Довгий О.Я.

Навчально-методичний посібник

до вивчення розділу

“ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ”

курсу математики

для студентів спеціальності

“Початкова освіта”

УДК 512.643+514
ББК 22.11
Д-12

Навчально-методичний посібник до вивчення розділу «Елементи комбінаторики» курсу математики для студентів спеціальності “Початкова освіта” / Довгий О.Я. – Івано-Франківськ, 2018. – 41 с.

Автор, ураховуючи досвід навчально-методичної роботи зі студентами спеціальності “Початкова освіта”, пропонує методичні рекомендації, щодо вивчення необхідного за обсягом матеріалу розділу “Елементи комбінаторики” курсу математики, яким студенти мають володіти, щоб мати фундамент для подальшого успішного освоєння інших розділів математики.

Зміст

Метою вивчення розділу є познайомити студентів з основними поняттями і методами комбінаторики, необхідними для глибшого засвоєння всього курсу математики, а також підготовити студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області початкової освіти.

Завдання вивчення розділу полягає в розкритті змісту та значення основних понять даного розділу математики, а саме: правила суми, правила добутку, розміщення без повторень, розміщення з повтореннями, перестановок без повторень, перестановок з повтореннями, комбінацій та їх властивостей, трикутника Паскаля.

Методичні рекомендації включають в себе:

– перелік того, що студент повинен знати та вміти в результаті вивчення даного розділу;
– детальний теоретичний матеріал з прикладами розв'язування завдань;
– завдання для виконання на практичному занятті та самостійної роботи студентів;
– комплекс багатоваріантних практичних завдань (домашніх контрольних робіт), які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю з дисципліни;
– список рекомендованої літератури.

Перелік того, що студент повинен знати і вміти

в результаті вивчення даної теми

- **Студент повинен знати** правила суми і добутку, формули і смисл різних видів комбінаторних з'єднань без повторень та з повтореннями.
- **Студент повинен уміти:** встановлювати вид комбінаторної задачі та використовувати формули для підрахунку числа розміщень і перестановок без повторення і з повтореннями та комбінацій, виводити властивості комбінацій, користуватися трикутником Паскаля.

Конспект лекційних занять з прикладами розв’язування завдань

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Вступ

Людині щоденно приходиться міркувати – як скерувати собою в тій чи іншій ситуації. Варіантів іноді дуже багато і щоб зробити те чи інше розміщення, чи переміщення, той чи інший вибір, тобто як скомбінувати (в гарному розумінні цього слова), розумному керівнику потрібно добре подумати. Однією з областей математики, яка нам може допомогти досягти оптимального (найкращого за тим або іншим критерієм) керування, є комбінаторика. Дана математика, в наш час, досягла надзвичайної популярності.

Розглянемо два самі елементарні і майже очевидні правила, які за повного осмислення будь-якої комбінаторної задачі, можуть її розв’язати. Це правило суми й правило добутку.

1. 1. Правило суми

Якщо множини A і B знаходяться у відношенні виключення (не перетинаються), то число елементів множини $A \cup B$ дорівнює сумі чисел елементів множин A і B, тобто:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Це є ***правило суми для множин які знаходяться у відношенні виключення***.

Справедливе також і ***узагальнене правило суми множин кожна можлива пара яких знаходиться у відношенні виключення***:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m).$$

Наприклад, в магазині, для вибору однієї ручки з трьох масляних, десяти чорнильних і п'яти шарикових, потрібно зробити один з 18 (3 + 10 + 5 = 18) можливих виборів.

В попередній задачі фігурують три множини, які попарно не перетинаються. Якщо ж множини перетинаються, тобто містять спільні елементи, то щоб два рази ці спільні елементи не враховувати, потрібно при застосуванні правила суми їх один раз відняти.

Отже *формули правила суми* набудуть такого вигляду:

а) для двох множин:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

б) для трьох множин:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$$
$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) +$$
$$+ n(A \cap B \cap C).$$

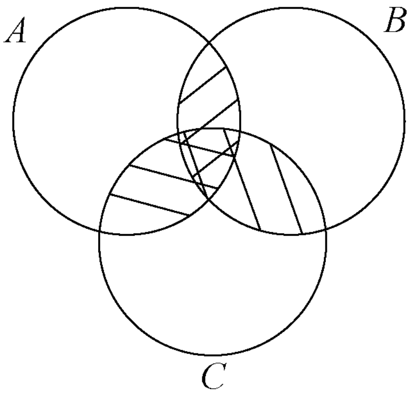
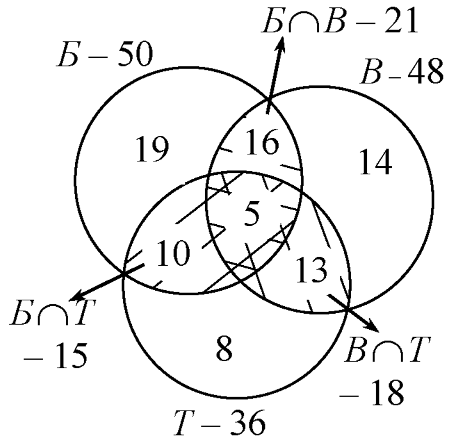


Рис. 1

Виведення цієї формули очевидне з кругів Ейлера-Венна (рис.1).

Подібно буде і для *m* множин.



Наприклад, задача: на першому курсі педагогічного факультету 95 студентів захоплюються спортом. З них 50 займаються баскетболом, 48 – волейболом, 36 – тенісом, баскетболом і волейболом – 21, баскетболом і тенісом – 15, волейболом і тенісом – 18. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються баскетболом, волейболом і тенісом?

Розв'язання. 1-й спосіб (аналітичний). Позначимо через *Б* – множину студентів, які займаються баскетболом, *В* – волейболом і *Т* – тенісом. Так, як є студенти, які займаються двома і трьома видами спорту, то ці три множини за умовою попарно перети- наються. За правилом суми визначимо, скільки студентів займаються хоча б одним з цих трьох видів спорту:

$$n(Б \cup В \cup Т) = n(Б) + n(В) + n(Т) -$$

$$- n(Б \cap В) - n(Б \cap Т) - n(В \cap Т) +$$

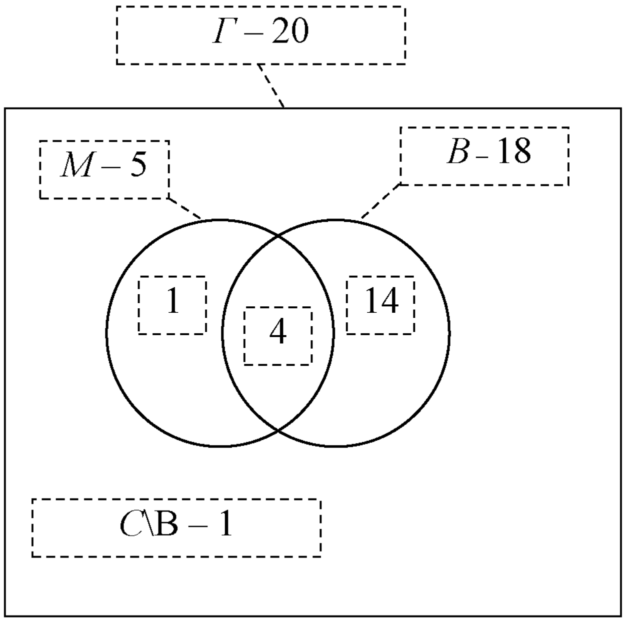
$$+ n(Б \cap В \cap Т) =$$

$$= 50 + 48 + 36 - 15 - 18 - 21 + 5 = 85 \text{ (студентів)}.$$

Тоді іншими видами спорту займаються: 95 – 85 = 10 (студентів).

2-й спосіб. Розв'язок задачі очевидний з допомогою діаграм Ейлера поданих на рисунку (19 + 16 + 14 + 10 + 5 + 13 + 8 = 85).

Наприклад, задача: у студентській групі 20 чоловік, серед яких 18 вчаться краще ніж задовільно та 5 є постійними жителями міста. Ще відомо, що серед тих, що вчаться краще ніж задовільно є 14 не постійних жителів міста. Скільки не постійних жителів міста, що є студентами даної групи, вчаться не краще ніж задовільно?



Розв'язання. Позначимо множини $Г$ – множина всіх студентів групи; $М$ – множина студентів групи, що є постійними жителями міста; $В$ – множина студентів групи, що вчаться краще ніж задовільно; $С$ – множина студентів групи, що не є постійними жителями міста. Оскільки з 18-и тих, що вчаться краще ніж задовільно, 14 студентів не є постійними жителями міста, то $18 - 14 = 4$ студентів, що вчаться краще ніж задовільно є постійними жителями міста, а отже 5 – 4 = 1 студент із міських вчиться не краще ніж задовільно, тобто на задовільно або гірше. Якщо за допомогою кругів Ейлера-Венна позначити ці всі множини, то отримаємо такий рисунок (рис. справа). З цього рисунка видно, що $1 + 4 + 14 = 19$ студентів належать множині $M \cup B$, тобто міські або вчаться краще ніж задовільно. Тоді не постійних жителів міста, що є студентами даної групи та вчаться не краще ніж задовільно є $n(C\backslash B) = 20 - 19 = 1$ студент. Відповідь 1 студент.

1. 2. Правило добутку

*Правило **добутку***: число елементів декартового добутку множин дорівнює добутку чисел елементів у кожній з даних множин. Іншими словами: якщо елемент a_1 можна вибрати n_1 способами, а після його вибору елемент a_2 можна вибрати n_2 способами і т. д., а елемент a_n після вибору всіх попередніх – n_k способами, то тоді кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ можна вибрати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Наприклад, всіх чотирицифрових чисел у десятковій системі числення є $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ (на першому місці нуль не може бути, тому перша цифра вибирається з множини з дев’яти елементів).

1. 3. Розміщення без повторень

Нехай множина M містить m елементів. ***Розміщенням*** з m елементів по n ***без повторення*** елементів називається будь-який кортеж довжини n, елементи якого відрізняються між собою, складений з m елементів множини M.

У розміщеннях, які вводяться за цим означенням, немає однакових елементів.

Приклади

1. Розміщень з двох елементів a і b по два може бути тільки два: (a, b), (b, a). Вони відрізняються лише порядком.

2. Розміщень з трьох елементів a, b, c по два є шість: (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).

3. Розміщення (a, b) і (a, c) відрізняються елементами, а розміщення (a, c) і (c, a) – порядком.

Кількість розміщень з m елементів по n позначають через A_m^n. З означення випливає, що $m \geq n$.

Формула числа розміщень з m елементів по n випливає з правила добутку і дорівнює:

$$A_m^n = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1)),$$

де m – це кількість елементів множини M, $m-1$ – кількість елементів множини M без одного елемента, $m-2$ – без двох, $m-(n-1)$ – кількість елементів множини M без $(n-1)$-ого елемента.

Тобто, ***число розміщень*** з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше серед яких m.

Формулу числа розміщень з m елементів по n можна переписати і так:

$$A_m^n = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Приклади

1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 8, 9, щоб жодна з них у цих числах не повторювалась?

Розв'язання. Чисел буде стільки, скільки можна скласти розміщень з шести елементів 4, 2, 5, 7, 3, 9 по три, бо кожне таке розміщення дає тризначне число, тобто

$A_6^3 = 6\cdot(6-1)\cdot(6-(3-1)) = 6\cdot5\cdot4 = 120$(чисел) – за формулою.

Або за правилом добутку $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$(чисел).

2. Скільки непарних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 2, 4, 8, 9, якщо кожну цифру у кожному числі можна використовувати тільки один раз?

Розв'язання. Усього двоцифрових чисел у даному випадку можна утворити $A_4^2 = 4 \cdot (4 - (2 - 1)) = 4 \cdot 3 = 12$.

Кількість чисел, яка закінчуватиметься цифрами 2, 4, 8, 9, однакова і дорівнює $12 : 4 = 3$. Отже, цифрою 9 (єдиною непарною цифрою серед даної множини) закінчується три числа, які й є шуканими непарними числами. Їх можна і перерахувати: 29, 49, 89.

Можна міркувати і так. Якщо відкинути цифру 9 в усіх здобутих непарних двоцифрових числах, то одноцифрових чисел буде стільки, скільки можна їх записати з цифр 2, 4, 8, тобто 3.

1. 4. Розміщення з повтореннями

Оскільки розміщенням є впорядкована сукупність об'єктів (кортеж), то в них можуть бути й повторення однакових елементів. Таким є, наприклад, кортежі цифр у зображеннях чисел, кортежі нот у зображеннях музикальних фраз і т. д. Таким чином дістаємо розміщення з повторенням.

Розміщенням з повторенням з m елементів по n, $m, n \in N$, називається будь-який кортеж довжини n, який складається з елементів множини $M = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ і в якому хоча б один елемент повторюється.

Розміщення з повтореннями і без повторень тісно пов'язані з поняттям декартового (прямого) добутку множин. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Наприклад, нехай $M = \{a, b\}$. Знайдемо прямий квадрат M^2 та прямий куб M^3 цієї множини. Дістанемо:

$M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$;

$M^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$.

Як бачимо, всі можливі розміщення з повтореннями з двох елементів множини M по два дістаємо з M^2, а всі можливі розміщення з цих самих елементів по три – з M^3. Розміщення без повторень дістаємо з M^2 вилученням усіх розміщень з повтореннями. Розміщень з повторенням з даної двоелементної множини M можемо робити скільки завгодно і якої завгодно довжини, треба тільки взяти відповідну кількість прямих (декартових) множників.

Можна показати, що все, сказане вище для множини $M = \{a, b\}$ стосується й будь-якої скінченної множини.

Позначивши через $\overline{A}_m^n$ число всіх різноманітних розміщень з повтореннями елементів множини $M = \{a_1, a_2, ... a_m\}$ по n, дістанемо

$$\overline{A}_m^n = m^n,$$

де m – кількість елементів множини M.

Дана формула є наслідком того, що вибір на кожне місце кортежа довжиною n проводиться з усіх m елементів множини M.

Приклад.

1. Скільки чотирицифрових чисел можна записати з цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в записі числа можуть повторюватися?

Розв'язання. Всього дано шість цифр. Очевидно, що шукане число дорівнює числу всіх розміщень з повтореннями елементів із множини з шести елементів по чотири, тобто $6^4 = 1296$.

1. 5. Перестановки без повторень

Будь-який кортеж довжини m над множиною $M = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$, в якого всі компоненти різні, називають ***перестановкою*** (***перестановкою без повторень***) елементів множини M.

Такий чином, перестановка елементів множини M – це розміщення з m елементів по m цієї ж множини.

Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m.

Згідно з означенням,

$$P_m = A_m^m = (m-1)(m-2)\ \ldots\ 2 \cdot 1 = m!$$

Тобто, ***число перестановок без повторень*** з m елементів дорівнює добутку від m до 1 послідовних натуральних чисел, тобто $m!$.

Приклади

1. Скількома способами можна розсадити 19 студентів по 19-и місцям?

Розв'язання.

$$P_{19} = 19! = 19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 =$$
$$= 121645100408832000 \text{ (способами).}$$

2. Серед усіх перестановок цифр числа 531289 скільки є таких, які починаються числом 39?

Розв'язання. Оскільки дві цифри 3 і 9 забираються, то переставляти будемо всього чотири цифри. Отже чисел, які задовольняють умову задачі, є:

$$P_4 = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24.$$

3. Скільки десятицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається тільки один раз?

Розв'язання. Кортежів довжиною десять з даних десяти цифр буде: $P_{10} = 10·9·8·7·6·5·4·3·2·1 = 3628800$. З однаковою першою компонентою буде: $3628800:10 = 362880$. Так, як на першому місці в числі стояти нуль не може, то віднімемо від знайденого числа всіх кортежів довжиною десять, число кортежів з однаковою першою компонентою (тобто нулем) і отримаємо шукану кількість:

$$3628800 - 362880 = 3265920 \text{ (чисел).}$$

1.6. Перестановки з повтореннями

Нехай $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Будь-який кортеж довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ над множиною M, в якому елемент a_1 повторюється k_1 разів, елемент $a_2 - k_2$ разів і т. д., елемент $a_m - k_m$ разів, називається ***перестановкою з повтореннями***.

Число всіх перестановок з повтореннями позначають символом – $P_{k_1,k_2,...,k_m}$, в яких елемент a_1 повторюється k_1 разів, $a_2 - k_2$ разів і т.д., $a_m - k_m$ разів.

Число $P_{k_1,k_2,...,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + ... + k_m$ з повтореннями з елементів a_1, $a_2, ..., a_m$, які повторюються відповідно $k_1, k_2, ..., k_m$ разів дорівнює:

$$P_{k_1,k_2,...,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_m)!}{k_1!·k_2!·...·k_m!}.$$

Доведення.

Відомо, що кількість всіх перестановок з l елементів дорівнює $l!$. Якщо серед цих l елементів є k_1 однакових, то їх перестановка між собою не змінить кортежа довжини l. Отже це слід врахувати і поділити на кількість перестановок між собою k_1 однакових елементів, тобто на $k_1!$. Якщо серед цих l елементів є ще й k_2 однакових інших елементів, то слід поділити ще й на $k_2!$. І т.д. Тобто отримаємо формулу числа $P_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ всіх різних перестановок довжини $l = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ з повтореннями з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, які повторюються відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ разів:

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Приклад.

Скільки шестицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, якщо цифра 7 повторюється в кожному числі два рази, цифра 6 – три рази, а цифра 9 – один раз?

Розв'язання. Числа, які можна записати таким чином, є кортежі довжини 6 складені з елементів даної множини чисел $\{7, 8, 9\}$ з відповідною, з умови, кількістю повторень рівною: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$. Тобто, це є перестановки з повторенням і їх кількість рівна:

$$P_{2,3,1} = \frac{(2+3+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{6!}{2 \cdot 6} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60(\text{чисел}).$$

1. 7. Комбінації та їх властивості

Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ – довільна не порожня множина. Будь-яка підмножина $A \in M$, яка містить n елементів, називається ***комбінацією*** (***вибіркою***, ***сполученням***) з m елементів по n.

З цього означення випливає, що комбінація – це множина, і що дві різні комбінації з m елементів по n відрізняються принаймні одним елементом.

Число всіх комбінацій з m елементів по n дорівнює числу всіх розміщень з m елементів по n, розділеному на число всіх перестановок з n елементів, тобто:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{\dfrac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!} = \frac{p_m}{P_n P_{m-n}}.$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}.$$

Основні властивості числа C_m^n.

1°. $C_m^0 = 1$, $C_0^0 = 1$, $C_m^m = 1$.

Ці властивості слідують з означення.

2°. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Доведення:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{n+m-m} P_{m-n}} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_{m-(m-n)}} = C_m^{m-n}.$$

3°. $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Доведення:

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} + \frac{P_m}{P_{n+1} P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n\left(P_{m-(n+1)}(m-n)\right)} +$$

$$+\frac{P_m}{(n+1)P_n P_{m-(n+1)}} = \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}}\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{P_m}{P_n P_{m-(n+1)}} \frac{(n+1)+(m-n)}{(m-n)(n+1)} = \frac{P_m(1+m)}{P_n(n+1)P_{m-(n+1)}(m-n)} =$$

$$= \frac{P_{m+1}}{P_{n+1} P_{m-n}} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Отже, $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$

Приклади.

1. Для подорожі на річку, 60 дітей вишикували одних за другими по три дитини в одному ряді. Скількома способами вожатий може вибрати три дитини в перший ряд, а скількома в останній?

Розв'язання.

Відповідь на перше і друге питання є тією самою, бо це звичайна вибірка трьох дітей із усіх 60.

1-ий спосіб.

$$C_{60}^{3}=\frac{60!}{3!\cdot(60-3)!}=\frac{60!}{3!\cdot 57!}=\frac{60\cdot 59\cdot 58}{3\cdot 2}=34220 \text{ (способами).}$$

2-ий спосіб.

$$C_{60}^{3}=\frac{A_{60}^{3}}{P_{3}}=\frac{60\cdot 59\cdot 58}{3\cdot 2}=34220 \text{ (способами).}$$

Відповідь. 34220 способами.

2. Для участі в змаганнях, з групи в дев’ятнадцять чоловік потрібно вибрати чотири команди, в складі 8, 7, 1 і 2 чоловіки у кожній, причому, кожний чоловік може брати участь в змаганнях лише один раз і в одній команді. Скількома різними способами можна вибрати чотири команди?

Розв'язання.

З дев’ятнадцять чоловік можна вибрати $C_{19}^{8}=\frac{19!}{8!\cdot 11!}=\frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=75582$ способами першу команду в складі восьми чоловік.

Після того, як вибрано першу команду, можна $C_{11}^{7}=\frac{11!}{7!\cdot 4!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2}=330$ способами вибрати другу команду в складі семи чоловік з одинадцяти чоловік.

Після цього одного з чотирьох можна вибрати $C_{4}^{1}=4$ способами.

І нарешті, останню команду в складі двох чоловік можна вибрати $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3$ способами.

Три команди можна вибрати:

$C_{19}^8 \cdot C_{11}^7 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 75582 \cdot 330 \cdot 4 \cdot 3 = 299304720$ способами.

Відповідь. 299304720 способами.

1. 8. Трикутник Паскаля

Співвідношення $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$, можна переписати інакше і отримати співвідношення $C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n = C_m^n$, з якого, маючи C_{m-1}^{n-1} і C_{m-1}^n можна обчислити C_m^n.

На основі цього, використовуючи лише операцію додавання відповідних чисел, побудовано схему, яку називають ***трикутником Паскаля***.

Схему будують так.

У першому рядку записують 1.

У другому рядку записують дві одиниці: одну – зліва, а другу – справа від одиниці, записаної в першому рядку.

У третьому рядку знову записують дві одиниці: одну – зліва від лівої другого рядка, а другу – справа від правої одиниці другого рядка. Крім

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \;\; C_1^1 \\
C_2^0 \;\; C_2^1 \;\; C_2^2 \\
C_3^0 \;\; C_3^1 \;\; C_3^2 \;\; C_3^3 \\
C_4^0 \;\; C_4^1 \;\; C_4^2 \;\; C_4^3 \;\; C_4^4 \\
C_5^0 \;\; C_5^1 \;\; C_5^2 \;\; C_5^3 \;\; C_5^4 \;\; C_5^5 \\
C_6^0 \;\; C_6^1 \;\; C_6^2 \;\; C_6^3 \;\; C_6^4 \;\; C_6^5 \;\; C_6^6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ m = 4 \\ m = 5 \\ m = 6
\end{array}
$$

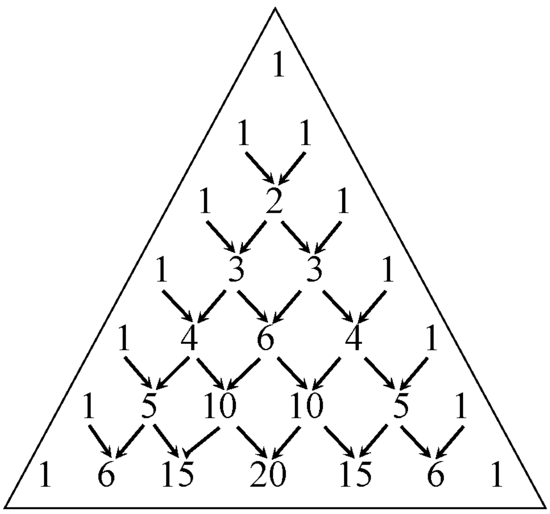


Рис. 2

того, між цими одиницями записують число 2, яке є сумою двох одиниць попереднього рядка.

У четвертому рядку записують суму першого і другого, другого і третього числа третього рядка, причому суми розміщують між доданками; зліва й справа знову пишуть одиниці.

Так продовжують далі.

Процес утворення трикутника Паскаля показано на рис. 2.

Якщо до якогось числа напрямлено дві стрілки, то це означає, що дане число є сумою тих чисел, звідки виходять стрілки. Дальше трикутник можна продовжувати зазначеним вище способом.

Наприклад, нехай треба знайти числа $C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$. Для цього вибираємо горизонтальну лінію з $m = 6$ і дістаємо послідовно зліва направо всі числа, записані в цьому рядку: $C_6^0 = 1\, C_6^1 = 6, C_6^2 = 15, C_6^3 = 20, C_6^4 = 15, C_6^5 = 6, C_6^6 = 1$.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент:

1. Скількома способами можна вибрати голосну букву з слова “республіка”? Скількома способами можна вибрати дві голосні букви з цього слова?

2. Скількома способами студент може вибрати два факультативних курси з шести можливих?

3. Скількома способами можуть бути виставлені оцінки вісьмом студентам, які здали екзамени, якщо відомо, що лише два з них отримали п’ятірки, і лише два з них отримали незадовільні оцінки?

4. Скількома способами можна утворити з групи в 12 чоловіків і 8 жінок комісію, в яку входили б три чоловіки і дві жінки?

5. Скількома способами можна утворити групу з трьох солдатів і одного офіцера, якщо є двадцять солдатів і п'ять офіцерів?

6. Скількома способами можна скласти список студентів групи, в якій налічується 25 студентів?

7. Скількома способами можна скласти наряд з одного сержанта і 3 солдат, якщо у військовому підрозділі всього 7 сержантів і 80 солдат?

8. Скількома способами можна скласти команду з восьми учасників шахового гуртка І курсу, шести учасників ІІ курсу і десяти учасників ІІІ курсу так, щоб у неї з І курсу входило три студенти, а з ІІ і ІІІ курсів – по два студенти?

9. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи, якщо які-небудь два студенти відмовляються поселитися разом?

10. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів у трьох кімнатах, розрахованих тільки на три особи?

11. Скількома способами можна розсадити 19 студентів на 80 місць?

12. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожний учитель викладатиме у двох класах?

13. Скількома способами можна розподілити премії по чотири книжки для преміювання трьох учнів, якщо купили 12 різних книжок?

14. Скількома способами можна з групи з 20 студентів вибрати трьох делегатів на конференцію?

15. Скількома способами можна доїхати з пункту C в пункт L, якщо з пункту C до пункту L проходять дві автодороги через пункт A і три автодороги – через пункт B, причому пункти A і B не зв'язані автодорогами?

16. Скількома способами можна вишикувати 9 чоловік в один ряд?

17. Скількома способами можна вибрати п'ять осіб на п'ять посад з восьми кандидатів на ці посади?

18. Скількома способами можна вибрати один предмет: або ручку, або олівець, якщо є 7 ручок і 5 олівців?

19. Скількома способами можна вибрати на підсумкову наукову студентську конференцію по одній доповіді з кожного гуртка, якщо всього на математичному гуртку інституту підготовили чотири доповіді, на природознавчому – три доповіді, на психологічному – дві і літературному – п'ять?

20. Скількома способами можна вибрати з 19 чоловік старосту, замісника старости і профорга?

21. Скількома способами може бути утворена бригада в складі 3 чоловік для виїзних комісій, щоб до неї входив хоча б один лікар, якщо всього є 2 лікарі та 7 медсестер?

22. Скількома способами із восьми роз і шести жоржин можна скласти букет так, щоб у ньому було дві рози і три жоржини?

23. Скількома способами з восьми різних квіток можна скласти букет так, щоб він містив непарну їх кількість і не менше трьох?

24. Скількома способами групу студентів з 26 чоловік можна розбити на дві підгрупи так, щоб в одній з них було 10 студентів, а в другій – 16?

25. Скільки трицифрових чисел, кратних 5, можна зобразити цифрами 0, 3, 5, 7, 9?

26. Скільки трицифрових чисел можна написати за допомогою цифр: 0, 2, 9, 4, 7, так, щоб в числі жодна з цифр не повторювалася?

27. Скільки тризначних чисел можна утворити з множини цифр {2, 4, 5, 6, 8}? Скільки двозначних? чотиризначних?

28. Скільки різних п'ятицифрових натуральних чисел можна утворити з множини цифр {1, 3, 4, 7}?

29. Скільки різних площин можна провести через n точок у просторі, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

30. Скільки різних восьмизначних чисел можна утворити з цифр 2, 3 при умові, що цифра 2 повторюється п'ять разів, а цифра 3 – три рази?

31. Скільки потрібно різних предметів, щоб можна було утворити 110 розміщень по два предмети в кожному?

32. Скільки можна утворити трицифрових чисел у десятковій системі числення так, щоб вони складалися з різних цифр?

33. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр: 4, 2, 5, 6, 8, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз у кожному числі?

Комплекс багатоваріантних практичних завдань, домашніх контрольних робіт (ДКР) № 2 для студентів спеціальності "Початкова освіта" на тему "Елементи комбінаторики", які пропонуються студентам для самостійного розв'язування задля поточного контролю з дисципліни.

Завдання нульового варіанту та їх розв'язки

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 0

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 34 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 5-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3). Скількома способами можна розмістити 9 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 12.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 120, баскетболом – 100, волейболом – 140, футболом та баскетболом – 35, футболом та волейболом – 55, баскетболом та волейболом – 75, усіма трьома видами спорту – 20 (зробити малюнок на кругах)?

Таблиця відповідей варіанту 0.

В-нт	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1113024	46656	2432902008176640000	792	215

Розв'язки:

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 34 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

Розв'язок.

В умові задачі є слово вибрати, але кожну четвірку вибраних студентів потрібно, ще розміщувати по посадах. Отож, це буде розміщення без повторень.

Число розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше серед яких m.

Отож, матимемо добуток 4-ьох послідовних натуральних чисел, найбільше серед яких 34.

$A_{34}^{4} = 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 1113024$ – число варіантів вибору студентів на чотири посади з 34 студентів.

Відповідь: 1113024.

2). Скільки 5-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв'язок.

В умові задачі запитується про число п'ятицифрових чисел, які можна створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Постачальником елементів на кожне з п'яти місць п'ятицифрового числа є кожна цифра з цих шести цифр. Отож, це є розміщення з повторенням.

$\overline{A}_{6}^{5} = 6^{5} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 46656$ – п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Відповідь: 46656.

3). Скількома способами можна розмістити 20 людей у чергу?

Розв'язок.

В умові задачі запитується про число способів розміщення 9-ьох з 9-и, тобто про число перестановок з 9-и елементів.

Число перестановок без повторень з m елементів дорівнює добутку від m до 1 послідовних натуральних чисел, тобто $m!$.

$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$

$=2432902008176640000$ – число розміщень 20 людей у чергу.

Відповідь: 2432902008176640000.

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 12.

Розв'язок.

Звісно, ми розглядаємо математично цю задачу, тобто вважаємо, що всі 12 бажаючих є гідними участі у змаганнях і нам потрібно знайти число різних варіантів сімірок з 12 людей.

Ця задача відрізняється від першої задачі тим, що у першій задачі потрібно було вибрати людей на посади, тобто одна і та сама вибірка у першій задачі давала ще декілька варіантів розміщень цих вибраних людей по посадах. У цій задачі нам потрібно зробити вибірку і місце вибраного елемента у вибірці значення не має.

Число всіх комбінацій з m елементів по n дорівнює числу всіх розміщень з m елементів по n, розділеному на число всіх перестановок з n елементів, тобто: $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$.

Отож, $C_{12}^7 = \frac{A_{12}^7}{P_7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 8}{1} = 792$ – число вибірок 7 людей з 12.

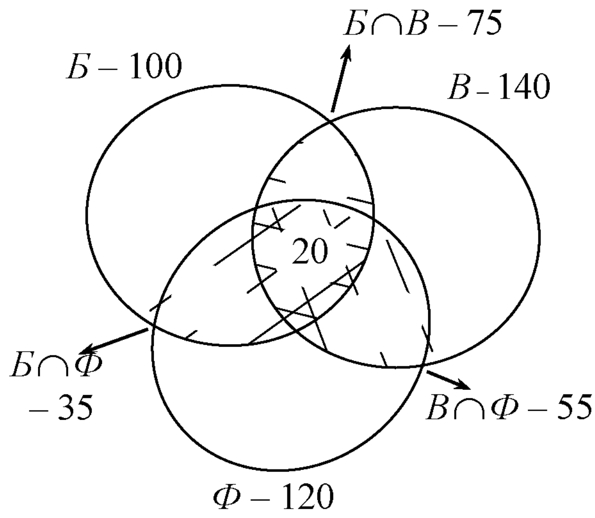
Відповідь: 792.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 120, баскетболом – 100, волейболом – 140, футболом та баскетболом – 35, футболом та волейболом – 55, баскетболом та волейболом – 75, усіма трьома видами спорту – 20 (зробити малюнок на кругах)?

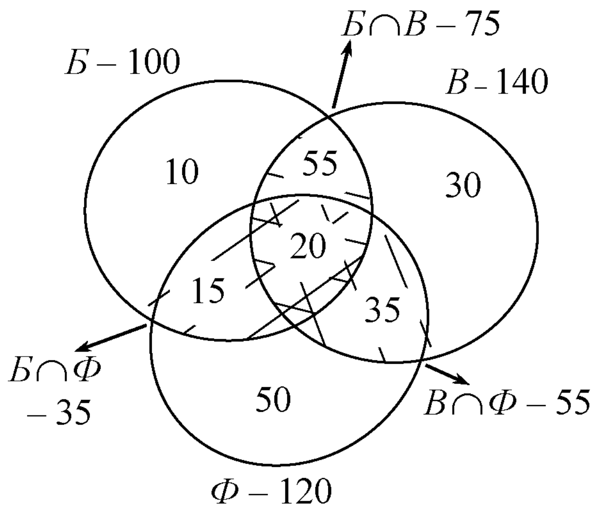
Розв'язок.

Оскільки кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол), то кожен спортсмен цієї групи належить хоча б одній з трьох множин (Ф – футбол, Б – баскетбол, В – волейбол). Ці множини попарно перетинаються, бо є спортсмени, що належать до будь яких двох множин з цих трьох і, навіть, одночасно до трьох множин.

Отож, зобразимо ці множини за допомогою кругів та позначимо відомі з умови задачі числа на цьому малюнку (рис. 1).



Оскільки футболом та баскетболом займаються 35 спортсменів, футболом та волейболом – 55, баскетболом та волейболом – 75, а усіма трьома видами спорту – 20, то тільки футболом та баскетболом займаються 35–20=15 спортсменів, тільки футболом та волейболом – 55–20=35, тільки баскетболом та волейболом – 75–20=55 спортсменів. Позначаємо отримані числа на кругах у відповідних місцях. Як бачимо з малюнка (рис. 2), невідомими залишилися числа, що відповідають кількостям тих спортсменів, що займаються тільки одним видом спорту з даної групи. Знайдемо їх. Оскільки всіх футболістів є 120, а серед них є 15+20+35 тих, що займаються ще хоча б одним іншим видом спорту, то таких, що займаються тільки футболом є 120 – (15 + 20 + 35) = 50.



Відповідно тільки баскетболом:
100 – (15 + 20 + 55) = 10.
Тільки волейболом – 140 – (55 + 20 + 35) = 30.
Отож, оскільки кожен спортсмен групи займається хоча б одним із цих трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол), то кожен спортсмен цієї групи належить хоча б одній із цих трьох множин, а отже сума чисел, що позначені в множинах і є числом всіх спортсменів цієї групи. Так як 120 – це сума всіх чисел, що є в множині футболістів, то замість чотирьох чисел, що записані в множині футболістів візьмемо це число 120.
Отож, 120+10+55+30 = 215 – всіх спортсменів групи.
Відповідь: 215.

Багатоваріантні завдання для самостійного виконання.

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 1

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 9 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 11-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 4 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 40.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 22, баскетболом – 23, волейболом – 16, футболом та баскетболом – 7, футболом та волейболом – 9, баскетболом та волейболом – 11, усіма трьома видами спорту – 5. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 2

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 10 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 10-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 5 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 39.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 16, баскетболом – 20, волейболом – 26, футболом та баскетболом – 9, футболом та волейболом – 11, баскетболом та волейболом – 13, усіма трьома видами спорту – 6. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 3

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 11 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 9-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 6 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 38.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 24, волейболом – 30, футболом та баскетболом – 11, футболом та волейболом – 13, баскетболом та волейболом – 15, усіма трьома видами спорту – 7. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 4

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 12 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 8-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 7 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 37.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 24, баскетболом – 28, волейболом – 34, футболом та баскетболом – 13, футболом та волейболом – 15, баскетболом та волейболом – 17, усіма трьома видами спорту – 8. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 5

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 13 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 7-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 8 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 36.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 28, баскетболом – 32, волейболом – 28, футболом та баскетболом – 15, футболом та волейболом – 17, баскетболом та волейболом – 19, усіма трьома видами спорту – 9. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 6

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 14 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 6-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 9 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 35.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 32, баскетболом – 26, волейболом – 22, футболом та баскетболом – 17, футболом та волейболом – 19, баскетболом та волейболом – 11, усіма трьома видами спорту – 10. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 7

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 15 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 5-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 10 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 34.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 20, волейболом – 10, футболом та баскетболом – 9, футболом та волейболом – 5, баскетболом та волейболом – 3, усіма трьома видами спорту – 1. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 8

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 16 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 4-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 11 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 33.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 24, волейболом – 10, футболом та баскетболом – 11, футболом та волейболом – 3, баскетболом та волейболом – 5, усіма трьома видами спорту – 2. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 9

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 17 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 3-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 12 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 32.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 24, баскетболом – 18, волейболом – 14, футболом та баскетболом – 13, футболом та волейболом – 5, баскетболом та волейболом – 7, усіма трьома видами спорту – 3. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 10

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 18 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 2-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 13 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 31.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 18, баскетболом – 12, волейболом – 18, футболом та баскетболом – 5, футболом та волейболом – 7, баскетболом та волейболом – 9, усіма трьома видами спорту – 4. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 11

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 19 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 11-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 3 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 30.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 16, баскетболом – 16, волейболом – 22, футболом та баскетболом – 7, футболом та волейболом – 9, баскетболом та волейболом – 11, усіма трьома видами спорту – 5. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.

Варіант 12

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 20 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 10-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 4 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 29.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 17, баскетболом – 21, волейболом – 26, футболом та баскетболом – 10, футболом та волейболом – 11, баскетболом та волейболом – 13, усіма трьома видами спорту – 6. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 13

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 21 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 9-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 5 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 28.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 25, волейболом – 30, футболом та баскетболом – 11, футболом та волейболом – 13, баскетболом та волейболом – 15, усіма трьома видами спорту – 7. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 14

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 22 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 8-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 6 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 27.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 25, баскетболом – 28, волейболом – 33, футболом та баскетболом – 13, футболом та волейболом – 16, баскетболом та волейболом – 17, усіма трьома видами спорту – 8. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 15

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 23 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 7-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 7 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 26.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 29, баскетболом – 33, волейболом – 29, футболом та баскетболом – 16, футболом та волейболом – 18, баскетболом та волейболом – 20, усіма трьома видами спорту – 10. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 16

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 24 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 6-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 8 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 25.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 32, баскетболом – 28, волейболом – 24, футболом та баскетболом – 17, футболом та волейболом – 19, баскетболом та волейболом – 13, усіма трьома видами спорту – 10. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 17

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 25 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 5-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 9 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 24.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 27, баскетболом – 20, волейболом – 17, футболом та баскетболом – 9, футболом та волейболом – 11, баскетболом та волейболом – 3, усіма трьома видами спорту – 1. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 18

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 26 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 4-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 10 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 23.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 21, баскетболом – 25, волейболом – 10, футболом та баскетболом – 12, футболом та волейболом – 3, баскетболом та волейболом – 5, усіма трьома видами спорту – 2. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 19

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 27 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 3-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 11 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 22.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 24, баскетболом – 20, волейболом – 14, футболом та баскетболом – 13, футболом та волейболом – 5, баскетболом та волейболом – 7, усіма трьома видами спорту – 3. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 20

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 28 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 2-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 12 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 21.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 12, волейболом – 20, футболом та баскетболом – 5, футболом та волейболом – 9, баскетболом та волейболом – 9, усіма трьома видами спорту – 4. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 21

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 29 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 11-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 2 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 20.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 15, баскетболом – 19, волейболом – 25, футболом та баскетболом – 10, футболом та волейболом – 12, баскетболом та волейболом – 14, усіма трьома видами спорту – 8. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 22

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 30 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 10-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 3 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 19.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 16, баскетболом – 23, волейболом – 29, футболом та баскетболом – 9, футболом та волейболом – 11, баскетболом та волейболом – 16, усіма трьома видами спорту – 6. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 23

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 31 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 9-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 4 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 18.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 21, баскетболом – 24, волейболом – 29, футболом та баскетболом – 11, футболом та волейболом – 13, баскетболом та волейболом – 15, усіма трьома видами спорту – 7. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 24

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 32 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 8-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 5 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 17.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 27, баскетболом – 31, волейболом – 34, футболом та баскетболом – 16, футболом та волейболом – 15, баскетболом та волейболом – 17, усіма трьома видами спорту – 8. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 25

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 33 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 7-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 6 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 16.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 28, баскетболом – 35, волейболом – 28, футболом та баскетболом – 15, футболом та волейболом – 17, баскетболом та волейболом – 19, усіма трьома видами спорту – 9. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 26

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 34 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 6-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 7 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 15.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 28, баскетболом – 26, волейболом – 18, футболом та баскетболом – 17, футболом та волейболом – 15, баскетболом та волейболом – 11, усіма трьома видами спорту – 10. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 27

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 35 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 5-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 8 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 14.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 36, баскетболом – 30, волейболом – 26, футболом та баскетболом – 19, футболом та волейболом – 21, баскетболом та волейболом – 13, усіма трьома видами спорту – 11. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 28

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 36 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 4-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 9 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 13.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 20, баскетболом – 33, волейболом – 19, футболом та баскетболом – 11, футболом та волейболом – 3, баскетболом та волейболом – 14, усіма трьома видами спорту – 2. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 29

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 37 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 3-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 10 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 12.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 25, баскетболом – 18, волейболом – 21, футболом та баскетболом – 13, футболом та волейболом – 5, баскетболом та волейболом – 7, усіма трьома видами спорту – 3. (Зробити малюнок на кругах).

Домашня контрольна робота № 2. Тема: елементи комбінаторики.
Варіант 30

1). Скількома способами можна вибрати 4 студенти на 4 посади, якщо студентів у групі всього 38 (тут врахувати, що: кожного вибраного студента потрібно ще розмістити на посаду; один студент може займати тільки одну посаду і на одній посаді повинен бути тільки один студент).

2). Скільки 2-цифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5?

3). Скількома способами можна розмістити 11 людей у чергу?

4). Скількома способами можна вибрати 7 людей для участі у змаганнях, якщо всього бажаючих є 11.

5). У спортивній групі кожен спортсмен займається хоча б одним із трьох видів спорту (футбол, баскетбол, волейбол). Скільки спортсменів у даній спортивній групі, якщо футболом займаються 24, баскетболом – 20, волейболом – 28, футболом та баскетболом – 7, футболом та волейболом – 11, баскетболом та волейболом – 15, усіма трьома видами спорту – 4. (Зробити малюнок на кругах).

Список рекомендованої літератури

1. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М. і ін. Математика. Посібник для педінститутів. К., «Вища школа», 1980. – 342 с.
2. Виленкин, Н.Я.; Лаврова, Н.Н.; Рождественская, В.Б. Задачник-практикум по математике. М.: Просвещение.– 1977. – 208 с.
3. Довгий О.Я. і ін. Курс математики. – І-Ф, «Плай», – 2005 р. – 106 с.
4. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики. - К., «Вища школа», 1998. – 232 с.
5. Кухар В.М., Тадіян С.І., Тадіян В.П.Математика: множини. Логіка. Цілі числа. Практикум. – К., «Вища школа», 1989.- 196 с.
6. Левшин М.М., Лодатко Є.О. Математика. Ч. 1. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 264 с.
7. Маланюк М., Кравчук В. Метод математичної індукції та елементи комбінаторики / За ред. В. Тадаєва. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 48 с.
8. Сухарева Л.С. Математика. Логічні задачі та способи їх розв'язування. 1 – 4 класи. – 3-тє вид., –Х.: Вид. група «Основа», 2008. – 128 с.
9. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики. – К.: Техніка, 2003. – 591 с.