Курс лекцій

з вищої математики

для студентів спеціальності

102 Хімія та 014 Середня освіта/014.06 Хімія

Лекція №1
Визначники 2-го і 3-го порядків та їх властивості.

Нехай задані деякі дійсні числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

Визначником другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ називаються ***елементами визначника.*** У визначнику другого порядку елементи a_{11}, a_{22} складають головну діагональ, а елементи a_{12}, a_{21} – побічну. З означення визначника другого порядку випливає правило для його обчислення: *щоб обчислити визначник другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі відняти добуток елементів, що стоять на побічній діагоналі.*

Нехай задані деякі дійсні числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$.

Визначником третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33} \cdot a_{21}. \quad (2)$$

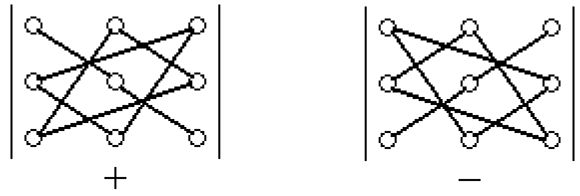
За аналогією з визначником другого порядку у визначнику третього порядку також виділяють головну (елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}) та побічну (елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}) діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників:

перші три доданки в правій частині формули (2) беруться зі знаком "+" і є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників, в яких одна сторона паралельна до головної діагоналі;

інші три доданки в правій частині формули (2) беруться зі знаком "-" і є добутками елементів, що стоять на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників, в яких одна сторона паралельна до побічної діагоналі.

Графічно це можна зобразити так:



В загальному випадку елементи визначника позначають a_{ij}. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається вираз $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \qquad (3)$$

Таким чином, алгебраїчне доповнення та мінор елемента a_{ij} визначника мають однакові модулі і рівні, якщо число $i+j$ парне, та протилежні за знаком, якщо число $i+j$ непарне.

Властивості визначників:

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями (така операція називається ***транспонуванням***).
2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то він змінить свій знак на протилежний.
3. Якщо один із рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.
4. Спільний множник, який мають усі елементи деякого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.
5. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме відмінне від нуля число.
6. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
7. Якщо визначник має пропорційні рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення. Ця властивість називається розкладом визначника за рядком (стовпцем). Її використовують для обчислення визначників вищих порядків.

Лекція №2
Матриці та дії над ними
План

1. **Основні поняття**
2. **Додавання матриць**
3. **Множення матриці на число**
4. **Множення матриць**
5. **Обернена матриця**
6. **Ранг матриці**

1. Основні поняття

Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, де $i=1,2,...,m$ та $j=1,2,...,n$, яка складається з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається ***матрицею***. Коротко матрицю позначають так: $A=\left(a_{ij}\right)$.Числа a_{ij} називаються елементами матриці, причому індекс i елемента a_{ij} означає номер рядка, а індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Число m рядків матриці та число n її стовпців утворюють ***розмірність матриці***, яка позначається $m\times n$, а саму матрицю з вказаною її розмірністю записують $A_{m\times n}$.

Якщо $m=n$, то матриця називається ***квадратною***. Кількість рядків квадратної матриці називається її порядком. Матриця, в якій лише один рядок, називається ***матрицею-рядком***, а матриця, в якій лише один стовпець, – ***матрицею-стовпцем***.

Матриця, яка утворюється з даної матриці $A_{m\times n}$ заміною всіх її рядків відповідними стовпцями називається ***транспонованою*** до матриці $A_{m\times n}$. Транспонована матриця має розмірність $n\times m$ і позначається $A^{*}_{n\times m}$.

Дві матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ однакових розмірностей називаються ***рівними***, якщо рівні їх відповідні елементи: $a_{ij}=b_{ij}$. Матриця, в якій всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою***. Як правило, її позначають буквою *O*.

Наприклад, матриці *A, B, C, D, E,* де $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ є відповідно матрицями розмірності 2×3, квадратною порядку 2, рядком, стовпцем, одиничною 3-го порядку.

Кожна квадратна матриця *A* має свій визначник, який позначається символом $|A|$ або $det\,A$. Квадратна матриця A називається ***виродженою,*** якщо її визначник $\det A=0$ і ***невиродженою,*** якщо $\det A\neq 0$.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$, то $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 0\end{vmatrix}=-2$.

Прямокутна матриця, в якій кількість рядків не дорівнює кількості стовпців, визначника не має.

Над матрицями виконуються за певними правилами дії (операції) додавання, множення та множення матриці на число.

Наприклад, 3

2. Додавання матриць

Сумою двох матриць $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ однакових розмірностей називається матриця

$$C_{m\times n}=(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),$$

кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A та B.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 6\end{pmatrix}$, то

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+(-1) & -1+1 & 4+0\\ 3+1 & 1+7 & 0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 4 & 8 & 6\end{pmatrix}.$$

Для дії до додавання матриць справедливі такі властивості:

1) $A+B=B+A$ – комутативність додавання;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ – асоціативність додавання;

3) $A+O=A$;

4) Для кожної матриці A існує протилежна їй матриця $(-A)$ така, що задовольняє умову $A+(-A)=O$. Кожний елемент матриці $-A$ є протилежним до відповідного елемента матриці A.

3. Множення матриці на число

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k називається матриця (ka_{ij}) тієї самої розмірності. Вона позначається $kA_{m\times n}$ або $A_{m\times n}\cdot k$. При цьому число k називають числовим (скалярним) множником, а матрицю $A_{m\times n}$ – матричним множником.

У розгорнутому вигляді означення множення матриці на число можна записати так:

$$k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}k=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}$$

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$, то $3A=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 12 & -6 & 15\end{pmatrix}$.

Дія множення матриці на число має такі властивості:

1) $k(tA)=(kt)A$.

2) $k(A+B)=kA+kB$.

3) $(k+t)A=kA+tA$.

4. Множення матриць

Множення двох матриць означається лише для узгоджених матриць. Матриця $A_{m\times n}$ називається узгодженою з матрицею $B_{n\times k}$, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці *B*. Зокрема, квадратні матриці одного й того самого порядку завжди узгоджені. Зауважимо також, що з узгодженості матриці *A* з матрицею *B* не випливає, взагалі кажучи, узгодженість *B* з *A*.

Наприклад, якщо маємо матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 7 & 6\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, матриця *A* є узгодженою з матрицею *B*, але матриця *B* не є узгодженою з матрицею *A*.

Добутком матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицю $B_{n\times k}=\left(b_{ij}\right)$ називається така матриця $C_{m\times k}=\left(c_{ij}\right)$, в якій елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи j-го стовпця матриці *B*.

Тобто $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$, де $i=1,2,...,m$ та $j=1,2,...,k$.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, то

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot1 & 1\cdot4+2\cdot0\\ 3\cdot1+4\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot1 & 3\cdot4+4\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ -1 & 4 & 12\end{pmatrix}.$$

З означення множення матриць випливає, що дві квадратні матриці завжди можна перемножити. Зокрема квадратну матрицю можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрата. При цьому одержимо квадратну матрицю тієї самої розмірності. Тому можна розглядати будь-який натуральний степінь A^n квадратної матриці *A*.

Дія множення узгоджених матриць має такі властивості:

1) Множення матриць не завжди комутативне, тобто якщо для матриць *A* та *B* існують добутки *AB* та *BA*, то в загальному випадку $AB\neq BA$.
2) $\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$ – асоціативність множення.
3) $\left(A+B\right)C=AC+BC$ –дистрибутивність множення відносно додавання.
4) $A\cdot O=O$, $O\cdot A=O$.
5) $A\cdot E=A$, $E\cdot A=A$.
6) Визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників. Тобто $|AB|=|A|\cdot|B|$

5. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається ***оберненою до матриці*** A, якщо виконується умова: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема. ***Квадратна матриця*** A ***має обернену матрицю тоді і тільки тоді, коли вона невироджена. Обернена матриця для даної невиродженої матриці єдина і обчислюється за формулою:*** $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2}\\ ... & ... & ... & ...\\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn}\end{pmatrix}$, ***де*** A_{ij} ***– алгебраїчні доповнення елемента*** a_{ij} ***визначника матриці*** A.

6. Ранг матриці

Нехай $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ – деяка матриця. Виділимо в матриці *A* будь-які k рядків та k стовпців, де k не більше з жодного з чисел m і n.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців, називається мінором k-го порядку матриці *A*.

Рангом матриці *A* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Ранг матриці *A* позначається $r(A)$ і має такі властивості:

1) $0 \le r(A) \le \min(m; n)$.

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $A = O$.

3) Для квадратної матриці n-го порядку $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця *A* невироджена.

Обчислення рангу матриці за означенням громіздке. Тому на практиці для знаходження рангу матриці застосовують метод елементарних перетворень матриці. До таких перетворень відносять:

1) перестановку місцями будь-яких двох рядків або стовпців матриці;
2) множення або ділення будь-якого рядка або стовпця матриці на число, відмінне від нуля;
3) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Виявляється, що при таких елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється. Тому матрицю за допомогою цих перетворень зводять до такого вигляду, коли стає очевидним значення її рангу.

Наприклад, знайдемо ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Виконуючи елементарні перетворення матриці *A*, одержимо:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже, $r(A) = 3$.

Пояснимо виконані перетворення. Знак «$\leftrightarrow$» між матрицями вказує, що вони отримані одна з одної елементарними перетвореннями. На першому кроці помножили перший рядок відповідно на -3, -3, -5 і додали по черзі до другого, третього і четвертого рядка. На другому кроці перший стовпець помножили на 3, 3, 2, 5 і додали відповідно до інших стовпців, а потім перший стовпець помножили на (-1); після цього другий рядок помножили на -2 і додали до третього і четвертого. На останньому кроці другий стовпець спочатку помножили на $-\frac{1}{4}$, а потім його помножили на 7, 3, 11 і додали до третього, четвертого і п'ятого стовпців та останній рядок помножили на $-\frac{1}{2}$. Одержана матриця має ранг 3. Отже, $r(A) = 3$.

Лекція №3

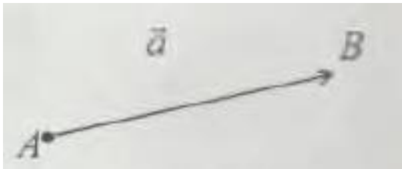
Вектори. Дії над векторами у координатній формі

1. Скалярні і векторні величини. Поняття вектора .

Серед величин, які зустрічаються в математиці, механіці, фізиці та інших розділах науки, є такі, що повністю визначаються тільки числовим значенням (числом), наприклад: довжина, площа, об'єм, температура, густина тощо. Такі величини називаються ***скалярними.*** Поряд з ними є величини, які для свого визначення потребують знання не тільки числового значення, а і напряму, наприклад: сила, швидкість, прискорення, струм тощо. Такі величини називаються ***векторними.***

Скалярні величини характеризуються за допомогою дійсних чисел, які зображуються точками на числовій осі.

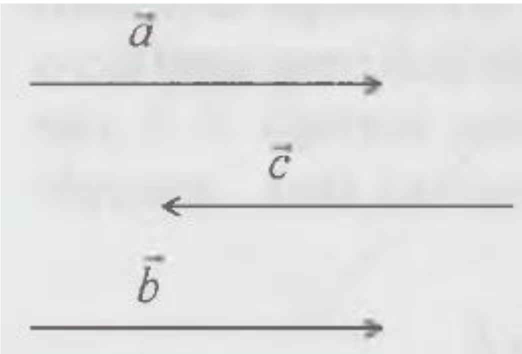
Для характеристики зображення векторних величин застосовують ***вектори***. Будь-яка впорядкована пара точок A і B простору визначає ***напрямлений відрізок***, або ***вектор***. Першу точку A називають ***початком вектора***, а другу B –- ***кінцем вектора***. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до його кінця. Вектор з початком A та кінцем B позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або символом $\vec{a}$. На рисунку напрям вектора показують стрілкою.



Відстань між початком вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його кінцем називається ***довжиною*** **(*модулем*)** ***вектора*** і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігається, називається ***нульовим*** і позначається $|\vec{0}|$. Довжина нульового вектора дорівнює 0, а його напрям невизначений.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається ***одиничним***. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається ***ортом вектора*** $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}_0$.



Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються ***колінеарними***. Якщо колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям, то їх називають ***співнапрямленими*** і записують $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

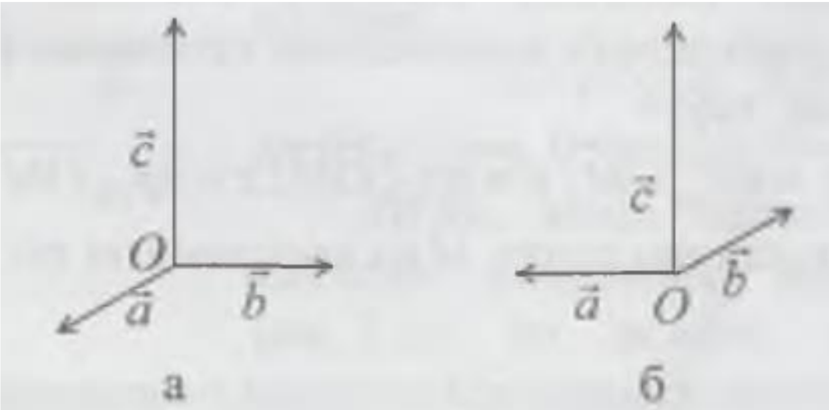
Якщо колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ мають протилежні напрями, то їх називають ***протилежно напрямленими*** і записують $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони співнапрямлені і мають однакову довжину. Рівність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ записують так: $\vec{a} = \vec{b}$. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***протилежними***, якщо вони протилежно напрямлені і мають однакову довжину. Це записують так: $\vec{a} = -\vec{b}$ або $\vec{b} = -\vec{a}$.

Зауваження. В означенні рівності векторів не вимагається певне розміщення їх у просторі. Тому вектори можна переносити паралельно самим собі. У зв'язку з цим такі вектори у математиці називаються ***вільними***. Але в деяких практичних ситуаціях вільність переміщення вектора обмежується. Тоді поряд з вільними розглядаються так звані ***ковзні*** та *зв'язані* вектори. Прикладом ковзного вектора є сила, прикладена до абсолютно твердого тіла. Прикладом зв'язаного вектора є сила, прикладена до якоїсь точки нетвердого, наприклад, пружного тіла.

Вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах, називаються ***компланарними***. Наприклад, два довільних вектори завжди компланарні, оскільки вони лежать або в одній площині, або в паралельних площинах. Тому питання про компланарність векторів є змістовним для трьох і більшого числа векторів.

Впорядкована трійка векторів *($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$)* називається правою (рис.а), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. В іншому випадку трійка векторів *($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$)* називається лівою (рис.б).



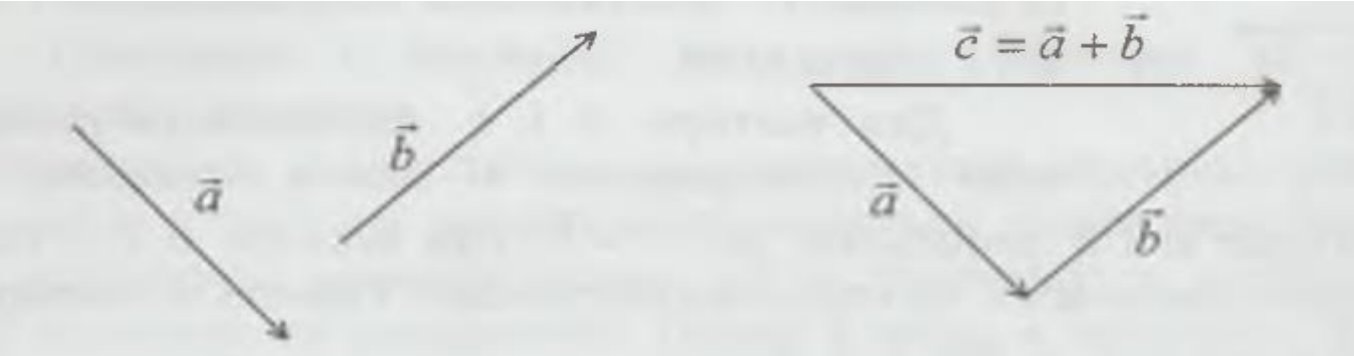
2. Лінійні дії над векторами

При виконання дій над векторами активно використовується їх вільність, тобото можливість паралельного перенесення векторів у просторі. До лінійних дій над векторами відносять дії додавання і віднімання векторів та множення вектора на число.

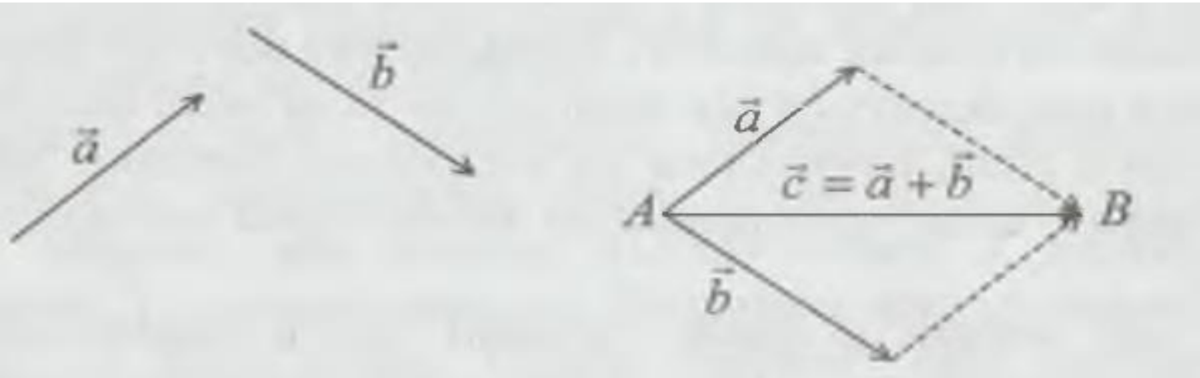
Означення 2.1. *Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, направлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.*

Записують суму векторів так: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Таким чином, щоб до вектора $\vec{a}$ додати вектор $\vec{b}$, треба вектор $\vec{b}$ перенести паралельно самому собі так, щоб його початок збігався з кінцем вектора $\vec{a}$, і з'єднати початок вектора $\vec{a}$ з уже перенесеним кінцем вектора $\vec{b}$. Це правило додавання двох векторів називається правилом трикутника.

Графічно це можна зобразити так:



Суму двох векторів можна знайти також за правилом паралелограма:

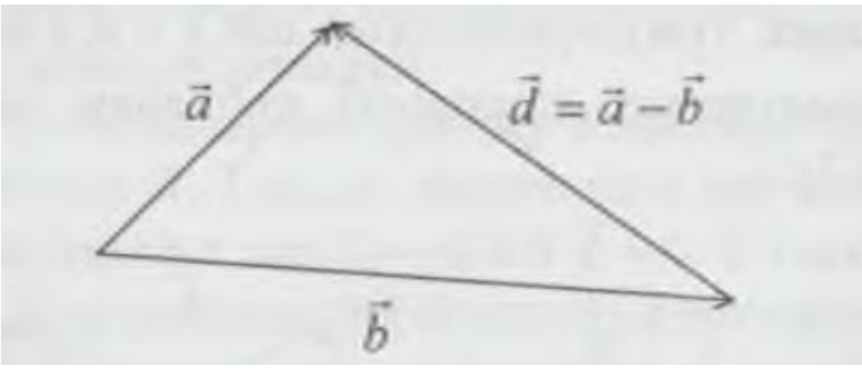


За цим правилом вектори переносять паралельно самим собі так, щоб після перенесення вони мали спільний початок *A*. Далі на векторах як на сторонах будують паралелограм. Його діагональ, що має початок в точці A, а кінець в точці B, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **.**

Зауваження. Результат додавання двох векторів, тобто їх сума, визначається однозначно і не залежить від правила, за яким здійснювалось додавання.

Правило трикутника додавання двох векторів узагальнюється на випадок суми будь-якого скінченного числа векторів: щоб знайти (побудувати) суму будь-якого скінченного числа векторів, треба в кінці першого вектора побудувати другий, в кінці другого – третій і т.д. Вектор, що виходить з початку першого вектора до кінця останнього, і буде сумою даних векторів. Звідси випливає, що сума векторів, які утворюють замкнену ламану лінію, дорівнює нульовому вектору.

Означення 2.2. *Різницею двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *називається такий вектор* $\vec{d}$ *, що* $\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$.



Зауваження. Звертаємо увагу, що відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ – це теж саме, що до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Означення 2.3. *Добутком вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число $k \neq 0$ називається вектор, довжина якого дорівнює $|\vec{a}| \cdot |k|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$, і протилежний йому, якщо $k < 0$. Якщо $\vec{a} = 0$ або $k = 0$, то їх добуток є нульовим вектором.*

Записують добуток вектора $\vec{a}$ на число k так: $\vec{a}k$ або $k\vec{a}$. На рисунку показано вектори $\vec{a}$, $0,5\vec{a}$, $-3\vec{a}$.

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує єдине число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки, якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Лінійні дії над векторами мають такі властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
4. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
5. $m(k\vec{a}) = (mk)\vec{a}$.
6. $(m + k)\vec{a} = m\vec{a} + k\vec{a}$.
7. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

3. Скалярний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається дійсне число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними і позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$.*

Тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \qquad (1)$$

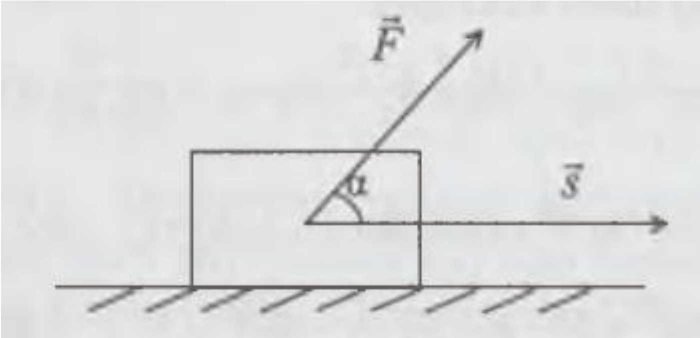
Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Оскільки $|\vec{a}| \cos\varphi = pr_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}| \cos\varphi = pr_{\vec{a}}\vec{b}$, то маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{b}|\, pr_{\vec{a}}\vec{b} \qquad (2)$$

Формули (2) виражають геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

Скалярний добуток має також фізичний зміст: *робота* А *сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{s}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут* α, *дорівнює $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$*

або $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.



Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

Розглянемо тепер властивості скалярного добутку двох векторів. Ці властивості поділяються на алгебраїчні та геометричні.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – комутативність скалярного множення.

2. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – асоціативність скалярного множення відносно множення на число k .

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ – дистрибутивність скалярного множення відносно додавання векторів.

Геометричні властивості скалярного добутку

4. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, *якщо* $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, *якщо* $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\vec{a} \perp \vec{b}$.

6. *Якщо* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***, то*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$***;*** *якщо* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ***, то*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$**.**

7. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ – *скалярний квадрат вектора* $\vec{a}$.

Використовуючи зазначені вище властивості скалярного добутку двох векторів, одержимо ще одну формулу для обчислення цього добутку. Нехай $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *та* $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. *Тоді*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \qquad (3)$$

З формули (3) випливають такі важливі висновки:

1) Вектори $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *та* $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ *перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли має місце рівність:*

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \qquad (4)$$

2) Довжина вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *визначається за формулою:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (5)$$

3) Кут φ між векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ *та* $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ *обчислюється за формулою:*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (6)$$

4. Векторний добуток векторів

Означення. *Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими умовами:*

1) *довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;*
2) *вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;*
3) *якщо вектор $\vec{c} \neq \vec{0}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.*

Векторний добуток позначається одним із таких символів:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Розглянемо тепер властивості векторного добутку двох векторів. Ці властивості поділяються на алгебраїчні та геометричні.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$ *– антикомутативність векторного множення.*

2. $\left[k\vec{a}\times\vec{b}\right] = k\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$; $\left[\vec{a}\times k\vec{b}\right] = k\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ *– асоціативність відносно скалярного множника k.*

3. $\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right] = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\times\vec{c}\right]$ *– дистрибутивність відносно додавання векторів.*

Геометричні властивості векторного добутку

4. *Векторний добуток векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.*
5. *Модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку, тобто $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.*

6. *Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:* $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$, $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$.

Використовуючи зазначені вище властивості векторного добутку двох векторів, одержимо ще одну формулу для обчислення цього добутку. Нехай $\vec{a}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $\vec{b}\left(x_2, y_2, z_2\right)$. Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Звідси за властивістю про розклад визначника за його рядком отримаємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (8)$$

5. *Мішаний добуток векторів*

При множенні трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна утворити такі добутки:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Добуток $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ не розглядається. (В цьому випадку маємо множення вектора на число). Добуток $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ називається **подвійним векторним добутком** *трьох векторів. Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту він не має.*

Означення. *Мішаним добутком впорядкованої трійки векторів ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) називається скалярний добуток векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ і вектора $\vec{c}$.*

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ позначається так: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, заданих координатами $\vec{a}\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\vec{c}\left(x_3,y_3,z_3\right)$.Координати вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначаються за формулою (8):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (3) дістанемо:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3.$$

За властивістю визначника про розклад його за елементами третього рядка одержимо, що

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Властивості мішаного добутку векторів:

1. Якщо у мішаному добутку поміняти місцями будь-які два множники, то мішаний добуток змінить свій знак на протилежний: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$

2. *При циклічній перестановці множників мішаний добуток векторів не змінюється:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

3. *У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутку можна поміняти місцями:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

4. *Модуль* $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$ *мішаного добутку векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *дорівнює об'єму* V *паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку. Тобто* $V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

5. *Якщо* $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}>0$, *то вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *утворюють праву трійку, якщо* $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}<0$, *то вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *утворюють ліву трійку.*

6. *Вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.*

Лекція №4
Похідна функції однієї змінної
План
1. Поняття похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної
2. Правила диференціювання
3. Похідні вищих порядків
4. Похідні основних елементарних функцій (таблиця похідних)

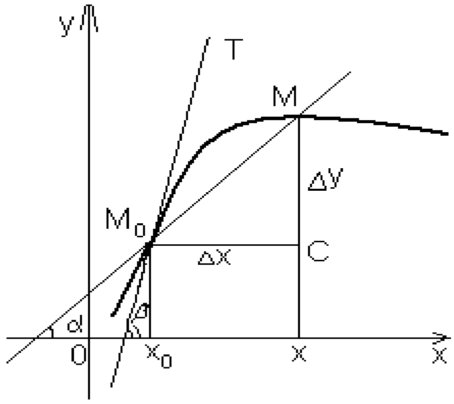
1. Поняття похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_0. Надамо аргументу x_0 приріст Δx такий, щоб точка $x_0 + \Delta x$ була в межах околу точки x_0. Знайдемо відповідний приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 за формулою: $\Delta f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$, то вона називається ***похідною*** функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначається одним з символів $f'\left(x_0\right), \dfrac{df\left(x_0\right)}{dx}$. При цьому кажуть, що функція $y = f(x)$ є ***диференційованою*** в точці x_0. Отже, за означенням похідної функції в точці маємо: $f'\left(x_0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x}$.

Функція $y = f(x)$ називається ***диференційованою*** на деякому проміжку $\left(a;b\right)$, якщо вона є диференційованою в кожній точці цього проміжку. Позначатимемо похідну функції на проміжку символом y' або $f'(x)$.

Геометричний зміст похідної

З геометричної точки зору $f'\left(x_0\right) = k$, де k – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0. Тобто $f'\left(x_0\right) = tg\alpha$, де α – кут між дотичною до графіка функції та додатнім напрямом осі *Ox*. Графічно це можна зобразити на рисунку:



Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 знаходиться за формулою: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Механічний зміст похідної

Нехай точка рухається з змінною швидкістю за законом $s(t)$. Тоді миттєва швидкість руху $v(t)$ в момент часу *t* обчислюється за формулою: $v(t) = s'(t)$. Тобто швидкість точки в момент часу *t* це похідна від шляху.

2. Правила диференціювання

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані на деякому проміжку функції. Тоді справедливі рівності:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – похідна суми (різниці) двох функцій.

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ – похідна добутку двох функцій.

3) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, (де C – стале дійсне число) – сталий множник можна виносити за межі диференціювання.

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ – похідна частки двох функцій.

5) $\left[u(v(x))\right]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ – похідна складеної функції.

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій: 1) $y = 6x^2 + 3x - 2$; 2) $y = x^3 \cdot \sin x$; 3) $y = \dfrac{x+3}{x^5}$.

Розв'язання: 1) $y' = \left(6x^2 + 3x + 2\right)' = \left(6x^2\right)' + \left(3x + 2\right)' = 6 \cdot 2x + 3 = 12x + 3$;

2) $y' = \left(x^3 \cdot \sin x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \sin x + \left(\sin x\right)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x = x^2\left(3\sin x + x\cos x\right)$;

3) $y' = \left(\dfrac{x+3}{x^5}\right)' = \dfrac{(x+3)' \cdot x^5 - \left(x^5\right)' \cdot (x+3)}{\left(x^5\right)^2} = \dfrac{x^5 - 5x^4(x+3)}{x^{10}} = \dfrac{x^5 - 5x^5 - 15x^4}{x^{10}} =$

$= \dfrac{-x^4(4x+15)}{x^{10}} = -\dfrac{4x+15}{x^6}$

3. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому проміжку $(a;b)$. Тоді її похідна $f'(x)$ є функцією, яка може бути визначена на цьому відрізку. Тому функція $f'(x)$ на проміжку $(a;b)$ також може бути диференційованою. Похідну функції $f'(x)$ називають похідною другого порядку або другою похідною функції $f(x)$ і позначають одним із символів $y'', f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$. Отже, за означенням маємо рівність: $y'' = (y')'$. Звідси випливає правило для знаходження похідної другого: щоб знайти похідну другого порядку даної функції $f(x)$ потрібно цю функцію про диференціювати два рази.

Далі, якщо похідна другого порядку функції $f(x)$ є визначеною на проміжку $(a;b)$, то вона є диференційованою на цьому проміжку. Тоді похідну від похідної другого порядку називають похідною третього порядку або третьою похідною функції $f(x)$ і позначають одним із символів $y''', f'''(x), \dfrac{d^2y}{dx^3}, \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}$. Отже, за означенням маємо: $y''' = (y'')'$.

Продовжуючи аналогічні міркування прийдемо до поняття похідної n-го порядку для функції $f(x)$. Похідною n-го порядку або n-ою похідною функції $f(x)$ називається похідна першого порядку від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції. Позначають похідну n-го порядку одним з символів $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}, \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$. Отже, за означенням маємо: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

4. Похідні основних елементарних функцій

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $C' = 0, \quad C \in R$.

2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$.

3. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

4. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$.

5. $\left(e^x\right)' = e^x$.

6. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

7. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.

8. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

9. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

10. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

11. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

12. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.

15. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

16. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Таблиця похідних складених елементарних функцій

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

2. $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$.

3. $\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

4. $\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$.

5. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$.

6. $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$.

7. $\left(\sin u\right)' = u' \cdot \cos u$.

8. $\left(\cos u\right)' = -u' \cdot \sin u$.

9. $\left(tgu\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

10. $\left(ctgu\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

11. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

13. $\left(arctgu\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

14. $\left(arcctgu\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

15. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Лекція № 5

Деякі застосування похідної функції

1. Дослідження функції на екстремум та монотонність

Правило знаходження інтервалів монотонності.

1) Знаходимо область визначення функції.

2) Обчислюємо похідну $f'(x)$ заданої функції $f(x)$.

3) Знаходимо точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує. Ці точки називаються критичними точками функції $f(x)$.

4) Критичними точками область визначення функції $f(x)$ розбивається на інтервали, на кожному з яких похідна $f'(x)$ зберігає свій знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності. Тому далі досліджуємо знак $f'(x)$ на кожному із знайдених інтервалів. Якщо на даному інтервалі $f'(x)>0$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ зростає, якщо ж $f'(x)<0$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ спадає.

5) Якщо функція $f(x)$ на деяких інтервалах області визначення зростає, а на деяких спадає, то вона має точки екстремуму. Характер цих точок визначаємо за правилом:

а) якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

б) якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Приклад 1. Знайти точки екстремуму та інтервали монотонності функції $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

Розв'язання: 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x=3$, при якому перетворюється в нуль знаменник даної функції.

2) Знайдемо похідну функції:

$$y'=\frac{\left(x^2-5\right)'\cdot(x-3)-\left(x^2-5\right)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}=\frac{2x\cdot(x-3)-\left(x^2-5\right)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-x^2+5}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}.$$

3) Критичні точки функції знаходимо з рівнянь: $x^2-6x+5=0$ та $x-3=0$. Розв'язки першого рівняння знаходимо за теоремою Вієта: $x_1=1$, $x_2=5$. Розв'язком другого рівняння є $x_3=3$. Значення $x_3=3$ не входить в область визначення функції.

4) Розіб'ємо числову вісь даними точками на інтервали і визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів. Результати досліджень запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;5)$	5	$(5;+\infty)$
y'	+	0	–	не існує	–	0	+
y	□	2	□	не існує	□	10	□

Отже, якщо $x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$, то функція зростає, а якщо $x\in(1;3)\cup(3;5)$, то функція спадає. Точка $x=1$ є точкою максимуму функції, а точка $x=5$ є точкою мінімуму функції.

$y_{\max}=y(1)=2$, $y_{\min}=y(5)=10$.

2. Дослідження функції на опуклість, вгнутість та знаходження точок перегину

Правило знаходження інтервалів опуклості та вгнутості.

1) Знаходимо область визначення функції.

2) Обчислюємо похідну $f'(x)$ заданої функції $f(x)$.

3) Обчислюємо похідну другого порядку $f''(x)$ заданої функції $f(x)$.

4) Знаходимо точки, в яких похідна другого порядку $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує. Ці точки називаються критичними точками функції $f(x)$ за другою похідною.

5) Критичними точками за другою похідною область визначення функції $f(x)$ розбивається на інтервали, на кожному з яких похідна другого порядку $f''(x)$ зберігає свій знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або вгнутості. Тому далі досліджуємо знак $f''(x)$ на кожному із знайдених інтервалів. Якщо на даному інтервалі $f''(x)>0$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ вгнута, якщо ж $f''(x)<0$, то на цьому інтервалі функція $f(x)$ опукла.

6) Точки з області визначення функції, в яких $f''(x)$ змінює свій знак, є точками перегину даної функції.

Приклад 2. Знайти точки перегину та інтервали опуклості та вгнутості функції $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

Розв'язання: 1), 2) Область визначення та похідну першого порядку даної функції знайдено у ***прикладі 1.***

3) Знайдемо похідну другого порядку:

$$y''=\left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-6x+5\right)'\cdot(x-3)^2-\left(x^2-6x+5\right)\cdot\left((x-3)^2\right)'}{\left((x-3)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-6)\cdot(x-3)^2-2(x-3)\cdot\left(x^2-6x+5\right)}{(x-3)^4}=\frac{2(x-3)\left(x^2-6x+9-x^2+6x-5\right)}{(x-3)^4}=\frac{8}{(x-3)^3}.$$

4) Точок, в яких похідна другого порядку дорівнює нулю немає. Критичною точкою є лише точка $x=3$, в якій похідна другого порядку не існує.

5) Точка $x=3$ розбиває числову вісь на два інтервали. Визначаємо знак похідної другого порядку на кожному з цих інтервалів. Результати досліджень запишемо в таблицю:

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;+\infty)$
y''	$-$	не існує	$+$
y	$\cap$	не існує	$\cup$

Отже, якщо $x\in(-\infty;3)$, то функція опукла, а якщо $x\in(3;+\infty)$, то функція вгнута. Точок перегину немає.

3. Знаходження найменшого і найбільшого значення функції на відрізку

Правило знаходження найменшого та найбільшого значення функції на відрізку $[a;b]$

1) Обчислюємо похідну $f'(x)$ заданої функції $f(x)$.

2) Знаходимо критичні точки функції.

3) Знаходимо значення функції на кінцях відрізка $[a;b]$ та у критичних точках, які належать відрізку $[a;b]$.

4) Серед знайдених значень вибираємо найменше та найбільше.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\sqrt{21+4x-x^2}$ на відрізку $[-1;7]$.

Розв'язання: 1) $y'=\dfrac{\left(21+4x-x^2\right)'}{2\sqrt{21+4x-x^2}}=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{21+4x-x^2}}=\dfrac{2-x}{\sqrt{21+4x-x^2}}$. • 3.

2) Критичні точки знаходимо з рівнянь $2-x=0$ та $21+4x-x^2=0$. Розв'язком першого рівняння є $x_1=2$. Щоб знайти розв'язки другого рівняння, помножимо його ліву і праву частини на число (-1) і запишемо його у вигляді: $x^2-4x-21=0$. Тоді за теоремою Вієта маємо $x_2=-3$ та $x_3=7$.

3) Значення $x_2=-3$ не належить відрізку $[-1;7]$. Знайдемо значення даної функції в точках $x=-1$, $x=2$ та $x=7$. Маємо: $y(-1)=\sqrt{21+4\cdot(-1)-(-1)^2}=\sqrt{21-4-1}=\sqrt{16}=4$;

$y(2)=\sqrt{21+4\cdot2-2^2}=\sqrt{21+8-4}=\sqrt{25}=5$; $y(7)=\sqrt{21+4\cdot7-7^2}=\sqrt{21+28-49}=\sqrt{0}=0$.

Отже, $y_{\min}=0$, $y_{\max}=5$.