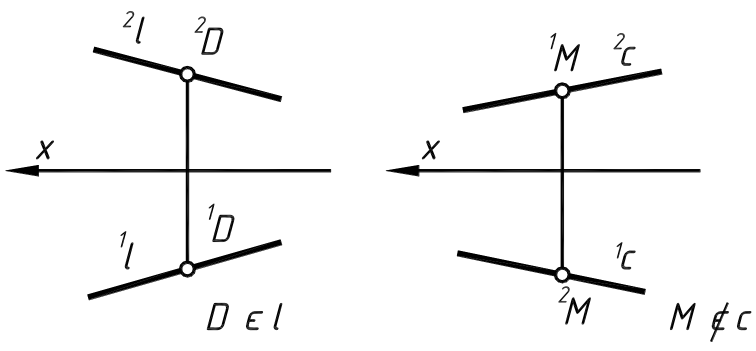
Лекція1

Тема: **«Взаємозв’язок між елементами простору (належність, паралельність, перпендикулярність).»**

Питання для розгляду:

1 Належність точок прямим.
2 Ділення відрізка точкою в даному співвідношенні .
3 Взаємозв’язок між графічними параметрами прямої.
3.1. Визначення натуральної величини прямої і кутів нахилу прямої до площин проекцій.
3.2. Взаємне положення двох прямих
4. Лінії площини.
5. Належність точок і прямих площинам.
6. Взаємне положення прямих і площин.
6.1.Лінії перетину двох площин.
6.2.Паралельність прямої площині.
6.3.Прямі перпендикулярні до площини.

1.Належність точок прямим. Точка належить прямій, коли її одноіменні проекції лежать на одноіменних проекція прямої і знаходяться у проекційному зв’язку.



а) б)

Рис. 3.1

Належність точки прямій загального положення достатньо перевірити на двох її проекціях (рис. 3.1).

Перевірку і побудову проекцій точки, яка належить прямій рівня, необхідно проводити на таких двох проекціях прямої, одна з яких – проекція на паралельну прямій площину (рис. 3.2)

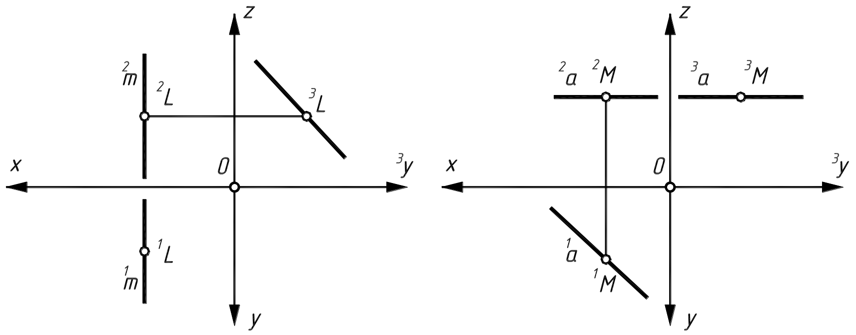


Рис. 3.2

2. Ділення відрізка точкою в даному співвідношенні.

За умовою завдання необхідно розділити відрізок *AB* точкою *C* у співвідношенні 3:5.

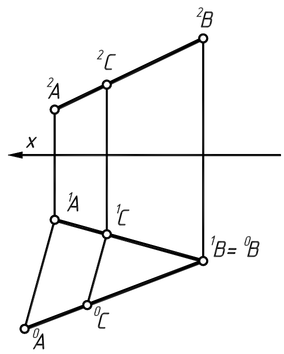
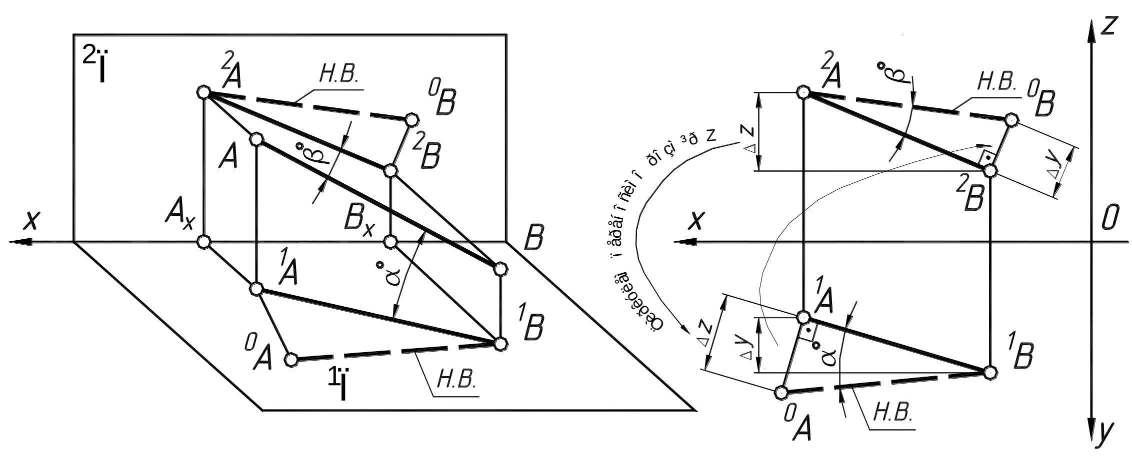


Рис. 3.3

На рисунку 3.3 точку ^0C яка поділяє відрізок АВ у співвідношенні 3:5, знаходимо за допомогою графічного ділення. Метод графічного ділення полягає в тому, що з проекції ^1B проводимо лінію $^1B^0A$ рівну сумі долей співвідношення (тобто 3+5=8). Лінію $^1B^0A$ проводимо в довільному напрямі. З’єднавши ^0A з проекцією ^1A, одержимо трикутник, в якому на стороні $^1B^0A$ за співвідношенням 3:5 (т. ^0C) проведемо з точки ^0C паралельний $^1A^0A$ відрізок $^0C^1C$. Другу проекцію тобто ^2C, знаходимо по інцедентності (належності) точки прямій.

3. Взаємозв’язок між графічними параметрами прямої.

3.1 Визначення натуральної величини прямої і кутів нахилу прямої до площин проекцій.



а) б)

Рис. 3.4

На рис.3.4. задана пряма загального положення. На просторовому зображенні (рис 3.4а) відрізок АВ натуральна величина прямої. Це гіпотенуза прямокутного трикутника, одним катетом якого слугує проекція прямої, а другим катетом різниця **ΔZ** координата точок $\Delta Z = Z_B - Z_A$. Таким чином, на горизонтальній проекції, побудувавши прямокутний трикутник з вищеназваними катетами ми одержимо проекцію натуральної величини відрізка *AB* у площині $^1П$. Кут нахилу прямої до $^1П$ (це кут α° між даною прямою), і її горизонтальною проекцією.

На рис.3.4б представлений епюр відрізка *AB* прямої. На цьому показано спосіб побудови натуральної величини відрізка *AB* і кутів нахилу відрізка до горизонтальної (α°) і фронтальної (β°) площин проекцій. Для побудови натуральної величини відрізка *AB* на горизонтальній площині проекцій $^1П$ використовуємо перевищення точки В над точкою А - $\Delta Z = Z_A - Z_B$, а на фронтальній площині проекцій $^2П$- використовуємо перевищення $\Delta y = y_B - y_A$.Кут між горизонтальною проекцією і натуральною величиною відрізка *AB* – це кут α°, нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій, а кут між фронтальною проекцією і натуральною величиною відрізка *AB* – це кут β° нахилу до фронтальної площини проекцій.

3.2 Взаємне положення двох прямих

Прямі в просторі можуть займати різні положення – перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

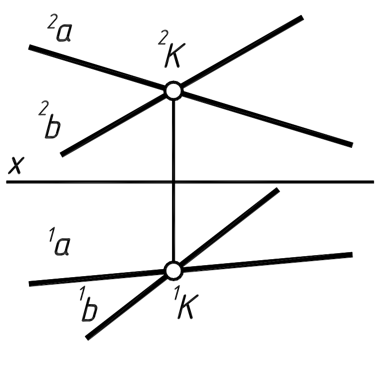


Рис. 3.5

Якщо прямі перетинаються в просторі, то на епюрі (рис. 3.5) перетинаються їх однойменні проекції. Проекції точок перетину прямих знаходяться у проекційному зв'язку. $a \cap b \Rightarrow {}^1a \cap {}^1b \wedge {}^2a \cap {}^2b, \;\; a \cap b \Rightarrow K.$

Якщо одна з прямих, що перетинаються являється лінією рівня, то перевірка перетину прямих проводиться у цій площині проекцій, до якої лінія рівня паралельна, або з допомогою ділення відрізка в даному співвідношенні.

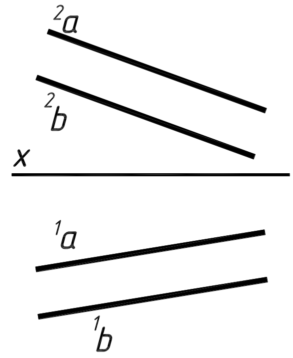
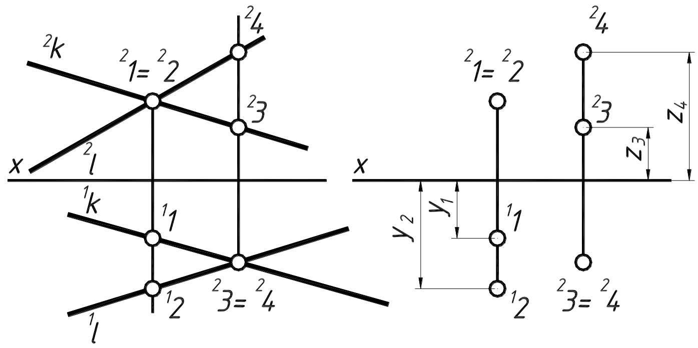


Рис. 3.6

Якщо прямі в просторі паралельні між собою, то на епюрі (рис.3.6) їх однойменні проекції також паралельні.

$$a \,//\, b \Rightarrow {}^1a \,//\, {}^1b \wedge {}^2a \,//\, {}^2b.$$

Перевірку прямих загального положення на паралельність достатньо провести на двох проекціях. Паралельність прямих рівня, перевіряють на тій площині проекцій, до якої ці прямі паралельні.



а) б)

Рис. 3.7

Якщо прямі не паралельні і не перетинаються то вони мимобіжні (рис. 3.7,а). Співставлення координат (рис. 3.7,б) характеризує видимість однієї прямої відносно іншої.

Фронтальні проекції точок 1 і 2 співпадають. Координата $y_2 > y_1$. Отже, фронтальна проекції ${}^2l$ прямої видима. Горизонтальні проекції точок 3 і 4 співпадають. Координата $Z_4 > Z_3$. Отже, горизонтальна проекція ${}^1l$ прямої видима.

Просторовий чотирикутник, який утворюється двома парами мимобіжних прямих (гіперболічних параболічних) крило вітряка – площини другого порядку. Така площина широко використовується для апроксимації криволінійних поверхонь в авіаційній суднобудівній та автомобільній промисловостях.

4. Лінії площини. Пряма належить площині, якщо дві довільні точки прямої належать цій площині.

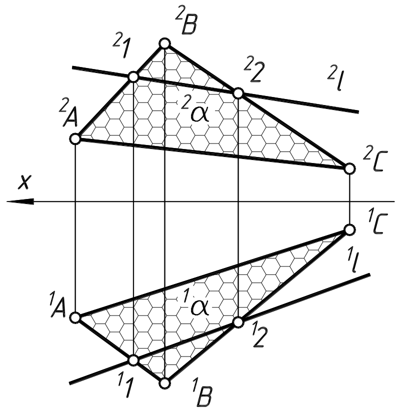


Рис. 3.8

Пряма *l* належить площині α(Δ*ABC*), тому що вона проходить через точки 1, 2, що належать цій площині: $l \in \Delta ABC \Rightarrow 1 \in AB \wedge 2 \in BC$.

Серед прямих, які належать площині, виділимо два класи прямих, які відіграють роль при розв'язуванні задач – це горизонталі і фронталі площини.

Горизонталь – це лінія, що належить площині і паралельна горизонтальній площині проекцій (рис.3.9).

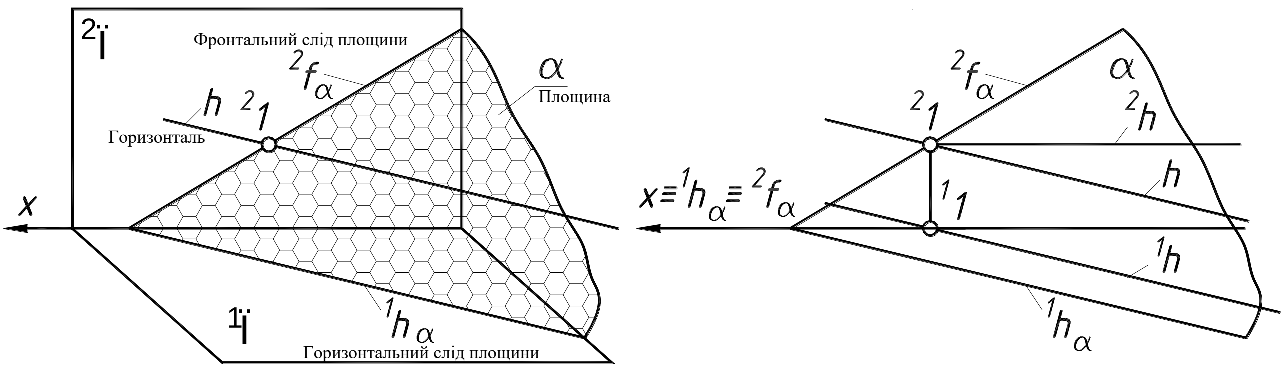


Рис. 3.9

Фронтальна проекція ^2h горизонталі паралельна осі *Ox*. Площина має безліч горизонталей. Всі горизонталі площини паралельні між собою.

Фронталь площини - *f* називається пряма, яка належить площині і паралельна фронтальній площині проекцій (рис. 3.10)

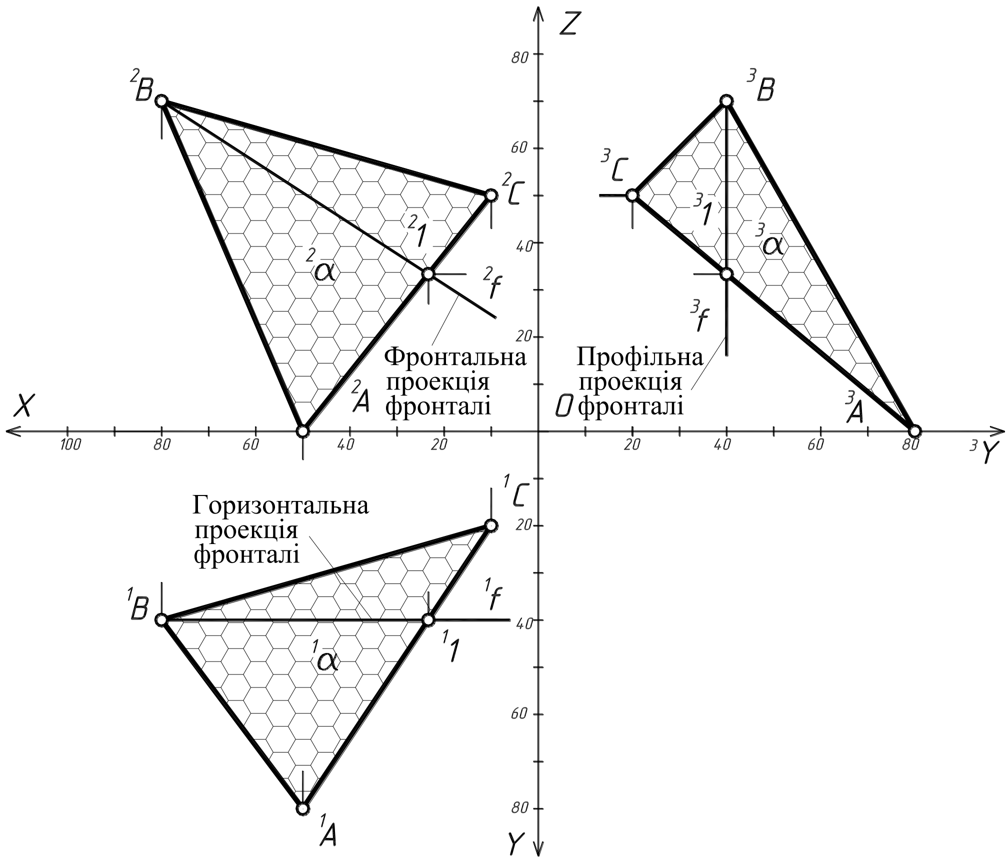


Рис. 3.10

Горизонтальна проекція ^1f фронталі паралельна осі *Ox*. Площина має безліч фронталей. Всі фронталі площини взаємно паралельні.

5.Належність точок і прямих площинам. Точка належить площині, якщо вона належить прямій, цієї площини.

Пряма належить площині, якщо вона має з площиною щонайменше дві спільні точки.

Нехай задана горизонтальна проекція ^1A точки *A*, яка належить площині α ($a \parallel b$). Побудуємо фронтальну проекцію ^2A цієї точки.

Через горизонтальну проекцію ^1A точки *A* проведемо горизонтальну проекцію ^1l довільної прямої *l*, яка належить площині α. Побудуємо фронтальну проекцію ^2l цієї прямої за належністю точок 1 і 2 прямої *l* площині α. Провівши через горизонтальну проекцію ^1A точки *A* лінію проекційного зв'язку до перетину з фронтальною проекцією ^2l прямої *l*, знайдемо положення фронтальної проекції ^2A точки *A*.

Якщо нам необхідно побудувати точку *A*, яка належить площині α, то необхідно попередньо в цій площині провести яку-небудь пряму і на ній побудувати точку (рис.3.11).

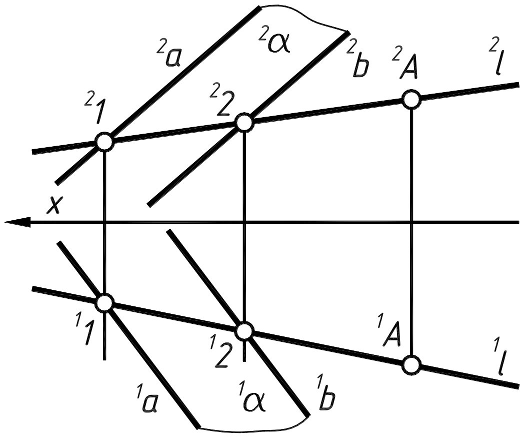


Рис. 3.11

Перевірку належності точки площині проводять, провівши через точку пряму. Якщо ця пряма належить площині, то точка також належить площині.

6. Взаємне положення прямих і площин.

Взаємне положення прямої і площини визначається з наступним алгоритмом:

1. Через пряму і площину проводимо допоміжну площину.
2. Будуємо лінію перетину допоміжної площини і заданої площини.
3. Аналізуємо взаємне положення заданої прямої і лінії перетину.

Встановлюємо один із трьох можливих випадків

а) пряма належить площині

б) пряма паралельна площині

в) пряма перетинає площину

6.1 Лінія перетину двох площин.

Отже алгоритм полягає у побудові лінії перетину двох площин. Розглянемо спосіб такої побудови.

Лінію перетину двох площин задають дві точки, або одна точка і напрямок. Отже для побудови лінії перетину двох площин необхідно використати площину посередник і знайти лінію її перетину з кожною площиною (рис.3.12).

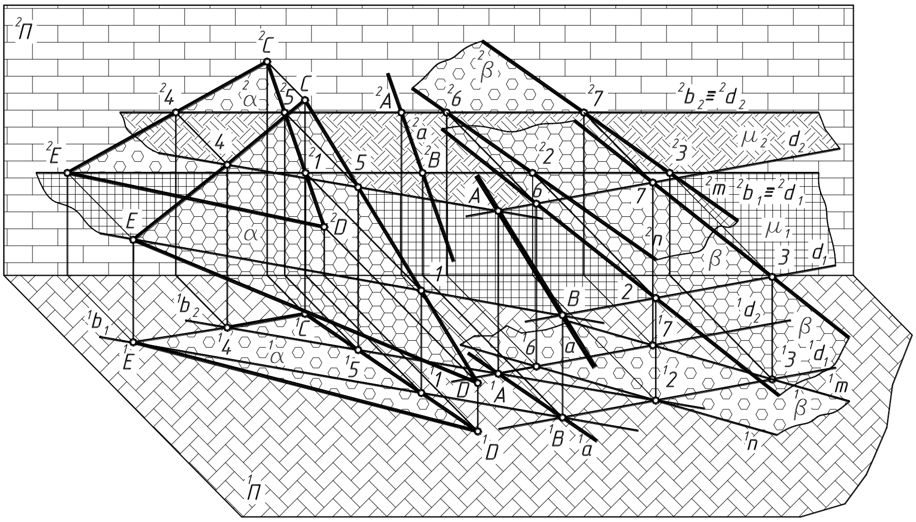


Рис. 3.12

Побудова лінії перетину двох площин, на комплексному кресленні представлено на рис. 3.13

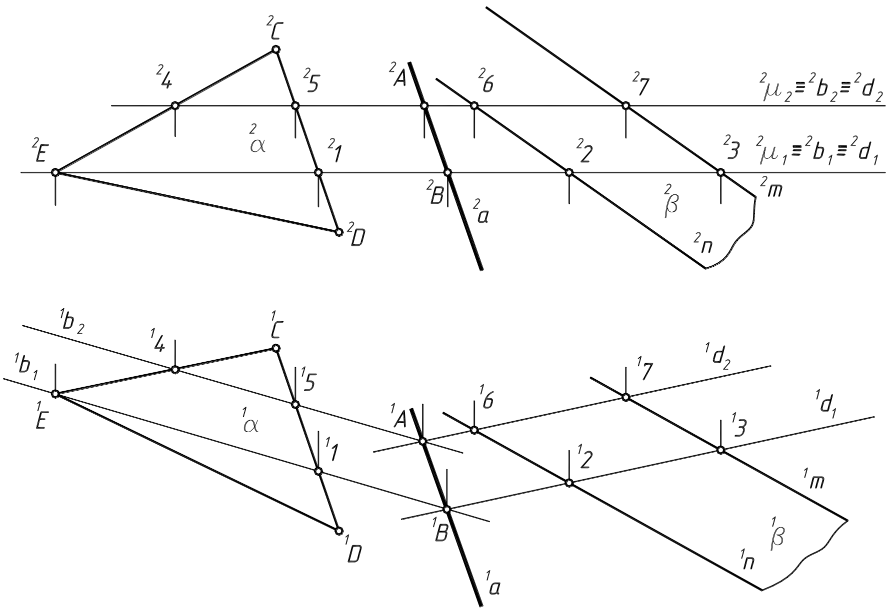


Рис. 3.13

Дано: $\dfrac{\alpha = \Delta CDE; \quad \beta = n \,//\, m}{?\,a(AB) = \alpha \cap \beta}.$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mu_1 \ldots . \mu_n \\ 2.\mu_1 \cap \alpha = b_1 \\ 3.\mu_1 \cap \beta = d_1 \\ 4.b \cap d = A \\ 5.A \in a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6.\mu_2 \ldots . \mu_n \\ 7.\mu_2 \cap \alpha = b_1 \\ 8.\mu_2 \cap \beta = d_2 \\ 9.b \cap d = B \\ 10.B \in a \end{array}\right\}$$

6.2 Паралельність прямої площині. Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна прямій, яка належить площині, або коли в площині можна провести пряму, паралельну цій площині (рис. 3.14).

Дано: $\dfrac{\alpha(\Delta ABC), m.E}{?\, l \in E \,//\, \alpha.}$

$l \,//\, \alpha \Rightarrow {}^1l \,//\, {}^1B{}^1C \wedge {}^2l \,//\, {}^2C{}^2B.$

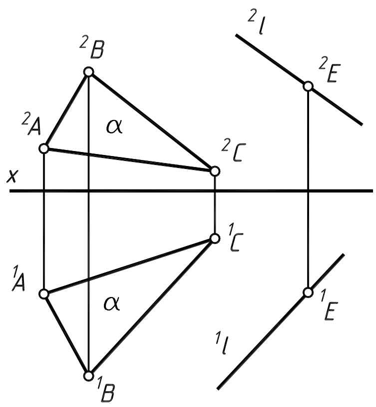


Рис. 3.14

Слід відмітити, що при побудові паралельної площині прямої на комплексному кресленні, однойменні проекції повинні бути паралельні між собою. Тобто в даному випадку якщо ми через т. *E* проводимо пряму паралельну α то ${}^1l$ паралельна ${}^1B\ {}^1C$ і ${}^2l$ повинна бути паралельна ${}^2B\ {}^2C$.

6.3 Прямі, перпендикулярні до площини. З курсу стереометрії відомо, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать площині. Пряма буде перпендикулярна до іншої прямої, якщо пряма належить площині, перпендикулярній до іншої прямої.

Для того, щоб побудувати перпендикуляр до площини на комплексному кресленні, необхідно використати правило проектування прямого кута (рис.3.15). Якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій, а друга сторона не перпендикулярна до площини проекцій, то на цю площину проекцій прямий кут проекціюється в дійсну величину.

Поєднавши це правило з лініями рівня площини, ми завжди можемо провести перпендикуляр до горизонталі і фронталі, так як вони являються проекціями однієї із сторін прямого кута.

Лінії рівня площини паралельні площинам проекції, тому їх використовують при побудові перпендикуляра до площини.

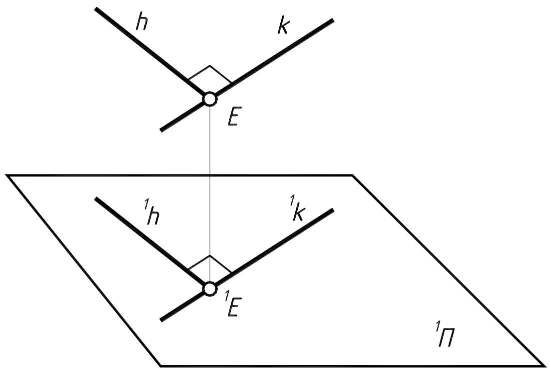


Рис. 3.15

Лінії рівня площини паралельні площинам проекції, тому їх використовують при побудові перпендикуляра до площини.

Отже, щоб побудувати перпендикуляр до площини, необхідно побудувати в площині горизонталь і фронталь у площині і опустити перпендикуляр до горизонтальної проекції горизонталі і фронтальної проекції фронталі.

(рис. 3.16).

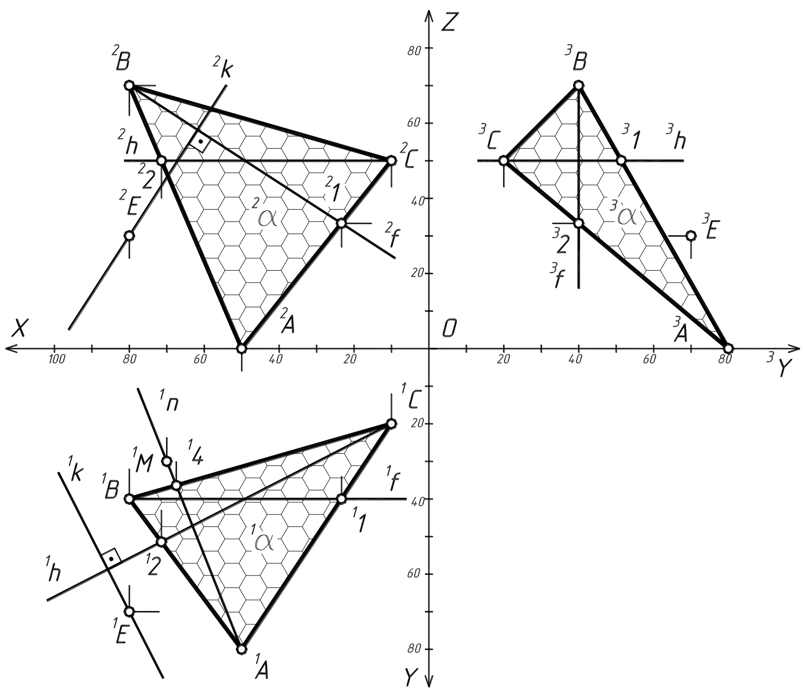


Рис. 3.16

З креслення видно, щоб побудувати горизонтальну проекцію горизонталі ^1h ми будуємо не що інше як сторону прямого кута. Аналогічно із фронтальною проекецією фронталі ^2f.

Запитання для перевірки засвоєних знань:

1.Коли точка належить прямій?
2.Опишіть спосіб графічного ділення.

3.Як визначається натуральна величина прямої ?
4.Відображення прямих перпендикулярних до площини.

Завдання для самостійної роботи:

1.Побудуйте перпендикуляр до площини.

Список використаної літератури:

1. "Метоличні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". Укладачі: К. В. Сарнацька, Н. С. Дяченко, Г. Г. Допіра, Г. С. Подима
2.«Курс начертательной геометри» В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиєвский
3.Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів "Нарисна геометрія" та " Інженерна графіка". Укладачі: Віткун Н.К., Ізволенська А.Є., Парахіна Н.А., Чорнощокова Л.Д., Київ, КПІ, 1992 - 60с.
4.укл. Білицька Н.В. ГетьманО.Г. «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка» НТУУ «КПІ» 2005

Лекція 4

Тема: **«Поверхні»**

Питання для розгляду:

1. *Утворення та задання поверхонь.*
2. *Відображення поверхонь.Точки на поверхнях.*
   2.1. Циліндр
   2.2.Сфера.
   2.3.Конус.
   2.4.Призма.
   2.5. Піраміда.
3. *Перетин поверхонь площинами.*
4. *Взаємний перетин поверхонь площинами.*
   4.1. Тіло обмежене сферичною і циліндричною поверхнею
   4.2. Тіло обмежене пірамідальною і циліндричною поверхнею
   .4.3. Тіло обмежене конічною і сферичною поверхнею
5. *Побудова зображень геометричних тіл з подвійним проникненням*
   5.1. Тіло, обмежене призматичною і конічною поверхнями.

*1.Утворення та задання поверхонь.*Поверхня в геометрії визначається як двопараметрична множина точок простору, тобто множина точок простору, координати яких є диференційованими функціями двох параметрів. Це визначення дозволяє розглянути поверхню як неперервну множину послідовних положень змінної лінії – твірної, що рухається в просторі за певним правилом, або перетин твірної (у всіх її послідовних положеннях), з деякими фіксованими лініями, які називаємо напрямними.

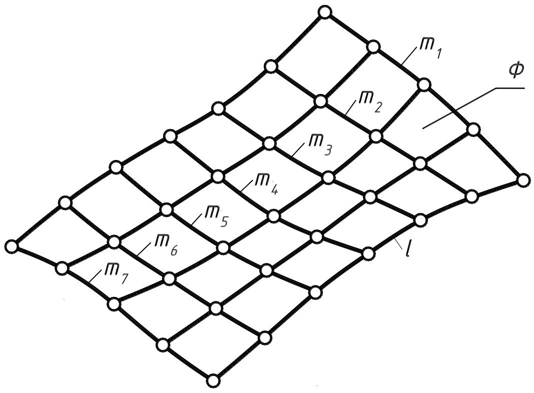


Рис. 4.1

В нарисній геометрії користуються головним чином кінематичним способом утворення поверхонь. На поверхні *Ф* можливо в загальному випадку провести два типи сімейства ліній *l* та *m*, яким будуть задовольняти слідуючі умови*:*

-ніякі дві лінії одного сімейства не перетинаються між собою.

-кожна лінія одного сімейства перетинає всі лінії другого.

На рис. 4.1 поверхня *Ф* утворена рухом твірної *l* по нерухомим напрямним *m.* Твірні та напрямні можуть мінятись місцями.

З великої кількості поверхонь оточуючого нас простору ми будемо розглядати два класи, поверхні обертання і гранні поверхні.

Поверхнею обертання називається поверхня, яка описується якою-небудь лінією (прямою, кривою) твірною при її обертанні навколо нерухомої осі.

Визначник поверхні обертання: 1. Нерухома пряма – вісь обертання; твірна - пряма або крива лінія. 2. Твірна обертається навколо осі так, щоб кожна точка твірної здійснила повний оберт.

Щоб викреслити складну деталь, треба навчитись будувати прості геометричні фігури, форми яких складають деталі: призми, циліндри, сфери, конуси, піраміди. Проектування геометричних тіл заключається не тільки в побудові за заданими розмірами проекцій цих тіл, але і в умінні провести повний аналіз креслення, тобто вказати ребро, вершини, грані, визначити взаємне розміщення цих елементів, знайти видимі і невидимі частини фігури, визначити проекції точок , які лежать на поверхні тіла, тощо.

Положення точки, яка лежить на поверхні задана, якщо відома одна її проекція і вказано, на якій частині поверхні (видимої або невидимої) точка розміщена. Якщо немає вказівок, вважають, що точка розміщена на видимій частині поверхні.

Щоб побудувати недостаючі проекції точки яка лежить на поверхні, необхідно: 1) визначити вид поверхні (проектуюча або загального положення) на якій лежить задана точка; 2) вибрати графічно просту для побудови на кресленні лінію поверхні яка б проходила через задану точку; 3) побудувати проекції цієї лінії на кресленні; 4) побудувати шукані на кресленні задані точки.

Будь-яка лінія являє собою сукупність точок, тому побудова проекцій лінії, розміщеної на поверхні, зводиться до побудови проекцій декількох точок, які належать цій лінії.

Розглянемо деякі поверхні, утворені обертанням прямої лінії.

2 Відображення поверхонь.Точки на поверхнях

2.1 Циліндр.

Циліндром називається тіло, обмежене циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами (основами). Прямим називається циліндр, в якого твірні перпендикулярні до основи рис. 4.2,а.

Проводячи аналіз креслення циліндра можна відмітити, що верхня основа циліндра паралельна площині ${}^1\Pi$, нижня основа належить ${}^1\Pi$. Бокова циліндрична поверхня – горизонтально – проектуюча. На ${}^1\Pi$ вона проектується в коло. Твірні даної поверхні (позначені як a, b, c, d) являються горизонтально-проектуючими прямими.

Розглянемо аксонометричне зображення циліндра (рис. 4.2,б) на горизонтальній проекції видимою буде верхня основа циліндра. На фронтальній проекції видимою буде передня частина циліндра (до площини δ). Площина δ умовно поділяє зображення циліндра на фронтальній площині проекцій на видиму і невидиму частини. Площина ε розділяє поверхню циліндра на видиму і невидиму частини на профільній площині проекцій. ${}^3\Pi$. Всі точки, що знаходяться зліва від даної площини на профільній площині ${}^3\Pi$ будують видимі, а точки, що знаходяться справа – невидимі. Невидимі точки на комплексному кресленні зображуються в круглих дужках (точка Е на рис. 4.2,е).

Побудова всіх проекцій точок здійснюється з допомогою ліній зв’язку по відповідних координатах. Яку б точку ми не взяли на поверхні циліндра, горизонтальна проекція цієї точки буде знаходитись на основі циліндра, тобто на колі.

Розглянемо декілька прикладів знаходження проекцій точок.

1. ***Задано:*** точка *A* на фронтальній проекції належить твірній *a* та верхній основі α. У символьному записі - ${}^2A \subset {}^2a \subset {}^2\alpha$ (рис. 4.2,в).

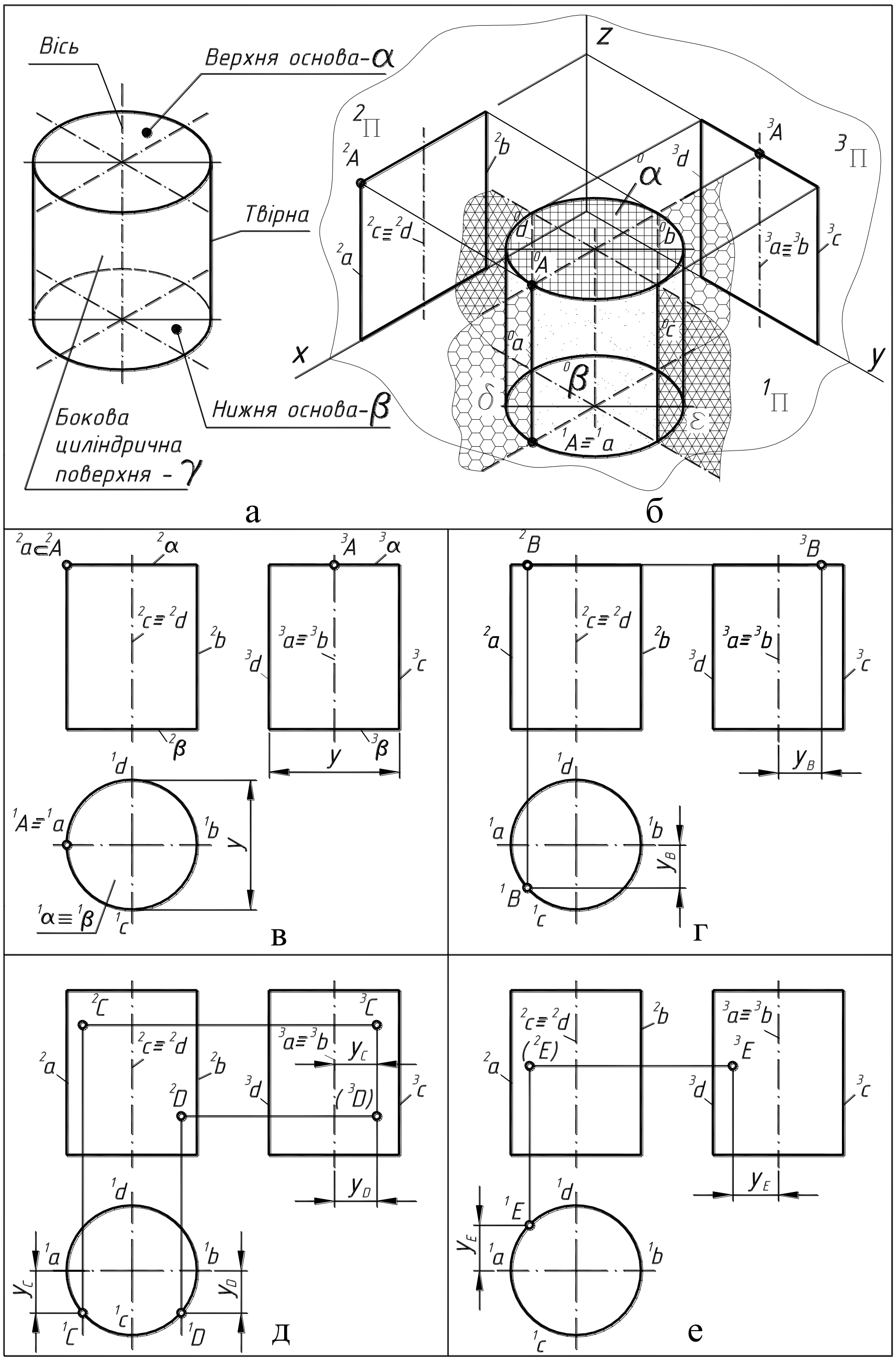


Рис. 4.2

Креслення: проекція точки ^1A на горизонтальній площині співпадає із проекцією твірної $^1A \equiv {}^1a$. Проекція точки ^3A на профільній площині проекцій співпадає із профільною проекцією твірної ^3a та належить верхній основі - $^3\alpha$ (твірна - a належить фронтальній площині γ, що проходить через вісь симетрії (див. рис. 4.2, б) тому на профільній площині не викреслюється).

2. ***Задано:*** точка B на фронтальній проекції належить верхній основі α та боковій поверхні γ . У символьному записі - $^2B \subset \alpha^2 \subset^2\gamma$ (рис. 4.2,г).

Креслення: проекція ^1B на горизонтальній площині видима і знаходиться на колі основи. Проекція ^3B на профільній площині проекцій видима належить верхній основі - $^3\alpha$ і знаходиться вправо від осі симетрії на відстані y_B

3. Задано: на фронтальній проекції точка C належить боковій поверхні γ . У символьному записі - $^2C \subset {}^2\gamma$ (рис. 4.2,д).

Креслення: проекція ^1C на горизонтальній площині видима і знаходиться на колі основи. Проекція ^3C на профільній площині проекцій видима і знаходиться від проекції ^2C по горизонтальній лінії з'вязку вправо від осі симетрії на відстані y_C

4. Задано: на фронтальній проекції точка D належить боковій поверхні γ . У символьному записі – $^2D \subset {}^2\gamma$ (рис. 4.2,д).

Креслення: проекція ^1D на горизонтальній площині видима і знаходиться на колі основи. Проекція ^3D на профільній площині проекцій невидима і знаходиться від проекції ^2D по горизонтальній лінії з'вязку вправо від осі симетрії на відстані y_D

5. Задано: невидима на фронтальній проекції точка E належить боковій поверхні γ . У символьному записі – $^2E \subset {}^2\gamma$ (рис. 4.2,е).

Креслення: проекція ^1E на горизонтальній площині видима і знаходиться на колі основи. Проекція ^3E на профільній площині проекцій невидима і знаходиться від проекції ^2E по горизонтальній лінії з'вязку вліво від осі симетрії на відстані y_E

2.2 Сфера.

Сферична поверхня може бути одержана шляхом обертання кола навколо осі, яка лежить в площині кола і проходить через його центр. Рис. 4.3,а.

Проекції контуру сфери на епюрі представляють собою кола які зображені на рис. 4.3,б. Довільний перетин сфери площиною рівня (горизонтальна, фронтальна, профільна) утворює коло і воно проектується без спотворення на відповідну площину проекцій.

Горизонтальна площина проходить через центр сфери і ділить її на дві рівні частини. Коло, що утворюється в перетині, називається екватор. Верхня половина сфери дає видимі точки на горизонтальній проекції (точки D і E на рис. 4.3,г), а нижня – невидимі.

Фронтальна площина також ділить сферу на дві рівні частини. Коло, що утворюється в перетині, називається головний мередіан. Точки, які знаходяться попереду цієї площини на фронтальній проекції видимі (точка F на рис. 4.3,д), які поза[illegible]ні(точка G на рис. 4.3,д).

Ще одне коло одержимо як січення профільною площиною. Коло, що утворюється в перетині, називається профільний мередіан. Точки будут видимі на профільній проекції, тоді коли вони будуть з лівої сторони від цієї січної площини (точки F і G на рис. 4.3,д), і невидимі, коли вони будуть справа (точки H і I на рис. 4.3,е).

<u>Розглянемо декілька прикладів знаходження проекцій точок.</u>

1. ***Задано:*** точка A на фронтальній проекції знаходиться в перетині головного фронтального та профільного мередіанів. У символьному записі - ^2A

$\subset {}^2b \cap {}^2c$ (рис. 4.3,в). (Аналогічно можно провести аналіз побудови точки *B*, що знаходиться в перетині екватора та профільного мередіана та аналіз побудови точки С що знаходиться в перетині екватора та головного мередіана)

Креслення: проекція точки ${}^1A$ на горизонтальній площині буде знаходитись в перетині головного фронтального та профільного мередіанів- ${}^1A \subset {}^1b \cap {}^1c$. Проекція точки ${}^3A$ на профільній площині буде знаходитись в перетині головного фронтального та профільного мередіанів- ${}^3A \subset {}^3b \cap {}^3c$.

Аналогічно можно провести аналіз побудови точки *B*, що знаходиться в перетині екватора та профільного мередіана та аналіз побудови точки *C* що знаходиться в перетині екватора та головного мередіана (рис. 4.3,в)

*2. **Задано:*** точка *D* на фронтальній проекції належить головному (фронтальному) мередіану. У символьному записі – ${}^2D \subset {}^2b$ (рис. 4.2,г).

Креслення: проекція точки ${}^1D$ на горизонтальній площині буде знаходитись на перетині вертикальної лінії з'вязку і осьової лінії, а саме належати головному мередіану – ${}^1D \subset {}^1b$. Координата точки *D* по осі *OX* визначається колом радіусом – R1 утвореним в горизонтальній площині.

Аналогічно можно провести аналіз побудови точки *E*, (рис. 4.3,г) її проекція на горизонтальній площині визначається екватором сфери– ${}^1E \subset {}^1a$, фронтальна проекція буде знаходитись на перетині вертикальної лінії з'вязку і осьової лінії – ${}^2E \subset {}^2b$. Координата точки *E* на профільній проекції визначається колом радіусом – R3 утвореним в профільній площині.

*3. **Задано:*** точка *F* - видима та точка *G* - невидима на фронтальній проекції. У символьному записі – ${}^2F \equiv {}^2G$ (рис. 4.3,д).

Креслення: проекції точок ${}^1F$ і ${}^1G$ на горизонтальній площині будуть знаходитись на колі радіусом – R1, його радіус визначено з фронтальної площини проекцій. Проекції точок ${}^3F$ і ${}^3G$ на профільній площині будуть знаходитись на колі радіусом – R3, його радіус визначено з фронтальної площини проекцій.

*4. **Задано:*** точка *H* - видима та точка *I* - невидима на горизонтальній проекції. У символьному записі – ${}^2H \equiv {}^2I$ (рис. 4.3,е).

Креслення: проекції точок ${}^2H$ і ${}^2I$ на горизонтальній площині будуть знаходитись на колі радіусом – R2, його радіус визначено з фронтальної площини проекцій. Проекції точок ${}^3F$ і ${}^3G$ на профільній площині будуть знаходитись на колі радіусом – R3, його радіус визначено з фронтальної площини проекцій.

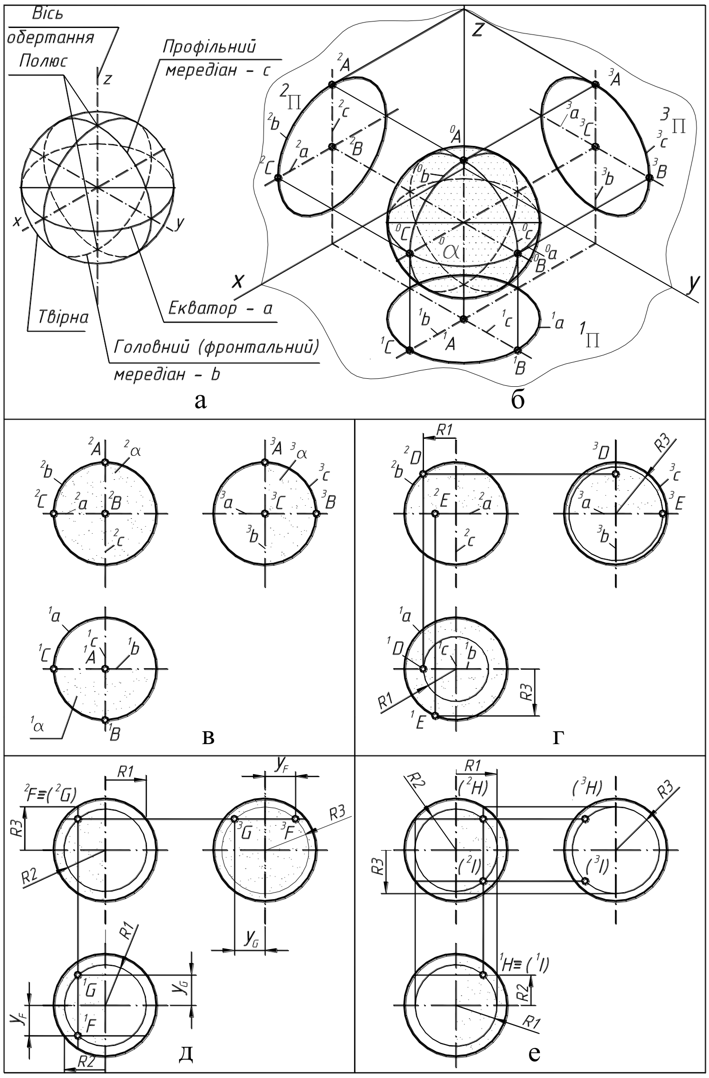


Рис. 4.3

2.3 Конус. Конус – геометричне тіло, обмежене боковою конічною поверхнею - β і площиною основи - α, що перетинає всі його твірні. Основа конуса лежить в площині $^{1}\Pi$. Прямим круговим називається конус, у якого основа є коло, а висота проходить через центр основи. Бічна поверхня прямого конуса утворена твірними які проходять через загальну точку *S* - вершину конуса (див.рис 4.4,а). На рис. 4.4,б зображено проекції конуса на площини проекцій.

Твірні *a, b* є окреслюючими по відношенню до $^{2}\Pi$, вони лежать у фронтальній площині. Твірні *c, d* – окреслюючі по відношенню до площини проекцій $^{3}\Pi$, знаходяться в профільній площині (рис. 4.4,в). Всі інші твірні конуса - прямі загального положення і на епюрі не зображуються.

Проекції точок, які лежать на основі конуса, знаходять на інших площинах проекцій за допомогою ліній зв'язку.

Розглянемо декілька прикладів знаходження проекцій точок.

1. ***Задано:*** проекція точки - ^{2}C належить основі конуса (рис. 4.4,г).

Креслення: проекції точки - ^{1}C на горизонтальній площині знайдемо на колі основи, а проекцію точки - ^{3}C на профільній площині знайдемо на відстані Y_C в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

2.Задано: точки – ^{1}D і ^{1}E , що належать окреслюючим твірним - ^{1}d, ^{1}c конуса (рис. 4.4,д).

Необхідно: Побудувати проекції точок. Вказати їх видимість.

Аналіз: На горизонтальній проекції видимою буде вся бічна поверхня конуса. Фронтальні окреслюючі твірні ^{2}a, $^{2}в$ ділять бічну поверхню конуса на передню - видиму і задню - невидиму (по відношенню до $^{2}П$ – рис. 4.4.д). Профільні окреслюючі твірні - ^{3}d, ^{3}c ліву видиму і праву невидимі частини (по відношенню до $^{3}П$, рис. 4.4. д).

Креслення: Проведемо горизонтальну площину - $^{2}\gamma$ через фронтальну проекцію точки – (^{2}D) –невидима, та горизонтальну площину - $^{2}\delta$ через фронтальну проекцію точки – ^{2}E. Побудуємо коло радіусом - R1 в площині $^{1}\gamma$ та коло радіусом – R2 в площині - $^{2}\delta$ на горизонтальній площині проекцій. Проекції точок – ^{1}D і ^{1}E на горизонтальній площині знайдемо в перетині кіл радіусами R1 та R2 з горизонтальною проекцією окреслюючих твірних - ^{1}d, ^{1}c. Профільні проекції точок- ^{3}D і ^{3}E знаходяться в перетині горизонтальних ліній зв'язку від фронтальних проекцій точок- ^{2}D і ^{2}E та профільних проекцій окреслюючих твірних - ^{3}d та ^{3}c.

3. ***Задано:*** точка – ^{2}F , що належить конічній поверхні (рис. 4.4,е).

Креслення: Проведемо горизонтальну площину - $^{2}\varepsilon$ через фронтальну проекцію точки – ^{2}F. Побудуємо коло радіусом - R1 в цій площині на горизонтальній проекції. Горизонтальну проекцію точки - ^{1}F знайдемо в перетині цього кола і вертикальної лінії зв'язку від фронтальної проекції точки – ^{2}F. Профільну проекцію точки – ^{3}F знайдемо в площині - $^{3}\varepsilon$ на відстані Y_F в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

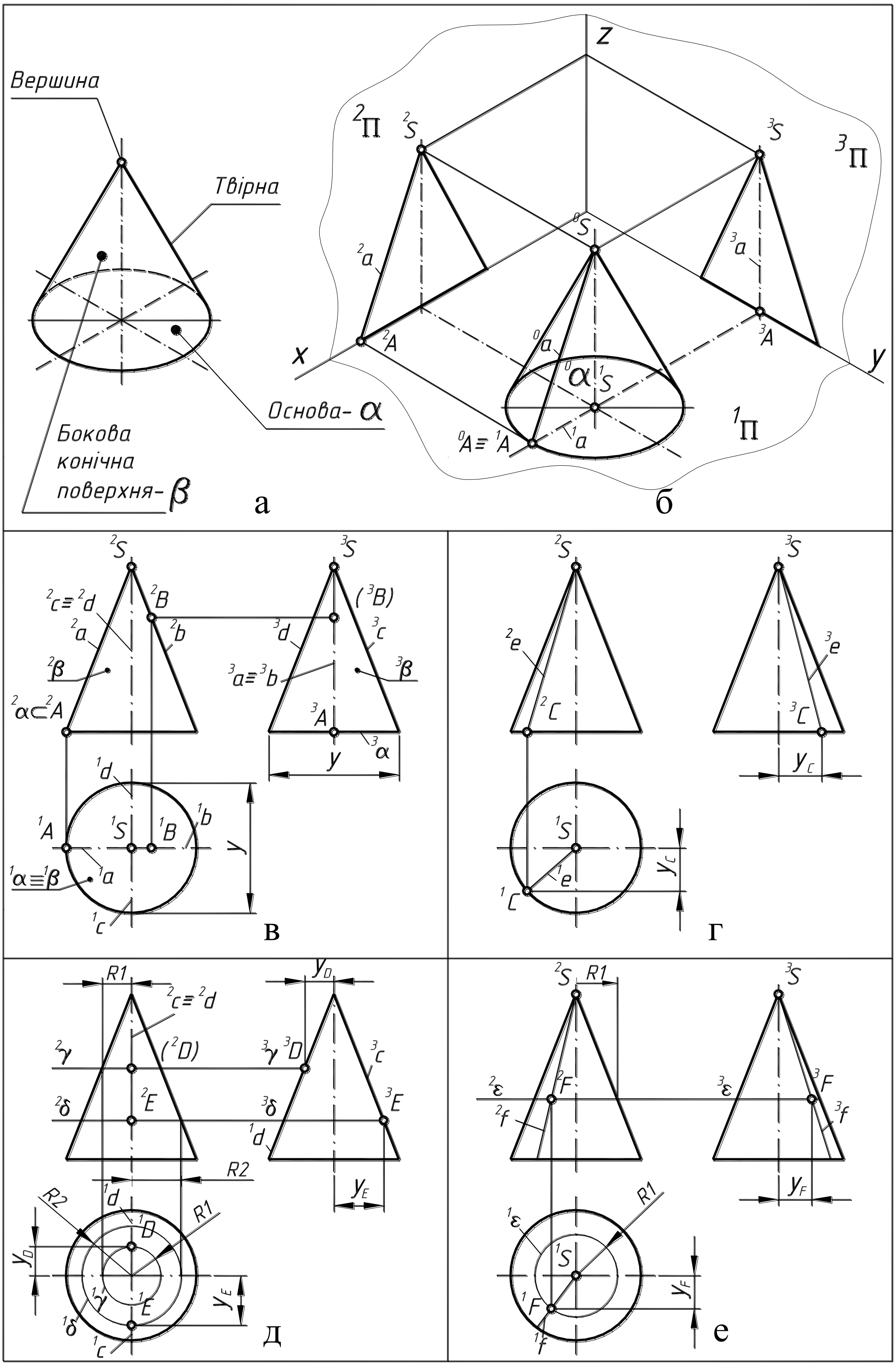


Рис. 4.4

*2.4 Призма***.** Призма – многогранник, утворений перетином призматичної поверхні двома паралельними площинами -α і β. На рис.4.5,а зображені проекції призми і її деяких складових елементів. Елементами призм вважають: вершини (точки), ребра (прямі), грані (площини). Призму називають прямою, якщо бокові ребра її перпендикулярні до основи. Призму називають правильною, якщо в основі її лежить правильний многокутник. Аксонометричне зображення призми наведено на рис. 4.5,б.

Призма, яку зображено на рис.4.5,в має 6 граней, 2 основи, 18 ребер (із них 6 бокових –a, b, c, d, e, f), 12 вершин. Верхня основа паралельна горизонтальній площині проекцій $^1\Pi$ нижня – належить $^1\Pi$. Грані *BCMK, FEOT* – фронтальні площини. На $^3\Pi$ кожна з них проектується в лінію – слід площини. Інші грані – горизонтально-проектуючі площини. Ребра основи – горизонтальні лінії рівня. На горизонтальній проекції видимою буде верхня основа призми. На фронтальній проекції видимі грані *ABKL, BCMK, CDNM,* інші – невидимі. На профільній проекції видимі грані – *ABKL, AFTL,* інші – невидимі.

Комплексне креслення правильної призми слід починати з горизонтальної проекції. Побудову всіх проекцій точок на боковій поверхні призми здійснють за допомогою ліній зв'язку по відповідних координатах. Яку б точку ми не взяли на боковій поверхні призми, горизонтальна проекція цієї точки буде знаходитись в основі призми.

<u>Розглянемо декілька прикладів знаходження проекцій точок.</u>

*1. **Задано:*** проекція точки - ^2P належить грані *ABKL* (площина - γ, див.рис. 4.5,г).

Креслення: горизонтальна проекція точки – ^1P знаходиться в основі призми на ребрі – $^1K^1L$. Профільну проекцію точки – ^3P знаходимо на горизонтальній лінії з'вязку, яку проводимо від фронтальної проекції точки – ^2P, на відстані Y_P в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

*2. **Задано:*** проекція точки – ^2S належить грані *CDNM* (площина - δ, див.рис. 4.5,д).

Аналіз: грань *CDNM* видима на горизонтальній, фронтальній та невидима на профільній проекціях (див. рис.4.5,б), аналогічно позначимо проекції точки – ^1S, ^2S і (^3S).

Креслення: горизонтальна проекція точки – ^1S знаходиться в основі призми на ребрі – $^1N^1M$. Профільну проекцію точки – ^3P знаходимо на горизонтальній лінії з'вязку, яку проводимо від фронтальної проекції точки – ^2P, на відстані Y_S в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

*3. **Задано:*** проекція точки – ^2I належить грані *BCMK* (площина - $^2\varepsilon$, див.рис. 4.5,е).

Аналіз: грань *BCMK* – фронтальна площина.

Креслення: горизонтальна проекція точки – ^1I знаходиться в основі призми на ребрі – $^1K^1M$. Профільну проекцію точки – ^3I знаходимо по горизонтальній лінії з'вязку на проекції грані *BCMK* (площина - $^3\varepsilon$).

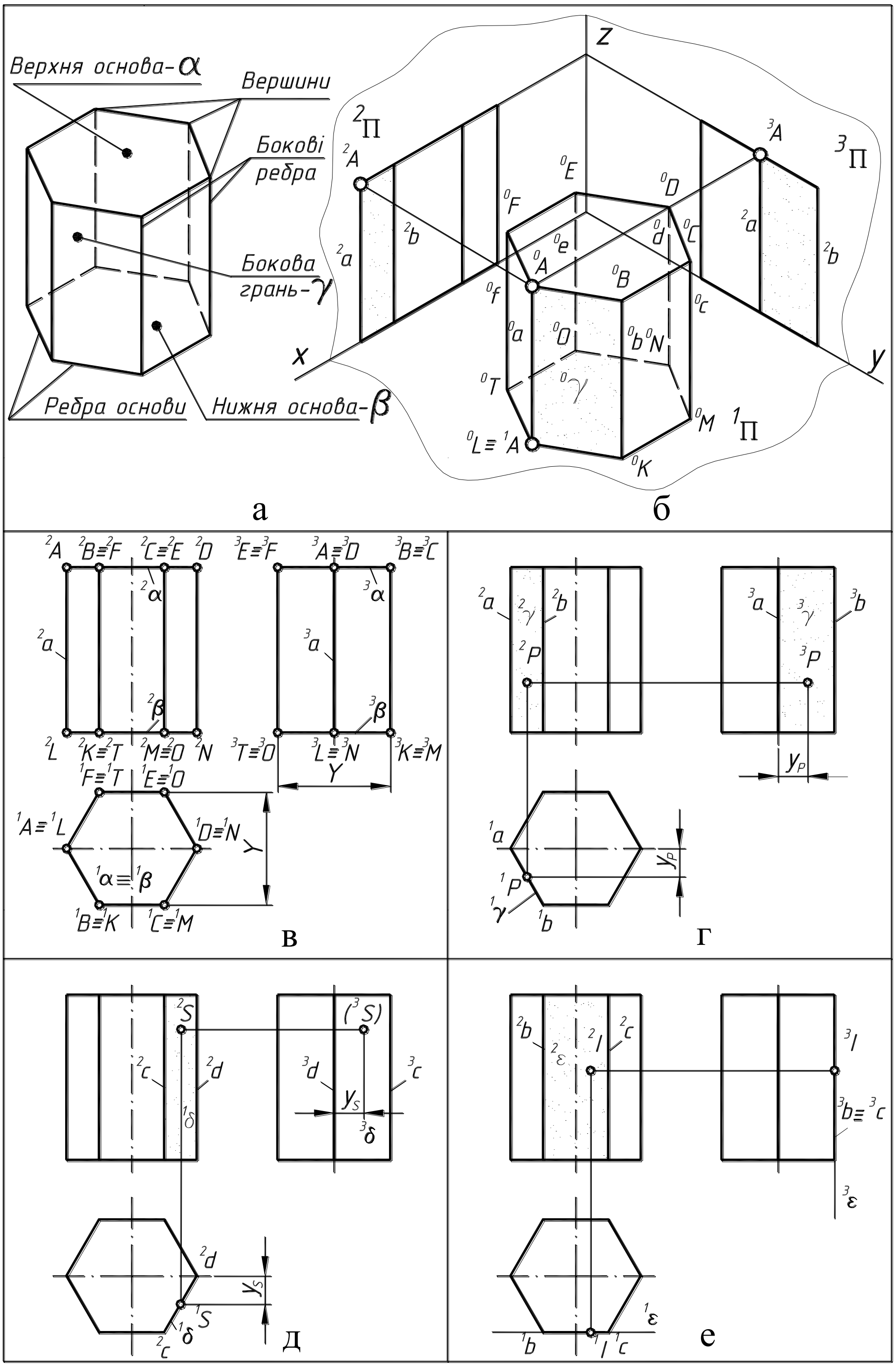


Рис. 4.5

2.5 Піраміда. Піраміда – многогранник, утворений перетином пірамідальної поверхні площиною основи -α. На рис.4.6,а зображені проекції піраміди і її деяких складових елементів. Елементами пірамід вважають: вершини (точки), ребра (прямі), грані (площини). Піраміду називають прямою, якщо її висота перпендикулярна основі. Піраміду називають правильною, якщо в основі її лежить правильний многокутник. Аксонометричне зображення піраміди наведено на рис. 4.6,б.

Піраміда, яку зображено на рис.4.6,в має 6 граней, 1 основу, 12 ребер (із них 6 бокових), 7 вершин. Основа піраміди належить горизонтальній площині проекцій $^{1}\Pi$ або паралельна їй. Бокові ребра *SA* та *SD* - фронтальні прямі рівня. Інші бокові ребра – прямі загального розташування. Ребра основи – горизонтальні лінії рівня. На горизонтальній проекції видимими будуть всі грані піраміди. На фронтальній проекції видимі грані *SAB, SBC, SCD,* інші – невидимі. На профільній проекції видимі грані – *SAB, SAF,* інші – невидимі.

Комплексне креслення правильної піраміди слід починати з горизонтальної проекції.

Розглянемо декілька прикладів знаходження проекцій точок.

*1. **Задано:*** проекція точки – ^{2}G належить ребру - *AB* в основі піраміди (площина - α , див.рис. 4.6,г).

Креслення: горизонтальна проекція точки – ^{1}G знаходиться в основі піраміди на ребрі – $^{1}A^{1}B$. Профільну проекцію точки – ^{3}G знаходимо на горизонтальній лінії з'вязку,яку проводимо від фронтальної проекції точки – ^{2}G, на відстані Y_G в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

*2. **Задано:*** проекція точки – ^{2}H належить боковому ребру *SB* (див.рис. 4.6,д).

Креслення: горизонтальна проекція точки – ^{1}H знаходиться в перетині вертикальної лінії з'вязку та ребра – $^{1}S^{1}B$ піраміди. Профільну проекцію точки – ^{3}H знаходимо на перетині горизонтальної лінії з'вязку, яку проводимо від фронтальної проекції точки – ^{2}H, із ребром -$^{3}S^{3}B$.

*3. **Задано:*** проекція точки – ^{2}I належить грані *SAB* (див.рис. 4.6,е).

Аналіз: грань *SAB* – площина загального розташування.

Креслення: Проведемо горизонтальну площину - $^{2}\beta$ через фронтальну проекцію точки – ^{2}I. Утворюється лінія перетину *n*, що належить горизонтальній площині - $n \subset \beta$. Горизонтальна проекція точки – ^{1}I знаходиться на перетині вертикальної лінії з'вязку, яку проведено від фронтальної проекції точки – ^{2}I, із горизонтальною проекцією лінії - ^{1}n. Профільну проекцію точки – ^{3}I знаходимо по горизонтальній лінії з'вязку, яку проводимо від фронтальної проекції точки – ^{2}I, на відстані Y_I в напрямку додатніх значень осі координат – Y.

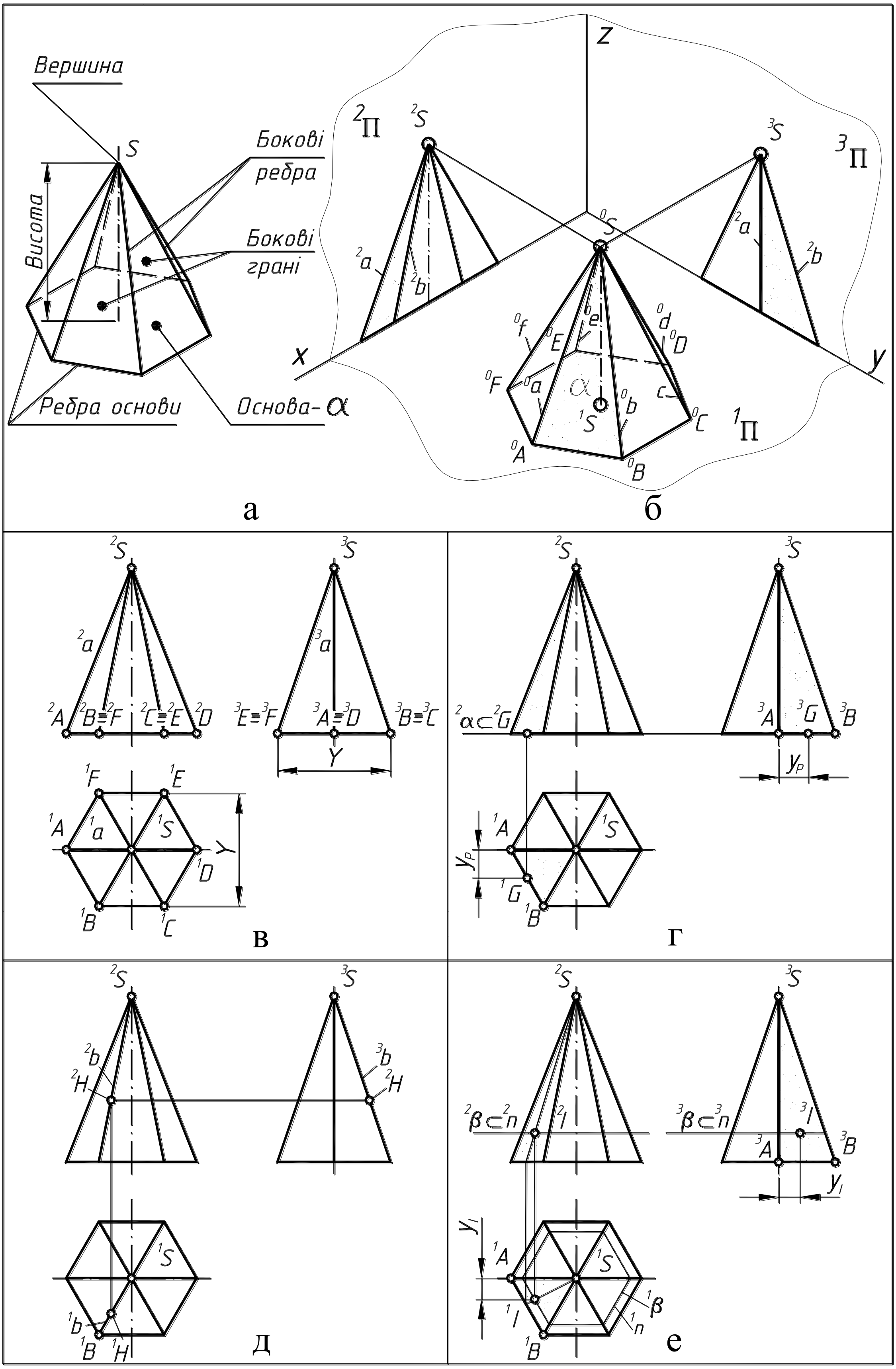


Рис. 4.6

3 Перетин поверхонь площинами. При перетині поверхонь геометричних тіл, площинами отримуємо лінії прямі і плоскі алгебраїчні криві другого порядку (коло, еліпс, парабола, гіпербола). Будь-яка лінія представляє собою сукупність точок, тому побудова проекцій ліній, розміщених на поверхнях геометричних тіл базується на побудові проекцій декількох точок (двох для прямих і більше - для кривих) цих ліній.

На рис. 4.7 зображені три проекції і аксонометрія призми яку перетинають: горизонтальною площиною - α (рис. 4.7,а); фронтальною - β (рис. 4.7,б); профільною - γ (рис. 4.7,в); фронтально-проектуючою площиною - δ (рис. 4.7,в) та побудову решти проекцій точок для яких задано - ${}^1A$ (рис. 4.7,а), ${}^2B$ (рис. 4.7,б), ${}^3C$ (рис. 4.7,в), ${}^1D$ (рис. 4.7,в), які належать переліченим вище площинам.

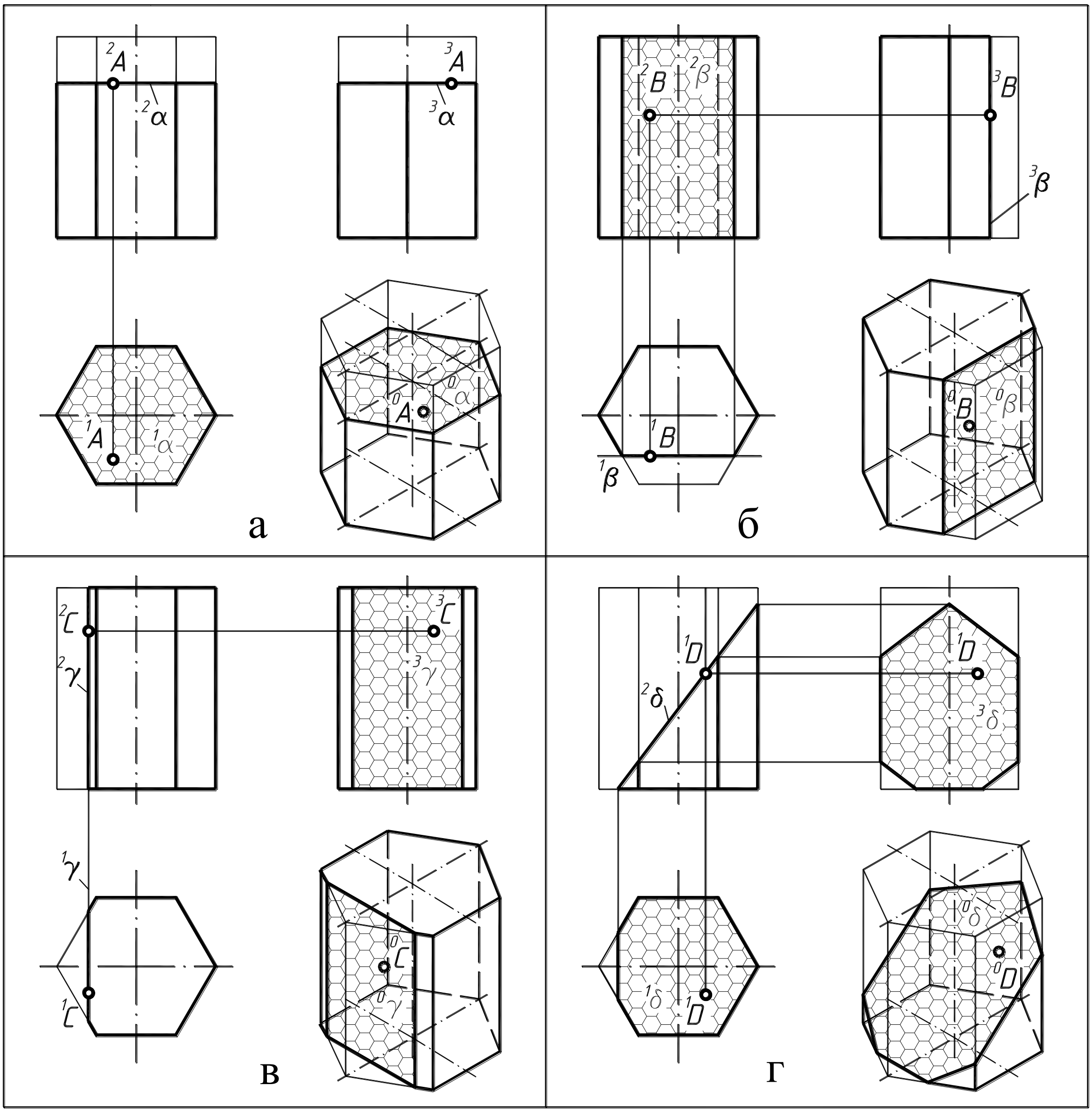


Рис. 4.7

На рис. 4.8 зображені три проекції і аксонометрія піраміди яку перетинають: горизонтальною площиною - α (рис. 4.7,а); фронтально-проектуючою площиною - β (рис. 4.7,б) та побудову решти проекцій точок для яких задано - ${}^1A$ (рис. 4.7,а), ${}^1B$ (рис. 4.7,б), які належать переліченим вище площинам.

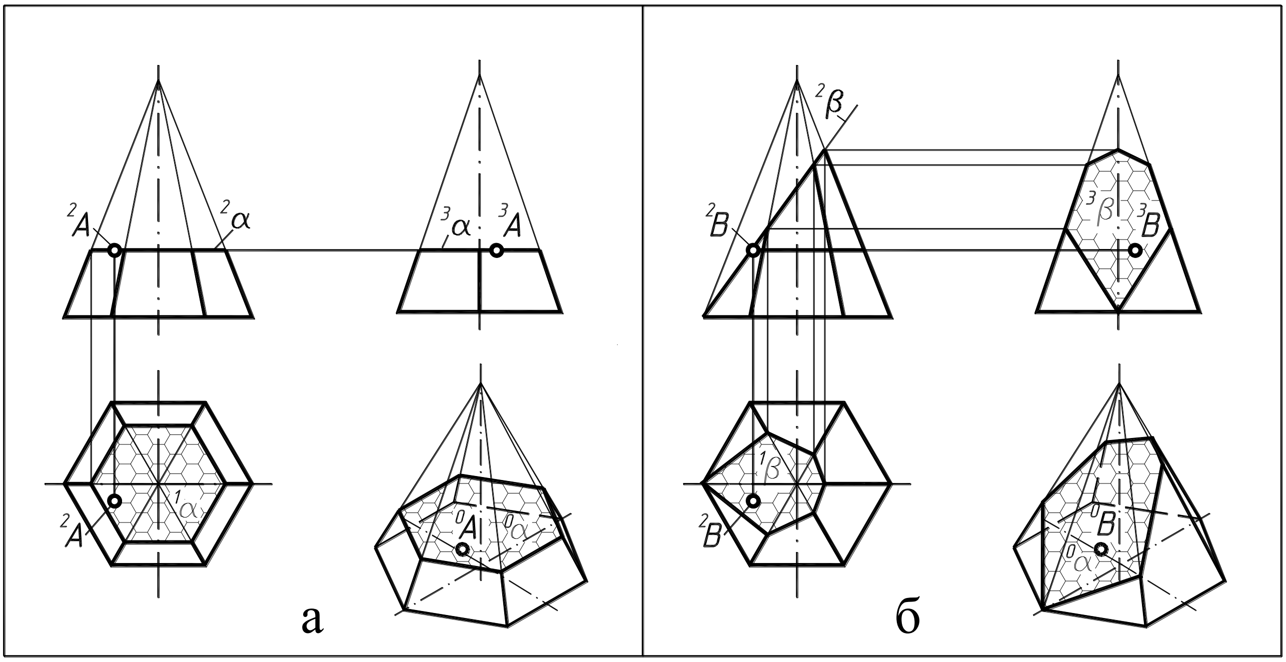


Рис. 4.8

На рис. 4.9 зображені три проекції і аксонометрія циліндра який перетинають: фронтально-проектуючою площиною - α (рис. 4.9,а); профільною площиною рівня- β (рис. 4.9,б) та побудову решти проекцій точок для яких задано - ^1E (рис. 4.9,а), ^3F (рис. 4.9,б), які належать переліченим вище площинам. Перетин циліндра фронтально-проектуючою площиною - α утворює криву лінію на його поверхні – еліпс, який на профільній проекції будують по точках визначених проектуванням на горизонтальну проекцію циліндра - коло.

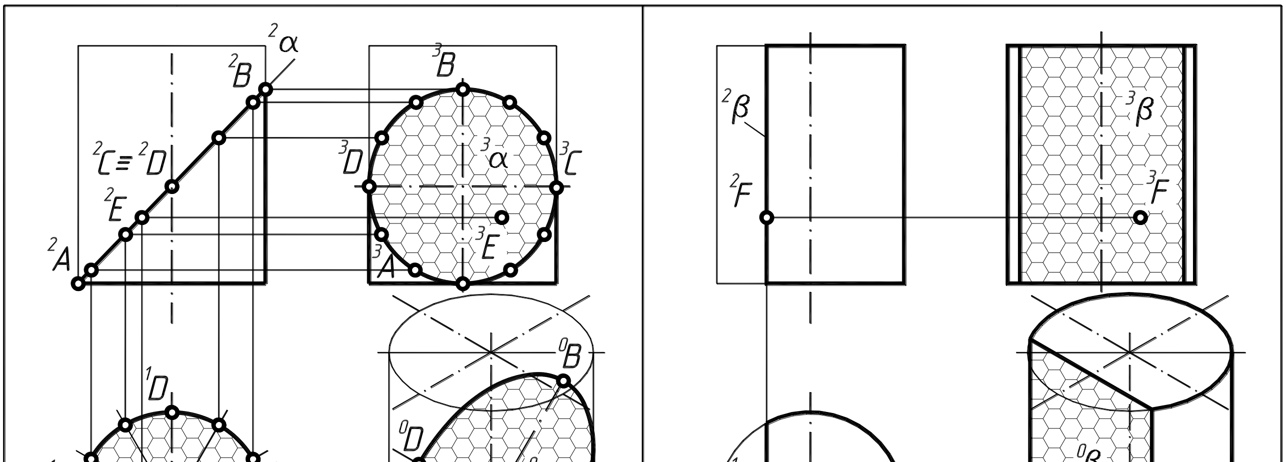


Рис. 4.9

На рис. 4.10 зображені три проекції і аксонометрія сфери яку перетинають: горизонтальною площиною - α (рис. 4.10,а); фронтальною - β (рис. 4.10,б); профільною - γ (рис. 4.10,в); фронтально-проектуючою площиною - δ (рис. 4.10,в) та побудову недостаючих проекцій точок для яких задано проекція точки ^1A належить фронтальному мередіану та площині- α (рис. 4.7,а), проекція точки ^{2}B належить екватору сфери та площині- β (рис. 4.7,б), проекція точки ^{3}C належить екватору сфери та площині- γ (рис. 4.7,в) які належать переліченим вище площинам.

Зріз сфери фронтально-проектуючою площиною - δ (рис. 4.10,в) зображується на інших площинах проекцій - $^{1}\Pi$, $^{3}\Pi$ у вигляді еліпсів. Зрештою зріз іншими проектуючими площинами (горизонтально-проектуючою та профільно-проектуючою) також зумовить зображення еліпсів на інших площинах проекцій - $^{2}\Pi$, $^{3}\Pi$ (для горизонтально-проектуючої) та $^{1}\Pi$, $^{2}\Pi$ (для профільно-проектуючої).

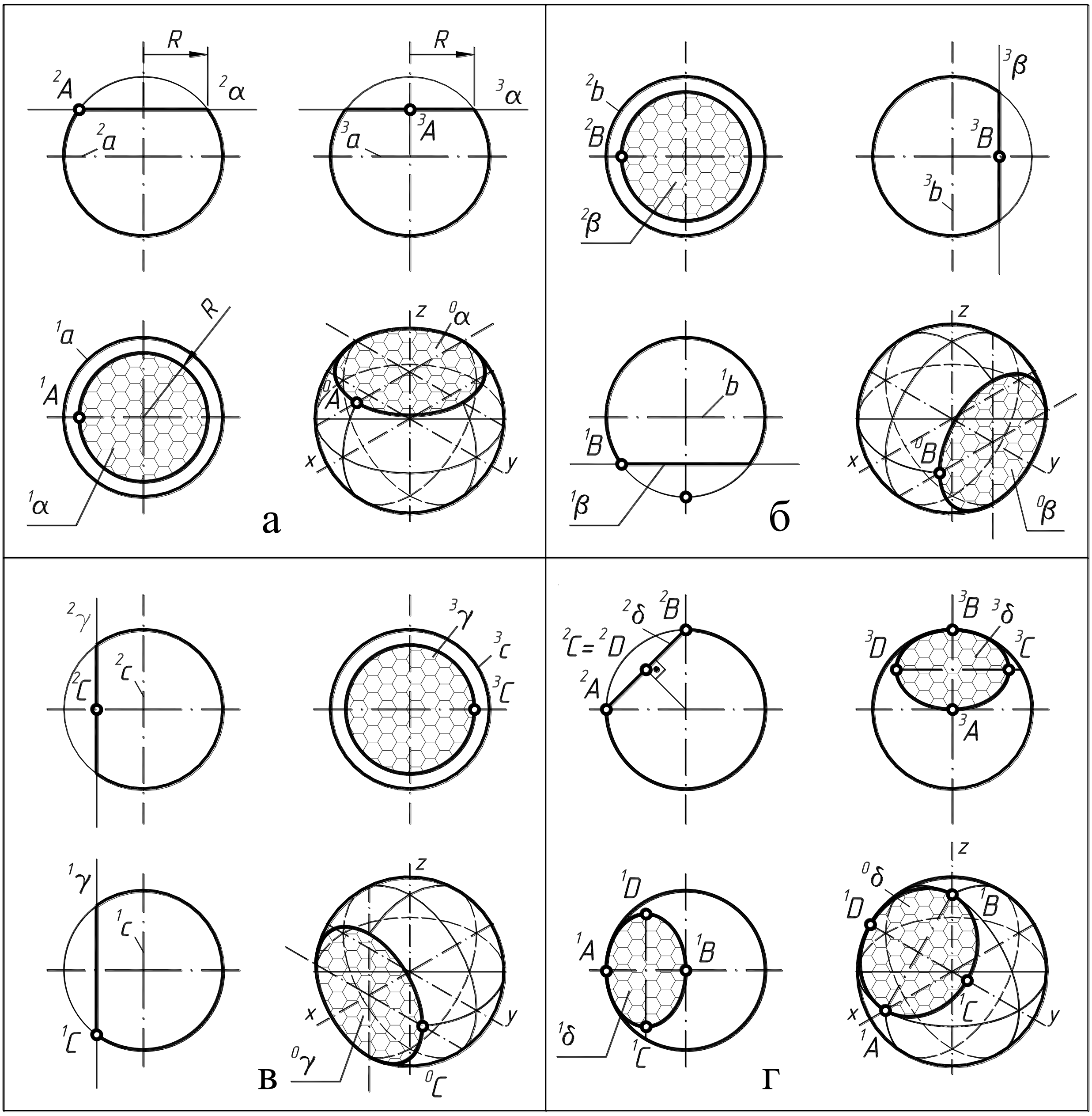
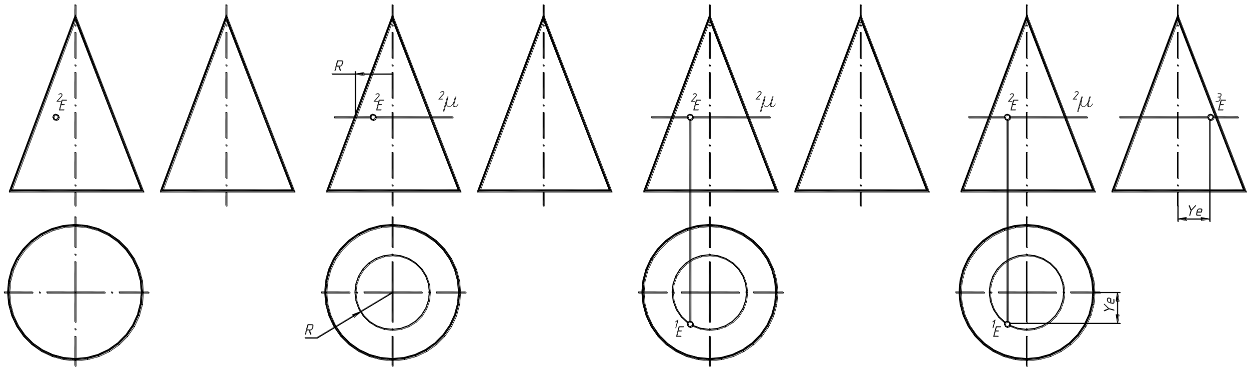


Рис. 4.10

На рис. 4.12,а зображені три проекції і аксонометрія конуса який перетинає горизонтальна площина рівня - α. В перетині конічної поверхні утворюється коло.

На рис. 4.12,б зображені три проекції і аксонометрія конуса який перетинає фронтально-проектуюча площина рівня - β, яка проходить через його вершину. В перетині конічної поверхні його дві твірні утворюють трикутник.

На рис. 4.12,в та 4.12,г зображені три проекції і аксонометрія конуса який перетинає фронтально-проектуюча площина - γ, яка нахилена до осі конуса під кутом, більшим за кут нахилу твірної конуса до осі. В перетині конічної поверхні утворюється еліпс. Неповний еліпс утворюється, якщо фронтально-проектуюча площина перетинає основу конуса. На першому етапі побудови (див.рис. 4.12,в) слід побудувати горизонтальні проекції точок ^1A і ^1B (велика піввісь еліпса) та ^1C і ^1D (мала піввісь еліпса). Пошук профільної проекції цих точок розглянуто вище (див. рис.4.4,г). На другому етапі побудови (див.рис. 4.12,д) проекції допоміжних точок еліпса як належних конусові точок знаходимо за допомогою площин-посередників μ_i, які являють горизонтальні площини рівня, у такій послідовності (рис.11).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 4.11. Побудова проекцій належної поверхні конуса точки Е.

Через задану на поверхні конуса фронтальну проекцію ^2E точки E (рис. 4.11,а) проводимо горизонтальну площину рівня $^2\mu$ як площину-посередник (рис. 4.11,б). Ця площина перетинає конус по колу радіуса R. Будуємо горизонтальну проекцію кола, що являє дійсну величину перерізу конуса площиною μ. На перетині лінії проекційного зв'язку з колом будуємо горизонтальну проекцію ^1E точки E (рис. 4.11,в). Профільну проекцію ^3E точки E будуємо, визначивши на горизонтальній проекції значення координати y_E (рис. 4.11,г).

На рис. 4.12,д зображені три проекції і аксонометрія конуса який перетинає фронтально-проектуюча площина паралельна одній твірній конуса - $^2\delta$. В перетині конічної поверхні утворюється парабола. Побудову характерних точок параболи – 1, 2, 6 розглянуто вище (див. рис.4.4, в, г, д ,точки –*B, C, D, E*). Проекції допоміжних точок – 3, 4, 5 знаходимо за допомогою площин посередників (див.рис. 4.12).

На рис. 4.12,е зображені три проекції і аксонометрія конуса який перетинає фронтально-проектуюча площина паралельна двом твірним або осі конуса - $^2\varepsilon$. В перетині конічної поверхні утворюється гіпербола.

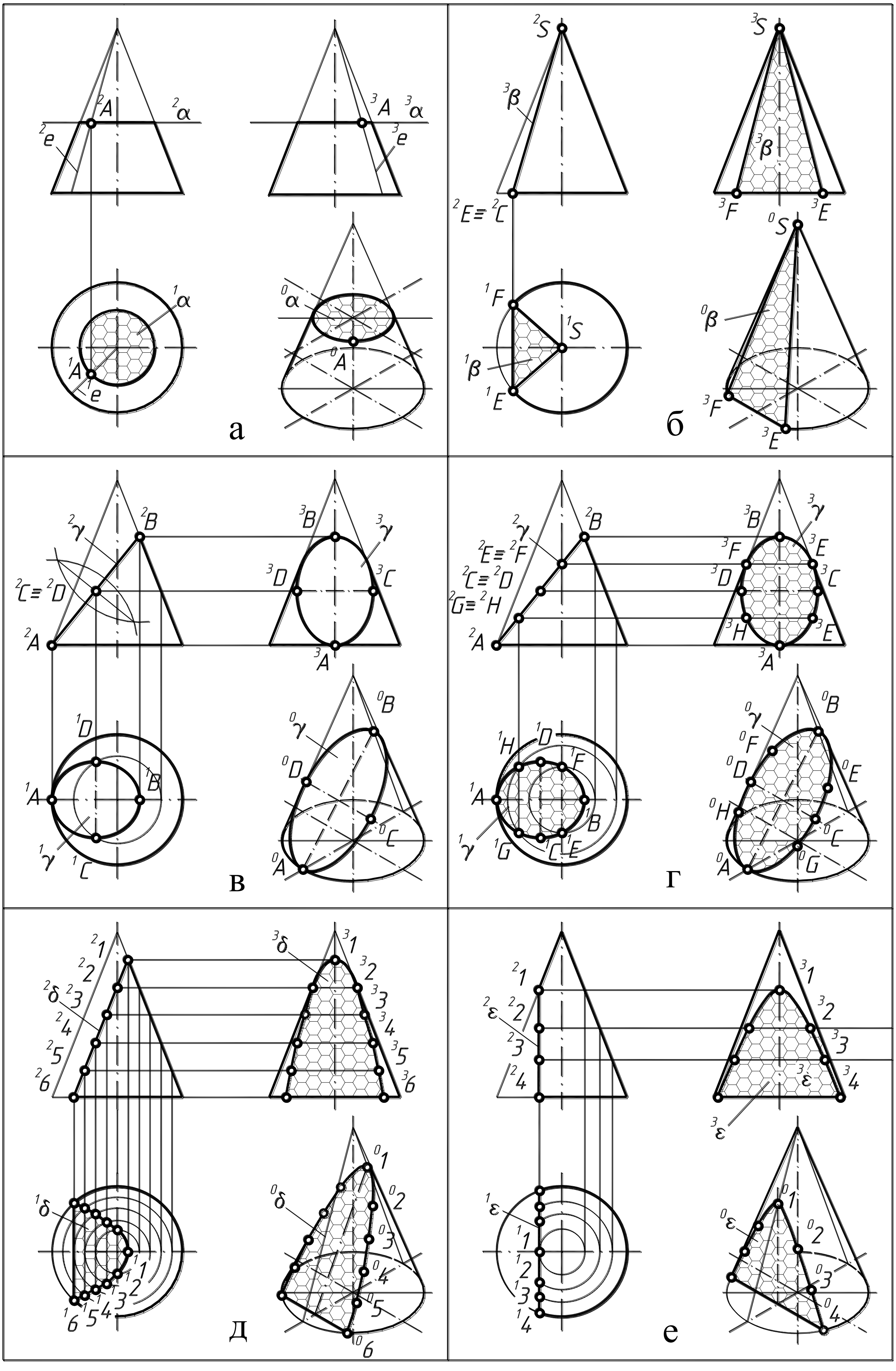
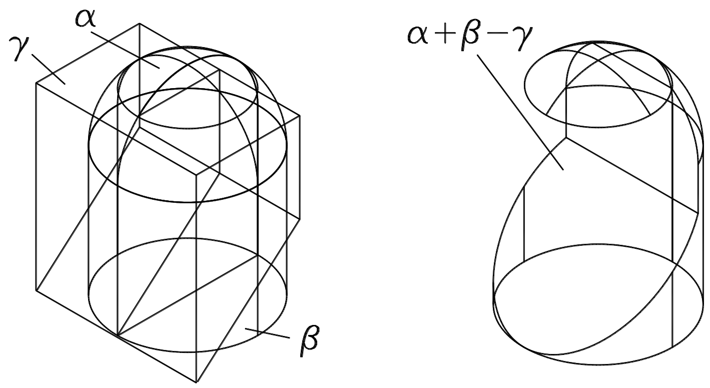


Рис.4.12

4. Взаємний перетин поверхонь площинами.

4.1 Тіло обмежене сферичною і циліндричною поверхнею. На рис. 4.13,а представлено виконані на комп'ютері твердотільні моделі півсферичної поверхні - α та циліндричної поверхні - β які перетинає чотирьохгранна поверхня - γ, а також результат поєднання поверхонь - α і β та віднімання від них поверхні - γ (рис.4.13,б).



а *б*

Рис. 4.13

Перетин сферичної поверхні- α гранню - γ_1 (горизонтальна площина рівня) утворює колову лінію радіусом - *R1*(див.рис.4.14). Перетин сферичної поверхні гранню - γ_2 (профільна площина рівня) утворює лінію кола, радіусом - *R2*. В перетині площин позначаємо точки $^{2}1$ і $^{2}2$, що визначають початок та закінчення дуги радіусом *R1* та початки дуг радіусом *R2*. На лінії екватора сфери позначаємо точки $^{2}3$ і $^{2}4$ в яких буде закінчуватись побудова дуг радіусом *R2*. Горизонтальну проекцію точок $^{1}1$ і $^{1}2$ знаходимо на перетині вертикальної лінії з'вязку із колом радіусом R1, а точок $^{1}3$ і $^{1}4$ із екватором сфери. На профільній площині проекцій точки $^{3}1$ і $^{3}2$ та точок $^{3}3$ і $^{3}4$ будуть знаходитись на колі радіусом – R2, його радіус визначено з фронтальної площини проекцій.

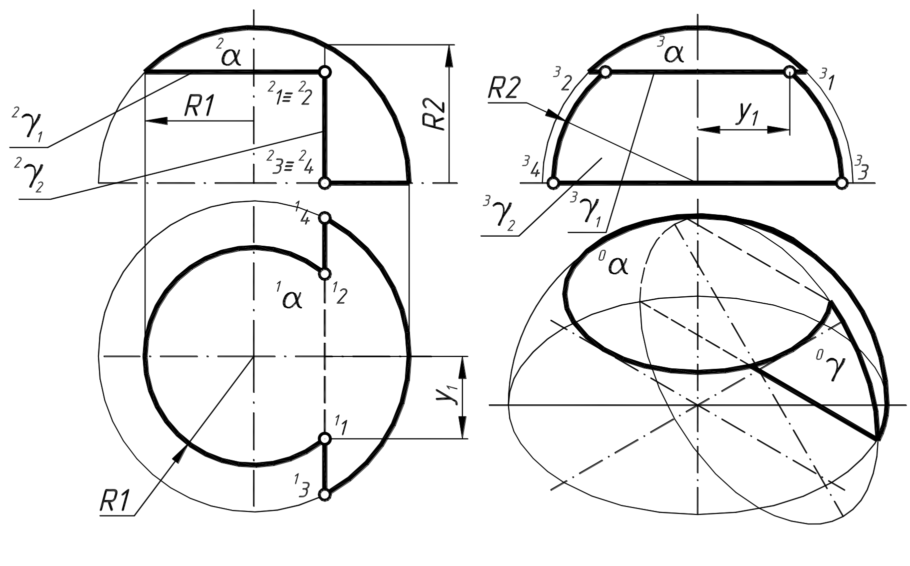


Рис. 4.14. Побудова ліній перетину гранної поверхні - γ із сферичною поверхнею - α

Перетин циліндричної поверхні - β гранню - γ_2 (профільна площина рівня) проходить по твірним циліндра. На фронтальній проекції циліндра позначимо точки $^{2}5$ та $^{2}6$ – закінчення вертикальних відрізків. Побудову решти проекцій точок 5 та 6 виконуємо згідно опису, наведеному на рис. 4.2.

Перетин циліндричної поверхні - β гранню - γ_3 (фронтально-проектуючою площиною) утворює криву лінію на його поверхні – еліпс, який на профільній проекції будують по точках, визначених проектуванням на горизонтальну проекцію циліндра – коло (див. рис. 4.15).

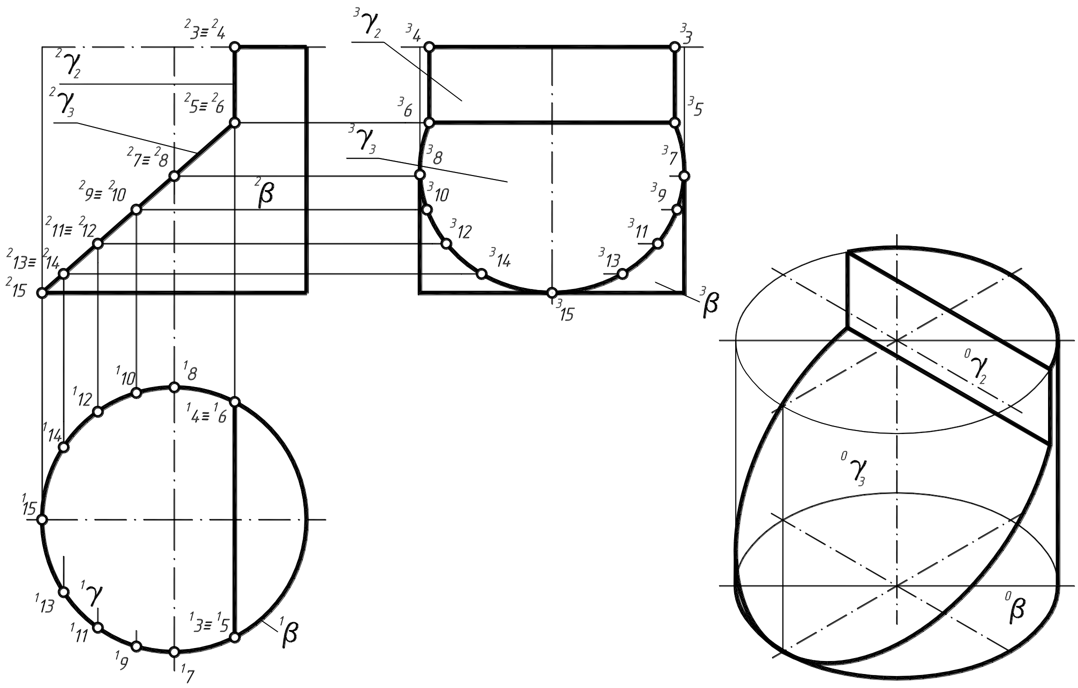


Рис. 4.15. Побудова ліній перетину гранної поверхні - γ з циліндричною поверхнею - β

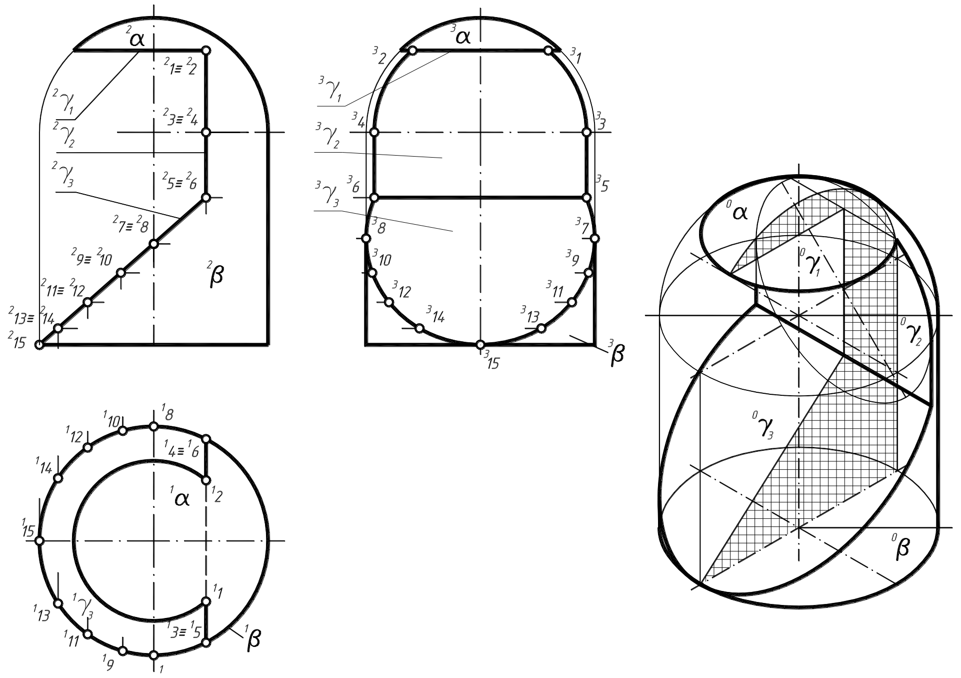
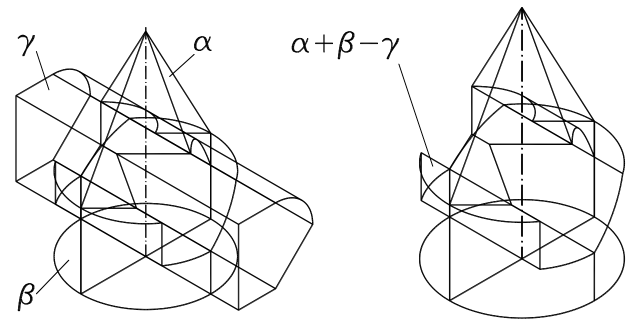


Рис. 4.16. Комплексне креслення поєднаної сферичної та циліндричної поверхні.

4.2 Тіло обмежене пірамідальною і цилиндричною поверхнею. На рис. 4.17,а представлено виконані на комп'ютері твердотільні моделі поверхні піраміди - α та циліндричної поверхні - β які перетинає поверхня - γ, а також результат поєднання поверхонь - α і β та віднімання від них поверхні - γ (рис.4.13,б).



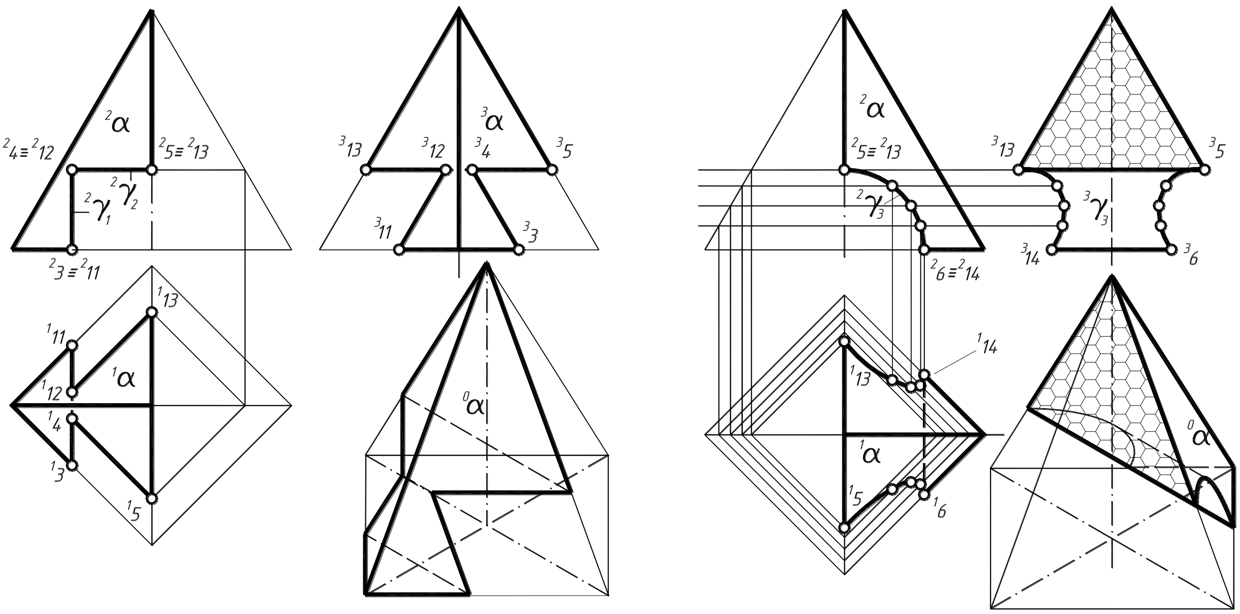
а *б*

Рис. 4.17

Перетин лівої половини поверхні піраміди - α гранню - γ_2 (горизонтальна площина рівня) утворює в нашому випадку правильний чотирикутник подібний основі піраміди (див.рис. 4.18, а). Перетин піраміди гранню - γ_1 (профільна площина рівня) утворює лінії зрізу паралельні ребрам піраміди. В основі піраміди позначаємо точки $^2 3$ і $^2 11$. В перетині площини γ_2 з ребрами піраміди позначаємо точки $^2 5$ і $^2 13$. Точки $^2 4$ і $^2 12$ позначаємо на перетині площин $^2\gamma_1$ та $^2\gamma_2$.

Перетин правої половини поверхні піраміди - α гранню - γ_3 циліндричною поверхнею утворює просторову криву Вибір кількості допоміжних площин впливає на докладність побудови кривої. В основі піраміди позначаємо точки $^2 6$ і $^2 14$.

Побудову решти проекцій точок на поверхні піраміди виконуємо згідно опису наведеному на рис. 4.6.

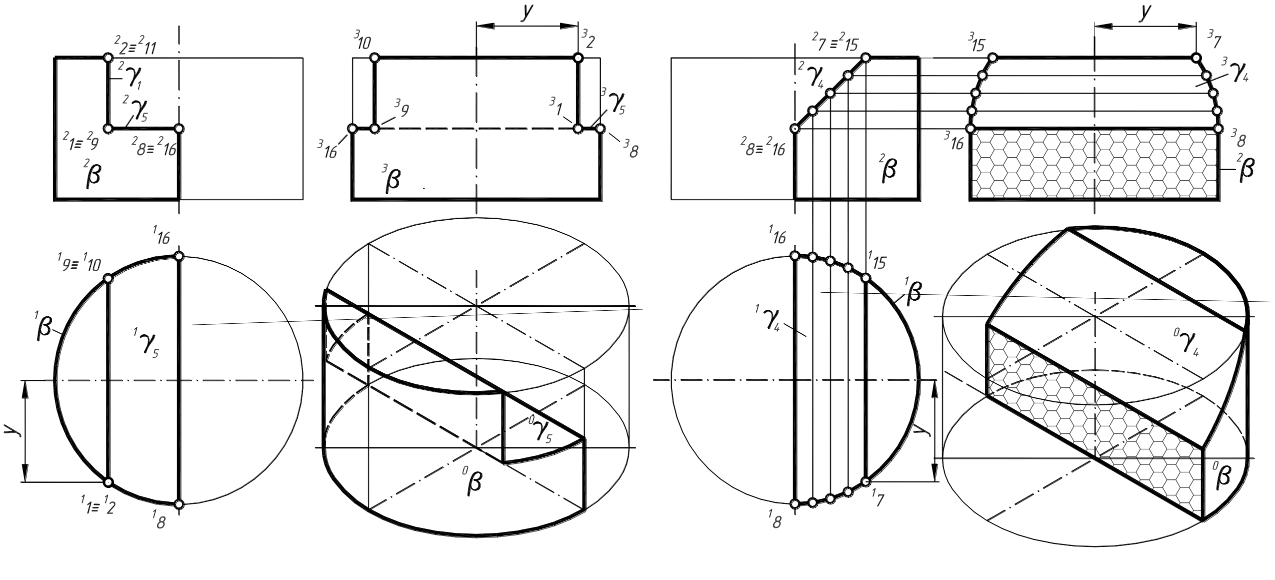


а б

Рис. 4.18. Побудова ліній перетину поверхні γ із поверхнею піраміди - α.

Перетин циліндричної поверхні -β гранню - γ_1 (профільна площина рівня) проходить по твірним циліндра. На фронтальній проекції циліндра позначимо точки ^{2}1 та ^{2}9 – закінчення вертикальних відрізків (див. рис. 4.19,а). Побудову решти проекцій точок 1 та 9 виконуємо згідно опису наведеному на рис. 4.2.

Перетин циліндричної поверхні- β гранню - γ_4 (фронтально-проектуючою площиною) утворює криву лінію на його поверхні – еліпс. На верхній основі циліндра позначаємо точки ^{2}7 і ^{2}15. Точки ^{2}8 і ^{2}16 позначаємо на перетині площин $^2\gamma_4$ та $^2\gamma_5$. Побудова еліптичної кривої проводиться по дискретним точкам за допомогою декількох допоміжних горизонтальних площин рівня. Ці точки на профільній проекції будують по точках визначених проектуванням на горизонтальну проекцію циліндра – коло (див. рис. 4.19,б).



а б

Рис. 4.19. Побудова ліній перетину поверхні - γ з циліндричною поверхнею - β.

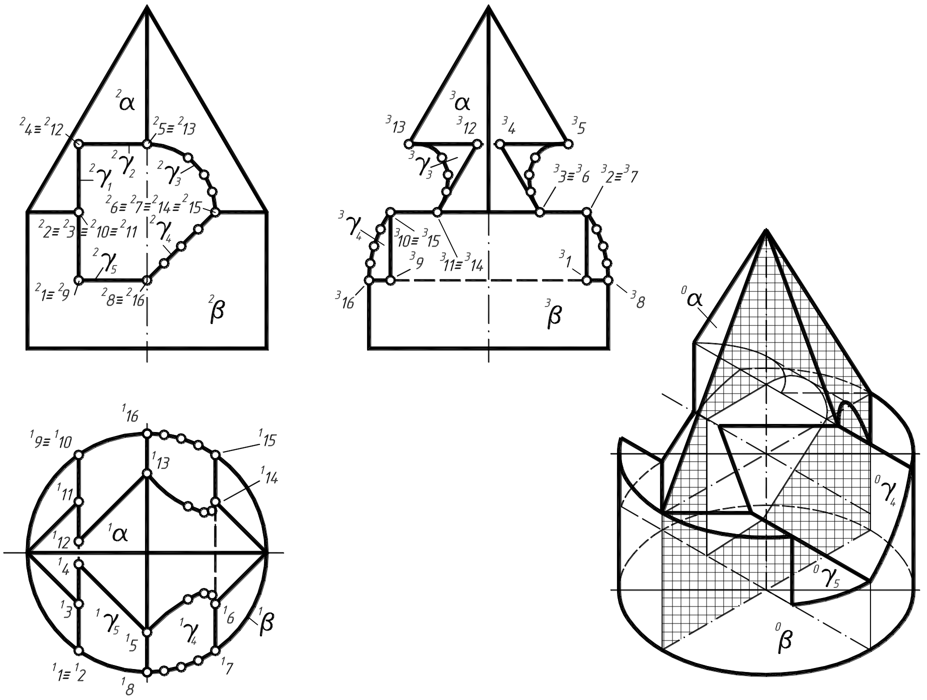
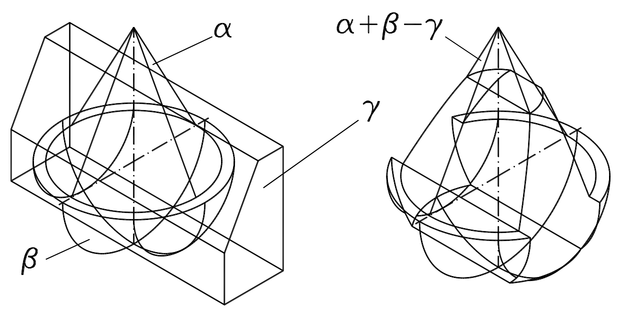


Рис. 4.20. Комплексне креслення поєднаної сферичної та ціліндричної поверхні.

4.3 Тіло обмежене конічною і сферичною поверхнею.

На рис. 4.21,а представлено виконані на комп'ютері твердотільні моделі конічної поверхні - α та півсферичної поверхні - β які перетинає чотирьохгранна поверхня - γ, а також результат поєднання поверхонь - α і β та віднімання від них поверхні - γ (рис.4.21,б).



а б

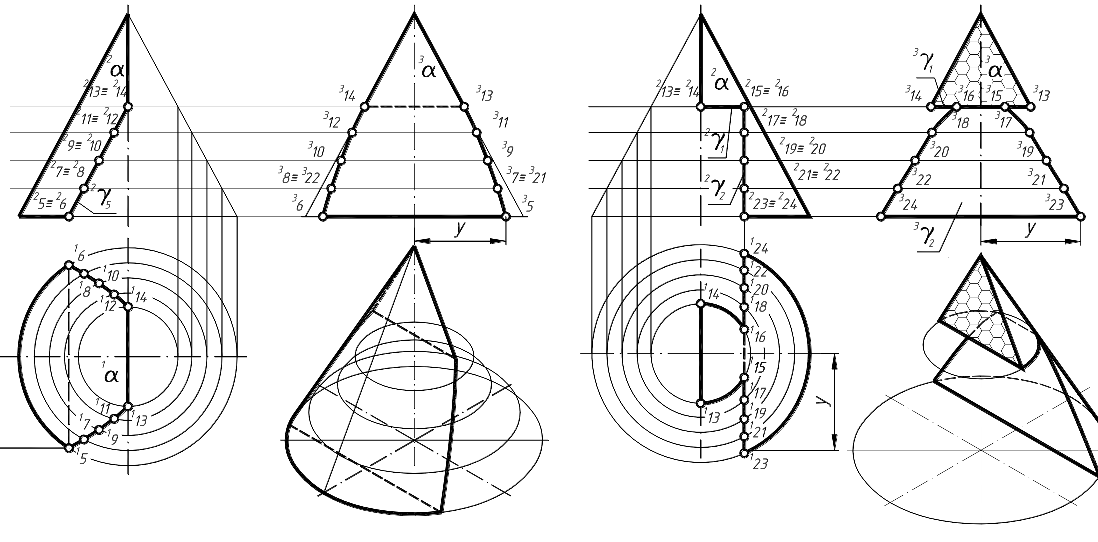
Рис.4.21

Перетин конічної поверхні- α гранню - γ_5 (фронтально-проектуюча площина парельна твірній конуса) утворює параболічну криву на конічній поверхні (див.рис 4.22,а). В основі конуса позначаємо точки $^2 5$ і $^2 6$. Точки $^2 13$ і $^2 14$ позначаємо на перетині площин $^2\gamma_1$ та $^2\gamma_5$. Побудова параболічної кривої проводиться по дискретним точкам за допомогою декількох допоміжних горизонтальних площин рівня. Ці точки на горизонтальній проекції знаходять в перетині вертикальних ліній зв'язку із відповідними січними колами (див. рис.

4.22,а). Побудову профільних проекцій точок на поверхні конуса виконуємо згідно опису, наведеному на рис. 4.11.

Перетин конічної поверхні гранню - γ_1 (горизонтальна площина рівня) утворює лінію дуги, радіус якої дорівнює відстані від осі до твірної(див.рис 4.22,б).

Перетин конічної поверхні гранню - γ_2 (профільна площина рівня) утворює гіперболічну криву на конічній поверхні (див.рис 4.22,б)



а б

Рис. 4.22. Побудова ліній перетину поверхні γ із конічною поверхнею - α.

Перетин сферичної поверхні- β гранню - γ_4 та гранню - γ_2 (профільні площини рівня) утворюють лінії кола радіусом - *R3*. Перетин сферичної поверхні гранню - γ_3 (горизонтальна площина рівня) утворює лінії кола радіусом - *R1*. В перетині площин позначаємо точки $^{2}1$ і $^{2}2$, та $^{2}27$ і $^{2}28$, що визначають початок та закінчення дуги радіусом *R3* та початки дуг радіусом *R1*. На лінії екватора сфери позначаємо точки $^{2}3$ і $^{2}4$ та $^{2}25$ і $^{2}26$ в яких буде закінчуватись побудова дуг радіусом *R3*. Горизонтальну проекцію точок $^{1}1$ і $^{1}2$ та $^{1}27$ і $^{1}28$ знаходимо на перетині вертикальної лінії з'вязку із колом радіусом R1, а точок $^{1}3$ і $^{1}4$ та $^{1}25$ і $^{1}26$ із екватором сфери. На профільній площині проекцій точок $^{3}1$ і $^{3}2$ та $^{3}27$ і $^{3}28$, а також точок $^{3}3$ і $^{3}4$ та $^{3}25$ і $^{3}26$ будуть знаходитись на колі радіусом – R3, його радіус визначено із фронтальної площини проекцій.

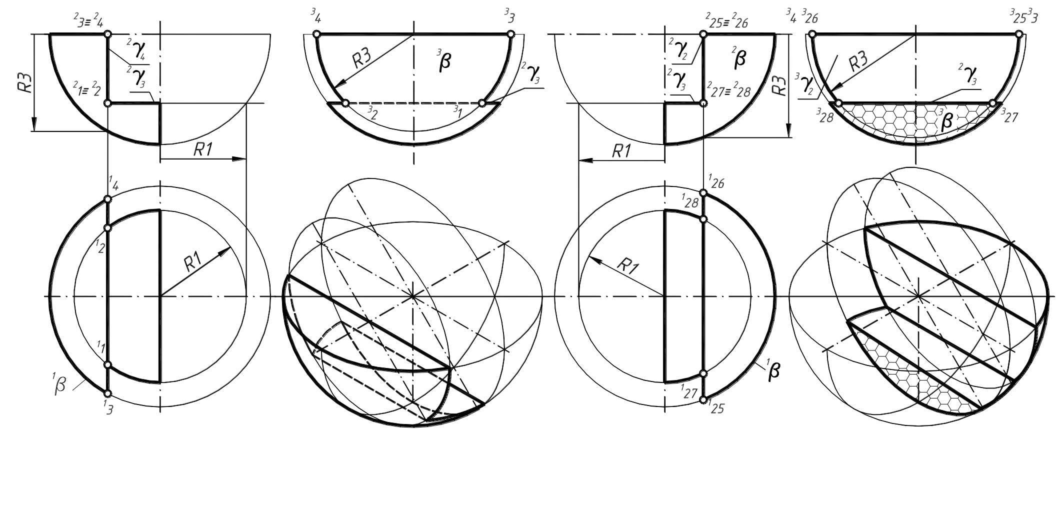


Рис. 4.23. Побудова ліній перетину гранної поверхні - γ із сферичною поверхнею - β.

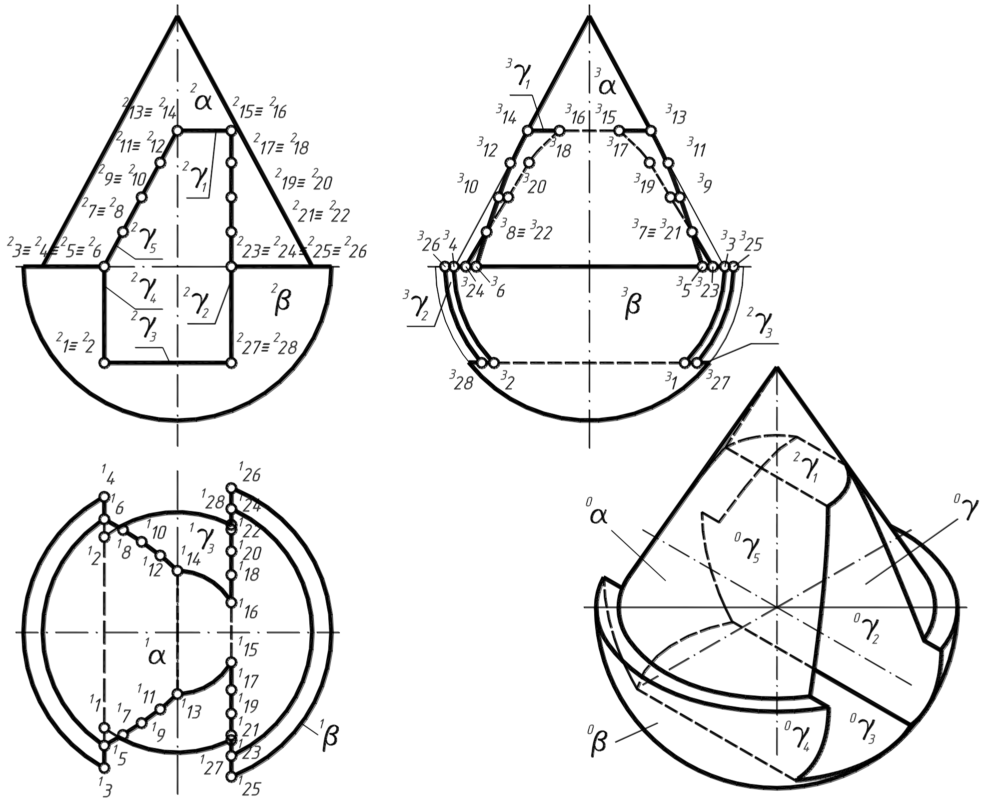


Рис. 4.24. Комплексне креслення поєднаної конічної та сферичної поверхні.

4.5 Побудова зображень геометричних тіл з подвійним проникненням

5.1 Тіло, обмежене призматичною і конічною поверхнями. На рис. 4.25 представлено виконані на комп'ютері твердотільні моделі призматичної поверхні - α, конічної поверхні - β та гранної поверхні - γ. Завдання - викреслити фігуру - Ф яку ми отримаємо в результаті віднімання від поверхні - α поверхні - β та наступного віднімання від новоутвореної поверхні ще однієї поверхні - γ.

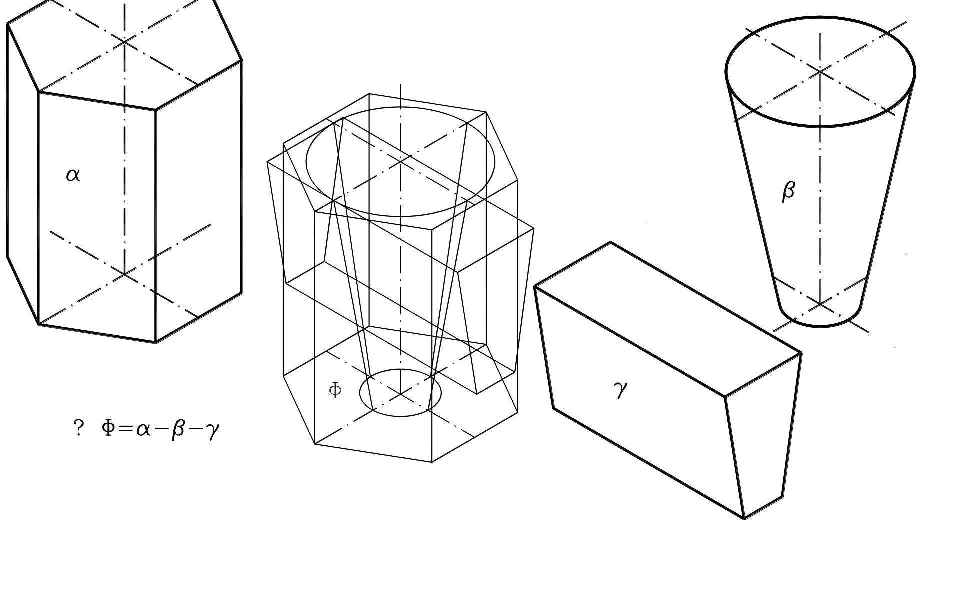
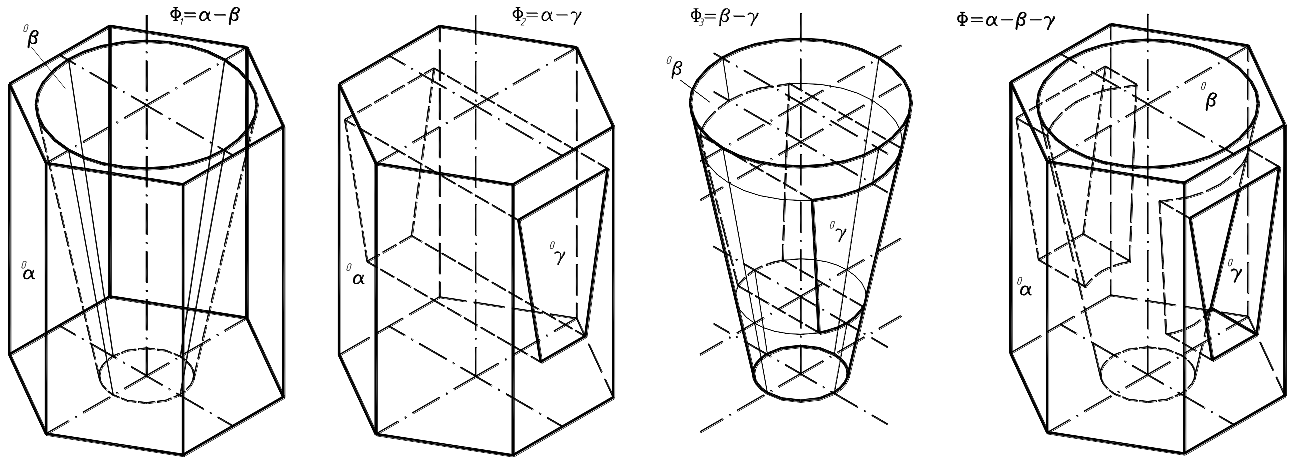


Рис. 4.25

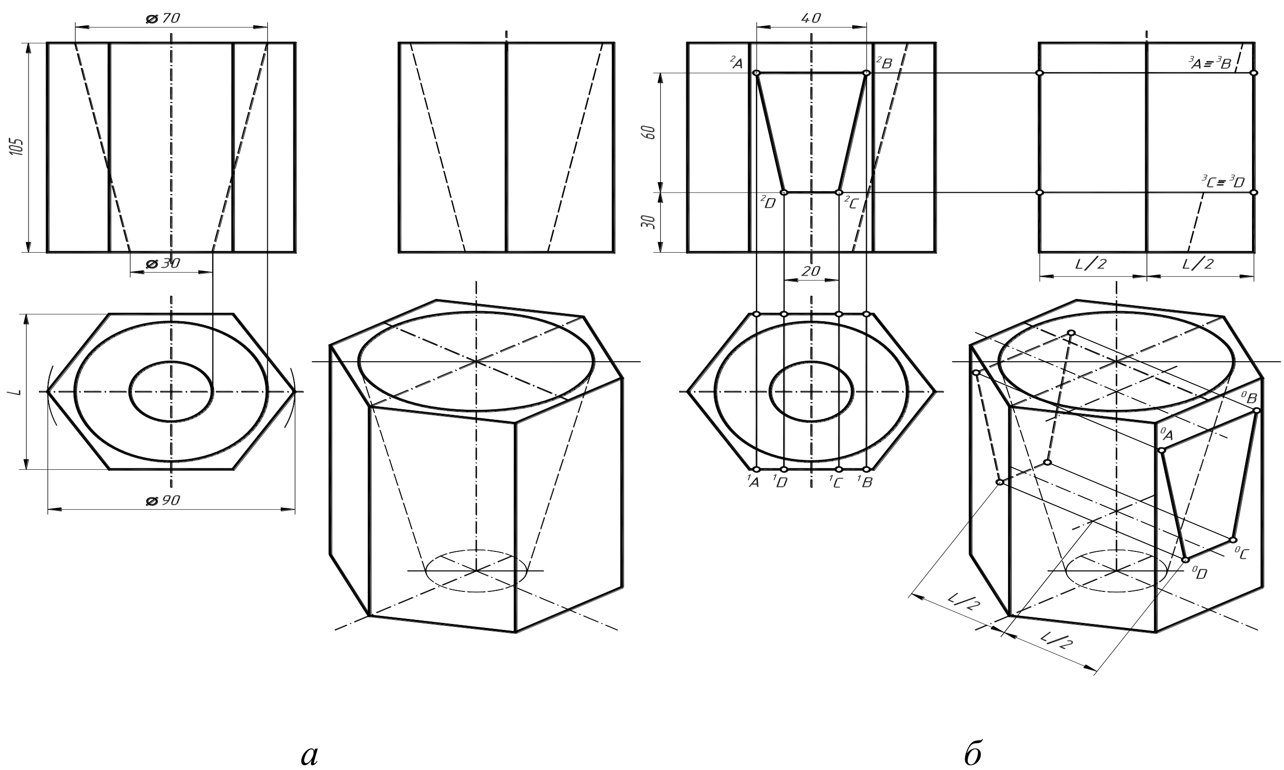
На рис 4.26 показано процес моделювання шуканої фігури – Ф. Шляхом попарного віднімання однієї поверхні від іншої.



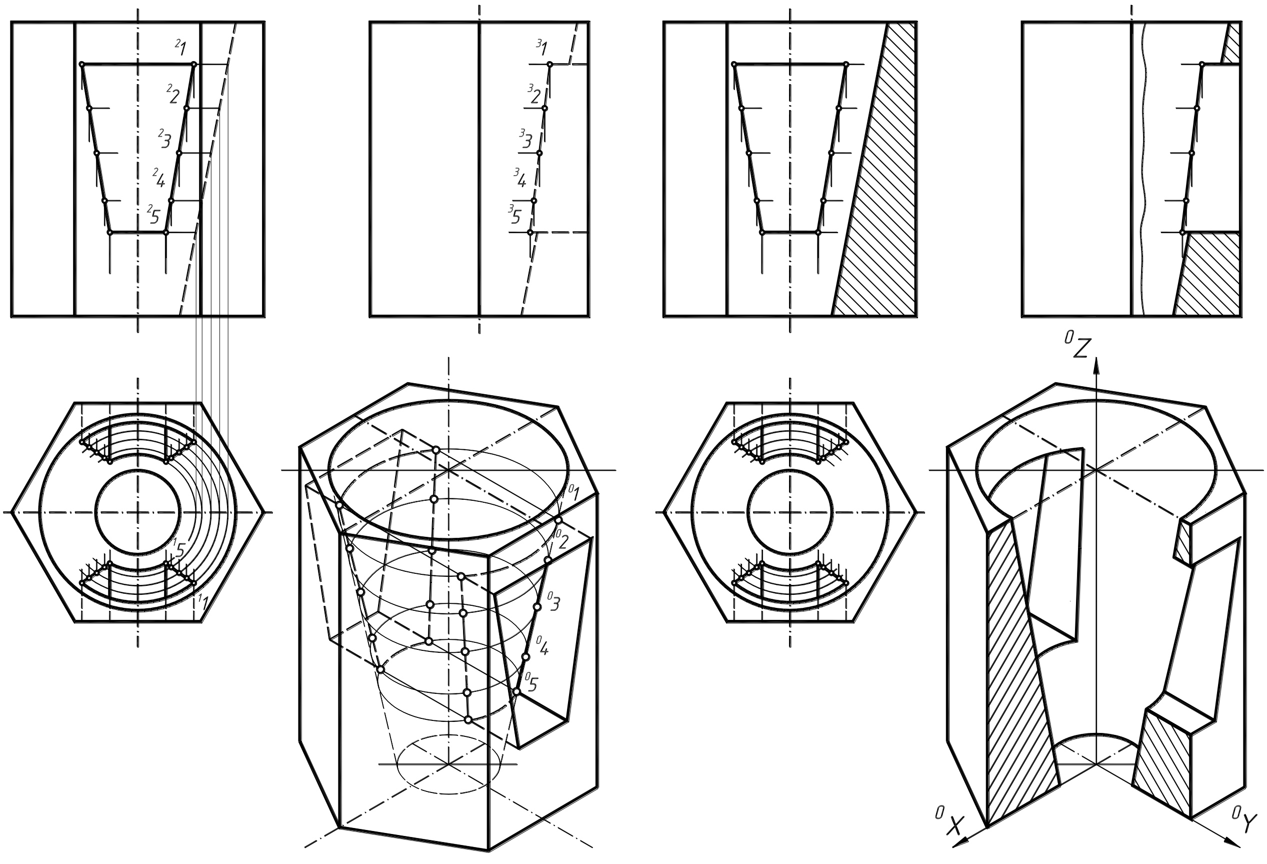
а *б* *в* *г*

Рис. 4.26

На кресленні побудову ліній перетину зовнішньої призматичної поверхні - α з внутрішньою конічною поверхнею - β показано на рис. 4.27,а. Перетин поверхонь α і β на фронтальній та профільній проекції зображено двома твірними (штрихові лінії невидимого контура). Горизонтальна проекція зображена коловими лініями верньої та нижньої основ перевернутого конуса.



а *б*



в *г*

Рис. 4.27

Побудову ліній перетину зовнішньої призматичної поверхні - α з внутрішньою гранною поверхнею - γ показано на рис. 4.27,б. На фронтальній проекції призми - α викреслюємо наскрізний отвір трапецієвидної форми (позначено точками ^2A, ^2B, ^2C, ^2D). Горизонтальна проекція точок ^1A, ^1B, ^1C, ^1D знаходиться по вертикальній лінії з'вязку на поверхні призми - α. Профільні проекції точок $^3A \equiv {}^3B$ та $^3C \equiv {}^3D$ знаходимо по горизонтальній лінії з'вязку на боковій грані призми.

Побудову ліній перетину внутрішньої конічної поверхні β з гранною поверхнею γ показано на рис. 4.27,в. Лінія перетину поверхонь β і γ являє собою чотири відрізки параболічних кривих (оскільки сторони трапеції *AD* і *BC* паралельні твірній конуса) і чотири дугових сегмента (див.рис. 4.26,в).

Побудова параболічної кривої проводиться по дискретним точкам за допомогою декількох допоміжних горизонтальних площин рівня. Нами вибрано п'ять січних площин дві з яких співпадають із горизонтально розташованими гранями поверхні -γ. Ці точки на горизонтальній проекції знаходять в перетині вертикальних ліній зв'язку із відповідними січними колами (див. рис. 4.27,в). Побудову профільних проекцій точок на поверхні конуса виконуємо згідно опису, наведеному на рис. 4.11.

На рис.4.27,г виконано корисний розріз суміщеної фігури та розріз по ізометричних осях ^0X та ^0Y.

Запитання для перевірки засвоєних знань:

1.Чи використовується в нарисній геометрії кінематичний спосіб побудови поверхонь?
2.Які снують тіла утворені обертанням?
3.Як одержується сфера?
4. Зріз сфери фронтально-проектуючою площиною - δ зображується на інших площинх проекцій - $^1П$, $^3П$ у вигляді еліпсів. А зріз іншими проектуючими площинами (горизонтально-проектуючою та профільно-проектуючою) що зумовить на інших площинах проекцій - $^2П$, $^3П$?

Завдання для самостійної роботи:

1.Побудувати піраміду за заданими параметрами.

Список використаної літератури:

1. "Метоличні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". Укладачі: К. В. Сарнацька, Н. С. Дяченко, Г. Г. Допіра, Г. С. Подима
2.«Курс начертательной геометри» В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиєвский
3.Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів "Нарисна геометрія" та " Інженерна графіка". Укладачі: Віткун Н.К., Ізволенська А.Є., Парахіна Н.А., Чорнощокова Л.Д., Київ, КПІ, 1992 - 60с.
4.укл. Білицька Н.В. ГетьманО.Г. «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка» НТУУ «КПІ» 2005

Лекція 5

Тема: **«Взаємний перетин поверхонь обертання»**

Питання для розгляду:

1. Принципи побудови лінії перетину поверхонь обертання
2. Спосіб січних площин.
3. Спосіб січних концентричних сфер.

1.Принципи побудови лінії перетину поверхонь обертання. Поверхнею обертання називають поверхню, одержану обертанням якої – не будь твірної лінії навколо нерухомої прямої –осі. Люба поверхня обертання на епюрі Монжа може бути задана твірною і віссю обертання. Більшість деталей машин містить поверхні обертання або їх фрагменти.

Порядок лінії перетину двох поверхонь обертання дорівнює добутку порядків цих поверхонь.

$$\alpha^n \cap \beta^m = l^{nm}$$

де α, β - поверхні обертання, *n, m*- порядки поверхонь відповідно α і β: *l*- лінія перетину.

Лінія перетину двох поверхонь обертання, які мають загальну площину симетрії, проектується на неї або на паралельні їй площини у вигляді кривої другого порядку. Для перетину кривих поверхонь другого порядку дійсна теорема Монжа: якщо дві поверхні другого порядку вписані або описані навколо третьої того ж порядку, лінії перетину таких поверхонь являються плоскими кривими.

Лінію перетину двох поверхонь в загальному випадку будують в такій послідовності:

1) задані поверхні перетинають допоміжною;
2) відшукують лінії перетину допоміжної і заданих поверхонь;
3) знаходять точки перетину одержаних ліній. Множина цих точок належить лінії перетину заданих поверхонь;
4) в тій –же послідовності використовуючи аналогічні допоміжні поверхні, знаходять достатні і необхідні кількості точок для повної побудови лінії перетину їх плавним з'єднанням.

В якості допоміжної січної поверхні найбільш часто використовують сферичну, а також площину.

При виборі січної поверхні необхідно прагнути до того, щоб лінії перетину допоміжної і заданих поверхонь були простими в побудові - прямою або колом.

Для побудови лінії перетину двох поверхонь спочатку доцільно знайти особливі або опорні точки, потім проміжні. До особливих відносяться точки, які розміщені на проекціях контурних твірних поверхонь, точки з максимальними і мінімальними значеннями координат вздовж координатних осей – крайні точки.

Лінії перетину двох поверхонь не можуть виходити за границі цих поверхонь, і як наслідок, проекції ліній перетину повинні знаходитись в межах проекцій поверхонь.

2. Спосіб січних площин. При використанні даного способу в якості допоміжних елементів застосовуються січні площини.

Нехай необхідно знайти лінію перетину двох поверхонь обертання другого порядку: сферичної α і конічної β (рис. 5.1)

Центр сферичної поверхні 0 зміщений відносно осі обертання t_1 конічної, обидві поверхні мають загальну площину симетрії γ, паралельну фронтальній площині проекцій і яка проходить через точку 0 і вісь t_1. Фронтальна проекція лінії перетину буде кривою другого порядку, при цьому порядку порядок самої лінії перетину *l* буде:

$$\alpha^2 \cap \beta^2 = l^4$$

Попередньо знайдемо деякі особливі точки лінії перетину. Фронтальні проекції поверхонь $^2\alpha$ і $^2\beta$ утворені проекціями контурних твірних, розміщених в площині симетрії γ. Точки перетину фронтальних проекцій контурних твірних являються фронтальними проекціями особливих точок ^{21} і ^{29} лінії перетину. З умови $1{,}9 \in \gamma$ знаходимо інші проекції цих точок. Площина симетрії γ використана в якості допоміжної січної площини.

Знайдемо проміжні точки лінії перетину, для чого використаємо допоміжні горизонтальні площини рівня μ_i (i=1,2…к). В перетині площини μ_i з поверхнями α і β утворяться відповідно коло ^2a_i і ^2b_i ,а в перетині цих кіл – шукані точки C_i лінії перетину *l*.

Розглянемо ці побудови детальніше. Площина рівня наприклад μ_5 після перетину з поверхнями α і β утворює колові лінії a_5 і b_5 (див. рис 5.2) що проектуються на фронтальну площину проекцій в прямі лінії (див рис. 5.1), при цьому

$$^2a_5 \wedge {}^2b_5 \in {}^2\mu_5$$

На горизонтальну площину проекцій - кола ^2a_i і ^2b_i проектуються в натуральну величину $^1a_5$ і $^1b_5$ при цьому центром кола $^1a_5$ буде точка $0\equiv{}^1t_2$, центром кола $^1b_5$ - точка $^1t_1$ Радіуси кіл визначаються на фронтальній проекції відповідними відстанями від осей обертання $^1t_1$ і $^1t_2$ до точок, які належать контурним твірним поверхонь і розміщених в площині $^2\mu_5$.

Узагальнемо послідовність побудови лінії взаємного перетину двох поверхонь. Точки перетину ^1C_i кіл ^2a_i і ^2b_i являються горизонтальними проекціями точок лінії перетину *l*. Фронтальні і профільні проекції точок C_i розміщені на відповідних проекціях $^2\mu_i$ і $^3\mu_i$ допоміжних січних площин.

Застосовуючи декілька січних площини одержимо проміжні точки C_i ,$C_{i\,j}$, C_{j+1}…., з'єднавши які плавною кривою, знайдемо шукану лінію перетину. Для точної побудови горизонтальної і профільної проекцій лінії перетину необхідно знайти особливі точки 10 і 11, які належать одночасно лінії перетину і контурним твірним поверхням, які проектуються на площини проекцій в натуральну величину. Вказані точки, таким чином являються точками дотику відповідних проекцій лінії перетину і контурних твірних поверхонь.

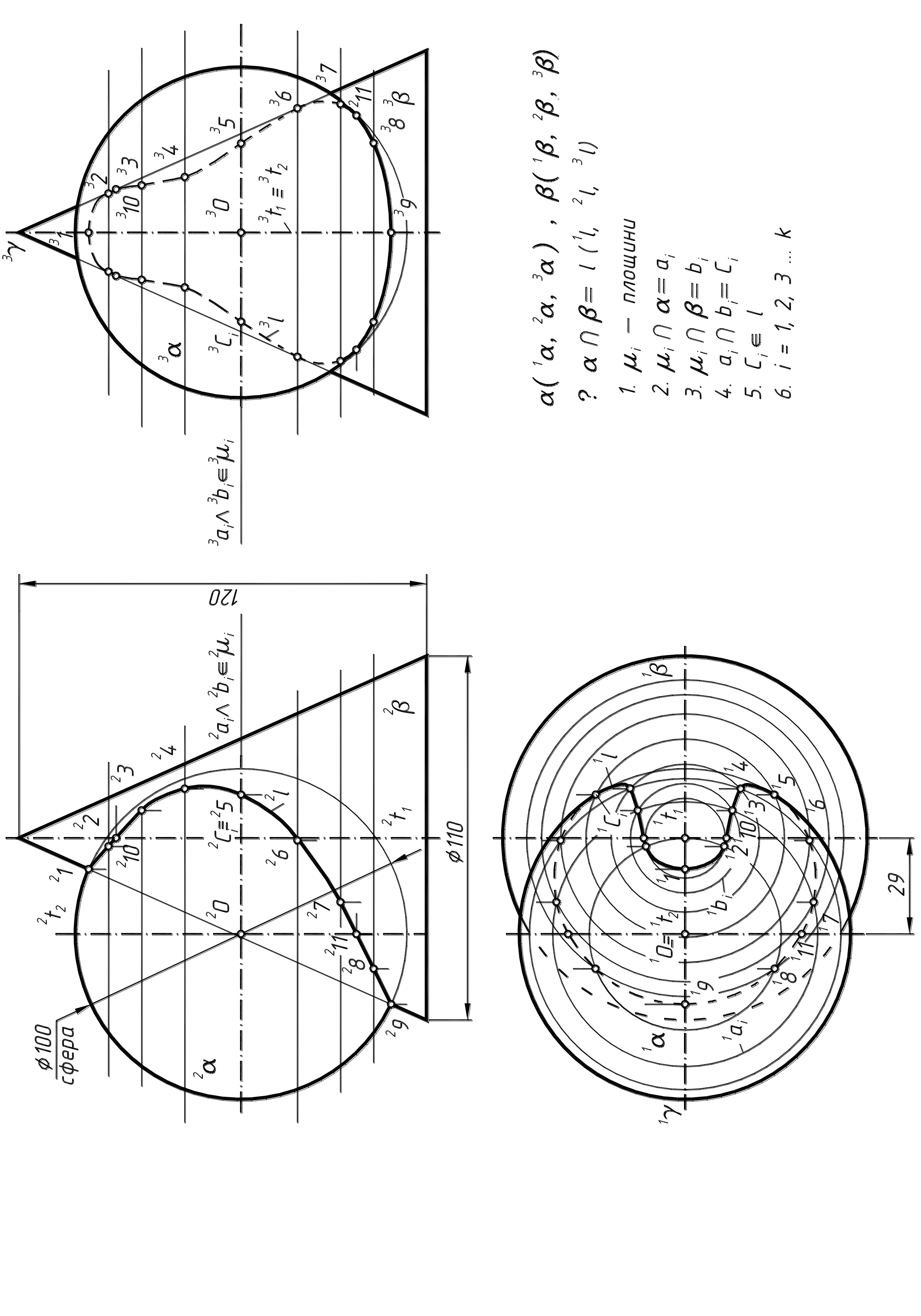

$\alpha({}^1\alpha,\ {}^2\alpha,\ {}^3\alpha)$, $\beta({}^1\beta,\ {}^2\beta,\ {}^3\beta)$
? $\alpha \cap \beta = l\ ({}^1l,\ {}^2l,\ {}^3l)$
1. μ_i — площини
2. $\mu_i \cap \alpha = a_i$
3. $\mu_i \cap \beta = b_i$
4. $a_i \cap b_i = C_i$
5. $C_i \in l$
6. $i = 1, 2, 3 \ldots k$
$\phi 100$
сфера
$\phi 110$
120
29
${}^2a_i \wedge {}^2b_i \in {}^2\mu_i$
${}^3a_i \wedge {}^3b_i \in {}^3\mu_i$
${}^3t_1 \equiv {}^3t_2$
${}^2C_i \equiv {}^25$
${}^1O \equiv {}^1t_2$

Рис. 5.1

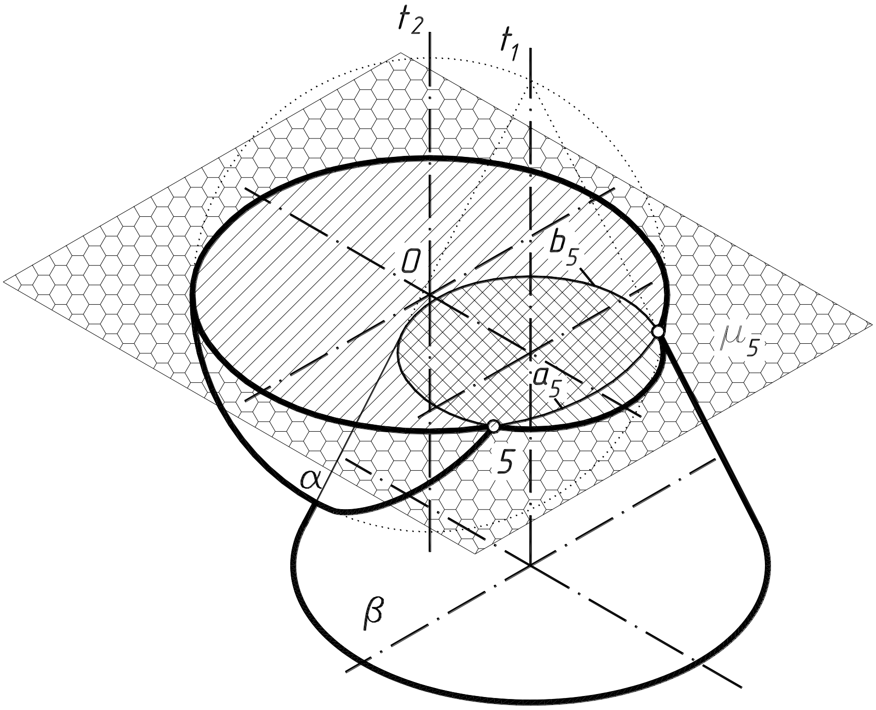


Рис. 5.2

Алгоритм розв'язку даної задачі наступний:

Дано: $\underline{\alpha\,({}^1\alpha,{}^2\alpha),\ \beta\,({}^1\beta,\ {}^2\beta)}$

$?\alpha\cap\beta = l\ ({}^1l,\ {}^2l,\ {}^3l)$

1. μ_i – площина
2. $\mu_i \cap \alpha = a_i$
3. $\mu_i \cap \alpha = a_i$
4. $\alpha \cap b_i = C_i$
5. $C_i \in l$
6. $i=1,\ 2,\ \ldots\ k.$

Нижче приведено рішення задачі знаходження лінії перетину двох поверхонь обертання другого порядку: сферичної і конічної зроблене із застосуванням комп'ютера.

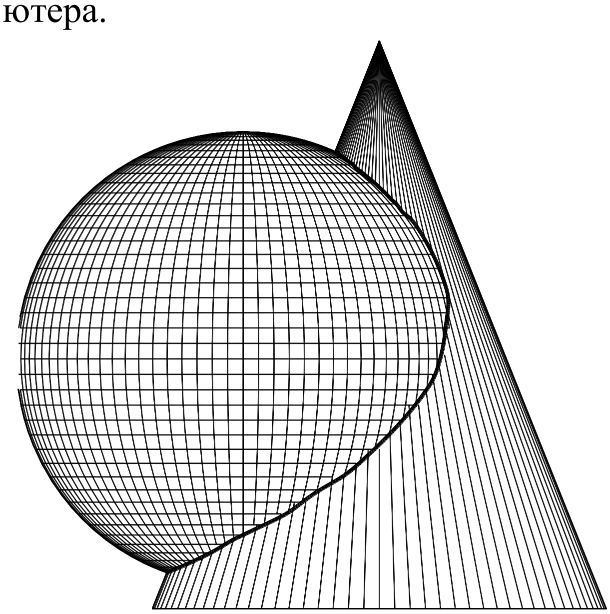


Рис. 5.3

3. Спосіб січних концентричних сфер. В деяких випадках для визначення лінії перетину двох поверхонь використовують допоміжні січні сферичні поверхні. Спосіб січних сфер більш раціональний в тих випадках, коли використання способу січних площин викликають необхідність побудови складних кривих для знаходження точок лінії перетину. Існують два види цього способу: конецентричних і ексцентричних січних сфер. Розглянемо тільки спосіб концентричних січних сфер.

Найбільш просте рішення задачі способом січних сфер вимагає виконання таких умов:

- осі заданих поверхонь обертання перетинаються і розміщені паралельно одній з площин проекцій;
- одна з осей обертання – проектуюча пряма.

Суть способу концентричних сфер заключається в наступному.

В точці перетину осей обертання заданих поверхонь розміщуємо центр допоміжної сфери. В результаті перетину сфери і заданих поверхонь одержимо два кола. Точки перетину цих кіл являються точками шуканої лінії перетину. В тій –же послідовності, змінюючи лише радіуси сфер, знаходимо необхідну кількість точок лінії перетину. З'єднуючи проекції точок плавними кривими, одержимо відповідні проекції лінії перетину.

Розглянемо розв'язок задачі на прикладі, представленому на рис. 5.4. Необхідно знайти лінію перетину двох поверхонь: конічної α і конічної β, осі яких t_1 і t_2 перетинаються в точці *O*. На фронтальній площині проекцій центром допоміжних сфер буде фронтальна проекція. ${}^2O$ цієї точки.

Максимальний радіус R_{max} січної сфери визначається відстанню від точки *O* до найбільш віддаленої точки перетину контурних твірних поверхонь. Мінімальним радіусом R_{min} є радіус допоміжної сфери, яка двічі перетинає одну поверхню і вписана в іншу поверхню. Отже мінімальний діаметр сфери повинен бути дотичний до більшої поверхні обертання.

При перетині мінімальної сфери σ_{min} з конічною поверхнею α утворюється коло ${}^2a_i$, а з другою конічною поверхнею β- коло ${}^2b_i$. Ці кола проекцюються на фронтальній площині проекцій як прямі лінії, на їх перетині ми позначаємо точку 1, що належить лінії перетину l_1. Нижче показано перетин кіл a_i і b_i в точці 1 в аксонометричній проекції (див рис. 5.5).

Горизонтальні і профільні проекції точки 1 належать відповідним проекціям кола ${}^2b_i$. Особливі точки лінії перетину *A*, *B*, знаходяться як точки перетину фронтальних проекцій контурних твірних поверхонь, розміщених в площині $\gamma(t_1 \cap t_2)$. Решта особливих точок знаходяться по методиці, описаній в методі січних площин.

При перетині мінімальної сфери δ_{min} з конічною поверхнею α утворюється дві точки 1 і 9 – видимі на фронтальній проекції та ще дві невидимі (симетричні) точки (див. рис. 5.5).

Збільшивши радіус допоміжної сфери δ ми отримаємо в перетині чотири кола які взаємно перетинаються в шести точках, три з яких видимі на фронтальній проекції. Нижче показано перетин цих кіл в точках 2, 8, 10 (див. рис. 5.6).

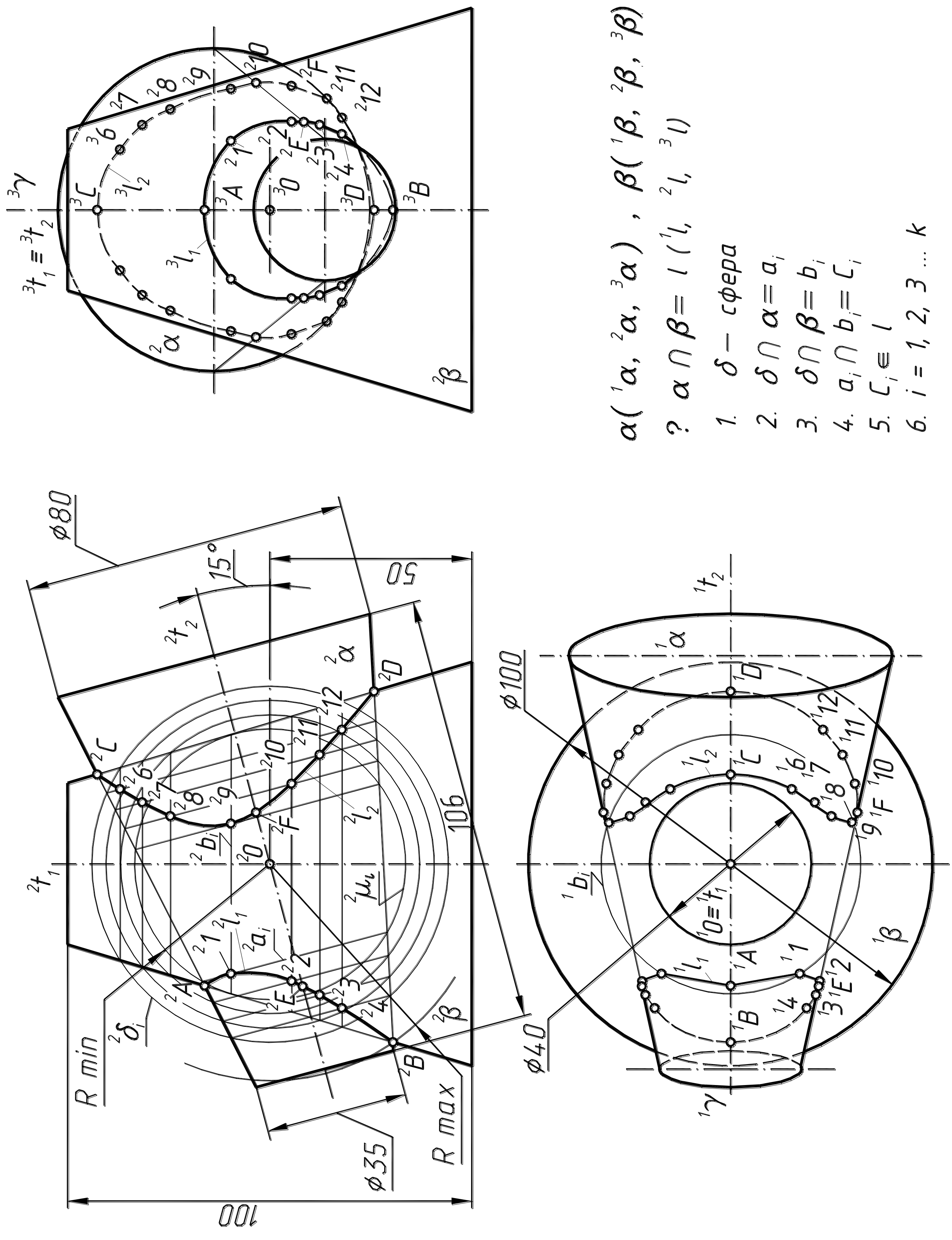


Рис. 5.4

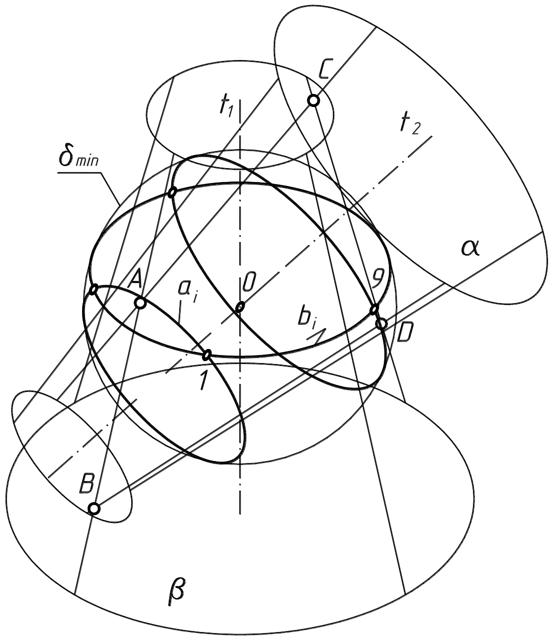


Рис. 5.5

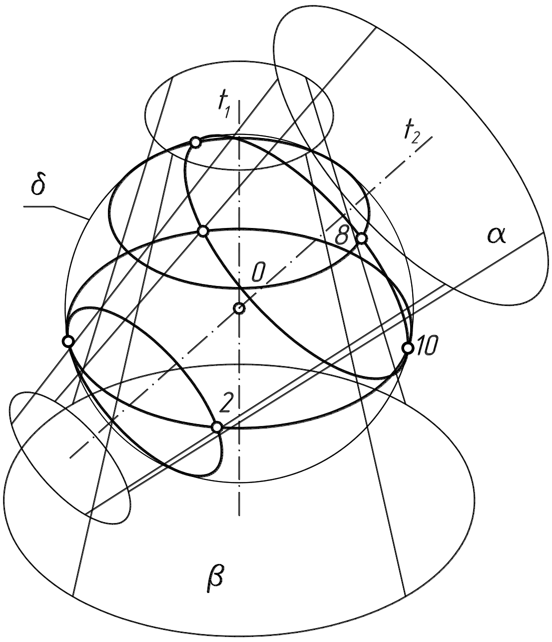


Рис. 5.6

Повторюючи побудови допоміжних сфер та знаходячи наступні точки в перетині січних кіл створюемо лінії перетину l_1 і l_2 на відповідних проекціях.

Алгоритм розв’язку даної задачі наступний:

Дано: : $\underline{\alpha\,({}^1\alpha, {}^2\alpha),\ \beta\,({}^1\beta, {}^2\beta)}$

$?\alpha \cap \beta = l\ ({}^1l, {}^2l, {}^3l)$

1. δ_i – сфера
2. $\delta_i \cap \alpha = a_i$
3. $\delta_i \cap \beta = b_i$
4. $\alpha \cap b_i = C_i$
5. $C_i \in l$
6. $i = 1, 2, \dots k.$

Запитання для перевірки засвоєних знань:

1. Поверхнею обертання називається поверхня, яка…?
2.При якому способі побудови лінії перетину використовують січні площини?
3.Що є центром сферичної поверхні?
4. Які є два види способу січних концентричних сфер?

Завдання для самостійної роботи:

1.Накреслити перетин конуса і сфери.

Список використаної літератури:

1. "Метоличні вказівки з нарисної геометрії "Проекціювання площин". Укладачі: К. В. Сарнацька, Н. С. Дяченко, Г. Г. Допіра, Г. С. Подима
2.«Курс начертательной геометри» В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиєвский
3.Методичні вказівки і контрольні завдання з курсів "Нарисна геометрія" та " Інженерна графіка". Укладачі: Віткун Н.К., Ізволенська А.Є., Парахіна Н.А., Чорнощокова Л.Д., Київ, КПІ, 1992 - 60с.
4.укл. Білицька Н.В. ГетьманО.Г. «Нарисна геометрія» та «Інженерна графіка» НТУУ «КПІ» 2005