Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Кафедра алгебри та геометрії

К. М. Копорх, Р. І. Собкович

Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії

Частина 1.

Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня
із двома та трьома змінними

Навчальний посібник для студентів напрямків підготовки
«математика», «середня освіта» (математика), «статистика»

Івано-Франківськ
2016

УДК 514

ББК 22.15

Копорх К. М., Собкович Р. І., **Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії** (Частина 1.Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня із двома та трьома змінними): навчальний посібник / Копорх К. М., Собкович Р. І., -- Івано-Франківськь: п.п.Бойчук А.Б., 2016 – 83с.

Посібник може в повній мірі забезпечити практичну частину курсу «Аналітична геометрія» для студентів спеціальностей математика, середня освіта (математика), статистика. При написанні враховувалось можливість використання посібника на заочному відділенні, а також при дистанційному навчанні. У зв'язку з цим до багатьох задач наведено вказівки та підказки.

В посібнику у вигляді курсу практичних занять викладені векторна алгебра, геометрія на площині, теорія прямих і площин в просторі. В кожному практичному занятті наведено основні теоретичні відомості означення, леми, теореми, властивості. Розглянуто приклади розв'язання задач ілюстровані малюнками. До деяких задач запропоновано декілька варіантів розв'язку задачі. Запропоновано задачі для самостійного розв'язання до яких вказані відповіді.

В посібнику наведено багато задач елементарної геометрії, які розв'язуються методами аналітичної геометрії.

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики як навчальний посібник для студентів напрямків підготовки «математика», «середня освіта» (математика), «статистика»(протокол №3 від 18.10.2016р.).

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук,
Никифорчин Олег Ростиславович, завідувач кафедри алгебри та геометрії ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
кандидат фізико-математичних наук
Бридун Вікторія Любомирівна, доцент кафедри геометрії і топології Львівський національний університет імені Івана Франка

Зміст

Практичне заняття № 1. Вектори. Лінійні операції над векторами.

Основні теоретичні факти.

Вектором називається напрямлений відрізок.

Основними характеристиками, які визначають вектор, є його довжина та напрям.

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначають довжину вектора символом $|\,|$. Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, то його називають ***одиничним*** або ***ортом.*** Якщо довжина вектора дорівнює 0, то його називають нульовим і позначають $\vec{\theta}$.

Під ***напрямом вектора*** $\vec{AB}$ розуміють напрям променя AB.

Два вектори, які мають однакові довжини та протилежні напрямки, називають ***протилежними***.

Два вектори називають ***колінеарними***, якщо вони паралельні деякій прямій.

Три вектори називають ***компланарними***, якщо вони паралельні деякій площині.

Два вектори називають ***рівними***, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні довжини.

Від будь-якої точки площини чи простору можна відкласти вектор, рівний даному і причому тільки один.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор, проведений з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$ при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (рис. 1).

Для довільних трьох точок A, B та C, згідно із означенням суми векторів, виконується рівність $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.

Означений таким чином спосіб додавання векторів називають ***“правилом трикутника”***. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відкласти із спільного початку та на одержаних відрізках, як на сторонах, побудувати паралелограм, то вектор, який співпадає з діагоналлю та має початок у спільному початку даних векторів, буде їхньою сумою (рис. 2).

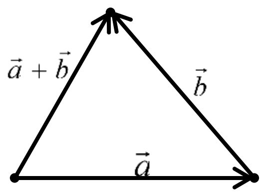

Рис. 1

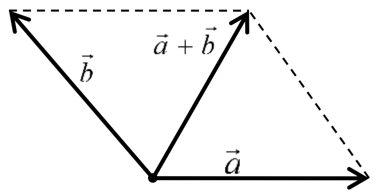

Рис. 2

Такий спосіб знаходження суми векторів називається ***“правилом паралелограма”***.

Для довільного трикутника ABC виконується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Навпаки, якщо дано три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$, серед яких є хоча б два не колінеарних, то із них можна утворити трикутник тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{\theta}$, або коли один із векторів є сумою двох інших.

При перетвореннях виразів із векторами використовують наступні властивості операції додавання:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативність додавання або переставна властивість);

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (асоціативність додавання або сполучна властивість);

3) $\vec{a}+\vec{\theta}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{\theta}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{x}$, який є розв’язком рівняння $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$. Його записують у виді $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. Побудова вектора, який є різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, здійснюють наступним чином: вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відкладають із спільного початку, а потім, сполучивши кінці векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та вибравши напрям шуканого вектора від кінця $\vec{b}$ до кінця вектора $\vec{a}$, одержують вектор $\vec{x}$ (рис. 3). Різницю векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна одержати, додаючи вектори $\vec{a}$ та $-\vec{b}$ (рис. 4).

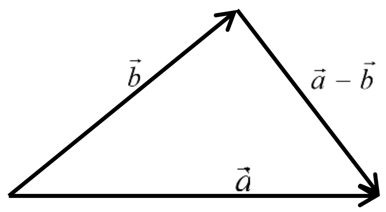

Рис. 3

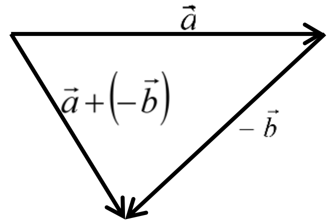

Рис. 4

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** t називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступним умовам:

1) довжина вектора $|\vec{c}| = |t| \cdot |\vec{a}|$,

2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $t > 0$ та $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $t < 0$.

Множення вектора на число має ряд властивостей:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

2) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

3) $0 \cdot \vec{a} = \vec{\theta}$;

4) $t \cdot \vec{\theta} = \vec{\theta}$;

5) $t \cdot (l\vec{a}) = (tl) \cdot \vec{a}$ (асоціативність множення відносно числових множників t та l);

6) $t \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (дистрибутивність множення відносно числового множника);

7) $(t + l) \cdot \vec{a} = t\vec{a} + l\vec{a}$ (дистрибутивність множення відносно векторного множника).

Якщо $\vec{a} \neq \vec{\theta}$, то вектор $\vec{l} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ одиничний і однаково напрямлений із вектором $\vec{a}$.

Якщо задані два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то вектори $\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$ та $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ матимуть однакові довжини $|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$. Вектор $\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$ та $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ задає напрям бісектриси кута, утвореного векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, оскільки він матиме напрям діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$ і $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ який є ромбом.

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Довести, що точка O є центром ваги трикутника ABC (точкою перетину медіан) тоді і тільки тоді, коли виконується рівність* $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{\theta}$ ***Доведення***. Нехай точка O є точкою перетину медіан AM, BN та CK (рис. 5). Тоді $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=(\vec{OA}+\vec{OB})+\vec{OC}=\vec{OL}+\vec{OC}$, де OL – діагональ паралелограма $OALB$. Оскільки точка K – середина відрізків AB та OL, то $\vec{OL}=2\vec{OK}$. За відомою властивістю медіан трикутника $OC=2OK$, тому $\vec{OC}=-2\vec{OK}$ Отже, $\vec{OL}+\vec{OC}=2\vec{OK}-2\vec{OK}=\vec{\theta}$.

Навпаки, нехай виконується рівність $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{\theta}$, тобто $\vec{OA}+\vec{OB}=-\vec{OC}$. Тоді $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OL}=2\vec{OK}$, де K – середина відрізка AB. З рівності $2\vec{OK}=-\vec{OC}$ випливає, що точки C, O та K лежать на одній прямій, а також, що CK – медіана трикутника ABC. Оскільки $CO=2OK$, то точка O є точкою перетину медіан.

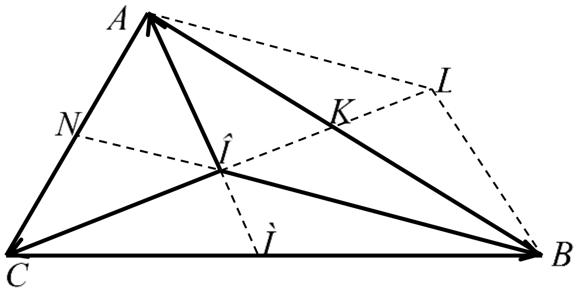

Рис. 5

Задача 2. *У п'ятикутнику ABCDE точки K,L,M,N – середини відповідно сторін AB, BC, CD та DE, а точки R і S – середини відрізків KM та LN. Довести, що* $RS=\frac{1}{4}AE$ *та* $RS \parallel AE$ *(рис. 6).*

Доведення. Введемо позначення: $\overrightarrow{KB}=\vec{a},\ \overrightarrow{BL}=\vec{b},\overrightarrow{CM}=\vec{c},\overrightarrow{DM}=\vec{d}$.. Тоді

$$\overrightarrow{AE}=2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

Знайдемо вектор $\vec{RS}$.

$$\vec{RS}=\vec{RK}+\vec{KB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DN}+\vec{NS}=$$

$$=\frac{1}{2}\vec{MK}+\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}+\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{NL}.$$

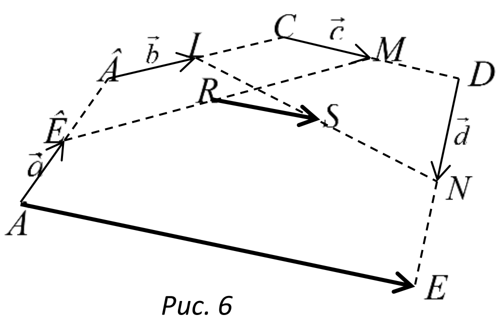

Рис. 6

Оскільки

$$\vec{MK}=\vec{MC}+\vec{CB}+\vec{BK}=-\vec{c}+2\vec{b}-\vec{a}$$

та

$$\vec{NL} = \vec{ND} + \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BK} = -\vec{d} - 2\vec{c} - \vec{b} \,,$$

то

$$\vec{RS} = \frac{1}{2}\left(-\vec{c} - 2\vec{b} - \vec{a}\right) + \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c} + \vec{d} + \frac{1}{2}\left(-\vec{d} - 2\vec{c} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\right) = \frac{1}{4}\vec{AE} \,.$$

Із одержаної векторної рівності випливає, що $RS = \frac{1}{4}AE$ та $RS \parallel AE$.

Доведено.

***Задача 3**. В опуклому чотирикутнику $ABCDE$ точки K та L – відповідно середини сторін AB і CD. Довести, що якщо $KL = \frac{1}{2}(BC + AD)$, то $BC \parallel AD$.*

Доведення. Очевидно, що $\vec{KL} = \vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CL}$ та $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AD} + \vec{DL}$. Додавши одержані рівності, дістаємо $2\vec{KL} = \vec{BC} + \vec{AD}$, звідки $2KL = \left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right|$. Але за умовою

$2\overrightarrow{KL} = \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|$. Рівність $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AD}\right|$ можлива тільки тоді, коли вектори $\vec{BC}$ та $\vec{AD}$ спів напрямлені, тобто, коли відрізки BC та AD паралельні. Отже, $BC \parallel AD$.

Доведено.

***Задача 4.** Що можна сказати про два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, для яких виконується одна із рівностей:*

1) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$,

2) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$,

3) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = |\vec{a}| - \left|\vec{b}\right|$?

Розв'язання. 1). Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$ співпадають із діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Оскільки, згідно із умовою задачі, довжини цих діагоналей рівні, то паралелограм є прямокутником. Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні.

2)-3). Із нерівності трикутника випливає, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні. Рівність 2) можлива тільки у випадку, коли дані вектори співнапрямлені. Рівність

3) виконується при умові, коли вектори напрямлені протилежно, причому довжина вектора $\vec{a}$ більша або дорівнює довжині вектора $\vec{b}$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. За заданими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ побудувати вектори:
   a) $\vec{a}+\vec{b}$;
   b) $\vec{a}-\vec{b}$;
   c) $\vec{b}-\vec{a}$;
   d) $-\vec{a}-\vec{b}$.
2. Нехай $ABCD$ - паралелограм і O - точка перетину діагоналей, E і F - середини паралельних сторін BC та AD. Побудуйте вектори:
   a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$;
   b) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DF}$;
   c) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$;
   d) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OB}$;
   e) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FO}$;
   f) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{CD}$.
3. У ΔABC вектор $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ та вектор $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Побудувати вектори $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$; $\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$; $-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.
4. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - паралелепіпед, O - точка перетину діагоналей, N, M, P, Q - середини відповідно сторін AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1. За допомогою вказаних точок та точок, які є вершинами паралелепіпеда, записати вектори, рівні наступним векторам:
   a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC_1}$;
   b) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{MO}$;
   c) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{NC}$;
   d) $\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AA_1}$.
5. Як зміниться вектор, якщо його помножити на число λ, якщо:
   a) $\lambda>1$;
   b) $\lambda\in(0;\ 1)$;
   c) $\lambda\in(-1;\ 0)$;
   d) $\lambda<-1$?

6. Задано вектор $\vec{a}$, довжина якого 7. Знайти вектор, напрямлений протилежно до $\vec{a}$, довжина якого 5.
7. Дано три довільні точки $A,\ B,\ C$. Побудувати точку D таку, щоб виконувалася рівність $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\vec{\Theta}$.
8. Про вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відомо, що $|\vec{a}|=11,\ |\vec{b}|=23$, $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Обчислити: $|\vec{a}-\vec{b}|$.
9. Довести, що для довільних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ виконуються співвідношення:

   а) $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

   б) $|\vec{a}-\vec{b}|\ge|\vec{a}|-|\vec{b}|$.
10. При якій умові виконується рівність?
11. При яких умовах мають місце наступні співвідношення:

    а) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$;

    б) $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$;

    в) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.
12. У кожному з випадків встановити, чи існують вектори, для яких одночасно виконуються нерівності:

    а) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|$ та $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{b}|$;

    б) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}|$ та $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{b}|$.
13. При якій умові вектор $\vec{a}+\vec{b}$ ділить пополам кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?
14. При якій умові вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ колінеарні?
15. У трикутнику ABC вектори $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ та $\overrightarrow{CM}$ напрямлені по медіанах. Знайти їхню суму.
16. Медіани трикутника ABC перетинаються у точці O. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
17. Обчислити довжину вектора, який є сумою всіх векторів з початком у центрі та кінцями у вершинах правильного многокутника.
18. Довести, що існує трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам даного трикутника.

19. Точки M_1, M_2, M_3 - середини сторін ΔABC. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$, де O - довільна точка простору.

20. Задано паралелограм $ABCD$ та довільна точка простору O. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

21. Відомо, що A, B, C, D - довільні точки простору, точка M - середина відрізка AD і точка N - середина відрізка BC. Довести, що $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

22. Для деякого просторового чотирикутника $ABCD$ та довільної точки простору O виконується співвідношення $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Довести, що $ABCD$ - паралелограм.

23. Задано деякий чотирикутник $ABCD$. Точка M - середина сторони AB і точка N - середина CD. Відомо, що має місце співвідношення $MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ - трапеція або паралелограм.

24. Довести векторним методом теореми про середні лінії трикутника та трапеції.

25. На кожній із двох прямих вибрано по три точки A_1, A_2, A_3 та B_1, B_2, B_3, причому виконується рівність $A_1A_2 \cdot B_1B_3 = A_1A_3 \cdot B_1B_2$. Довести, що середини відрізків A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 лежать на одній прямій.

26. Через середину ребра SA та центр ваги основи ABC піраміди $SABC$ проведено пряму, яка перетинає площину SBC у точці D. Довести, що $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

Відповіді до задач:

2. $2\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{OB}$; d) $\vec{\Theta}$; e) $\overrightarrow{EO}$; f) $\overrightarrow{OD}$.

3. Якщо у ΔABC вектор $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ та вектор $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ і M середина сторони AB, то $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{CM}$; $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\overrightarrow{BM}$; $\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}=\overrightarrow{AM}$; $-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{MC}$.

4. a) $\overrightarrow{AD_1}$; b) $\overrightarrow{AQ}$; c) $\overrightarrow{AC}$; d) $\vec{\Theta}$.

5. (a): довжина вектора збільшиться в λ раз; (b): вектор зменшиться в λ раз; (c): вектор змінить напрям і довжина вектора зменшиться; (d): вектор змінить напрям і довжина вектора збільшиться в λ раз.
6. Для розв’язування вправи застосуйте теорему Фалеса.
7. Перепишемо векторну рівність $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\vec{\Theta}$ інакше $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\vec{\Theta}\Rightarrow\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$. Побудова: проводимо пряму AC, через точку B проведемо пряму d паралельно до AC. На прямій d від точки B відкладемо відрізок BD довжиною $\frac{1}{2}|AC|$. Точка D - шукана.
8. $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. При розв’язуванні задачі можна скористатись теоремою косинусів або співвідношенням між діагоналями і сторонами паралелограма.
9. Для доведення нерівностей скористайтеся нерівністю трикутника.
10. а) $\vec{a}\perp\vec{b}$; б) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий кут; в) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють тупий кут.
11. а) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ і $\vec{b}>\frac{|\vec{a}|}{2}$; б) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.
12. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.
13. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.
14. $\vec{\Theta}$.
15. 0.

Практичне заняття № 2. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис. Координати вектора.

Основні теоретичні факти.

Нехай задані вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ та числа $t_1, t_2, ..., t_n$. Вектор $\vec{c} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_n\vec{a}_n$ називається ***лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Також кажуть, що ***вектор*** $\vec{c}$ ***лінійно виражається через вектори*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Якщо рівність $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_n\vec{a}_n = \vec{\theta}$ можлива при деяких ненульових коефіцієнтах, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називають ***лінійно залежними***. Якщо ж дана рівність виконується тільки при нульових коефіцієнтах, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називають ***лінійно незалежними***.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

Якщо серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.

Якщо деяка система векторів містить лінійно залежну підсистему, то ці вектори лінійно залежні.

Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Будь-які чотири геометричні вектори лінійно залежні.

Упорядковану множину векторів $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ називають ***базисом*** множини векторів S, якщо дані вектори лінійно незалежні, а також будь-який вектор множини S лінійно виражається через вектори множини B.

У просторі компланарних векторів V_2 з деяким базисом $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ довільний вектор $\vec{a} \in V_2$ можна єдиним способом представити у вигляді

$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Коефіцієнти $x,\ y$ біля базисних векторів називають ***координатами вектора*** $\vec{a}$ відносно базису B. Записують $\vec{a}(x,\ y)$ або $\vec{a} = (x,\ y)$.

У випадку векторного простору не компланарних векторів V_3 та деякого його базису $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ для довільного вектора $\vec{a} \in V_3$ його координати аналогічно визначаються, як коефіцієнти $x,\ y,\ z$ біля базисних векторів у рівності $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Записують $\vec{a}(x, y, z)$ або $\vec{a} = (x,\ y,\ z)$.

Два вектори, задані своїми координатами, ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні ***координати рівні***.

Додавання та віднімання векторів, а також множення векторів на числа здійснюється виконанням відповідних операцій над координатами векторів. Тобто, для довільних векторів $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ та $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2),$$

$t\vec{a} = (ta_1,\ ta_2)$, t - деякий числовий множник.

Два вектори, задані своїми координатами, колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.

Базис $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ називають ***прямокутним декартовим*** або ***ортонормованим***, якщо вектори базису одиничні та взаємно перпендикулярні. Щоб відрізняти ортонормовані базиси від інших використовують позначення базисних векторів у виді $\vec{e}_1 = \vec{i},\ \vec{e}_2 = \vec{j},\ \vec{e}_3 = \vec{k}$. Отже, базис $B = \{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ - прямокутний декартовий, якщо $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ та $\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}$. У просторі V_2 ортонормованим буде базис $B = \{\vec{i},\ \vec{j}\}$.

Довжину вектора $\vec{a} = (x,\ y,\ z)$ в ортонормованому базисі $B = \{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ можна обчислювати за допомогою співвідношення $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Довжина вектора $\vec{a} = (x,\ y)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Задано вектори* $\vec{a}=(2,\ 1,\ -3)$, $\vec{b}=(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{c}=(-1,\ 1,\ -2)$. *Довести, що вони утворюють базис. Розкласти вектор* $\vec{r}=(11,\ -6,\ 5)$ *за даним базисом.*

Розв'язання. Розглянемо векторну рівність $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{\theta}$. Прирівнюючи координати векторів у лівій та правій частині рівності, отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ x-2y+z=0, \\ -3x+y-2z=0 \end{cases}$, визначник якої $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$

Тому система має тільки нульовий розв'язок. Отже, дані вектори лінійно незалежні і утворюють базис.

Із векторної рівності $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{r}$ дістаємо систему координатних рівностей $\begin{cases} 2x+3y-z=11, \\ x-2y+z=-6, \\ -3x+y-2z=5 \end{cases}$, розв'язуючи яку, знаходимо $x=1,\ y=2,\ z=-3$.

Таким чином, $\vec{r}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$.

Задача 2. *Знайти лінійну залежність між векторами* $\vec{a}=(1,\ 1,\ -3)$, $\vec{b}=(3,\ 0,\ 1)$, $\vec{c}=(-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{d}=(1,\ 3,\ -6)$.

Розв'язання. Нас цікавить хоча б один ненульовий набір коефіцієнтів $x,\ y,\ z,\ t$ у векторній рівності $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+t\vec{d}=\vec{\theta}$. Переходячи до координатних рівностей, одержуємо систему однорідних лінійних рівнянь $\begin{cases} x+3y-z+t=0, \\ x+z+3t=0, \\ -3x+y-6t=0 \end{cases}$, яка, як відомо із курсу лінійної алгебри, має безліч розв'язків. Одним із них є розв'язок $x=2,\ y=0,\ z=1,\ t=-1$. Відповідь отримуємо у виді рівності $2\vec{a}+\vec{c}-\vec{d}=\vec{\theta}$.

Задача 2. *У трикутнику ABC на сторонах AB і BC вибрано точки K та L так, що $AK = 2KB, BL = LC$, а також проведено відрізки AL і CK, які перетинаються у точці D. У якому відношенні точка D ділить дані відрізки?*

Розв'язання. Нехай $\vec{AC} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AD} = x \cdot \vec{AL}$, $\vec{CD} = y \cdot \vec{CK}$ (рис. 1). Оскільки $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$, то $x \cdot \vec{AL} = \vec{AC} + y \cdot \vec{CK}$. Виразимо всі вектори в одержаній векторній рівності через $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BL} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{c} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right),\ \vec{CK} = \vec{CA} + \vec{AK} = -\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

Отже, $\frac{1}{2}x\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{b} + y\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \vec{b}\right)$.

Оскільки вектори $\vec{b}$ та $\vec{c}$ лінійно незалежні, то, прирівнюючи коефіцієнти біля цих векторів в обох частинах рівності, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = 1 - y, \\ \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y \end{cases},$$

розв'язуючи яку, знаходимо $x = \frac{4}{5},\ y = \frac{3}{5}$.

Отже, $AD = \frac{4}{5}AL,\ CD = \frac{3}{5}CK$.

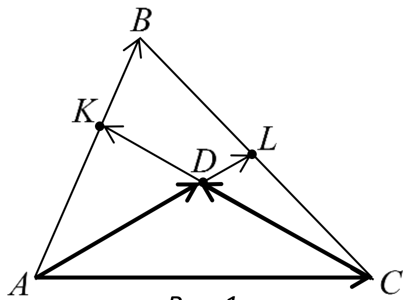

Рис. 1

Відповідь. $\frac{AD}{DL} = 4,\ \frac{CD}{DK} = \frac{3}{2}$.

Задача 3. *Довести, що відрізки, які сполучають вершини трикутної піраміди з центрами протилежних граней, перетинаються в одній точці та діляться нею у відношенні 3:1, рахуючи від вершини.*

Розв'язання . Нехай $SABC$ - задана піраміда і $\vec{SA} = \vec{a}, \vec{SB} = \vec{b}, \vec{SC} = \vec{c}$, точки K та L - точки перетину медіан відповідно трикутників SBC і ABC, точки M, N належать відрізкам SL та AK, причому $SM = 3ML, AN = 3NK$. Покажемо, що у базисі $B = \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ координати векторів $\vec{SM}$ та $\vec{SN}$ співпадають. Маємо

$$\vec{SM} = \frac{3}{4}\vec{SL} = \frac{3}{4}\left(\vec{SA} + \vec{AL}\right) = \frac{3}{4}\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{AP}\right) = \frac{3}{4}\left(\vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)\right) =$$

$$\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a}\right) = = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right),$$

де P - середина відрізка BC. Отже, у базисі B вектор $\vec{SM}$ має координати $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Дальше знаходимо

$$\vec{SN} = \vec{SA} + \vec{AN} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{AK} = \vec{a} + \frac{3}{4}\left(\vec{SK} - \vec{SA}\right) = \vec{a} + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{SP} - \vec{a}\right) =$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) - \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right),$$

тобто $\vec{SN} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Таким чином, $\vec{SM} = \vec{SN}$, а це означає, що точки M та N співпадають.

Задача 4. *Задано правильний шестикутник $ABCDEF$. Нехай $\vec{AC} = \vec{k}$, $\vec{AF} = \vec{l}$. Знайти координати векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AE}$ у базисі* $B = \{\vec{k},\ \vec{l}\}$.

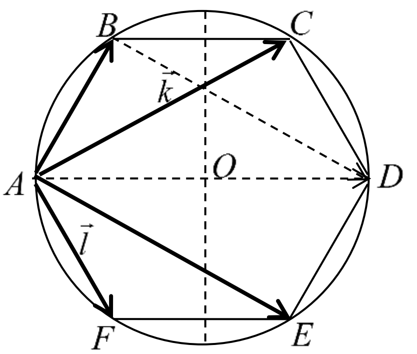

Рис. 2

Розв'язання. Нехай O - центр кола, описаного навколо заданого шестикутника (рис. 2). Очевидно, що

$$\vec{k} + \vec{l} = \vec{AC} + \vec{AF} = \vec{AD} = 2\vec{AO},$$

а також, що $\vec{BC} = \vec{AO} = \vec{FE}$. Тому

$$\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{k} - \frac{1}{2}\left(\vec{k} + \vec{l}\right) = -\frac{1}{2}\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{l},$$

$$\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE} = \vec{l} + \frac{1}{2}\left(\vec{k} + \vec{l}\right) = \frac{1}{2}\vec{k} + \frac{3}{2}\vec{l}.$$

Відповідь. $\vec{AB} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{AE} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 5. *У трапеції* $KLMN$ *з основами* $KN > LM$ *відомо, що* $\frac{LM}{KN} = t$. *Обчислити координати вектора* $\vec{KA}$ *у базисі* $B = \{\vec{a},\ \vec{b}\}$, *якщо* A *- точка перетину діагоналей трапеції,* $\vec{KN} = \vec{a},\ \vec{KL} = \vec{b}$ *(рис. 3).*

Розв'язання. Із трикутника KLM знаходимо $\vec{KM} = \vec{KL} + \vec{LM} = \vec{b} + t\vec{a}$.

Оскільки трикутники KAN та MAL подібні, то

$$\frac{KA}{KN} = \frac{MA}{LM} = \frac{KM}{KN + LM} = \frac{KM}{(1+t)\cdot KN},$$

звідки $KA = \frac{KM}{1+t}$. Тому

$$\vec{KA} = \frac{1}{1+t}\cdot \vec{KM} = \frac{1}{1+t}\cdot\left(\vec{b} + t\vec{a}\right).$$

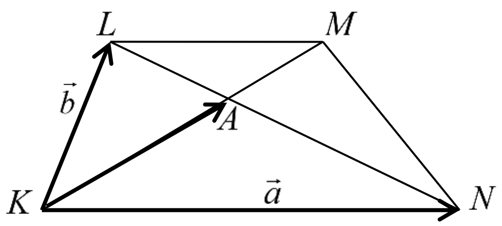

Рис. 3

Коефіцієнти біля векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дозволяють отримати відповідь. $\vec{KA} = \left(\frac{t}{1+t},\ \frac{1}{1+t}\right)$

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні параметра λ будуть лінійно залежними вектори $\lambda\vec{a} + 2\vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$?
2. Довести, що для будь-яких векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ вектори $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ та $\vec{a} - \vec{c}$ лінійно залежні.
3. У трикутнику ABC на сторонах AB і BC вибрано точки K та L так, що $AK = 2KB,\ BL = 2LC$, а також проведено відрізки AL і CK, які перетинаються у точці D. У якому відношенні точка D ділить дані відрізки?
4. У трикутнику ABC вектори $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BL}$ та $\overrightarrow{CM}$ напрямлені по медіанах. Виразити їх через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

5. Нехай ABC - довільний трикутник, E і F - середини сторін AB та BC. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.
6. У паралелограмі $ABCD$ на стороні BC вибрана точка K така, що $BK = 3KC$ У якому відношенні ділить відрізок AK діагональ BD?
7. Нехай $ABCDEF$ - правильний шестикутник, точка O- його центр. Покладемо $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Виразити вектори $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.
8. У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC вибрана точка K така, що $3AK = KC$. У якому відношенні ділить сторону ADточка M, де M точка перетину прямої AD і BK?
9. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K, L, M - середини ребер BB_1, CB_1 та CD відповідно (рис.4). Виразити вектори $\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CL}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{LM}$ через вектори $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$.

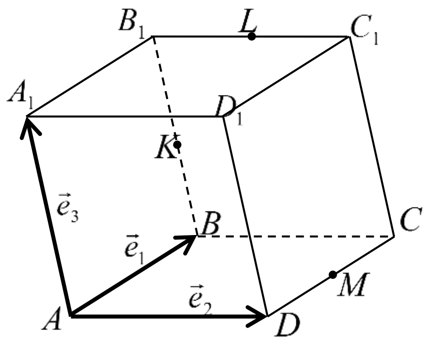

Рис. 4

10. Нехай $ABCD$ - паралелограм, E і F - середини протилежних сторін BC і AD, а точка O - точка перетину діагоналей. Прийнявши вектори $\overline{AB} = \vec{e}_1$ та $\overline{AD} = \vec{e}_2$ за базисні визначити координати векторів $\overline{AC}, \overline{OD}, \overline{FC}, \overline{BC}, \overline{EO}, \overline{BD}, \overline{EA}$
11. Дано трикутник OAB. Сторона AB поділена точкою P у відношенні $AP:PB=m:n$. Розкласти вектор $\overline{OP}$ за векторами $\overline{OA}$ та $\overline{OB}$.
12. $OABCDE$ - правильний шестикутник. Вибравши вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OE}$ за базисні, виразити через них вектори $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ та $\overline{OD}$.
13. На векторах $\overline{OA} = \vec{a}, \overline{OB} = \vec{b}$ та $\overline{OC} = \vec{c}$ побудовано паралелепіпед. Точка М - центр грані, яка проходить через точку С паралельно до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Розкласти вектор $\overline{OM}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

14. Дано A, B, C, D - чотири довільні точки простору. Прийнявши за базисні вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ та $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, виразити через них вектор $\overrightarrow{KL}$, де K - середина AB, L - середина DC.
15. У трикутнику ABC проведені медіана BK і середня лінія MN, яка паралельна стороні AC. Прямі BK і MN перетинаються у точці O. Знайти координати векторів $\overline{CM}$, $\overline{OB}$, $\overline{KM}$, $\overline{BC}$, $\overline{NC}$, $\overline{AN}$, прийнявши вектори $\overline{KC} = \bar{e}_1$ і $\overline{KN} = \bar{e}_2$ за базисні.
16. Вектори $\overline{AC} = (2,\ 1)$ і $\overline{AB} = (1,\ 3)$ співпадають з сторонами трикутника ABC. Визначте координати векторів $\overline{AM_1}$, $\overline{BM_2}$ та $\overline{CM_3}$, які співпадають з медіанами трикутника.
17. Серед векторів $\vec{a} = (3,\ -5)$, $\vec{b} = (3,\ -6)$, $\vec{c} = (1,\ -5)$, $\vec{d} = (-1,\ 2)$ знайти лінійно залежні.
18. Визначити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = (3;-5;8)$ та $\vec{b} = (-1;1;3)$.
19. При яких значеннях параметрів α та β вектори $\vec{a} = (2,\ -6,\ \alpha)$ та $\vec{b} = (-1,\ \beta,\ 4)$ будуть колінеарні?
20. При яких значеннях α *і* β вектори $\bar{a} = (2;-1;\alpha)$ та $\bar{b} = (\beta\ ;3;-2)$ будуть колінеарні?
21. Два вектори $\vec{a}(2;-3;6)$ і $\vec{b}(-1;2;-2)$ виходять з одної точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.
22. Виразити вектор $\vec{c} = (-2,\ -12)$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a} = (4,\ -2)$, $\vec{b} = (3,\ 5)$.
23. Задано вектори $\vec{a} = (1,\ 2)$ та $\vec{b} = (2,\ -3)$. Розкласти вектор $\vec{r} = (9,\ 4)$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$.
24. Дано ΔABC, де M - центр ваги трикутника. Вектори $\overrightarrow{MC}$ та $\overrightarrow{MB}$ базисні. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ через базисні.
25. Дано: $ABCD$ - трапеція ($\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$), точки M і N - середини основ AB та DC, а P - точка перетину діагоналей AC і DB. Нехай вектори:

а) $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$ - базисні. Виразити через них вектори $\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PB}.$

б) $\overrightarrow{PB}$ та $\overrightarrow{PA}$ - базисні. Виразити через них вектори $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DA}$.

26. Вектори $\vec{a}(-2;4;7), \vec{b}(0;1;2), \vec{c}(1;0;1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\bar{d}=(-1;2;4)$ у цьому базисі.

27. Вектори $\bar{a}=(3;3;-1),\ \bar{b}=(3;1;0),\ \bar{c}=(-1;2;1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\bar{d}=(-1;0;2)$ у цьому базисі.

Відповіді до задач:

1. $\lambda=-2$.
2. Справді, наприклад $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{c}$.
3. $CD:DK=3:4$.
4. $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{BL}=\dfrac{\vec{b}}{2}-\vec{a},\quad \overrightarrow{CM}=\dfrac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$.
5. $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{b}-2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{b}-4\vec{a}$.
6. . $AM:MK=4:3$
7. .$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\quad \overrightarrow{OE}=-\vec{b},\quad \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\quad \overrightarrow{EC}=2\vec{b}-\vec{a},\quad \overrightarrow{CA}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{DA}=2\vec{a}$
8. $AM:MD=1:2$.
9. $\overrightarrow{AL}=\vec{e}_1+\dfrac{1}{2}\vec{e}_2+\vec{e}_3,\quad \overrightarrow{CL}=\vec{e}_3-\dfrac{1}{2}\vec{e}_2,\quad \overrightarrow{AM}=\vec{e}_2+\dfrac{1}{2}\vec{e}_1,\quad \overrightarrow{LM}=\dfrac{1}{2}\vec{e}_2-\vec{e}_3-\dfrac{1}{2}\vec{e}_1$.
10. $\overrightarrow{AC}(1;1)\quad \overrightarrow{OD}\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{FC}\left(1;\dfrac{1}{2}\right),\quad \overrightarrow{BC}(0;1),\quad \overrightarrow{EO}\left(-\dfrac{1}{2};0\right),\quad \overrightarrow{BD}(-1;1)$

$\overrightarrow{EA}\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$

11. $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
12. $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}$ і $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OE}$.
13. $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.
14. $\overrightarrow{KL}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$.
15. $\overrightarrow{CM}(-2;1)$, $\overrightarrow{OB}\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{KM}(-1;1)$, $\overrightarrow{BC}(2;-2)$, $\overrightarrow{NC}(1;-1)$, $\overrightarrow{AN}(1;1)$.

16. $\overline{AM_1}\left(\frac{3}{2};2\right)$, $\overline{BM_2}\left(0;-2\frac{1}{2}\right)$ та $\overline{CM_3}\left(-1\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

17. Вектори $\vec{b}$ і $\vec{d}$ лінійно залежні, бо $3\vec{d}+\vec{b}=\Theta$.

18. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{141}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{77}$.

19. $\alpha=-8,\ \beta=3$.

20. $\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=-6$.

21. $\vec{c}\,(-3;15;12)$.

22. $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

23. $\vec{r}=5\vec{a}+2\vec{b}$.

24. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.

25. а) $\overrightarrow{CB}=(1-k)\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{MN}=\frac{k-1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AD},\quad \overrightarrow{PB}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AD}.$$

б) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA},\quad \overrightarrow{BC}=-k\cdot\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB},\quad \overrightarrow{CD}=k\cdot\overrightarrow{PA}-k\cdot\overrightarrow{PB},\quad \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{PA}+k\cdot\overrightarrow{PB}$

26. $\vec{d}\,(1;-2;1)$.

27. $\vec{d}\,(-1;1;1)$.

Практичне заняття № 3. Загальна афінна та прямокутна декартова системи координат. Координати точки. Поділ відрізка у даному відношенні.

Основні теоретичні факти.

Розглянемо на площині деяку точку O та відкладемо від неї вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ довільного базису $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Тепер для довільної точки M площини можна побудувати вектор $\vec{OM}$ (так званий ***радіус-вектор точки*** M), який розкладається за базисними векторами. Нехай $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Трійку елементів $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ називають ***загальною афінною системою координат*** на площині. Точку O називають ***початком координат*** цієї системи.

Прямі, які проходять через початок координат паралельно до векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, називають координатними осями – осями а***бсцис*** та ***ординат*** відповідно. На даних осях (їх часто позначають Ox та Oy) за допомогою стрілки показують додатній напрям, який відповідає напрямку відповідного базисного вектора, а також відмічають одиницями кінці базисних векторів. Таким чином, довжини базисних векторів стають одиницями вимірювання на кожній із осей (рис.1). Після позначень масштабних одиниць на координатних осях, базисні вектори, як правило, не зображають.

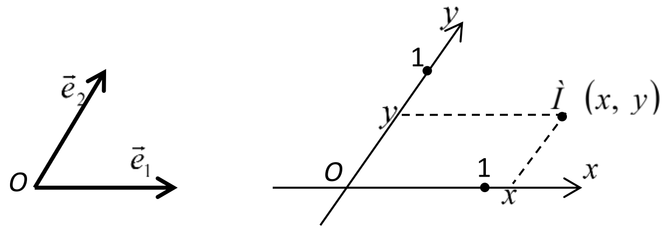

Рис. 1

Числа x та y у розкладі вектора $\vec{OM}$ називають ***координатами точки*** M (відповідно ***абсцисою*** та ***ординатою***) та записують $M(x, y)$. Координати кожної точки відносно вибраної системи координат теж визначаються єдиним способом.

Аналогічно, як і у випадку площини, вводиться поняття ***загальної афінної системи координат у тримірному просторі***.

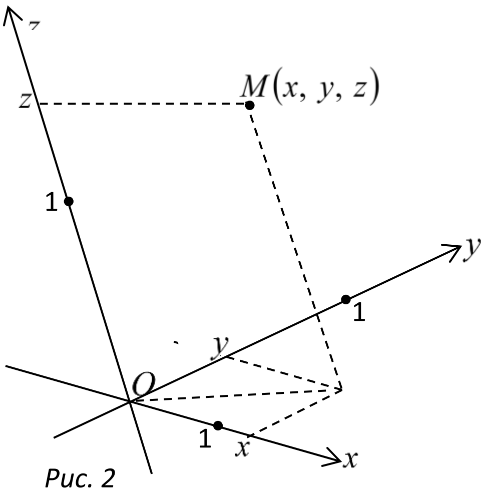

Рис. 2

Для цього довільно вибирають точку O (початок координат) та через неї проводять три прямі (координатні осі), які паралельні векторам деякого базису $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. На даних осях (їх часто позначають Ox, Oy, Oz та називають осями ***абсцис***, ***ординат*** та ***аплікат***) стрілками вказують додатні напрямки, які відповідають напрямкам відповідних базисних векторів, а також відмічають одиницями кінці базисних векторів. Одержуємо загальну афінну систему координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ у тримірному просторі (рис.2). Тепер для довільної точки M простору, побудувавши її радіус - вектор $\overrightarrow{OM}$ та розклавши його за базисними векторами, дістаємо $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ (зауважимо,що такий розклад єдиний). Числа x, y та z називають координатами точки M (***абсцисою, ординатою*** та ***аплікатою*** відповідно) та записують $M(x, y, z)$.

Якщо базис ортонормований, то систему координат, яка визначається точкою (початком координат) та базисом $B=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ називають ***прямокутною декартовою системою координат*** у просторі. Нехай у такій системі задані дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Знайшовши довжину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, яка дорівнює довжині відрізка M_1M_2, дістаємо ***формулу відстані між двома точками***:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

У випадку площини, коли система координат визначається точкою (початком координат) та базисом $B=\{\vec{i}, \vec{j}\}$, її називають прямокутною декартовою системою координат на площині. Формула відстані між двома точками записується у виді

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Нехай на прямій M_1M_2 вибрана деяка точка M. Кажуть, що ***точка*** M ***ділить відрізок*** M_1M_2 ***у відношенні*** t, якщо виконується рівність

$$\overrightarrow{M_1M} = t \cdot \overrightarrow{MM_2} \quad (1)$$

Точка M не обов'язково повинна належати відрізку M_1M_2. Вона може лежати на прямій M_1M_2 і поза ним. Очевидно, що якщо точка M належить відрізку M_1M_2, то $\overrightarrow{M_1M} \upuparrows \overrightarrow{MM_2}$ і число $t>0$. Якщо точка M лежить поза відрізком

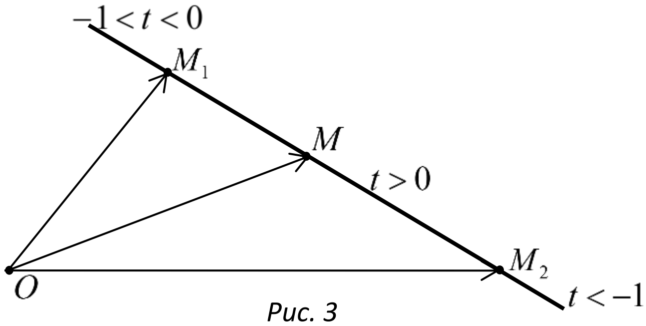

Рис. 3

M_1M_2, то $\overrightarrow{M_1M} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MM_2}$, тому $t<0$. Вірні також і обернені твердження. Оскільки $|t| = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, то при $t \in (-1,\, 0)$ $M_1M < MM_2$ і точка M лежить на прямій M_1M_2 поза точкою M_1. При $t \in (-\infty,\, -1)$ $M_1M > MM_2$, тому точка M лежить на прямій M_1M_2 поза точкою M_2. При $t = 1$ точка M є серединою відрізка M_1M_2. При $t = 0$ точки M та M_1 співпадають. Випадок $t = -1$ неможливий, оскільки тоді з рівності (1) випливає, що кінці відрізка співпадають.

Нехай задані точки $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ та $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, а також відношення t, в якому точка $M(x,\, y,\, z)$ ділить відрізок M_1M_2. Тоді

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \quad z = \frac{z_1 + tz_2}{1+t}. \quad (2)$$

Одержані співвідношення називають ***формулами поділу відрізка у даному відношенні***. При $t = 1$ точка M є серединою відрізка M_1M_2. Тому рівності

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

задають координати середини відрізка M_1M_2. У двомірному випадку (тобто у випадку, коли базис містить два вектори і точки задаються двома координатами) в одержаних рівностях не розглядають вирази, які містять третю змінну z.

Приклади розв'язання задач.

Приклад 1. *Знайти координати точки перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у точках* $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$.

Розв'язання. Нехай $M(m_1, m_2, m_3)$ – середина відрізка BC, $K(x, y, z)$ - шукана точка. Оскільки $m_1 = \dfrac{b_1 + c_1}{2}$, $m_2 = \dfrac{b_2 + c_2}{2}$ $m_3 = \dfrac{b_3 + c_3}{2}$, то, скориставшись рівностями (2) при $t = 2$ (у такому відношенні, рахуючи від вершини трикутника, діляться медіани точкою їх перетину), дістаємо

$$x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3},\ y = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3},\ z = \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3},$$

тобто координати центра маси трикутника є середніми арифметичними відповідних координат вершин трикутника.

Приклад 2. Розглянемо довільний трикутник ABC та візьмемо на його сторонах AB, BC та AC точки K, L, M відповідно.

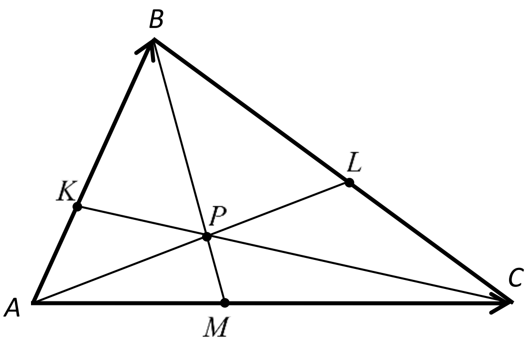

Рис. 4

Нехай $\dfrac{AK}{KB} = t,\ \dfrac{BL}{LC} = u,\ \dfrac{CM}{MA} = v$.

Вірне наступне твердження.

Теорема (теорема Чеви). *Відрізки* AL, BM *та* CK *перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли виконується рівність* $tuv = 1$.

Доведення. Введемо в розгляд афінну систему координат, вибравши за початок координат точку A та базис $B = \left\{\vec{AC}, \vec{AB}\right\}$ (рис. 4). У цій системі точки матимуть наступні координати: $A(0, 0), B(0, 1)$, $C(1, 0)$, $K\left(0, \dfrac{t}{1+t}\right), L\left(\dfrac{u}{1+u}, \dfrac{1}{1+u}\right)$, $M\left(\dfrac{1}{1+v}, 0\right)$. Нехай відрізки AL та BM перетинаються у точці $P(x, y)$. Тоді із колінеарності векторів $\vec{AP} = (x,\ y)$ та $\vec{AL} = \left(\dfrac{u}{1+u},\ \dfrac{1}{1+u}\right)$, а також векторів $\vec{BP} = (x,\ y-1)$ та $\vec{BM} = \left(\dfrac{1}{1+v},\ -1\right)$ дістаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{u} = \dfrac{y}{1}, \\ (1+v)x = \dfrac{y-1}{-1}, \end{cases}$$

звідки $x = \dfrac{u}{1+u+uv}$, $y = \dfrac{1}{1+u+uv}$. Якщо відрізок KC проходить через точку P, то із колінеарності векторів $\vec{KC} = \left(1, -\dfrac{t}{1+t}\right)$ та $\vec{PC} = (1-x,\ -y) = \left(\dfrac{1+uv}{1+u+uv},\ -\dfrac{1}{1+u+uv}\right)$, дістаємо $1+uv = \dfrac{1+t}{t}$, звідки $tuv = 1$.

Із одержаних співвідношень також випливає те, що якщо $tuv = 1$, то вектори $\vec{KC}$ та $\vec{PC}$ колінеарні, тобто, що відрізок KC проходить через точку P перетину двох інших відрізків.

Теорема доведена.

***Задача 3**. Задано прямокутник $ABCD$. Довести, що для довільної точки M виконується рівність $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.*

Доведення. Введемо прямокутну систему координат наступним чином: точку A виберемо початком координат, пряму AD - віссю Ox, а пряму AB - віссю Oy. Нехай $AD = a,\ AB = b$. Тепер кожна точка матиме свої координати: $A(0,\ 0),\ B(0,\ b),\ C(a,\ b),\ D(a,\ 0),\ M(x,\ y)$. Скориставшись формулою відстані між двома точками, дістаємо

$$MA^2 + MC^2 = \left(x^2 + y^2\right) + \left((x-a)^2 + (y-b)^2\right),$$

$$MB^2 + MD^2 = \left(x^2 + (y-b)^2\right) + \left((x-a)^2 + y^2\right)$$

що і доводить потрібну рівність.

Задача 4. *У трикутній піраміді* $SABC$ *вершини сполучено з центрами протилежних граней. Довести, що утворені відрізки перетинаються в одній точці та діляться нею у відношенні 3:1, рахуючи від вершини.*

Розв'язання. Використаємо координатний метод. Для цього введемо у розгляд загальну афінну систему координат, вибравши точку S початком координат та базис $\left\{\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}\right\}$. Тоді вершини піраміди матимуть наступні координати: $S(0, 0, 0), A(1, 0, 0)\ \ B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$. Нехай точки K та L - точки перетину медіан трикутників ABC та SBC відповідно. Використавши результати пункту 4, знаходимо координати точок K та L: $K\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), L\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Нехай точки M, N ділять відрізки SK та AL у відношенні 3:1, рахуючи від точок S та K відповідно. Скориставшись формулами поділу відрізка у даному відношенні при $t=3$, дістаємо $M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $N\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Оскільки точки M та N співпадають, то твердження доведено.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Сторона квадрата дорівнює 1. Визначте координати вершин квадрата, прийнявши за осі координат дві його діагоналі.
2. Нехай $ABCDEF$ - правильний шестикутник, точка O- його центр. Покладемо $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ та $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Визначити координати вершин шестикутника в афінній системі координат $\{O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$.
3. Задана трапеція $ABCD$ ($\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$), P - точка перетину діагоналей AC та DB. У репері $\left\{A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right\}$ визначити координати точок $A,\ B,\ C,\ D,\ P$.
4. Вершини чотирикутника $ABCD$ знаходяться в точках $A(1;-3)$, $B(8;0)$, $C(4;8)$, $D(-3;5)$. Встановіть вид даного чотирикутника (паралелограм, квадрат, трапеція).

5. Вершини чотирикутника $ABCD$ знаходяться в точках $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(5;0)$, $D(7;-5)$. Встановіть вид даного чотирикутника (паралелограм, квадрат, трапеція).
6. Вершини паралелограма $ABCD$ знаходяться в точках $A(-1;3)$, $B(2;-5)$, $C(0;4)$. Визначити координати вершини D.
7. Дано дві вершини рівностороннього трикутника $A(-3;2)$ і $B(1;4)$. Знайти координати третьої вершини C.
8. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(-2;1)$, $B(3;3)$. Знайдіть координати двох інших вершин квадрата.
9. Обчислити площу квадрата, у якого точки:

   а) A(3; -7) та B(-1;4) є суміжними вершинами;

   б) P(3*;* 5) та Q(l; -3) є протилежними вершинами.

10. Дано три вершини A(3, -7), B(5, -7), C(-2; 5) паралелограма $ABCD$, четверта вершина якого D протилежна B. Визначити довжини діагоналей цього паралелограма.
11. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{10}$. Дві його протилежні вершини - це точки P(4, 9) та Q(-2; 1). Обчислить площу цього ромба.
12. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$. Дві його протилежні вершини - це точки P(3, -4) та Q(1, 2). Обчислить площу цього ромба.
13. Довести, що точки A(3, -5), B(-2, -7) та C(18, 1) лежать на одній прямій.
14. Довести, що трикутник с вершинами A_1(1, 1), A_2(2, 3) та A_3(5, -1) прямокутний.
15. Довести, що точки A(2; 2), B(-1; 6), C(-5; 3) та D(-2; -1) є вершинами квадрата.
16. Дано дві протилежні вершини квадрата A(3; 0) та C(-4; 1). Знайти дві його інші вершини.
17. Дано дві суміжні вершини квадрата A(2,-1) та B(-1,3). Знайти дві його інші вершини.
18. Знайти центр правильного шестикутника $ABCDEF$, знаючи дві вершини $A(2,0)$ та $B(5,3\sqrt{3})$.

19. Дано дві точки $M(2; 2)$ та $N(5; —2)$. На осі Ox знайти таку точку P, щоб кут MPN був прямим.
20. Через точку A (4; 2) проведено коло, яке дотикається обох координатних осей. Визначити його центр та радіус.
21. Через точку $M_1(1; —2)$ проведено коло радіуса 5, яке дотикається до осі Ox. Визначити центр цього кола.
22. Дано вершини трикутника $M_1(-3, 6)$, $M_2(9, -10)$ та $M_3(-5, 4)$. Визначити центр і радіус описаного навколо цього трикутника кола.
23. Встановити вид чотирикутника $ABCD$ з вершинами у точках $A(3;0),\quad B(-1;2),\quad C(-5;3),\quad D(3;-1)$.
24. Встановити вид чотирикутника $ABCD$ з вершинами у точках $A(1;-2),\quad B(1;4),\quad C(-4;1),\quad D(-5;-5)$.
25. Відрізок, обмежений точками $A(2;-7;9),\ B(8;11;-3)$, поділили точками C і D у відношенні 1:2:3. Знайти координати цих точок.
26. Знайти довжину медіани трикутника ABC, з вершинами у точках $A(2;-3;0), B(-2;-11;5)$, $C(6;-1;3)$, проведеної з вершини A.
27. Визначити відношення λ, в якому кожна точка A(1,-1), B(3,3), C(4,5) ділить відрізок, обмежений двома іншими точками.
28. Знайти координати кінців A та B відрізка, який точками $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ поділяється на три рівні частини.
29. На промені, який виходить з початку координат і проходить через точку M(4,3), знайти координати точки P відстань від якої до початку координат дорівнює 9.
30. Знайти точку перетину діагоналей AC та BD чотирикутника $ABCD$ з вершинами $A(2;-2), B(2;5), C(-1;4), D(-2;-1)$.
31. Точки $M(1;-1) N(-1;4)$ та $P(-2;\ 2)$ - середини сторін трикутника. Визначити його вершини.
32. Відрізок, обмежений точками $A(1;-3)$ і $B(4;\ 3)$, поділено на три рівні частини. Визначити координати точок поділу C і D.
33. Задані вершини трикутника $A(2; -5)$, $B(1;-2)$, $C(4; 7)$. Знайти точку перетину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B із стороною AC.

34. Задані три точки $A(-2;-11)$, $B(1;-2)$ і $C(3;4)$, які лежать на одній прямій. Визначити відношення λ, в якому кожна з них ділить відрізок, обмежений двома іншими.

35. Визначити координати кінців A та B відрізка, який точками $P(2; 2)$ і $Q(l; 5)$ розділений на три рівні частини.

36. Пряма проходить через точки $A(5;2)$ и $B(-4;-7)$. Зайти точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

Відповіді:

1. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. $A(a,0)$, $B(0;b)$, $C(-a;b)$, $D(-a;0)$, $E(0;-b)$, $F(a;-b)$.

3. $A(0,0)$, $B(1;0)$, $C(k;1)$, $D(0;1)$, $P\left(\frac{k}{k+1};\frac{1}{k+1}\right)$.

4. $ABCD$ - паралелограм.

5. $ABCD$ - трапеція.

6. $D(-3;12)$.

7. $C(-1-\sqrt{3};3+2\sqrt{3})$ або $C(-1+\sqrt{3};3-2\sqrt{3})$.

8. $A(-2,1)$, $B(3;3)$, $C(5;-2)$, $D(0;-4)$, або $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C(1;8)$, $D(-4;6)$.

9. а) $S=137$ кв. од; б) $S=34$ кв. од.

10. $AC=13$; $BD=15$.

11. $S=150$ кв. од.

12. $S=40$ кв. од.

16. $B(-1;-3)$ і $D(0;4)$.

17. $A(2,-1)$, $B(-1;-3)$, $C(-5;0)$, $D(-2;-4)$, або $A(2;-1)$, $B(-1;-3)$, $C(3;6)$, $D(6;2)$.

18. $O(8;0)$ або $O(-1;3\sqrt{3})$.

19. $P(1;0)$ або $P(6;0)$.

20. $O(2;2)$ і $r=2$ або $O(10;10)$ і $r=10$.

21. $O(5;-5)$ або $O(-3;-5)$.

22. $O(3;-2)$ і $r=10$.

23. $ABCD$ - трапеція.

24. $ABCD$ - довільний чотирикутник у якого нема паралельних сторін.

25. $C(3;-4;7)$, $D(5;2;3)$.

26. $|AM|=5$.

27. $DA:AC=-2:3$, $AB:BC=2:1$, $AC:CB=-3:1$.

28. $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$.

29. $P\left(\frac{27}{5};\frac{36}{5}\right)$.

30. $O(0;2)$ - точка перетину діагоналей.

31. $A(0;-3)$, $B(2;1)$ і $C(-4,7)$.

32. $C(2,-1)$ і $D(3,1)$.

33. $L\left(\frac{5}{2},-2\right)$.

34. $t_A=-\frac{3}{5}$, $t_B=\frac{3}{2}$ і $t_C=-\frac{5}{2}$.

35. $A(3;-1)$, $B(0;8)$.

36. $P(0;-3)$.

Практичне заняття № 4. Скалярний добуток векторів.

Основні теоретичні факти.

Розглянемо на площині або в просторі два довільні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Нехай $\overrightarrow{KA}=\vec{a}, \overrightarrow{KB}=\vec{b}$. ***Кутом*** α ***між векторами*** $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається кут між променями KA та KB. При цьому з двох кутів, які утворюються, вибирається той, який не перевищує π, тобто $\alpha \in [0, \pi]$ (рис. 1).

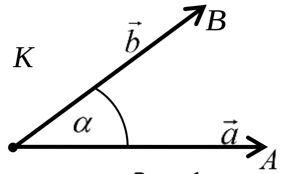

Рис. 1

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$. Позначатимемо скалярний добуток символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$. Таким чином,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha .$$

Використовуються наступні властивості цієї операції.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність скалярного множення).

2. $\vec{a}\cdot\vec{\theta}=0$.

3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ (вираз $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ називають ***скалярним квадратом вектора*** $\vec{a}$).

4. Два ненульові вектори ортогональні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток рівний нулю. (Два вектори називають ***ортогональними*** та записують $\vec{a}\perp\vec{b}$, якщо вони утворюють кут $\frac{\pi}{2}$).

5. Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ гострий. Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то кут між векторами тупий. Вірне також обернене твердження.

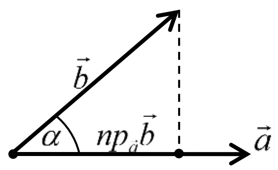

Рис. 2

Число $\left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$ називають ***проекцією вектора*** $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ та позначають ïð$_{\vec{a}}\vec{b}$ (рис. 2). Тобто $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = |b|\cos\alpha$

6. $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|a|}$

7. Нехай задані вектори $\vec{a}(a_1,\, a_2,\, a_3),\, \vec{b}(b_1,\, b_2,\, b_3)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

8. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (дистрибутивність скалярного множення).

9. $(t\vec{a})\vec{b} = \vec{a}\left(t\vec{b}\right) = t\left(\vec{a}\vec{b}\right)$ для довільного числового множника t.

10. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

11. Проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ обчислюється за формулою

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ можна обчислити, користуючись співвідношенням

$$\alpha = \arccos\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

Розглянуті властивості та одержані співвідношення мають місце також у випадку, коли кожний із векторів задається двома координатами. Зокрема, якщо задані вектори $\vec{a}(a_1,\, a_2),\, \vec{b}(b_1,\, b_2)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2, \qquad \alpha = \arccos\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \qquad \text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{b} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *У прямокутному трикутнику з катетами* a *та* b *обчислити кут* γ *між медіаною, проведеною до гіпотенузи, та бісектрисою прямого кута.*

Розв'язання. Нехай у прямокутному трикутнику CAB $CA = a,\ CB = b,\ CM$ - медіана, проведена до гіпотенузи. Зафіксуємо ортонормований базис $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$, вибравши вектор $\vec{i}$ на промені CA та вектор $\vec{j}$ на промені CB. Тоді, оскільки $\vec{CA} = (a,\ 0),\ \vec{CB} = (0,\ b)$, то $2\vec{CM} = (a,\ b)$. Виберемо один із векторів, які задають напрям бісектриси прямого кута, наприклад, вектор $\vec{l} = (1,\ 1)$. Скориставшись формулою (1), дістаємо

$$\cos\gamma = \frac{2\vec{CM}\cdot\vec{l}}{\left|2\vec{CM}\right|\cdot\left|\vec{l}\right|} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}}\ .$$

Відповідь. $\gamma = \arccos\dfrac{a+b}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}}$.

Задача 2. *Знайти ортогональну проекцію відрізка з кінцями у точках* $A(2,\ 1,\ 4),\ B(4,\ -3,\ 2)$ *на пряму, яка проходить через точки* $M(5,\ 0,\ 2),\ N(3,\ -1,\ 0)$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{AB}(2,\ -4,\ -2)$ та $\vec{MN}(-2,\ -1,\ -2)$ і позначимо довжину шуканої проекції через l. Тоді, скориставшись рівністю (3), дістаємо

$$l = \left|\text{пр}_{\overline{MN}}\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \frac{|2\cdot(-2)+(-4)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{4}{3}\,.$$

Відповідь. $\dfrac{4}{3}$.

Задача 3. *Обчислити кут між мимобіжними діагоналлю куба та діагоналлю його бічної грані.*

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - заданий куб. Знайдемо кут між його діагоналлю AC_1 та діагоналлю бічної грані BD. Для цього введемо в розгляд прямокутну декартову систему координат, вибравши точку A початком координат, а промені AB, AD, AA_1 вибравши за додатні напрямки осей відповідно x, y та z. Нехай ребро куба рівне 1. Тоді дістаємо $A(0, 0, 0)$, $C_1(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, звідки $\vec{AC_1} = (1, 1, 1), \vec{BD} = (-1, 1, 0)$. Якщо шуканий кут позначити через α

то $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AC_1} \cdot \vec{BD}}{\left|\vec{AC_1}\right| \cdot \left|\vec{BD}\right|} = \dfrac{0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 0$.

Відповідь. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 4. (Теорема Стюарта). *Сторони трикутника рівні* a, b *та* c *Обчислити довжину відрізка, який сполучає вершину трикутника із точкою, вибраною на стороні* c, *знаючи, що ця точка ділить сторону на відрізки з довжинами* c_1 *та* c_2.

Розв'язання. Нехай у трикутнику CAB $CA = a, CB = b, AB = c$, $AL = c_1$, $LB = c_2$ $c = c_1 + c_2$, $CL = l$ - шуканий відрізок (рис. 3).

Очевидно, що $\vec{CA} = \vec{CL} + \vec{LA}, \ \vec{CB} = \vec{CL} + \vec{LB}$. Тоді

$$\vec{CA}^{\,2} = (\vec{CL} + \vec{LA})^2, \ \vec{CB}^{\,2} = (\vec{CL} + \vec{LB})^2,$$

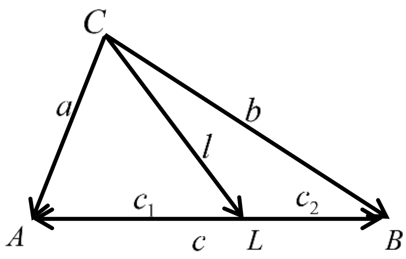

Рис. 3

звідки

$$a^2 = l^2 + 2\vec{CL} \cdot \vec{LA} + c_1^2, \text{ і } b^2 = l^2 + 2\vec{CL} \cdot \vec{LB} + c_2^2.$$

Помноживши першу з одержаних рівностей на c_2, а другу – на c_1 та додавши одержані співвідношення, дістаємо

$$a^2c_2 + b^2c_1 = l^2(c_1 + c_2) + 2\vec{CL} \cdot \left(c_2\,\vec{LA} + c_1\,\vec{LB}\right) + c_1c_2(c_1 + c_2) = l^2c + cc_1c_2,$$

оскільки вираз $c_2 \cdot \vec{LA} + c_1 \cdot \vec{LB}$ рівний $\vec{\theta}$, як сума двох векторів із однаковими довжинами та протилежними напрямками. Рівність

$$l^2 c = a^2 c_2 + b^2 c_1 - c c_1 c_2$$

виражає зміст теореми Стюарта та дає відповідь на поставлену задачу.

Задача 5. *Знайти ортогональну проекцію точки* $M(6,\ -4)$ *на пряму, яка проходить через точки* $A(3,\ 1),\ B(0,\ -2)$.

Розв'язання. Нехай шукана точка $H(x,\ y)$. Векторну рівність

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{AB}$$

помножимо скалярно на вектор $\overrightarrow{AB}$. Оскільки $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MH}$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$. Тому $\lambda = -\dfrac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}$. Маємо $\overrightarrow{MA} = (-3,\ 5),\ \overrightarrow{AB} = (-3,\ -3)$, отже, $\lambda = -\dfrac{-6}{18} = \dfrac{1}{3}$ і $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-3,\ 5) + (-1,\ -1) = (-4,\ 4)$. Із рівності $\overrightarrow{MH} = (x-6,\ y+4) = (-4,\ 4)$ остаточно знаходимо $x = 2,\ y = 0$.

Відповідь. $H(2,\ 0)$.

Задача 6. *Знайти координати основи висоти* AH *тетраедра* $ABCD$, *вершини якого знаходяться в точках* $A(2,\ -4,\ -5)$, $B(-1,\ -3,\ 4)$, $C(5,\ 5,\ -1)$ *та* $D(1,\ -2,\ 2)$.

Розв'язання. У векторній рівності $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$ замінимо вектор $\overrightarrow{BH}$ лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$, де коефіцієнти $\alpha,\ \beta$ підлягають визначенню.

Помножимо одержану рівність скалярно на вектори $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{BD}$. Оскільки $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BD}$, то $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Крім цього маємо $\overrightarrow{AB} = (-3,\ 1,\ 9)$, $\overrightarrow{BC} = (6,\ 8,\ -5)$, $\overrightarrow{BD} = (2,\ 1,\ -2)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\tilde{N}} = -55$, $\overrightarrow{B\tilde{N}} \cdot \overrightarrow{B\tilde{N}} = 125$, $\overrightarrow{B\tilde{N}} \cdot \overrightarrow{BD} = 30$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -23$ $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = 9$. Отримуємо систему рівнянь $\begin{cases} -55 + 125\alpha + 30\beta = 0, \\ -23 + 30\alpha + 9\beta = 0 \end{cases}$, звідки знаходимо $\alpha=-\frac{13}{15}$, $\beta=\frac{49}{9}$. Таким чином, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}-\frac{13}{15}\overrightarrow{BC}+\frac{49}{9}\overrightarrow{BD}$, в координатній формі

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{45}\times\big(45\times(-3;1;9)-39\times(6;8;-5)+245\times(2;1;-2)\big)=$$
$$\frac{11}{45}(11;-2;10).$$

Нехай шукана точка $H(x,\ y,\ z)$. Тоді $\overrightarrow{AH}=(x-2;y+4;z+5)=\frac{11}{45}(11;-2;10)$, звідки $x=\frac{211}{45}$, $y=-\frac{202}{45}$, $z=-\frac{23}{9}$.

Задачі для самостійного розв’язання.

1. Відомі кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, який дорівнює 120°, і довжини векторів $|\vec{a}|=3$ та $|\vec{b}|=4$. Обчислити: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)$.
2. Знайти модуль вектора $\vec{r}=2\vec{m}-\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ - одиничні вектори, кут між якими дорівнює $\pi/4$.
3. Обчислити скалярний добуток $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо $\bar{a}=\bar{p}+2\bar{q}$, $\bar{b}=3\bar{p}-\bar{q}$, $|\bar{p}|=1$, $|\bar{q}|=2$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{3}$.
4. Обчислити скалярний добуток $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо $\bar{a}=\bar{p}-3\bar{q}$, $\bar{b}=\bar{p}+2\bar{q}$, $|\bar{p}|=3$, $|\bar{q}|=1$, $(\widehat{\bar{p},\bar{q}})=\frac{\pi}{2}$.
5. Дано $\bar{a}=(2\,;x;-3)$, i $\bar{b}=(x\,;-3;-5)$ При яких x $\bar{a}\cdot\bar{b}=-10$?
6. Дано вектори $\bar{a}=(1;-2;3)$, $\bar{b}=(3;0;-1)$. Обчислити $(\bar{a}+2\bar{b})(\bar{b}-3\bar{a})$.
7. Дано вектори $\bar{a}=(2;-1;4)$, $\bar{b}=(3;-1;6)$. Обчислити $(2\bar{a}-3\bar{b})(3\bar{a}-2\bar{b})$.
8. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, де $A(0;2;-4)$, $B(8;2;2)$, C (6;2;4).
9. Знайти проекцію вектора $\bar{a}=(2;-1;2)$ на вектор $\bar{b}$, якщо кут між векторами $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{3}$.

10. При яких значеннях t вектори $\overline{c}=(t-5;2;4),\ i\ \overline{d}=(t;4t-1;-2)$ будуть перпендикулярними ?

11. Дано $\overline{a}=(3;-2),\ i\ \overline{b}=(5;2)$. Знайти вектор $\overline{c}$ якщо $\overline{a}\perp\overline{c},\ \ \overline{b}\cdot\overline{c}=16.$

12. Обчислити натуральне значення x, при якому вектори $\overline{a}=(x;1;3),\ i\ \overline{b}=(x;-x;-2)$ будуть перпендикулярними.

13. Знайти вектор $\overline{a}$, колінеарний вектору $\overline{b}=(2;-5;3),$ якщо $\overline{a}\cdot\overline{b}=76.$

14. Знайти другу координату вектора $\overline{c}$, колінеарного до вектора $\overline{a}=(2;1;3),$ і такого що $\overline{a}\cdot\overline{c}=14$.

15. Обчислити квадрат довжини вектора $\overline{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\overline{c}=(4;-2;2)$ і скалярний добуток $\overline{a}\cdot\overline{c}=12.$

16. Обчислити квадрат довжини вектора $\overline{a}$, якщо відомо, що його третя координата дорівнює 2 і він перпендикулярний до векторів $\overline{c}=(4;-1;-5),\ i\ \overline{d}=(2;-1;-4)$.

17. Визначити першу координату вектора $\overline{c}$, колінеарного вектору $\overline{a}=(2;2;1),$ якщо $|\overline{c}|=9$ і він утворює тупий кут з віссю $OY.$

18. Встановіть вид трикутника з вершинами в точках $A(2;-3;-4)$, $B(1;5;2)$ і $C(-3;1;-3)$.

19. Знайти проекцію вектора $\overline{AB}(-1;8;6)$, на вектор $\overrightarrow{AC}(-5;4;1)$.

20. Задано точки $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$. Довести, що $ABCD$ -- прямокутник.

21. У квадраті з однієї вершини проведено дві прямі, які ділять протилежні сторони пополам. Знайти кут між цими прямими.

22. Обчислити кут між діагоналями двох граней куба, які виходять з однієї вершини.

23. Задано координати вершин $A(0;0;5)$, $B(1;1;1)$, $C(-1;2;3)$ трикутника ABC. Обчислити його кути.

24. Доведіть теорему Піфагора, використовуючи властивості скалярного добутку векторів.

25. Доведіть теорему: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін, тобто, що для довільного паралелограма $ABCD$ виконується рівність $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

26. У трикутнику із сторонами $a,\ b$ та кутом між ними α довжину медіани, проведеної до третьої сторони, можна обчислити за формулою $m = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha}$. Довести.

27. У рівнобедреному трикутнику ABC, з основою AC медіани AA_1 та CC_1, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти кут при вершині.

28. Дано $ABCD$ - прямокутник. Точка M - довільна точка простору. Довести, що:

    а) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$;

    б) $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$.

29. Знайти ортогональну проекцію точки $M(3,\ 1)$ на пряму, яка проходить через точки $A(6,\ -4)$, $B(0,\ 2)$.

30. Знайти ортогональну проекцію точки $M(2,\ 2,\ -2)$ на площину, яка проходить через точки $A(3,\ 1,\ 4)$, $B(5,\ -2,\ 3)$ та $C(1,\ 1,\ 2)$.

Відповіді до задач:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$, $\vec{a}^{\,2} = 9$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 37$, $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right) = -61$.
2. $|\vec{r}| = \sqrt{5-2\sqrt{2}}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3$.
5. $x = 25$.
6. $(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{b}-3\vec{a}) = -22$.
7. $(2\vec{a}-3\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b}) = -1$.
8. $\cos A = 0,96$.

9. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{3}{2}$.

10. $t = -5$ або $t = 2$.

11. $\vec{c} = (2;3)$.

12. $x = 3$.

13. $\vec{a} = (4;-10;6)$.

14. $\vec{c} = \vec{a} = (2;1;3)$.

15. $\vec{a}^2 = 6$.

16. $|\vec{a}|^2 = 41$.

17. Абсциса вектора $x = -6$, а його координати $\vec{c} = (-6;-6;-3)$.

18. Трикутник ABC тупокутний.

19. $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{43}{\sqrt{42}}$.

21. $\arccos\frac{4}{5}$.

22. 60°.

23. $\angle A = \angle B = 45^\circ$ і $\angle C = 90^\circ$.

27. $\arccos\frac{4}{5}$.

29. $H(2,0)$.

30. $H(0;0;0)$.

Практичне заняття № 5. Векторний добуток двох векторів.

Основні теоретичні факти.

Нехай задана впорядкована трійка не компланарних векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, відкладених із спільного початку. Із кінця третього вектора розглядається поворот першого з них до суміщення з напрямком другого вектора найкоротшим шляхом (тобто на кут, який не перевищує π). Якщо цей поворот здійснюється за годинниковою стрілкою, то кажуть, що це ***вліво орієнтована*** трійка векторів, а коли проти – ***вправо орієнтована*** трійка. На рисунку $1_а$ зображена вліво орієнтована, а на рисунку $1_б$ – вправо орієнтована трійка векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

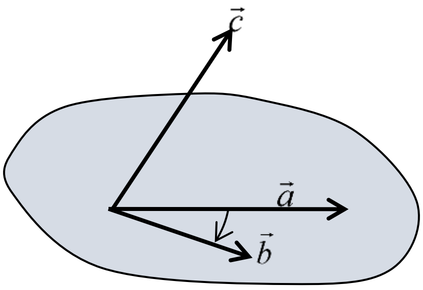

Рис. $1_а$

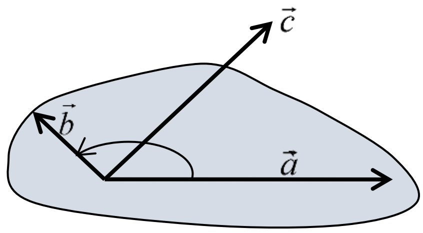

Рис. $1_б$

Дві впорядковані трійки векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ та $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1\}$ називаються однаково орієнтованими, якщо вони одночасно вправо або вліво орієнтовані.

Вектор $\vec{c}$ називається ***векторним добутком*** векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо він задовольняє наступні умови:

1) вектор $\vec{c}$ ортогональний до кожного із векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, де α - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) трійки векторів $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ та $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ однаково орієнтовані (рис. 2).

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають символом $[\vec{a}\ \vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$.

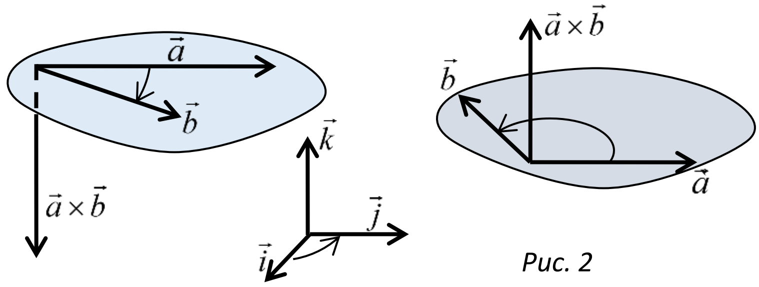

Рис. 2

Нехай у базисі $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами: $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Для одержаного вектора часто вибирають іншу, більш зручну для запам’ятання форму запису у виді визначника

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

У цьому випадку координати вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ обчислюють, як алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка.

Векторний добуток володіє наступними властивостями:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (антикомутативність векторного множення).

2. Довжина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

3. Векторний добуток двох ненульових векторів рівний нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.

4. Для векторів ортонормованого базису виконуються рівності:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{\Theta},\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}.$$

5. $(t\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(t\vec{b}\right) = t\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

6. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}$ (дистрибутивність векторного множення).

7. Площа трикутника, вершини якого розташовані у точках $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B(b_1,\, b_2,\, b_3)$, $C(c_1,\, c_2,\, c_3)$, обчислюється за допомогою співвідношення

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & b_3-a_3\end{vmatrix}.$$

Наслідок. Якщо вершини трикутника знаходяться у точках $A(a_1,\, a_2)$, $B(b_1,\, b_2)$, $C(c_1,\, c_2)$, то площу трикутника можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{vmatrix}.$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{n}=2\vec{a}+5\vec{b}$ та $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}$, знаючи, що $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$, а кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ рівний $\frac{\pi}{6}$.*

Розв'язання. На основі доведених властивостей дістаємо $\vec{c}\times\vec{d}=\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)\times\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)= \ =8\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times\vec{b}+20\vec{b}\times\vec{a}-5\vec{b}\times\vec{b}=-22\vec{a}\times\vec{b}$. Тоді

$$S=\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|=\left|-22\vec{a}\times\vec{b}\right|==22|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{6}=22\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=66.$$

Відповідь. 66.

Задача 2. *Обчислити відстань ρ від початку координат до прямої, яка проходить через точки $M(5,\, 0,\, 2)$, $N(3,\, -1,\, 0)$.*

Розв'язання. Шукану відстань знайдемо як висоту трикутника OMN, опущену із вершини O.

Для цього спочатку обчислимо площу S трикутника OMN.

Використовуючи співвідношення (7), дістаємо

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|2\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{65}\,.$$

Тепер, оскільки $MN = \sqrt{4+1+4} = 3$, то

$$\rho = \frac{2S}{MN} = \frac{\sqrt{65}}{3}\,.$$

Відповідь. $\rho = \dfrac{\sqrt{65}}{3}$.

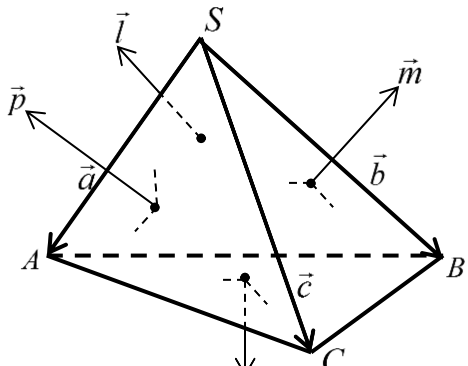

Рис. 3

Задача 3. *У трикутній піраміді перпендикулярно до кожної грані назовні відносно піраміди проведено вектори, довжина кожного з яких дорівнює площі відповідної грані. Обчислити суму даних векторів.*

Розв'язання. Нехай $SABC$ - задана піраміда, $\overrightarrow{SA} = \vec{a},\ \overrightarrow{SB} = \vec{b},\ \overrightarrow{SC} = \vec{c}$, а також $\vec{l},\ \vec{m},\ \vec{n},\ \vec{p}$ - вектори, які задовольняють умову задачі та проведені до граней $SAB,\ SBC,\ ABC,\ SAC$ відповідно (рис. 3).

Обчислимо вектори, як половини векторних добутків векторів, напрямлених по ребрах піраміди. Орієнтацію трійок векторів вибираємо праву. Дістаємо $\vec{l} = \frac{1}{2}\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{c}\times\vec{b}$, і

$$\vec{n} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \tfrac{1}{2}(\vec{c}\times\vec{a} - \vec{c}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a})\,.$$

Очевидно, що сума знайдених векторів дорівнює $\vec{\theta}$.

Відповідь. $\vec{\theta}$

Задача 4. *Трикутна піраміда* $M_1M_2M_3M_4$ *задана вершинами* $M_1(0,\ 2,\ 4)$, $M_2(1,\ 2,\ -3)$, $M_3(5,\ 2,\ 0)$ *та* $M_4(3,\ 4,\ -2)$. *Знайти кут нахилу ребра* M_1M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$.

Розв'язання. Спроектуємо точку M_4 на площину $M_1M_2M_3$ (на рис. 4 її позначено через H) Для визначення шуканого кута φ, тобто кута між прямими

M_1M_4 та M_1H, спочатку знайдемо кут θ між векторами $\overrightarrow{M_1M_4} = (3,\ 2,\ -6)$ та $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

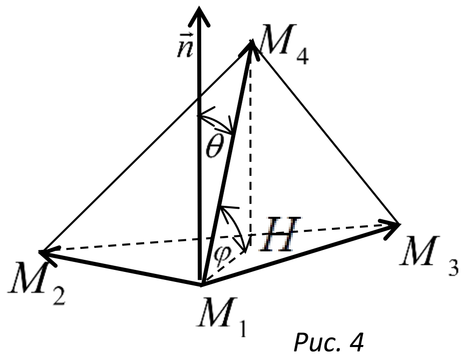

Рис. 4

Дістаємо $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -31\vec{j}$, $\overrightarrow{M_1M_4} \cdot \vec{n} = -62$, тому

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_4} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{M_1M_4}\right| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{-62}{7 \cdot 31} = -\dfrac{2}{7}$. Оскільки кут θ тупий, то

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} = \arccos\left(-\frac{2}{7}\right) - \frac{\pi}{2} = \pi - \arccos\frac{2}{7} - \frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{2}{7}.$$

Відповідь. $\varphi = \arcsin\dfrac{2}{7}$.

Задача 5. *Встановити, опуклим чи ні є чотирикутник з вершинами у точках* $M_1(0,\ 4)$ $M_2(1,\ -3)$, $M_3(5,\ 0)$ *та* $M_4(3,\ -2)$?

Розв'язання. Обчислимо площі 4 трикутників із вершинами у 3-ох із 4-ох заданих точок. Знаходимо:

$$2S_1 = 2S_{\Delta M_2M_3M_4} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad 2S_2 = 2S_{\Delta M_1M_3M_4} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$2S_3 = 2S_{\Delta M_2M_1M_4} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 15, \qquad 2S_4 = 2S_{\Delta M_2M_3M_1} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 31.$$

Оскільки виконується рівність $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$, то чотирикутник є опуклим. Для не опуклого чотирикутника одна із точок знаходься б у середині трикутника, утвореного трьома іншими точками, і тоді найбільша із знайдених площ дорівнювала б сумі трьох інших площ.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Спростити вирази:

а) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$;

б) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b})$;

в) $\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\times\vec{a}$.

2. Довести, що $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.
3. Знайти площу трикутника ABC з вершинами у точках:

а) $A(4,\ 2,\ 3)$, $B(5,\ 7,\ 0)$, $C(2,\ 8,\ -1)$;

б) $A(-7;3;2),\ B(-3;-2;2),\ C(-7;7;-1)$.

4. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}$ та $\vec{b}=2\vec{m}+3\vec{n}$, де $\vec{m},\vec{n}$ - одиничні вектори, які утворюють кут 30°.
5. Знайти висоту трикутника ABC, опущену з вершини C, якщо вершини трикутника у точках $A(1,\ 2,\ -3)$, $B(5,\ 2,\ 0)$ і $C(3,\ 2,\ -2)$
6. Обчислити площу паралелограма побудованого на векторах:

а) $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k},\quad \bar{b}=\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}.$

б) $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k},\quad \bar{b}=3\bar{i}+2\bar{k}.$

7. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{c}=\bar{a}+2\bar{b},\quad \bar{d}=3\bar{a}-\bar{b},$ якщо $\left|\bar{a}\right|=1,\ \left|\bar{b}\right|=2,\ (\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{\pi}{6}.$
8. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{c}=\bar{a}-3\bar{b},\quad \bar{d}=\bar{a}+2\bar{b},$ якщо $\left|\bar{a}\right|=2,\left|\bar{b}\right|=3,(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{\pi}{2}.$
9. Знайти довжину висоти трикутника ABC з вершинами у точках $A(1;2;0),\ B(3;0;3),\ C(5;2;6)$, проведеної з вершини B.
10. У прямокутному паралелепіпеді ребра, що виходять з однієї вершини відповідно дорівнюють a, b та c. Знайти площу перерізу, який проходить через середини цих ребер.

11. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}$ і $\vec{q}$, де $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{3}$.

12. Встановити, опуклим чи ні є чотирикутник з вершинами у точках $M_1(0,4)$, $M_2(1,-3)$, $M_3(5,0)$ та $M_4(3,-2)$?

Відповіді до задач:

1. а) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{b}$;

   б) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b})=4\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{c}+2\vec{b}\times\vec{c}$;

   в) $(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$.

3. а) $S=3\sqrt{10}$ кв.од;

   б) $S=12.5$ кв.од.

4. $S=3.5$ кв.од.

5. $CH=\frac{2}{5}$.

6. а) $S=\sqrt{42}$ кв.од;

   б) $S=\sqrt{38}$ кв.од.

7. $S=3.5$ кв.од.

8. $S=15$ кв.од.

9. $BH=2$.

10. $S=\frac{1}{8}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$

11. $S=2\sqrt{3}$ кв.од

12. Скористайтеся твердженням: якщо чотирикутник $ABCD$ опуклий, то має місце рівність $S_{ABC}+S_{ACD}=S_{BCD}+S_{BAD}$. Як зміниться рівність у випадку не опуклого чотирикутника?

Практичне заняття № 6. Мішаний добуток трьох векторів.

Основні теоретичні факти.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор, який є векторним добутком векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Позначають мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ символом $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$. Отже, згідно з означенням, $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$. Очевидно, що мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ є число. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ задані своїми координатами: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ Тоді

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Виділимо деякі основні властивості мішаного добутку:

1. Циклічна перестановка не змінює величини мішаного добутку, тобто виконуються рівності $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right) = \left(\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right)$. ***Циклічною перестановкою*** (перестановкою по колу) скінченої впорядкованої множини елементів називають перестановку, коли кожний елемент займає місце наступного, а останній – першого, або навпаки: кожний елемент займає місце попереднього, а перший– останнього.

2. $\left((t\vec{a})\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{a}(t\vec{b})\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\vec{b}(t\vec{c})\right) = t\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, де t - довільне число.

3. $\left((\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{a}_1\vec{b}\vec{c}\right) + \left(\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}\right)$.

4. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів.

5. Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток рівний нулю.

6. Три вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

Зауважимо, що властивість 6 можна використовувати у тих випадках, коли потрібно довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ утворюють базис простору V_3. Для цього достатньо показати, що виконується умова $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

7. Нехай вершини трикутної піраміди розташовані у точках. $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ Тоді її об'єм V можна обчислити за формулою

$$V = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Обчислити об'єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{k} = \vec{a} + 2b - \vec{c}$, $\vec{l} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{m} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$, якщо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$, дорівнює 5.*

Розв'язання. Використавши властивості 2, 3 та 4, дістаємо $\left(\vec{k}\vec{l}\vec{m}\right) =$ $= \left(\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right)\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\left(3\vec{b} - 2\vec{c}\right)\right) = 2\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) - 8\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right) - 6\left(\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right) = 2\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) + 8\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) + 6\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = 16\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Тому $V = \left|\left(\vec{k}\vec{l}\vec{m}\right)\right| = 16\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right| = 16 \cdot 5 = 80$. Зауважимо, що в процесі обчислень були опущені деякі доданки, оскільки вони являють собою мішані добутки компланарних векторів і рівні нулю.

Відповідь. 80.

Задача 2. *Вивести формулу для обчислення висоти* H *трикутної піраміди, побудованої на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *та* $\vec{c}$. *Вважається, що висота проведена з вершини, яка є спільним початком заданих векторів.*

Розв'язання. З шкільного курсу геометрії відомо, що $H=\frac{3V}{S}$, де V - об'єм піраміди, а S - площа її основи. З попереднього $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$. Для обчислення площі основи візьмемо два вектори, які напрямлені по сторонах трикутника, який лежить в основі, нехай $\vec{b}-\vec{a}$ і $\vec{c}-\vec{a}$, та скористаємось векторним добутком. Маємо

$$S=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|.$$

Підставляючи одержані значення V та S у формулу для обчислення висоти, дістаємо шуканий результат.

Відповідь. $H=\dfrac{\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|}$.

Задача 3. *По двох мимобіжних прямих ковзають два відрізки сталої довжини. Як змінюється об'єм трикутної піраміди, яка утворюється після сполучення кінців відрізків?*

Розв'язання. Нехай заданими відрізками є відрізки A_1A_2 та B_1B_2, які після переміщення переходять у рівні відрізки $A_1'A_2'$ та $B_1'B_2'$. Введемо векторні позначення: $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{A_1'A_2'}=\vec{a},\quad \overrightarrow{B_1B_2}=\overrightarrow{B_1'B_2'}=\vec{b},\ \overrightarrow{A_1B_1}=\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1'B_1'}=\vec{c}\,'$. Тоді об'єм піраміди $A_1A_2B_1B_2$ буде $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$, а об'єм піраміди $A_1'A_2'B_1'B_2'$ - $V'=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,'\right)\right|$.

Оскільки $\overrightarrow{A_1'B_1'}=\vec{c}\,'=\overrightarrow{A_1'A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_1'}=x\vec{a}+\vec{c}+y\vec{b}$ (тут x та y - деякі числові коефіцієнти), то

$$V'=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\left(x\vec{a}+\vec{c}+y\vec{b}\right)\right)\right|=\frac{1}{6}\left|x\left(\vec{a}\vec{b}\vec{a}\right)+\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)+y\left(\vec{a}\vec{b}\vec{b}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|=V.$$

Отже, об’єм піраміди не змінюється.

Задачі для самостійного розв’язання.

1. Знайти довжину висоти AH тетраедра $ABCD$, вершини якого знаходяться в точках $A(2,\ -4,\ -5)$, $B(-1,\ -3,\ 4)$, $C(5,\ 5,\ -1)$ та $D(1,\ -2,\ 2)$.

2. Обчислити мішаний добуток векторів
$\overline{a} = (1;1;-2),\quad \overline{b} = (-2;-5;3),\quad \overline{c} = (-1;0;2).$

3. Обчислити мішаний добуток векторів
$\overline{a} = (5;3;4),\quad \overline{b} = (-1;0;-1),\quad \overline{c} = (4;-3;2).$

4. Довести, що вектори $\overline{a} = (2;3;1),\quad \overline{b} = (-1;0;-1),\quad \overline{c} = (2;2;2).$ лінійно незалежні.

5. Обчислити об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k},\quad \overline{b} = \overline{i} + \overline{k},\quad \overline{c} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 7\overline{k}.$

6. Обчислити об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k},\quad \overline{b} = 3\overline{i} + 7\overline{j} + 2\overline{k},\quad \overline{c} = -2\overline{i} - \overline{k}.$

7. Обчислити об’єм піраміди з вершинами у точках $A(3;2;-2),\quad B(1;3;1)$, $C(6;2;0),\quad D(0;2;2)$.

8. Обчислити об’єм піраміди з вершинами у точках $A(1;-1;6),\quad B(-5;-1;0)$ $C(4;0;0),\quad D(2;2;5)$.

9. Паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$ збудовано на векторах $\overrightarrow{AB} = (4,\ 3,\ 0)$, $\overrightarrow{AD} = (2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{AA'} = (-3,\ -2,\ 5)$. Знайти:

а) об’єм паралелепіпеда;

б) площі граней $ABCD$ та $ADD'A'$;

в) довжину висоти;

г) косинус кута $\angle\varphi$ між ребром AB і діагоналлю $B'D$;

д) косинус кута $\angle\gamma$ між гранями $ABCD$ та $ADD'A'$.

10. Для трикутної призми $ABCA'B'C'$, збудованої на векторах $\overline{AA'}=(-3,\ 2,\ 2)$, $\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,\ -1,\ 4)$, знайти:

а) об’єм призми та площі граней ABC та $ABB'A'$;

б) довжину висоти, проведеної з вершини A' до грані ABC;

в) $\cos\varphi$ де φ кут між ребрами AB і $A'C$;

г) $\cos\alpha$ де α кут між основою ABC і гранню $ABB'A'$.

Відповіді до задач:

1. $AH=\dfrac{11}{3}$ лін.од.

2. $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=1$.

3. $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=-9$.

4. Три вектори лінійно залежні, якщо вони компланарні. Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток рівний 0. Оскільки $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=2\neq 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ - лінійно незалежні.

5. $V=20$ куб.од.

6. $V=2$ куб.од.

9. а) об’єм $V=12$ куб.од.;

б) $S_{ABCD}=\sqrt{104}$. і

$S_{ADD'A'}=\sqrt{338}$;

в) $A'H=\dfrac{3\sqrt{26}}{13}$

г) $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{10}}{25}\approx 0.2530$;

д) $\cos\gamma=\dfrac{46\sqrt{13}}{169}\approx 0.9814$.

7. $V=3$ куб.од.

8. $V=25$ куб.од.

10.а) $V=8.5$ куб.од.;

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{17}$ кв.од. і

$S_{ABB'A'}=\sqrt{34}$;

б) $A'H=2\sqrt{17}$;

в) $\cos\varphi=\dfrac{-5\sqrt{19}}{38}$;

г) $\alpha=90^\circ$.

Практичне заняття №7. Контрольна робота №1.

Зразок контрольної роботи №1.

1. Відрізок, обмежений точками $A(2;-7;9)$, $B(8;11;-3)$, поділили точками C і D у відношенні 1:2:3. Знайти координати цих точок.
2. Дано ΔABC, де M - центр ваги трикутника. Вектори $\overrightarrow{MC}$ та $\overrightarrow{MB}$ базисні. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$ через базисні.
3. Дано: $ABCD$ - трапеція ($\overrightarrow{DC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$), точки M і N - середини основ AB та DC, а P - точка перетину діагоналей AC і DB. Нехай вектори:
   - $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$- базисні. Виразити через них вектори $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}$;
   - $\overrightarrow{PB}$ та $\overrightarrow{PA}$ - базисні. Виразити через них вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.
4. У просторі задано вершини трикутної піраміди $ABCD$: $A(2;-4;-5)$, $B(-1;-3;4)$ $C(5;5;-1)$ і $D(1;-2;2)$. Знайти :
   - об'єм піраміди;
   - площі граней;
   - довжину висоти AH;
   - кут нахилу ребра AB до площини BCD;
   - косинус кута $\angle\varphi$ між ребром AB і апофемою BM збудованою на грані ABC;
   - косинус кута $\angle\gamma$ між гранню ABC і BCD.

Практичне заняття №8. Різні способи задання прямої на площині. Дві прямі на площині. Кут між прямими. Умова перпендикулярності.

Основні теоретичні факти.

Розглянемо на координатній площині деяку лінію γ, а також рівняння $f(x, y) = 0$. Домовимось називати дане рівняння ***рівнянням лінії*** γ, якщо кожний розв'язок (x, y) рівняння задає точку на лінії, а також координати кожної точки $M(x, y)$ на лінії γ задовольняють дане рівняння.

В курсі аналітичної геометрії вивчають тільки деякі із ліній, зокрема ті, які найчастіше зустрічаються в практичній діяльності - так звані ***алгебраїчні лінії першого та другого порядків***. Лінію γ називають алгебраїчною, якщо у деякій афінній системі координат її рівняння можна задати у вигляді рівності $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} = 0,$ де a_i - деякі числові коефіцієнти, а показники степенів α_i, β_i - натуральні числа або нулі. Сума $\alpha_i + \beta_i$ називається ***степенем*** відповідного доданка. Найбільший із степенів доданків називають ***порядком лінії***.

Наприклад, рівняння $3x^2 - 5xy^3 + 7y - 8 = 0$ є рівнянням алгебраїчної лінії четвертого порядку. Відомі з шкільного курсу математики коло та парабола є алгебраїчними лініями другого порядку (нагадаємо, що рівняння цих ліній мають вигляд $x^2 + y^2 = R^2,\ y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$).

Рівняння першого степеня $ax + by + c = 0$, в якому хоча б один із коефіцієнтів біля змінних x та y відмінний від нуля (цю умову записують у виді $a^2 + b^2 \neq 0$ або $|a| + |b| \neq 0$) у довільній афінній системі координат на площині ***визначає пряму.***

Розглянемо основні способи задання прямої на площині.

1. Нехай деяка пряма d задана на координатній площині точкою $M_0(x_0, y_0)$ та паралельним до неї вектором $\vec{u}(k,l)$ (рис. 1). Такий вектор називають ***напрямним вектором*** прямої. Тоді її рівняння записується у виді

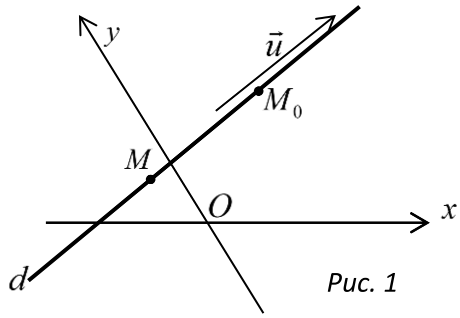

Рис. 1

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l}. \qquad (1)$$

Його називають ***канонічним рівнянням прямої***.

2. Нехай пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$. У цьому випадку рівняння прямої має вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2)$$

Його називають ***рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки***.

3. Прирівнявши відношення у рівності (1) до параметра t, дістаємо $x - x_0 = tk$, $y - y_0 = tl$,

звідки

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt \end{cases}. \qquad (3)$$

Дані рівності називають ***параметричними рівняннями прямої***. Якщо напрямний вектор $\vec{u}(k,l)$ - одиничний, тобто $|\vec{u}| = 1$, то із (3) дістанемо

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{k^2t^2 + l^2t^2} = |t|\sqrt{k^2+l^2} = |t| .$$

У цьому випадку модуль параметра t має цілком конкретний геометричний зміст - це відстань між точками M та M_0 на заданій прямій.

4. Нехай пряма d відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки з довжинами a та b (рис. 2). У цьому випадку рівняння прямої запишеться у виді

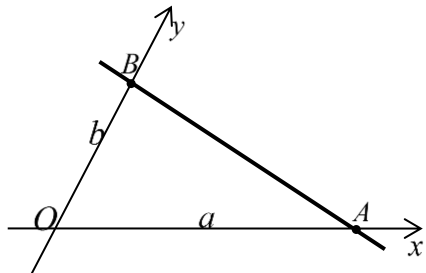

Рис. 2

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4)$$

Дане співвідношення називають ***рівнянням прямої у відрізках на осях***.

5. Нехай система координат прямокутна декартова, а пряма d задається в ній точкою $M_0(x_0, y_0)$ та перпендикулярним до неї вектором $\vec{n}(a;b)$ (рис. 3). Такий вектор називають вектором нормалі до прямої або нормальним вектором. У цьому випадку рівняння прямої має вид

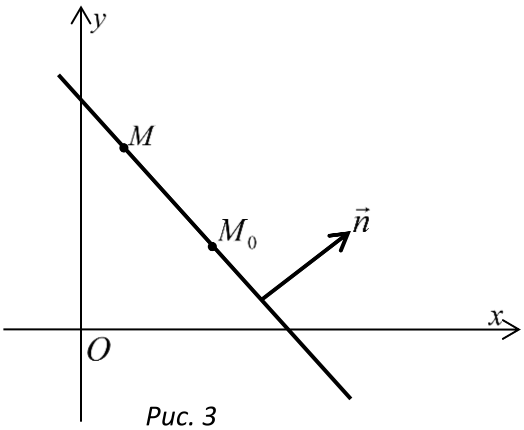

Рис. 3

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0. \qquad (5)$$

Одержане співвідношення називають ***рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до даного напрямку***.

Нехай пряма d утворює з додатнім напрямком осі Ox кут $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ (система координат вважається прямокутною декартовою) та проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 4). Рівняння прямої має вид

$$y = y_0 + k\cdot(x-x_0), \qquad (6)$$

або

$$y = kx + b, \qquad (6')$$

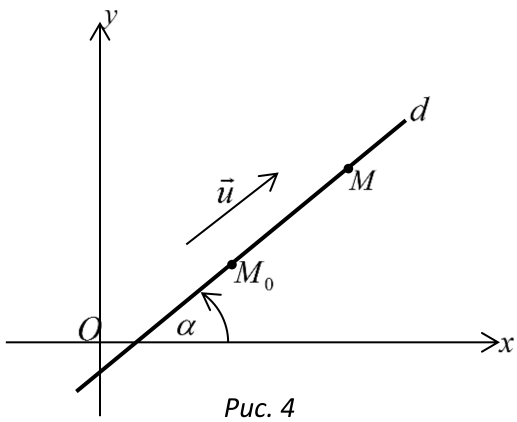

Рис. 4

де $k = tg\alpha,\ b = y_0 - kx_0$. Рівняння (6) або (6′) називають ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом***. Кутовий коефіцієнт k визначає кут нахилу прямої до осі Ox.

Очевидно, що рівняння прямих, які перпендикулярні до осі Ox, у вигляді (6) подати не можна.

Розглянуті нами вище різні способи задання прямої в усіх випадках проводять до рівняння першого степеня. Тому рівняння $ax+by+c=0$ називають ***загальним рівнянням прямої***.

Зауважимо, що у загальному рівнянні прямої $ax+by+c=0$ коефіцієнти біля змінних x та y мають конкретний геометричний зміст: вони визначають координати вектора, який ***паралельний до прямої – це вектор*** $\vec{u}(-b;a)$, а у випадку прямокутної декартової системи координат ***вектор*** $\vec{n}(a,b)$ ***перпендикулярний до прямої***.

Нехай дві прямі d_1 та d_2 задані своїми рівняннями:

$$(d_1):\ a_1x+b_1y+c_1=0,\quad (d_2):\ a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Їхнє взаємне розташування на площині суттєво залежить від напрямних векторів цих прямих: $\vec{u}_1(-b_1,a_1)$ та $\vec{u}_2(-b_2,a_2)$. Зокрема, прямі d_1 та d_2 будуть паралельними тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ колінеарні, тобто, коли виконується рівність $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$. Умова $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ є необхідною і достатньою ***умовою паралельності прямих*** d_1 та d_2. Якщо $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, то прямі d_1 та d_2 перетинаються. Паралельні прямі d_1 та d_2 співпадатимуть, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. Якщо рівняння прямих задано у виді $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$, то умовою паралельності є рівність $k_1=k_2$.

У випадку перетину прямих d_1 та d_2 можна поставити питання про величину кута між прямими, зокрема встановити, в якому випадку прямі будуть перпендикулярними. Систему координат при цьому вважатимемо прямокутною декартовою.

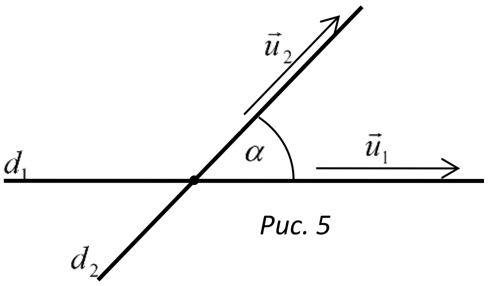

Рис. 5

Очевидно, що кут α між прямими d_1 та d_2 визначається кутом між паралельними до цих прямих векторами $\vec{u}_1(-b_1, a_1)$ та $\vec{u}_2(-b_2, a_2)$ (рис. 5). Тому

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot$$

Зокрема, прямі d_1 та d_2 будуть перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$,

Нехай прямі d_1 та d_2 задані рівняннями $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$ відповідно. Тут k_1

та k_2 – кутові коефіцієнти, тобто тангенси кутів α_1 та α_2, які утворюють прямі з додатнім

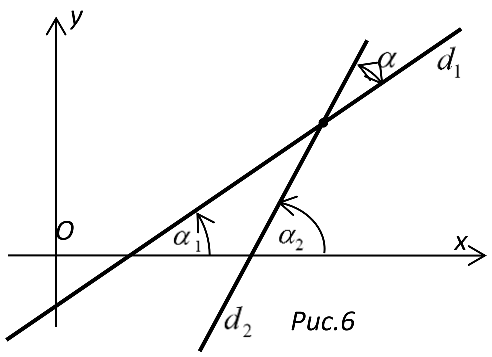

Рис.6

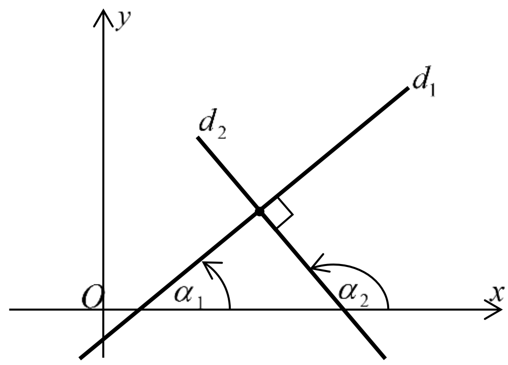

Рис. 7

напрямом осі Ox. Нехай $\alpha_2 > \alpha_1$. Оскільки $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 6), то

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \text{ звідки } \alpha = arctg\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Випадок перпендикулярності прямих d_1 та d_2 характеризується умовою $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$ (рис. 7). Тому $tg\alpha_2 = k_2 = tg(\frac{\pi}{2} + \alpha_1) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\frac{1}{k_1}$, тобто

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Одержана рівність виражає необхідну і достатню ***умову перпендикулярності двох прямих, заданих своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами.***

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Скласти рівняння геометричного місця центрів кіл, які дотикаються до осі Ox та до кола*

$$x^2+(y-4)^2=4.$$

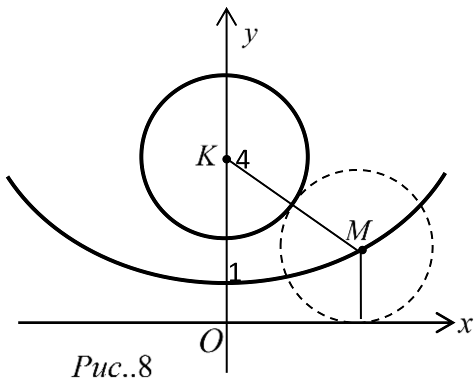

Рис..8

Розв'язання. Нехай точка $M(x,\ y)$ належить шуканій множині точок (рис. 8). Тоді відстань від неї до осі Ox буде рівна $|y|$ а відстань від неї до центра заданого кола (точки $K(0,\ 4)$) дорівнюватиме $\sqrt{x^2+(y-4)^2}$. Оскільки радіус заданого кола рівний 2, а змінного кола $|y|$, то

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|y|+2.$$

Перетворюючи одержане рівняння та враховуючи те, що за змістом задачі $y>0$, дістаємо $x^2+(y-4)^2=y^2+4y+4$, звідки $x^2=12y-12$, або $y=\frac{1}{12}x^2+1$. Із одержаного рівняння робимо висновок, що шукана множина точок утворює параболу.

Відповідь. Парабола $y=\frac{1}{12}x^2+1$.

Задача 2. *Дослідити множину точок площини, відношення відстаней від кожної з яких до заданої точки $A(-2,\ 0)$ та точки $B(4,\ 0)$ дорівнює 2.*

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ належить шуканій множині точок. Тоді відстань від неї до точки $A(-2, 0)$ буде рівна $\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$, а відстань від неї до точки $B(4, 0)$ дорівнюватиме $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$. Оскільки за умовою задачі $AM = 2BM$, то $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, звідки після очевидних перетворень дістаємо рівняння $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$, або $(x-6)^2 + y^2 = 16$.

Відповідь. Шукана множина точок утворює коло з центром у точці $K(6, 0)$ радіус якого 4.

Задача 3. *Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці та діляться нею у відношенні* $2:1$*, рахуючи від вершини.*

Розв'язання. Нехай задано трикутник *OBC*. Виберемо систему координат у вигляді репера $\left\{O, \vec{OB}, \vec{OC}\right\}$ (рис.9). Тоді точки $L\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ та $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ будуть серединами сторін OB, BC та OC відповідно. Складемо рівняння медіан BN та CL, користуючись рівнянням прямої у відрізках на осях. Дістаємо

$$(BN):\ \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1 \text{ або } x + 2y = 1,$$

$$(CL):\ \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1 \quad \text{або} \quad 2x + y = 1.$$

Нехай прямі перетинаються у точці $M(x, y)$. Її координати ми знайдемо із системи

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + y = 1 \end{cases},$$

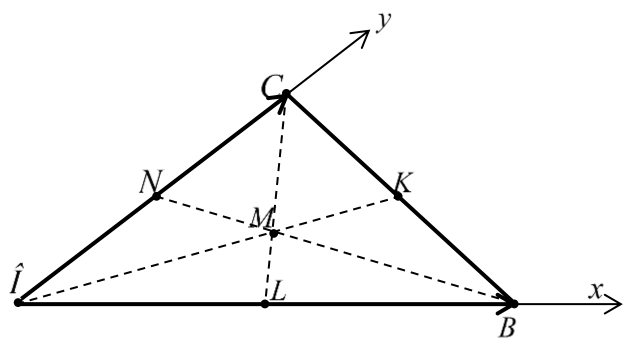

Рис.9

розв'язуючи яку, дістаємо $x = y = \frac{1}{3}$. Рівняння медіани OK можна шукати у виді $y = kx$, оскільки пряма OK проходить через початок координат і не співпадає з віссю Oy. Підставляючи координати точки K, дістаємо $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}k$, тобто $k = 1$. Отже, рівняння медіани OK має вигляд $y = x$. Підставляючи знайдені вище координати точки M в одержане рівняння, переконуємось у тому, що точка M належить медіані OK, тобто медіани перетинаються в одній точці. Порівнюючи координати векторів $\vec{CM}$ та $\vec{ML}$, встановлюємо, що $CM = 2MC$. Аналогічно можна переконатися, що $OM = 2MK$, $BM = 2MN$.

Задача 4*. Знайти ортоцентр (точку перетину висот) трикутника з вершинами у точках* $A(4;2)$, $B(-2;4)$, *та* $C(6;0)$.

Розв'язання. Рівняння висоти AH складемо, знаючи вершину A та знайшовши вектор $\vec{BC}(8,-4)$, який перпендикулярний до висоти AH. Скориставшись співвідношенням (7), дістаємо $8(x-4)-4(y-2)=0$ або $2x-y-6=0.$ Аналогічно, знайшовши вектор $\vec{AC}(2,-2)$, дістаємо рівняння висоти BC: $2(x+2)-2(y-4)=0$ або $x-y+6=0$. Ортоцентр (точку P) знаходимо, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 2x-y-6=0, \\ x-y+6=0. \end{cases}$

Відповідь. $P(12;18)$.

Задача 5. *Знайти сторону квадрата, вписаного у прямокутний трикутник з катетами* a,b, *знаючи, що дві сторони квадрата належать катетам трикутника.*

Розв'язання. Нехай сторона квадрата рівна l. Введемо в розгляд систему координат, вибравши початок координат у вершині прямого кута та спрямувавши координатні осі вздовж катетів трикутника. Скориставшись рівнянням прямої у відрізках на осях, запишемо рівняння гіпотенузи у виді $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$ Оскільки вершина квадрата, яка належить гіпотенузі, має координати (l,l) то виконується рівність $\frac{l}{a}+\frac{l}{b}=1,$ звідки $l(a+b)=ab$.

Відповідь. $l=\dfrac{ab}{a+b}$.

Задача 6. *Довести, що середини паралельних основ трапеції, точка перетину її діагоналей та точка, в якій перетинаються прямі, яким належать бічні сторони, перетинаються в одній точці.*

Доведення. Нехай $ABCD$ - задана трапеція, точки L та M -середини основ AD та BC, K -точка перетину діагоналей, S - точка перетину прямих AB та CD, яким належать бічні сторони (рис. 10). Введемо в розгляд систему координат $\left\{A, \vec{AL}, \vec{AB}\right\}$. Очевидні координати точок: $A(0,\ 0),\ L(1,\ 0),\ B(0,\ 1),\ D(2,\ 0),\ M(k,\ 1),\ C(2k,\ 1)$, де число $k<1$ дорівнює відношенню довжин меншої та більшої основ. Покажемо, що точки K та S належать прямій ML. Рівняння прямої ML знайдемо, користуючись рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки. Дістаємо $(ML)\colon \dfrac{x-1}{k-1}=\dfrac{y}{1}$, або $x-(k-1)y=1$.

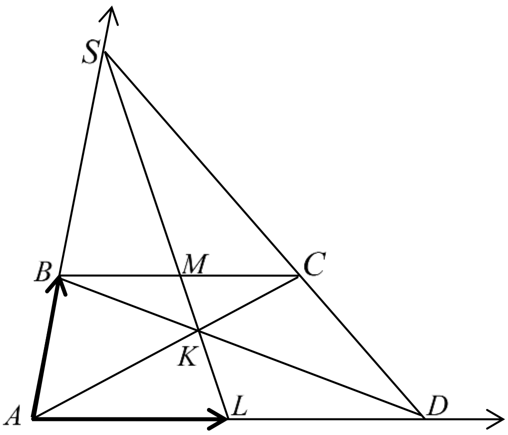

Рис. 10

Для відшукання точки K складемо рівняння діагоналей. Рівняння діагоналі BD запишеться у виді $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}=1$ або $x+2y=2$ (ми використали рівняння прямої у відрізках на осях), а рівняння діагоналі BD шукатимемо у виді $y=px$. Підставляючи координати точки C, отримуємо $1=2pk,\ p=\dfrac{1}{2k}$, звідки $x=2ky$. Із системи рівнянь $\begin{cases} x+2y=2, \\ x=2ky \end{cases}$ знаходимо $y=\dfrac{1}{k+1},\ x=\dfrac{2k}{k+1}$. Знайдені координати точки K задовольняють рівняння прямої ML.

Для відшукання точки S складемо рівняння прямої CD: $\dfrac{x-2}{2k-2}=\dfrac{y}{1}$. Підставляючи в одержане рівняння значення $x=0$, дістаємо $y=\dfrac{1}{1-k}$. Залишається переконатися, що знайдені координати точки S теж задовольняють рівняння прямої ML. Цим самим розв’язання задачі завершується.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Написати рівняння прямої m, що проходить через точку $M(2,1)$ паралельно до вектора $\vec{u}=(3,\ -2)$.
2. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1(13;0),\quad M_2(1;5),\quad M_3(19;8)$. Скласти рівняння сторони трикутника, яка проходить через точку M_2.
3. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1(-3;5),\quad M_2(2;2),\quad M_3(1;-4)$. Скласти рівняння сторони трикутника, яка проходить через точку M_1.
4. Задано координати вершин трикутника ABC: $A(3;2),\quad B(0;2),\quad C(-7;-4)$ Написати рівняння прямої, яка проходить через вершину B паралельно стороні AC.
5. Написати рівняння сторони AD прямокутника $ABCD$, якщо відомо координати вершин $A(3;-1),\quad B(-1;3)$.
6. Написати рівняння сторони BC прямокутника $ABCD$, якщо відомо координати вершин $A(1;2),\quad B(4;-1)$.
7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;-1)$ паралельно бісектрисі координатного кута першої чверті.
8. На прямій $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=1-4t \end{cases}$ знайти точку K, розташовану на відстані 5 від точки $A(5,\ -3)$.
9. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1;3)$ та $B(4;5)$.
10. Знайти ординату точки C, яка лежить на прямій, що проходить через точки $A(-6;-6)$ і $B(-3;-1)$ і має абсцису 3.
11. Вершини трикутника лежать у точках $A(-3;1),\quad B(-1;5),\quad C(2;5)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з вершини C.
12. Вершини трикутника лежать у точках $A(-1;-2),\quad B(7;1),\quad C(3;7)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з вершини A.
13. Написати рівняння прямої m, що проходить через точку $M(2,1)$ перпендикулярно до заданої прямої $3x-2y+4=0$.

14. Вершини трикутника ABC мають координати $A(2;-5)$, $B(5;0)$, $C(-4;2)$. Скласти рівняння висоти проведеної з вершини C.
15. Вершини трикутника ABC мають координати $A(11;0)$, $B(-1;5)$, $C(17;8)$. Скласти рівняння висоти, проведеної з вершини B.
16. Знайти точку перетину висот трикутника з вершинами $A(-4;2)$, $B(2;-5)$, $C(5;0)$.
17. Написати рівняння прямої m, яка проходить через точку $M(1,3)$, паралельно до заданої прямої $x-2y+1=0$.
18. Скласти рівняння прямої p, яка проходить через точку $P(5;2)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.
19. Скласти рівняння прямої d, яка проходить через точку $(-2;5)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $4x+3y-1=0$.
20. Скласти рівняння прямої d, яка проходить через початок координат і утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з прямою $y=2x+5$.
21. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини A трикутника ABC, якщо відомо рівняння сторін трикутника: AB: $2x-y-3=0$, AC: $x+5y-7=0$, BC: $3x-2y+13=0$.
22. Задано координати вершин трикутника ABC: $A(1;-3)$, $B(2;-1)$, $C(-2;4)$. Написати рівняння прямої, яка проходить через вершину C паралельно стороні AB.
23. Дано рівняння сторони AB: $x-3y+10=0$, рівняння діагоналі AC: $x+4y+3=0$ і точку перетину діагоналей $P(0;1)$ ромба $ABCD$. Скласти рівняння сторони CD.
24. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $3x-y+5=0$ і вершину прямого кута (-4;1).
25. Знайти точку, симетричну точці $Q(-2;-1)$. відносно прямої $2x+3y-19=0$.
26. Дано дві точки $A(5;0)$ та $B(1;4)$. Знайти відношення, в якому пряма $x-3y+3=0$ ділить відрізок AB.

27. Дано дві точки $A(5;0)$ та $B(1;4)$. Знайти відношення, в якому пряма $x-y+9=0$ ділить відрізок AB.
28. Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку перетину прямих $3x-2y-7=0$ і $x+3y-6=0$ та відтинає на осі абсцис відрізок довжиною 4.
29. Знайти проекцію точки $A(-8;12)$ на пряму $4x+7y+13=0$.
30. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-4;4)$, $B(4;-12)$ і точку $M(4;2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини C.
31. Скласти рівняння прямої d, яка відтинає на осі ординат відрізок довжиною 2 і проходить паралельно прямій $x-2y+3=0$.
32. Відомо рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0,\quad 2x-5y-34=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x+3y-6=0$. Скласти рівняння іншої діагоналі ромба d_2.
33. Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$, $x+4y-7=0$ та ділить відрізок між точками $A(4;-3)$ і $B(-1;2)$ у відношенні $\lambda=\dfrac{2}{3}$.
34. Дано рівняння сторін чотирикутника $x-y=0,\quad x+3y=0,\quad x-y-4=0,$ $3x+y-12=0$. Скласти рівняння його діагоналей.
35. Довести, що пряма, визначена двома точками з цілочисельним координатами, містить безліч точок із цілочисельним координатами.

Відповіді до задач:

1. Рівняння прямої (m): $2x+3y-7=0.$
2. Рівняння прямої (m_2): $4x-3y+11=0.$
3. Рівняння прямої (m_1): $6x-y+23=0.$
4. Рівняння прямої (b): $3x-5y+10=0.$
5. Рівняння прямої (AD): $x-y-4=0.$
6. Рівняння прямої (BC): $x-y-5=0.$
7. Рівняння прямої (a): $x-y-4=0.$

8. K(8;-7) або K(2;1).

9. Рівняння прямої (AB): $2x-5y+17=0$.

10. $y_c=9$.

11. Рівняння медіани (CM): $x-2y+8=0$.

12. Рівняння медіани (AM): $x-y-1=0$.

13. Рівняння прямої (m): $2x+3y-7=0$.

14. Рівняння висоти (CH): $3x+5y+2=0$.

15. Рівняння висоти (BH): $3x+4y-17=0$.

16. $H\left(\frac{8}{3};-2\right)$.

17. Рівняння прямої (m): $x-2y+5=0$.

18. Рівняння прямої (p): $x-y=3$ або $x+y=7$.

19. Рівняння прямої (d): $7x-y+19=0$ або $x+7y-33=0$.

20. Рівняння прямої (d): $x-3y=0$ або $3x+y=0$.

21. Рівняння висоти (AH): $2x+3y-7=0$.

22. Рівняння прямої (CC'): $2x-y+8=0$.

23. Рівняння прямої (CD): $x-3y-4=0$.

24. Катети трикутника $x-2y+6=0$ і $2x+y+7=0$.

25. $Q'(6;11)$.

26. 1:1.

27. $t=-\frac{7}{3}$.

28. Рівняння прямої $(l_1): x+y-4=0$ або $(l_2): x-7y+4=0$.

29. $O(-12;5)$.

30. $C(8;4)$.

31. Рівняння прямої $(d_1): x-2y+4=0$ або $(d_2): x-2y-4=0$.

32. Рівняння діагоналі $(d_2): 3x-y-23=0$.

33. Рівняння прямої $(l): 2x-y-5=0$.

34. Рівняння діагоналі $(d_1): y=0$ і $(d_2): x=3$.

Практичне заняття №9. Відстань від точки до прямої. Геометричний зміст знаку виразу $ax+by+c$. Пучок прямих.

Основні теоретичні факти.

Нехай на площині задана пряма $d: \ ax+by+c=0$ та деяка точка $M_0(x_0,\ y_0)$. Відстань $\rho(M_0,\ d)$ від точки до прямої обчислюється за допомогою співвідношення

$$\rho(M_0,\ d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

У випадку, коли задані дві паралельні прямі (d_1): $ax+by+c_1=0$ та (d_2): $ax+by+c_2=0$ відстань $\rho(d_1,\ d_2)$ між цими прямими знаходять за формулою

$$\rho(d_1,\ d_2)=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Розглянемо на площині деяку пряму d, задану рівнянням $ax+by+c=0$, та коло γ, задане рівнянням $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Центр кола очевидно знаходиться в точці $K(x_0,y_0)$, а його радіус рівний R. Щоб дати відповідь на питання про взаємне розташування прямої та кола тобто встановити, коло та пряма перетинаються, дотикаються, чи не мають спільних точок, достатньо порівняти радіус кола R із відстанню $\rho(K,\ d)$ від центра кола до прямої. Згідно з попереднім,

$$\rho(K,d)=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тому, якщо $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<R$, то пряма та коло перетинаються.

Якщо $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R$, то коло та пряма дотикаються.

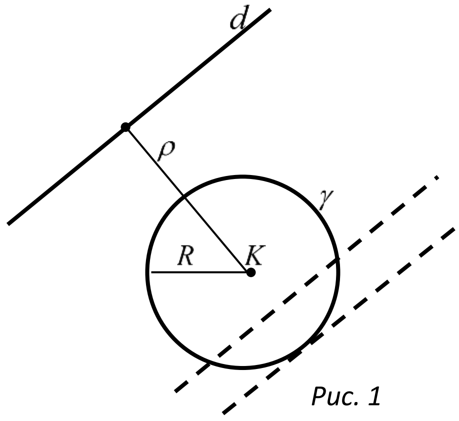

Рис. 1

У випадку, коли $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$, коло та пряма не перетинаються (рис. 1).

Пряма $(d): ax + by + c = 0,$ яка розглядається в деякій афінній системі координат $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, розбиває площину на дві півплощини з границею d. Для всіх точок кожної півплощини і тільки для них виконується одна із нерівностей $ax + by + c > 0$ або $ax + by + c < 0$.

Множину всіх прямих площини, які проходять через спільну точку, називають ***пучком прямих*** з центром у цій точці. Пучок прямих можна задати, вказавши центр пучка, або задавши центр пучка, як точку перетину двох прямих. Рівняння

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{1}$$

де a та b – довільні коефіцієнти, які одночасно не дорівнюють нулю, а x_0, y_0 – фіксовані, задає рівняння пучка з центром в точці $K(x_0, y_0)$. Іноді крім рівняння (1), яке містить два змінні параметри a та b, розглядають рівняння пучка з одним параметром у виді

$$k(x - x_0) + y - y_0 = 0, \tag{2}$$

Або

$$x - x_0 + l(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що рівняння (2) пучка прямих не містить однієї з усіх прямих пучка (1), а саме прямої $x = x_0$, а з пучка (3) не можна одержати пряму $y = y_0$ (в пучку (1) пряму $x = x_0$ отримуємо при $b = 0$, а пряму $y = y_0$ - при $a = 0$).

Нехай центр пучка заданий перетином двох прямих

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

де $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Тоді рівняння пучка можна задати, не розв'язуючи системи (4), тобто не знаходячи його центра. Воно матиме вид

$$a(a_1x + b_1y + c_1) + b(a_2x + b_2y + c_2) = 0\,, \tag{5}$$

де a та b – змінні параметри, які одночасно не дорівнюють нулю. Іноді рівняння пучка (5) записують, користуючись лише одним змінним параметром у виді

$$k(a_1x + b_1y + c_1) + (a_2x + b_2y + c_2) = 0, \tag{6}$$

Або
$$(a_1x + b_1y + c_1) + l(a_2x + b_2y + c_2) = 0\,. \tag{7}$$

Потрібно пам'ятати, що з пучка (7) не можна отримати прямої $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, а із пучка (6) – прямої $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Тому при розв'язуванні задач із застосуванням рівнянь (6) або (7) такі прямі потрібно розглядати окремим випадком.

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Скласти рівняння дотичних до кола* $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$*, проведених з точки* $K(0;-1)$.

Розв'язання. І спосіб. Перетворимо рівняння кола до виду $(x-2)^2 + y^2 = 1$, що дозволяє знайти центр кола - точку $S(2,\,0)$ та його радіус $R = 1$. Складемо рівняння пучка прямих з центром в точці *K*: $ax + b(y+1) = 0$ та підберемо параметри a та b так, щоб прямі із одержаного пучка проходили на відстані 1 від точки S. Користуючись формулою відстані від точки до прямої, дістаємо $\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$, або $a^2 + b^2 = (2a+b)^2$, звідки після спрощень дістаємо $a = 0$ або $3a + 4b = 0$. При $a = 0$ із рівняння пучка дістаємо перший розв'язок : $y = -1$. Одним з ненульових розв'язків рівняння $3a+4b=0$ є $a=4, b=-3$. Це дозволяє отримати другий розв'язок задачі: $4x-3y-3=0$.

Відповідь. $y+1=0;\ 4x-3y-3=0$.

II спосіб. Оскільки $SK=\sqrt{5}$ та $R=1$, то з прямокутного трикутника HKS (рис. 2) відрізок KH дотичної, проведеної з точки K до кола, рівний 2, тому дотичні до кола утворюють з прямою KS кут α, для якого $tg\alpha=\frac{HS}{HK}=\frac{1}{2}$. Рівняння прямої KS запишемо у виді рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$, або $y=\frac{x}{2}-1$. Кутовий коефіцієнт одержаної прямої буде $k_1=\frac{1}{2}$. Запишемо рівняння пучка з центром у точці K у виді $y=-1+k(x-2)$ (при цьому з розгляду випадає пряма $x=0$, але, як легко бачити, вона не є дотичною до кола). Виберемо з одержаного пучка дві прямі, виходячи з умови, що вони утворюють з прямою KS кут α, де $tg\alpha=\frac{1}{2}$. Скориставшись формулою для відшукання кута між двома прямими у виді $tg\alpha=\left|\frac{k-k_1}{1+kk_1}\right|$, дістаємо $\left|\frac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k}\right|=\frac{1}{2}$, звідки $|2k-1|=\left|1+\frac{1}{2}k\right|$.

Розв'язуючи одержане рівняння, знаходимо $k_1'=0,\ k_1''=\frac{4}{3}$. Підставивши значення $k_1',\ k_2'$ в рівняння пучка, отримуємо попередню відповідь.

Відповідь. $y+1=0;\ 4x-3y-3=0$.

III спосіб. Скористаємось записаним вище рівнянням пучка прямих і виберемо параметр k так, щоб система

$$\begin{cases} y=kx-1, \\ x^2+y^2-4x+3=0 \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок (дотична з колом мають єдину спільну точку). Розв'язуючи систему, дістаємо рівняння $(k^2+1)x^2-2(2+k)x+4=0$. Оскільки його дискримінант $D = 16k - 12k^2 = 0$, то $k_1 = 0,\ k_2 = \dfrac{4}{3}$. Залишається підставити одержані значення у рівняння пучка та одержати попередню відповідь.

IV спосіб. Складемо рівняння кола з діаметром *KS*. Центр його буде знаходитися в точці $L\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, а радіус $R = \dfrac{1}{2}KS = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Отримаємо $(x-1)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$, або $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$. Точки перетину одержаного кола, та кола, заданого в умові задачі, належать шуканим дотичним. Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}, \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{6}{5}, \\ y_2 = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Склавши рівняння прямих, які проходять через кожну з одержаних точок та точку *S*, дістаємо попередню відповідь.

Задача 2. *Скласти рівняння бісектриси того із кутів, утворених при перетині прямих* $4x + 3y - 2 = 0$ *та* $3x + 4y - 12 = 0$, *якому належить точка* $M(0,\ 4)$

Розв'язання. Всі точки кута рівновіддалені від сторін кута. Тому, якщо точка $P(x,\ y)$ належить бісектрисі, то виконується рівність $\dfrac{|4x + 3y - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, звідки $4x + 3y - 2 = \pm(3x + 4y - 12)$. З двох одержаних співвідношень отримуємо рівняння бісектрис двох суміжних кутів: $x - y + 10 = 0$ та $x + y - 2 = 0$. Візьмемо на першій із них довільну точку, нехай $A(-2,\ 8)$ та встановимо, як розташовані точки A та M відносно сторін кута. Для координат точки A вирази $4x + 3y - 2$ та $3x + 4y - 12$ додатні, для координат точки M - теж. Це означає, що точки A та M лежать в одному куті.

Відповідь. $x - y + 10 = 0$.

Задача 3. Задати аналітично множину точок, розташованих між паралельними прямими $(d_1): x - 2y + 2 = 0$ та $(d_2): x - 2y - 6 = 0$.

Розв'язання. Візьмемо на прямій d_1 точку $A_1(2,\ 2)$ та встановимо знак виразу $x-2y-6$. Оскільки в точці A_1 вираз від'ємний, то нерівність $x-2y-6<0$ задає півплощину, яка містить пряму d_1 та обмежена прямою d_2 Аналогічно, вибравши точку $A_2(6,\ 0)$ на прямій d_2, встановлюємо, що вираз $x-2y+2$ в даній точці приймає додатне значення, тобто нерівність $x-2y+2>0$ задає півплощину, яка містить пряму d_2. Точки, розташовані між прямими, є спільними точками одержаних півплощин.

Відповідь. $\begin{cases} x-2y-6<0, \\ x-2y+2>0. \end{cases}$

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Знайти відстань від точки $A(1;4)$ до прямої, що проходить через точки $M_1(4;-5),\quad M_2(3;-2)$.
2. Знайти відстань від точки $A(-3;4)$ до прямої, що проходить через точки $M_1(-2;7),\quad M_2(3;-3)$.
3. Знайти відстань між прямими $2x-3y+7=0,\quad 4x-6y-12=0.$
4. Знайти відстань між прямими $4x-3y-10=0,\quad 8x-6y+15=0.$
5. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій заданій рівнянням $x-2y-7=0$. Знайти площу квадрата.
6. Дано трикутник з вершинами $A(-1;2),\ B(3;4)$, $C(1;-6).$ Обчислити відстань від вершини B до медіани, яка проведена із вершини A.
7. Дві сторони квадрата лежать на прямих $3x+4y-12=0,\quad 3x+4y+13=0$. Знайти його сторону.
8. Точка A належить прямій $2x-3y+4=0$ і розміщена на відстані дві одиниці від прямої $4x-3y=0$. Знайти координати точки $A.$
9. Скласти рівняння бісектриси того із кутів, утворених при перетині прямих $3x-4y-2=0$ та $3x+4y-12=0,$ якому належить точка $M(0,\ 4)$.

10. Задано координати вершин трикутника ABC: $A(1;-3)$, $B(2;-1)$, $C(-2;4)$. Задати аналітично множину точок, які належать $\angle ABC$, але не належать трикутнику ABC.
11. Задати аналітично множину точок, які розташовані поза смужкою, утвореною парою паралельних прямих $3x+4y-12=0$, $3x+4y+13=0$.
12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x-3y+17=0$, $4x-y+9=0$ паралельно прямій $x+3y-2=0$.
13. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x-2y-16=0$, $x+7y+10=0$ паралельно прямій $5x+2y+2=0$.
14. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $5x-y-7=0$ і $3x-2y-12=0$ перпендикулярно прямій $3x+y-4=0$.
15. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $4x+y+5=0$, $5x-2y+16=0$ перпендикулярно прямій $2x+7y-8=0$.

Відповіді до задач:

1. $\rho\left(A,\left(M_1M_2\right)\right)=0.$
2. $\rho\left(A,\left(M_1M_2\right)\right)=\sqrt{5}.$
3. $\rho\left(d_1,d_2\right)=\sqrt{13}.$
4. $\rho\left(d_1,d_2\right)=3,5.$
5. $S=5$ кв.од.
6. $\rho\left(B,\left(AM\right)\right)=3\sqrt{2}.$
7. Сторона квадрата 5.
8. $A(7;6)$ або $A\left(-3;-\dfrac{2}{3}\right).$
9. $x=\dfrac{7}{3}.$
10. $\begin{cases}2x-y-5<0;\\5x+4y-6>0;\\7x+3y+2>0.\end{cases}$
11. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+4y-12>0;\\3x+4y+13>0;\end{cases}\\\begin{cases}3x+4y-12<0;\\3x+4y+13<0.\end{cases}\end{array}\right.$
12. $x+3y-14=0.$
13. $5x+2y-16=0.$
14. $x-3y-17=0.$
15. $7x-2y+20=0$

Практичне заняття №10. Різні способи задання площини.

Відстань від точки до площини. Геометричний зміст знаку виразу $ax+by+cz+d$. Дві площини в просторі.

Основні теоретичні факти.

Нехай у в довільній афінній системі координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ площина α задається перетином двох прямих. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - спільна точка цих прямих, а не колінеарні вектори $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ та $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ задають напрямки прямих (рис. 1). Тоді рівняння площини записується у виді

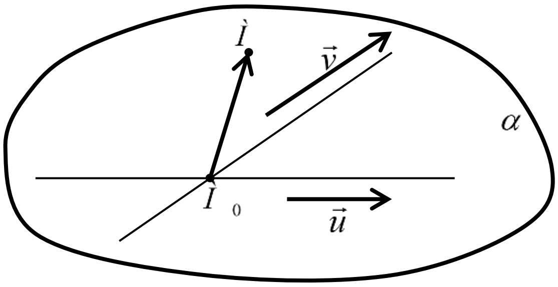

Рис. 1

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

Або $$ax+by+cz+d=0, \tag{2}$$

де $a=\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, $b=-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$, $c=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$. Дані числові коефіцієнти одночасно не дорівнюють нулю.

Нехай площина задана трьома точками $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1,2,3$, які не лежать на одній прямій. Тоді рівняння площини матиме вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

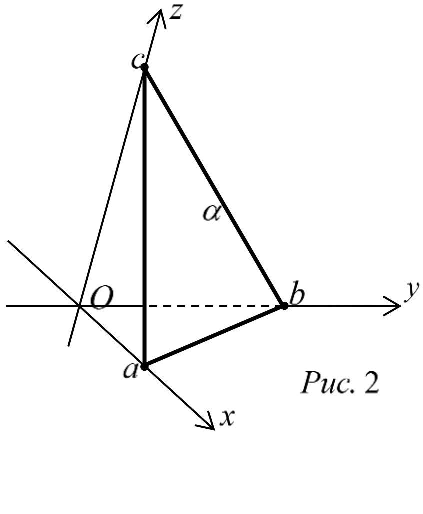

Рис. 2

Його називають ***рівнянням площини, що проходить через три*** задані ***точки***.

Нехай площина α відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c відповідно (рис.2). Рівняння площини у цьому випадку записується у виді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Його називають ***рівнянням площини у відрізках на осях***.

Нехай задана прямокутна декартова система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Розглянемо деяку площину α із заданою на ній точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та вектором $\vec{n}(a, b, c)$, який перпендикулярний до площини (рис.3). Рівняння

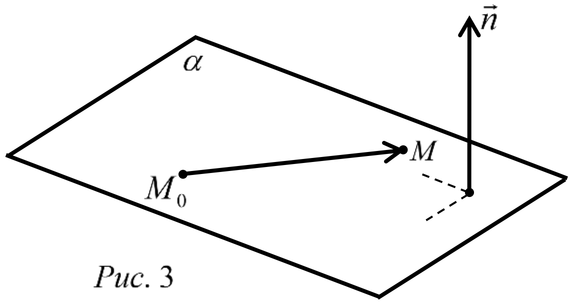

Рис. 3

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

є ***рівнянням площини, яка проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого напрямку***.

Рівняння (2), до якого зводяться рівняння площини в усіх розглянутих випадках, називають ***загальним рівнянням площини***. У прямокутній декартовій системі координат коефіцієнти біля змінних x, y та z визначають ***вектор*** $\boldsymbol{\vec{n}(a, b, c)}$**,** який ***перпендикулярний до площини.***

Для того, щоб вектор $\vec{u}(k, l, m)$ був паралельним до площини α, заданої рівнянням $ax + by + cz + d = 0$, необхідно та достатньо, щоб виконувалася рівність

$$ak + bl + cm = 0 \qquad (6)$$

Частинні випадки рівняння (1):

1. При $d = 0$ площина проходить через початок координат $O(0,0,0)$.

2. При $a = 0$ тобто у випадку, коли рівняння має вид $by + cz + d = 0$, площина проходить паралельно до осі Ox (рис. 4).

Аналогічні висновки робимо при $b=0$ та $c=0$. Тобто площина, задана рівнянням $ax+cz+d=0$ паралельна до осі Oy, а площина, задана рівнянням $ax+by+d=0$, паралельна до осі Oz. Якщо $a=d=0$ $(b=d=0$ або $c=d=0)$, то площина проходить через вісь Ox (відповідно через вісь Oy або вісь Oz).

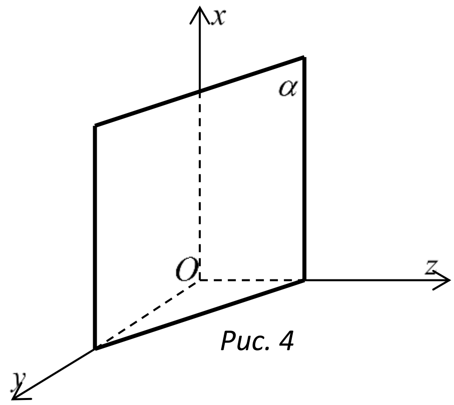

Рис. 4

3. У випадку, коли $a=b=0$, рівняння площини α набуває виду $cz+d=0$ або $z=p$, де $p=-\dfrac{d}{c}$. Тоді площина α буде паралельною до площини xOy (рис. 5). При $p=0$ рівняння $z=0$ є рівнянням площини xOy. Аналогічно, якщо $a=c=0$ $(b=c=0)$, то рівняння $by+d=0$ $(ax+d=0)$ задає площину, яка паралельна до площини xOz (yOz). Рівняння $y=0$ та $x=0$ є рівняннями відповідно площин xOz та yOz.

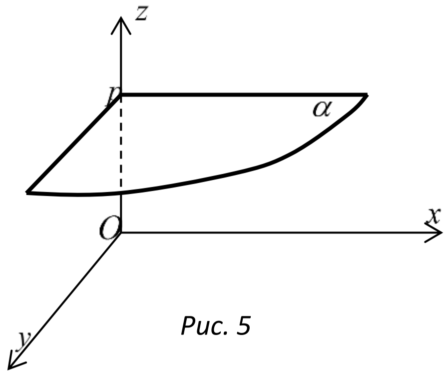

Рис. 5

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ рівняння $ax+by+cz+d=0$ визначає деяку площину α, а також задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Відстань $\rho(M_0,\alpha)$ від даної точки до площини обчислюється за допомогою співвідношення

$$\rho(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (7)$$

Площина α розбиває весь простір на два півпростори. ***Нерівності*** $ax+by+cz+d$ ***>0 та*** $ax+by+cz+d$ ***<0 аналітично задають множини точок*** цих ***півпросторів***.

Нехай у деякій афінній системі координат рівняння $a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0$, $i=1,\,2$ задають дві площини α_1 та α_2. При виконанні умови

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad (8)$$

вони будуть паралельними.

Якщо виконуються пропорції $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$, то площини співпадають.

Нехай умова (8) паралельності площин не виконується, тобто вони перетинаються. При перетині утворюються чотири двогранні кути (рис. 3). Вважаючи систему координат прямокутною декартовою, кут γ між площинами можна обчислити за допомогою співвідношення

$$\cos\gamma = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Зокрема ***площини будуть перпендикулярними*** тоді і тільки тоді, коли ***виконується умова***

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

У випадку паралельності площин α_1 та α_2 їхні рівняння можна записати у виді

$$(\alpha_i): ax + by + cz + d_i = 0, \ i = 1,\ 2.$$

Відстань $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ ***між ними обчислюють за допомогою співвідношення***

$$\rho(\alpha_1,\ \alpha_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Зобразити лінію перетину площин* $(\alpha): 3x + 4y - 12 = 0$ *та* $(\beta): z = 2$

Розв'язання. Зобразимо площину α. Для цього знайдемо точки $K(4,0,0)$ та $L(0,3,0)$ її перетину з осями Ox та Oy. Оскільки $\alpha \| Oz$ (у рівнянні площини відсутня змінна z), то, провівши через точки K та L прямі k та l паралельно до осі Oz, дістанемо зображення площини α. На осі Oz знаходимо точку $M(0,0,2)$, яка належить площині β, і через неї проводимо прямі $r \| Ox$ та $s \| Oy$. Точка M і прямі r та s визначають площину β. Точка B перетину прямих r та k належить шуканій прямій перетину площин, оскільки обидві прямі лежать в одній площині (площині xOz) і перетинаються. Аналогічно, точка A перетину прямих s та l, які лежать в площині yOz, теж належить лінії перетину. Таким чином, шуканою прямою є пряма AB (рис. 6).

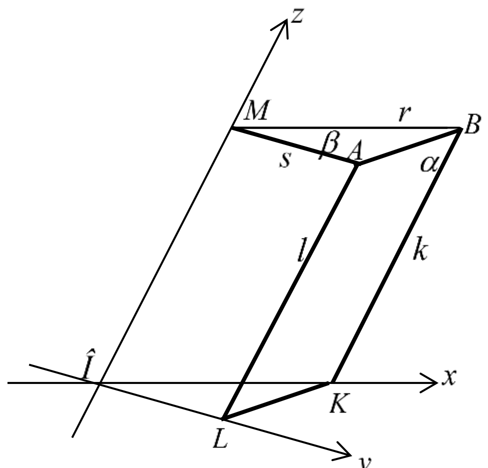

Рис. 6

Задача 2*. Три грані куба з ребром 1 належать координатним площинам. Побудувати переріз куба площиною* $2x+2y+2z-5=0$.

Розв'язання. Зобразимо заданий куб $OABCO_1A_1B_1C_1$ та площину KLM, побудувавши на осях точки

$$K\left(\frac{5}{2},\,0,\,0\right),\ L\left(0,\,\frac{5}{2},\,0\right),\ M\left(0,\,0,\,\frac{5}{2}\right)$$

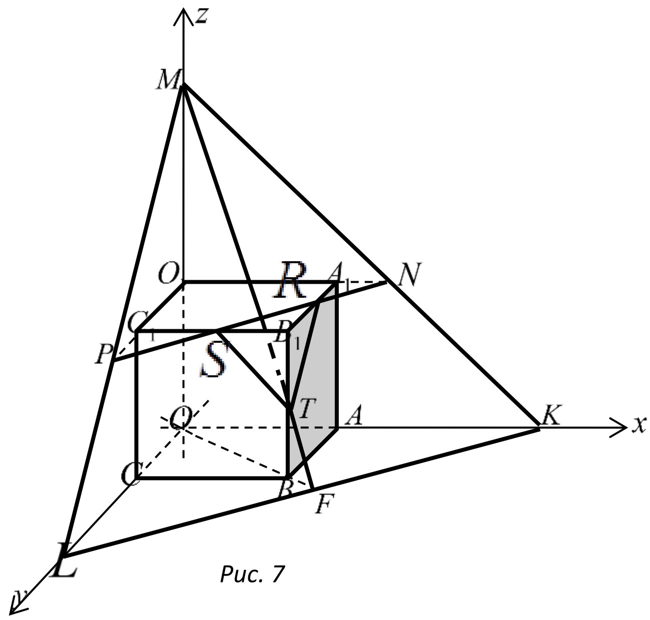

Рис. 7

(рис. 7). Знаходимо точку N перетину прямих O_1A_1 та KM (обидві прямі лежать в площині xOz) та точку P перетину прямих O_1C_1 та LM. Пряма PN лежить у площині KLM та в площині $O_1A_1B_1C_1$ і перетинає ребра верхньої грані куба в точках R та S. Тепер знаходимо точку F

перетину прямих OB та LK і проводимо пряму MF, яка перетне ребро BB_1 у деякій точці T.

Відповідь. Трикутник RST.

Задача 3. *У трикутній піраміді SABC ребра SA, SB та SC взаємно перпендикулярні та рівні відповідно* a, b, c. *Обчислити довжину висоти піраміди SH.*

Розв'язання. Введемо прямокутну систему координат, вибравши початок координат в точці S та вибравши за напрямки осей Ox, Oy, Oz відповідно напрямки променів SA, SB та SC. Оскільки на осях Ox, Oy та Oz площина ABC відтинає відповідно відрізки a, b та c, то її рівняння запишеться у виді $(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Скориставшись формулою (1), одержуємо довжину висоти SH, як відстань від точки $S(0, 0, 0)$ до площини (ABC):

$$SH=\rho(S,(ABC))=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}.$$

Задача 4. *У трикутній піраміді SABC ребра SA, SB та SC взаємно перпендикулярні та рівні відповідно* a, b, c. *Знайти довжину ребра куба, вписаного в цю піраміду, знаючи, що три грані куба належать граням піраміди.*

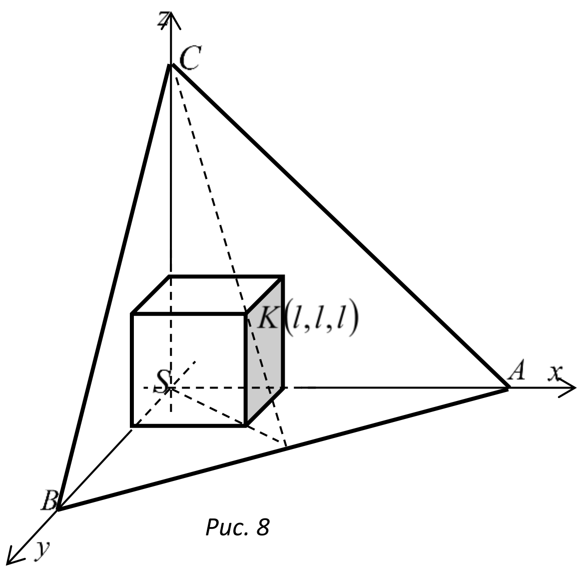

Рис. 8

Розв'язання. Введемо прямокутну систему координат, вибравши початок координат в точці S та вибравши за напрямки осей Ox, Oy, Oz відповідно напрямки променів SA, SB та SC. Оскільки на осях Ox, Oy та Oz площина ABC відтинає відповідно відрізки a, b та c, то її рівняння запишеться у виді $(ABC): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Оскільки координати вершини куба, яка належить площині (ABC) (на рис.8 - це точка $K(l,l,l)$), задовольняють одержане рівняння, то виконується рівність $\frac{l}{a}+\frac{l}{b}+\frac{l}{c}=1$. Звідси $l=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

Задача 5. *Визначити, на якій відстані від початку координат проходить площина* α *, задана рівнянням* $x-2y+2z-6=0$.

Розв'язання. Користуючись рівністю (7), дістаємо

$$\rho(0,\alpha)=\frac{|-6|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$$

Задача 6. *Встановити, чи відрізок, кінці якого знаходяться в точках* $A(7,12,-3)$ *та* $B(-2,9,11)$*, перетинає площину, задану рівнянням* $x-2y+2z-6=0$

Розв'язання. Визначимо знак виразу $x-2y+2z-6$ для кожної із заданих точок. Знаходимо $\delta(A)=7-2\cdot12+2\cdot(-3)-6<0$, $\delta(B)=-2-2\cdot9+2\cdot11-6<0$. Оскільки обидві точки розташовані в одному півпросторі, то відрізок площину не перетинає.

Задача 7. *Скласти рівняння площини, яка проектує пряму* $\frac{x-2}{3}=-y=z+4$ *на площину* α*, задану рівнянням* $x-2y+2z-6=0$.

Розв'язання. Очевидно, що проектуюча площина паралельна до векторів $\vec{u}(3,-1,1)$ та $\vec{n}(1,-2,2)$, перший з яких паралельний до заданої прямої, а другий перпендикулярний до площини α. Крім цього, площина повинна проходити через точку $(2,0,-4)$, яка належить прямій.

Рівняння шуканої площини запишемо у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Відповідь. $y+z+4=0$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2, 0, 3)$ і паралельна векторам $\vec{u}(1, 0, 1)$ та $\vec{v}(2, 1, 3)$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 3)$ та паралельна вектору $\vec{u}(1, 2, 2)$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox та точку $A(1, 1, 1)$
4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 3)$ та $\tilde{N}(0, -1, 2)$.
5. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1, 2, 3)$, $B(0, 0, 0)$ та $\tilde{N}(0, 3, 6)$.
6. Перевірити, чи можна провести площину через точки:

   а) $M_1(3,\ 1,\ 0)$, $M_2(0,\ 1,\ 2)$, $M_3(-1,\ 0,\ -5)$, $M_4(4,\ 1,\ 5)$;

   б) $N_1(2,\ 1,\ -1)$, $N_2(1,\ -1,\ 2)$, $N_3(0,\ 4,\ -2)$, $N_4(3,\ 1,\ -2)$.

7. Встановити, які з векторів $\vec{u}_1 = (1,\ -3,\ 4)$, $\vec{u}_2 = (0,\ 6,\ 4)$, $\vec{u}_3 = (-1,\ 0,\ 0)$, $\vec{u}_4 = (3,\ 0,\ 1)$ паралельні до площини $x + 2y - 3z - 6 = 0$?
8. Скласти рівняння площин, які проходять через точку $A(1, 2, 3)$ та відсікають на координатних осях відрізки однакової довжини.
9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, 2, 3)$ та перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (1,\ -3,\ 4)$.
10. Дано вершини тетраедра $A(4, 0, 2)$, $B(0, 5, 1)$, $\tilde{N}(1, -1, 3)$ та $D(3, -1, 5)$. Скласти:

    а) рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно до ребра CD;

    б) рівняння площини, що проходить через точку A паралельно до грані BCD.

11. Скласти рівняння площин, які:

    а) проходять через точку $A(1, 2, 3)$ паралельно до координатних площин;

б) проходять через точки $N_1(2,\ 1,\ -1)$, $N_2(1,\ -1,\ 2)$ паралельно до координатних осей;

в) проходять через точку $A(1,\ 2,\ 3)$ та через кожну із координатних осей.

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1,\ 2,\ 3)$ та $B(4,\ 5,\ -3)$ і перпендикулярна до площини $x-3y+4z-7=0$.
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x+y-z+1=0$ і xOz перпендикулярно до площини $x-3y+z=0$.
14. Скласти рівняння площини, яка проходить перпендикулярно до площини $2x-3y+z-4=0$.і перетинає її по прямій, яка лежить у площині yOz.
15. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ і $x+5y-z+2=0$ паралельно до осі Oy.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1,\ 2,\ 3)$ та перпендикулярна до площин $x-3y+4z-7=0$ і $x+3y+2z-13=0$.
17. Знайти множину точок, рівновіддалених від точок $A(2,\ -1,\ 3)$ та $B(4,\ 5,\ -3)$.
18. Скласти рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=9$ у точці $A(1,\ 2,\ -2)$.
19. Скласти рівняння площини, яка дотикається до сфери

$x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-10=0$ у точці .$A(0;1;3)$.

20. Охарактеризуйте особливості розміщення площин по відношенню до системи координат:

а) $4x-z+1=0$;	г) $4x+z=0$;	є) $2y+1=0$;
б) $4x-2y+z=0$;	д) $4x+1=0$;	ж) $2y+z=0$;
в) $4x-2y+1=0$;	е) $y+2z+1=0$;	з) $z=0$.

21. Охарактеризуйте взаємне розміщення площин:

а) $2x-y+z-4=0,\ \ 4x-2y+2z+1=0$;

б) $5x+9y-3z-1=0,\ \ 3x-y+2z+15=0$.

22. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1, 2, 3)$ та паралельна до площини $x - 3y + 4z - 71 = 0$.

23. Довести, що площини $2x - y + z - 4 = 0$, $x + y - z - 2 = 0$ та $2x - y + 3z - 6 = 0$ перетинаються в одній точці та знайти її координати.

24. Довести, що площини $x - y + z + 1 = 0$, $4x - 3y - z = 0$ та $2x - y - 3z - 2 = 0$ перетинаються по одній прямій та знайти її рівняння.

25. При яких значеннях параметрів $\grave{a}$ та b площини $2x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ та $ax + y - 2z + d = 0$ перетинаються по одній прямій?

26. Як розташовані в просторі площини $x - y - z + 4 = 0$, $3x - z + 5 = 0$ та $5x + y - z + 1 = 0$?

27. Знайти відстань від точки $M_0(-7, 0, -2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(3, 1, 0)$.

28. Знайти відстань від точки $M_0(4, 3, 0)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(3, 1, 0)$.

29. Знайти кут між площинами $x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y - 2z - 8 = 0$.

30. Знайти кут між площинами $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$, $x - y + \sqrt{2}z - 1 = 0$.

31. Задана площина $3x - y + 4z + 1 = 0$. Вказати, які з наведених нижче пар точок розташовані по одну сторону відносно даної площини: а) $O(0, 0, 0)$ і $A(2, 1, 0)$; б) $A_1(1, 2, 1)$ і $A_2(5, 15, -1)$; в) $B_1(-1, 2, -5)$ і $B_2(-15, 1, 0)$; г) $C_1(1, \sqrt{2}, 5)$ і $C_2(1, 15, -15)$.

32. Площина яка проходить через точки $A(1, 2, 3)$, $B(0, 0, 0)$ та $\tilde{N}(0, 3, 6)$. Задати аналітично множину точок півпростору, обмеженого даною площиною, знаючи, що йому належить точка $M(2, 1, -2)$.

33. Задані дві паралельні площини $3x - y + 4z + 1 = 0$ та $3x - y + 4z - 4 = 0$. Задати аналітично множину точок, розташованих між даними площинами.

34. Дві площини $5x - y + z + 1 = 0$ та $x + y - 5z + 1 = 0$ розбивають простір на чотири двогранні кути. Задати аналітично множину точок того кута, якому належить точка $M(2, 1, -2)$.

35. Встановити взаємне розташування площини $2x-2y-z+9=0$ та сфери $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

36. Довести, що площина $2x-2y-z+9=0$ і сфера $x^2+y^2+z^2+4x-6z+4=0$ перетинаються та знайти радіус кола перетину.

37. Через лінію перетину площин $x-y+z-1=0$ та $2x+5y-2z-13=0$ провести площину, яка дотикається до сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

38. Знайти відстань між паралельними площинами:

а) $2x-2y+z+1=0$ та $2x-2y+z-5=0$;

б) $2x-2y+z+1=0$ та $4x-4y+2z-5=0$.

39. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1,\ 1,\ 4)$ та площини $2x-2y+z+2=0$.

40. На осі Oy знайти точку, рівновіддалену від площин $x+2y-2z-1=0$ та $3x+5=0$.

41. Скласти рівняння множини точок, віддалених від площини $x+2y-2z-1=0$ на відстані 2.

42. Написати рівняння сфери, центр якої лежить на осі Ox і яка дотикається до площин $2x-4y-3z+21=0$, $5x-2z=0$.

43. Знайти координати центра кулі, радіус якої $R=5$, знаючи, що вона вписана в той тригранний кут, який утворений площинами $3x-4y+10=0$, $x-2y-2z+3=0$ та $x+2y+2z-5=0$ і якому належить точка $A(1,\ -1,\ -1)$.

44. Написати рівняння площин, які ділять пополам двогранні кути, утворені при перетині площин $3x-y+7z-4=0$ та $5x+3y-5z+2=0$.

45. У трикутній піраміді $SABC$ ребра SA, SB та SC взаємно перпендикулярні та рівні відповідно $a,\ b,\ c$. Знайти радіус кулі, вписаної в цю піраміду.

46. Через сторону AB основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ проведено площину, яка проходить через середину ребра SD. Знайти відстань від вершини S до даної площини, якщо довжина сторони основи рівна a, а висота піраміди дорівнює h.

47. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 4. Площина проходить через діагональ AC і перетинає куб по трапеції $ACMN$. Знайти відстань від вершини B до даної площини, якщо $AN = 5$.

Відповіді до задач:

1. $x + y - z + 1 = 0$.
2. $6x + 2y - 5z + 5 = 0$.
3. $y - z = 0$.
4. $x + y - 4z + 9 = 0$
5. $x - 2y + z = 0$
6. а) ні; б) так.
7. $\vec{u}_2$ та $\vec{u}_4$ паралельні, а $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_3$ не паралельні до заданої площини.
8. $x + y + z - 6 = 0$, $x - y + z - 2 = 0$, $x - y - z + 4 = 0$.
9. $x - 3y + 4z - 7 = 0$
10. а) $5x + 3y - 5z - 10 = 0,$ б) $6x + y + 6z - 36 = 0$.
11. а) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$; б) $3y + 2z - 1 = 0,\ 3x + z - 5 = 0,\ 2x - y - 3 = 0$; в) $3y - 2z = 0,\ 3x - z = 0$, $2x - y = 0$.
12. $x + 3y + 2z - 13 = 0$.
13. $x - z + 1 = 0$
14. $5x + 3y - z + 4 = 0$
15. $21x + 14z - 3 = 0$
16. $9x - y - 3z + 2 = 0$
17. $x + 3y - 3z - 9 = 0$
18. $x + 2y - 2z - 1 = 0$
19. $x + y - 2z + 5 = 0$
20. а) паралельна до осі Oy; б) проходить через початок координат; в) паралельна до осі Oz; г) проходить через вісь Oy; д) паралельна до площини zOy

е) паралельна до осі Ox є) паралельна до площини xOz; ж) проходить через вісь Ox; з) площина xOy.

21. а) паралельні, б) перпендикулярні.
22. $x-3y+4z-7=0$
23. $A(2, 1, 1)$
24. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{5}=z$
25. $a=\frac{13}{3}$, $b=\frac{23}{3}$.
26. Перетинаються по трьох паралельних прямих.
27. 8.
28. 2.
29. $\frac{\pi}{2}$.
30. $\frac{\pi}{3}$
31. O і A, B_1 і B_2.
32. $x-2y+z<0$.
33. $\begin{cases} 3x-y+4z+1>0, \\ 3x-y+4z-4<0 \end{cases}$
34. $\begin{cases} 5x-y+z+1>0, \\ x+y-5z+1>0. \end{cases}$
35. Не мають спільних точок.
36. $\frac{\sqrt{77}}{3}$.
37. $4x+3y-15=0$, $58x+33y+6z-201=0$.
38. а) 2, б) $\frac{7}{6}$.
39. $(0,\ 0,\ 4\pm\sqrt{2})$.
40. $(0,\ 3,\ 0)$, $(0,\ -2,\ 0)$.
41. Дві площини $x+2y-2z-7=0$ та $x+2y-2z+5=0$.
42. $(x+3)^2+y^2+z^2=\frac{225}{29}$, $(x-7)^2+y^2+z^2=\frac{1225}{29}$.

43. $\left(1,\ -3,\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

44. $x+2y-6z+3=0$ та $4x+y+z-1=0$.

45. $r=\dfrac{abc}{ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$.

46. $\rho=\dfrac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.

47. $\rho(B;ACN)=\dfrac{16}{\sqrt{41}}$.

Практичне заняття №11. Різні способи задання прямої в просторі. Взаємне розташування двох прямих.

Основні теоретичні факти.

Якщо пряма d задана точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та напрямним вектором $\vec{u}(k, l, m)$, то її рівняння записують у виді

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}. \qquad (1)$$

Його називають ***канонічним рівнянням прямої в просторі***.

Прирівнявши одержані відношення до параметра t, дістаємо співвідношення

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases} \qquad (2)$$

Одержані рівняння називають ***параметричними рівняннями прямої в просторі***. Їх використовують, наприклад, у випадку, коли деякі з чисел k, l, m у рівнянні (1) рівні нулю. Зауважимо, що у деякій літературі зустрічаються записи, коли у одному або двох знаменниках рівняння виду (1) наявні нулі. Його потрібно сприймати символічно, розуміючи наявність нульових координат у напрямного вектора.

Нехай пряма проходить через дві точки $M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1,2$. Тоді її рівняння можна записати у виді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

Одержане співвідношення називають ***рівнянням прямої в просторі, що проходить через дві задані точки***.

У деяких випадках ***пряму в просторі*** зручно ***задавати, як лінію перетину двох площин***, тобто у виді системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Перехід від задання прямої у виді (4) до виду (1) чи (2) можна здійснювати, знайшовши два довільні розв'язки системи (4), або знайшовши координати напрямного вектора прямої, який можна одержати, як векторний добуток векторів нормалей $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ та $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ до даних площин. Перехід від задання прямої у виді (1) чи (2) до виду (4) очевидний.

Розглянемо в просторі дві прямі d_1 та d_2, кожна з яких задається точкою $M_i(x_i, y_i, z_i)$, що належить прямій, та напрямним вектором $\overrightarrow{u_i}(k_i, l_i, m_i)$, де $i = (1, 2)$ Очевидно, що випадки, коли обидві прямі лежать в одній площині (тобто паралельні або перетинаються), чи мимобіжні, залежать від того, чи компланарні вектори $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 1). Оскільки необхідною та достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їхнього мішаного добутку, то розташування прямих залежить від числа

$$\Delta = \left(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

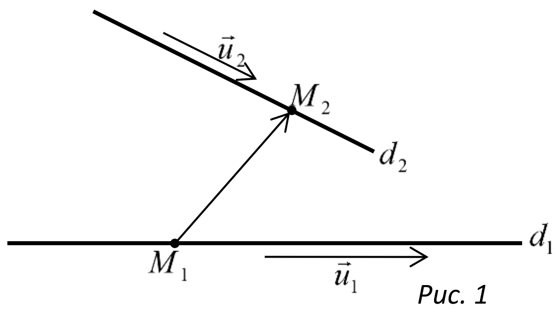

Рис. 1

Якщо $\Delta = 0$***, то*** вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_1}$ та $\overrightarrow{u_2}$ компланарні, тому ***прямі*** $\boldsymbol{d_1}$ та $\boldsymbol{d_2}$ ***лежать в одній площині***. ***Якщо*** при цьому вектори $\overrightarrow{u_1}$ та $\overrightarrow{u_2}$ колінеарні, тобто ***виконуються умови***

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad (5)$$

то $d_1 \parallel d_2$.

Якщо $\Delta = 0$ і умова (5) не виконується, ***то прямі*** d_1 ***та*** d_2 ***перетинаються***. Прямі d_1 та d_2 можуть співпадати, якщо крім умови (5) виконується також рівність

$$\frac{x_2 - x_1}{k_1} = \frac{y_2 - y_1}{l_1} = \frac{z_2 - z_1}{m_1},$$

яка означає, що точка $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2) \in d_2$ одночасно належить також першій прямій.

Якщо $\Delta \neq 0$, ***то*** вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ не компланарні, а ***прямі*** d_1 ***та*** d_2 ***мимобіжні***.

Кутом між двома мимобіжними ***прямими в просторі*** називають кут між двома прямими, які проходять через деяку спільну точку і паралельні до заданих прямих. У випадку аналітичного задання прямих d_1 та d_2 кут δ між ними шукають як кут між їхніми напрямними векторами $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$:

$$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}.$$

Нехай дві мимобіжні прямі задані своїми канонічними рівняннями

$$(d_1):\quad \frac{x - x_1}{k_1} = \frac{y - y_1}{l_1} = \frac{z - z_1}{m_1}; \qquad \text{і} \qquad (d_2):\quad \frac{x - x_2}{k_2} = \frac{y - y_2}{l_2} = \frac{z - z_2}{m_2}.$$

Пряма, яка перетинає задані прямі та перпендикулярна до них, називається ***спільним перпендикуляром до*** цих ***прямих.***

Існування та єдиність спільного перпендикуляра обґрунтовується в шкільному курсі геометрії. Для побудови спільного перпендикуляра до прямих d_1 та d_2 через пряму d_1 проводять площину α, яка паралельна до прямої d_2. Для цього використовується точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$ та вектори $\vec{u}_1(k_1, l_1, m_1)$, $\vec{u}_2(k_2, l_2, m_2)$, які паралельні до d_1 *і* d_2. Аналітично рівняння площини α запишеться у виді рівності

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Нехай після необхідних обчислень таке рівняння набуде виду $Ax + By + Cz + D = 0$.

Позначимо через $\vec{n}(A, B, C)$ вектор, який перпендикулярний до площини α. Проведемо дві площини β та γ, кожна з яких перпендикулярна до площини α та проходить через прямі d_1 та d_2 відповідно. При цьому площина β визначається точкою M_1 та паралельними до неї векторами $\vec{u}_1$ та $\vec{n}$, а площина γ - точкою $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та паралельними до неї векторами $\vec{u}_2$ та $\vec{n}$.

Рівняння площин β та γ можна записати у виді рівностей

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 , \qquad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 .$$

Пряма d, по якій перетинаються площини β та γ, буде шуканим спільним перпендикуляром до прямих d_1 та d_2 (рис. 2).

Рівняння спільного перпендикуляра до прямих d_1 та d_2 ***можна записати у вигляді системи рівнянь, які задають площини*** β ***та*** γ.

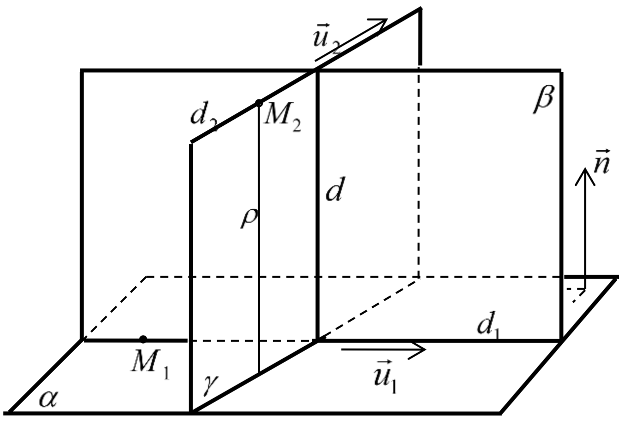

Рис. 2

Відстань $\rho(d_1; d_2)$ ***між мимобіжними прямими*** d_1 та d_2 можна знайти, як відстань від точки M_2 до площини α, тобто

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{6}$$

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Знайти відстань між діагоналями* AC *та* BC_1 *граней куба* $ABCDA_1B_1C_{1_1}D$, *ребро якого дорівнює 1. Які точки вказаних діагоналей знаходяться на знайденій відстані?*

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_{1_1}D$ заданий куб. Виберемо систему координат у виді репера $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ (рис. 3). Очевидно, що кінці заданих діагоналей мають координати $A(0, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $C_1(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 0)$ і $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BC_1}$=(0,1,1). Складемо рівняння площини α, яка проходить через діагональ AC паралельно до прямої BC_1. Дістаємо

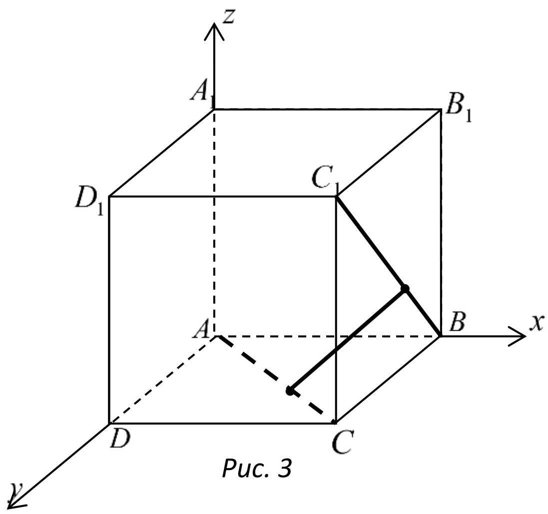

Рис. 3

$$(\alpha): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } x - y + z = 0 .$$

Відстань ρ між діагоналями куба тепер можна знайти за допомогою співвідношення (6):

$$\rho = \rho(B, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Щоб дати відповідь на другу частину задачі, складемо рівняння двох площин β та γ, які проходять перпендикулярно до α та містять діагоналі AC та BC_1. При цьому використовуємо перпендикулярний до α вектор $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Маємо

$$(\beta): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y - 2z = 0 ,$$

$$(\gamma): \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - z - 2 = 0 .$$

Система рівнянь $\begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ визначає спільний перпендикуляр до прямих AC та BC_1. Він перетинає діагональ AC у точці, для якої $z = 0$. Використавши цей факт, знаходимо $x = y = \frac{2}{3}$. Ця ж пряма перетинає діагональ BC_1 у точці з абсцисою $x = 1$. Звідси $y = z = \frac{1}{3}$. Можна переконатися, що відстань між одержаними точками дорівнює $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2*. Як розташовані в просторі прямі* $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ *і* $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 - t, \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ *?*

Розв'язання. Знайдемо два довільні розв'язки системи, яка задає першу пряму. Нехай вони визначають точки $A(2,\,3,\,3)$ та $B(3,\,6,\,5)$. Друга пряма задається точкою $C(2,\,1,\,-2)$ та напрямним вектором $\vec{u} = (-1,\,-1,\,3)$. Обчислимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB} = (1,3,2)$, $\overrightarrow{AC} = (0,-2,-5)$ та $\vec{u}$.

Отже, прямі лежать в одній площині. Оскільки їхні напрямні вектори ($\overrightarrow{AB}$ та $\vec{u}$) не колінеарні, то прямі перетинаються.

Задача 3*. Знайти відстань між прямими* $x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ *та* $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -2 + 6t \end{cases}$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Очевидно, що задані прямі паралельні, оскільки їхні напрямні вектори $\vec{u}_1 = (1,\,-1,\,3)$ та $\vec{u}_2 = (2,\,-2,\,6)$ колінеарні. Першій прямій належить точка $A_1(0,\,2,\,0)$, а другій – точка $A_2(2,\,1,\,-2)$. Відстань ρ між прямими знайдемо як висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{u}_1$ та

$\overrightarrow{A_1A_2} = (2,\,-1,\,-2)$, яка проведена до сторони, паралельної до $\vec{u}_1$ (рис. 4). Площу паралелограма знайдемо за допомогою векторного добутку:

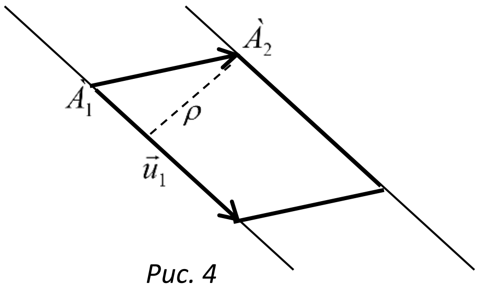

Рис. 4

$$S = \left|\vec{u}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2}\right| = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \left|5\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}\right| = 3\sqrt{10}\,.$$

Оскільки $|\vec{u}_1| = \sqrt{11}$, то $\rho = \dfrac{S}{|\vec{u}_1|} = 3 \cdot \sqrt{\dfrac{10}{11}}$.

Другий спосіб. Через точку A_1 проведемо площину, перпендикулярну до заданих прямих. Її рівняння запишеться у виді $x - (y-2) + 3z = 0$ або $x - y + 3z + 2 = 0$ Знайдемо точку перетину цієї площини з другою прямою. Із системи $\begin{cases} x - y + 3z + 2 = 0, \\ x = 2 + 2t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -2 + 6t \end{cases}$ дістаємо $x = \dfrac{25}{11},\ y = \dfrac{8}{11},\ z = -\dfrac{13}{11}$. Відстань від знайденої точки до точки A_1 буде шуканою. Дістаємо

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{25}{11}\right)^2 + \left(\frac{8}{11} - 2\right)^2 + \left(-\frac{13}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{90}{11}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}}\,.$$

Задача 4. *Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку* $A(0,\,2,\,-1)$ *та перетинає прямі* $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$, $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Візьмемо на першій прямій точку $K(3 + 2t,\, 1 + t,\, -3 - t)$ та на другій прямій – точку $L(3 + l,\, 1 + l,\, 1 + 2l)$, положення яких змінюється при зміні параметрів t та l. Підберемо ці параметри так, щоб точки $K,\ L,\ A$ належали одній прямій. Із колінеарності векторів $\overrightarrow{AK} = (3+2t,\ t-1,\ -2-t)$, $\overrightarrow{AL} = (3+l,\ l-1,\ 2+2l)$ отримуємо рівності

$$\frac{3+2t}{3+l} = \frac{t-1}{l-1} = \frac{-2-t}{2+2l} = \lambda\,,$$

звідки, ввівши заміну $\lambda l = s$, дістаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2t - s - 3\lambda = -3, \\ t - s + \lambda = 1, \\ t + 2s + 2\lambda = -2 \end{cases}.$$

Додаючи до першого рівняння системи два інші, дістаємо $t=-1$. Це дозволяє знайти точку $K(1,\ 0,\ -2)$ та записати відповідь у вигляді рівняння прямої, що проходить через точку A у напрямку вектора $\overrightarrow{AK} = (1.-2.-1)$.

Відповідь. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$.

Задача 5. *В основі чотирикутної піраміди лежить ромб із діагоналями 6 та 8. Висота піраміди дорівнює 5. Знайти відстань між мимобіжними більшим бічним ребром та стороною основи.*

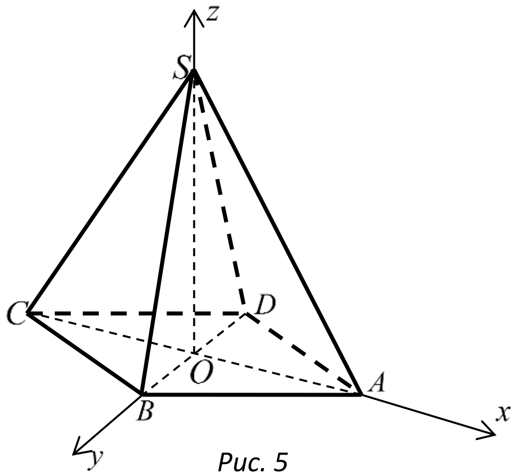

Рис. 5

Розв'язання. Нехай $SABCD$ - задана піраміда. Будемо шукати відстань між ребрами SA та AB. Виберемо систему координат так, як зображено на рисунку 3. Згідно з умовою задачі, отримуємо $A(4,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 3,\ 0)$, $C(-4,\ 0,\ 0)$, $S(0,\ 0,\ 5)$ і $\overrightarrow{CS} = (4,\ 0,\ 5)$, $\overrightarrow{BA} = (4,\ -3,\ 0)$. Складемо рівняння площини α, яка проходить через ребро AB паралельно до прямої CS. Дістаємо

$$(\alpha):\ \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

або $15x+20y-12z-60=0$. Відповідь на задачу отримуємо, знайшовши відстань від точки S до площини α:

$$\rho=\rho(S,\ \alpha)=\frac{|-60-60|}{\sqrt{225+400+144}}=\frac{120}{\sqrt{769}}.$$

Задача 6. *Знайти точку, яка симетрична до точки* $A(0,\ 2,\ -1)$ *відносно прямої* $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку $A(0,\ 2,\ -1)$ та перетинає задану пряму під прямим кутом. Запишемо її рівняння у виді $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{a}=\frac{z+1}{b}$ (ми вибираємо напрямний вектор прямої з першою координатою 1, передбачаючи перспективу розгляду випадку, коли вона дорівнює 0). Позначимо через $B(3,1,1)$ точку на заданій прямій. Умову перетину прямих запишемо у виді рівності 0 мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}=(3,\ -1,\ 2)$, $\vec{u}=(1,1,\ 2)$ та $\vec{v}=(1,\ a,\ b)$. Дістаємо $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & a & b\end{vmatrix}=0$. Звідси $a-b+1=0$. Умова перпендикулярності прямих, записана у виді $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, дозволяє отримати співвідношення $1+a+2b=0$. Із системи рівнянь $\begin{cases}a-b+1=0,\\ a+2b+1=0\end{cases}$ знаходимо $a=-1,\ b=0$.

Запишемо рівняння знайденої прямої у параметричному виді $\begin{cases}x=t,\\ y=2-t,\\ z=-1\end{cases}$ та знайдемо точку, в якій вона перетинає задану пряму. Із системи $\frac{t-3}{1}=\frac{1-t}{1}=\frac{-2}{2}$ дістаємо $t=2$ та шукану точку перетину $C(2,\ 0,\ -1)$. Для відшукання точки $D(x,\ y,\ z)$, яка симетрична до точки A відносно точки C, отримуємо співвідношення $\frac{x}{2}=2,\ \frac{y+2}{2}=0,\ \frac{z-1}{2}=-1$, звідки $x=4,\ y=-2,\ z=-1$.

Відповідь. $A'(4,\ -2,\ -1)$.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Знайти координати напрямного вектора прямої, заданої системою рівнянь $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0 \end{cases}.$
2. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точки $\grave{A}(-4,\ 2,\ 6)$, $B(2,\ -3,\ 0)$.
3. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $\grave{A}(0,\ -1,\ -1)$, $B(-2,\ 3,\ 5)$.
4. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(2,\ 1,\ 3)$ паралельно до прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{-2}$.
5. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,5,-2)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=1+5t, \\ z=3-2t \end{cases}.$
6. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,-1,4)$ паралельно до площини $2x+y-7=0$ та перетинає вісь Oy.
7. Просторовий трикутник задано вершинами $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Скласти рівняння бісектриси кута A.
8. Скласти рівняння ортогональної проекції прямої $\frac{x-4}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ на площину $2x+y-z-3=0$.
9. Скласти рівняння ортогональної проекції прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на площину $x-y+3z+8=0$.
10. Задані рівняння руху точки $A(x,\ y,\ z)$: $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=4t, \\ z=1+12t \end{cases}$. Визначити її швидкість v
11. Задані рівняння руху точки $A(x,\ y,\ z)$: $\begin{cases} x=9-2t, \\ y=-7+2t, \\ z=7-t \end{cases}$. Визначити шлях S, який вона пройде за час від $t=2$ до $t=9$.

12.Знайти точки перетину з координатними площинами прямої $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -6 + 2t, \\ z = 1 + t \end{cases}$

13. Знайти точки перетину з координатними площинами прямої $\begin{cases} 6x + 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$.

14.Знайти точки перетину з координатними площинами прямої $\frac{x-4}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

15.При якому значенні параметра a пряма $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ \grave{a}x - z - 1 = 0 \end{cases}$ не перетинає площину xOy?

16.При якому значенні параметра a пряма $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + \grave{a}t, \\ z = -1 \end{cases}$ не перетинає площину xOz?

17.При яких значеннях параметрів a та b пряма $\begin{cases} x = 2a + bt, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 5 - t \end{cases}$ належить площині yOz?

18.На прямій $\frac{x-4}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{3}$ знайти точки, розташовані на відстані 14 від точки $A(4,\ -1,\ 3)$.

19.На прямій $\frac{x+3}{5} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-6}{3}$ знайти точки, розташовані на відстані $5\sqrt{2}$ від точки $\grave{A}(-3,\ -5,\ 6)$.

20.На прямій $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(3,\ 11,\ 4)$ та $L(-5,\ -13,\ -2)$.

21.Якій умові повинен задовольняти напрямний вектор $\vec{u} = (k,\ l,\ m)$ прямої, щоб вона була:

а) паралельна до осі Ox;

б) перпендикулярна до осі Oy ?

22. Як розташовані в просторі прямі $\begin{cases} x+y+z-6=0, \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t, \\ z=-2+3t \end{cases}$?

23. При якому значенні параметра a прямі $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t, \\ z=-2+3t \end{cases}$ та $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{a}=\frac{z+1}{2}$ перетинаються?

24. При якому значенні параметра a прямі $\begin{cases} ax-y+z-2=0, \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2-t, \\ y=1-t, \\ z=-2+3t \end{cases}$ перетинаються?

25. При яких значеннях параметрів a та b прямі $\frac{x+3}{a}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{4}$ та $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{b}=\frac{z-6}{-2}$ паралельні?

26. При яких значеннях параметрів a та b прямі $\frac{x+3}{a}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{4}$ та $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t, \\ z=-2+bt \end{cases}$ паралельні?

27. При яких значеннях параметрів a та b прямі $\begin{cases} ax-y+z-2=0, \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2-t, \\ y=1-3t, \\ z=-2+bt \end{cases}$ паралельні?

28. При яких значеннях параметрів a, b, c, d прямі $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-t, \\ z=-2+3t \end{cases}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y-c}{a}=\frac{z-d}{b}$ співпадають?

29. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ та $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ перетинаються, і визначити їх точку перетину.

30. Через точку $A(4,\ 0,\ -1)$ провести пряму так, щоб вона перетинала дві задані прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$ та $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

31.Серед усіх прямих, які перетинають дві задані прямі $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ та $\frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$, знайти ту, яка паралельна до прямої $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$.

32.Скласти канонічне рівняння прямої, яка лежить у площині $y+2z=0$ і перетинає дві задані прямі $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$ та $\begin{cases} x=2-t, \\ y=4+2t, \\ z=1 \end{cases}$.

33.Знайти ортогональні проекції прямої $\begin{cases} x-3y+z-11=0, \\ 2x-8y+3z-30=0 \end{cases}$ на кожну із координатних площин.

34.З початку координат опустити перпендикуляр на пряму $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

35.Знайти ортогональну проекцію точки $A(2,\ -1,\ 3)$ на пряму $\begin{cases} x=3t, \\ y=-7+5t, \\ z=2+2t \end{cases}$.

36.Знайти гострий кут між прямими $\begin{cases} x=2+t, \\ y=3-2t, \\ z=-2+2t \end{cases}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$.

37.Знайти кут між прямими $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$ та $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+t, \\ z=-1 \end{cases}$.

38.Знайти кут між прямими $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{\sqrt{2}}$ та $\frac{x+5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{\sqrt{2}}$.

39.Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$ та $\begin{cases} 3x+y-5z+2=0, \\ 2x+3y-8z-3=0. \end{cases}$

40.У тетраедрі з вершинами $A(3,\ -1,\ 0)$, $B(0,\ -7,\ 3)$, $C(-2,\ 1,\ -1)$ та $D(3,\ 2,\ 6)$ знайти кут між ребрами AC і BD.

41.Знайти відстань між прямими $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ та $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$.

42.Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра прямих

$$\begin{cases} x=-7+3t, \\ y=4-2t, \\ z=4+3t \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x=1+t, \\ y=-8+2t, \\ z=-12-t \end{cases}.$$

43. У тетраедрі з вершинами $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(4,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 3,\ 0)$ та $D(1,\ 1,\ 3)$ знайти відстань між ребрами AD і BC.

44. Знайти висоту трикутника, основа якого задана рівнянням $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$, а протилежна вершина знаходиться у точці $A(1,\ -1,\ -2)$.

45. Знайти відстань між діагоналлю A_1C куба та діагоналлю BC_1 грані куба $ABCDA_1B_1C_{1_1}D$, ребро якого дорівнює 1. Які точки вказаних діагоналей знаходяться на знайденій відстані?

46. У правильній чотирикутній піраміді із ребром основи $2a$ та висотою h знайти відстань між мимобіжними бічним ребром та стороною основи.

Відповіді до задач:

1. $\overrightarrow{(1,\ 3,\ -5)}$
2. $\frac{x+4}{6}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-6}{-6}$
3. $\begin{cases} x=-t, \\ y=-1+2t, \\ z=-1+3t \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=1+5t, \\ z=3-2t \end{cases}$
5. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{5}=\frac{z+2}{-2}$
6. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-4}{4}$
7. $\frac{x-4}{32}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-5}$
8. $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ 3x-y+5z-22=0 \end{cases}$
9. $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$
10. $v=13$
11. $S=21$
12. $K(0,\ -2,\ 3)$, $L(-1,\ 0,\ 4)$, $M(3,\ -8,\ 0)$.
13. $K(0,3,\ 3)$, $L(2,\ 0,\ 5)$, $M(-1,\ \frac{15}{2},\ 0)$.
14. $K(0,8,\ 6)$, $L(4,\ 0,\ 2)$, $M(6,\ -4,\ 0)$.
15. $a=0.$
16. $a=0.$
17. $a=0,\ b=0$.
18. $K(-8,\ 3,\ -3)$, $L(16,\ -5,\ 9)$
19. $K(2,\ -9,\ 9)$, $L(-8,\ -1,\ 3)$.
20. $K(2,\ -3,\ 5)$.
21. а) $k=0$, б) $k=m=0$.
22. Мимобіжні.
23. $a=-\frac{4}{7}.$
24. $a=1.$

25. $a = 2,\ b = -1$.

26. $a = -1,\ b = -4$.

27. $a = 1,\ b = -2$.

28. $a = -2,\ b = 6,\ c = 5,\ d = -8$.

29. $(-3,\ 5,\ -3)$

30. $\dfrac{x-4}{13} = \dfrac{y}{37} = \dfrac{z+1}{58}$

31. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y+8}{7} = \dfrac{z+9}{1}$

32. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$

33. $\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} 2x - z + 2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2y - z + 8 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$.

34. $\dfrac{x}{33} = \dfrac{y}{-26} = \dfrac{z}{27}$

35. $(3,\ -2,\ 4)$

36. $\arccos\dfrac{4}{9}$

37. $\dfrac{\pi}{4}$

38. $\dfrac{\pi}{3}$

39. $\dfrac{\pi}{2}$

40. $\dfrac{\pi}{2}$

41. 25.

42. $\begin{cases} x = -5 + 2t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = -4t \end{cases}$

43. $\dfrac{36}{\sqrt{274}}$

44. 7

45. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. Точка, яка є серединою діагоналі BC_1, та точка, яка ділить відрізок A_1C у відношенні 2:1, рахуючи від точки A_1.

46. $\dfrac{2ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$

Практичне заняття №12. Пряма і площина в просторі. Рівняння спільного перпендикуляра. Відстань між двома мимобіжними прямими.

Основні теоретичні факти.

Нехай у просторі пряма d та площина α задані рівняннями:

$$(d):\ \frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}\ ,\ \ (\alpha):\ ax+by+cz+d=0.$$

Пряма d буде паралельною до площини α, якщо вектор $\vec{u}(k,\,l,\,m)$, який паралельний до прямої, буде одночасно паралельним до площини, тобто якщо виконується рівність

$$ak+bl+cm=0. \tag{1}$$

Дане співвідношення виражає необхідну і достатню ***умови паралельності прямої та площини***. Якщо, крім умови (1), точка $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ прямої d належить площині α, тобто виконується рівність

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

то пряма d належить площині α. При умові

$$ak+bl+cm\neq 0$$

пряма та площина перетинаються. При необхідності їх точку перетину можна знайти, розв’язавши відповідну систему рівнянь.

Нехай система координат прямокутника декартова та пряма d перетинає площину. Якщо при цьому вектор $\vec{u}(k,\,l,\,m)$, який паралельний до прямої d, та вектор $\vec{n}(a;b;c)$, який перпендикулярний до площини α, будуть колінеарними, тобто, ***якщо виконуються рівності***

$$\frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m},$$

то пряма буде перпендикулярною до площини (рис. 1).

Нехай пряма d не перпендикулярна до площини α. Для відшукання ***кута між прямою та площиною***, тобто гострого кута між прямою та її ортогональною проекцією на площину (на рис. 2 - це кут δ між прямими d та s) використовують вектори $\vec{u}$ та $\vec{n}$. Позначивши кут між ними через γ, отримуємо

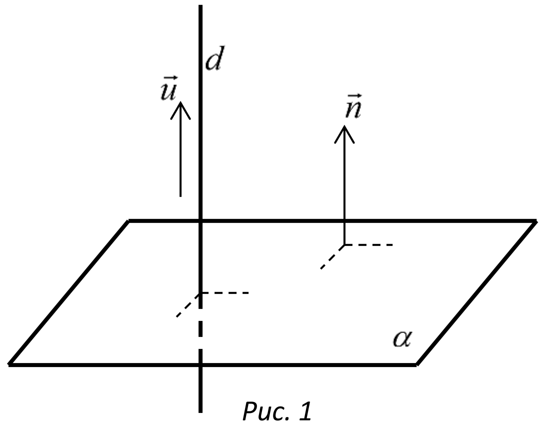

Рис. 1

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{ak+bl+cm}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Оскільки $\delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ у випадку, коли кут γ - гострий та $\delta = \gamma - \frac{\pi}{2}$, якщо кут γ-тупий, то в обох випадках дістаємо

$$\sin\gamma = |\cos\gamma| = \frac{|ak+bl+cm|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

звідки

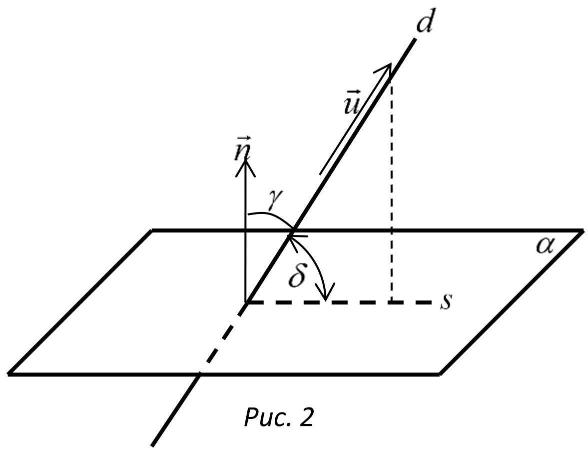

Рис. 2

$$\gamma = \arcsin\frac{|ak+bl+cm|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Рівняння ортогональної проекції похилої на площину (прямої s) можна отримати у вигляді системи рівнянь двох площин, одною з яких є площина α, а другою – площина β, яка містить пряму $d \in \beta$ та проходить перпендикулярно до $\beta \perp \alpha$.

Приклади розв'язання задач.

Задача 1. *Знайти точку, симетричну до точки* $S(2;3;-1)$ *відносно площини* α*, заданої рівнянням* $x - y + 2z - 3 = 0$.

Розв'язання. Складемо параметричні рівняння прямої SS' яка перпендикулярна до площини α Для цього використаємо точку S та вектор $\vec{n}(1,\ -1,\ 2)$, який, будучи перпендикулярним до площини α, буде паралельним до прямої (рис. 3). Дістаємо

$$x = 2 + t,\ y = 3 - t,\ z = -1 + 2t\ .$$

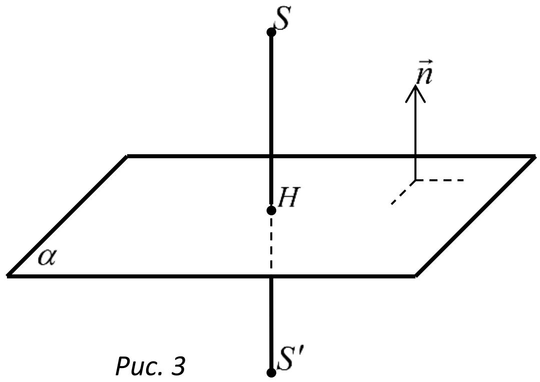

Рис. 3

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 3 - t, \\ z = -1 + 2t, \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases},$$

знаходимо $t = 1,\ x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$ Знайдена точка $H(3,\ 2,\ 1)$ є точкою перетину прямої SS' із заданою площиною. Нехай $S'(x',\ y',\ z')$ - точка, симетрична точці S відносно площини $\alpha.$ Тоді точка $H(3,\ 2,\ 1)$ буде серединою відрізка SS'. Із рівностей $\frac{x'+2}{2} = 3,\ \frac{y'+3}{2} = 2,\ \frac{z'-1}{2} = 1$ дістаємо $x' = 4,\ y' = 1,\ z' = 3$.

Відповідь. $S'(4,\ 1,\ 3)$.

Задача 2. *Знайти точку, яка симетрична до точки* $A(0,\ 2,\ -1)$ *відносно прямої* $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

Розв'язання. Один із способів розв'язання поставленої задачі розглянуто у попередній темі. Зупинимося на іншому. Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку $A(0,\ 2,\ -1)$ та проходить перпендикулярно до заданої прямої. Використавши напрямний вектор прямої $\vec{u} = (1,\ 1,\ 2)$ та точку A, отримаємо її рівняння у виді $x + (y-1) + 2(z-1) = 0$ або $x + y + 2z - 3 = 0$. Знайдемо точку перетину знайденої площини із заданою прямою. Записавши рівняння останньої у параметричному виді, отримуємо систему

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0, \\ x=3+t, \\ y=1+t, \\ z=1+2t \end{cases},$$

з якої знаходимо шукану точку перетину $C(2,\,0,\,-1)$. Для відшукання точки $A'(x,\,y,\,z)$, яка симетрична до точки A відносно точки C, отримуємо співвідношення $\frac{x}{2}=2,\ \frac{y+2}{2}=0,\ \frac{z-1}{2}=-1$, звідки $x=4,\ y=-2,\ z=-1$.

Відповідь. $A'(4,\,-2,\,-1)$.

Задача 3. *На якій відстані від початку координат проходить пряма* d *:* $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ *?*

Розв'язання. Проведемо через точку $O(0,\,0,\,0)$ площину α перпендикулярно до заданої прямої та знайдемо точку $H(x;y;z)$ перетину прямої d із α. Вектор $\vec{u}(2;-2;1)$, який паралельний до прямої d, буде перпендикулярним до α. Тому рівняння α запишеться у виді $2x-2y+z=0.$ Запишемо рівняння прямої d у параметричному виді та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-3-2t, \\ z=1+t, \\ 2x-2y+z=0. \end{cases}$$

Дістаємо $t=-1,\ x=-1,\ y=-1,\ z=0$. Отже, $H(-1;-1;0.)$. Довжина відрізка OH є шуканою відстанню.

Відповідь. $\sqrt{2}$.

Задача 4. *Скласти рівняння площини, що проходить паралельно до прямих* $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=1+t, \\ z=-3-t \end{cases}$ *і* $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ *та однаково віддалена від них.*

Розв'язання. Очевидно, що перша пряма визначається точкою $A(3,\ 1,\ -3)$ та напрямним вектором $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$, а друга - точкою $B(3,\ 1,\ 1)$ та напрямним вектором $\vec{v}=(1,\ 1,\ 2)$. Шукана площина буде паралельною до цих векторів та проходитиме через середину відрізка AB - точку $C(3,\ 1,\ -1)$. Її рівняння запишемо у виді $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ або $3\cdot(x-3)-5\cdot(y-1)+1\cdot(z+1)=0$.

Відповідь. $3x-5y+z-3=0$.

Задача 5. *На прямій* $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ *знайти точку, рівновіддалену від точок* $A(-1,\ 2,\ 0)$ *та* $B(3,\ -3,\ -1)$.

Розв'язання. Через середину відрізка AB - точку $H\left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ проведемо площину перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}=(4,\ -5,\ -1)$. Її рівняння запишеться у виді $4\cdot(x-1)-5\cdot\left(y+\dfrac{1}{2}\right)-1\cdot\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=0$ або $4x-5y-z-7=0$. Всі точки цієї площини рівновіддалені від точок $A(-1,\ 2,\ 0)$ та $B(3,\ -3,\ -1)$. Знайдемо точку перетину одержаної площини із заданою прямою. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=-1+2t, \\ 4x-5y-z-7=0 \end{cases}$$ отримаємо $t=-2 \Rightarrow x=-2,\ y=-2,\ z=-5$.

Відповідь. $(-2,\ -2,\ -5)$.

Задача 6. *Промінь світла виходить із точки* $A(3,\ 1,\ -3)$ *та в напрямку вектора* $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ *падає на дзеркальну площину* $x-y-2z-5=0$. *Скласти рівняння відбитого від площини променя.*

Розв'язання. Знайдемо точку перетину падаючого променя з площиною. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=1+t, \\ z=-3-t, \\ x-y-2z-5=0 \end{cases}$. Дістаємо

$t=-1,\ x=1,\ y=0,\ z=-2$. Таким чином, початок відбитого променя знаходиться у точці $B(1,\ 0,\ -2)$. Щоб визначити його напрям, знайдемо точку A', симетричну до точки A відносно заданої площини. Пряма $\begin{cases} x=3+t, \\ y=1-t, \\ z=-3-2t \end{cases}$ проходить через точку A перпендикулярно до заданої площини. Із системи

$\begin{cases} x=3+t, \\ y=1-t, \\ z=-3-2t, \\ x-y-2z-5=0 \end{cases}$ знаходимо $t=-\frac{1}{2},\ x=\frac{5}{2},\ y=\frac{3}{2},\ z=-2$. Використовуючи знайдену точку перетину $C\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2},\ -2\right)$, знаходимо точку $A'(x,\ y,\ z)$. Оскільки C є серединою відрізка AA', то виконуються рівності $\frac{x+3}{2}=\frac{5}{2},\ \frac{y+1}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{z-3}{2}=-2$, звідки $x=2,\ y=2,\ z=-1$. Тепер можна знайти напрям відбитого променя. Він задається вектором $\overrightarrow{A'B}=(-1,\ -2,\ -1)$. У параметричних рівняннях прямої $A'B$: $\begin{cases} x=1-t, \\ y=-2t, \\ z=-2-t \end{cases}$ точці A', яка не належить шуканому променю, відповідає значення параметра $t=-1$, а точці B - значення $t=0$. Тому щоб виділити з усіх точок прямої тільки точки відбитого променя накладемо додаткову умову $t\geq 0$

Відповідь. $\begin{cases} x=1-t, \\ y=-2t, \quad t\geq 0. \\ z=-2-t \end{cases}$

Задача 7. *Скласти рівняння ортогональної проекції прямої* d *, заданої канонічним рівнянням* $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ *на площину , задану рівнянням* $2x-y+3z-4=0$.

Розв'язання. Скористаємось вектором $\vec{n}(2,-1,3)$ який перпендикулярний до площини α та вектором $\vec{u}(1,2,-2)$, який паралельний до прямої d . Дані вектори не колінеарні, тому пряма d не перпендикулярна до α, отже її проекцією буде деяка пряма $s\subset\alpha$. Другу площину β , якій належить s, проведемо через пряму d ,перпендикулярно до α. Очевидно, що площина β проходить через точку $A(2,-1,3)$, паралельно до векторів $\vec{u}$ та $\vec{n}$. Скориставшись співвідношенням (2), дістаємо рівняння площини β :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $4(x-2)-7(y+1)-5(z-3)=0$, або, остаточно, $4x-7y-5z=0.$ Шукане рівняння прямої подамо у виді (10), як перетин площин α та β .

Відповідь. $\begin{cases} 2x-y+3z-4=0; \\ 4x-7y-5z=0. \end{cases}$

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-1}$ та площини $2x-y+3z+23=0$.
2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ та площини $3x-y+4z=0$.
3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2,\ 1,\ 1)$ перпендикулярно до площини $3x-4y-4z=0$.
4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1,\ 3,\ 2)$ перпендикулярно до площини $x-3y+2z-1=0$.
5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2,\ -5,\ 1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{2}$.
6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{4}$.
7. При яких значеннях параметра a площина $ax+2y-z+7=0$ паралельна прямій $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{2}$?

8. При яких значеннях параметра a пряма $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ та площина $ax+y+z-1=0$ паралельні?

9. При яких значеннях параметрів a та b пряма $\frac{x-2}{a}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-6}$ перпендикулярна до площини $3x-2y+bz+1=0$?

10. При яких значеннях коефіцієнтів a та b площина $ax+by+9z-1=0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$?

11. При яких значеннях параметрів a та b пряма $\begin{cases} x=3+4t, \\ y=1-4t, \\ z=-3+t \end{cases}$ належить площині $ax+2y-4z+b=0$?

12. Знайти ортогональну проекцію точки $M(0,\ -3,\ -2)$ на площину $x-3y-2z+1=0.$

13. Знайти ортогональну проекцію точки $M(2,\ 5,\ 1)$ на площину $2x-3y+z-4=0$.

14. Знайти точку, симетричну до точки $A(1,\ 2,\ 3)$ відносно прямої $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}.$

15. Знайти точку, симетричну до точки $A(3,\ 0,\ -2)$ відносно прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$.

16. Знайти точку, симетричну до точки $A(-1,\ 2,\ 0)$ відносно площини $4x-5y-z-7=0$.

17. Знайти точку, симетричну до точки $A(1,\ 2,\ 3)$ відносно площини $2x+4z-9=0$.

18. На площині xOy визначити точку, сума відстаней від якої до точок $A(-1,\ 2,\ 5)$ та $B(11,\ -16,\ 10)$ є найменшою.

19. На площині $2x+3y-4z-15=0$ визначити точку, модуль різниці відстаней від якої до точок $A(5,\ 2,\ -7)$ та $B(7,\ -25,\ 10)$ є найбільшою.

20. Обчислити відстань від точки $A(-1,\ 3,\ 3)$ до прямої $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$.

21. Обчислити відстань від точки $A(2,\ -1,\ 0)$ до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$.

22. Скласти рівняння прямої, яка містить висоту AH трикутника ABC, якщо $A(-1,\ 1,\ 2)$, $B(1, 1,\ 0)$, $C(2,\ 6,\ -2)$.

23. Скласти рівняння площини, що проходить паралельно до прямих $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-1+t, \\ z=1-t \end{cases}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$ та однаково віддалена від них.

24. Задані площина $x-y-z-6=0$ та дві точки $A(1,-1,\ -1)$, $B(-1, 2,\ 0)$. Промінь світла проходить через точку A і, відбившись від площини, проходить через точку B. Скласти рівняння прямих, які містять падаючий та відбитий промені.

Відповіді до задач:

1. $(-7,\ 6,\ -1)$.
2. $(6,\ -2,\ -5)$
3. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{-4}$
4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-2}{2}$
5. $3x+y+2z-3=0$
6. $2x+5y+4z-4=0$
7. $a=-2$
8. $a=-1$
9. $a=-6,\ b=3$.
10. $a=6,\ b=-3$.
11. $a=3,\ b=-23$.
12. $(-1,\ 0,\ 0)$
13. $(4,\ 2,\ 2)$
14. $A'(1,\ 2,\ 3)$
15. $A'(2,\ 2,\ -1)$
16. $A'(3,\ -3,\ -1)$
17. $A'(0,\ 2,\ 1)$
18. $(3,\ -4,\ 0)$
19. $(-1,\ 3,\ -2)$
20. $\sqrt{14}$
21. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$
22. $\begin{cases} 5x+y+5z-6=0 \\ x+5y-2z=0 \end{cases}$
23. $x-2y+2z+3=0.$
24. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{-5}$,
    $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{-3}$

Практичне заняття №13. Контрольна робота №2.

Зразок контрольної роботи №2

1. Скласти рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції, якщо основи трапеції лежать на прямих $l_1: 2x+3y-5=0$ і $l_2: 2x+3y+5=0$.

2. Обчислити площу трикутника утвореного прямою $l: x+8y-4=0$ і координатними осями.

3. Задано вершини трикутника ABC: $A(9,8)$, $B(1,2)$, $C(4,-2)$. Знайти

- Рівняння висоти AH, бісектриси BL і медіани CM.
- Задати аналітично множину точок, розташованих всередині трикутника ABC.
- Знайти проекцію точки A на пряму BC.
- Знайти довжину висоти BH.
- Знайти центр описаного навколо трикутника ABC кола.

4. У просторі задано вершини піраміди $S(0;-2;5)$, $K(-3;-1;1)$, $L(-5;-9;-2)$; P(-5;7;6).

- Скласти рівняння площини KLP і рівняння висоти SH.
- Скласти рівняння проекції прямої SK на площину KLP.
- Обчислити довжину висоти |SH|.
- Знайти двогранний кут при ребрі KL.
- Знайти кут нахилу SK до площини (KLP).
- Знайти плоский кут $\angle KSL$.
- Знайти координати точки S' симетричної до точки S відносно площини (KLP).

Питання для самоперевірки

(перелік питань, які виносяться на колоквіум чи екзамен

у першому семестрі)

1. Поняття вектора. Основні означення. Колінеарні та компланарні вектори.
2. Додавання та віднімання векторів. Властивості даних операцій
3. Множення вектора на скаляр. Властивості.
4. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Основні теореми.
5. Базис системи векторів. Приклади.
6. Координати вектора. Дії над векторами в координатній формі.
7. Ортонормовані базиси. Довжина вектора.
8. Поняття загальної афінної системи координат. Координати точки.
9. Прямокутна декартова системи координат. Відстань між двома точками.
10. Поділ відрізка у даному відношенні. Теорема Чеви. Приклади.
11. Скалярний добуток двох векторів. Означення. Властивості (без використання координат). Застосування.
12. Обчислення скалярного добутку двох векторів за допомогою координат. Властивості (через координати).
13. Означення векторного добутку. Основні властивості даної операції та її застосування до розв’язування задач.
14. Поняття мішаного добутку трьох векторів. Властивості. Застосування до розв’язування задач.
15. Алгебраїчні лінії. Поняття порядку лінії.
16. Геометричні образи рівнянь першого степеня з двома змінними.
17. Різні способи задання прямої на площині.
18. Частинні випадки загального рівняння прямої.
19. Відстань від точки до прямої.

20. Взаємне розташування кола та прямої.
21. Взаємне розташування двох прямих на площині (випадок загального рівняння). Умова паралельності. Кут між двома прямими. Умова перпендикулярності.
22. Взаємне розташування двох прямих на площині (випадок рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом). Умова паралельності. Кут між двома прямими. Умова перпендикулярності.
23. Відстань між двома паралельними прямими.
24. Геометричний зміст знаку виразу $ax + by + c$.
25. Пучок прямих.
27. Геометричні образи рівнянь першого порядку з трьома змінними.
28. Різні способи задання площини.
29. Загальне рівняння площини та його частинні випадки.
30. Різні способи задання прямої в просторі.
31. Відстань від точки до площини.
32. Геометричний зміст знаку виразу $ax + by + cz + d$.
33. Взаємне розташування двох площин. Умова паралельності. Кут між двома площинами. Умова перпендикулярності.
34. Відстань між двома паралельними площинами.
35. Пряма і площина в просторі. Кут між прямою та площиною.
36. Взаємне розташування двох прямих в просторі.
37. Відстань між двома мимобіжними прямими.
38. Рівняння спільного перпендикуляра.

Навчальне видання

Катерина Миколаївна Копорх, Роман Іванович Собкович

Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії
Частина 1.
Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня із двома та трьома змінними

Підписано до друку 28.10.2016. Формат 1/16

Папір офсетний. Друк цифровий.

Гарнітура Times New Roman. Умовн. Друк. Арк.2.6.

Тираж 100. Зам №6/11/16 від 28.11.2016

Віддруковано: приватний підприємець Бойчук А.Б.

свідоцтво №11196

76018, м. Івано-Франківськ,

вул. Сахарова №23\12

тел. 0342-55-94-54