В.П.Лавренчук, П.П.Настасієв,
О.В.Мартинюк, О.С.Кондур

Вища математика

Загальний курс

Частина II

Математичний аналіз і диференціальні рівняння

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Чернівці
Книги – XXI
2010

ББК 22.11я73
Л 135
УДК 51(075.8)

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист про надання грифу №1.4/18-Г-239 від 28.01.08 р.)**

Рецензенти:

Євтухов В.М., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова,

Іванчов М.І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка,

Ільків В.С., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики та програмування НУ „Львівська політехніка",

Никифорчин О.Р., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С.
Л 135 Вища математика. Загальний курс. Частина 2. Математичний аналіз і диференціальні рівняння: Навчальний посібник. – Чернівці: Книги – ХХІ, 2010. – 556 с.
ISBN 978-966-2147-73-5

Посібник написаний у відповідності з програмою курсу вищої математики для нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Матеріал викладено строго і доступно. У кожному розділі наведено велику кількість прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал, а також багато задач і вправ для самостійної роботи.

Друга частина посібника містить такі розділи: теорія границь, диференціальне числення функцій однієї змінної, невизначений і визначений інтеграли, диференціальне числення функцій багатьох змінних, кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли, ряди і диференціальні рівняння.

Для студентів напрямів: біологія, хімія, географія, туризм, землевпорядкування та кадастр, економічні та інженерно-економічні.

ББК 22.11я73
ISBN 978-966-2147-73-5

Передмова

Друга частина пропонованого посібника присвячена основним поняттям математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Створення Ньютоном і Лейбніцем понад три століття тому основ диференціального та інтегрального числення відіграло важливу роль в науці взагалі й математиці зокрема.

Математичний аналіз, аналітична геометрія та алгебра, переплітаючись, утворили той фундамент, на якому базуються всі сучасні математичні дисципліни та їхнє використання в науці й техніці. Саме завдяки цьому математичний аналіз поряд з алгеброю і геометрією є основою курсу вищої математики.

Математичний аналіз в цьому посібнику охоплює теорію границь і неперервність функцій, диференціальне та інтегральне числення, ряди.

Теорія границь лежить в основі визначення класу неперервних функцій. За допомогою границь також вводяться поняття похідної, інтеграла, суми ряду, тощо.

У диференціальному численні значна увага акцентується на понятті похідної функції та вивченні її основних властивостей. Наводяться різноманітні застосування диференціального числення в економіці та природознавстві.

Інтегральне числення містить виклад теорії інтеграла Рімана та його узагальнення, а саме, невласних інтегралів. Подано застосування інтегралів до розв'язання задач геометрії, економіки та природознавства.

Значна увага приділяється також інтегральному численню функцій багатьох змінних та його застосуванню.

Широко висвітлено в курсі теорію числових, функціональних рядів і рядів Фур'є.

Заключний розділ курсу присвячений диференціальним рівнянням. В ньому відзначено важливу роль математичних моделей при описані та вивченні конкретних явищ і задач природознавства. Наведено різноманітні застосування диференціальних рівнянь у фізиці, біології, хімії та економіці.

Основні особливості цієї частини курсу пов'язані з більшим, ніж в першій частині, рівнем абстрактності. Тому для кращого сприйняття і розуміння матеріалу автори вважали за необхідне проводити виклад від простого до складного, супроводжуючи його, де це можливо, рисунками. При цьому виділяються найістотніші методи і факти, а також пропонуються лише такі доведення, які є типовими і повчальними.

Основний текст містить досить велику кількість розв'язаних прикладів, кожний параграф закінчується вправами для самостійного розв'язання. Ми сподіваємося, що це суттєво допоможе студентам у неформальному і глибокому засвоєні теоретичного матеріалу.

Розділ 6
Функції однієї змінної

§1. Поняття функції

1.1. Змінні величини. При вивченні закономірностей, які зустрічаються у природі, доводиться мати справу як зі сталими величинами, так і зі змінними.

Сталою називається величина, яка зберігає одне й те саме значення або взагалі, або у даній ситуації. У другому випадку сталу величину називають **параметром**.

Змінною називається величина, яка може набувати різних числових значень.

Змінну величину (змінну) вважають заданою, якщо відома множина всіх числових значень, яких вона може набувати. Сталу величину можна розглядати як частинний випадок змінної, коли множина її числових значень складається з одного числа.

Числові значення змінної величини утворюють певну множину дійсних чисел. Їй відповідає деяка множина точок числової осі. Найчастіше ми зустрічатимемося з числовими множинами таких типів: інтервал $(a;b)$; відрізок $[a;b]$; напівінтервали або напіввідрізки $[a;b)$, $(a;b]$; необмежені інтервали $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ або необмежені відрізки $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$; уся числова вісь $(-\infty;+\infty)$. Усі вони детально описані в розділі 1 першої частини.

Надалі всі указані множини об'єднуватимемо терміном проміжок.

Будь-який інтервал, що містить точку a, називається **околом** точки a. Інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, тобто множина точок x таких, що $|x-a|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$, називається **ε-околом точки** a.

1.2. Поняття функції. Способи задання функції. При вивчені різних явищ та процесів, як правило, маємо справу з сукупністю змінних величин, які зв'язані між собою так, що значення одних величин, що називаються незалежними змінними, повністю визначають значення інших, які називаються залежними змінними або функціями.

Змінна величина y називається **функцією змінної величини** x, якщо вони зв'язані між собою так, що кожному розглядуваному значенню величини x (допустимі значення) відповідає єдине цілком визначене значення величини y.

При цьому x називається **аргументом** або **незалежною змінною**, а y – **залежною змінною** або **функцією**.

Сукупність усіх значень незалежної змінної x, для яких функція y визначена, називається **областю визначення** або областю існування функції і позначається символом $D(y)$ або X.

Сукупність усіх значень y називається **множиною значень** функції і позначається символом $E(y)$ або Y.

Той факт, що y є функцією від x, скорочено позначатимемо так:

$$y = f(x), \quad x \in X,$$

де символ f називається **характеристикою функції** й означає правило, за яким елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$. Тоді множина значень функції $Y = \{y : y = f(x), x \in X\}$.

Якщо функція f ставить у відповідність числу x_0 деяке число y_0, то це записують у вигляді $y_0 = f(x_0)$ і при цьому y_0 називають **значенням** функції при $x = x_0$.

Поряд із терміном функція використовують рівнозначний термін **відображення**, а замість запису $y = f(x)$ пишуть $f : x \longmapsto y$ і кажуть, що f відображає число x у число y, або, що число y є образом числа x при відображенні f.

При обчисленнях запис $y = f(x)$ зручніший запису вигляду $f : x \longmapsto y$. Наприклад, запис $f(x) = x^2$ значно зручніше і простіше використовувати при аналітичних перетвореннях, ніж запис $f : x \longmapsto x^2$.

Крім букви f для позначення функцій використовують й інші букви, наприклад, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ і т.д. Іншими буквами можуть позначатися також залежна і незалежна змінні.

Дві функції f і g називатимемо **рівними**, якщо вони мають спільну область визначення X і $f(x) = g(x)$, $x \in X$.

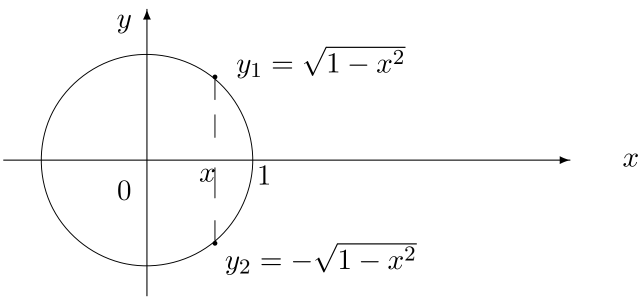
Функція, усі значення якої однакові, називається **сталою**. Сталу функцію позначають символом $y = C$, $x \in \mathbb{R}$.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **обмеженою зверху** (**знизу**) на множині X, якщо існує число M (m) таке, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$. Якщо функція обмежена зверху і знизу на множині X, то вона називається **обмеженою** на цій множині. Умову обмеженості функції f можна сформулювати ще й так: існує число $A > 0$ таке, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \leq A$. Наприклад, функція $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, обмежена на $\mathbb{R}$, бо $|\cos x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, а функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не є обмеженою на інтервалі $(0; 1)$, оскільки не існує числа M такого, щоб для довільного $x \in (0; 1)$ виконувалася нерівність $\frac{1}{x} \leq M$.

Для наочного зображення поведінки функції, будують графік, розглядаючи незалежну змінну x і функцію y як прямокутні координати деякої точки M на площині Oxy.

Графіком функції $y = f(x)$, $x \in X$, називається множина усіх точок $M(x; y)$ площини Oxy, координати яких зв'язані даною функціональною залежністю, тобто множина точок вигляду $\Gamma_f = \{(x; f(x)), x \in X\}$.

Графік функції може бути деякою суцільною лінією (кривою або прямою), а може складатися з окремих точок.



Зауважимо, що не всяка лінія є графіком деякої функції. Наприклад, коло $x^2 + y^2 = 1$ не є графіком функції, оскільки кожне $x \in (-1; 1)$ входить не в одну, а у дві пари чисел $(x; y)$ цієї множини з різними значеннями y : $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ і $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, що суперечить вимозі однозначності в означенні функції.

У той же час частина кола, що лежить у нижній півплощині, є графіком функції $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1;1]$, а друга частина, що лежить у верхній півплощині,– графіком функції $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1;1]$.

Способи задання функції. Для того щоб задати функцію f, треба:

1) встановити область $D(f)$ визначення функції;

2) описати закон відповідності, за яким для кожного $x \in D(f)$ знаходитимемо число y.

Основні способи задання цього закону: **аналітичний**, **графічний**, **табличний** і **словесний**.

При **аналітичному** способі задання функція визначається за допомогою аналітичного виразу, тобто за допомогою формули, яка вказує, які треба операції здійснити над значеннями аргументу, щоб дістати відповідне значення функції.

Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, задана формулою, то її характеристика f описує ту сукупність дій, яку треба в певному порядку виконати над значенням аргументу x, щоб одержати відповідне значення функції. Наприклад,

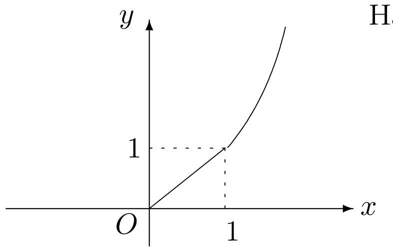
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}, \quad x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$$

Тут f означає: 1) піднесення до квадрата x; 2) віднімання від одержаного результату одиниці; 3) добування з одержаної різниці кубічного кореня.

При аналітичному способі задання функції, якщо область визначення не описана, вважають, що нею є множина всіх тих значень x, для яких написана формула має зміст. Цю область називають **природною областю визначення.** Наприклад, $y = \sqrt{1-x^2}$ має областю визначення ті x, для яких $1 - x^2 \geq 0$, тобто $X = [-1;1]$.

Треба пам'ятати, що не можна ототожнювати функцію і формулу, за допомогою якої задається ця функція. Наприклад: 1) $y = x^2$, $x \in (0;+\infty)$; 2) $y = x^2$, $x \in [-2;2]$; 3) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, це три різні функції, оскільки вони мають різні області визначення, хоча задаються за допомогою однієї й тієї самої формули.

Можливий і такий випадок, коли функція на різних частинах області визначення задається різними формулами.



Наприклад,

$$y = \begin{cases} x, & \text{коли } 0 \le x \le 1; \\ x^2, & \text{коли } x > 1. \end{cases}$$

При **табличному** способі задання функції складається таблиця, у якій указується ряд значень аргументу й значення функції, що їм відповідають.

Наприклад,

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-27	-8	-1	0	1	8	...

Очевидно, що за даними табличними значеннями, можна відтворити аналітично цю функцію, а саме,

$$y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

У загальному випадку це не завжди вдається зробити, бо таблиця визначає не всі значення функції.

Проміжні значення функції знаходять наближено методом **інтерполяції**. Найпростішим є лінійне інтерполювання, при якому припускається, що приріст функції пропорційний приросту аргументу. Якщо задане значення x лежить між наведеними в таблиці сусідніми значеннями x_0 і $x_1 = x_0 + h$, яким відповідають значення $y_0 = f(x_0)$ і $y_1 = f(x_0) + \Delta f$, то вважають, що

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f. \qquad (1)$$

Величина $\frac{x-x_0}{h}\Delta f$ називається **інтерполяційною поправкою**.

Якщо за заданим значенням функції треба знайти наближене значення аргументу, то необхідно провести обернене інтерполювання.

Приклад. Функція задана таблицею:

x	3	$3,04$	$3,08$
y	$3,42$	$3,88$	$4,38$

Знайти: 1) $f(3,008)$; 2) x, якщо $f(x) = 4,1$.

◀ 1) Маємо $x_0 = 3$; $f(x_0) = 3,42$; $x_1 = 3,04$; $f(x_1) = 3,88$; $h = x_1 - x_0 = 3,04 - 3,0 = 0,04$; $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 3,88 - 3,42 = 0,46$.

Згідно з інтерполяційною формулою (1)

$$y = f(3,008) \approx 3,42 + \frac{3,008 - 3}{0,04} 0,46 = 3,512.$$

2) Обернене інтерполювання можна провести за формулою (1), якщо в ній поміняти місцями x та y:

$$g(y) = g(y_0) + \frac{y - y_0}{h} \Delta g, \tag{2}$$

де $x = g(y)$ – невідоме значення оберненої функції.

Маємо $y_0 = 3,88$; $g(y_0) = 3,04$; $y_1 = 4,38$; $g(y_1) = 3,08$; $h = y_1 - y_0 = 4,38 - 3,88 = 0,50$; $\Delta g = g(y_1) - g(y_0) = 3,08 - 3,04 = 0,04$.

Скориставшись формулою (2), дістанемо

$$x = g(4,1) \approx 3,04 + \frac{4,1 - 3,88}{0,5} 0,04 = 3,0576 \approx 3,058. \quad ▶$$

Таблиці часто використовуються для задання функцій. Так, добре відомими є таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів і т.п. Прикладом табличного способу задання функцій є також графік руху поїздів, який визначає місцезнаходження поїзда в окремі моменти часу.

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що дається графік функції, а її значення, які відповідають тим або іншим значенням аргументу, знаходяться безпосередньо з графіка.

Наприклад, на рис. 1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, із якого видно, що $D(f) = [-2; 3]$, $E(f) = [-1; 4]$. Важливим є вміння читати графік, тобто встановлювати влас-

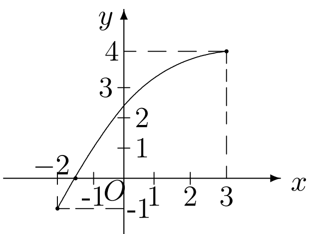


Рис. 1

тивості функції за її графіком. Зокрема, з даного рисунка видно, що ця функція має єдиний нуль $x = -1,5$; зростає на всій області визначення; $f(x) < 0$ при $x \in [-2; -1,5)$; $f(x) > 0$ при $x \in (-1,5; 3]$.

Графічно функцію задають тоді, коли аналітичний спосіб застосовувати важко або й неможливо. У багатьох випадках графіки креслять прилади-самописці. Наприклад, кардіограми, енцефалограми в медицині, барограми, що виражають графічно зміну атмосферного тиску з часом, в географії і т.п.

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що закон відповідності задається словами. Відому функцію $f(x) = |x|$ (рис. 2) задають словами так:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

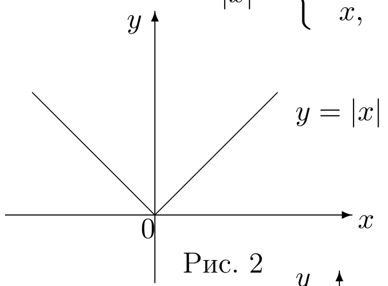


Рис. 2

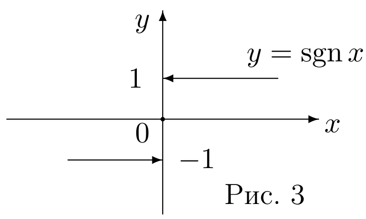


Рис. 3

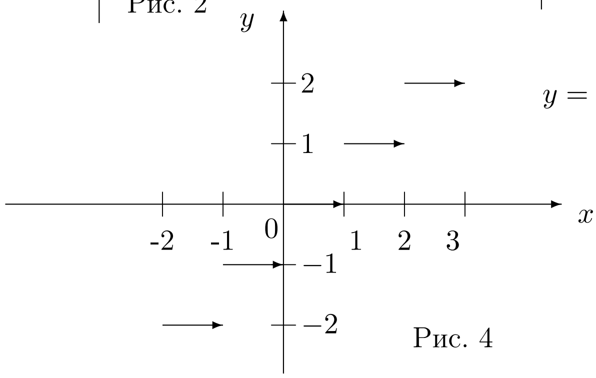


Рис. 4

Наведемо ще приклади таких функцій. Функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (рис. 3) (читається "сигнум x" або "знак x") задають словами

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Функцію $f(x) = [x]$ (ціла частина x) задають так: ціла частина дійсного числа x – це найбільше ціле число, що не перевищує x.

Наприклад: $[2,3] = 2$; $[-1,8] = -2$.

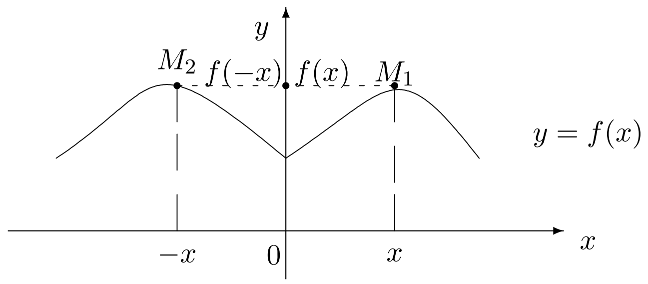
На рис. 4 показано графік цієї функції.

Ще одним прикладом словесного задання функції є функція Діріхле:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x\text{– раціональне }, \\ 0, & \text{якщо } x\text{– ірраціональне}. \end{cases}$$

1.3. Парні та непарні функції. Періодичні функції. Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **парною**, якщо: 1) множина X симетрична відносно точки $x = 0$; 2) $f(-x) = f(x)$, $x \in X$.

Наприклад, функції $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, і $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, – парні, оскільки $(-x)^2 = x^2$ і $\cos(-x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

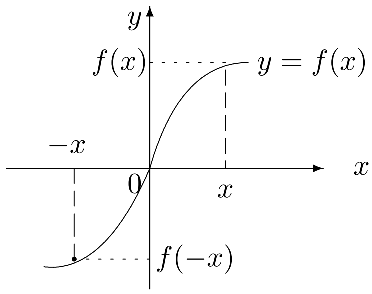


З означення парної функції випливає, що будь-які дві точки графіка цієї функції $M_1(x; f(x))$ і $M_2(-x; f(-x))$ симетричні відносно осі ординат. Тому *графік парної функції розміщується симетрично відносно осі Oy*.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **непарною**, якщо: 1) множина X симетрична відносно точки $x = 0$; 2) $f(-x) = -f(x)$, $x \in X$.

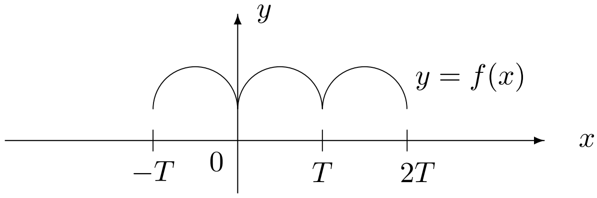
Наприклад, функції $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, і $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, непарні, оскільки $(-x)^3 = -x^3$, $\sin(-x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Графік непарної функції розміщується симетрично відносно початку координат, оскільки разом з точкою $(x; f(x))$ він містить і точку $(-x; -f(x))$.



Треба мати на увазі, що не всяка функція є парною або непарною. Наприклад, кожна з функцій $y = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y = x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, не є ні парною, ні непарною.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $f(x \pm T) = f(x)$, $\{x, x \pm T\} \subset X$.



При цьому найменше з додатних чисел T (якщо воно існує), які задовольняють умову $f(x \pm T) = f(x)$, називається **періодом** функції $y = f(x)$, $x \in X$. З тригонометрії відомо, що функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичними. Для перших двох із них період дорівнює 2π, а дві останні мають період π. При дослідженні періодичної функції з періодом T і побудови її графіка досить знати значення цієї функції на будь-якому відрізку довжини T, наприклад, на $[0; T]$.

Періодичними функціями є не лише тригонометричні функції. Наприклад, функція Діріхле є періодичною, оскільки для довільного числа $r \in \mathbb{Q}$ маємо $\chi(x+r) = \chi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Слід зазначити, що ця функція періоду не має.

1.4. Монотонні функції. Функція f називається **зростаючою** (**спадною**) на множині X, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше (менше) значення функції.

Нехай $\{x_1, x_2\} \subset X$ і $x_2 > x_1$. Тоді функція зростає на множині X, якщо $f(x_2) > f(x_1)$ і спадає, якщо $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 5).

Якщо функція f є тільки зростаючою або тільки спадною на множині X, то вона називається **монотонною** на цій множині або **строго монотонною**.

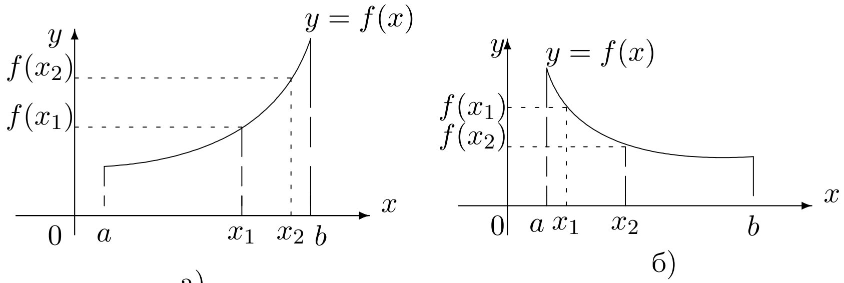
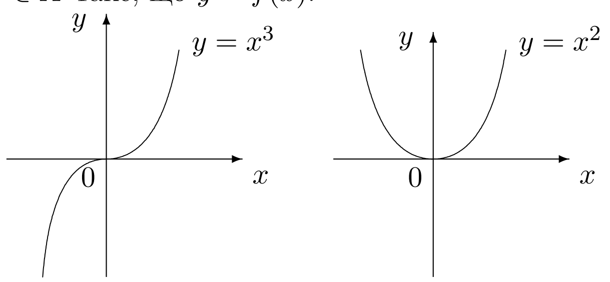


Рис. 5

З рисунків 5 а) і 5 б) безпосередньо видно, що кожна пряма, яка паралельна осі Ox, перетинає графік монотонної функції в одній точці, тобто кожному значенню $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$ таке, що $y = f(x)$.

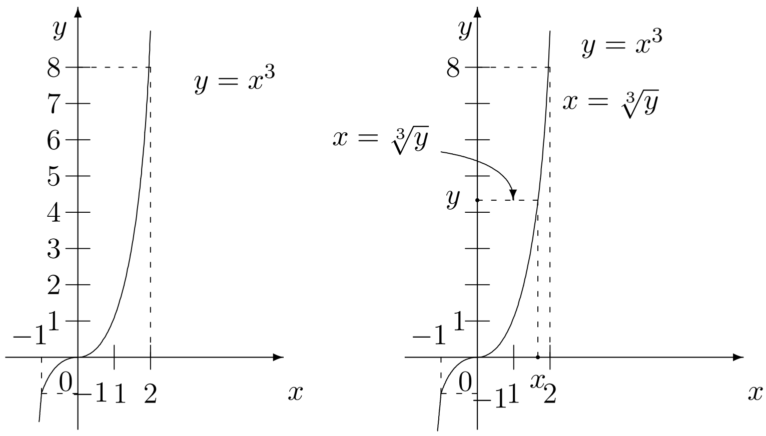


Наприклад, функція $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, монотонна на $\mathbb{R}$; функція $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, – кусково-монотонна: на $(-\infty, 0)$ вона спадає, а на $(0; +\infty)$ – зростає.

У випадку, коли для $\{x_1, x_2\} \subset X$ і $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$, то функція f називається **неспадною** (**незростаючою**) на множині X.

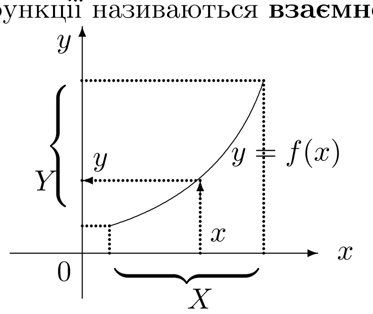
1.5. Поняття оберненої функції. Розглянемо функцію $y = x^3$, $x \in [-1; 2]$. Ця функція здійснює відображення відрізка $[-1; 2]$ на відрізок $[-1; 8]$ – множину значень цієї функції.

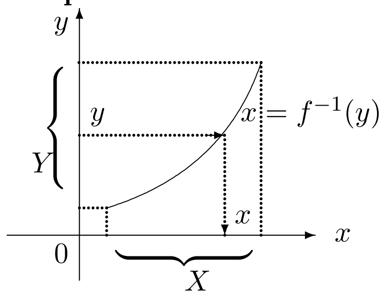
Розглянемо рівність $y = x^3$ як рівняння відносно x. Це рівняння для кожного значення $y \in [-1; 8]$ визначає єдине значення $x \in [-1; 2]$ за формулою $x = \sqrt[3]{y}$. Геометрично це означає, що всяка пряма, яка проходить через точку відрізка $[-1; 8]$, паралельно осі Ox, перетинає графік функції $y = x^3$ тільки в одній точці. Іншими словами, кожному значенню $y \in [-1; 8]$ ставиться у відповідність єдине значення $x \in [-1; 2]$. Це означає, що на відрізку $[-1; 8]$ задана функція $x = \sqrt[3]{y}$, яка відображає цей відрізок на відрізок $[-1; 2]$. Функція $x = \sqrt[3]{y}$ називається оберненою до функції $y = x^3$.



Перейдемо тепер до загального випадку. Розглянемо функцію $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Нехай ця функція така, що пряма, яка проходить через довільну точку множини Y, паралельно осі Ox, перетинає її графік тільки в одній точці, тобто рівняння $y = f(x)$ для кожного $y \in Y$ визначає єдине значення $x \in X$.

Отже, кожному значенню $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$, тобто на множині Y задана функція, множиною значень якої є X. Ця функція називається **оберненою** до функції $y = f(x)$ і позначається символом $x = f^{-1}(y)$. Очевидно, що для функції $x = f^{-1}(y)$ оберненою є функція $y = f(x)$. Тому обидві ці функції називаються **взаємно оберненими**.





Задана функція $y = f(x)$, $x \in X$, і обернена до неї $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, виражають одну й ту саму залежність між x і y. Але у першому випадку ми розглядаємо x як незалежну змінну, а y як функцію; у другому випадку – навпаки, y вважаємо незалежною змінною, а x – функцією. Отже, одна й та сама лінія є графіком заданої функції $y = f(x)$ і оберненої функції $x = f^{-1}(y)$. Однак, якщо для заданої функції вісь Ox є віссю незалежної змінної, то для оберненої функції віссю незалежної змінної служить вісь Oy.

Зауважимо, що не для всякої функції існує обернена. Наприклад, функція $y = x^2$, якщо її розглядати на всій числовій осі, не має оберненої функції, оскільки кожному значенню $y > 0$ відповідає два значення x: $x = -\sqrt{y}$ і $x = \sqrt{y}$. Якщо функцію $y = x^2$ розглядати на проміжку $0 \leq x < \infty$, то вона має обернену функцію $x = \sqrt{y}$, бо кожному значенню $y \geq 0$ відповідає єдине значення $x \in [0; \infty)$, яке задовольняє рівняння $y = x^2$. Якщо ж функцію $y = x^2$ розглядати на інтервалі $-\infty < x < 0$, то матимемо іншу обернену функцію $x = -\sqrt{y}$, $y > 0$.

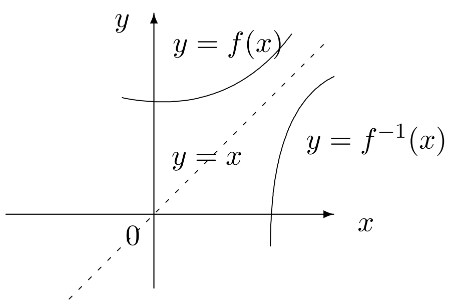
Природно, виникає запитання: якою повинна бути функція $y = f(x)$, щоб вона мала обернену $x = f^{-1}(y)$? Легко можна довести, що монотонна функція $y = f(x)$, $x \in X$, має обернену.

Практично, щоб знайти для функції $y = f(x)$, $x \in X$, яка задана за допомогою формули, обернену до неї функцію $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, треба розв'язати рівняння $y = f(x)$, якщо це можливо, відносно x.

Приклад. Знайти функцію обернену до функції $y = \frac{2x+3}{x-5}$.

◀ Область визначення даної функції $X = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$. Розв'язавши рівняння $y = \frac{2x+3}{x-5}$ відносно x, одержимо $x = \frac{5y+3}{y-2}$, $y \neq 2$. Отже, оберненою до функції $y = \frac{2x+3}{x-5}$, $x \in X$, є функція $x = \frac{5y+3}{y-2}$, $y \in Y = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. ▶

Зауваження. Нехай функція $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, є оберненою до функції $y = f(x)$, $x \in X$. Якщо незалежну змінну в оберненій функції позначити знову через x, а функцію – через y, то тоді обернену функцію можна записати у вигляді $y = f^{-1}(x)$. Наприклад, для $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, оберненою є функція $x = \sqrt[3]{y}$, або, якщо змінити позначення, функція $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.



Графік оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ симетричний до графіка даної функції $y = f(x)$ відносно бісектриси $y = x$ першого й третього координатних кутів.

1.6. Складена функція. Елементарні функції. Нехай функція $y = f(u)$ є функцією від змінної u, визначеною на множині U з областю значень V, а змінна u у свою чергу є функцією $u = \varphi(x)$ від змінної x, визначеною на множині X з областю значень U. Тоді задана на множині X функція $y = f(\varphi(x))$ називається **складеною функцією** (або **ком-**

позицією функцій, **суперпозицією** функцій, **функцією від функції**). Змінну u називають проміжним аргументом складеної функції.

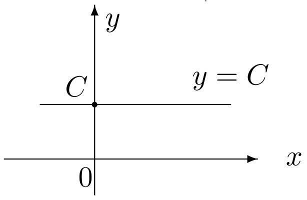
Наприклад, якщо $y = \lg u$, а $u = \sin x$, то y є складеною функцією від x: $y = \lg \sin x$. Ця складена функція визначена лише для тих значень x, при яких $u = \sin x > 0$, тобто для $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, оскільки логарифмічна функція визначена лише для додатних значень аргументу.

Стала функція $f(x) = C$, $C = const$, степенева функція x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), показникова функція a^x ($0 < a \neq 1$), логарифмічна функція $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$), тригонометричні функції: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ і обернені тригонометричні функції: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ називаються **найпростішими елементарними** функціями.

Всі функції, які одержуються за допомогою скінченного числа арифметичних дій над найпростішими елементарними функціями, а також суперпозицією цих функцій, утворюють клас **елементарних** функцій. Прикладами елементарних функцій є: $f(x) = |x|$; $f(x) = \lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \sin 3x$, $f(x) = \ln|\sin 5x| - e^{\arcsin\sqrt{x}}$ і т.д.

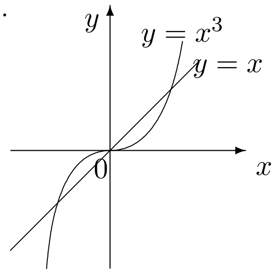
Розглянемо детальніше найпростіші елементарні функції.

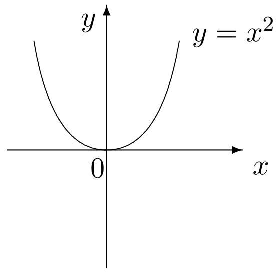
1) **Стала** $y = C$, $x \in \mathbb{R}$, – це функція, яка має одне й те саме значення для всіх значень аргументу. Графіком цієї функції є пряма, яка паралельна осі абсцис.



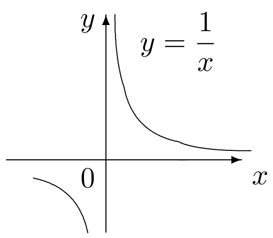
2) **Степенева** функція $y = x^\alpha$, де α – дійсне число, відмінне від нуля. Область визначення цієї функції залежить від значень показника α. Розглянемо окремі випадки степеневої функції:

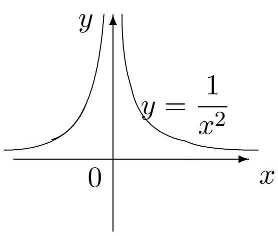
а) $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$; $D(y) = (-\infty; \infty)$; $E(y) = (-\infty; \infty)$, якщо n – непарне і $E(y) = [0; \infty)$, якщо n – парне; функція непарна, коли n – непарне, і парна, коли n – парне; зростає на $(-\infty;\infty)$, при n – непарному; спадає на $(-\infty;0]$ і зростає на $(0;\infty)$ при парному n.



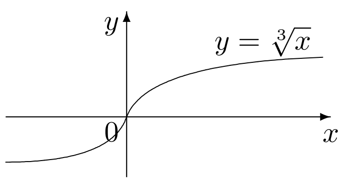


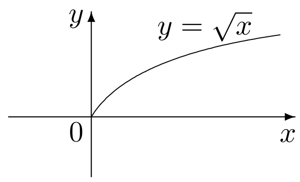
б) $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$; $D(y) = (-\infty;0) \cup (0,\infty)$; $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$, коли n – непарне і $E(y) = (0;\infty)$; коли n – парне; функція непарна, при непарному n і парна при парному n; спадає на $(-\infty;0)$ і на $(0;\infty)$, якщо n – непарне; зростає на $(-\infty;0)$ і спадає на $(0;\infty)$, якщо n – парне.





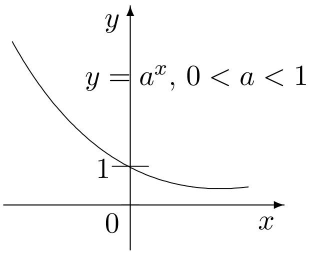
в) $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; $D(y) = (-\infty;\infty)$, якщо n – непарне і $D(y) = [0;\infty)$, якщо n – парне; $E(y) = (-\infty;\infty)$, коли n – непарне і $E(y) = [0;\infty)$, коли n – парне; функція непарна при непарному n і загального вигляду при парному n; зростає на $(-\infty;\infty)$, якщо n – непарне і зростає на $[0,\infty)$, якщо n – парне.

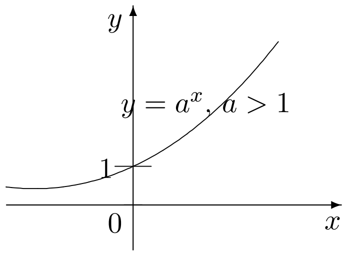




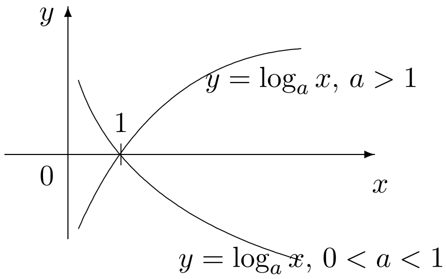
Якщо показник α є дійсним числом, то областю визначення степеневої функції $y = x^{\alpha}$ вважаємо проміжок $X = (0;+\infty)$.

3) **Показникова** функція $y = a^x$, $0 < a \neq 1$; $D(y) = (-\infty; \infty)$; $E(y) = (0; \infty)$; зростає на $(-\infty; \infty)$, якщо $a > 1$; спадає на $(-\infty; \infty)$, якщо $0 < a < 1$.



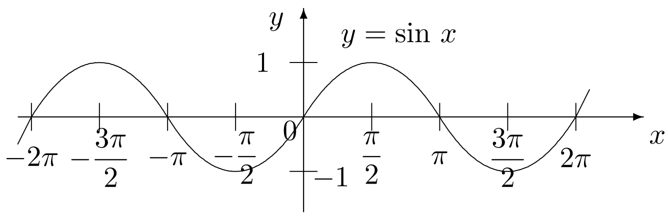


4) **Логарифмічна** функція $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, $D(y) = (0; +\infty)$; зростає на $(0; \infty)$, якщо $a > 1$; спадає на $(0; \infty)$, якщо $0 < a < 1$. В обох випадках $E(y) = \mathbb{R}$.

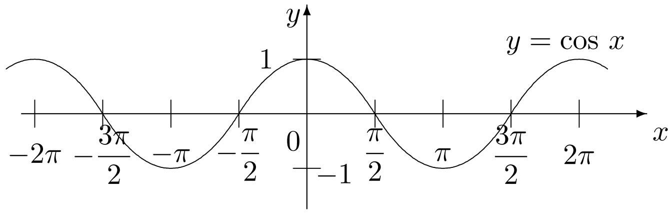


5) **Тригонометричні** функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

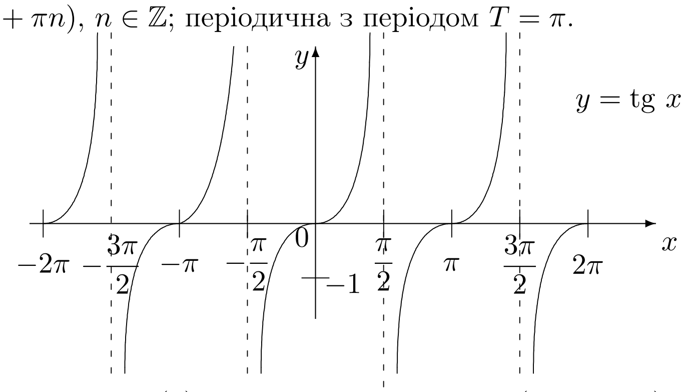
а) $y = \sin x$; $D(y) = (-\infty; \infty)$; $E(y) = [-1; 1]$; функція непарна; зростає на $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ і спадає на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$; періодична з періодом $T = 2\pi$.



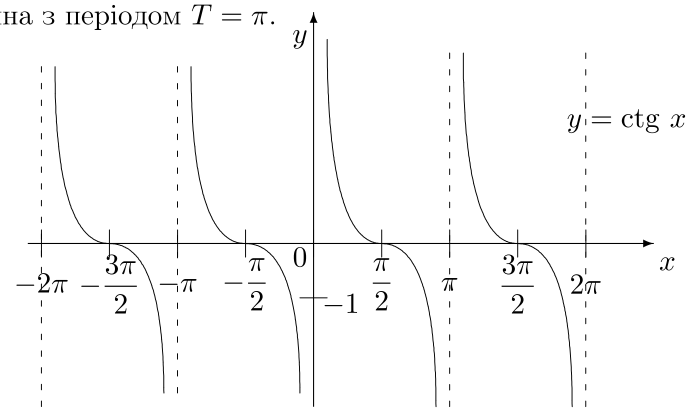
б) $y = \cos x$; $D(y) = (-\infty; \infty)$; $E(y) = [-1; 1]$; функція парна; зростає на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ і спадає на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$; періодична з періодом $T = 2\pi$.



в) $y = \operatorname{tg} x$; $D(y)$ – об'єднання проміжків $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $E(y) = (-\infty; \infty)$; функція непарна; зростає на $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; періодична з періодом $T = \pi$.



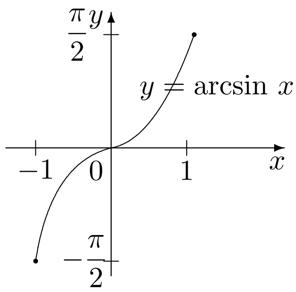
г) $y = \operatorname{ctg} x$; $D(y)$ – об'єднання проміжків $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $E(y) = (-\infty; \infty)$; функція непарна; спадає на $(\pi n; \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; періодична з періодом $T = \pi$.



6) **Обернені тригонометричні** функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

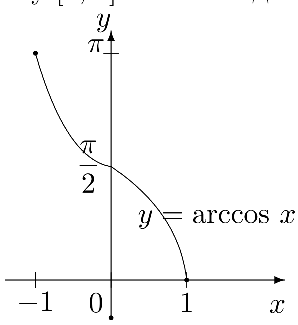
а) $y = \arcsin x$. Якщо розглядати функцію $y = \sin x$ на всій числовій осі $(-\infty; \infty)$, то вона не має оберненої, оскільки одному значенню $y \in [-1; 1]$ відповідає нескінченно багато значень x. Якщо ж цю функцію розглядати на відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, то на ньому функція $y = \sin x$ зростає і, отже, має обернену, яку позначають символом $x = \arcsin y$. Позначивши незалежну змінну через x, а функцію через y, одержимо $y = \arcsin x$.

Функція $y = \arcsin x$ визначена на відрізку $[-1; 1]$ і набуває значень, які належать відрізку $[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}]$. Ця функція зростає на відрізку $[-1; 1]$.



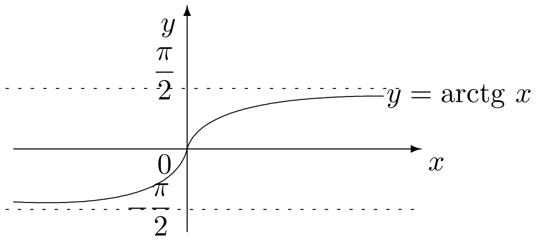
б) $y = \arccos x$. Ця функція визначається як обернена до функції $y = \cos x$, якщо останню розглядати на відрізку $[0; \pi]$, де вона спадає.

Функція $y = \arccos x$ визначена на відрізку $[-1; 1]$, а її значення належать відрізку $[0; \pi]$. Вона спадає на відрізку $[-1; 1]$.



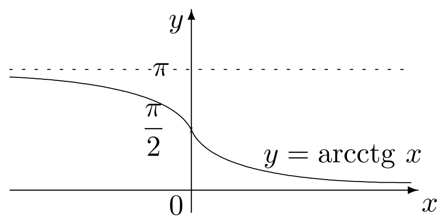
в) $y = \operatorname{arctg} x$. Визначається ця функція як обернена до функції $y = \operatorname{tg} x$, якщо останню розглядати для $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, де вона зростає.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ визначена на всій числовій осі, а її значення належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Вона є зростаючою на всій числовій осі.



г) $y = \operatorname{arcctg} x$. Ця функція визначається як обернена до функції $y = \operatorname{ctg} x$, якщо останню розглядати на проміжку $(0; \pi)$, де вона спадає.

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ визначена на всій числовій осі, а множина значень належить проміжку $(0; \pi)$. Вона спадає на всій числовій осі.



1.7. Класифікація елементарних функцій.

1) Функція вигляду

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m,$$

де $m \geq 0$ – цілі числа, a_0, a_1, ..., a_m – довільні числа – коефіцієнти ($a_0 \neq 0$), називається **цілою раціональною** функцією або **алгебраїчним многочленом** степеня m. Многочлен першого степеня називається також **лінійною** функцією, а многочлен другого степеня – **квадратним тричленом**.

2) Функція, яка є відношенням двох цілих раціональних функцій,

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},$$

називається **дробово-раціональною** функцією.

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворюють клас **раціональних** функцій.

3) Функція, що одержується за допомогою скінченного числа суперпозицій і чотирьох арифметичних дій над степеневими функціями як із цілими, так і з дробовими показниками і не є раціональною, називається **ірраціональною** функцією.

Наприклад, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$, $f(x)=(\sqrt[5]{x}+x)^3+\sqrt{\dfrac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}}$ – ірраціональні функції.

4) Всяка функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається **трансцендентною** функцією. Це, наприклад, функції $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sin x+x$ і т.д.

Вправи

1. Знайти область визначення функції:

1) $y=-\sqrt{x^2-4x+4}$; 2) $y=\log_2(x-2)$; 3) $y=\sqrt{x}-\lg(2x-3)$; 4) $y=\arccos\dfrac{2x}{x^2+1}$; 5) $y=\sqrt{x\sin^2\pi x}$; 6) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt[3]{x+2}$.

2. Знайти множину значень функції:

1) $y=2-x-x^2$; 2) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$; 3) $y=2^{\sin x}$; 4) $y=\frac{1}{2}\arcsin x^2$; 5) $y=\sqrt{5x-4-x^2}$; 6) $y=\dfrac{6x}{x^2+1}$.

3. Дослідити на парність (непарність) функцію:

1) $y=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$; 2) $y=|x|-5e^{x^2}$; 3) $y=x^2+5x$; 4) $y=\ln^2(\sqrt{x^2+1}+x)$; 5) $y=(x-1)^2\sin^2 x$; 6) $y=|x|+x^4$, де $x\in[-2;10]$.

4. Знайти період функції:

1) $y=\sin(2x-\frac{1}{2})$; 2) $y=6\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{4}$; 3) $y=\cos^2 2\pi x$; 4) $y=\cos 2x\cos 6x$; 5) $y=\operatorname{tg}4\pi x+\operatorname{ctg}5\pi x$; 6) $y=\cos 2x+\operatorname{tg}3x+\operatorname{ctg}4x$.

5. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $y=4+\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=3\sin x+4\cos x$; 3) $y=\log_2(x^2+4x+6)$; 4) $y=2^{\cos x}$; 5) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

6. Знайти таке значення x, для якого функція $y=\frac{x^2}{32+2x^4}$ набуває найбільшого значення.

7. З'ясувати, які з наведених нижче функцій мають обернені, знайти відповідні обернені функції та їхні області визначення:

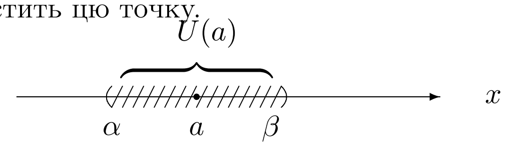
1) $y = ax+b$; 2) $y = \ln 2x$; 3) $y = 2^{x/2}$; 4) $y = x^2-1$, $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}]$; 5) $y = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \le 0, \\ 2x, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$

Відповіді

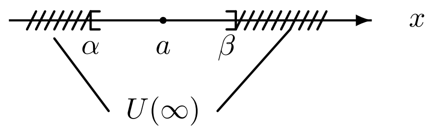
1. 1) $\mathbb{R}$; 2) $(2;\infty)$; 3) $(\frac{3}{2};\infty)$; 4) $\mathbb{R}$; 5) $\mathbb{Z} \cup (0;\infty)$; 6) $(-\infty;0) \cup (0;1)$. **2.** 1) $(-\infty;\frac{9}{4}]$; 2) $[-2;2]$; 3) $[\frac{1}{2};2]$; 4) $[0;\frac{\pi}{4}]$; 5) $[0;\frac{3}{2}]$; 6) $[-3;3]$. **3.** 1) Непарна; 2) парна; 3) ні парна, ні непарна; 4) парна; 5) ні парна, ні непарна; 6) ні парна, ні непарна. **4.** 1) π; 2) $\dfrac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 1; 6) π. **5.** 1) $y_{\min} = 4$, $y_{\max} = 5$; 2) $y_{\min} = -5$, $y_{\max} = 5$; 3) $y_{\min} = 1$; 4) $y_{\min} = \frac{1}{2}$, $y_{\max} = 2$; 5) $y_{\min} = \frac{1}{2}$, $y_{\max} = 1$. **6.** $x = \pm 2$, $y_{\max} = \frac{1}{16}$. **7.** 1) Якщо $a = 0$, то обернена функція не існує, якщо $a \ne 0$, то $x = \frac{y-b}{a}$ – обернена функція і $D = (-\infty;\infty)$; 2) $x = \frac{1}{2}e^y$, $D = (-\infty;\infty)$; 3) $x = 2\log_2 y$, $D = (0,\infty)$; 4) $x = -\sqrt{y+1}$, $D = [-\frac{3}{4};\infty)$; 5) $x = \begin{cases} y, \text{ якщо } y \le 0, \\ \frac{y}{2}, \text{ якщо } y > 0. \end{cases}$

§2. Границя функції

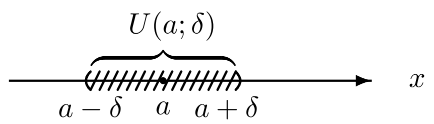
2.1. Означення границі функції. Під околом $U(a)$ точки a (a – дійсне число) розумітимемо довільний інтервал $(\alpha;\beta)$, який містить цю точку.



Під околом $U(\infty)$ символа ∞ розумітимемо зовнішність будь-якого відрізка $[\alpha;\beta]$,тобто $U(\infty) = (-\infty;\alpha) \cup (\beta;+\infty)$.



Через $U(a;\delta)$ позначатимемо δ**-окіл точки** a, тобто інтервал $(a-\delta;a+\delta)$, $\delta > 0$.



Надалі ми також використовуватимемо поняття правого й лівого δ-околу або правого й лівого δ**-півоколу** точки a:

$$U_+(a;\delta) = (a;a+\delta); U_-(a;\delta) = (a-\delta;a).$$

Нехай функція f визначена на множині X. Точка a (a – скінчене) називається **точкою скупчення** цієї множини, якщо її довільний δ-окіл $U(a;\delta)$ містить нескінченно багато елементів множини X. У найпростішому випадку можна вважати, що функція f визначена у деякому околі точки a, причому в самій точці a функція f не обов'язково визначена.

Отже, нехай a – точка скупчення множини X – області визначення функції f.

Число b називається **границею функції** $f(x)$ **при** $x \to a$

(або в точці a), тобто

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

як тільки $x \in \overset{o}{U}(a;\delta)\cap X$, де $\overset{o}{U}(a;\delta) = U(a;\delta)\setminus\{a\}$ (проколений окіл точки a).

Коротко за допомогою символів це означення можна записати так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta)\cap X :$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

З'ясуємо геометричний зміст цього поняття. Згідно з означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що як тільки число x попадає в проколений δ-окіл точки a ($x \in (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$), то число $f(x)$ попадає в ε-окіл точки b, отже, частина графіка функції f , що відповідає даному околу точки a, лежить у смузі між горизонталями $y = b - \varepsilon$ та $y = b + \varepsilon$ (рис. 1)

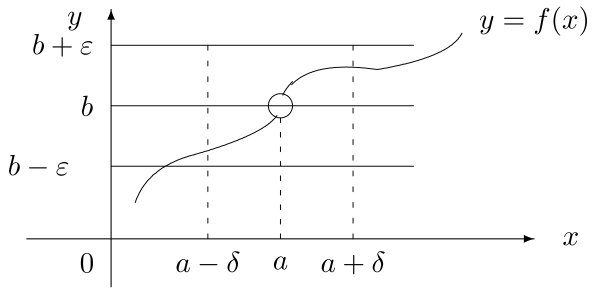


Рис. 1

Зауважимо, що значення функції f в самій точці a нас не цікавить, зокрема, функція в точці a може бути не визначена.

Якщо $a = \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\Delta > 0\ \forall\,|x| > \Delta \text{ і } x \in X : |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Геометрично це означення характеризує те, що частина графіка функції f, яка відповідає значенням аргументу із $(-\infty; -\Delta) \bigcup (\Delta; \infty)$ міститься у смузі, обмеженій прямими $y = b - \varepsilon$ і $y = b + \varepsilon$ (рис. 2).

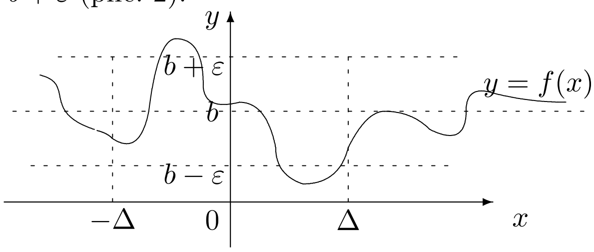


Рис. 2

Приклад 1. Довести, що коли $f(x) = C, x \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = C, a \in \mathbb{R}.$$

◀ Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, якщо $|x - a| < \delta = \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{x \to a} C = C$. ▶

Приклад 2. Довести, що $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, де $x \in (1; 3)$.

◀ Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне дійсне число. Доведемо, що існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|x^2 - 4| < \varepsilon$, як тільки $x \in (2 - \delta; 2 + \delta) \cap (1; 3)$.

Маємо $|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2||x + 2| = |x - 2|(x + 2) < 5|x - 2|$, бо $x + 2 < 5$, якщо $x \in (1; 3)$. Візьмемо $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, тоді для $x \in (2 - \delta; 2 + \delta) \cap (1; 3)$ одержуємо $|x^2 - 4| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$, що й треба довести. ▶

Приклад 3. Довести, що

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + 1} = 1.$$

◀ Задамо довільне додатне ε і розглянемо абсолютну величину різниці $f(x) - b$:

$$|f(x) - b| = |\frac{x}{x + 1} - 1| = \left| \frac{x - x + 1}{x + 1} \right| = \frac{1}{|x + 1|} =$$

$$= \frac{1}{|x - (-1)|} \leq \frac{1}{|x| - |-1|} = \frac{1}{|x| - 1},$$

якщо $|x| > 1$. Ми скористалися тим, що $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Візьмемо $\Delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді, якщо $|x| > \Delta$, тобто $|x| > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $|x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, а тому $\dfrac{1}{|x|-1} < \varepsilon$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\Delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ таке, що для всіх $|x| > \Delta$ виконується нерівність $|\frac{x}{x+1} - 1| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$. ▶

Розглянемо деякі властивості функцій, які мають скінчені границі в точці a.

Теорема 1. *Якщо функція f має границю при $x \to a$, то вона обмежена в деякому околі точки a.*

◀ Згідно з умовою існує границя

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\, x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тоді

$$|f(x)| = |(f(x) - b) + b| \leq |f(x) - b| + |b| <$$

$$< \varepsilon + |b| \equiv M, x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X. \quad ▶$$

Зауваження 1. Обернене твердження неправильне, тобто з обмеженості функції в деякому околі точки a не випливає, взагалі кажучи, існування границі цієї функції при $x \to a$.

Наприклад, функція $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ є обмеженою в проколеному околі точки $x = 0$, але можна довести, що вона не має границі при $x \to 0$.

Теорема 2. *Нехай функція f визначена в деякому околі $U(a)$ точки a і $A < f(x) < B$, $x \in U(a)$. Якщо існує $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $A \leq b \leq B$.*

◀ Доведення проводимо від супротивного. Нехай, наприклад, $b < A$. Візьмемо $\varepsilon = A - b > 0$. Тоді, оскільки функція f має границю при $x \to a$, для $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap U(a)$ правильна нерівність

$$|f(x) - b| < A - b \Leftrightarrow -(A - b) < f(x) - b < A - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -A + 2b < f(x) < A.$$

Звідси випливає, що $f(x) < A$ для $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap U(a)$, а це суперечить умові теореми. Отже, $b \geq A$. ►

Зауваження 2. Теорема 2 правильна і у випадку, коли $A \leq f(x) \leq B$ або $A < f(x) \leq B$, або $A \leq f(x) < B$, $x \in U(a)$.

Наслідок. *Додатна функція не може мати від'ємної границі, а від'ємна функція – додатної границі.*

2.2. Однобічні границі. Символічний запис $x \to a-0$ означає, що x набуває значень, які належать лівому півоколу точки a, тобто $x \to a$ і $x < a$.

Аналогічно запис $x \to a+0$ означає, що $x \to a$ і $x > a$.

1) Число b називається **лівим граничним значенням функції f в точці** $x = a$, тобто $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_-(a;\delta) \cap X : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

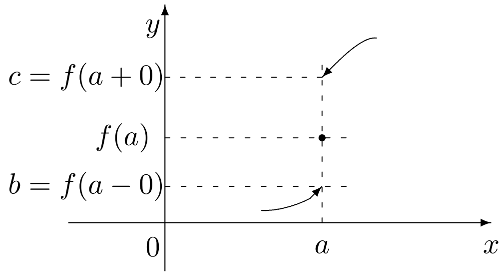
2) Число c називається **правим граничним значенням функції f в точці** $x = a$, тобто $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = c$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_+(a;\delta) \cap X : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Границя $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ називається ще границею функції f зліва при $x \to a-0$, аналогічно $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ – границею справа при $x \to a+0$.

Часто для позначення границі зліва використовується запис $b = f(a-0)$, а для границі справа – $c = f(a+0)$.

Якщо функція f визначена в точці a, то її значення у цій точці $f(x)$ може не збігатися з числами $f(a-0)$ і $f(a+0)$.



Наприклад, для функції

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$$

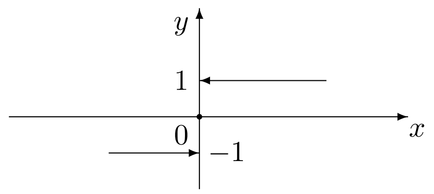
$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (1) = 1,$$

$$f(0) = 0$$

і, отже,

$$f(0-0) \neq f(0+0) \neq f(0).$$



Праве і ліве граничні значення функції f в точці a часто називають **однобічними граничними значеннями**.

Очевидно, що коли функція f має границю в точці a, то вона має й однобічні границі в цій точці, які однакові.

Обернене твердження таке: якщо обидві однобічні границі існують й однакові, то функція f має границю в точці $x = a$.

2.3. Границя послідовності. Розглянемо функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел: $x = f(n), n \in \mathbb{N}$. Така функція називається функцією **натурального аргументу** або **послідовністю**. Значення цієї функції називаються членами послідовності і позначаються символами x_n, $n \in \mathbb{N}$. Члени послідовності звичайно розміщуються у порядку зростання аргументу:

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), \dots,$$

x_1 називається першим членом послідовності, x_2 – другим членом, ..., x_n називається n-ним або загальним членом послідовності.

Позначають послідовність символом $(x_n, n \in \mathbb{N})$, або $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Наприклад, символ $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ означає послідовність чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Геометрично послідовність зображується на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. На рис. 3 зображена послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ на числовій прямій.

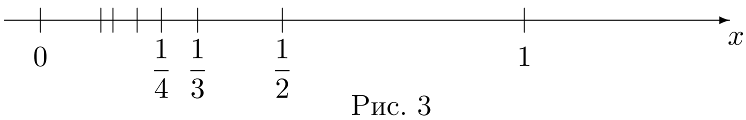


Рис. 3

Конкретизуючи означення границі функції $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ на випадок функції натурального аргументу, приходимо до означення границі послідовності.

Число a називається **границею послідовності** $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такий, що для $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. У символічній формі:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**, а яка не має – **розбіжною**.

Зміст означення границі числової послідовності полягає в тому, що, починаючи з деякого номера n_0, члени послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ як завгодно мало відрізняються від числа a (за абсолютною величиною менше, ніж на число ε, яким би малим воно не було).

Приклад 4. Довести, що послідовність $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ має границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

◀ Доведемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що $|x_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для всіх $n > n_0$.

Очевидно, що $|x_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$. Якщо $n > n_0$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Для того щоб виконувалась нерівність $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, досить взяти $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, зокрема, можна взяти $n_0 = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ можна взяти $n_0 = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$. Тоді для $n > n_0$ виконуватиметься нерівність $|x_n - 0| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. ▶

Приклад 5. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

◀ Маємо

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Очевидно, що для довільного $n > n_0$ виконується нерівність, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0}$ а тому $|\dfrac{n}{n+1} - 1| < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0}$. Якщо для даного $\varepsilon > 0$ вибрати n_0 так, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, то тоді $|\dfrac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ для довільного $n > n_0$. Звідси й випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. ▶

Послідовність $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ називається **нескінченною малою**, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n > n_0 : \ |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ збіжна і її границею є число a, то різниця $\{x_n - a, n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ є нескінченно малою послідовністю. Звідси випливає, що будь-який елемент x_n збіжної послідовності, яка має границею число a, можна подати у вигляді

$$x_n = a + \alpha_n,$$

де α_n – елемент нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Легко можна довести, що коли всі елементи нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ дорівнюють одному й тому самому числу c, то $c = 0$.

Розглянемо деякі властивості збіжних послідовностей.

Теорема 3. *Збіжна послідовність обмежена.*

◀ Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ – збіжна послідовність і число a – її границя.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число і n_0 – номер, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Тоді для всіх $n > n_0$

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|.$$

Якщо взяти $A = \max\{|a| + \varepsilon, |x_1|, \ldots, |x_{n_0}|\}$, то $|x_n| \leq A$ для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$, що й означає обмеженість послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. ▶

Обмежена послідовність може й не бути збіжною. Наприклад, послідовність $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ обмежена, але не є збіжною. Проведемо доведення від протилежного. Нехай границею цієї послідовності є число a. Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$, зокрема, і для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, існує номер n_0 такий, що при $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \dfrac{1}{2}$. Оскільки x_n набуває по черзі значення 1 або -1, то $|1 - a| < \dfrac{1}{2}$ і $|(-1) - a| < \dfrac{1}{2}$. Тоді

$$2 = |(1 - a) - (-1 + a)| \leq |1 - a| + |(-1) + a| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

тобто $2 \leq 1$. Одержана суперечність доводить розбіжність даної послідовності.

Теорема 3 є підсиленням теореми 1 на випадок числових послідовностей. У теоремі 1 стверджується, що функція, яка має границю при $x \to a$, є обмеженою в деякому околі точки a, а не в усій області визначення. Збіжна послідовність є обмеженою в усій області визначення, тобто на множині $\mathbb{N}$.

Теорема 4. *Збіжна послідовність має тільки одну границю.*

◀ Припустимо протилежне, що збіжна послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ має дві границі a і b. Тоді для елементів x_n дістанемо

$$x_n = a + \alpha_n, \quad x_n = b + \beta_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

де α_n і β_n – елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\}$. Віднявши від першої рівності другу, одержимо, що $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Оскільки всі елементи нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n - \beta_n, n \in \mathbb{N}\}$ дорівнюють одному й тому самому числу $b - a$, то згідно з попереднім $b - a = 0$, тобто $a = b$. ►

Послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ називається **нескінченно великою**, якщо для довільного додатного числа E існує номер n_0 такий, що при $n > n_0$ виконується нерівність $|y_n| > E$. Для нескінченно великої послідовності використовують позначення $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Доводиться, що коли $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ – нескінченно велика послідовність, то $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\dfrac{1}{y_n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ – нескінченно мала послідовність і, навпаки, якщо $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ – нескінченно мала послідовність і $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ – нескінченно велика.

2.4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Розглядатимемо функції, які визначені на деякому проміжку X і точку a, що можливо, і не належить проміжку X, але будь-який її окіл містить точки даної множини.

Функція α називається **нескінченно малою при** $x \to a$, якщо її границя дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Знаючи означення границі функції при $x \to a$, можна дати розгорнуте означення нескінченно малої функції.

Функція α називається **нескінченно малою при** $x \to a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X$ правильна нерівність

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, то функція $\alpha(x) = f(x) - b$ є нескінченно малою при $x \to a$, що випливає з означення границі функції.

Звідси отримуємо, що в околі $\overset{o}{U}(a;\delta)$ функцію f можна подати у вигляді

$$f(x) = b + \alpha(x), x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X,$$

де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Функція f називається **нескінченно великою при** $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, що рівносильне такому:

$$\forall E > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X : |f(x)| > E.$$

Наприклад, функції $y = \sin x$ при $x \to 0$ і $y = \dfrac{3}{2x-5}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малими, бо $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ і $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{2x-5} = 0$; функція $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ і $y = \sqrt{5x-8}$ при $x \to \infty$ є нескінченно великими, оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{5x-8} = \infty$.

Між нескінченно малими і нескінченно великими функціями існує певний зв'язок, який можна сформулювати так: якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$; якщо $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$ за умови, що $\alpha(x) \neq 0$ для $x \neq a$.

Зауваження 3. Можна переконатися, що необмежена функція не є, взагалі кажучи, нескінченно великою. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ є необмеженою в довільному околі точки $x = 0$, але вона не є нескінченно великою при $x \to 0$, оскільки функція весь час коливається, переходячи від додатних до від'ємних значень і навпаки. Очевидно, що нескінченно велика функція є необмеженою при $x \to a$.

Вивчимо основні властивості нескінченно малих та нескінченно великих функцій.

Властивість 1. *Сума довільного скінченого числа нескінченно малих при $x \to a$ функцій є нескінченно малою при $x \to a$ функцією.*

◀ Доведемо властивість для випадку двох функцій α і β.

Згідно з означенням маємо, що $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap X : |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для цього ж $\varepsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0$ $\forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta_2) \cap X$: $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для довільного $x \in (\overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2)) \cap X$. ▶

Властивість 2. *Добуток обмеженої в деякому околі точки a функції f на нескінченно малу при $x \to a$ функцію α є нескінченно малою функцією при $x \to a$.*

◀ Нехай f є обмеженою в деякому околі $U(a;\delta)$ точки a, тобто існує число $M > 0$ таке, що для довільного $x \in U(a;\delta)$ правильна нерівність $|f(x)| \le M$. Якщо функція α є нескінченно малою при $x \to a$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) : |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тоді $|f(x)\alpha(x)| = |f(x)|\,|\alpha(x)| \le M\,\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap U(a;\delta)$, а це і означає, що функція $f\alpha$ є нескінченно малою при $x \to a$. ▶

Зауваження 4. З теореми 1 випливає, що нескінченно мала при $x \to a$ функція є обмеженою в деякому околі точки a.

Властивість 3. *Добуток скінченого числа нескінченно малих при $x \to a$ функцій є нескінченно малою функцією при $x \to a$.*

◀ Доведення цієї властивості випливає з властивості 2 і зауваження 4. ▶

Зауваження 5. Відношення двох нескінченно малих функцій α і β при $x \to a$ може бути функцією довільної поведінки.

Наприклад, нехай $\alpha(x) = x, \beta(x) = 2x + x^2, \gamma = x^2$. Очевидно, що $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \gamma(x) = 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x + x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(2 + x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Отже, границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ може дорівнювати: нулю, числу $b\neq 0$, символу ∞. У цьому випадку нескінченно мала функція α називається відповідно: **нескінченно малою вищого порядку, ніж функція β; одного порядку мализни; нижчого порядку мализни, ніж функція β**. Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to a$ називаються **еквівалентними**; в цьому випадку пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. Той факт, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку ніж $\beta(x)$, записується так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$. Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку мализни, то пишуть $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to a$.

З правил порівняння нескінченно малих функцій випливає така важлива властивість: якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ і $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$ й існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причому ці обидві границі однакові.

2.5. Основні теореми про границі. Розглядатимемо функції, які визначені у деякому околі $U(a)$ точки a, за винятком, можливо, самої точки a.

Теорема 5. *Якщо* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c$.

◀ З означення границі функції випливає, що

$$f(x)=b+\alpha(x), x\in \overset{o}{U}(a;\delta_1)$$

$$g(x)=c+\beta(x), x\in \overset{o}{U}(a;\delta_2)$$

де $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$.

Тоді

$$f(x)\pm g(x)=(b+\alpha(x))\pm(c+\beta(x))=b\pm c+(\alpha(x)\pm\beta(x)),$$

$$\forall x\in \overset{o}{U}(a;\delta_1)\cap \overset{o}{U}(a;\delta_2).$$

Оскільки функція $\alpha(x) \pm \beta(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c. \quad \blacktriangleright$$

Наслідок. *Функція може мати лише одну границю при $x \to a$.*

$\blacktriangleleft$ Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, де $b \neq c$. Тоді згідно з теоремою 1

$$0 = \lim_{x\to a}(f(x) - f(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(x) = b - c.$$

Звідси випливає, що $b - c = 0$ або $b = c$, що суперечить припущенню $b \neq c$. $\blacktriangleright$

Зауваження 6. В умові теореми 5 припускається, що кожна з функцій має границю, і доводиться, що їхня сума (різниця) також має границю. Обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця.

Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$

але $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2 x$ і $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^2 x$ не існують.

Теорема 6. *Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc.$$

$\blacktriangleleft$ З того, що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ випливає, що

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1),$$

$$g(x) = c + \beta(x), \quad x \in \overset{o}{U}(a;\delta_2),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Тоді

$$f(x)g(x) = (b + \alpha(x))(c + \beta(x)) = bc + (b\beta(x)+$$

$$+c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)), x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2).$$

Оскільки функція $b\beta(x)+c\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$. ►

З теореми 6 випливає, що сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = \lim_{x\to a} c \ \lim_{x\to a} f(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Лема. *Нехай* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $c \neq 0$. *Тоді існує проколений окіл* $\overset{o}{U}(a)$, *у якому* $g(x) \neq 0$ *і функція* $\dfrac{1}{g(x)}$ *обмежена.*

◄ Нехай $\varepsilon = \dfrac{|c|}{2} > 0$. Тоді згідно з означенням границі функції маємо, що в деякому проколеному околі $\overset{o}{U}(a)$ правильна нерівність $|g(x)-c| < \dfrac{|c|}{2}$, тобто $c-\dfrac{|c|}{2} \leq g(x) \leq c+\dfrac{|c|}{2}$. Якщо $c > 0$, то звідси випливає, що $0 < \dfrac{c}{2} < g(x) < \dfrac{3c}{2}$, $x \in \overset{o}{U}(a)$, а тому $g(x) > 0$ і $\dfrac{2}{3c} < \dfrac{1}{g(x)} < \dfrac{2}{c}$, $x \in \overset{o}{U}(a)$. Отже, $g(x) \neq 0$ і $\dfrac{1}{g(x)}$ обмежена в $\overset{o}{U}(a)$. Якщо ж $c < 0$, то аналогічно маємо, що $\dfrac{3c}{2} < g(x) < \dfrac{c}{2}$, $x \in \overset{o}{U}(a)$. Це означає, що $g(x) < 0$ і $\dfrac{2}{c} < \dfrac{1}{g(x)} < \dfrac{2}{3c}$, $x \in \overset{o}{U}(a)$, тобто $g(x) \neq 0$ і $\dfrac{1}{g(x)}$ обмежена в $\overset{o}{U}(a)$. ►

Теорема 7. *Якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *і* $c \neq 0$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

◄ Оскільки $f(x) = b+\alpha(x), x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1)$ а $g(x) = c+\beta(x), x \in \overset{o}{U}(a;\delta_2)$ де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$,то

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{bc + c\alpha(x) - bc - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} =$$

$$= \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \gamma(x), x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2).$$

Дріб $\dfrac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \gamma(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$, бо $\lim\limits_{x \to a}(c\alpha(x) - b\beta(x)) = c\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) - b\beta(x) = c\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) - b\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to a}(c^2 + c\beta(x)) = \lim\limits_{x\to a} c^2 + c\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = c^2 \neq 0$ і тому згідно з лемою функція $\dfrac{1}{c^2 + c\beta(x)}$ є обмеженою в деякому околі точки a. Отже, маємо, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \gamma(x), x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2),$$

де $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x) = 0$. Звідси випливає,що функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ має границю при $x \to a$, яка дорівнює $\dfrac{b}{c}$. ►

Теореми про границі суми, різниці, добутку і частки полегшують знаходження границь.

Приклад 6. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+10)(x+20)^2(x+30)^3}{x^6}.$$

◄ Перетворимо функцію, границю якої треба знайти, і скористаємося теоремою 6:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{10}{x})(1+\frac{20}{x})^2(1+\frac{30}{x})^3 = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{10}{x})\times$$

$$\times\lim_{x\to\infty}(1+\frac{20}{x})^2\lim_{x\to\infty}(1+\frac{30}{x})^3 = 1\cdot 1^2\cdot 1^3 = 1. \blacktriangleright$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$.

◄ Оскільки границя чисельника

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2) = \lim_{x\to 1}x^2 + 3\lim_{x\to 1}x + 2 = 1+3+2 = 6,$$

а границя знаменника

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5) = \lim_{x\to 1}x^2 - 2\lim_{x\to 1}x + 5 = 1-2+5 = 4 \neq 0,$$

то застосувавши теорему 7, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

Приклад 8. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

◀ У чисельнику маємо суму n членів геометричної прогресії із знаменником $q=-\dfrac{1}{2}$, а тому

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left(1-(-1)^n\frac{1}{2^n}\right).$$

Аналогічно в знаменнику є сума n членів геометричної прогресії із знаменником $q=\dfrac{1}{3}$ і, отже,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\left(1-(-1)^n\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(1-(-1)^n\frac{1}{2^n}\right)}{9\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\frac{4}{9},$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$. ▶

Безпосереднє застосування теорем про границі не завжди дає позитивний результат. Наприклад,не можна застосовувати теорему 7, якщо чисельник і знаменник прямують одночасно до нуля або нескінченності. У цьому випадку кажуть, що дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ відповідно. Знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ у цих випадках називатимемо розкриттям невизначеності вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Тому часто, спершу треба тотожно перетворити функцію, границю якої шукаємо, а потім застосувати теореми про границі.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

◄ Тут безпосередньо застосувати теорему 7 не можна, бо границі чисельника і знаменника дорівнюють нулю при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=\lim_{x\to 1}x^2-1=1^2-1=0,$$

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1)=\lim_{x\to 1}x^3-1=1^3-1=0.$$

Тому треба розкрити невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Для цього перетворимо дріб, розклавши чисельник і знаменник на множники:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Скоротивши дріб на $x-1\neq 0$, матимемо тотожність

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Тоді границі правої та лівої частин однакові, тобто

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.\quad ►$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

◄ Оскільки чисельник і знаменник прямують до нескінченності при $x\to +\infty$, то маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Для того щоб знайти границю даного дробу, попередньо перетворимо його

$$\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\frac{x^2(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Тоді матимемо

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2})} = \frac{5}{6}. \blacktriangleright$$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+6}{3x^2+4x+2}$.

$\blacktriangleleft$ Для того щоб можна було застосувати теорему 7 про границю частки, поділимо чисельник і знаменник на x^2 :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+6}{3x^2+4x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2})} = \frac{0}{3} = 0. \blacktriangleright$$

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}$.

$\blacktriangleleft$ Маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^3(\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}(7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}) = \lim\limits_{x\to\infty} 7 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 7$, а

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3}) = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{13}{x^3} = 0,$$

то дріб $\dfrac{\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}}$ є нескінченно малою функцією при $x \to +\infty$, а, отже, обернений дріб $\dfrac{7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3}}$ є нескінченно великою функцією при $x \to +\infty$.

Тому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13} = \infty. \blacktriangleright$$

Узагальнюючи приклади, розглянуті вище, можна зробити висновок: *при* $x \to \pm\infty$ *границя відношення двох многочленів однакових степенів дорівнює відношенню коефіцієнтів* *при старших степенях x; якщо ж степені многочленів різні, то границя їхнього відношення дорівнює нулю, коли степінь чисельника менший за степінь знаменника, і – нескінченності у протилежному випадку, тобто*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + ... + b_0} = \begin{cases} 0, & m < s, \\ \dfrac{a_m}{b_s}, & m = s, \\ \infty, & m > s. \end{cases}$$

Приклад 13. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\Big).$$

◀ Оскільки $1+2+3+\ldots+n$ є сумою n перших членів арифметичної прогресії, то

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n(1+n)}{2(n+2)} - \frac{n}{2}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2-n^2-2n}{2(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2\cdot n\Big(1+\frac{2}{n}\Big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\Big(1+\frac{2}{n}\Big)} = -\frac{1}{2}.$$ ▶

2.6. Деякі ознаки існування границі функції. Не кожна функція має границю, навіть тоді, коли вона обмежена. Наприклад, $f(x) = \sin x$ при $x \to \infty$ границі не має, але $|\sin x| \le 1, x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо деякі ознаки існування границі функції.

Теорема 8. *Нехай у деякому околі $U(a)$ точки a (за винятком можливо самої точки a) функція f міститься між функціями ψ і φ, які мають однакову границю при $x \to a$, тобто,*

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x), x \in \overset{o}{U}(a),$$

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\psi(x)=b.$$

Тоді функція f має при $x\to a$ ту саму границю b, тобто $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

◀ Згідно з умовою

$$\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x), x\in\overset{o}{U}(a).$$

Додамо до всіх частин даної нерівності $-b$:

$$\varphi(x)-b\le f(x)-b\le\psi(x)-b, x\in\overset{o}{U}(a).$$

Звідси випливає, що

$$|f(x)-b|\le\max(|\varphi(x)-b|,|\psi(x)-b|),\quad x\in\overset{o}{U}(a).$$

Оскільки

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\in\overset{o}{U}(a;\delta_1)\cap\overset{o}{U}(a):$$

$$|\varphi(x)-b|<\varepsilon;$$

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0\ \forall x\in\overset{o}{U}(a;\delta_2)\cap\overset{o}{U}(a):$$

$$|\psi(x)-b|<\varepsilon,$$

то

$$|f(x)-b|<\varepsilon, x\in\overset{o}{U}(a;\delta_1)\cap\overset{o}{U}(a;\delta_2)\cap\overset{o}{U}(a)$$

що рівносильно $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. ▶

Приклад 14. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}},$$

скориставшись теоремою 8.

◀ Розглянемо три послідовності, тобто функції натурального аргументу: $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$, $\{y_n, n\in\mathbb{N}\}$, $\{z_n, n\in\mathbb{N}\}$, де $x_n=1$, $y_n=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$, $z_n=1+\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, що

$$x_n\le y_n\le z_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

оскільки $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, то згідно з теоремою 8 існує границя $\lim_{n\to\infty} y_n$ і дорівнює 1, тобто $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$. ▶

Теорема 9. *Обмежена монотонна послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ має границю, тобто є збіжною.*

◀ Розглянемо випадок неспадної послідовності. Нехай $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$ й існує число M таке, що $x_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді множина X, яка складається з елементів цієї послідовності, тобто $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$, є обмеженою зверху і непорожньою. Тому ця множина має точну верхню межу a. Доведемо, що це число a є границею заданої послідовності.

Оскільки $a = \sup X$, то згідно з властивістю точної верхньої межі для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0 такий, що $x_{n_0} > a - \varepsilon$. З того, що послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ неспадна випливає нерівність $x_n > a - \varepsilon$ для $n > n_0$. З іншого боку, за означенням верхньої межі, $x_n \leq a < a + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, для $n > n_0$ правильні нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ або $|x_n - a| < \varepsilon$. Останнє означає, що a – границя послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

У випадку незростаючої послідовності маємо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, де $b = \inf X$. ▶

Зауваження 7. Якщо послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ незростаюча (неспадна), то в теоремі 9 досить вимагати, щоб вона була обмежена знизу (зверху), бо вона завжди обмежена зверху (знизу) своїм першим елементом x_1.

Приклад 15. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

◀ Спочатку доведемо, що послідовність $\left\{\frac{n}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ є незростаючою. Справді,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1, n \in \mathbb{N}$$

а це означає, що $x_{n+1} \leq x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $x_n = \dfrac{n}{2^n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то послідовність обмежена знизу. Тоді з теореми 9 випливає, що вона має границю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Для того щоб знайти це число a, перейдемо до границі в рівності $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \lim_{n\to\infty} x_n$$

або $a = \dfrac{1}{2}a$, тобто $a = 0$. ►

Теорему 9 можна узагальнити на випадок монотонних функцій.

Теорема 10. *Нехай функція f монотонна і обмежена при $x < a (x > a)$. Тоді існує ліве (праве) граничне значення f при $x \to a$:*

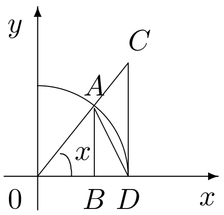
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), (\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)).$$

2.7. Дві важливі границі

2.7.1. Перша важлива границя. *Довести, що*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

◄ Безпосереднє обчислення цієї границі приводить до невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$. Для її розкриття скористаємося геометричними міркуваннями.



Нехай x – величина центрального кута в радіанах і $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, а радіус кола R. Очевидно, що $S_{\Delta AOD} < S_{\text{сект.}AOD} < S_{\Delta COD}$. Оскільки $AB = R\sin x, OD = R, CD = R\operatorname{tg} x$, а довжина дуги $\breve{AD} = Rx$, то одержимо

$$\frac{1}{2}OD \cdot AB < \frac{1}{2}\breve{AD} \cdot R < \frac{1}{2}OD \cdot CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x <$$

$$< \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x, x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Поділивши цю нерівність на $\sin x > 0$, матимемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Очевидно, що одержана нерівність правильна і для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, бо $\frac{-x}{\sin(-x)} = \frac{x}{\sin x}$, $\cos(-x) = \cos x$.

Отже, маємо нерівності

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \bigcup (0; \frac{\pi}{2}).$$

Якщо $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, то, скориставшись теоремою 8, одержимо, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

бо $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Очевидно, що $0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \le 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$, $x \in \Big(-\frac{\pi}{2}; 0\Big) \cup \Big(0; \frac{\pi}{2}\Big)$. Тоді згідно з теоремою 8 маємо $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$, бо $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0$. ►

Наведемо приклади застосування цієї важливої границі.

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

◄ Маємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{\cos 2x} 2 =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} \lim_{x\to 0} 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2. \ ►$$

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

◄ Обчислимо цю границю, зробивши певні перетворення:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

2.7.2. Друга важлива границя. *Довести, що послідовність* $\{x_n, n\in\mathbb{N}\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbb{N}\right\}$ *має скінчену границю, яка міститься між 2 і 3.*

◀ Для доведення того, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, перевіримо виконання умов теореми 9.

Скориставшись формулою бінома Ньютона, подамо x_n у вигляді

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!}\,\frac{1}{n^n}$$

або

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ...+$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n}).$$

Аналогічно

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ...+$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}\times$$

$$\times(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1}).$$

Оскільки

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1},\ k\in\{1,\dots,n\},$$

і, крім того, x_{n+1} містить у порівнянні з x_n додатковий додатний член, то $x_n < x_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ є зростаючою.

У формулі для x_n кожний вираз у дужках менший за 1, і, крім того,

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

тобто, послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ обмежена зверху числом 3. Очевидно, що $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ обмежена знизу 2.

Одержали, що послідовність є зростаючою і обмеженою, а тому згідно з попереднім наслідком має скінчену границю, яку позначають буквою e:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \text{де } 2 \leq e \leq 3.$$

Точніше підраховується, що $e \approx 2,718281...$. Крім того, можна довести, що e є ірраціональним числом.

Доведено, що функція $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ має границю, що дорівнює числу e:

$$e = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x.$$

У цій рівності покладемо $y = \frac{1}{x}$, тобто $x = \frac{1}{y}$ і як результат одержимо ще один запис числа e:

$$e = \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}.$$

Число e (число Ейлера, неперове число) відіграє дуже важливу роль у математичному аналізі. Графік функції $y = e^x$ називається **експонентою**. Широко використовуються логарифми за основою e, які називаються **натуральними**. Натуральні логарифми позначаються символом ln:

$$\log_e x = \ln x, \quad x > 0.$$

До числа e приводить розв'язування багатьох прикладних задач статистики, фізики, біології, хімії, економіки і т. п.

Приклад 18. Розглянемо задачу про неперервне нарахування відсотків. Початковий вклад у банк становить q_0 грошових одиниць. Банк виплачує $p\%$ річних. Треба знайти розмір вкладу q_t через t років.

◀ Очевидно, що при $p\%$ річних розмір вкладу щорічно збільшується в $(1+\frac{p}{100})$ разів, тобто $q_1 = q_0(1+\frac{p}{100})$, $q_2 = q_1(1+\frac{p}{100}) = q_0(1+\frac{p}{100})^2$, ..., $q_t = q_0(1+\frac{p}{100})^t$.

Отже, маємо, що через t років сума вкладу

$$q_t = q_0(1+\frac{p}{100})^t.$$

Ця формула називається **формулою складних відсотків**.

Якщо нараховувати відсотки по вкладах не один раз на рік, а n разів, то при тому самому щорічному прирості $p\%$ відсоток нарахування за $\frac{1}{n} - y$ частину року становитеме $\frac{p}{n}\%$, а розмір вкладу за t років при nt нарахуваннях дорівнюватиме

$$q_t = q_0(1+\frac{p}{100n})^{nt}.$$

Вважатимемо, що відсотки по вкладу нараховуються кожне півріччя ($n=2$), щоквартально ($n=4$), щомісячно ($n=12$), кожного дня ($n=365$), щогодини ($n=8760$) і т.д., неперервно ($n\to\infty$). Тоді розмір вкладу за t років становитиме

$$q_t = \lim_{n\to\infty} q_0(1+\frac{p}{100n})^{nt} = q_0 \lim_{n\to\infty}((1+\frac{p}{100n})^{\frac{100n}{p}})^{\frac{pt}{100}} =$$
$$= \left| \begin{array}{c} x = \frac{p}{100n}, \\ n\to\infty \Rightarrow x\to 0 \end{array} \right| = q_0 \lim_{x\to 0}((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{pt}{100}} = q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Ця формула виражає показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p>0$) або спадання (при $p<0$). Вона використовується при неперервному нарахуванні відсотків.

На практиці у фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування відсотків використовується рідко, але воно є ефективним при аналізі складних фінансових проблем, зокрема, при обгрунтуванні та виборі інвестиційних рішень.▶

Приклад 19. Нехай є m_0 грам-молекул активної речовини. Припускаючи, що за одиницю часу вступає в реакцію $p\%$ цієї речовини, знайти, яка кількість грам-молекул не вступить в реакцію за час t.

◀ За одиницю часу в реакцію вступають $\frac{pm_0}{100}$ грам-молекул, а залишається $m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Через дві одиниці часу не вступило в реакцію $m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$, а через t одиниць часу – $m_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^t$ грам-молекул.

Якщо одиницю часу поділити на n частин, то за $\frac{1}{n}$-у частину одиниці часу матимемо $\frac{p}{n}\%$ відсотків речовини, що вступає в реакцію, а тоді за t одиниць часу не вступить в реакцію $m_0\left(1-\frac{p}{100n}\right)^{nt}$ грам-молекул. У випадку, коли $n\to\infty$ матимемо, що не вступає в реакцію за час t така кількість речовини:

$$C=\lim_{n\to\infty} m_0\left(1-\frac{p}{100n}\right)^{nt}=m_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{p}{100n}\right)^{-\frac{100n}{p}}\right)^{-\frac{pt}{100}}=$$

$$=m_0e^{-\frac{pt}{100}}. \quad ▶$$

Зауваження 8. У багатьох випадках обчислення границі спрощується, якщо скористатися еквівалентністю нескінченно малих функцій.

Приклад 20. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^3}$.

◀ Оскільки $\sin 5x\sim 5x$, $x+x^3\sim x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=\lim_{x\to 0}5=5. \quad ▶$$

Наведемо **основні еквівалентності**. Якщо $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то $\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\ln(1+\alpha(x))\sim(e^{\alpha(x)}-1)$.

Доводяться ці еквівалентності за допомогою означення еквівалентних нескінченно малих, а саме: нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$.

Провівши очевидні перетворення і скориставшись першою важливою границею, одержимо:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left|\begin{array}{ll}\alpha(x)=t, & \alpha(x)\to 0\\ \text{при } x\to 0, & \text{тоді } t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{1}{\cos t}=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\cos t}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left|\begin{array}{ll}\arcsin\alpha(x)=t, & \alpha(x)=\sin t,\\ \alpha(x)\to 0 & \text{при } x\to 0,\\ \text{тому } t\to 0 & \end{array}\right|=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left|\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\alpha(x)=t, & \alpha(x)=\operatorname{tg}t,\\ \alpha(x)\to 0 & \text{при } x\to 0,\\ \text{тому } t\to 0 & \end{array}\right|=$
$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\operatorname{tg}t}=1.$

Еквівалентності $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ і $e^{\alpha(x)}\sim\alpha(x)$ при $x\to 0$ доведемо в наступному параграфі.

Приклад 21. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

◄ Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Оскільки $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}. \quad ►$$

Вправи

1. Використовуючи означення границі функції, довести, що: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{n}=3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}(6-5x)=-14$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-3}{2x+1}=2$.

2. Знайти границю: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2+7}-2x^2)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\sin\dfrac{1}{x-5}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; 13) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{\operatorname{tg}x^2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\arcsin x}$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x^2-3})^{x^3-5}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; 23) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)$; 24) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$; 25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{5n}\right)^n$; 26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\sin n!$.

Відповіді

2. 1) 0 ; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3)-12; 4) $\dfrac{5}{2}$; 5) 4; 6) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{13}{4}$; 8) $\dfrac{2}{5}$; 9) $\dfrac{3}{4}$; 10) -1; 11) 1; 12) 8; 13) $-\dfrac{1}{2}$; 14) 3; 15) $\frac{1}{3}$; 16) e^2; 17) e^3; 18) ∞; 19) $e^{\frac{-1}{4}}$; 20) e^{-1}; 21) $e^{\frac{-1}{2}}$; 22) $-\dfrac{1}{12}$; 23) $\dfrac{2}{3}$; 24) $-0,1$; 25) $e^{-\frac{3}{5}}$; 26) 0.

§3. Неперервність функції

Поняття неперервності функції є одним з основних понять математичного аналізу.

3.1 Означення неперервності функції. Функція $y = f(x)$ з областю визначення X називається **неперервною в точці** x_0, якщо виконуються умови:

1) функція f визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in X$;

2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

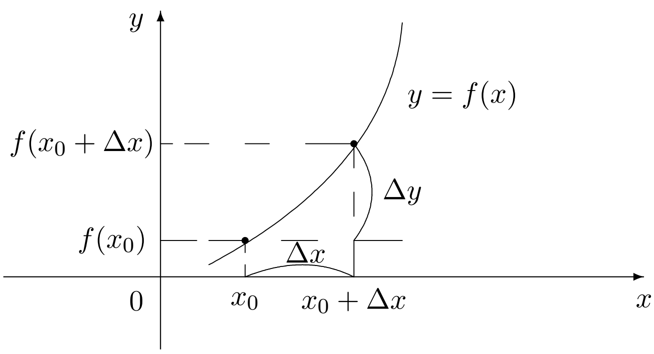
Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то умову 3) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

тобто для неперервної функції f можна міняти місцями знак характеристики f і знак границі lim.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функція f називається **неперервною в точці** x_0 **справа** або **зліва** відповідно.

Очевидно, що коли функція f неперервна у точці x_0 і справа і зліва, то вона неперервна в цій точці. Правильним є й обернене твердження.



Різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу x у точці x_0 і позначають через Δx, а різницю $f(x) - f(x_0)$ – приростом функції f у точці x_0, який викликаний приростом аргументу Δx, і позначають символом Δf або Δy. Отже, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Зауважимо, що при фіксованому x_0 величина Δy є функцією аргументу Δx.

У нових позначеннях рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можна подати у вигляді

$$\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0,$$

або

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Звідси випливає означення.

Функція f називається **неперервною в точці** x_0 якщо її приріст у цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \to 0$.

Функція f називається **неперервною на множині** X, якщо вона визначена на цій множині й неперервна у кожній її точці. Зокрема, функція f неперервна на $[a; b]$, якщо вона неперервна на $(a; b)$ й неперервна у точці a справа, а у точці b зліва, тобто $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = x^2$.

◀ Область визначення даної функції $D(y) = \mathbb{R}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Приріст функції, що відповідає приросту Δx аргументу дорівнює

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x).$$

Очевидно, що коли $\Delta x \to 0$, то й $\Delta y \to 0$. Отже, функція f неперервна в точці x_0, а оскільки ця точка довільна, то функція неперервна на $\mathbb{R}$. ▶

3.2. Властивості функцій, які неперервні у точці.

Теорема 1. *Якщо функції f і g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ також неперервні в цій точці (остання при $g(x_0) \neq 0$).*

◀ Оскільки неперервні в точці x_0 функції мають у цій точці скінченні границі:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

то згідно з основними теоремами про границі, матимемо

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x)\ g(x) \Big) = \lim_{x \to x_0} f(x)\ \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)\ g(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Звідси й випливає, що функції $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ неперервні в точці x_0. ▶

За допомогою цієї теореми доведемо неперервність деяких елементарних функцій.

1. Неперервність раціональних функцій. Розглянемо спочатку функцію $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, що для довільного $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C = f(x_0)$, тобто стала функція неперервна у кожній точці числової осі.

Аналогічно для функції $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$, тобто ця функція є також неперервною на $\mathbb{R}$.

Якщо скористатися теоремою 1, то отримаємо, що функції $x^2 = x \cdot x$; $x^3 = x^2 \cdot x$; ... ; $x^n = x^{n-1} \cdot x$ неперервні у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер алгебраїчний многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$

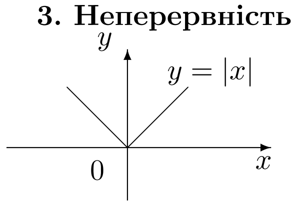
де $n \geq 0$ – ціле число, a_0, a_1, ... , a_n – довільні дійсні числа. Кожний з доданків $a_0 x^n$, ... ,a_n є добутком двох неперервних функцій сталої і степеневої, а отже, є неперервною функцією згідно з теоремою 1. Многочлен $P_n(x)$ є неперервною функцією у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$ як сума неперервних функцій.

2. Дробово-раціональна функція, тобто функція вигляду

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m, є неперервною у всіх точках $x_0 \in \mathbb{R}$, де знаменник Q_m не дорівнює нулю, як частка неперервних функцій.

3. Неперервність функції $f(x) = |x|$**,** $x \in \mathbb{R}$.



Очевидно, що коли $x \in (0; \infty)$ або $x \in (-\infty; 0)$, то $f(x) = x$ і $f(x) = -x$ відповідно, а, отже, є неперервною функцією. Доведемо, що ця функція неперервна й у точці $x = 0$. Маємо

$$\lim_{x \to 0-0} |x| = \lim_{x \to 0-0} (-x) = - \lim_{x \to 0-0} x = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+0} |x| = \lim_{x \to 0+0} x = 0; \;\; f(0) = 0.$$

Це означає, що права й ліва границі в точці $x = 0$ однакові й дорівнюють значенню функції $f(0)$, а тому функція неперервна в цій точці.

4. Неперервність найпростіших елементарних функцій. Можна довести, що найпростіші елементарні функції неперервні в області визначення:

1) $y = a^x$, $0 < a \neq 1$ – неперервна на $\mathbb{R}$;

2) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$ – неперервна на $(0; \infty)$;

3) $y = \sin x$ і $y = \cos x$ – неперервні на $\mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$ – неперервна при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = \operatorname{ctg} x$ – неперервна при $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$ – неперервні на $[-1; 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ – неперервні на $\mathbb{R}$.

Доведемо, наприклад, неперервність функції $y = \sin x$ у довільній точці $x \in \mathbb{R}$. Скористаємось означенням неперервності функції за допомогою приростів. Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

або

$$\Delta y = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Перейшовши до границі в лівій і правій частинах цієї рівності при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0} (\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}) = 0,$$

оскільки $|\cos(x + \dfrac{\Delta x}{2})| \le 1$, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

і добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна в довільній точці $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Якщо функція f неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то існує такий окіл точки x_0, у якому $f(x) > 0$.*

◄ Згідно з означенням неперервності функції f в точці x_0 маємо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тепер скористаємося означенням границі функції: $\varepsilon = f(x_0) > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U(x_0; \delta)$: $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$ або $0 < f(x) < 2f(x_0)$.

Отже, для $x \in U(x_0; \delta)$ має місце нерівність $f(x) > 0$. ►

Теорема 3. *Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.*

◄ Для доведення теореми досить установити, що

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

Згідно з неперервністю функції $u = \varphi(x)$, маємо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, тобто при $x \to x_0$ також і $u \to u_0$. Тому, скориставшись неперервністю функції $f(u)$, дістанемо

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)). \quad ►$$

Коротко цю теорему можна сформулювати так: *складена функція $y = f(\varphi(x))$, яка утворена з двох неперервних функцій $f(u)$ і $\varphi(x)$, є неперервною функцією.*

Наприклад, складена функція $y = \sin(x^2 + 4x - 3)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}$, оскільки функції $y = \sin u$ і $u = x^2 + 4x - 3$ неперервні скрізь на $\mathbb{R}$. Складена функція $y = \ln(1 - x^2)$ неперервна для значень x, що задовольняють нерівність $1 - x^2 > 0$, тобто в інтервалі $(-1; 1)$.

Як відомо, елементарною функцією називається функція, яку можна задати одним аналітичним виразом, складеним з найпростіших елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій і скінченного числа утворень складених функцій. Оскільки найпростіші елементарні функції неперервні в усіх точках у яких вони визначені, то з теорем 1 і 3 випливає, що *всяка елементарна функція неперервна в усіх точках, що належать її області визначення.*

Цей важливий результат дозволяє легко знаходити границю елементарної функції при $x \to x_0$, якщо функція визначена в точці $x = x_0$. Для цього досить обчислити значення функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x}$.

◀ Зауважимо, що при $x \to 0$ чисельник і знаменник одночасно прямують до нуля, а тому ми маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Зробимо деякі перетворення:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} (\frac{1}{x} \log_a(1 + x)) = \lim_{x \to 0} \log_a(1 + x)^{1/x}.$$

Оскільки логарифмічна функція неперервна, то перейдемо до границі під знаком функції, тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a(\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}).$$

Відомо, що $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$, а тому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e.$$

Зокрема, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \blacktriangleright$$

З останньої рівності випливає, що

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Оскільки при $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = \left|\begin{array}{ll} \alpha(x) = t, & \alpha(x) \to 0, \\ \text{при } x \to x_0, & \text{тому } \ t \to 0 \end{array}\right| =$$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, то $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, коли $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

◀ Тут ми маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для знаходження границі зробимо заміну змінної, поклавши $a^x - 1 = t$. Тоді $x = \log_a(1+t)$. Зауваживши, що при $x \to 0$ також і $t \to 0$, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Очевидно, що з рівності $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ випливає рівність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a} = 1$, тобто $a^x - 1 \sim x\ln a$ при $x \to 0$.

Зокрема,

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Ці еквівалентності можна узагальнити, а саме:
$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$ при $\alpha(x) \to 0$, якщо $x \to x_0$,
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x) \to 0$, якщо $x \to x_0$.

Приклад 4. Нехай $u(x) \to 1$, а $v(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Довести, що коли існує $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)$, то

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}. \tag{3}$$

◀ Маємо невизначеність 1^∞. Для її розкриття зробимо очевидні перетворення, скориставшись при цьому неперервністю функцій:

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} ((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}})^{v(x)(u(x)-1)} =$$

$$= (\lim_{x\to x_0} (1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}})^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}.$$

Оскільки $u(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то $z(x) = u(x) - 1 \to 0$ при $x \to x_0$, а тому

$$\lim_{x\to x_0} (1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}. \quad ▶$$

Застосуємо формулу (3) для знаходження конкретної границі.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

◀ Оскільки маємо невизначеність типу 1^∞, то скористаємось формулою (3):

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 x(1+x^2-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} (\frac{x}{\sin x})^2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x} = e^{1\cdot 1} = e. \quad ▶$$

У пункті 1.5 §1 було введено поняття оберненої функції і доведено, що строго монотонна на деякому проміжку X функція має обернену, яка визначена на проміжку Y – множині значень прямої функції, і є також монотонною. Відповідь на питання, коли ж обернена функція є неперервною дає така теорема.

Теорема 4. *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і строго монотонна на проміжку X і Y – множина значень даної функції, то на множині Y існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є також строго монотонною і неперервною.*

3.3. Класифікація точок розриву функції. Якщо в точці x_0 не виконується принаймні одна з умов 1) – 3) в означенні неперервності функції, то x_0 називається **точкою розриву** функції f. При цьому розрізняють три типи точок розриву.

1) Усувний розрив. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0 або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 називається **точкою усувного розриву** функції.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

◀ Якщо $x \neq 0$, то f є неперервною функцією, як частка неперервних функцій. Тому треба дослідити функцію на неперервність в точці $x = 0$. Маємо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 2 = f(0)$, а це означає, що точка $x = 0$ є точкою усувного розриву.

Даний розрив можна усунути, якщо підправити нашу функцію, тобто взяти

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \quad ▶$$

2) Розрив 1-го роду. Границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві скінченні однобічні границі $f(x_0+0)$ і $f(x_0-0)$ (очевидно не рівні між собою), то x_0 називається **точкою розриву 1-го роду**.

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

◀ Якщо $x \neq 0$, то функція неперервна. Тому треба дослідити її в точці $x = 0$.

Маємо

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(-1) = -1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1.$$

Оскільки ці однобічні границі різні, то точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду.

Очевидно, що $f(0+0) - f(0-0) = 1 - (-1) = 2$. У цьому випадку кажуть, що функція має в даній точці **стрибок**, який дорівнює 2. ▶

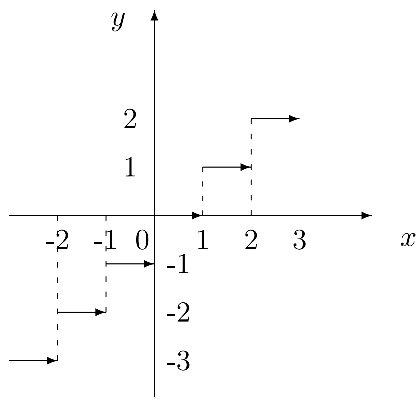
3) Розрив 2-го роду. Точка x_0 називається **точкою розриву 2-го роду**, якщо в цій точці функція f не має хоча б однієї з однобічних границь або принаймні одна з цих границь дорівнює нескінченності.

Приклад 8. Дослідити функцію $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$ на неперервність і визначити характер точки розриву.

◀ Задана функція визначена на множині $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і неперервна як суперпозиція неперервних функцій. У точці $x_0 = 0$ функція f не визначена і $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} 2^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} 2^{-\frac{1}{x}} = 0$. Отже, точка x_0 є точкою розриву другого роду. ▶

Функція f називається **кусково-неперервною на** $[a;b]$, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього відрізка, за винятком, можливо, скінченного числа точок, у яких має розриви 1-го роду, і, крім того, має однобічні границі у точках a і b.

Функція f називається **кусково-неперервною на** $\mathbb{R}$, якщо вона кусково-неперервна на довільному відрізку.



Прикладом кусково-неперервної на $\mathbb{R}$ функції є $f(x) = [x]$. Ця функція в точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ неперервна справа і розривна зліва, а в усіх інших точках числової осі неперервна.

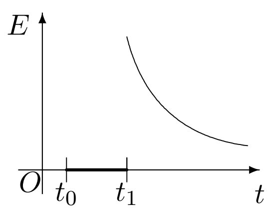
3.4. Застосування функцій в прикладних задачах. Наведемо декілька прикладів простих явищ і процесів, які описуються неперервними або розривними функціями.

Відзначимо, що слух, зір, сприйняття ультразвуків, що притаманні багатьом біологічним видам, – це явища, пов'язані з коливними процесами, які описуються за допомогою тригонометричних функцій $\sin x$ та $\cos x$.

У конкретних процесах такі величини, як біомаса популяції, чисельність популяції (кількість особин в популяції), температура, час і т.п. характеризуються дискретними величинами. Це означає, що область визначення і множина значень цих функцій не є проміжками, а деякими дискретними множинами або шкалами, можливо з дуже дрібними поділками. Зрозуміло, що, маючи справу з такими функціями, не можна говорити про їхню неперервність. Щоб мати можливість користуватися апаратом математичного аналізу там, де це зручно, функції, що визначені на шкалі, замінюються їхніми неперервними аналогами. Зрозуміло, це не завжди доцільно. Наприклад, якщо область визначення функції складається з двох елементів, то, напевно, не варто заміняти її проміжком. Але, якщо області визначення та значень функції складаються із скінченного, але достатньо великого числа елементів, у деякому розумінні близько розміщених один від одного (як дрібні поділки на шкалі), то можна замінити їх суцільним проміжком і функцію вважати неперервною. Дослідивши цю модельну функцію, ми потім зуміємо зробити висновки і відносно функції, яка описує певний процес (явище). Ця ідея лежить в основі побудови математичних моделей з використанням неперервних функцій.

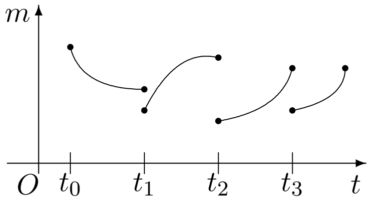
Розглянемо ряд прикладів використання неперервних функцій в біології. Зокрема, при вивченні зростання чисельності мікроорганізмів при поділі кліток використовується неперервна функція $f(t) = ae^{kt}$, де аргумент t – це час. За допомогою ж степеневої функції $f(x) = ax^{\alpha}$ описується залежність інтенсивності основного обміну від ваги тварини, де x – вага тварини, $f(x)$ – кількість кисню, що поглинає тварина за одиницю часу, a і α – параметри, сталі для даного класу тварин. Для птахів, наприклад, $\alpha = 0,74$, $a = 70$, а для риб – $\alpha = 0,8$ і $a = 0,3$.

Розглянемо приклади розривних функцій. Нехай є клітини, які реагують на зовнішні подразнення, наприклад, нервові клітини, клітини м'язів і т.п. Якщо величину подразнень E вимірювати у певних одиницях, то графік подразнення $E = E(t)$ має вигляд, який зображено на рисунку.



У момент t_0 клітина отримує сигнал, але реакція на подразнення відбувається у деякий момент часу $t_1 > t_0$. Відрізок $[t_0, t_1]$ називається **латентним періодом**. У момент часу t_1 клітина миттєво подразнюється до максимальної величини, а потім подразнення поступово зменшується до тих пір, поки не надійде наступне подразнення. Якщо наступного подразнення не буде достатньо довго, то $E(t) = 0$. Отже, функція, що характеризує залежність величини подразнення від часу, має розриви на кінцях латентних періодів.

Розглянемо ще приклад зміни біомаси мікроорганізмів, які чуттєві до температурних коливань. При збільшенні температури загальна біомаса m, як правило, збільшується (тепло сприяє розмноженню), але, коли температура надто висока, то практично вся колонія гине. Значення m при цьому стрибкоподібно переходить в нуль. Аналогічну ситуацію маємо і при зниженні температури, як тільки вона досягає деякої нижньої межі, мікроорганізми гинуть. В реальних умовах температура змінюється в залежності від часу, то підвищуючись, то знижуючись. Тому графіком зміни біомаси в залежності від зміни часу буде розривна лінія, яка має такий вигляд:

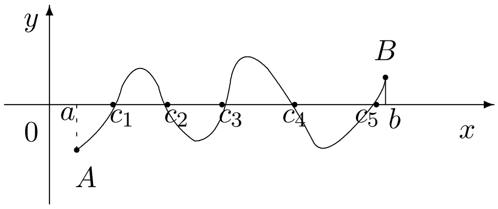


Точки розриву t_1, t_2, t_3 відповідають тим моментам часу, коли температура стала і або дуже висока, або дуже низька.

Таких прикладів використання неперервних і розривних функцій можна навести в багатьох галузях природознавства.

3.5. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема 5 (проходження неперервної функції через нуль). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка набуває значень різних знаків. Тоді існує точка $c \in (a;b)$, у якій $f(c) = 0$.*

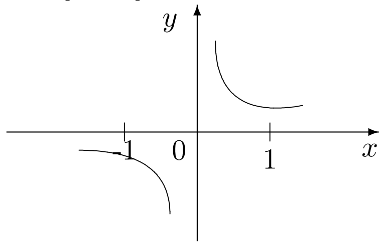


Геометричний зміст теореми такий: якщо точки графіка неперервної функції $y = f(x)$, що відповідають кінцям відрізка $[a;b]$, лежать по різні боки від осі Ox, то цей графік принаймні в одній точці даного відрізка перетинає вісь Ox.

Наслідок 1 (проходження неперервної функції через довільне проміжне значення). *Якщо функція f неперервна* *на відрізку* $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ *і* C *– довільне число, яке міститься між числами* A *і* B, *то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться принаймні одна точка* c, *для якої* $f(c) = C$.

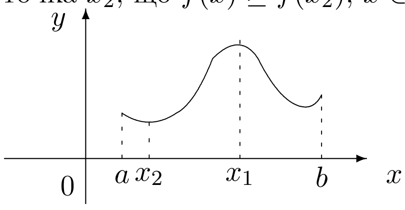
Цей наслідок можна сформулювати й так: неперервна на відрізку $[a;b]$ функція набуває усіх проміжних значень між її значеннями на кінцях відрізка, тобто, неперервна на $[a;b]$ функція, переходячи від одного значення до другого обов'язково проходить через усі проміжні значення.

Зауваження 1. Якщо функція на відрізку має принаймні одну точку розриву, то твердження теореми 5 і наслідку 1 перестають бути правильними. Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ додатна при $x = 1$ і від'ємна при $x = -1$, але на відрізку $[-1;1]$ немає точки, у якій вона перетворюється в нуль. Це пов'язано з тим, що на відрізку $[-1;1]$ є точка розриву $x = 0$ цієї функції.



Теорема 6 (досягнення функцією, неперервною на відрізку, своїх найбільшого та найменшого значень). *Якщо функція* f *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то вона досягає на цьому відрізку своїх як найбільшого, так і найменшого значень.*

Теорема стверджує, що на відрізку $[a;b]$ знайдеться точка x_1, значення f в якій буде найбільшим з усіх значень функції на цьому відрізку: $f(x) \leq f(x_1)$, $x \in [a;b]$. Аналогічно, на відрізку знайдеться така точка x_2, що $f(x) \geq f(x_2)$, $x \in [a;b]$.



Наслідок 2. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Позначимо через M і m відповідно найбільше і найменше значення функції f на відрізку $[a;b]$. Тоді

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a;b].$$

Нехай $C = \max(|m|, M|)$. У цьому випадку

$$|f(x)| \le C, \quad x \in [a;b],$$

тобто f є обмеженою на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 2. Теорема 6 не має місця, якщо відрізок $[a;b]$ замінити інтервалом $(a;b)$. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна на $(0;1)$, але не є обмеженою на ньому, оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Найбільше значення функції на $[a;b]$ позначають символом

$$M = \sup_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{або} \quad M = \max_{x\in[a;b]} f(x),$$

а найменше

$$m = \inf_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{або} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x).$$

Різниця між M і m називається коливанням неперервної функції на $[a;b]$ і позначається буквою ω: $\omega = M - m$.

Приклад 8. Довести, що рівняння $x^5 - 3x = 1$ має на відрізку $[1;2]$ принаймні один корінь.

◀ Розглянемо на відрізку $[1;2]$ неперервну функцію $f(x) = x^5 - 3x - 1$. Оскільки $f(1) = 1 - 3\cdot 1 - 1 = -3 < 0$, а $f(2) = 32 - 6 - 1 = 25 > 0$, то згідно з теоремою 5 існує точка $c \in (1;2)$ така, що $f(c) = 0$, тобто c є розв'язком або коренем рівняння $x^5 - 3x = 1$. ▶

Приклад 9. Відомо, що неперервна функція f має на скінченному або нескінченному інтервалі $(a;b)$ n нулів, тобто коренів рівняння $f(x) = 0$, а саме $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Довести, що на кожному інтервалі $(x_k; x_{k+1})$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, де $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, функція f зберігає знак.

◄ Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що на деякому інтервалі (x_i, x_{i+1}) функція f не зберігає знак, тобто на цьому інтервалі існують точки x' і x'' такі, що $f(x') < 0$, а $f(x'') > 0$. Вважатимемо, що $x' < x''$, і застосуємо до функції f на відрізку $[x'; x'']$ теорему 5. Згідно з цією теоремою існує точка $c \in (x'; x'')$ така, що $f(c) = 0$. Отже, точка c є коренем рівняння $f(x) = 0$, причому $c \neq x_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Звідси випливає, що на інтервалі $(a; b)$ функція f має принаймні $n + 1$ нуль, що суперечить умові. Тому на кожному інтервалі $(x_k; x_{k+1})$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція f зберігає знак. ►

Приклад 10. Знайти множину значень функції $f(x) = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$.

◄ Спочатку знайдемо область визначення функції. Маємо, що $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\lg \dfrac{x}{10}\right| \leq 1\right\}$. Розв'язавши нерівність $\left|\lg \dfrac{x}{10}\right| \leq 1$, дістанемо, що $D(f) = [1; 100]$.

Відомо, що множиною значень функції $y = \arcsin t$ є відрізок $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тому область визначення заданої функції міститься в цьому проміжку. Оскільки функція f неперервна і зростаюча на $D(f)$, то її значення міститься між найменшим і найбільшим її значеннями. Маємо

$$\min_{x \in D(f)} f(x) = f(1) = \arcsin\left(\lg \frac{1}{10}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\max_{x \in D(f)} f(x) = f(100) = \arcsin(\lg 10) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з наслідком 1 функція f, яка неперервна на $D(f)$, набуває всіх проміжних значень між $-\dfrac{\pi}{2}$ і $\dfrac{\pi}{2}$, а це означає, що множина значень $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. ►

Вправи

1. Дослідити функцію на неперервність і визначити характер точок розриву:

1) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3), & \text{якщо} \quad \infty < x \le 1, \\ 6-5x, & \text{якщо} \quad 1 < x < 3, \\ x-3, & \text{якщо} \quad 3 \le x < +\infty; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{якщо} \quad x \ne 1, \\ 2, & \text{якщо} \quad x = 1; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}, & \text{якщо} \quad x \ne 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x = 1; \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{якщо} \quad -2 \le x \le 0, \\ x^2+2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 2; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 1-x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 2, \\ \frac{1}{2-x}, & \text{якщо} \quad x > 2; \end{cases}$

6) $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$; 7) $f(x)=\frac{x}{x+2}$; 8) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

2. Знайти границю: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{10^x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x})^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2(\ln(1+\dfrac{x^2}{3})-\ln\dfrac{x^2}{3})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+x^2)}{x\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Відповіді

1. 1) $x=3$ – точка розриву 1-го роду; 2) неперервна; 3) $x=1$ – точка усувного розриву; 4) $x=0$ – точка розриву 1-го роду; 5) $x=0$ – точка розриву 1-го роду; $x=2$ – точка розриву 2-го роду; 6) $x=\frac{3}{2}$ – точка розриву 1-го роду; 7) $x=-2$ – точка розриву 2-го роду; 8) $x=-1$ – точка розриву 2-го роду.

2. 1) $\lg e$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $2\ln a$; 4) e; 5) 1; 6) $e^{-1/2}$; 7) $e^{-1/2}$; 8) 3; 9) $\frac{1}{2}\lg e$; 10) $-\frac{1}{2}$.

Розділ 7
Диференціальне числення функції однієї змінної

§1. Поняття похідної. Диференційовність та диференціал. Обчислення похідних найпростіших елементарних функцій. Похідні та диференціали вищих порядків

1.1. Поняття похідної.

1.1.1. Означення похідної. Нехай на деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу x в точці x_0 деякого приросту Δx такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала проміжку X. При цьому функція f набуде приросту $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

яке називається **різницевим відношенням**.

Похідною функції f у точці x_0 називається границя при $\Delta x \to 0$ різницевого відношення (1) за умови, що вона існує.

Для позначення похідної функції f в точці x_0 використовують символи $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ або $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Отже, згідно з означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо для деякого значення x_0 виконується умова

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то кажуть, що в точці x_0 функція f має **нескінченну похідну знаку плюс** або відповідно **мінус**.

На відміну від нескінченної похідної означену перед цим похідну функції інколи називають **скінченною похідною**.

Якщо функція f має скінченну похідну $f'(x)$ у кожній точці $x \in X$, то кажуть, що функція має похідну на проміжку X.

Наведемо приклади знаходження похідних від деяких функцій.

Приклад 1. Знайти похідну функції $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, де C – стала.

◀ Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$ і надамо їй приросту Δx, тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Отже, $(C)' = 0$. ▶

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Нехай x – довільна точка з $\mathbb{R}$. Надамо їй приросту Δx. Тоді функція одержить приріст $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)-x = \Delta x$. Тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, звідки випливає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. Отже, $(x)' = 1$, $x \in \mathbb{R}$. ▶

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$ і надамо їй приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$. Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}) = nx^{n-1}$.

Отже,

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

1.1.2. Геометричний зміст похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і нехай точка M на графіку цієї функції відповідає значенню аргументу x_0, а точка P – значенню $x_0 + \Delta x$. Проведемо через точки M і P пряму, яку назвемо **січною**. Позначимо через $\varphi(\Delta x)$ кут між січною і віссю Ox (рис. 1). Очевидно, що цей кут залежить від Δx. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то пряму з кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, що проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, називатимемо **граничним положенням січної** MP при $\Delta x \to 0$, або, що те саме, при прямуванні точки P до точки M вздовж графіка.

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, у точці $M(x_0; f(x_0))$ назвемо граничне положення січної MP при $\Delta x \to 0$, або, що те саме, при $P \to M$.

З цього означення випливає, що для існування дотичної досить, щоб існувала границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, яка дорівнює куту нахилу дотичної до осі Ox.

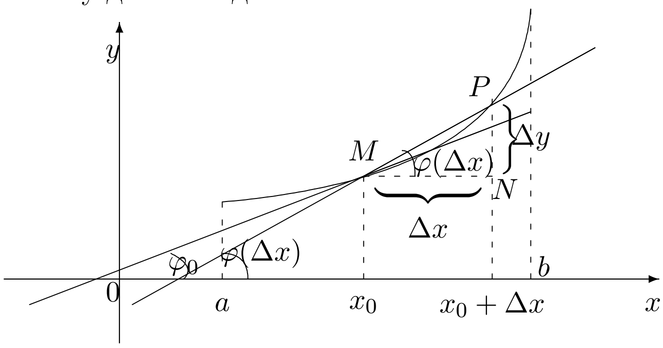


Рис. 1

Доведемо, що коли функція f має в точці x_0 похідну, то існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; f(x_0))$, причому кутовий коефіцієнт цієї дотичної, тобто тангенс кута нахилу її до осі Ox, дорівнює похідній $f'(x_0)$.

З трикутника MNP знаходимо, що

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Оскільки існує похідна, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. При $\Delta x \to 0$ січна переходить у дотичну, а тому, скориставшись неперервністю тангенса в його області визначення, отримаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \operatorname{tg}(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)) = \operatorname{tg} \varphi_0$.

Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ в обох частинах рівності (2), одержимо

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0),$$

що й треба було довести. Отже, *похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка* *функції* $y = f(x)$ *у точці* $M(x_0; f(x_0))$. Якщо скористатися рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку, то рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; f(x_0))$ матиме вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пряма, що проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно до дотичної в цій точці, називається **нормаллю** до графіка функції. Нормаль має рівняння

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

якщо $f'(x_0) \neq 0$.

1.1.3. Фізичний зміст похідної. Припустимо, що функція $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки M вздовж прямої, тобто $y = f(x)$ – шлях, пройдений точкою M від початку відліку за час x. Тоді за час x_0 пройдено шлях $y_0 = f(x_0)$, а за час $x_0 + \Delta x$ – шлях $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$. За проміжок часу Δx точка M пройде шлях довжиною $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ називається **середньою швидкістю** за час Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ визначає **миттєву швидкість точки в момент часу** x_0.

Поняття швидкості, запозичене з фізики, зручне при дослідженні поведінки довільної функції. Яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є середньою швидкістю зміни y відносно зміни x, а $f'(x_0)$ – миттєвою швидкістю зміни y при $x = x_0$.

Важливість похідної полягає в тому, що при вивченні довільних процесів і явищ природи за її допомогою можна оцінити швидкість зміни зв'язаних між собою величин.

1.1.4. Економічний зміст похідної. Нехай функція $y = f(x)$ виражає кількість виробленої продукції на момент часу x і треба знайти продуктивність праці в момент часу x_0. Очевидно, що за період часу від x_0 до $x_0 + \Delta x$ кількість виробленої продукції зміниться на величину $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тоді середня продуктивність праці за цей період часу дорівнює $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Продуктивність же праці в момент часу x_0 можна знайти як граничне значення середньої продуктивності при $\Delta x \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

1.1.5. Права й ліва похідні. Використовуючи праві й ліві границі функції, введемо поняття правої і лівої похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Правою (лівою) похідною функції $y = f(x)$ **в точці** x_0 називається права (ліва) границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ за умови, що ця границя існує. Праву похідну позначають символом $f'(x_0 + 0)$, а ліву – $f'(x_0 - 0)$. Отже,

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Якщо функція f має в точці x_0 похідну, то вона має в цій точці і праву і ліву похідні, які однакові.

Обернене твердження таке: якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 праву і ліву похідні, які однакові, то функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну.

Існують функції, які мають в точці x_0 ліву і праву похідні, але не мають похідної в цій точці. Наприклад, функція

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

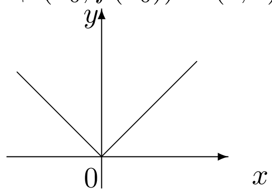
має в точці $x_0 = 0$ праву похідну, яка дорівнює

$$f'(0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

і ліву похідну, яка дорівнює

$$f'(0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Оскільки $f'(0+0) \neq f'(0-0)$, то ця функція не має похідної в точці $x_0 = 0$. Геометрично це означає відсутність дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0)) = (0; 0)$.



1.2. Диференційовність функції. Диференціал.

1.2.1. Диференційовність функції в точці. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X, символом x_0 позначимо деяке фіксоване значення аргументу із вказаного проміжку, а символом Δx – приріст аргументу такий, що $x_0 + \Delta x \in X$.

Функція f називається **диференційовною у точці** x_0, якщо приріст Δy цієї функції в точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx, можна зобразити у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{3}$$

де A – деяке число, незалежне від Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Оскільки $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, то формулу (3) можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для того щоб функція f була диференційовна в точці x_0, необхідно і досить, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну.*

◀ **Необхідність.** Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто має місце рівність (3). Припустивши, що $\Delta x \neq 0$, після ділення (3) на Δx, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x). \tag{5}$$

Якщо перейти в (5) до границі при $\Delta x \to 0$, то матимемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

тобто $f'(x_0)$ існує й дорівнює A.

Достатність. Нехай функція f має в даній точці x_0 скінченну похідну, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

а це означає, що функція

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$$

є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$.

Отже,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{6}$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Формула (6) збігається з (3), якщо позначити через A не залежне від Δx число $f'(x_0)$. ►

Теорема 1 дозволяє надалі ототожнювати поняття диференційовності функції в точці з поняттям існування похідної в ній. Тому операцію знаходження похідної називають **диференціюванням**.

1.2.2. Зв'язок між поняттями диференційовності та неперервності функції.

Теорема 2. *Якщо функція f диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.*

◄ Згідно з означенням диференційовності функції f в точці x_0 її приріст у цій точці можна подати у вигляді (3). Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

а це означає, що функція f неперервна в точці x_0. ►

Твердження, обернене до теореми 2, неправильне, бо існують функції, які неперервні в точці, але недиференційовні в цій точці. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, але не диференційовна в цій точці. Існують функції, які неперервні на деякій множині, але не мають похідної в жодній точці цієї множини.

1.2.3. Поняття диференціала функції. Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто виконується рівність (3). Аналізуючи її, бачимо, що приріст Δy є сумою двох доданків, де перший з цих доданків $A\Delta x$ при $A \neq 0$ є лінійною функцією від Δx, яка нескінченно мала при $\Delta x \to 0$ того самого прядку, що й Δx, а другий доданок $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж Δx, оскільки $\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, при $\Delta x \to 0$ перший доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту диференційовної функції. Цю головну частину приросту називають **диференціалом функції** у точці x_0, що відповідає приросту аргументу Δx. Позначають диференціал символом dy. Отже,

$$dy = A\ \Delta x. \tag{7}$$

Якщо $A = 0$, то доданок $A\Delta x$ перестає бути головною частиною приросту Δy, бо він дорівнює нулю, тоді як $\alpha(\Delta x)\Delta x \neq 0$. Прийнято вважати, що й в цьому випадку диференціал визначається формулою (7), тобто $dy = 0$.

Оскільки $A = f'(x_0)$, то формулу (7) можна записати у вигляді

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{8}$$

Очевидно, що dy, взагалі кажучи, не дорівнює приросту функції Δy.

Введемо поняття диференціала dx незалежної змінної x. Під диференціалом dx незалежної змінної x розумітимемо довільне незалежне від x число. Домовимося за число dx брати приріст Δx незалежної змінної x. Ця домовленість оправдана тим, що коли розглядати незалежну змінну x як функцію вигляду $y = x$, то для неї $dy = dx = 1\,\Delta x$. Звідси випливає, що формулу (8) можна переписати у вигляді

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{9}$$

Оскільки при малих Δx

$$\Delta y \approx dy, \tag{10}$$

то диференціал зручно використовувати для наближених обчислень. Для цього рівність (10) записують у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад 4. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1,1}$.

◀ Нехай $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$. Тоді $\Delta x = 0,1$, а $f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$. Оскільки $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$, то $f'(1) = \frac{1}{3}$. Тому

$$\sqrt[3]{1,1} \approx \sqrt[3]{1} + 0,1\frac{1}{3} = 1 + 0,1\frac{1}{3} = 1,033. \ ▶$$

Приклад 5. Обчислити наближено $\sin 29^0$.

◀ Перейдемо від градусної міри кута до радіанної, бо тригонометричні функції і похідні від них вивчені для цього випадку. Маємо, що у радіанах $29^0 = \dfrac{\pi}{180^0}29^0 = \dfrac{\pi}{180^0}30^0 - \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}$, а тому $\sin 29^0 = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}\right)$.

Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$ і візьмемо $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$, а $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$. Тоді $f'(x) = \cos x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отже,

$$\sin 29^0 \approx \sin\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3,14159\sqrt{3}}{360} =$$
$$= 0,5 - 0,01511 = 0,48489. \ ▶$$

1.3. Основні правила диференціювання.

Теорема 3. *Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці, причому правильні формули*

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \qquad (11)$$

◀ Доведемо одну з рівностей (11), наприклад, другу. Нехай

$$y = u(x)v(x).$$

Тоді $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = (u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)) + (u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)) = u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x+\Delta x) - u(x))$. Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}. \qquad (12)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то згідно з умовою $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$, бо u – неперервна функція.

Отже, права частина (12) при $\Delta x \to 0$ має границю $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$. Тому існує границя і лівої частини, яка дорівнює $y'(x)$, і правильна рівність

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Решта рівностей з (11) доводиться аналогічно. ▶

1.4. Обчислення похідних тригонометричних, логарифмічної та показникової функцій.

1.4.1. Похідні тригонометричних функцій.

1) Похідна функції $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, визначається формулою

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Маємо

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Тому при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$ згідно з неперервністю функції $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x,$$

тобто

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

2) Похідна функції $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, визначається формулою

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\blacktriangleleft$ Маємо

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Тому при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = \sin x$ згідно з неперервністю функції $\sin x, x \in \mathbb{R}$, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = -\sin x,$$

тобто

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

3) Похідна функції $y = \operatorname{tg} x$ визначається формулою

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

◀ Оскільки $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то згідно з теоремою 3

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

тобто

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ ▶}$$

4) Похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ визначається формулою

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \}.$$

◀ Оскільки $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то аналогічно як у випадку $\operatorname{tg} x$, маємо

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x) \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

тобто

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{ \pi n,\, n \in \mathbb{Z} \}. \text{ ▶}$$

1.4.2. Похідна логарифмічної функції. Похідна функції $y = \log_a x, x > 0, 0 < a \neq 1$, визначається формулою

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, x > 0.$$

◀ Взявши за x довільну точку напівпрямої $x > 0$ і, вважаючи, що $|\Delta x| < x$ можна записати:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x}).$$

Отже, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$, а логарифмічна функція неперервна, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a},$$

тобто

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \quad x > 0.$$

Зокрема, при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad \blacktriangleright$$

1.4.3. Похідна показникової функції. Похідна функції $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, визначається формулою

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Маємо

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1), x \in \mathbb{R}.$$

Якщо $\Delta x \neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$, тобто

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R},\ 0 < a \neq 1.$$

Зокрема, $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. ►

1.5. Похідна оберненої функції. Обчислення похідних обернених тригонометричних функції.

Теорема 4. *Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки x_0 зростає (спадає) і неперервна. Нехай, крім того, функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Тоді існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка визначена і строго монотонна у деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$, диференційовна в цій точці і правильна рівність*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

◄ Для функції $y = f(x)$ виконується умова існування оберненої функції. Тому існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка визначена у деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$ і неперервна в цьому околі. Надамо аргументу y цієї оберненої функції в точці y_0 довільного приросту $\Delta y \neq 0$. Цьому приросту відповідає приріст Δx оберненої функції, причому згідно із зростанням (спаданням) функції $\Delta x \neq 0$. Отже, маємо право написати тотожність

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Нехай тепер $\Delta y \to 0$, тоді й $\Delta x \to 0$, бо обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці y_0. Тому

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Звідси випливає, що

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad ►$$

Тепер застосуємо цю теорему для знаходження похідної від обернених тригонометричних функцій.

1) **Похідна функції** $y = \arcsin x$. Задана функція визначена на інтервалі $-1 < x < 1$ і є оберненою для функції $x = \sin y$, яка визначена на інтервалі $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Оскільки для функції $x = \sin y$ в околі довільної точки $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ виконуються умови теореми 4, то функція $y = \arcsin x$ диференційовна в довільній точці $x = \sin y$ і правильна формула

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Ми взяли $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}$, бо $\cos y$ на інтервалі $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ додатний. Якщо зауважити, що $\sin y = x$, то матимемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1).$$

2) **Похідна функції** $y = \arccos x$. Ця функція визначена на $(-1; 1)$ і є оберненою для функції $x = \cos y$, яка визначена на $(0; \pi)$. Тому

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}.$$

Ми врахували, що $\sin y = +\sqrt{1 - \cos^2 y}$, бо $\sin y > 0$ на $(0; \pi)$.

Оскільки $x = \cos y$, то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

3) **Похідна функції** $y = \operatorname{arctg} x$. Задана функція визначена на $\mathbb{R}$ і є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, яка визначена на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} y = x$, то звідси одержуємо

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) **Похідна функції** $y = \operatorname{arcctg} x$. Ця функція визначена на $\mathbb{R}$ і є оберненою до функції $x = \operatorname{ctg} y$, яка визначена на $(0; \pi)$. Тому

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}.$$

Оскільки $\operatorname{ctg} y = x$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.6. Диференціювання складеної функції.

Теорема 5. *Нехай функція $x = \varphi(t)$ диференційовна у точці t_0, а функція $y = f(x)$ диференційовна у відповідній точці $x_0 = \varphi(t_0)$. Тоді складена функція $f(\varphi(t))$ диференційовна у точці t_0, причому правильна рівність*

$$(f(\varphi(t_0)))' = f'(x_0)\varphi'(t_0). \tag{13}$$

◀ Надамо аргументу t в точці t_0 довільного приросту $\Delta t \neq 0$. Йому відповідає приріст Δx функції $x = \varphi(t)$. Приросту Δx у свою чергу відповідає приріст Δy функції $y = f(x)$ в точці x_0. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна, то її приріст в точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{14}$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поділивши рівність (14) на $\Delta t \neq 0$, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{15}$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то з неперервності функції $x = \varphi(t)$ випливає, що й $\Delta x \to 0$, а тоді й $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля. Згідно з умовою теореми існує границя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$. Отже, при $\Delta t \to 0$ існує границя правої частини (15), а тому існує границя лівої частини і правильна рівність (13).▶

Зауваження 1. У теоремі 5 розглянута складена функція, де y залежить від t через проміжну змінну x. Можлива складніша залежність, коли є дві, три або більше проміжних змінних. Правило диференціювання залишається тим самим і в цьому випадку.

Наприклад, якщо $y = f(x)$ де $x = \varphi(u)$ а $u = \psi(v)$ і $v = \chi(t)$, то похідну $y'(t)$ треба знаходити за формулою

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(u)\psi'(v)\chi'(t). \tag{16}$$

Приклад 6. Знайти похідну функції

$$y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

◀ Розглядатимемо дану функцію як складену вигляду $y = e^u$, де $u = \operatorname{arctg} x$. Тоді за формулою (13)

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = e^u \frac{1}{1+x^2}.$$

Замінюючи u на $\operatorname{arctg} x$, остаточно матимемо

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}. \quad ▶$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3}$.

◀ Цю функцію можна подати у вигляді $y = 5^u$, де $u = \operatorname{arcctg} v$, а $v = w^3$ і $w = x^2 + 1$.

Використовуючи формулу (16), одержуємо

$$y'(x) = y'(u)u'(v)v'(w)w'(x) = (5^u)'(\operatorname{arcctg} v)'(w^3)'(x^2+1)' =$$

$$= 5^u \ln 5(-\frac{1}{1+v^2})3w^2 2x = 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3} \ln 5(-\frac{1}{1+(x^2+1)^6})\times$$

$$\times 3(x^2+1)^2 2x = -\frac{6x(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^6} 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3} \ln 5. \quad ▶$$

1.7. Логарифмічна похідна. Похідна степеневої функції з довільним дійсним показником. Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій.

1.7.1. Поняття логарифмічної похідної. Нехай функція $y = f(x)$ додатна і диференційовна в точці x. Тоді в цій точці існує $\ln y = \ln f(x)$. Розглядаючи $\ln f(x)$ як складену функцію аргументу x, можна знайти похідну цієї функції у точці x, беручи $y = f(x)$ за проміжний аргумент:

$$(\ln f(x))' = \frac{y'}{y}. \tag{17}$$

Величина, яка визначається формулою (17), називається **логарифмічною похідною**.

Приклад 8. За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну степенево-показникової функції $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x) > 0$ і $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні в точці x.

◄ Оскільки $\ln y = v(x) \ln u(x)$, то скориставшись формулою (17), дістанемо

$$\frac{y'}{y} = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Звідси, врахувавши те, що $y = u(x)^{v(x)}$, дістанемо формулу для похідної степенево-показникової функції

$$y' = u(x)^{v(x)}(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}). \quad \blacktriangleright \tag{18}$$

Приклад 9. Обчислити похідну функції $y = x^x$, $x > 0$.

◄ Задану функцію можна подати у вигляді $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x) = x$ і $v(x) = x$. За допомогою формули (18) знаходимо

$$y' = x^x(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1),$$

тобто

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1), x > 0. \quad \blacktriangleright$$

Логарифмічна похідна часто використовується у прикладних задачах. Наведемо одну з них.

Нехай $K = K(t)$ – величина вкладу в момент часу t. Чи можна визначити наближено ставку банківського відсотка r за функцією $K(t)$? Якщо відсотки нараховуються один раз за період часу Δt, то відсотки за цей період становлять $Kr\Delta t$, де r – номінальна ставка за рік. Оскільки приріст вкладу і відсотки по вкладу одне й те саме, то $\Delta K = Kr\Delta t$. Звідси

$$r = \frac{\Delta K}{K\Delta t}.$$

Припустимо, що функція $K(t)$ має похідну $K'(t)$ Тоді можна взяти $\Delta K \approx dK = K'(t)\Delta t$, а тому

$$r \approx \frac{K'(t)\Delta t}{K(t)\Delta t} = \frac{K'(t)}{K(t)} = (\ln K)'.$$

Отже, ставка банківського відсотка r збігається з логарифмічною похідною від величини вкладу.

Приклад 10. Нехай $K(t) = K_0(t+1)^{\frac{3}{2}}$, де t – число років від відкриття вкладу, K_0 – величина початкового вкладу. Знайти як змінювалась ставка відсотка $r = r(t)$.

◀ Маємо

$$r \approx (\ln K_0(t+1)^{\frac{3}{2}})' = (\ln K_0 + \frac{3}{2}\ln(t+1))' = \frac{3}{2}\frac{1}{t+1},$$

або у відсотках

$$r \approx (t+1)^{-1}150\%.$$

Звідси випливає, що через два роки після відкриття вкладу ставка була $r \approx (2+1)^{-1}150 = 50\%$ річних, а через п'ять років зменшилась до $r \approx (5+1)^{-1}150\% = 25\%$ річних і т.д.

Зауважимо, що абсолютна швидкість зростання вкладу при цьому не зменшувалася, а зростала, оскільки $K' = \frac{3}{2}K_0(t+1)^{\frac{1}{2}} > 0$. ▶

1.7.2. Похідна степеневої функції з довільним показником. Похідна функції $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$, визначається формулою

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Оскільки $y = x^\alpha > 0$, то $\ln y = \alpha \ln x$. Згідно з формулою (17)

$$\frac{y'}{y} = (\alpha \ln x)'$$

або
$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}.$$
Звідси випливає, що
$$y'=y\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$
або
$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\quad x>0,\alpha\in\mathbb{R}.\quad ▶$$

1.7.3. Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій. Зведемо одержані вище формули для знаходження похідних в одну таблицю:

1.$(C)'=0, C\in\mathbb{R}$;

2.$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, x>0, \alpha\in\mathbb{R}$, зокрема, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$;

3.$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e, x>0, 0<a\neq 1$, зокрема, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$;

4.$(a^x)'=a^x\ln a$, $0<a\neq 1$, зокрема, $(e^x)'=e^x, x\in\mathbb{R}$;

5. $(\sin x)'=\cos x, x\in\mathbb{R}$;

6. $(\cos x)'=-\sin x$, $x\in\mathbb{R}$;

7.$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$;

8.$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x), x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\}$;

9.$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1;1)$;

10.$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1;1)$;

11.$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$;

12.$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$.

1.8. Похідні та диференціали вищих порядків.

1.8.1. Поняття похідної n-го порядку. Похідна $f'(x)$ функції $y=f(x)$, визначеної і диференційовної на проміжку

X, є функцією, яка також визначена на цьому проміжку. Може трапитися, що функція $f'(x)$ є диференційовною у точці $x \in X$, тобто має в ній похідну. Цю похідну називають **другою похідною** (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$ у точці x і позначають символом $f^{(2)}(x)$ $(f''(x), y''(x), y^{(2)}(x))$.

Послідовно можна ввести поняття похідної третього, четвертого і т.д. порядків , тобто

$$y^{(n)}(x) = (y^{n-1}(x))'.$$

Друга похідна має певний фізичний зміст. Якщо $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки вздовж прямої, то перша похідна $f'(x)$ є миттєвою швидкістю точки в момент часу x, а друга похідна – швидкістю зміни швидкості, тобто прискоренням рухомої точки в даний момент.

1.8.2. Формули для n-них похідних деяких функцій. 1) Знайдемо n-ну похідну степеневої функції $y = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Послідовно диференціюючи, отримуємо

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, ...,$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

У частинному випадку $\alpha = m$, $m \in \mathbb{N}$, маємо $(x^m)^{(m)} = m!$, $(x^m)^{(n)} = 0$ при $n > m$.

Звідси випливає, що похідна n-го порядку многочлена m-го степеня при $n > m$ дорівнює нулю.

Аналогічно знаходиться похідна n-го порядку функції $y = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad x > -1.$$

2) Знайдемо n-ну похідну показникової функції $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$. Послідовно диференціюючи, одержуємо $y' = a^x \ln a$, $y^{(2)} = a^x(\ln a)^2$, $y^{(3)} = a^x(\ln a)^3$,...,$y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Зокрема, якщо $y = e^x$, то для довільного n одержимо, що $(e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Знайдемо n-ну похідну функції $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Послідовно диференціюючи, отримуємо $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,

$y^{(2)} = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$, $y^{(3)} = -\cos x = \sin(x+3\frac{\pi}{2})$,...,$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, Отже,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Аналогічно можна одержати формулу для n-ої похідної функції $y = \cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), x \in \mathbb{R}.$$

5) Для функції $y = \ln x$, $x > 0$, похідна n-го порядку так само легко знаходиться.

Послідовне диференціювання цієї функції дає

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{(3)} = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, x > 0.$$

Отже,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad x > 0.$$

У випадку функції $y = \ln(1 + x)$, $x > -1$, маємо

$$(\ln(1 + x))^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1 + x)^n}, \quad x > -1.$$

1.8.3. Формула Лейбніца для n-ої похідної добутку двох функцій. Виведемо формулу для знаходження похідної n-го порядку добутку двох функцій $u(x)v(x)$, що мають похідні довільного порядку. Тоді

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$y^{(2)} = u^{(2)}(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v^{(2)}(x),$$

$$y^{(3)} = u^{(3)}(x)v(x)+u^{(2)}(x)v'(x)+2u^{(2)}(x)v'(x)++2u^{(2)}(x)v^{(2)}(x)+$$
$$+u'(x)v^{(2)}(x) + u(x)v^{(3)}(x) = u^{(3)}(x)v(x) + 3u^{(2)}(x)v'(x)+$$

$$+3u'(x)v^{(2)}(x) + u(x)v^{(3)}(x).$$

Праві частини одержаних рівностей подібні на розклад різних степенів бінома $(u + v)^n$ за формулою Ньютона, але замість показників степеня маємо числа, які визначають порядок похідних, а самі функції u і v можна розглядати як похідні нульового порядку $u^{(0)}(x)$ і $v^{(0)}(x)$. Враховуючи це, запишемо загальний вигляд n-ої похідної добутку двох функцій:

$$y^{(n)}(x) = (u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x)v(x) + nu^{(n-1)}(x)v'(x)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}(x)v^{(2)}(x) + ...+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) + \dots + u(x)v^{(n)}(x)$$

або

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x). \tag{19}$$

Формулу (19) називають **формулою Лейбніца**. Строге доведення даної формули проводиться методом математичної індукції.

Приклад 11. Знайти п'яту похідну функції $y = x^5 e^x$.

◀ Нехай $u(x) = x^5$, $v(x) = e^x$, тоді $u'(x) = 5x^4$, $u^{(2)}(x) = 20x^3$; $u^{(3)}(x) = 60x^2$, $u^{(4)}(x) = 120x$; $u^{(5)}(x) = 120$; $v'(x) = v^{(2)}(x) = v^{(3)}(x) = v^{(4)}(x) = v^{(5)}(x) = e^x$. Підставляючи ці вирази у формулу (19) при $n = 5$, дістаємо

$$y^{(5)} = 120e^x + 5 \cdot 120xe^x + \frac{5 \cdot 4}{2}60x^2e^x+$$

$$+\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}20x^3e^x + 5 \cdot 5x^4e^x + x^5e^x =$$

$$= e^x(120 + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5). \quad ▶$$

1.8.4. Диференціали вищих порядків. Для зручності поряд з позначеннями диференціалів символами dy і dx використовують позначення δy і δx.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у кожній точці $x \in X$. Тоді її диференціал

$$dy = f'(x)dx,$$

який назвемо диференціалом першого порядку, є функцією змінних x і dx. Нехай функція $f'(x)$ у свою чергу диференційовна у деякій точці x. Розглядатимемо dx у виразі для dy як сталий множник. Тоді $\delta(dy) = \delta(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'\delta x = f''(x)dx\delta x$.

Диференціал $\delta(dy)$ від диференціала dy в точці x, взятий при $\delta x = dx$, називається **диференціалом другого порядку** функції f у точці x і позначається символом d^2y, тобто

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

У свою чергу диференціал $\delta(d^2y)$ від диференціала d^2y, взятий при $\delta x = dx$, називається **диференціалом третього порядку** функції f і позначається символом d^3y, і т.д.

$$d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n$$

або

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n, n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Приклад 12. Знайти диференціал d^3y функції $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

◄ Знайдемо спочатку третю похідну. Маємо $y' = 4x^3 - 6x$, $y'' = 12x^2 - 6$, $y^{(3)} = 24x$. Тоді згідно з формулою (20)

$$d^3y = y^{(3)}(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3. \quad ►$$

1.9. Похідна функції, яка задана параметрично. До цих пір розглядались рівняння ліній на площині, які зв'зують між собою координати точок цих ліній. Часто застосовують інший спосіб задання лінії, де змінні координати x і y є функціями третьої змінної t,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in T. \tag{21}$$

Тоді довільному з цих значень $t \in T$ відповідає певне значення x і певне значення y, а отже, і певна точка $M(x;y)$ заданої лінії. Якщо змінна t пробігає всі значення з області визначення T функцій φ і ψ, точка $M(x;y)$ описує деяку лінію в площині Oxy. Рівняння (21) називається **параметричними рівняннями** цієї лінії, а змінна t – **параметром**.

Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$, $t \in T$, має обернену $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in X$, де X – множина значень функції φ. Підставивши цей вираз для t у друге з рівнянь (21), дістанемо рівняння

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in X, \tag{22}$$

яке визначає y як складену функцію x. Кажуть, що ця функція задана параметрично рівняннями (21). Перехід від (21) до рівняння (22) називається **виключенням параметра**.

При вивченні функцій, які задані параметрично, виключення параметра не є обов'язковим, а інколи й не завжди практично можливе. У багатьох випадках значно легше, задаючи різні значення параметра t, визначити за формулами (21) відповідне значення аргументу x і функції y.

Нехай функції φ і ψ диференційовні на проміжку T, причому $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in T$. Тоді складена функція $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ так само є диференційовною в точці $x \in X$ і

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, t \in T.$$

Отже, якщо функція y від змінної x задана параметрично за допомогою рівнянь (21), де φ і ψ диференційовні на проміжку T, причому $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in T$, то похідна y'_x знаходиться за формулою

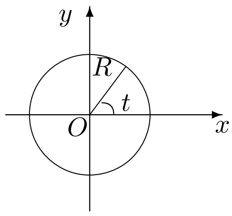
$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{або} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad t \in T. \tag{23}$$

Приклад 13. Записати параметричне рівняння кола з центром в початку координат.

◄ Нехай $M(x;y)$ – довільна точка кола з центром в початку координат і радіусом R. Декартові координати x і y цієї точки виражаються через її полярний радіус $r = R$ і полярний кут, який позначимо через t, за формулами

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases} \tag{24}$$

Одержані рівняння називаються параметричними рівняннями кола. Параметром в них є полярний кут t, який змінюється від 0 до 2π.



Якщо рівняння (24) піднести почленно до квадрата і додати, то параметр t виключиться, оскільки $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, і одержимо рівняння кола в декартовій системі координат $x^2 + y^2 = R^2$, яке визначає дві елементарні функції:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{і} \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Кожна з них визначається параметричними рівняннями (24), але області зміни параметра t для цих функцій різні. Для першої з них $0 \le t \le \pi$ і графіком є верхнє півколо. Для другої функції $\pi \le t \le 2\pi$, а графіком є нижнє півколо. ►

Приклад 14. Знайти похідну функції $y(x)$, яка задана параметричними рівняннями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Обчислити значення цієї похідної в точці $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

◄ Згідно з формулою (23) маємо

$$y'_x = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right],$$

оскільки $\varphi'(t) = (\cos t)' = -\sin t \ne 0$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Обчислимо $y'_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Для цього знайдемо значення t, що відповідає значенню $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Маємо $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, а тому $t = \frac{\pi}{4}$. Тоді $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$. ►

Якщо функція φ з (21) не має оберненої, але існує обернена для функції ψ, то $t = \psi^{-1}(y)$, $y \in Y$, де Y – множина значень функції ψ. Тоді, аналогічно як і вище, одержимо складену функцію $x = \varphi(\psi^{-1}(y))$, $y \in Y$. При відповідних припущеннях щодо диференційовності функцій φ і ψ на T вона має похідну

$$x'_y = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{x'(y)}{y'(t)}, t \in T,$$

якщо $\psi'(t) \neq 0$, $t \in T$.

Нехай існують другі похідні функцій $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ у точці $t \in T$. Тоді можна знайти другу похідну функції, яка задана параметрично. Зауважимо, що функція $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, так само визначається параметричними рівняннями

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv \psi_1(t),\ x = \varphi(t),\ t \in T.$$

Згідно з формулою (23) маємо

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Отже, отримали, що

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

або, коротше,

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{25}$$

Приклад 15. Знайти другу похідну y''_{xx} функції y, яка задана параметрично

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \sin 2t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\sin 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{2\cos 2t}{2\sin t \cos t} = 2\operatorname{ctg} 2t.$$

Розглянемо цю похідну як функцію, що задана параметрично

$$\begin{cases} y'_x = 2\operatorname{ctg} 2t, \\ x = \sin^2 t, \qquad t \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Тоді згідно з формулою (25) одержуємо, що

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'_t} = \frac{(2\operatorname{ctg} 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{-2\frac{2}{\sin^2 2t}}{2\sin t\cos t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}, t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]. ►$$

Приклад 16. Скласти рівняння дотичної і нормалі до **циклоїди**

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

в точці $M_0(x_0; y_0)$, яка відповідає значенню параметра $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

◄ Знайдемо спочатку координати точки дотику M_0:

$$x_0 = (t - \sin t)|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi + 2}{2}$$

$$y_0 = (1 - \cos t)|_{t=\frac{3\pi}{2}} = 1 - \cos\frac{3\pi}{2} = 1.$$

Для того щоб визначити кутові коефіцієнти дотичної і нормалі, знайдемо похідну y'_x:

$$y'_x = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в точці M_0

$$k_{\text{дот}} = (y'_x)\Big|_{M_0} = \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)\Bigg|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1.$$

Тоді кутовий коефіцієнт нормалі

$$k_{\text{н}} = -\frac{1}{k_{\text{дот}}} = 1.$$

Скориставшись рівнянням прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ у заданому напрямку, легко одержуємо рівняння дотичної

$$y - 1 = -1\left(x - \frac{3\pi + 2}{2}\right) \quad \text{або} \quad x + y - \frac{3\pi + 4}{2} = 0$$

і рівняння нормалі

$$y-1=1\Big(x-\frac{3\pi+2}{2}\Big) \quad \text{або} \quad x-y-\frac{3\pi}{2}=0. \blacktriangleright$$

1.10. Неявна функція та її диференціювання.

Нехай задано рівняння

$$5^y-x^2-1=0. \tag{26}$$

У ньому кожному дійсному значенню x відповідає єдине значення y таке, що коли підставити ці значення x і y в рівняння (26), то дістанемо правильну рівність. Наприклад, значенню $x=0$ відповідає значення $y=0$, оскільки при підстановці цих значень x і y в рівняння (26) ми дістанемо тотожність $5^0-0^2-1=0$. Аналогічно значенню $x=2$ відповідає значення $y=1$ і т.д. Це означає, що за допомогою рівняння (26) задана функція, областю визначення якої є вся числова вісь, а множиною значень – множина всіх невід'ємних чисел. Ця функція називається **неявною**.

Нехай в загальному випадку задано рівняння

$$F(x,y)=0, \tag{27}$$

де $F(x,y)$ – функція двох змінних. Якщо кожному значенню $x\in X$ відповідає єдине значення y, яке разом з x задовольняє рівняння (27), то кажуть, що це рівняння визначає на множині X **неявну функцію** $y=\varphi(x)$.

Отже, для неявної функції $y=\varphi(x)$, заданої рівнянням (27), правильна рівність

$$F(x,\varphi(x))=0, \quad x\in X.$$

Функція $y=f(x)$, $x\in X$, яка задана рівнянням, розв'язаним відносно y, називається **явною**.

Якщо рівняння (26) розв'язати відносно y, то одержимо

$$y=\log_5(x^2+1), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{26$'$}$$

Ця функція є явною. Очевидно, що це та сама функція, яка задана рівнянням (26). Підставивши (26′) у рівняння (26), дістанемо тотожність

$$5^{\log_5(x^2+1)} - x^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

У деяких випадках кожному значенню $x \in X$ відповідає декілька значень y, які задовольняють разом з даним x рівняння (27). Тоді це рівняння визначає не одну, а декілька неявних функцій. Наприклад, рівняння $x^2+y^2-1=0$ визначає дві неявні функції, які можна записати у явному вигляді, розв'язавши рівняння $x^2+y^2-1=0$ відносно y:

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = -\sqrt{1-x^2}.$$

Не кожну неявну функцію можна подати у вигляді явної елементарної функції. Наприклад, рівняння

$$5^y - 5y + x^2 - 1 = 0$$

визначає неявну функцію, але це рівняння не можна розв'язати відносно y так, щоб y виражалося через елементарні функції аргументу x. Не всяке рівняння $F(x,y)=0$ визначає неявну функцію. Наприклад, рівняння $x^2+y^2+1=0$ не задовольняють жодні дійсні значення x і y, і, отже, воно не визначає жодної неявної функції.

Розглянемо на конкретних прикладах правило знаходження похідної від неявної функції.

Приклад 17. Знайти похідну неявної функції y, яка визначається рівнянням Кеплера

$$y - \varepsilon \sin y = x,$$

де $\varepsilon < 1$ – деяке додатне число.

◀ Задане рівняння не можна розв'язати відносно y за допомогою елементарних функцій, хоча воно має при кожному фіксованому x єдиний розв'язок y. Для знаходження похідної $y'(x)$ скористаємося прийомом, який часто використовується. Оскільки функція $y=y(x)$ є розв'язком рівняння Кеплера, то підставивши її в це рівняння, дістанемо правильну рівність

$$y(x) - \varepsilon \sin y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності по x

$$y'(x) - \varepsilon \cos y(x) y'(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що $y' = \dfrac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$. Отже, ми знайшли похідну неявної функції $y(x)$ не розв'язуючи рівняння Кеплера.▶

Приклад 18. Знайти похідну y' неявної функції y, яка визначається рівнянням

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Чому дорівнює похідна y', якщо: 1) $x = 2$, $y = 4$; 2) $x = 2$, $y = 0$?

◀ Вважатимемо, що в задане рівняння підставлено неявну функцію $y = y(x)$. Тоді матимемо тотожність $x^2 + 2xy(x) - y^2(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Якщо продиференціювати її по змінній x, то одержимо рівність

$$2x + 2y(x) + 2xy'(x) - 2y(x)y'(x) = 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

або $(x - y)y' = 1 - x - y$. Звідси випливає, що

$$y'_x = \frac{1 - x - y}{x - y}, \quad x \neq y.$$

Знайдемо тепер значення похідної y' при $x = 2$ і $y = 4$. Для цього спочатку переконаємося, що точка $(2; 4)$ задовольняє задане рівняння, підставивши $x = 2$ і $y = 4$ в рівняння. Тоді

$$y'(2) = \frac{1 - 2 - 4}{2 - 4} = \frac{5}{2}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $x = 2$, а $y = 0$. Ці значення також задовольняють задане рівняння. Це означає, що при $x = 2$ вихідне рівняння має два розв'язки $y = 4$ і $y = 0$. Похідна y' при $x = 2$ і $y = 0$ визначається рівністю

$$y'(2) = \frac{1 - 2 - 0}{2 - 0} = -\frac{1}{2}. \text{ ▶}$$

Детальніше неявні функції будуть вивчені в розділі 9, §5, пункт 5.2.

Вправи

1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції: 1) $y=\sqrt{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 3)$y=\dfrac{1}{3x+2}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 5) $y=-\operatorname{ctg}x-x$; 6) $y=2^{x^2}$.

2. Знайти похідну функції: 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$; 2)$y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$; 3)$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; 4)$y=x^2\cos x$; 5)$y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$; 6)$y=2^x\operatorname{arctg}x$; 7)$y=x\ \sin x\ \ln x$; 8)$y=\cos^2 x+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 9)$y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$; 10)$y=\frac{\operatorname{arcctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$; 11)$y=x^{x^2}$; 12)$y=(\ln x)^x$; 13)$y=(\sin x)^{\cos x}$; 14)$y=2\ x^{\sqrt{x}}$; 15)$y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$; 16) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\ln x}{3}$; 17) $y=e^x\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$; 18) $y=3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}$; 19) $y=(x^3+x^2)^{\sin x}$; 20) $y=x^{\ln x}$.

3. Знайти похідну функції і обчислити її значення при $x=x_0$: 1)$y=\frac{x}{2x-1}, x_0=0$; 2)$y=\sqrt{1+\ln^2 x}, x_0=1$; 3)$y=\sin x\ e^{\cos x}, x_0=\frac{\pi}{2}$; 4)$y=\ln\frac{2+\operatorname{tg}x}{2-\operatorname{tg}x}, x=\frac{\pi}{3}$; 5)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+12}), x_0=2$.

4. Знайти похідну функції, яка задана неявно: 1)$x^2+xy+y^2=0$; 2)$e^y-e^{-x}+xy=0$; 3)$y^x=x^y$; 4)$\sin(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$; 5)$e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$; 6) $x^3+\ln y-x^2e^y=0$; 7) $x^{y^2}+y^2\ln x-4=0$; 8) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$; 9) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 10) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

5. Скласти рівняння дотичної до кривої: 1)$y=\dfrac{8}{4+x^2}$ у точці з абсцисою $x=2$; 2) $x^3+xy+y^3+1=0$ у точці $M_0(1;-1)$; 3) $y=x^3+2x$ у точці $M_0(1;3)$; 4) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$ у точці $M_0(-9;-8)$.

6. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t)=2t^3-3t^2+5t+2$. Знайти швидкість та прискорення руху.

7. Знайти диференціал функції: 1)$y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$; 2)$y=\ln\cos x$; 3)$y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$; 4)$y=2^{\frac{-1}{\cos x}}$; 5)$y+x=e^y$; 6) $y=(1+\operatorname{tg}x)^8$; 7) $y=\ln\operatorname{arctg}(\sin x)$.

8. Обчислити наближено: 1)$\arcsin 0,05$; 2)$\sqrt[3]{0,95}$; 3)$\ln 1,2$; 4)$\sqrt[4]{15,8}$; 5)$\operatorname{arctg}1,04$; 6) $\sqrt[3]{26,19}$; 7) $\ln\operatorname{tg}47^0 15'$.

9. Знайти похідну вказаного порядку n функції: 1)$y=x^2e^x, n=3$; 2)$y=x\cos x, n=2$; 3)$y=e^x\cos x, n=4$; 4)$y=x^3\ln x$, $n=4$; 5)$y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x, n=2$; 6)$y=x^x, n=2$; 7)$\operatorname{arctg}y=x+y, n=2$; 8) $y=(2x+3)^3\sqrt{2x+3}$, $n=3$; 9) $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+a^2})$, $n=2$; 10) $y=\dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$, $n=2$.

10. Знайти диференціал вказаного n-го порядку функції: 1)$y=3^{-x^2}, n=2$; 2)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+4}), n=2$; 3)$y=e^x\ln x, n=3$; 4)$y=$

$\frac{\sin x}{x}, n=2$; 5)$y^2+xy=1, n=2$; 6) $y=x(\ln x-1)$, $n=3$; 7) $y=e^{x^3}$, $n=2$.

11. Знайти похідну y'_x функції y, яка задана параметрично:
1) $x=2t$, $y=3t^2-5t$, $t\in\mathbb{R}$;
2) $x=t^3+2$, $y=0,5t^2$, $t\in(0;+\infty)$;
3) $x=\dfrac{1}{t+1}$, $y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;
4) $x=2^{-t}$, $y=2^{2t}$, $t\in\mathbb{R}$;
5) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in(0;2\pi)$;
6) $x=\operatorname{tg} t$, $y=\sin 2t+2\cos 2t$, $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;
7) $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg} t$, $t\in(0;+\infty)$.

Відповіді

1. 1) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 3) $-\dfrac{3}{(3x+2)^2}$; 4) $-\dfrac{2}{x^3}$; 5) $\operatorname{ctg}^2 x$; 6) $2^{x^2}\cdot 2x\ln 2$.

2. 1) $(x-2)^2$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $-\dfrac{x^2+2x+3}{x^4}$; 4) $x(2\cos x-x\sin x)$; 5) $-\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$; 6) $2^x\left(\ln 2\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$; 7) $\sin x\ln x + x\cos x\ln x + \sin x$; 8) $\dfrac{1-\sin x\sin 2x}{\sin x}$; 9) $-\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right)$; 10) $-\dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 11) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; 12) $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$; 13) $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x)$; 14) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$; 15) $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg} 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$; 16) $\dfrac{3}{x(9+\ln^2 x)}$; 17) $e^x\operatorname{arctg} e^x$; 18) $\dfrac{4\ln 3}{\cos^2(x^2+5x)}(2x+5)3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}\operatorname{tg}^3(x^2+5x)$; 19) $(x^3+x^2)^{\sin x}\Big(\cos x\cdot \ln(x^3+x^2)+\frac{(3x^2+2x)\sin x}{x^3+x^2}\Big)$; 20) $2x^{\ln x-1}\ln x$.

3. 1) -1; 2) 0; 3) -1; 4) 16; 5) 0,25.

4. 1) $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$; 2) $-\dfrac{e^{-x}+y}{e^y+x}$; 3) $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$; 4) $-\dfrac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$; 5) $\dfrac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$; 6) $\dfrac{(2xye^y-3x^2)y}{1-x^2ye^y}$; 7) $-\dfrac{y}{2x\ln x}$; 8) $\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$; 9) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 10) $\dfrac{y}{x}\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}$.

5. 1) $x+2y-4=0$; 2) $x+2y+1=0$; 3) $5x-y-2=0$; 4) $x-y+1=0$.

6. $v(t)=6t^2-6t+5$; $a(t)=12t-6$.

7. 1) $\frac{(2-x)dx}{x^3}$; 2) $-\operatorname{tg}x dx$; 3) $\frac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$; 4) $2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 5) $\frac{dx}{e^y-1}$; 6) $\frac{8(1+\operatorname{tg}x)^7}{\cos^2 x}dx$; 7) $\frac{\cos x dx}{(1+\sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}$.

8. 1) 0,05; 2) 0,983; 3) 0,2; 4) 1,9938; 5) 0,805; 6) 2,97; 7) 0,078.

9. 1) $e^x(x^2+6x+6)$; 2) $-2\sin x - x\cos x$; 3) $-4e^x\cos x$; 4) $\frac{6}{x}$; 5) $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$; 6) $x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)$; 7) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$; 8) $105\sqrt{2x+3}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; 10) $2\sqrt{1-x^2}$.

10. 1) $3^{-x^2}\ln 9(2x^2\ln 3-1)dx^2$; 2) $-\frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}dx^2$; 3) $e^x\left(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx^3$; 4) $\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$; 5) $\frac{2}{(x+2y)^3}dx^2$; 6) $-\frac{1}{x^2}dx^3$; 7) $3xe^{x^3}(3x^2+2)dx^2$.

11. 1) $3t-\frac{5}{2}$; 2) $\frac{1}{3t}$; 3) $-\frac{2t}{t+1}$; 4) -2^{3t+1}; 5) $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; 6) $2\cos^2 t(\cos 2t-2\sin 2t)$; 7) $\frac{t}{2}$.

§2. Застосування похідної

2.1. Застосування похідної в економіці та природознавстві

У §1 ми описали геометричний, фізичний та економічний змісти похідної. У цьому параграфі ми наведемо приклади застосування похідної у різних галузях природознавства.

2.1.1. Застосування похідної в економічних задачах. Пояснимо економічний зміст похідної на конкретних задачах.

1) Нехай витрати виробництва однорідної продукції є функцією кількості продукції x. Припустимо, що кількість продукції зросла на Δx одиниць. Тоді приріст витрат виробництва становитиме

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x).$$

Середній приріст витрат виробництва дорівнюватиме

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ називається **граничними витратами виробництва**.

Приклад 1. Залежність витрат виробництва від обсягу x продукції визначається формулою

$$K = 100x - \frac{x^3}{30}.$$

Знайти граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить: 1) 5 одиниць; 2) 10 одиниць продукції.

◄ Маємо $K'(x) = (100x - \dfrac{x^3}{30})' = 100 - \dfrac{x^2}{10}$. Тоді $K'(5) = 100 - \dfrac{5^2}{10} = 100 - \dfrac{25}{10} = 97,5$; $K'(10) = 100 - \dfrac{10^2}{10} = 90$.

Це означає, що при обсязі виробництва 5 одиниць продукції витрати на виготовлення наступної шостої одиниці становитимуть 97,5 гр. од. а при обсязі виробництва 10 одиниць вони становитимуть 90 гр. од. ►

2) Нехай $U(x)$ виторг від продажу x одиниць товару. Міркуючи аналогічно як у попередньому випадку, одержуємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x).$$

Ця границя називається **граничним виторгом**.

Приклад 2. Функція попиту на деякий товар визначається формулою $p = 10 - 2x$, де x – обсяг попиту, p – ціна. Знайти граничний виторг при $x = 2$.

◀ Очевидно, що виторг від продажу x одиниць товару

$$U(x) = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2.$$

Тоді

$$U'(x) = 10 - 4x.$$

Якщо $x = 2$, то $U'(2) = 10 - 4 \cdot 2 = 2$. Це означає, що коли попит зростає від двох до трьох одиниць, то виторг зросте на 2 грошові одиниці. ▶

Граничні величини характеризують процес зміни економічного об'єкта (процесу) з часом або відносно іншого фактора.

При означенні похідної знаходять границю відношення приросту функції до відповідного приросту незалежної змінної. У багатьох задачах зручно знаходити відсоток приросту функції, який відповідає відсотку приросту незалежної змінної. Це приводить до поняття **еластичності функції (відносної похідної)**.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, $x \in X$. Припустимо, що приріст незалежної змінної x дорівнює Δx, тоді її відносним приростом є $\dfrac{\Delta x}{x}$. Відповідний приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, а відносний приріст – $\dfrac{\Delta y}{y}$. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x}$, яке показує у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Подамо це відношення у вигляді

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо існує $f'(x)$, то маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}(\frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}f'(x),$$

тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}f'(x). \qquad (1)$$

Границю (1) називають **еластичністю функції** f відносно змінної x і позначають символом $E_x(y)$. Отже, згідно з означенням

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)}f'(x),$$

або

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'(x). \qquad (2)$$

Очевидно, що еластичність f відносно x є відсотковим приростом функції, який відповідає приросту незалежної змінної на один відсоток.

Приклад 3. Знайти еластичність функції $y = 3x - 6$ та обчислити її при $x = 10$.

◄ Згідно з формулою (2)

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6}3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Якщо $x = 10$, то

$$E_{10}(y) = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Це означає, що коли x зростає на один відсоток, то функція зростає на $\frac{5}{4}$ відсотка. ►

Теорема 1. *Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей співмножників, а еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичностей чисельника і знаменника, тобто*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v),$$

$$E_x(\frac{u}{v}) = E_x(u) - E_x(v).$$

◄ Очевидно, що

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}(uv)' = \frac{x}{uv}(u'v + uv') = \frac{x}{u}u' + \frac{x}{v}v' = E_x(u) + E_x(v).$$

Аналогічно $E_x(\frac{u}{v}) = \frac{x}{\frac{u}{v}}(\frac{u}{v})' = = \frac{v \cdot x}{u}\frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{x}{u}u' - \frac{x}{v}v' = E_x(u) - E_x(v)$. ►

Розглянемо деякі приклади на застосування еластичності функції.

Приклад 4. Вивчити еластичність попиту відносно ціни.

◄ Нехай на деякий момент попит q залежить від ціни за законом $q = f(p)$. Тоді еластичність попиту відносно ціни

$$E_n \equiv E_p(q) = \frac{p}{q}q'(p).$$

Вона визначає як змінюється попит на даний товар, коли його ціна зростає, на один відсоток.

У більшості випадків функція попиту є спадною функцією, оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього зменшується. Отже, в таких випадках $q' < 0$. Щоб не мати справи з від'ємними числами, при вивченні еластичності попиту вважають, що

$$E_n = -\frac{p}{q}q'(p).$$

Якщо $E_n > 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту більше, ніж на один відсоток, то кажуть, що попит **еластичний**.

Якщо $E_n = 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту на один відсоток, то кажуть, що попит **нейтральний**.

У випадку, коли $0 < E_n < 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту менше, ніж на один відсоток, то попит називають **нееластичним**.

Наприклад, якщо

$$q = 10 - p,$$

то $E_n = -\frac{p}{q}\, q' = -\frac{p}{10-p}(-1) = \frac{p}{10-p}$.

При $p = 2$ маємо, що попит нееластичний, бо

$$E_n = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Це означає, що при ціні 2 грошові одиниці підвищення ціни на один відсоток викликає зниження попиту на $\dfrac{1}{4}$ відсотка.

Якщо ж

$$q = \frac{c}{p}, \quad c = const,$$

то

$$E_n = -\frac{p}{q}q' = -\frac{p}{\frac{c}{p}}(-\frac{c}{p^2}) = 1,$$

тобто попит є нейтральним. ►

Можна розглядати еластичність попиту відносно доходу споживачів, пропозиції відносно ціни, а також еластичність повних і середніх витрат.

Наприклад, якщо підприємство виробляє x одиниць продукції певного виду і $K(x)$ є функцією сумарних витрат, то

$$E_k \equiv E_x(K) = \frac{x}{K}K'(x) = K' : \frac{K}{x}.$$

Отже, еластичність сумарних витрат є відношенням граничних витрат до середніх витрат.

Розглянемо функцію, яка описує середні витрати

$$\mu = \frac{K}{x}.$$

Тоді

$$E_\mu \equiv E_x(\mu) = \frac{x}{\mu}\,\mu' = \frac{x}{\frac{K}{x}}(\frac{K}{x})' = \frac{x^2}{K}\frac{K'x - K}{x^2} = \frac{x}{K}K' - 1 = E_k - 1.$$

Це означає, що еластичність середніх витрат на одиницю продукції менша за еластичність сумарних витрат.

Якщо $E_k = 1$, то $E_\mu = 0$ і, отже, $\mu'(x) = 0$, тобто середні витрати сталі. З рівності $E_\mu = 0$ випливає, що $K'x - K = 0$ або $K' = \frac{K}{x}$. Тому при $E_k = 1$ граничні витрати K' дорівнюють середнім витратам.

Приклад 5. Залежність між собівартістю продукції і обсягом виробництва Q виражається формулою

$$C = 50 - 0,4Q.$$

Знайти еластичність собівартості при випуску продукції обсягу $Q =$ 15 грошових одиниць.

◀ Маємо

$$E_Q(C) = \frac{Q}{C}C' = \frac{Q}{50 - 0,4Q}(-0,4).$$

Звідси при Q=15 одержимо

$$E_{15}(C) = \frac{15}{50 - 0,5 \cdot 15}(-0,4) = \frac{-6}{50 - 6} = \frac{-6}{44} = \frac{-3}{22} \approx -0,14.$$

Отже, при даному обсязі випуску продукції збільшення його на один відсоток приводить до зниження собівартості приблизно на $0,14\%$. ▶

2.1.2. Застосування похідної в задачах природознавства. Як було зазначено в §1 за допомогою похідної можна визначити швидкість зміни однієї з величин у залежності від зміни іншої. Наведемо приклади, які дозволяють краще зрозуміти зміст похідної та продемонструють її застосування при розв'язуванні конкретних прикладних задач.

Приклад 6. Розмір популяції бактерій в момент часу t (в годинах) визначається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Знайти швидкість росту популяції, якщо: 1) $t = 1$ год.; 2) $t = 5$ год.; 3) $t = 10$ год.

◀ Оскільки швидкість росту популяції дорівнює $p'(t)$, то, знайшовши похідну, одержимо

$$p'(t) = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t.$$

Якщо: 1) $t = 1$ год., то $p'(1) = 10^4 - 2 \cdot 10^3 \cdot 1 = 10^4 - 2 \cdot 10^3 = 10^3(10 - 2) = 8000$; 2) $t = 5$ год., тоді $p'(5) = 10^4 - 2 \cdot 10^3 \cdot 5 = 10^4 - 10^4 = 0$; 3) $t = 10$ год., то $p'(10) = 10^4 - 2 \cdot 10^3 \cdot 10 = 10^4(1 - 2) = -1000$. ▶

Приклад 7. Від камінця, який кинуто у воду, розходяться концентричні хвилі. З якою швидкістю зростає площа, охоплена хвилею, у кінці другої секунди, якщо радіус зовнішньої хвилі збільшується зі швидкістю 2 м/с.

◀ Нехай $x(t)$ – радіус хвилі у момент часу t. Тоді площа S, яка охоплена цією хвилею, визначається за формулою $S(t) = \pi x^2$. Швидкість зростання площі хвилі

$$S'(t) = 2\pi x\, x'(t).$$

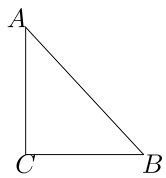
Згідно з умовою $x = 2 \cdot 2 = 4$, $x'(t) = 2$, а тому

$$S'(2) = 2\pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi \text{ м/с}^2.$$

Цю задачу можна розв'язати по-іншому.

Оскільки швидкість зміни радіуса $x(t)$ хвилі є сталою і при $t = 0$ цей радіус дорівнював нулю, то $x(t) = 2t$. Тому площа S, яка охоплена хвилею в момент часу t визначається рівністю $S(t) = 4\pi t^2$. Тоді швидкість зростання площі хвилі $S'(t) = 8\pi t$, а отже, $S'(2) = 16\pi$ м/с^2. ►

Приклад 8. Кінець A рейки AB довжиною 5 м піднімається із землі краном зі швидкістю 5 см/сек. Другий кінець волочиться по землі. Яка швидкість руху кінця B у момент, коли кінець A піднявся на 2,8 м?



◄ Нехай точка C – точка, над якою знаходиться кран, $x(t)$ – відстань від кінця B до точки C, t – час, відрахований від початку підйому. З трикутника ABC знаходимо, що $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$. Оскільки $AB = 500$ см, $AC = 5t$, а $AC = x(t)$, то

$$x(t) = \sqrt{500^2 - 25t^2}.$$

Тоді $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{500^2 - 25t^2}}(-50t) = \dfrac{-25t}{\sqrt{500^2 - 25t^2}}$. Нас цікавить швидкість руху кінця B у момент часу t_0, коли відстань $AC = 280$ см, тобто $5t_0 = 280$ або $t_0 = 56$ сек. Отже,

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = \frac{-25 \cdot 56}{\sqrt{500^2 - 25 \cdot 56^2}} = \frac{-1400}{414,25} = -3,38 \text{ см/сек.} ►$$

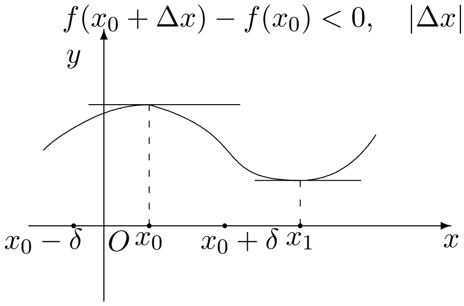
2.2. Основні теореми про диференційовні функції. Застосування похідної до дослідження функцій

2.2.1. Основні теореми про диференційовні функції. У цьому пункті розглянемо властивості диференційовних функцій, які часто використовуватимемо далі. Введемо спочатку поняття внутрішньої точки множини. Точка x_0 називається **внутіршньою** точкою множини X, якщо існує δ-окіл цієї точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, який міститься у множині X.

Теорема 2 (теорема Ферма). *Нехай у внутрішній точці x_0 області визначення X функція f досягає найбільшого (найменшого) значення. Тоді, якщо існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

◀ Припустимо, що, наприклад, $f(x_0)$ є найбільшим значенням функції f. Оскільки x_0 є внутрішньою точкою множини X, то існує δ-окіл цієї точки, який міститься в X. Тому для довільних достатньо малих приростів аргументу Δx, маємо

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0, \quad |\Delta x| < \delta.$$



Тоді, згідно з властивістю границі функції, одержуємо

$$f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Аналогічно

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

З цих двох нерівностей випливає, що $f'(x_0) = 0$. ▶

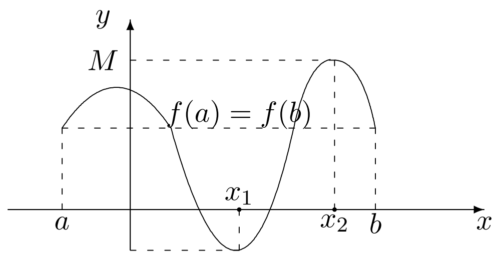
Геометрично теорема Ферма означає, що в точках, де функція набуває найбільшого або найменшого значення, дотична до графіка цієї функції паралельна осі Ox.

Зауважимо, що умови теореми є істотними. Якщо, наприклад, розглянути функцію $f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$, то вона в точці x_0 досягає найменшого значення, але $f'(0) \neq 0$, бо похідна $f'(0)$ не існує (§1, п. 1.1.5). Отже, опустити вимогу, що $f'(x_0)$ існує не можна. Так само важливим є припущення, що точка x_0 є внутрішньою точкою області визначення. Наприклад, для функції $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$, якщо взяти $x_0 = 1$ або $x_0 = 0$, то матимемо $f'(x_0) = 1 \neq 0$.

Теорема 3 (теорема Ролля). *Якщо функція f визначена і диференційовна на відрізку $[a; b]$ і, крім того, $f(a) = f(b)$, то існує точка $\xi \in (a; b)$ така, що $f'(\xi) = 0$.*

◀ З того, що функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$, випливає, що вона неперервна на цьому відрізку (§1, п. 1.2.2). Тому f досягає на $[a; b]$ найбільшого M і найменшого m значень (§3, п.3.5, теорема 6), тобто існують точки x_1 і x_2 на $[a; b]$ такі, що

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \quad x \in [a; b].$$



1) Якщо $m = M$, то з цієї нерівності одержуємо, що $f(x) = m$, тобто є сталою на $[a; b]$, а тому $f'(x) = 0$ в кожній точці $x \in [a; b]$. У цьому випадку за точку ξ можна взяти будь-яку точку з інтервалу $(a; b)$.

2) Якщо ж $m < M$, то, згідно з умовою теореми $f(a) = f(b)$, принаймні одна з точок x_1 і x_2 буде внутрішньою точкою відрізка $[a; b]$. Нехай цією точкою є x_2. Тоді, застосувавши теорему Ферма, отримаємо, що $f'(x_2) = 0$ і, отже, за точку ξ можна взяти x_2. ▶

Умова $f(a) = f(b)$ в теоремі Ролля є істотною. Наприклад, функція $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$, задовольняє всі умови теореми, крім $f(0) = f(1)$. Однак для всіх $x \in [0; 1]$ похідна $f'(x) = 1$ і тому не існує жодної точки $\xi \in (0; 1)$ у якій $f'(\xi) = 0$.

Теорема 4 (теорема Лагранжа). *Якщо функція f визначена і диференційовна на відрізку $[a; b]$, то існує точка $\xi \in (a; b)$ така, що*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

◀ Розглянемо допоміжну диференційовну функцію $F(x) = f(x) - \lambda x$, $x \in [a;b]$. Сталий множник виберемо так, щоб $F(a) = F(b)$:

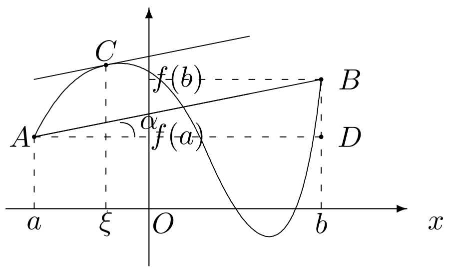
$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отже, маємо, що

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x, \quad x \in [a;b].$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля, а тому існує точка $\xi \in (a;b)$ така, що $F'(\xi) = 0$. Оскільки $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, то звідси випливає, що

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{або} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \ ▶$$



Теорема Лагранжа має просте геометричне тлумачення. Оскільки в кожній точці графіка функції f існує дотична, то рухаючи її вздовж графіка, дістаємо, що в деякій точці $C(\xi, f(\xi))$ дотична буде паралельною січній AB. Це означає, що їхні кутові коефіцієнти однакові, тобто $\operatorname{tg}\alpha = f'(\xi)$. З ΔABD випливає, що кутовий коефіцієнт січної AB

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Тому $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ або $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Наслідок 1. *Якщо функція f визначена на проміжку X і $f'(x) = 0$, $x \in X$, то f є сталою на X.*

◀ Справді, нехай x_0 фіксована точка проміжку X. Тоді для довільної точки $x \in X$ згідно з теоремою Лагранжа правильна рівність

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

де $\xi \in (x_0; x)$, якщо $x > x_0$, і $\xi \in (x; x_0)$, якщо $x < x_0$. Звідси випливає, що $f(x) = f(x_0)$ для довільної точки $x \in X$, а це означає, що функція f стала на проміжку X. ▶

Наслідок 2. *Нехай на проміжку X задано дві диференційовні функції f_1 і f_2, причому $f_1'(x) = f_2'(x)$, $x \in X$. Тоді існує стала C така, що $f_2(x) = f_1(x) + C$, $x \in X$.*

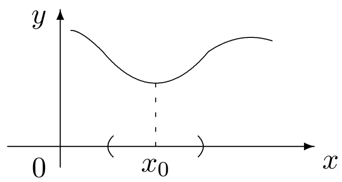
◀ Оскільки $(f_2(x) - f_1(x))' = f_2'(x) - f_1'(x) = 0$, $x \in X$, то з наслідку 1 випливає, що $f(x_2) - f(x_1) = C$, $x \in X$. ▶

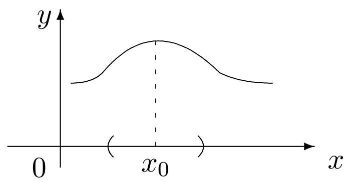
Теорема 5 (достатня умова зростання (спадання) функції). *Якщо в усіх точках проміжку X похідна $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функція f зростає (спадає) на X.*

◀ Нехай x_1 і x_2 довільні точки з проміжку , але такі, що $x_1 < x_2$. Згідно з теоремою 4 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, де $\xi \in (x_1; x_2)$. Оскільки $f'(\xi) > 0 (f'(\xi) < 0)$, то $f(x_2) > f(x_1)(f(x_2) < f(x_1))$, бо $x_2 > x_1$. Це означає, що f зростає (спадає) на X. ▶

Якщо на проміжку X похідна $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), то функція f є неспадною (незростаючою) на X.

2.2.2. Екстремум функції. Функція f має в точці x_0 **мінімум (максимум)** якщо існує окіл $U(x_0)$ цієї точки, який міститься в області визначення X, такий, що для довільного $x \in U(x_0)$ виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$).





Максимум і мінімум об'єднують спільною назвою **екстремум**.

Теорема 6 (необхідна умова екстремуму). *Якщо функція f диференційовна в точці x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

◀ Припустимо, що точка x_0 є точкою максимуму. Тоді для неї існує окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X$ такий, що в точці x_0 f досягає найбільшого значення у порівнянні із значеннями f в точках цього околу. Тому з теореми Ферма випливає, що $f'(x_0) = 0$. Аналогічно доводиться теорема і у випадку, коли x_0 є точкою мінімуму функції f. ▶

Ця теорема дає **необхідну умову екстремуму**. Корені рівняння $f'(x) = 0$ називаються **критичними** або **стаціонарними точками** функції f. До критичних точок належать також точки, в яких похідна не існує або нескінченна, але функція в них визначена.

Наприклад, для функції $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, критичною є точка $x = 0$ у якій похідна не існує.

Приклад 9. Знайти критичні точки функції $y = x^3, x \in \mathbb{R}$.

◀ Маємо $y' = 3x^2$. Тоді з рівняння $3x^2 = 0$ знаходимо, що $x = 0$. Отже, точка $x_0 = 0$ є критичною, але в цій точці функція не має екстремуму, бо вона зростає на $\mathbb{R}$. ▶

З цього прикладу випливає, що треба ще знати достатні умови екстремуму.

Теорема 7 (достатні умови екстремуму). *Якщо x_0 – критична точка функції f і в деякому околі цієї точки зліва й справа від неї похідна $f'(x)$ має протилежні знаки, то в точці x_0 функція f має екстремум, причому:*

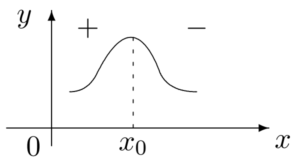
1) максимум, якщо $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_0$;

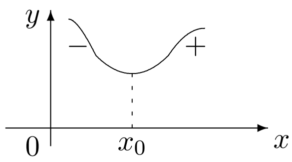
2) мінімум, якщо $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$.

Якщо ж похідна не змінює знаку при переході через точку x_0, то в цій точці функція екстремуму не має.

◀ Якщо $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) при $x > x_0$, то це означає, що зліва від точки x_0 функція зростає (спадає), а справа від неї – спадає (зростає), тому $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) у деякому околі точки

x_0, тобто в точці x_0 функція f досягає найбільшого (найменшого) значення.





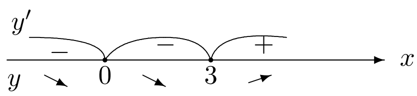
Якщо $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $f(x)$ зростає в усьому околі і тому x_0 не є точкою екстремуму. Аналогічно одержуємо, що f не має екстремуму, коли в околі точки x_0 похідна $f'(x) < 0$. ►

Приклад 10. Знайти екстремум функції

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3.$$

◄ Маємо $y' = x^3 - 3x^2$. Тоді з рівняння $x^3 - 3x^2 = 0$ випливає, що $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ є критичними точками.

Скористаємося достатніми умовами екстремуму. Знаки похідної $y' = x^2(x-3)$, а також зростання (спадання) функції зобразимо на рисунку



.

Оскільки $y'(x) < 0$ при $-\infty < x < 0$, $y' < 0$ при $0 < x < 3$, $y' > 0$ при $3 < x < +\infty$, то в точці $x_1 = 0$ функція не має екстремуму, а в точці $x_2 = 3$ має мінімум, причому $f_{min} = f(3) = \frac{3^4}{4} - 3^3 = 3^3(\frac{3}{4} - 1) = -\frac{27}{4}$. ►

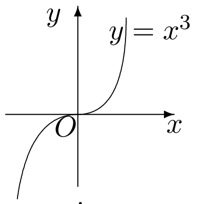
Сформулюємо інші достатні умови екстремуму.

Теорема 8. *Якщо функція f двічі неперервно диференційовна в околі точки x_0, тобто існує друга похідна $f''(x)$, яка неперервна в цьому околі, $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в цій точці функція f має екстремум, а саме: 1) максимум, якщо $f''(x_0) < 0$; 2) мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.*

◄ Нехай $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$. Оскільки f'' неперервна в околі точки x_0 і $f''(x_0) < 0$, то вона є від'ємною і в деякому околі точки x_0, а це означає, що f' спадає в цьому околі. Згідно з умовою $f'(x_0) = 0$, а тому зліва від точки x_0, $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$. Звідси випливає за теоремою 7, що f в точці x_0 має максимум. ▶

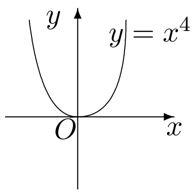
Дана теорема не діє у випадку, коли $f''(x_0) = 0$. У цьому випадку функція f може мати екстремум в точці x_0, а може й не мати.

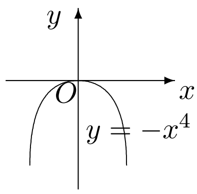
Проілюструємо це на конкретних прикладах.



Як доведено в прикладі 9 функція $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ має критичну точку $x_0 = 0$. Оскільки $f''(x) = 6x$, то $f''(0) = 0$, але функція екстремуму не має.

Аналогічно для функцій $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, і $g(x) = -x^4$, $x \in \mathbb{R}$, точка $x_0 = 0$ так само є критичною точкою. Другі похідні дорівнюють відповідно $f''(x) = 12x^2$, $g''(x) = -12x^2$ і перетворюються в нуль при $x_0 = 0$. Перша з цих функцій має в критичній точці $x_0 = 0$ мінімум, а друга – максимум.





Приклад 11. На сторінці книги друкований текст повинен займати S_0 см^2. Поля зверху і знизу мають по a см, а справа і зліва – по b см. Знайти найекономічніші розміри аркуша паперу.

◀ Позначимо через x ширину, а через y висоту частини сторінки, яку займає друкований текст. Тоді ширина усього аркуша дорівнює $2b + x$, а висота – $2a + y$. Тому площа усього аркуша паперу $S = (2b + x)(2a + y)$.

Оскільки $S_0 = xy$, то $y = \dfrac{S_0}{x}$. Отже, треба дослідити на мінімум функцію

$$S(x) = (2b + x)(2a + \frac{S_0}{x}).$$

Маємо $S'(x) = 2a - \dfrac{2bS_0}{x^2}$. Тоді з умови $S'(x) = 0$ одержуємо, що $x_0 =$

$\sqrt{\dfrac{bS_0}{a}}$ є критичною точкою. Оскільки $S''(x) = \dfrac{4bS_0}{x^3}$, то $S''(x_0) > 0$, а тому функція $S(x)$ у точці x_0 має мінімум.

Звідси випливає, що ширина аркуша дорівнює $2b + \sqrt{\dfrac{bS_0}{a}}$, а висота $2a + \sqrt{\dfrac{aS_0}{b}}$. ►

2.2.3. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції. У застосуваннях важливу роль відіграють задачі про знаходження найбільшого й найменшого значень функції на проміжку X.

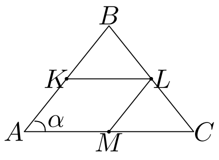
Нехай функція f визначена на проміжку X. Якщо для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$) для деякого $x_0 \in X$, то x_0 називають точкою **глобального максимуму (мінімуму)** функції на проміжку X, а число $f(x_0)$ – **найбільшим (найменшим)** значенням функції на цьому проміжку і позначають символом $\max\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0)$ $(\min\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0))$. Наприклад, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 = 0$, $\max\limits_{x\in[0;2\pi]} \sin x = 1$. Зауважимо, що функція може не мати найбільшого (найменшого) значення. Наприклад, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} x^3$ не існує, $\min\limits_{x\in(\frac{\pi}{2};\pi)} \operatorname{tg} x$ не існує.

Раніше ми з'ясували, що коли функція f неперервна на $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень. Це можливо або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Тому для знаходження найменшого і найбільшого значень функції, яка неперервна на $[a;b]$ і диференційовна на $(a;b)$, треба обчислити її значення в усіх критичних точках і на кінцях відрізка, а потім вибрати серед них найменше та найбільше.

Приклад 12. Знайти найбільше й найменше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ при $x \in [0;4]$.

◄ Знаходимо $y' = x^2 - 4x + 3$ і розв'язуємо рівняння $y' = 0$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$, корені якого $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Обидва корені належать проміжку $[0;4]$. Оскільки $y(0) = 1, y(1) = \frac{7}{3}, y(3) = 1, y(4) = \frac{7}{3}$, то $\max\limits_{x\in[0;4]} y(x) = \frac{7}{3}$, $\min\limits_{x\in[0;4]} y(x) = 1$. ►

Приклад 13. У рівнобедренний трикутник з довжинами сторін 15 см, 15 см і 18 см вписано паралелограм найбільшої площі так, що кут при основі в них спільний. Знайти довжини сторін паралелограма.



◀ Нехай ABC заданий трикутник, а $AKLM$ – деякий з паралелограмів, вписаних в цей трикутник. Згідно з умовою кут A у них спільний, а $AB = BC = 15$ см і $AC = 18$ см. Введемо позначення $AK = x$, $AM = y$, $\angle A = \alpha$.

Тоді площа паралелограма $AKLM$ знаходиться за формулою

$$S = xy\sin\alpha.$$

Оскільки S залежить від двох змінних, то виразимо одну із цих змінних через другу. Очевидно, що трикутники ABC і KBL подібні, бо відповідні кути у них рівні. Тому

$$\frac{15-x}{15} = \frac{y}{18} \quad \text{або} \quad y = \frac{6}{5}(15-x).$$

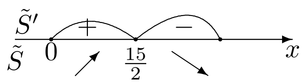
Тоді, підставивши цей вираз у функцію S, дістанемо функцію однієї змінної

$$\tilde{S}(x) = \frac{6x}{5}(15-x)\sin\alpha, \quad 0 < x < 15.$$

Дослідимо цю функцію на найбільше значення. Маємо

$$\tilde{S}'(x) = \frac{6\sin\alpha}{5}(15-2x),$$

а тому $\tilde{S}' = 0$ в точці $x = \dfrac{15}{2}$ і $\tilde{S}'$ змінює знак з плюса на мінус при переході через цю стаціонарну точку



.

Тому S набуває найбільшого значення при $x = \dfrac{15}{2}$. Тоді площа S досягає найбільшого значення при $x = \dfrac{15}{2}$, $y = \dfrac{6}{5}\left(15 - \dfrac{15}{2}\right) = 9$. Отже, паралелограм $AKLM$ буде найбільшої площі тоді, коли його сторони дорівнюють відповідно 7,5 см і 9 см. ▶

2.2.4. Напрямок опуклості графіка функції. Точка перегину. Графік диференційовної функції називається **опуклим догори (донизу)** на проміжку X, якщо в цьому проміжку він розміщений нижче (вище) довільної своєї дотичної. На рис. 1 а), б) відповідно показано графіки функцій опуклих догори та донизу.

Достатні умови опуклості графіка функції дає така теорема.

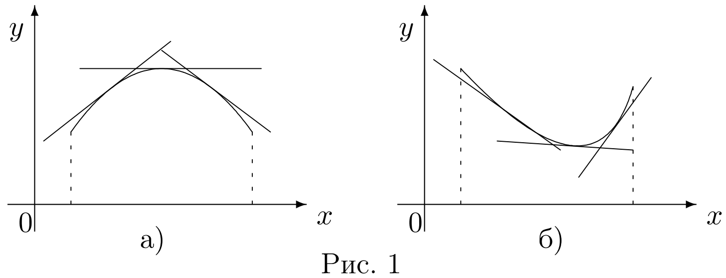
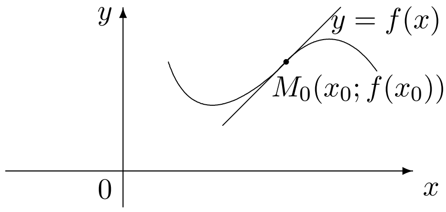


Рис. 1

Теорема 9. *Якщо функція f має на проміжку X другу похідну і $f''(x) > 0(f''(x) < 0)$ на X, то графік функції опуклий донизу (догори).*

Необхідна умова опуклості слабкіша: якщо функція опукла на проміжку X, то можна стверджувати лише, що $f''(x) \geq 0$ (або $f''(x) \leq 0$) $x \in X$. Наприклад, функція $y = x^4$ опукла на всій числовій осі, у той час як її друга похідна $y'' = 12x^2$ не скрізь додатна, зокрема, $y''(0) = 0$.

Точкою перегину графіка функції f називається його точка, при переході через яку він змінює напрямок опуклості.



З цього означення випливає, що точки перегину – це точки екстремуму першої похідної.

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з одного боку дотичної на другий, тобто перегинається через неї.

Доведено, що коли функція f двічі диференційовна на проміжку X і її графік має перегин в точці $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in X$, то $f''(x_0) = 0$. Умова рівності нулю другої похідної в точці x_0 називається **необхідною умовою перегину**.

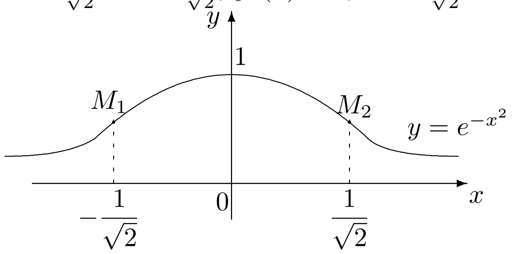
Достатня умова перегину функції f в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ дається такою теоремою.

Теорема 10. *Якщо для функції f друга похідна f'' у деякій точці x_0 перетворюється в нуль, а при переході через цю точку змінює знак на протилежний, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.*

Приклад 14. Знайти точки екстремуму і перегину функції $y = e^{-x^2}$ та побудувати її графік.

◀ Послідовно знаходимо: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ Очевидно, що $y'(x) = 0$ в точці $x = 0$. Оскільки $y''(0) = -2 < 0$, то в точці $x = 0$ функція має максимум і $y_{\max} = y(0) = 1$.

З рівняння $y''(x) = 0$ або $(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$ одержуємо $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Зміна знаку другої похідної така: $y''(x) > 0$, коли $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y''(x) < 0$, коли $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y''(x) > 0$, коли $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$.



Отже, в точках $M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ і $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ графік функції має перегин, оскільки при переході через точку M_1 графік функції змінює напрямок опуклості донизу зліва на опуклість догори справа, а через точку M_2 – опуклість догори зліва на опуклість донизу справа. ▶

2.2.5. Асимптоти графіка функції. Можливі ситуації, коли графік функції як завгодно близько наближається до певної прямої. Таку пряму називають **асимптотою**. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, горизонтальні та похилі.

Вертикальна асимптота. Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо f визначена в деякому околі точки a або принаймні в одному з півоколів, за винятком, можливо, самої точки a, й хоча б одна з однобічних границь дорівнює нескінченності, тобто

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty.$$

Очевидно, що пряма $x = a$ не може бути вертикальною асимптотою, якщо функція неперервна в точці a, оскільки $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Отже, графік функції, яка неперервна на всій числовій осі, вертикальних асимптот не має. Тому вертикальні асимптоти $x = a$ треба шукати в точках розриву функції f або на кінцях її області визначення.

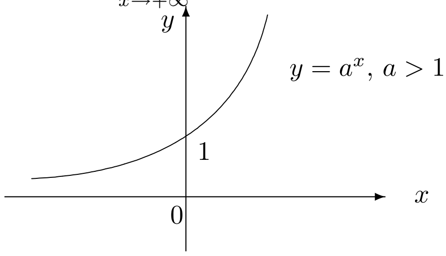
Приклад 15. Знайти вертикальну асимптоту графіка функції $y = \frac{1}{x}$.

◄ Якщо $x \neq 0$, то функція неперервна, і тому вертикальної асимптоти немає. Вона можлива в точці розриву $x = 0$. Очевидно, що $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$. Звідси випливає, що пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції. ►

Горизонтальна асимптота. Якщо функція f визначена при досить великих x та існує скінченна границя $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, то пряма $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** графіка функції f (правобічною, коли $x \to +\infty$, лівобічною, коли $x \to -\infty$ і двобічною, коли обидві однобічні границі однакові).

Приклад 16. Знайти горизонтальну асимптоту графіка функції $y = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Оскільки при $a > 1$ границя $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, то пряма $y = 0$ є лівою горизонтальною асимптотою. Правої горизонтальної асимптоти задана крива не має, бо $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.



►

Похила асимптота. Нехай, функція f визначена при досить великих x. Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка функції при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ $\quad(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)=0)$. Для того щоб пряма $y=kx+b$ була похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$, необхідно й досить існування скінченних границь

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

або

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx).$$

У першому випадку маємо праву похилу асимптоту, а в другому – ліву. Якщо границі збігаються, то пряма $y=kx+b$ є двобічною похилою асимптотою.

Приклад 17. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

◀ Очевидно, що графік функції не має ні вертикальних асимптот, бо немає точок розриву, ні горизонтальних, бо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}=\infty$. Знайдемо похилу асимптоту.

Маємо

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+1}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-1\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^3}{x^2+1}-x)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0.$$

Отже, похилою асимптотою є пряма $y=x$. ▶

2.2.6. Загальна схема дослідження функцій та побудова їхніх графіків. Користуються такою схемою дослідження функції:

1) знаходять область визначення, проміжки неперервності та точки розриву;

2) досліджують функцію на парність, непарність і періодичність;

3) знаходять асимптоти;

4) знаходять проміжки монотонності функції, точки екстремуму;

5) знаходять проміжки опуклості графіка функції, точки його перегину;

6) визначають точки перетину кривої з осями координат, якщо вони існують;

7) зводять одержану інформацію в таблицю і будують графік функції.

Приклад 18. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

◀ 1) Маємо $D(f) = (-\infty; -1) \bigcup (-1; +\infty)$; $x = -1$ – точка розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$.

2) Функція не є ні парною, ні непарною.

3) Оскільки $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$, то пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою;

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 2(1+\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} =$$

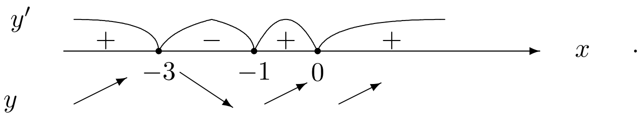
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2(2 - \frac{1}{x})}{2x^2(1+\frac{1}{x})^2} = -1,$$

тобто пряма $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ є похилою асимптотою.

4) Маємо $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. З умови $y' = 0$ одержуємо $x^2(x+3) = 0$ або

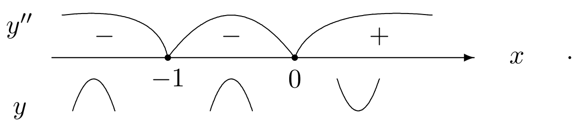
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 0.$$

За знаком першої похідної визначимо ділянки монотонності функції та знайдемо точки екстремуму



Отже, в точці $x_1 = -3$ є максимум, а в точці $x_2 = 0$ екстремуму немає, $f_{max} = f(-3) \approx -3,37$.

5) Прирівнявши другу похідну $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ до нуля, одержимо $x = 0$. Знак другої похідної і ділянки опуклості графіка функції зображено на рисунку

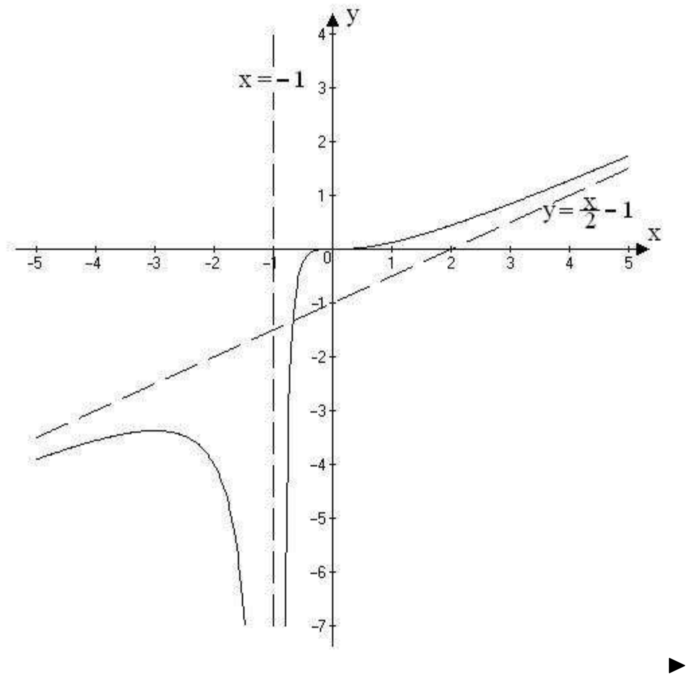


У точці $(0;0)$ графік функції має перегин.

6) Графік функції перетинає осі координат в точці $(0;0)$.

7) Зведемо усю одержану інформацію в таблицю

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$+$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
	$\cap$		$\cap$		$\cap$		$\cup$



▶

2.2.7. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя. Відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ називається **невизначеністю вигляду** $\dfrac{0}{0}$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Розкрити невизначеність означає, що треба обчислити границю $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо вона існує, або довести, що вона не існує.

Наступна теорема дає правило розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$.

Теорема 11 (правило Лопіталя). *Нехай функції f і g визначені й диференційовні в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Нехай, крім того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ у вказаному околі точки x_0. Тоді, якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна), то існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому правильна формула*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

◀ Для спрощення доведення додатково вважатимемо, що функції f' і g' є неперервними в точці $x = x_0$, причому $g'(x_0) \neq 0$. Тоді й самі функції f і g є також неперервними при $x = x_0$ і тому $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Скориставшись означенням похідної, дістанемо

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0},$$

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0},$$

а тому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{\frac{g(x)}{x-x_0}}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

З іншого боку, оскільки f' та g' неперервні в точці $x=x_0$ і $g'(x_0)\neq 0$, то маємо

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Теорема є правильною і у випадку, коли $x_0=\pm\infty$.

Приклад 19. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

$\blacktriangleleft$ Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, то маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}. \quad\blacktriangleright$$

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to x_0$. Для розкриття цієї невизначеності правильна теорема, аналогічна попередній.

Приклад 20. Знайти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

$\blacktriangleleft$ Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$, оскільки $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0. \blacktriangleright$$

Невизначеності вигляду $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ можна звести до невизначеностей $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 21. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0+0} x \ln x$.

◀ Маємо невизначеність $0 \cdot \infty$. Переписавши цю границю у вигляді $\lim\limits_{x \to 0+0} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, дістанемо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, яку розкриємо за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+0} (-x) = 0. \ ▶$$

Невизначеності вигляду 0^0, 1^∞, ∞^0, які виникають при знаходженні границі функції $y = u(x)^{v(x)}$ зводяться до невизначеності $0 \cdot \infty$ за допомогою тотожного перетворення

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}.$$

Приклад 22. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\operatorname{ctg} x}$.

◀ Це невизначеність 1^∞. Запишемо цю границю у вигляді

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg} x \ \ln(1+x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\operatorname{tg} x)'}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1+x}} = e^1 = e. \ ▶$$

2.2.8. Формула Тейлора. Розглянемо спочатку многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (24)$$

і задачу про розклад цього многочлена за степенями $x - x_0$, де x_0 – деяке число. Цю задачу можна розв'язати, якщо скористатися тотожністю $x \equiv x_0 + (x - x_0)$. Можна це зробити по іншому. Нехай

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n \quad (25)$$

є шуканим розкладом, коефіцієнти якого $A_1, A_2, \ldots, A_n$ треба знайти. Покладаючи в тотожності (25) $x = x_0$, дістаємо, що $P(x_0) = A_0$, тобто $A_0 = P(x_0)$.

Диференціюючи (25), маємо

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Звідси, покладаючи $x = x_0$, одержуємо

$$A_1 = P'(x_0).$$

Після повторного диференціювання, знаходимо

$$P''(x) = 2A_2 + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

і при $x = x_0$ одержимо, що $A_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}$. Продовжуючи ці міркування, дістаємо

$$A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{26}$$

де за означенням $P^{(0)}(x) = P(x)$ і $0! = 1$.

Формулу (26) можна строго довести методом математичної індукції.

Підставляючи коефіцієнти (26) в розклад (25), дістаємо формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

або

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{27}$$

Приклад 23. Многочлен $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ розкласти за степенями $x + 1$.

◄ Скористаємося формулою (27), де $x_0 = -1$. Маємо $P'(x) = -2 + 6x - 12x^2$, $P''(x) = 6 - 24x$, $P^{(3)}(x) = -24$, а тому $P(-1) = 10$, $P'(-1) = -20$, $P''(-1) = 30$, $P^{(3)}(-1) = -24$.

Отже,

$$P(x) = 10 - 20(x+1) + \frac{30}{2!}(x+1)^2 + \frac{(-24)}{3!}(x+1)^3,$$

або

$$P(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3. \qquad \blacktriangleright$$

Очевидно, що коли $x_0 = 0$, то права частина (27) збігається з правою частиною многочлена (24). Тому

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Приклад 24. Функцію $f(x) = (a+x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, розкласти за степенями x.

◀ Маємо

$$(a+x)^n = A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n,$$

де A_k визначаються за формулою

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Оскільки

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)...(n-k+1)(a+x)^{n-k}, k \in \{0, 1, ..., n\},$$

то

$$f^{(0)}(0) = a^n,$$

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)...(n-k+1)a^{n-k}, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Отже,

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + ...$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + x^n$$

або

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k a^{n-k},$$

тобто ми одержали формулу бінома Ньютона.

Зокрема, при $a = 1$, маємо

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n$$

або

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \quad \blacktriangleright$$

Розглянемо тепер довільну функцію f, яка має неперервні похідні до n-го порядку на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$.

Використовуючи попередні міркування, побудуємо за допомогою функції f відповідний многочлен Тейлора степеня n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{28}$$

Многочлен $P_n(x)$ можна розглядати як деяке наближення (апроксимацію) функції f. Якщо позначити через $R_{n+1}(x)$ відповідну похибку (залишковий член), то матимемо

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x). \tag{29}$$

Виявляється, що $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малою функцією порядку вищого, ніж $(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$, тобто $R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Для доведення цього треба переконатися, що

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Маємо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n},$$

тобто невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Для її розкриття скористаємося $(n-1)$ разів правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\Big(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)) = 0,$$

оскільки

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}x_0).$$

Отже, одержали **локальну формулу Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Доведено, що коли функція f має в околі точки x_0 і $(n+1)$-у похідну, то для $R_{n+1}(x)$ правильна формула

$$R_{n+1}(x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!})(x-x_0)^{n+1}, \quad x \in (a;b), \qquad (30)$$

де ξ – певна точка, яка знаходиться між точками x_0 і x. Ця формула не лише характеризує порядок залишкового члена $R_{n+1}(x)$, як в локальній формулі Тейлора, але і його величину.

Якщо скористатися формулами (28), (29) і (30), то одержимо **формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad x \in (a;b). \qquad (31)$$

Якщо $x_0 = 0$ належить $(a;b)$, то формулу (31) називають **формулою Маклорена** і вона має вигляд

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$x \in (a;b)$, $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Приклад 25. Записати формулу Маклорена для функції: 1) $f(x) = e^x$; 2)$f(x) = \sin x$; 3)$f(x) = \cos x$; 4) $f(x) = (1+x)^\alpha$; 5) $f(x) = \ln(1+x)$.

◀ 1) Маємо $f(x) = f'(x) = ... = f^{(n+1)}(x) = e^x$, а тому $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n+1)}(0) = 1$.

Тоді

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

2)$f(x) = \sin x$. Оскільки $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{якщо } n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), x \to 0.$$

3) $f(x) = \cos x$. Маємо $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$, $f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k-1, \\ (-1)^{n/2}, & \text{якщо } n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Отже,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0.$$

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Оскільки

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, x > -1, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

то

$$f(0) = 1, f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), \ldots, f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Тому формула Маклорена для функції $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ має вигляд

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), x \to 0.$$

5) $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.

З попереднього (п. 1.8.2) відомо, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, x > -1, n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

а тому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n), x \to 0.$$

За допомогою цих формул можна наближено обчислювати з певною точністю значення функції, замінюючи її многочленом Тейлора. ▶

Формула Тейлора, а точніше наближена рівність $f(x) \approx P_2(x)$, застосовується в економічній статистиці. Нехай для чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ відоме середнє арифметичне

$$a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

і середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-a)^2 + (x_2-a)^2 + ... + (x_n-a)^2}{n}}.$$

Треба знайти середнє арифметичне вигляду

$$\overline{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n},$$

якщо числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n невідомі, але відомий проміжок, у якому вони містяться. Звичайно, точне значення $\overline{y}$ визначити неможливо. Тому знайдемо $\overline{y}$ наближено. При цьому, як випливає з формули Тейлора (31) при $n = 2$, помилка буде тим меншою, чим менше максимальне значення $f^{(3)}(x)$ на проміжку, що містить всі $x_1, x_2, ..., x_n$. Замінимо $f(x)$ її другим многочленом Тейлора в точці a:

$$f(x) \approx P_2(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Тоді

$$\overline{y} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a) + f'(a)(x_i - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x_i - a)^2) =$$

$$= \frac{1}{n}nf(a) + f'(a)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}na) + \frac{1}{2n}f''(a)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Оскільки $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$, а $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, то

$$\overline{y} \approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a)\sigma^2. \tag{32}$$

Приклад 26. Для чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n відомі середнє арифметичне $a = 2$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,1$. Знайти наближено суму кубів $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{100}^3$.

◀ Для функції $f(x) = x^3$, $x \in [c; d] \subset \mathbb{R}$, знайдемо середнє арифметичне за формулою (32):

$$\overline{y} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{100}^3}{100} \approx a^3 + \frac{1}{2}6a\sigma^2 = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 0,1^2 = 8,06.$$

Звідси випливає, що $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{100}^3 \approx 806$. ▶

Приклад 27. Для додатних чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n відомі середнє арифметичне a і середнє квадратичне відхилення σ. Знайти наближено середнє геометричне $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

◀ Середнє геометричне можна подати у вигляді

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n)}.$$

Використовуючи формулу (32) для функції $f(x) = \ln x$, дістанемо

$$\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n) \approx \ln a - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

Отже,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \approx e^{\ln a - \frac{\sigma^2}{2a^2}} = e^{\ln a} e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}} = a e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}},$$

або

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \approx a e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}}. \ \blacktriangleright \qquad (33)$$

Приклад 28. Нехай p_i – вартість споживчого кошика на 31 грудня i-го року, $i \in \{0, 1, ..., 10\}$, $k_j = \frac{p_j}{p_{j-1}}$ – індекс споживчих цін за j-тий рік, $j \in \{1, ..., 10\}$. Відомо, що середнє арифметичне чисел $k_1, k_2, ..., k_{10}$ дорівнює 1, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,1$. Визначити приблизно відносну зміну цін з 31 грудня нульового року до 31 грудня десятого року.

◀ Використовуючи формулу (33), знайдемо наближено середнє геометричне

$$\sqrt[10]{k_1 k_2 ... k_{10}} \approx 1\, e^{-\frac{0,1^2}{2}} = e^{-0,005}.$$

Далі,

$$\frac{p_{10}}{p_0} = k_1 k_2 ... k_{10} = (e^{-0,005})^{10} = e^{-0,05} \approx 0,95.$$

Отже, за десять років ціни знизяться приблизно на 5%. ▶

Вправи

1. Функція сукупних витрат має вигляд $y = 6\lg(1+3x)$.Знайти функцію граничних витрат.

2. Залежність між витратами виробництва y (гр. од.) і обсягом виготовленої продукції x (од.) виражається функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг продукції становить 5 од.

3. Функція пропозиції на деякий товар $s = \frac{20+4p^2}{1+10p}$, функція попиту $q = \frac{25-p+4p^2}{1+10p}$. Знайти ціну рівноваги, тобто ціну, коли попит і пропозиція зрівноважуються, а також еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни.

4. Функція попиту q визначається формулою $q = q_0 e^{-kp}$, де q_0 і k – відомі величини. Знайти при яких значеннях ціни p попит буде еластичним, тобто $E_p(q) < -1$.

5. За правилом Лопіталя знайти границю: 1)$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$; 2)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x-4}{x^3-1}$; 3)$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\ln x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 7x}{\cos 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$; 8)$\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x - \sqrt{x+x^2})$; 9)$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 10)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

6. Використовуючи формулу Тейлора, подати функцію у вигляді многочлена: 1)$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями $x - 4$; 2)$f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ за степенями x; 3)$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ за степенями $(x+1)$.

7. Знайти інтервали монотонності функції: 1)$f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$; 2)$f(x) = 2x^2 - \ln x$; 3)$f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in [0; 2\pi]$; 4)$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 5) $f(x) = x^2 - 2\cos x, x \in [0; 2\pi]$.

8. Знайти екстремум функції: 1)$f(x) = 2x^3 - 3x^2$; 2)$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; 3)$f(x) = x - \ln(1+x)$; 4)$f(x) = x\ln^2 x$; 5)$f(x) = \frac{e^x}{x}$.

9. Знайти найбільше і найменше значення функції: 1)$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in [-2; 2]$; 2)$f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$; 3)$f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $x \in [-2; 1]$; 4)$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$; 5)$f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in [0; 3]$.

10. Відомо, що функція доходу $P(x) = 16x - x^2$, а функція витрат на виробництво продукції $S(x) = x^2 + 1$ де x – обсяг виробленої продукції. Підприємство сплачує податок t з одиниці продукції, а тому функція прибутку $\pi(x) = P(x) - S(x) - tx$. Яким повинен бути податок t, щоб сумарний податок $T = tx$ був найбільшим?

11. Сіткою довжиною 120 м треба обгородити, прилеглу до будинку, прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри ділянки.

12. Насос подає воду в циліндричний бак, діаметр якого 6 дм. Висота підйому води збільшується на 1 дм за секунду. Знайти швидкість наповнення бака.

13. Ріст популяції бактерій визначається формулою $p(t) = 3000 + 100t^2$, де t – час у годинах. Знайти швидкість росту цієї популяції у момент часу $t_1 = 5$ годин і $t_2 = 10$ годин.

14. Знайти точки перегину й інтервали опуклості графіка функції: 1)$f(x) = x^5 + 5x - 6$; 2)$f(x) = xe^x$; 3)$f(x) = 2x^2 + \ln x$; 4)$f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4$; 5)$f(x) = e^{-x^2}$.

15. Провести дослідження та побудувати графік функції: 1)$f(x) = x^3 - 3x$; 2)$f(x) = x^2 + x$; 3)$f(x) = (2+x)e^{-x}$; 4)$y = \frac{1}{x} + 4x^2$; 5)$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

16. У поживне середовище поміщають популяцію з 1000 бактерій. Кількість популяції зростає за формулою $p(t) = 1000 + \dfrac{100t}{100 + t^2}$, де t – час, що виражається в годинах. Знайти максимальний розмір цієї популяції.

17. Швидкість росту популяції x визначається формулою $y = 0,001x(100 - x)$, де x виражається у днях. При якому розмірі популяції ця швидкість є максимальною?

18. Дріжджі ростуть у цукровому розчині, причому їхня маса збільшується на 3% за кожну годину. Якщо початкова маса складає 1 г, то маса через t годин дорівнюватиме $\omega(t) = 1,03^t$. Знайти швидкість зміни $\omega(t)$ при: 1) $t = 1$ год.; 2) $t = 2$ год.; 3) $t = 5$ год.

19. Реакції організму на два типи ліків як функції t (час виражається в годинах) мають відповідно вигляд $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У яких з цих ліків вища максимальна реакція? Які з цих ліків повільніші у своєму впливові?

20. Газова суміш складається з окису азоту і кисню. Знайти концентрацію кисню, при якій окис азоту, що міститься в суміші, окислиться з максимальною швидкість. Швидкість реакції виражається формулою $v = K(100x^2 - x^3)$, де x – концентрація окису азоту (в об'ємних відсотках).

21. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 0,36x^3 + 0,25x + 15$, де x (млн. гр. од.) – сукупний національний доход. Знайти граничну схильність до споживання й граничну схильність до збереження, якщо доход становить 64 млн. гр. од.

Відповіді

1. $\dfrac{18}{1+3x}\lg e$. **2.** 9 гр.од.; 7 гр.од. **3.** $p_0=5$; $E_5(s)=0,7$; $E_5(q)=0,67$. **4.** $p>\dfrac{1}{2k}$. **5.** 1) 0; 2) $\dfrac{7}{3}$; 3) 3; 4)$-\dfrac{7}{5}$; 5) 1; 6) 0; 7) $-\dfrac{1}{3}$; 8) ∞; 9) $e^{-1/2}$; 10) 1. **6.** 1) $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$; 2) $x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$; 3) $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

7. 1) спадає на $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$; зростає на $(-1;0)$ і $(1;\infty)$; 2) спадає на $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, зростає на $\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$; 3) зростає на $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, спадає на $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right)$; 4) зростає на $(-\infty;\infty)$; 5) спадає на $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ і $\left(\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right)$, зростає на $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

8. 1) $f_{\max}=f(0)=0$; $f_{\min}=f(1)=-1$; 2) $f_{\max}=f(0)=1$; 3) $f_{\min}=f(0)=0$; 4) $f_{\max}=f(e^{-2})=\dfrac{4}{e^2}$; $f_{\min}=f(1)=0$; 5) $f_{\min}=f(1)=e$.

9. 1) $M=13$, $m=4$; 2) $M=6$, $m=0$; 3) $M=e^2-e^{-2}$, $m=e^{-4}-e^4$; 4) $M=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $m=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 5) $M=9$, $m=-3$.

10. $t_0=8$, $x_0=2$, $\pi_{\max}=7$, $T_{\max}=16$ (знайти x при відомому t, яке реалізує екстремум π, і дослідити на екстремум $T=T(x)$).

11. 30 м $\times$ 60 м.

12. Якщо r – радіус бака, $h(t)$ – висота рівня води в момент часу t, то $V=\pi r^2h(t)$, $\dfrac{dV}{dt}=\pi r^2=\dfrac{dh}{dt}$, де $\dfrac{dh}{dt}=1$ дм/сек. Тому $\dfrac{dV}{dt}=9\pi$ дм^3/сек.

13. 1000 ос/год; 2000 ос/год.

14. 1) Опукла догори на $(-\infty;0)$ і донизу на $(0;\infty)$, точка перегину $(0;-6)$; 2) опукла догори на $(-\infty;-2)$ і донизу на $(-2;\infty)$, точка перегину $\left(-2;-\dfrac{2}{e^2}\right)$; 3) опукла догори на $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ і донизу на $\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$, точка перегину $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)$; 4) опукла догори на $(-\infty;4)$ і донизу на $(4;\infty)$, точка перегину $(4;20)$; 5) опукла догори на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і опукла донизу на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$, точки перегину $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

15. 1) $D(y) = \mathbb{R}$, $y_{\max} = y(-1) = 2$, $y_{\min} = y(1) = -2$, перегин при $x = 0$, асимптот немає; 2) $D(y) = \mathbb{R}$, $y_{\min} = y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, зростає на $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$, опукла донизу на $\mathbb{R}$; 3) правобічна асимптота $y = 0$, $y_{\max} = y(-1) = 2$, функція зростає на $(-\infty; 1)$, спадає на $(-1; \infty)$, опукла догори на $(-\infty; 0)$, опукла донизу на $(0; \infty)$, точка перегину $(0; 2)$; 4) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$, перегин при $x = -\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$, $x = 0$ – вертикальна асимптота; 5) асимптота $x = 0$, $y_{\min} = y(-1) = 2$, $y_{\min} = y(1) = 2$, функція спадає на $(-\infty; -1)$ і на $(0; 1)$, зростає на $(-1; 0)$ і на $(1; \infty)$, опукла донизу на $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$, точок перегину немає.

16. $p(10) = 1050$.

17. 50.

18. 1) 0,0304; 2) 0,0314; 3) 0,0342.

19. У других ліків максимальна реакція вища і вони діють повільніше.

20. $x = 66,7\%$; кількістю кисню 33,3%.

21. $C'(64) = 2,17$, $S'(64) = 1 - C'(64) = -1,17$.

Розділ 8
Інтегральне числення функції однієї змінної

§1. Невизначений інтеграл

1.1. Первісна і невизначений інтеграл.

1.1.1. Поняття первісної.У попередньому розділі ми ввели поняття похідної й навчилися знаходити похідні від елементарних функцій. Тут ми розв'язуватимемо обернену задачу, а саме: відома похідна функції $f'(x)$ на проміжку X, треба знайти функцію f. Іншими словами, для заданої функції f треба знайти таку функцію F, щоб $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Наприклад, для функції $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, цю умову задовольняє функція $F(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, бо $F'(x) = (\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$. Відновлення функції за відомою її похідною – це одна з основних задач інтегрального числення.

Функція F називається **первісною** для функції f на проміжку X, якщо для всіх значень $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для функції: 1) $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$; 2)$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$.

◀ 1) Очевидно, що первісною для заданої функції є функція $F(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1;1)$.

Справді,

$$(\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1).$$

2) Оскільки $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$, то $F(x) = \ln x$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$. ▶

Якщо первісна для функції f існує, то вона визначається неоднозначно. Справді, якщо F – первісна для функції f на X, то для довільного $C \in \mathbb{R}$ функція $F + C$ є також первісною для функції f на X, бо

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x), \quad x \in X.$$

З іншого боку, якщо F і G – первісні для функції f на X, то

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in X.$$

Тоді, згідно з наслідком 2 теореми Лагранжа (розділ 7, §2, п.2.2.1), існує $C \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $x \in X$ правильна рівність $F(x) - G(x) = C$, або $F(x) = G(x) + C$.

Отже, якщо F одна із первісних для функції f на X, то довільна первісна Φ для функції f на X має вигляд

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in X, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Рівність (1) називають **основною властивістю первісної**. Геометричний зміст її такий: графіки всіх первісних функції f дістаємо паралельним перенесенням будь-якого з них вздовж осі Oy.

Приклад 2. Для функції $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, знайти ту первісну, графік якої проходить через початок координат.

◀ Оскільки $F'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1 = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то функція $F(x) = x^2 - x$ є первісною для функції $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Згідно з основною властивістю первісної будь-яка первісна функції $f(x) = 2x - 1$ має вигляд $\Phi(x) = x^2 - x + C$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$. Оскільки точка $O(0;0)$ лежить на графіку цієї функції, то $0 = \Phi(0)$, тобто $0 = 0^2 - 0 + C$ або $C = 0$. Отже, шукана первісна $\Phi(x) = x^2 - x$. ▶

1.1.2. Невизначений інтеграл.

Невизначеним інтегралом від функції f на X називається сукупність всіх первісних для функції f на цьому проміжку, тобто вираз $F(x)+C$, $x \in X$, $C \in \mathbb{R}$, де F – первісна для функції f на X. Позначається невизначений інтеграл символом

$$\int f(x)dx. \tag{2}$$

У цьому позначенні знак $\int$ називається **знаком інтеграла**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, а $f(x)$ – **підінтегральною функцією**. Отже, згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

де F – одна із первісних для функції f на X, а C – довільна стала.

Процедура знаходження первісної або невизначеного інтеграла для функції f, називається **інтегруванням** f. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання. Для того щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, треба взяти похідну від одержаного результату й переконатися, що одержано підінтегральну функцію. Операція інтегрування, взагалі кажучи, є складнішою дією, ніж диференціювання.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ Згідно з формулою (3), маємо $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C$, $x \in (-1;1)$, оскільки $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$. ▶

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \cos x dx$.

◀ Очевидно, що $\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$, бо $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. ▶

Зауважимо, що коли F є первісною для функції f, то підінтегральний вираз $f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$ є диференціалом первісної F.

Пізніше ми доведемо, що коли f неперервна на $(a;b)$, то для неї існує первісна на $(a;b)$, а отже, й невизначений інтеграл.

1.1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Із означення невизначеного інтеграла випливають такі його властивості.

1) *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто*

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx, \quad x \in X.$$

◀ Справді,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x), x \in X,$$

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = f(x)dx, x \in X. \blacktriangleright$$

2) *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції й довільної сталої C, тобто*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

$\blacktriangleleft$ Оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$, $x \in X$. $\blacktriangleright$

3) *Сталий множник можна винести за знак інтеграла, тобто, якщо $A = const$, то*

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Згідно з умовою $F'(x) = f(x), x \in X$. Тоді $(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, $x \in X$. Звідси випливає, що

$$A\int f(x)dx = A(F(x)+C) = AF(x)+C_1 = \int Af(x)dx, \quad x \in X. \blacktriangleright$$

4) *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, тобто*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Справді, диференціюючи ліву частину рівності, згідно з властивістю 1), одержуємо $(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x)$, $x \in X$. Похідна правої частини

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' =$$

$$= f(x) \pm g(x), \quad x \in X.$$

Отже, похідні однакові, що й треба було перевірити. $\blacktriangleright$

5) *Якщо F є первісною для f, то*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad x \in X,$$

де a і b – сталі, причому $a \neq 0$.

◀ Для доведення переконаємся, що похідна від правої частини рівності дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)a+0 = f(ax+b). \quad ▶$$

Запишемо **таблицю основних інтегралів**, яка випливає з таблиці похідних і рівності (3).

1) $\int 0dx = C$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\alpha \neq -1$, $x \in (0;+\infty)$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$, $x \neq 0$;

4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$, $0 < a \neq 1$; $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad -a < x < a, a > 0; \end{array}\right.$$

10) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \\ \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0; \end{array}\right.$$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

де у випадку знаку "$+$" $x \in \mathbb{R}$, а у випадку знаку "$-$" – $x \in (-\infty; -|a|) \cup (|a|, \infty)$;

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$, $|x| \neq |a|$.

Перевіримо, наприклад, формулу 3). Нехай $x > 0$, тоді $\ln|x| = \ln x$ і $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Якщо ж $x < 0$, то $|x| = -x$ і $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Приклад 5. Знайти $\displaystyle\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$.

◀ Поділимо почленно чисельник на знаменник і застосуємо спочатку властивості 3 і 4, а потім табличні інтеграли 2) і 3). Маємо

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-3/2}dx + 3\int x^{-5/6}dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} + \frac{3x^{1/6}}{1/6} + 5\ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C,\ x > 0. \ \blacktriangleright$$

Приклад 6. Знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

◀ Спочатку перетворимо підінтегральну функцію $\dfrac{1}{x^4 + x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} - \dfrac{x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1}$, а потім запишемо вихідний інтеграл як різницю табличних інтегралів 2) і 8) (при $a = 1$):

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 7. Граничний доход фірми визначається функцією $f(x) = 50000 - x$, де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий доход.

◀ Згідно з означенням граничного доходу функція F сумарного доходу обчисляється за допомогою невизначеного інтеграла

$$F(x) = \int (50000 - x)dx = 50000x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Врахувавши умову $F(0) = 0$, знайдемо сталу C:

$$0 = 50000 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} + C, \text{ або } C = 0.$$

Отже, сумарний доход фірми $F(x) = 50000x - \dfrac{x^2}{2}$. ►

Зауваження. З попереднього випливає, що похідна від елементарної функції є також елементарною функцією. З операцією інтегрування вже складніше. Доведено, що інтеграли від деяких елементарних функцій не є елементарними функціями. Прикладами таких інтегралів є: 1) $\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуасона; 2)$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$, $x > 0$ і $x \neq 1$ – інтегральний логарифм; 4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx$ – інтегральний синус; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}dx, x \neq 0$ – інтегральний косинус. Ці інтеграли існують, але вони не є елементарними функціями. Їх можна обчислити наближено. Зокрема, інтегральний синус, якщо скористатися формулою Тейлора, можна записати у вигляді

$$\int \frac{\sin x}{x}dx \approx \int \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!})dx =$$

$$= \int (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!})dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + C,$$

що дозволяє обчислювати його з певним ступенем точності.

1.2. Основні методи інтегрування.

1.2.1. Метод заміни змінної (метод підстановки). У багатьох випадках введення нової змінної дозволяє спростити підінтегральний вираз і звести інтеграл до лінійної комбінації табличних інтегралів. Такий метод називається **методом заміни змінної (методом підстановки)**.

Теорема 1. *Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на деякому проміжку T, а X – множина значень цієї функції, на якій визначена функція $f(x)$. Тоді, якщо функція f має первісну на множині X, то на множині T правильна формула*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

◀ Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на множині X, тобто $F'(x) = f(x), x \in X$. Згідно з правилом диференціювання складеної функції $F(\varphi(t))$ на множині T, одержимо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), t \in T.$$

Отже, функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має на множині T первісну $F(\varphi(t))$, а тому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5}$$

Оскільки $F(\varphi(t))+C = F(x)+C = \int f(x)dx$, то з рівності (5) одержимо формулу (4). Рівність (4) називається **формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі.** ▶

Часто вигідніше формулу заміни змінної використовувати в іншому вигляді.

Якщо нам треба обчислити інтеграл

$$\int f(x)dx,$$

то інколи вдається вибрати таку нову змінну $t = \varphi(x)$, що

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), x \in X,$$

причому $\int g(t)dt = G(t) + C, t \in T$.

Тоді

$$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

◀ Зробимо заміну змінної $t = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, або $x = t^2$. Тоді $dx = 2tdt$ і наш інтеграл набуде вигляду

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{t2tdt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C, \quad x \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos 2x dx$.

◀ Маємо

$$\int \cos 2x dx = \begin{vmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2} dx$.

◀ Тут зручно зробити тригонометричну заміну $x = 2\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$. Тоді $4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4(1 - \sin^2 t) = 4\cos^2 t$, $dx = 2\cos t dt$, а тому

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 2\int 2\cos^2 t dt.$$

Оскільки $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$, то

$$\int \sqrt{4 - x^2} = 2\int (1 + \cos 2t) dt = 2(\int dt + \int \cos 2t dt) =$$

$$= 2(t + \frac{\sin 2t}{2}) + C = 2t + \sin 2t + C.$$

Для того щоб знайти остаточну відповідь, яка виражає невизначений інтеграл через змінну x, виразимо t з формули заміни змінної через x. Маємо $t = \arcsin\dfrac{x}{2}$, а

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}.$$

Тому

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2} + C, \quad x \in [-2; 2]. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x + a}$.

◀ Зробивши очевидну заміну, отримаємо

$$\int \frac{dx}{x + a} = \begin{vmatrix} t = x + a \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} + C = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|x+a| + C, \ x \neq -a. \quad \blacktriangleright$$

1.2.2. Інтегрування частинами.

Теорема 2. *Нехай функції u і v визначені й диференційовні на проміжку X і нехай функція $u'(x)v(x)$ має первісну на цьому проміжку. Тоді на проміжку X функція $u(x)v'(x)$ також має первісну і правильна рівність*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \tag{6}$$

◀ З рівності

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

випливає, що

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad x \in X. \tag{7}$$

Первісною для функції $(u(x)v(x))'$ на проміжку X є функція $u(x)v(x)$, а функція $u'(x)v(x)$ має первісну на X згідно з умовою теореми. Тому і функція $u(x)v'(x)$ має первісну на X. Інтегруючи рівність (7), дістаємо формулу (6). ▶

Формулу (6) називають **формулою інтегрування частинами**. Вона дозволяє звести знаходження інтеграла $\int u(x)v'(x)dx$ до знаходження інтеграла $\int u'(x)v(x)dx$, який є простішим.

Оскільки $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то формулу (6) можна записати у вигляді

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{7'}$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

◀ Маємо

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, \ du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3dx, \ v = \displaystyle\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4}(\ln x - \frac{1}{4}) + C, \quad x > 0. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

◀ Зробимо очевидні перетворення

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x, du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Інколи для знаходження інтеграла метод інтегрування частинами доводиться застосовувати неодноразово.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.

◀ Проінтегрувавши два рази частинами, одержимо

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2, du = 2x dx, \\ dv = \cos x dx, v = \displaystyle\int \cos x dx = \sin x + 0 \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = x, du = dx, \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2(-x\cos x -$$

$$- \int (-\cos x) dx) = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C,$$

$$x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int e^{ax} \cos bx dx$.

◀ Проінтегрувавши два рази частинами, одержимо рівняння для визначення цього інтеграла.

Нехай $I = \displaystyle\int e^{ax} \cos bx dx$. Тоді

$$I = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos bx dx, & v = \dfrac{\sin bx}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b} \sin bx e^{ax} -$$

$$-\frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx \\ dv = \sin bx dx, & v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{array} \right| = \frac{\sin bx}{b} e^{ax} -$$

$$-\frac{a}{b}\Big(- \frac{\cos bx}{b} e^{ax} + \frac{a}{b} \int \cos bx e^{ax} dx \Big) = \frac{\sin bx}{b} e^{ax} + \frac{a}{b^2} \cos bx e^{ax} - \frac{a^2}{b^2} I.$$

Звідси випливає, що

$$\Big(1 + \frac{a^2}{b^2}\Big) I = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{b^2} + C$$

або

$$I = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогічно знаходиться й інтеграл $\int e^{ax} \sin bx dx$. ►

Зауваження. Метод інтегрування частинами застосовується при знаходженні невизначених інтегралів таких типів:

1) $\displaystyle\int P_n(x) e^{ax} dx$; $\displaystyle\int P_n(x) \sin bx dx$; $\int P_n(x) \cos bx dx$; (8)

2) $\int P_n(x) \ln x dx$; $\int P_n(x) \arcsin x dx$; $\int P_n(x) \arccos x dx$;

$\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$; $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$, (9)

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня.

Застосовуючи формулу $(7')$ до інтегралів вигляду (8), за u треба брати $P_n(x)$ а за dv – інші частини підінтегрального виразу. Оскільки кожне інтегрування частинами знижує степінь многочлена $P_n(x)$ на одиницю, то треба застосовувати формулу $(7')$ n разів. При знаходженні інтегралів групи (9) за u слід брати відповідно $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за dv – вираз $P_n(x)dx$.

1.3. Інтегрування деяких класів функцій.

1.3.1. Інтегрування раціональних функцій. Відношення двох алгебраїчних многочленів

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$, $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$, $a_m \neq 0$; $b_n \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, називається **раціональною функцією** або **раціональним дробом**. Якщо $m < n$, то раціональний дріб називається **правильним**. У випадку, коли $m \geq n$ дріб називається **неправильним**. Нехай треба знайти невизначений інтеграл від раціональної функції $f(x), x \in X$. Якщо $m \geq n$, то, поділивши чисельник на знаменник, виділимо у функції f цілу частину:

$$f(x) = W(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}, \quad m_1 < n,$$

де $W(x)$ – многочлен степеня $m-n$. Оскільки інтегрувати многочлен ми вміємо, то все звелося до інтегрування правильного дробу.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$.

◀ Очевидно, що $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ є неправильним дробом, тому виділимо цілу частину:

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx = \int (x + \frac{1}{x^2+1})dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Отже, можна вважати, що раціональна функція f зображена у вигляді правильного дробу. У курсі алгебри доводиться, що всякий правильний дріб можна подати у вигляді суми найпростіших дробів вигляду

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

де $\{k, m\} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, A, B, C, a, p, q – дійсні числа, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+4}{x^3-4x}dx$.

◀ Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники $x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$. Тоді згідно з викладеним вище правильний дріб можна подати у вигляді

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, скориставшись **методом невизначених коефіцієнтів**. Для цього зведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$x^2+4 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Зауважимо, що у кожного доданку правої частини відсутній один множник, тому при підстановці коренів знаменника всі доданки правої частини, крім одного, перетворюються в нуль:

$$\begin{array}{lll} x=0: & 4 = A(-2)\cdot 2, & A=-1; \\ x=2: & 8 = B\cdot 4, & B=1; \\ x=-2: & 8 = C(-8)\cdot(-4); & C=1. \end{array}$$

Отже, шуканий розклад підінтегральної функції на найпростіші дроби має вигляд

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}.$$

Тому інтеграл зображається у вигляді суми інтегралів, які легко знаходяться:

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-4x}dx = -\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x+2} = -\ln|x| + \ln|x-2| +$$

$$+\ln|x+2| + C = \ln\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{x^2-4}{x}\right| + C,$$

$$x \neq 0, \quad x \neq \pm 2. \quad ▶$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

◀ Підінтегральна функція $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ є правильним раціональним дробом і її розклад на найпростіші дроби має вигляд:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Звівши дроби у правій частині до спільного знаменника, і прирівнявши чисельники дробів в обох частинах рівності, одержимо

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x.$$

У цьому випадку маємо лише один дійсний корінь знаменника $x = 0$, що досить для знаходження тільки коефіцієнта A. Якщо $x = 0$, то $1 = A$, тобто $A = 1$. Для знаходження решти коефіцієнтів розкриємо дужки в правій частині рівності й запишемо її у вигляді многочлена:

$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах, дістанемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & 0 = A+B, \\ x^3 & 0 = C, \\ x^2 & 0 = 2A+B+D, \\ x^1 & 0 = C+E, \\ x^0 & 1 = A. \end{array}$$

Звідси знаходимо, що $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$. Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$$

Другий і третій інтеграли знаходимо за допомогою заміни змінної $t = x^2+1, dt = 2xdx$:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Остаточно одержимо, що

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C, x \neq 0. \ \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

◀ Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Зведемо дроби у правій частині до спільного знаменника й прирівняємо чисельники дробів в обох частинах рівності

$$2x^3+4x^2+x+2 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) +$$

$$+(Cx+D)(x-1)^2 :$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 2 = A + C, \\ x^2 & 4 = B + D - 2C, \\ x^1 & 1 = B + C - 2D, \\ x^0 & 2 = -A + B + D. \end{array}$$

Звідси знаходимо $A = 2, B = 3, C = 0, D = 1$. Тому

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Отже,

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} +$$

$$+\int \frac{dx}{x^2+x+1} = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad x \neq 1. \quad ▶$$

1.3.2. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx, \tag{10}$$

де $R(x,y)$ – раціональна функція, тобто многочлен або відношення многочленів змінних x і y; a, b, c, d – дійсні числа такі, що $ad-bc\neq 0$, n – натуральне число, яке не дорівнює одиниці.

При обчисленні інтеграла (10) корисна підстановка

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

яка раціоналізує підінтегральний вираз.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

◀ Нехай

$$t=\sqrt[3]{x+1}.$$

Тоді $x=t^3-1$, $dx=3t^2dt$ а тому інтеграл набуде вигляду

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{(t^3-1)3t^2dt}{t}=3(\int t^4dt-\int tdt)=$$

$$=3(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2})+C=\frac{3}{5}(\sqrt[3]{x+1})^5-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+1})^2+C,x\neq -1.\ ▶$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

◀ Зробимо заміну, яка дозволить позбутися ірраціональності в підінтегральній функції. Маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{matrix}t=\sqrt[6]{x},x=t^6,\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=$$

$$=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1}{t+1}dt-$$

$$-6\int\frac{dt}{t+1}=6\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{dt}{t+1}=6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t)-6\ln|t+1|+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C,x>0.\quad ▶$$

1.3.3. Інтегрування квадратичних ірраціональностей. Вираз вигляду

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}),$$

де $R(x, y)$ – раціональна функція змінних x та y, a, b, c – дійсні числа, називають **квадратичною ірраціональністю**. Інтеграл від квадратичної ірраціональності

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$$

знаходиться за допомогою підстановок Ейлера: 1) якщо $a > 0$ і рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має дійсних коренів, то робимо заміну

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a};$$

2) якщо ж $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то ефективною є підстановка

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$.

◀ Оскільки рівняння $x^2 - 6x + 13 = 0$ не має дійсних коренів, то треба зробити підстановку

$$t = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + x.$$

Тоді $(t - x)^2 = (\sqrt{x^2 - 6x + 13})^2$ або $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 6x + 13$. Звідси випливає, що $x = \frac{t^2 - 13}{2t - 6}$, $dx = \frac{1}{2}\frac{t^2-6t+13}{(t-3)^2}dt$, $\sqrt{x^2 - 6x + 13} = \frac{t^2 - 6t + 13}{2(t - 3)}$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 - 6t + 13}{(t - 3)^2}\frac{2(t - 3)}{t^2 - 6t + 13}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t - 3} = \ln|t-3| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - 6x + 13} - 3| + C,\ x \in \mathbb{R}.$$ ▶

Зауваження. Часто інтеграл від найпростішої квадратичної ірраціональності

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

за допомогою виділення в квадратному тричлені ax^2+bx+c повного квадрата зводять до одного з трьох табличних інтегралів

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ або } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$$

◀ Маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{d(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})}{\sqrt{1-(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})^2}} =$$

$$= \left| t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C =$$

$$= \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C,\ x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right).$$ ▶

1.3.4. Інтегрування тригонометричних функцій. У застосуваннях важливе значення мають інтеграли вигляду

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \tag{11}$$

де $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+$. Розрізняють два випадки: 1) принаймні один з показників m чи n непарне число; 2) обидва показники m і n парні числа.

У першому випадку інтеграл (11) знаходиться безпосередньо, якщо відщепити від непарного степеня один множник і виразити за допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парний степінь, який залишився, через другу функцію (приклад 9).

У другому випадку для знаходження інтеграла (11) використовують формули зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

◀ Маємо перший випадок. Тоді

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d\cos x = -\int (\cos^2 x - \cos^4 x) d\cos x =$$

$$= -\int \cos^2 x d\cos x + \int \cos^4 x d\cos x = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C,$$

$$x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

◀ Подамо інтеграл у вигляді

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

При знаходженні інтегралів вигляду

$$\int \sin mx \sin nx dx; \quad \int \cos mx \cos nx dx; \quad \int \sin mx \cos nx dx$$

використовують тригонометричні формули

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \sin x \sin 5x dx$.

◀ Очевидно, що

$$\int \sin x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{12}$$

де $R(x, y)$ – раціональна функція змінних x і y, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою **універсальної тригонометричної підстановки** $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

Оскільки

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Крім того, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, а тому

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Останній інтеграл виражається через елементарні функції, тому й інтеграл (12) зводиться до елементарних функцій.

Приклад 12. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$$

◀ Підінтегральна функція раціонально залежить від $\sin x$ і $\cos x$, а тому зробимо підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$. Тоді

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C. \quad ▶$$

Універсальна підстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, у багатьох випадках приводить до складних обчислень, бо при її застосуванні $\sin x$ і $\cos x$ виражаються через t у вигляді раціональних дробів, що містять t^2.

У деяких частинних випадках знаходження інтегралів вигляду (12) можна значно спростити.

1). Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл (12) раціоналізується підстановкою $t = \cos x$.

2) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл (12) раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sin x$.

3) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – парна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то зручно зробити підстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 13. Знайти інтеграл

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}.$$

◀ Оскільки підінтегральна функція непарна відносно синуса, то покладемо $\cos x = t$. Тоді $\sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$,

$dt = -\sin x dx$, а тому

$$\int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x dx}{\cos 2x} = -\int \frac{(1+1-t^2)dt}{2t^2-1} = \int \frac{(t^2-2)dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2t^2-1)-3}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C. \quad ▶$$

Приклад 14. Знайти інтеграл

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}dx.$$

◀ Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, а тому зробимо підстановку $t = \sin x$. Тоді $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos x dx = dt$, а отже,

$$\int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x(1+\sin^2 x)} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2(1+t^2)} =$$

$$= \left|\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right| = \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} - 6\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\,\mathrm{arctg}\, t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\,\mathrm{arctg} \sin x + C. \quad ▶$$

Приклад 15. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}.$$

◀ Оскільки підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$, то зробимо заміну $t = \mathrm{tg}\, x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, а тому

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1-\frac{5t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-4t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t^2)-1} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right| + C = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}\, x-1}{2\,\mathrm{tg}\, x+1}\right| + C. \quad ▶$$

Вправи

1. Знайти інтеграл: 1)$\int x\sqrt{x}dx$; 2) $\int(2x^4 - 6x^5 + 3x^2 + 7)dx$; 3) $\int \frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2dx$; 5) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$; 6) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 7) $\int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}dx$; 8) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; 9)$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$; 10) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 11) $\int \mathrm{tg}\, x dx$; 12) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 13) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$; 14) $\int 3^{x^3}x^2dx$; 15) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$.

2. Гранична ціна проданої продукції визначається формулою $C'(x) = x + 100$, де x – обсяг цієї продукції. Знайти сукупну ціну проданої продукції, якщо ціна 100 одиниць продукції дорівнює 40000 грн?

3. Знайти функцію споживання f, якщо гранична схильність до споживання виражається рівністю $f'(x) = 0,5 + \frac{0,1}{\sqrt{x}}$ де x – національний доход, а споживання становить 85 гр.од., коли національний доход дорівнює 100 гр.од.

4. Використовуючи формулу заміни змінної, знайти інтеграл: 1) $\int \frac{1}{cos^2 5x}dx$; 2) $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$; 3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$; 5) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$; 6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$; 7) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

5. Застосовуючи інтегрування частинами, знайти інтеграл:

1) $\int x^2\cos x dx$; 2) $\int x2^{-x}dx$; 3) $\int \arcsin x dx$; 4) $\int (\ln x)^2 dx$; 5) $\int x(\mathrm{arctg}\, x)^2dx$; 6) $\int \cos(\ln x)dx$; 7) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

6. Знайти інтеграл від раціональної функції:

1) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; 3) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}dx$; 5) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}dx$; 6) $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$; 7) $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}dx$.

7. Знайти інтеграл від ірраціональної функції:

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 5) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$;
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

8. Знайти інтеграл від тригонометричної функції:
1) $\int (1+2\cos x)^2 dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 3) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;
4) $\int \sin 3x \sin 5x dx$; 5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; 6) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;
7) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; 8) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$; 9) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x}$;
10) $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x$; 11) $\int \cos^{\frac{3}{5}} x \sin^3 x dx$.

9. Популяція комах збільшується від початкового розміру 10000 осіб до чисельності $p(t)$ через t днів. Відомо, що швидкість росту популяції $p'(t) = t + t^2$. Якою буде чисельність популяції через: 1) 1 день; 2) 5 днів; 3) 10 днів.

Відповіді

1. 1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{2}{5}x^5 - x^6 + x^3 + 7x + C$; 3) $\frac{2}{7}x^3\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}+C$; 4) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$; 5) $\frac{2x^2-12x-6}{\sqrt[3]{x}}+C$; 6) $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}+C$; 7) $\operatorname{tg} x + C$; 8) $3x - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{1}{\ln 3/2}+C$; 9) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$; 10) $\frac{1}{\cos x}+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$; 12) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$; 13) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$; 14) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3}+C$; 15) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + C$.

2. $C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25000$.

3. $f(x) = 0,5x + 0,2\sqrt{x} + 33$.

4. 1) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 2) $-\frac{1}{8}(5-6x)^{4/3}+C$; 3) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}} + C$; 5) $2\left(\frac{1}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - \sqrt{e^x+1}\right)+C$; 6) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$; 7) $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C$.

5. 1) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$; 2) $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$; 3) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$; 4) $x((\ln|x|-1)^2+1)+C$; 5) $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + x\operatorname{arctg} x +$

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 6) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$; 7) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x\right)+C$.

6. 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{C(x-3)}$; 2) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C$; 4) $-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 5) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$; 6) $\ln\frac{Cx^3(x-1)}{x+1}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$.

7. 1) $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$; 2) $2\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$; 3) $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$; 4) $x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C$; 5) $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$; 6) $2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$; 7) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$.

8. 1) $3x+4\sin x+\sin 2x+C$; 2) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$; 3) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$; 4) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 5) $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$; 6) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$; 7) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$; 8) $\frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$; 9) $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$; 10) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}-\frac{2}{7}\sqrt{\sin^7 x}+C$; 11) $-\frac{8}{5}\sqrt[5]{\cos^8 x}+\frac{5}{18}\sqrt[5]{\cos^{18} x}+C$.

9. 1) ≈ 10001; 2) ≈ 10054; 3) ≈ 10383.

§2. Визначений інтеграл

2.1. Поняття визначеного інтеграла та його основні властивості. Нехай функція f визначена й неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a < b$, а F – деяка її первісна, тобто $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$. Пізніше буде доведено, що для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції завжди існує первісна.

Визначеним інтегралом

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

від неперервної функції f на відрізку $[a;b]$ називається різниця значень первісної F для функції f у точках b та a, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Числа a і b називають відповідно **нижньою і верхньою межею** інтегрування, а відрізок $[a;b]$ – **проміжком інтегрування**. Формулу (2) називають **формулою Ньютона-Лейбніца**. При $a = b$ вважають, що

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Різницю $F(b) - F(a)$ коротко записують так: $F(x)|_a^b$. Тому формулу (2) часто подають у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b. \tag{2'}$$

У формулі (2) F – це деяка первісна для функції f на відрізку $[a;b]$. Доведемо, що визначений інтеграл не залежить від того, яку первісну для підінтегральної функції f взято у формулі (2). Нехай F і Φ – дві різні первісні функції для f на відрізку $[a;b]$. Згідно з основною властивістю первісних $\Phi(x) = F(x) + C, x \in [a;b]$. Звідси випливає, що

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

тобто ця різниця не залежить від C.

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_2^4 x^2 dx$.

◄ Маємо, що $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, а тому

$$\int\limits_2^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{1}{3}(64-8) = \frac{56}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_1^2 e^{2x} dx$.

◄ Оскільки

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C,$$

то

$$\int\limits_1^2 e^{2x} dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{e^2}{2}(e^2 - 1). \quad \blacktriangleright$$

Розглянемо основні властивості визначеного інтеграла.

Властивість 1. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю, тобто*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

◄ Ця властивість міститься в означенні визначеного інтеграла. У той же час її можна одержати з формули Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Властивість 2. *Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \tag{3}$$

◀ Оскільки $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$ і $F'(t) = f(t)$, $t \in [a;b]$, то $F(x)|_a^b = F(t)|_a^b$. Звідси випливає (3). ▶

Властивість 3. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто*

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

◀ Нехай $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;b]$. Тоді $(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, тобто $AF(x)$ є первісною для $Af(x)$ на $[a;b]$. Тому

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)|_a^b = A(F(b) - F(a)) = A\int_a^b f(x)dx. \ ▶$$

Властивість 4. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій, тобто*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

◀ Якщо $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $x \in [a;b]$, $(F(x) \pm G(x))' = f(x) \pm g(x), x \in [a;b]$. Звідси випливає, що

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = (F(x) \pm G(x))|_a^b = (F(b) \pm G(b)) -$$

$$-(F(a) \pm G(a)) = (F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 5. *Якщо відрізок інтегрування розбити на частини, то інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі визначених інтегралів по його частинах, тобто якщо* $c \in [a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Оскільки $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$, то $\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$, а $\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$. Додавши ці інтеграли, одержимо

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 6. *При перестановці меж інтегрування абсолютна величина визначеного інтеграла не змінюється, а змінюється лише його знак, тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Нехай $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$. Тоді $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$. $\blacktriangleright$

Властивість 7 (теорема про середнє). *Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку довжини* *відрізка інтегрування на значення підінтегральної функції у певній точці ξ всередині його, тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a;b).$$

◀ Згідно з теоремою Лагранжа $F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a), \xi \in (a;b)$, тому $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = f(\xi)(b-a)$. ▶

Властивість 8. *Якщо $a < b$, а $f(x)$ – неперервна і $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a;b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

◀ Скориставшись властивістю 7, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 9. *Якщо $a < b$, а функції f і g неперервні на $[a;b]$ і, крім того, $f(x) \leq g(x), x \in [a;b]$, то*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

◀ Оскільки $g(x) - f(x) \geq 0, x \in [a;b]$, то згідно з властивостями 4 і 8

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

звідки й випливає властивість 9. ▶

Властивість 10. *Нехай* m *– найменше, а* M *– найбільше значення неперервної функції* f *на* $[a;b]$. *Тоді правильна подвійна нерівність*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

◀ Ця властивість випливає з того, що $m \le f(x) \le M, x \in [a;b]$, властивості 9 і рівності $\int\limits_a^b dx = b-a$. ▶

Властивість 11. *Якщо* $a < b$, *а функція* f *неперервна на* $[a;b]$, *то правильна нерівність*

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

◀ Функція $|f(x)|$ є неперервною на $[a;b]$, як складена функція. Тому обидва інтеграли в нерівності існують.

Нехай

$$f_+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}, \quad x \in [a;b].$$

Ці функції є неперервними і невід'ємними на $[a;b]$. Очевидно, що $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, $x \in [a;b]$. Тому

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)dx\Big| = \Big|\int\limits_a^b (f_+(x) - f_-(x))dx\Big| = \Big|\int\limits_a^b f_+(x)dx - \int\limits_a^b f_-(x)dx\Big| \le$$

$$\le \Big|\int\limits_a^b f_+(x)dx\Big| + \Big|\int\limits_a^b f_-(x)dx\Big| = \int\limits_a^b f_+(x)dx + \int\limits_a^b f_-(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b (f_+(x) + f_-(x))dx = \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Отже,

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_1^2 (\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x})dx$.

◀ Згідно з властивостями 3 і 4

$$\int\limits_1^2 (\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x})dx = 4\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int\limits_1^2 x^4dx + 2\int\limits_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 4\ln x|_1^2 - 5\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 + 2\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1) + \frac{4}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) =$$

$$= 4\ln 2 - 31 + \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = 4\ln 2 - \frac{97}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{2}. \quad \blacktriangleright$$

2.2. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Нехай f – неперервна на $[a;b]$, а F – її первісна. Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), x \in [a;b].$$

Якщо змінювати x, то змінюватиметься і цей інтеграл, тобто він є функцією від x, визначеною на $[a;b]$, яку ми позначимо через $\Phi(x)$. Отже,

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad x \in [a;b]. \tag{5}$$

Інтеграл (5) називається **інтегралом із змінною верхньою межею**.

Теорема 1. *Якщо функція f неперервна на $[a;b]$, то інтеграл із змінною верхньою межею Φ є диференційовною функцією на $[a;b]$, причому*

$$\Phi'(x) = f(x), \quad x \in [a;b]. \tag{6}$$

◀ Маємо

$$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - 0 =$$

$$= f(x), x \in [a;b]. \quad ▶$$

Рівність (6) означає, що похідна від інтеграла (5) по змінній верхній межі дорівнює значенню неперервної підінтегральної функції у точці верхньої межі.Тому функція $\Phi(x)$ є первісною для неперервної функції f на відрізку $[a;b]$.

Наслідок. *Якщо функція f неперервна на $[a;b]$, то вона має первісну на цьому відрізку.*

2.3. Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами і методом заміни змінної.

2.3.1. Інтегрування частинами.

Теорема 2. *Нехай функції u і v мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, тоді правильна формула*

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu \tag{7}$$

або

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{8}$$

◀ Оскільки функція $u(x)v(x)$ є первісною для функції $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то згідно з формулою

Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = (u(x)v(x))|_a^b.$$

Якщо скористатися властивістю 4 визначеного інтеграла, то одержимо

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))|_a^b, \qquad (9)$$

звідки випливає рівність (8). Згідно з означенням диференціала $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$, а тому з (9) випливає (7). ►

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_e^{e^2} \ln x dx$.

◄ Скористаємося формулою (7):

$$\int_e^{e^2} \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, du = \frac{dx}{x}; \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = (x \ln x)|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{dx}{x} =$$

$$= (x \ln x)|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = (e^2 \ln e^2 - e \ln e) - (e^2 - e) =$$

$$= 2e^2 \ln e - e \ln e - e^2 + e = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2. \quad ►$$

Як і у випадку невизначеного інтеграла, успіх при застосуванні формули (7) залежить від правильного вибору u і dv.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} xsinxdx$.

◄ Маємо

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \sin x dx, v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= (-x \cos x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)dx = (-x \cos x)\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi \cos \pi + 0 \ \cos 0 + \sin \pi - \sin 0 = -\pi(-1) = \pi. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 3x dx$.

◀ Очевидно, що

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 3x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} 3x, du = \frac{3dx}{1+(3x)^2}, \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = (x \operatorname{arctg} 3x)|_0^{\frac{1}{3}} -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x dx}{1+(3x)^2} = (x \operatorname{arctg} 3x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} =$$

$$= (x \operatorname{arctg} 3x)|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2)|_0^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 - 0 \ \operatorname{arctg} 0\right) -$$

$$- \frac{1}{6}(\ln(1 + 9 \ \frac{1}{9}) - \ln(1+0)) = \frac{1}{3} \ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \ln 2 = \frac{1}{12}(\pi - \ln 4). \ \blacktriangleright$$

2.3.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Теорема 3. *Нехай: 1) $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a; b]$; 2) функція $\varphi(t)$ – диференційовна на $[\alpha; \beta]$, причому $\varphi'(t)$ неперервна на цьому відрізку; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді правильна формула*

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \tag{10}$$

◀ Нехай F – деяка первісна для f на $[a; b]$, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in [a; b]$. Тоді, згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [\alpha; \beta].$$

З цієї рівності випливає, що функція $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, яка неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

З цієї рівності й випливає правильність формули (10). ►

Формулу (10) називають **формулою заміни змінної** або **підстановки у визначеному інтегралі**.

Зазначимо, що при обчисленні визначеного інтеграла за допомогою заміни змінної не треба повертатися до старої змінної, як при знаходженні невизначеного інтеграла, оскільки визначений інтеграл це число, яке, згідно з формулою (10), дорівнює значенню кожного з інтегралів. При заміні змінної у визначеному інтегралі треба знайти нові межі інтегрування та виконати необхідні перетворення підінтегрального виразу.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$.

◄ Оскільки умови теореми 3 виконуються, то

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx, \end{array} \begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{1}^{0} t^3 dt = \int_{0}^{1} t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}. \ ►$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

◄ Для того щоб позбутися ірраціональності, зробимо заміну змінної $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $\begin{array}{c|cc} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}$. Умови теореми 3 виконуються, а тому

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \int\limits_2^3 \frac{t2tdt}{t-1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\left(\int\limits_2^3 (t+1)dt + \int\limits_2^3 \frac{dt}{t-1}\right) = 2\left((\frac{t^2}{2}+t)|_2^3 + \ln(t-1)|_2^3\right) =$$

$$= 2\left(\frac{9}{2}+3-2-2+\ln 2-\ln 1\right) = 2\left(\frac{9}{2}-1+\ln 2\right) =$$

$$= 2\left(\frac{7}{2}+\ln 2\right) = 7+2\ln 2. \quad \blacktriangleright$$

2.4. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Розглянемо інший, ніж ми вивчили раніше, підхід до введення визначеного інтеграла і встановимо зв'язок між обома підходами. Нехай функція $y = f(x)$ визначена й неперервна на $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. Позначимо через Δx_i довжину відрізка $[x_{i-1};x_i]$ тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Візьмемо на $[x_{i-1};x_i]$ довільну точку ξ_i і складемо суму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

або

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{11}$$

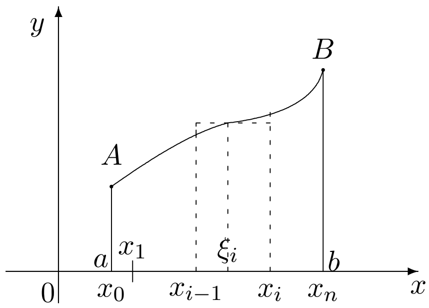
Цю суму називають **інтегральною сумою для функції f, що відповідає взятому розбиттю сегмента $[a;b]$ на частини і даному вибору точки $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.**

Якщо існує скінченна границя σ при $\Delta \equiv \max \Delta x_i \to 0$ і не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини і вибору точок ξ_i, то її називають **визначеним інтегралом від функції** f **на** $[a;b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже,

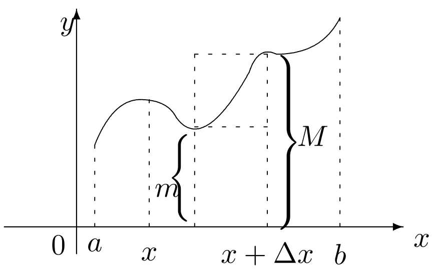
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (12)$$

Нехай $f(x)\geq 0, x\in[a;b]$. Розглянемо фігуру, яка обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, знизу – відрізком $[a;b]$, з боків – прямими $x=a$ і $x=b$. Така фігура називається **криволінійною трапецією**.



Очевидно, що площа криволінійної трапеції дорівнює наближено інтегральній сумі σ, бо кожну елементарну криволінійну трапецію з основою $[x_{i-1},x_i]$ можна замінити прямокутником з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, площа якого $f(\xi_i)\Delta x_i$. З іншого боку, якщо ми розглянемо криволінійну трапецію з основою $[a;x]$ і позначимо її площу через $S(x)$, то, надавши x приросту Δx, одержимо, що $S(x)$ набуде приросту

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x).$$



Якщо $M = \max\limits_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$, $m = \min\limits_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$, то $m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x$.

Тоді

$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M.$$

Нехай $\Delta x \to 0$, тоді m і M прямують до $f(x)$, а тому

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

тобто $S'(x) = f(x)$, $x \in [a;b]$. Отже, змінна площа $S(x)$ є однією із первісних для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Тому

$$S(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \tag{13}$$

бо $S(a) = 0$.

Якщо $x = b$, то з (13) одержимо, що площа усієї криволінійної трапеції

$$S = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Оскільки інтеграл із змінною верхньою межею $\int\limits_a^x f(t)dt$ від неперервної на $[a;b]$ функції f є однією із первісних для неї, то будь-яка інша первісна $F(x)$ записується у вигляді

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C. \tag{14}$$

Якщо підставити в (14) $x = a$ і $x = b$, то дістанемо, що $C = F(a)$ і

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

тобто формулу Ньютона-Лейбніца. Отже, обидва означення визначеного інтеграла є еквівалентними.

2.5. Невласні інтеграли. При означенні інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

припускалося, що: 1) проміжок інтегрування $[a; b]$ скінченний; 2) підінтегральна функція f визначена і неперервна на $[a; b]$. Такий інтеграл часто називають **власним**. Якщо ж порушується хоча б одна з цих умов, то символ (1) називають **невласним визначеним інтегралом**.

З'ясуємо зміст цього нового поняття для двох найпростіших випадків.

2.5.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування. Нехай функція f неперервна на проміжку $[a; +\infty)$. Тоді вона інтегровна на кожному скінченному проміжку $[a; b] \subset [a; +\infty)$, тобто існує інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

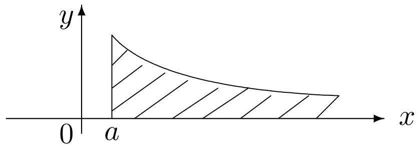
Під **невласним інтегралом**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{15}$$

розумітимемо границю

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{16}$$

Якщо границя в (16) існує і є скінченною, то невласний інтеграл (15) називається **збіжним** і його значення визначається формулою (16). Якщо ж ця границя не існує або є нескінченною, то рівність (16) втрачає зміст, а невласний інтеграл називається **розбіжним** і йому не надають жодного числового значення. Якщо f невід'ємна на $[a;+\infty)$, то невласний інтеграл (15) є площою криволінійної фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і прямою $x = a$.



Нехай f має первісну F на $[a;+\infty)$, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;+\infty)$. Тоді

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)).$$

Якщо ввести умовне позначення

$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

то дістанемо для збіжного невласного інтеграла (15) узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

де $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;\infty)$, причому невласний інтеграл збіжний тоді й тільки тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◀ Згідно з означенням

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Аналогічно як у випадку означення (16) можна розглянути невласний інтеграл з іншим нескінченним проміжком інтегрування, а саме:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Можна також розглядати невласний інтеграл з нескінченними нижньою і верхньою межами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Для цього візьмемо довільну точку c. Вона розіб'є числову вісь на дві півосі $(-\infty; c]$ і $(c; +\infty)$. Якщо існують невласні інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, то кажуть, що існує й невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. У цьому випадку покладають

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Можна довести, що величина $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ не залежить від вибору точки c.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◀ Маємо

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b} - 2) = \infty.$$

Отже, інтеграл розбігається. ▶

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◄ Оскільки $\int\limits_0^{+\infty} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2b}{2}$, то інтеграл розбігається, бо ця границя не існує. ►

2.5.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій. Нехай функція f визначена на проміжку $[a;b)$. Точку b називатимемо **особливою**, якщо функція f необмежена в довільному околі цієї точки, але обмежена на будь-якому відрізку, що міститься в $[a;b)$. Нехай функція f неперервна на $[a;b)$, а точка b є особливою. Очевидно, що f інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$, тобто існує інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її беремо за невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції f. Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (17)$$

У цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл (17) **збігається**. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл (17) **розбігається**. Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо ж $x = c$ – єдина внутрішня особлива точка на відрізку

$[a;b]$, то покладаємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{18}$$

за умови, що обидва невласні інтеграли справа збігаються.

Якщо особливих точок на відрізку $[a;b]$ декілька, то відрізок розбивають так, щоб в кожному відрізку розбиття було не більше однієї особливої точки, і використовують рівність (18).

Якщо F – первісна для функції f, то покладемо $F(a+0) = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0+0} F(a+\varepsilon_1)$, $F(b-0) = \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0+0} F(b-\varepsilon_2)$, якщо ці границі скінчені. Тоді аналогом формули Ньютона-Лейбніца для збіжного невласного інтеграла, у якого особливими точками є точки $x = a$ і $x = b$, буде формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0).$$

У випадку неперервної на відрізку $[a;b]$ функції F одержимо формулу, яка за формою повністю збігається з формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{19}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, якщо він існує, або довести його розбіжність.

◀ Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ має єдину особливу точку $x = 0$ на проміжку інтегрування $(0;1]$. Первісною для цієї функції є $F(x) = 2\sqrt{x}$, яка неперервна на цьому проміжку. За формулою (19) маємо:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

Отже, невласний інтеграл збігається і дорівнює 2. ►

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◄ Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має на проміжку інтегрування $(0;1]$ єдину особливу точку $x = 0$. Первісною для неї є $F(x) = \ln x$. Тому маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln x|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+0} (\ln 1 - \ln\varepsilon) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбігається. ►

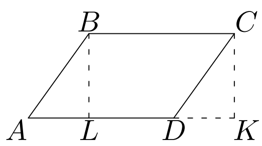
2.6. Застосування визначеного інтеграла.

2.6.1. Обчислення площі плоскої фігури. Розглянемо поняття площі фігури. Під фігурою розумітимемо довільну обмежену множину точок площини. Вважатимемо, що площа фігури повинна задовольняти такі властивості:

1) якщо фігура Ω складається з двох фігур Ω_1 і Ω_2, тобто $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$, причому Ω_1 і Ω_2 не мають спільних внутрішніх точок, то площа $S(\Omega) = S(\Omega_2) + S(\Omega_2)$;

2) якщо фігури Ω_1 і Ω_2 є рівними, тобто при деякому русі суміщаються, то $S(\Omega_1) = S(\Omega_2)$;

3) площа довільного прямокутника зі сторонами a і b дорівнює добутку ab.



Виходячи з цього, вводиться поняття площі широкого класу фігур. Спочатку, маючи паралелограм $ABCD$ побудуємо прямокутник $BCKL$, опустивши з точок B і C перпендикуляри на сторону AD.

Оскільки трикутники ABL і DCK рівні, то $S_{ABCD} = S_{BCKL} = BL \cdot AD$. Отже, площа паралелограма дорівнює добутку його висоти на сторону. Якщо ж маємо довільний трикутник, то, доповнивши його до паралелограма, одержимо, що площа трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту. Оскільки будь-який многокутник є об'єднанням скінченного числа трикутників, то згідно з властивістю 1) його площа дорівнює сумі площ трикутників, які його утворюють.

Нехай Ω – будь-яка плоска фігура. Розглянемо довільні многокутники P і Q такі, що $P \subset \Omega \subset Q$. При цьому вважатимемо, що порожня множина $\emptyset$ є многокутником, площа якого дорівнює нулю, тобто $S(\emptyset) = 0$.

Верхньою площею $S^*(\Omega)$ фігури Ω назвемо число $S^*(\Omega) = \inf\limits_{Q \supset \Omega} S(Q)$. **Нижньою площею** $S_*(\Omega)$ фігури Ω назвемо число $S_*(\Omega) = \sup\limits_{P \subset \Omega} S(P)$.

Фігура Ω називається **квадровною**, тобто такою, що має площу, якщо $S^*(\Omega) = S_*(\Omega)$. Це спільне число називається **площею фігури** Ω і позначається символом $S(\Omega)$.

Доводиться, що для квадровних фігур та їхніх площ правильними є властивості 1) – 3). Клас квадровних фігур є достатньо широким. До нього належать, зокрема, криволінійні трапеції і фігури, які є об'єднанням скінченного числа криволінійних трапецій.

У пункті 2.4 було встановлено, що *визначений інтеграл від неперервної невід'ємної функції* $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ *– це площа криволінійної трапеції* $aABb$ (рис. 1), тобто

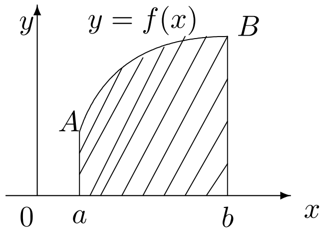


Рис. 1

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (20)$$

Очевидно, що коли $f(x) \le 0$, $x \in [a; b]$, то площа S відповідної криволінійної трапеції знаходиться за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо область обмежена двома неперервними лініями (рис. 2) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і двома прямими $x = a$ і $x = b$, то

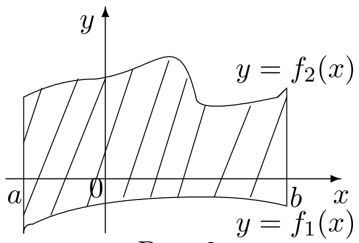


Рис. 2

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

якщо $f_2(x) \geq f_1(x)$, для всіх $x \in [a; b]$.

При цьому умова невід'ємності функцій f_1 і f_2 необов'язкова.

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y - 3 = 0$.

◀ Спочатку побудуємо фігуру, площу якої шукаємо (рис. 3).

Далі знайдемо точки перетину заданих ліній. Маємо $3 - x = x^2 + 1$, звідки $x^2 + x - 2 = 0$, тобто $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Тому межі інтегрування такі: $a = -2$, $b = 1$.

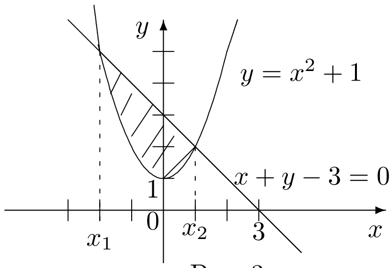


Рис. 3

Отже,

$$S = \int\limits_{-2}^{1} ((3 - x) - (x^2 + 1))dx = \int\limits_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) -$$

$$- \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Верхня половина цієї фігури є криволінійною трапецією, обмеженою прямими $x = -a$, $x = a$, $y = 0$ і графіком неперервної невід'ємної функції $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Тому її площу S_1 можна знайти за формулою (20). Шукана площа $S = 2S_1$, оскільки задана фігура симетрична відносно осі Ox.

Отже,

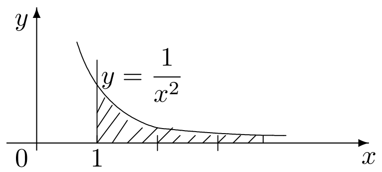
$$S = 2S_1 = 2\frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = a\sin t, & dx = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, & \begin{array}{c|cc} x & -a & a \\ \hline t & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 2\frac{b}{a}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt = ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt = ab\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Якщо $a = b = R$, то задана фігура буде кругом і його площа дорівнює πR^2. ▶

Приклад 3. Знайти площу фігури, яка обмежена кривою $y = \frac{1}{x^2}$, віссю Ox, прямою $x = 1$, і лежить правіше від цієї прямої.



◀ З рисунка видно, що $a = 1$, а $b = \infty$. Тому одержуємо, що

$$S = \int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1. ▶$$

При обчисленні площі криволінійної трапеції у випадку, коли верхня межа задана параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha; \beta],$$

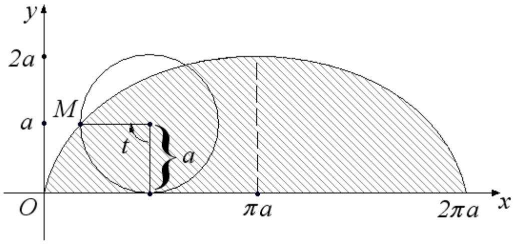
у формулі (20) треба зробити заміну змінної, поклавши $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді одержимо, що

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

де α і β – значення параметра t, що відповідають значенням $x = a$ і $x = b$, тобто $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмеженої одною аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

◀ Маємо



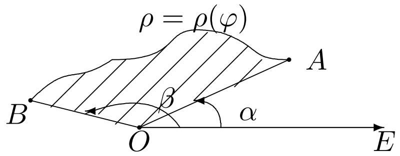
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\Big)dt = a^2 \Big(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \text{ ▶}$$

Нехай крива AB задана в полярних координатах рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha; \beta],$$

причому функція $\rho(\varphi)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Плоску фігуру, обмежену кривою AB і двома полярними радіусами, що утворюють з полярною віссю кути α і β, називатимемо **криволінійним сектором**.

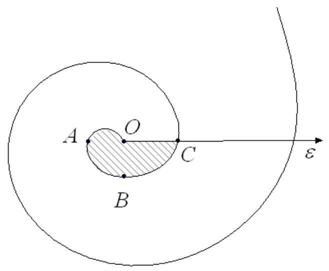


Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої полярною віссю і першим витком **спіралі Архімеда** $\rho = a\varphi$, де $a > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

◀ При зміні φ від 0 до 2π полярний радіус опише криву, яка обмежує криволінійний сектор $OABC$.

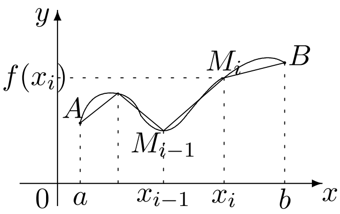


Тому

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2. \blacktriangleright$$

2.6.2. Довжина дуги кривої. Під **довжиною дуги** (лінії або кривої) $\smile{AB}$ розумітимемо границю, до якої прямує довжина ламаної, вписаної в цю дугу, коли число ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої ланки прямує до нуля. Нехай дуга $\smile{AB}$ задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, де f і f' – неперервні на $[a; b]$ функції. Доведемо, що вона має скінченну довжину.



Розіб'ємо дугу $\smile{AB}$ точками $A = M_0$, M_1, …, M_{i-1}, M_i, …, $M_n = B$ на n частин. Нехай координатами точки M_i є x_i й $y_i = f(x_i)$. Тоді довжина ланки $M_{i-1}M_i$ ламаної, вписаної в дугу $\smile{AB}$, дорівнює

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in (x_{i-1}; x_i)$, що випливає з теореми Лагранжа.

Отже,

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Тому довжина всієї ламаної дорівнює

$$l_1 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Вираз справа у цій рівності є інтегральною сумою для функції $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на відрізку $[a; b]$.

Якщо перейти до границі при $\Delta = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i \to 0$, то дістанемо формулу для обчислення довжини дуги $\smile{AB}$:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{21}$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y = x^{3/2}$, якщо $0 \le x \le 5$.

◀ Оскільки $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$, то

$$l = \int\limits_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}dx = \int\limits_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx =$$

$$= \frac{4}{9}\int\limits_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{45}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{335}{27}. \blacktriangleright$$

Якщо дуга $\smile{AB}$ кривої є графіком функції $x = g(y)$, $y \in [c; d]$, то у випадку, коли g і g' – неперервні функції на $[c; d]$, вона має довжину, яка знаходиться за формулою

$$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy.$$

При обчисленні довжини дуги у випадку, коли крива AB задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де α і β – значення параметра t, що відповідають значенням $x = a$ і $x = b$, тобто $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, у формулі (21) треба зробити заміну змінної, поклавши $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. Тоді, отримаємо

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \Big(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big)^2} \varphi'(t) dt =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Приклад 7. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

◀ Із рівняння циклоїди знаходимо $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a \sin t$. Коли x пробігає відрізок $[0; 2\pi a]$, параметр t пробігає відрізок $[0; 2\pi]$. Отже, шукана довжина дуги дорівнює

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= a \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \text{ ▶}$$

Якщо крива AB задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, де $\rho(\varphi)$ має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ і точкам A і B відповідають значення α і β, то перейшовши від полярних координат до прямокутних, дістанемо параметричне задання кривої AB рівняннями $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin\varphi$ з параметром φ. Тоді

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$$

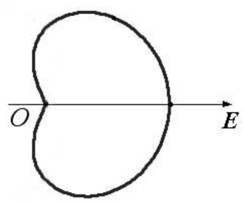
і формула (21) набуде вигляду

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \qquad (22)$$

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах рівнянням $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, a – деяке додатне число, $\varphi \in [0; 2\pi]$.

◄ Для графічного зображення кривої розглянемо декілька точок на ній: $(0; 2a)$, $\left(\frac{\pi}{2}; a\right)$, $(\pi; 0)$. При зміні φ від 0 до π значення ρ зменшується від $2a$ до 0. Оскільки $\cos\varphi$ є парною функцією, то і ρ є парною. Це означає, що лінія симетрична відносно полярної осі.

Отже, маємо криву, що зображена нижче, яка називається **кардіоїдою**. Згідно з формулою (22)



$$l = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)} d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \blacktriangleright$$

2.6.3. Обчислення об'єму тіла за відомим поперечним перерізом. Аналогічно, як раніше було введено поняття площі плоскої фігури, вводиться поняття **об'єму просторового тіла**, тобто обмеженої множини точок простору $\mathbb{R}^3$.

Зі шкільного курсу математики відомо, що об'єм $V(P)$ многокутної призми P дорівнює добутку площі S основи на висоту H, тобто $V(P) = SH$. Розглянемо довільне тіло Ω простору $\mathbb{R}^3$

і многокутні призми P і Q такі, що $P \subset \Omega \subset Q$. **Верхнім об'ємом** $V^*(\Omega)$ називається число $V^*(\Omega) = \inf\limits_{Q \supset \Omega} V(Q)$, а **нижнім об'ємом** $V_*(\Omega) = \sup\limits_{P \subset \Omega} V(P)$. Тіло Ω називається **кубовним**, якщо $V^*(\Omega) = V_*(\Omega)$, а це спільне значення називається **об'ємом** тіла Ω, тобто $V(\Omega) = V^*(\Omega) = V_*(\Omega)$.

Кубовні тіла мають такі властивості:

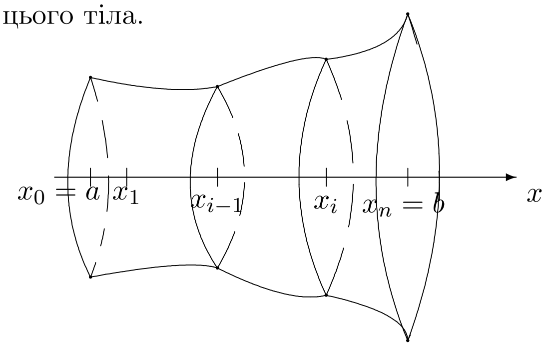
1) якщо Ω_1 і Ω_2 – кубовні тіла, то їхнє об'єднання Ω є так само кубовним, і якщо Ω_1 і Ω_2 не мають спільних внутрішніх точок, то $V(\Omega) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2)$;

2) переріз двох кубовних тіл є кубовним тілом;

3) якщо при русі тіла Ω_1 і Ω_2 збігаються, то їхні об'єми однакові.

Клас кубовних тіл є достатньо широким. Деякі найвживаніші кубовні тіла вивчатимемо нижче.

Розглянемо тіло Ω, площа поперечного перерізу якого є відомою функцією x. Під поперечним перерізом розумітимемо переріз тіла площиною, перпендикулярною осі Ox. Треба знайти об'єм V цього тіла.



Якщо $S(x)$ – площа поперечного перерізу цього тіла в точці x, то вважатимемо її неперервною функцією на $[a; b]$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n частин точками $a = x_0$, x_1, …, $x_n = b$ і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні осі Ox. У результаті тіло розіб'ється на n шарів, кожний з яких можна вважати за циліндр. При цьому важливо, щоб поперечні перерізи тіла містилися один в одному, а не накладалися. Оскільки об'єм i-го шару наближено дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, то для об'єму V дістанемо наближене значення

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i.$$

Справа в цьому виразі маємо інтегральну суму для функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$. Якщо $\Delta \equiv \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_i \to 0$, то одержимо, що

$$V = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Отже, тіло кубовне і

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

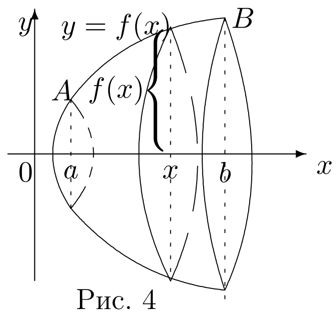


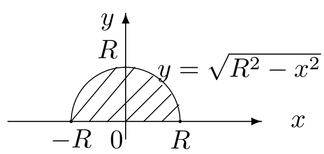
Рис. 4

Розглянемо тепер задачу про знаходження об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 4). Очевидно, що $S(x) = \pi(f(x))^2$.

Тому об'єм тіла обертання

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{23}$$

Приклад 9. Знайти об'єм кулі радіуса R.



◀ Розглянемо кулю як тіло обертання навколо осі Ox півкруга радіуса R з центром в початку координат. Згідно з формулою (23), маємо

$$V = \pi\int\limits_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 10. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ (рис. 5).

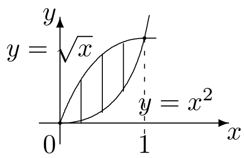


Рис. 5

◀ Шуканий об'єм тіла обертання дорівнює різниці об'ємів, утворених обертанням криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$ (рис. 5).

Межі інтегрування знайдемо, розв'язавши рівняння $\sqrt{x} = x^2$, корені якого $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Згідно з формулою (23)

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}. \blacktriangleright$$

2.6.4. Деякі застосування визначеного інтеграла в прикладних задачах. Наведемо приклади застосування визначеного інтеграла в економіці та природознавстві.

2.6.4.1. В економічних дослідженнях часто розглядають **граничні величини**, тобто для даної величини, визначеною деякою функцією $y = f(x)$, $x \in X$, розглядають її похідну $f'(x)$, $x \in X$. Наприклад, якщо f є функцією витрат, яка залежить від обсягу x товару, то **граничні витрати** визначатимуться похідною $f'(x)$. Її економічний зміст – це витрати на виробництво додаткової одиниці товару. У багатьох випадках треба знаходити функцію витрат за даною функцією граничних витрат.

Приклад 11. Відома функція граничних витрат $f'(x) = 3x^2 - 48x + 202$, $x \in [1; 20]$. Знайти функцію витрат f і обчислити витрати при випуску 10 одиниць товару, якщо витрати на виробництво першої одиниці товару становлять 100 грн.

◀ Функцію витрат знаходимо інтегруванням

$$f(x) = \int_1^x f'(t)dt + C, \quad x \in [1; 20],$$

де стала C визначається з умови $f(1) = 100$. Маємо

$$f(x) = \int_1^x (3t^2 - 48t + 202)dt + C,$$

або

$$f(x) = \left.(t^3 - 24t^2 + 202t)\right|_1^x + C,$$

$$f(x) = (x^3 - 24x^2 + 202x) - (1 - 24 + 202) + C.$$

Оскільки $f(1) = 100$, то звідси одержуємо

$$100 = C,$$

а тому

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 202x - 79, \quad x \in [1; 20].$$

Підставивши $x = 10$ в одержану формулу, знайдемо шукане значення

$$f(10) = 10^3 - 24 \cdot 10^2 + 202 \cdot 10 - 79 = 541 \text{ грн.} ▶$$

2.6.4.2. Розглянемо задачу про **знаходження капіталу** (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Під чистими інвестиціями (капіталовкладеннями) розуміємо сукупні інвестиції, здійснювані в економіці протягом певного проміжку часу (найчастіше року) без інвестицій, які йдуть на заміщення основних фондів (капіталу). Отже, за одиницю часу капітал збільшується на величину чистих інвестицій.

Позначимо капітал на момент часу t через $K(t)$, а чисті інвестиції – через $I(t)$. Тоді описане вище можна записати у вигляді рівності $I(t) = K'(t)$.

Якщо треба знайти приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$, то, скориставшись означенням визначеного інтеграла, матимемо

$$\Delta K = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

Приклад 12. Відомо, що чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 6000\sqrt{t}$. Знайти приріст капіталу за чотири роки.

◄ Маємо $\Delta K = K(4) - K(0) = \int\limits_0^4 6000\sqrt{t}dt = 6000\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_0^4$ $= 6000\frac{2}{3}(4^{3/2} - 0) = 6000\frac{2}{3} \cdot 8 = 32000.$ ►

2.6.4.3. Функцією Коба-Дугласа називається виробнича функція, яка описує залежність обсягу q випуску продукції від витрат капіталу x_1 і витрат трудових ресурсів x_2, яка має вигляд $q = b_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, де b_0 – параметр продуктивності конкретної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

Якщо витрати капіталу сталі, а витрати трудових ресурсів залежать від часу, то функція Коба-Дугласа має, зокрема, вигляд $q(t) = (\alpha t + \beta)e^{\chi t}$, де α, β, χ – параметри задачі. У цьому випадку обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = T$, дорівнює

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\chi t}dt. \qquad (24)$$

Приклад 13. Знайти обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо функція Коба-Дугласа $q(t) = (1 + 2t)e^{3t}$.

◄ Згідно з формулою (24)

$$Q = \int\limits_0^2 (1 + 2t)e^{3t}dt.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$Q = \begin{vmatrix} u = 1 + 2t, du = 2dt \\ dv = e^{3t}dt, v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + 2t)e^{3t}\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\int\limits_0^2 e^{3t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^6 - 1) - \frac{2}{9}e^{3t}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(5e^6 - 1) - \frac{2}{9}e^6 + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{13}{9}e^6 - \frac{1}{9} \approx 851,572 \text{ ум.од.} ▶$$

2.6.4.4. Денний виробіток. Знайти денний виробіток P за восьмигодинний робочий день, якщо продуктивність праці протягом дня змінюється за законом

$$p(t) = -0,2t^2 + 1,6t + 3,$$

де t – час в годинах.

◀ Вважаючи, що продуктивність змінюється протягом дня неперервно, тобто p є неперервною функцією аргументу t на відрізку $[0; 8]$, денний виробіток P виразимо визначеним інтегралом

$$P = \int_0^8 p(t)dt.$$

Отже,

$$P = \int_0^8 (-0,2t^2 + 1,6t + 3)dt = \left(-0,2\frac{t^3}{3} + \frac{1,6t^2}{2} + 3t\right)\Big|_0^8 =$$

$$= -0,2 \cdot \frac{8^3}{3} + 0,8 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 = -34,13 + 51,2 + 24 = 41,07. ▶$$

2.6.4.5. **Знаходження дисконтованої вартості грошового потоку.** За кінцевою величиною K_t грошового потоку у момент часу t треба знайти його початкову величину при відомій відсотковій ставці p.

Якщо відсотки прості, то $K_t = K_0(1 + rt)$, де $r = \dfrac{p}{100}$ – питома відсоткова ставка. Тоді $K_0 = \dfrac{K_t}{1 + rt}$. У випадку складних відсотків $K_t = K_0(1 + rt)^t$ і тому $K_0 = \dfrac{K_t}{(1 + rt)^t}$. При неперервному нарахуванні відсотків кінцева сума $K_t = K_0 e^{rt}$. Якщо суму K_t вважати функцією часу $f(t)$, то дисконтована сума на момент часу t становитиме $K_0 = f(t)e^{-rt}$.

Повна дисконтована сума за час t обчислюється за формулою

$$K_d = \int\limits_0^t f(\tau)e^{-r\tau}d\tau. \qquad (25)$$

Приклад 14. Під будівництво деякого об'єкту виділено неперервний грошовий потік, який визначається функцією $f(t) = -t^2 + 20t + 5$ (мільярд грн./год) протягом 20 років з річною відсотковою ставкою $p = 5\%$ Знайти дисконтовану вартість цього потоку.

◄ Згідно з формулою (25) маємо

$$K_d = \int\limits_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0,05t}dt.$$

Для спрощення обчислень зробимо спочатку заміну змінної

$$\tau = -0,05t, \quad t = -20\tau, \quad dt = -20d\tau, \quad \begin{array}{c|cc} t & 0 & 20 \\ \hline \tau & 0 & -1 \end{array}.$$

Тоді

$$K_d = -20\int\limits_0^{-1}(-400\tau^2-400\tau+5)e^{\tau}d\tau = 20\int\limits_{-1}^{0}(-400\tau^2-400\tau+5)e^{\tau}d\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = -400\tau^2 - 400\tau + 5, du = (-800\tau - 400)d\tau, \\ dv = e^{\tau}d\tau, \qquad v = e^{\tau} \end{array} \right| =$$

$$= 20\left((-400\tau^2 - 400\tau + 5)e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} + \int\limits_{-1}^{0}(800\tau + 400)e^{\tau}d\tau \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = 800\tau + 400, du = 800d\tau, \\ dv = e^{\tau}d\tau, \qquad v = e^{\tau} \end{array} \right| = 20\left(5 - 5e^{-1} + (800\tau + 400)e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-1}^{0} 800e^{\tau}d\tau \right) = 20\left(5 - 5e^{-1} + 400 - (-800 + 400)e^{-1} - 800e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} \right) =$$

$$= 20\left(5-5e^{-1}+400+400e^{-1}-800+800e^{-1}\right) = 20(-395+1195e^{-1}) =$$

$$= 20(-395 + 1195 \cdot 0.3679) = 892,8 \text{ мільярда грн.} \blacktriangleright$$

Якщо грошовий потік є неперервним, наприклад, у випадку експлуатації земельної ділянки, r – неперервна відсоткова ставка, а $f(t)$ – відповідна рента на момент часу t, то дисконтовану вартість земельної ділянки знаходять за формулою

$$K_d = \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-rt}dt.$$

Приклад 15. Нехай $f(t) = 5e^{-0,7t}$ (млн. грн/год) – рента, одержувана від земельної ділянки, $r = 10\%$ – відсоткова ставка. Знайти дисконтовану суму.

$\blacktriangleleft$ Маємо

$$K_d = \int\limits_0^{\infty} 5e^{-0,7t}\ e^{-0,1t}dt = 5\int\limits_0^{\infty} e^{-0,8t}dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} 5\int\limits_0^{b} e^{-0,8t}dt = 5\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{e^{-0,8t}}{-0,8}\right|_0^b\right) =$$

$$= 5\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-0,8b}}{-0,8}+\frac{1}{0,8}\right) = \frac{5}{0,8} = 6,25 \text{ (млн.грн.).} \blacktriangleright$$

2.6.4.6. Нижче наведемо приклади застосування визначеного інтеграла в прикладних задачах.

1) Робота змінної сили. Робота змінної сили f, що діє вздовж осі Ox на відрізку $[a;b]$, виражається інтегралом

$$A = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Приклад 16. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо від навантаження в 1 Н вона розтягується на 1 см?

◀ Згідно з законом Гука, сила fH яка розтягує пружину на x м, дорівнює $f(x) = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови $f(0,01) = 1$ Н, тобто $k0,01 = 1$, звідки $k = 100$. Отже, $f(x) = 100x$. Тому

$$A = \int\limits_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 50\ (0,04)^2 = 0,08 \text{ Дж.} \ ▶$$

Приклад 17. Знайти роботу з відкачування рідини, густина якої ρ, з конічної посудини радіуса R і висоти H (рис. 6).

◀ Виберемо систему координат і розмістимо конічну посудину так, як показано на рис. 6.

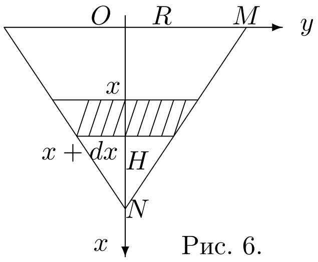


Рис. 6.

Розглянемо шар рідини, який відповідає відрізку $[x; x+dx]$. Робота з підняття цього шару рідини на висоту x дорівнює добутку сили ваги частинки на x, тобто

$$dA = \rho g \pi y^2 x dx.$$

Знайдемо залежність між змінними x і y. Очевидно, що рівняння прямої MN має вигляд

$$\frac{x}{H} + \frac{y}{R} = 1.$$

Тому $y = \dfrac{R}{H}(H - x)$. Тоді

$$dA = \rho g \pi \frac{R^2}{H^2} x (H - x)^2 dx.$$

Проінтегрувавши цей вираз по x від 0 до H, дістанемо

$$A = \rho g \pi \frac{R^2}{H^2} \int\limits_0^H x(H - x)^2 dx = \rho g \pi \frac{R^2}{H^2} \int\limits_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx =$$

$$= \rho g \pi \frac{R^2}{H^2} \left(H^2 \frac{x^2}{2} - 2H \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{1}{12} \pi \rho g R^2 H^2. \quad ▶$$

2) Сила тиску рідини. Нехай пластинку, що має вигляд криволінійної трапеції, занурено вертикально в рідину, густина якої дорівнює ρ (рис. 7).

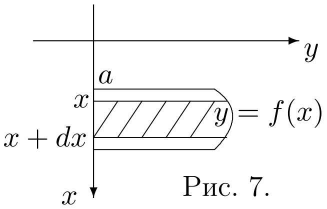


Рис. 7.

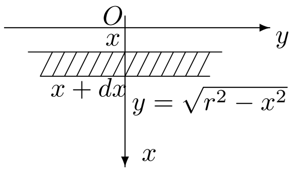
На глибині x виділимо елементарну смугу $dS = ydx$, сила тиску на яку дорівнює вазі стовпчика рідина над нею, якщо смугу розмістити горизонтально, тобто

$$dF = \rho gxydx.$$

Для того щоб дістати силу тиску на всю пластинку, проінтегруємо dF. Тоді

$$F = \rho g \int\limits_a^b xf(x)dx.$$

Приклад 18. Знайти силу тиску води на півкруг радіуса r, який занурено вертикально у воду так, що його діаметр збігається з поверхнею води.



◀ Розіб'ємо півкруг на малі смужки, які паралельні поверхні води. Площа такої смужки, що знаходиться на відстані x від поверхні, дорівнює

$$dS = 2ydx = 2\sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Сила тиску на цей елемент визначається формулою

$$dP = \rho xdS = 2\rho x\sqrt{r^2 - x^2}dx,$$

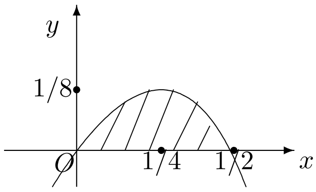
де $\rho = 1$ – питома вага води.

Тоді сила тиску на всю пластинку

$$P = 2\int\limits_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\int\limits_0^r (r^2 - x^2)^{1/2}d(r^2 - x^2) =$$

$$= -\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^2. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 19. Річка тече по долині, утворюючи криву $y = x - 2x^2$. Вважаючи, що вісь Ox – лінія шосе, а одиниця довжини – 1 км, знайти скільки гектарів долини між шосе і річкою.



◀ Нарисуємо частину долини, площу якої треба знайти. Очевидно, що маємо криволінійну трапецію, яка обмежена зверху графіком функції $y = x - 2x^2$, а знизу відрізком $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ осі Ox.

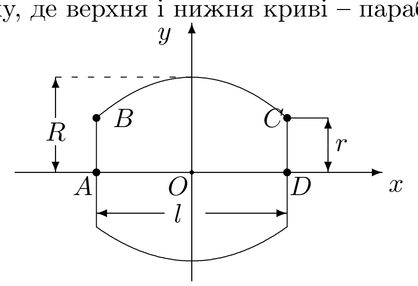
Тоді її площа

$$S = \int\limits_0^{1/2} (x - 2x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{24} \text{ кв. км або } S = \frac{25}{4} \text{ га.} \quad \blacktriangleright$$

Приклад 20. Обчислити об'єм бочки за розмірами перерізу, вказаними на рисунку, де верхня і нижня криві – параболи.



◀ Знайдемо рівняння параболи, яка обмежує зверху криволінійну трапецію $ABCD$. Оскільки віссю симетрії параболи є вісь Oy, то її рівняння має вигляд $y = ax^2 + bx + c$. Коефіцієнти a, b і c знайдемо з умов, що $y(0) = R$, $y(-\frac{l}{2}) = y(\frac{l}{2})$, $y(\frac{l}{2}) = r$. Маємо $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = R$ або $c = R$; $a(-\frac{l}{2})^2 + b(-\frac{l}{2}) + R = a(\frac{l}{2})^2 + b(\frac{l}{2}) + R$ або $b = 0$; $a\cdot(\frac{l}{2})^2 + R = r$ або $a = \frac{4(r-R)}{l^2}$.

Отже, рівняння параболи $y = \frac{4(r-R)}{l^2}x^2 + R$. Тоді

$$V = \pi \int\limits_{-l/2}^{l/2} y^2(x)dx = 2\pi \int\limits_{0}^{l/2} (\frac{4(r-R)}{l^2}x^2 + R)^2 dx =$$

$$= 2\pi(\frac{16(r-R)^2}{l^4}\frac{l^5}{32\cdot 5} + \frac{8(r-R)R}{l^2}\frac{l^3}{8\cdot 3} + R\frac{l}{2}) =$$

$$= \frac{\pi l}{5}(8R^2 + 4Rr + 3r^2). \quad \blacktriangleright$$

Вправи

1. Обчислити визначений інтеграл: 1) $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$; 5) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$; 8) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$; 9) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$; 10) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 11) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$; 12) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx$; 13) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$; 14) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}dx$; 15) $\int\limits_0^1 xe^x dx$; 16) $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1}}$; 17) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x}$; 18) $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$; 19) $\int\limits_0^1 e^{x+e^x} dx$; 20) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}$.

2. Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність: 1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}dx$; 3) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$; 4) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 5) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$; 6) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$; 7) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 8) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 9) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

10) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: 1) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 2) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 3) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$; 4) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y \geq 0$; 5) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$; 6) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = 0$; 7) $y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, $x \in (1; e]$.

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо відповідної осі фігури, обмеженої кривими: 1) $y = 1 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ навколо осі Ox; 2) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox; 3) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$, $y = 2$ навколо осі Oy; 4) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ навколо осі Ox; 5) $y = \sqrt{x}$, $y = x$ навколо осі Ox; 6) $y = e^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$ навколо осі Ox; 7) $y = xe^{-x^2}$, $x > 0$ навколо її асимптоти.

5. Знайти довжину дуги кривої: 1) $y^2 = x^3$, якщо $0 \leq x \leq 5$; 2) $y = 2\sqrt{x^3}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 11$; 3) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0; 1]$; 4) $y = \ln\cos x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$; 5) $y = \ln\sin x$ при $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6. Знайти вартість перевезення M тонн вантажу залізницею на відстань l км за умови, що вартість y перевезення однієї тонни зменшується на a грн. на кожному наступному кілометрі.

7. Чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 7000\sqrt{t}$. Знайти значення t, при якому приріст капіталу складе 50000 грн.

8. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається формулою $f(t) = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$ (гр.од./год.), де t – час від початку роботи, $0 \leq t \leq 8$. Знайти функцію $u(t)$, $t \in [0; 8]$, яка дає обсяг продукції (у вартісному виразі) і його величину за робочий день.

9. Знайти дисконтований доход за три роки, при ставці 8% і початковому вкладі 10 млрд. грн., якщо передбачається збільшувати щорічно капіталовкладення на 1 млрд. грн.

10. Знайти середній час, затрачений на освоєння одного виробу в період становлення виробництва від 100 до 121 виробу, якщо затрати часу на виготовлення виробу визначаються функцією $t = \frac{600}{\sqrt{x}}$, де x – порядковий номер виробу.

11. Виїхавши зі станції електровоз через t год. має прискорення $a(t) = 3t^2 - 42t + 80$ (км/год^2). Знайти швидкість руху і відстань, яку пройде електровоз від станції, через одну год. після виходу.

12. Знайти роботу з викачування води з вертикальної циліндричної бочки, яка має радіус основи R і висоту H.

13. Кількість y електроенергії, що споживається містом, виражається формулою

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t < 6; \\ a + b\sin\dfrac{\pi}{18}(t-6), & \text{якщо } t \geq 6, \end{cases}$$

де t – час доби. Знайти добове споживання електроенергії при $a = 15000$ кВт, $b = 12000$ кВт.

14. Вартість перевезення однієї тонни вантажу на один кілометр (тариф перевезення) задається функцією $f(x) = \dfrac{10}{x+2}$ (гр.од./км). Знайти витрати на перевезення однієї тонни вантажу на відстань 20 км.

15. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 6x^2+4x+1$, виражених у гривнях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 5 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

16. Компанія повинна обрати одну з двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання і одержувати 3 млн. грн. прибутку щорічно протягом 10 років; 2) закупити на 15 млн. грн. досконаліше обладнання, яке дасть змогу одержувати 5 млн. грн. прибутку щороку протягом 7 років. Яку стратегію розвитку слід обрати компанії, якщо мінімальна облікова ставка дорівнює 10 % річних?

17. Нехай $f(t) = 5000e^{0,04t}$ – величина доходного потоку від роботи підприємства. Знайти майбутню вартість цього доходного потоку, якщо відсотки нараховуються неперервно протягом п'яти років при відсотковій ставці 12%.

18. Електропоїзд, вийшовши із залізничної станції, їде з прискоренням $a = f(t)$ де t – час перебування в дорозі. Витрати електроенергії (в КВт/год) на рух електропоїзда задаються формулою $M = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Обчислити витрати електроенергії впродовж перших трьох годин руху, якщо $f(t) = te^{t^2}$.

19. Яку роботу треба виконати для того, щоб тіло масою m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту h? Чому дорівнює робота, коли тіло віддаляється у нескінченність? (Скористатися тим, що сила $F(x) = mg\dfrac{R^2}{x^2}$, де x – відстань маси m від центра Землі, а $A = \int\limits_R^{R+h} F(x)dx$.

Відповіді

1. 1) $\dfrac{21}{8}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\dfrac{17}{6}$; 5) $2-\ln 2$; 6) $e-2$; 7) $\dfrac{\pi^2}{4}-2$; 8) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$; 9) $\ln\dfrac{3}{2}$; 10) $2\ln 2 - 1$; 11) $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} e^2 - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 12) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$; 13) $\dfrac{1}{3}$; 14) $4 - 2\sqrt[4]{8}$; 15) 1; 16) $\dfrac{76}{15}$; 17) $2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}\right)$; 18) $\dfrac{e^{\pi/2}-1}{2}$; 19) $e^e - e$; 20) $\ln 1,5$.

2. 1) розбігається; 2) 1; 3) 1; 4) $6\sqrt[3]{2}$; 5) $\ln 2$; 6) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}$; 7) $\dfrac{17}{6}$; 8) 2; 9) 6; 10) 1.

3. 1) $\dfrac{32}{3}$; 2) $8\ln 2$; 3) 1; 4) $\ln 3$; 5) $\ln 2$; 6) π; 7) 2.

4. 1) $\dfrac{8\pi}{15}$; 2) 12π; 3) $\dfrac{64\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$; 5) $\dfrac{\pi}{6}$; 6) 2π; 7) 2π.

5. 1) $\dfrac{670}{27}$; 2) 74; 3) $\dfrac{e-e^{-1}}{2} \approx 1,17$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln 3$; 5) $\ln 3$.

6. $Ml\left(y - \frac{al}{2}\right)$. **7.** $t_0 = (10,71)^{2/3} \approx 4,86$. **8.** $u(t) = \int\limits_0^t f(\tau d\tau)$, $u(8) \approx 4,533$ гр.од. **9.** $K_d = 30,3$ млрд. грн. ($f(t) = 10 + t$, $r = 0,08$). **10.** $t_{\text{сер}} = \dfrac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, $t_{\text{сер}} = \dfrac{400}{7} \approx 57,2$ хв. **11.** $v = 60$ км/год; $s = 33,25$ км. **12.** $A = \dfrac{\pi\rho}{2}R^2H^2$. Елементарна сила (сила ваги) дорівнює вазі води в об'ємі шару товщиною dx, тобто $dF = \rho\pi R^2 dx$, де ρ – питома вага води. Тоді елементарна робота сили $dA = \rho\pi R^2(H-x)dx$, де x – рівень води. **13.** 797500 кВт.год. **14.** $10\ln 11 \approx 23,98$ гр.од. **15.** $K(\xi) = 61$, $\xi = \dfrac{-1+\sqrt{91}}{3} \approx 2,846$. **16.** $P_1 = 8{,}964$ млн. грн., $P_2 = 10{,}17$ млн.грн.; друга стратегія доцільніша. **17.** 37546,648 грн. **18.** $(e^9 - 1)/2$ кВт.год. **19.** $mg\dfrac{Rh}{R+h}$; mgR.

Розділ 9
Диференціальне числення функцій багатьох змінних

§1. Поняття функції багатьох змінних

До цих пір ми розглядали функції, які залежать від однієї змінної. У цьому розділі ми вивчатимемо функції, які залежать від декількох змінних. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Приклад 1. Площа прямокутника S залежить від довжини його основи x і висоти y, тобто

$$S = xy. \tag{1}$$

Тут ми маємо, що парі $(x; y)$ додатних чисел x і y за формулою (1) відповідає певне значення S.

Приклад 2. Об'єм паралелепіпеда з довжинами ребер x, y і z виражається формулою

$$V = xyz,$$

тобто є функцією трьох змінних.

Нехай Ω – множина пар $(x; y)$ дійсних чисел, тобто множина точок площини $\mathbb{R}^2$, а X – деякий проміжок числової осі.

Якщо кожній парі значень $(x; y) \in \Omega$ ставиться у відповідність одне певне значення $z \in X$, то z називають **функцією двох незалежних змінних x і y** й позначають символом

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in \Omega.$$

Множина Ω називається **областю визначення** функції z, а множина X – **множиною значень** цієї функції. Очевидно, що $X = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), (x; y) \in \Omega\}$.

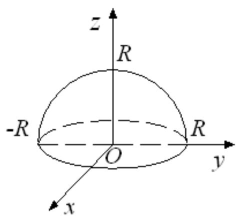
Оскільки кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка $M(x; y)$ площини Oxy, і навпаки, кожній точці $M(x; y)$ відповідає єдина пара чисел $(x; y)$, то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки $M(x; y)$. Тому замість $f(x, y)$ писатимемо $f(M)$. У цьому випадку областю визначення функції є деяка множина точок площини Oxy.

Подібно до того, як функція однієї змінної $y = f(x)$, $x \in X$, геометрично зображується графіком, можна геометрично тлумачити і функцію $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Ставлячи у відповідність кожній точці $(x; y) \in \Omega$ аплікату $z = f(x, y)$, дістанемо деяку сукупність точок $(x; y; z)$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ – найчастіше деяку поверхню. Тому рівність $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$ називають **рівнянням поверхні**. Отже, графіком функції двох змінних називається множина точок простору $\mathbb{R}^3$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x; y; z) : z = f(x, y), (x; y) \in \Omega\}.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, способи задання функції двох змінних є різними: табличний, графічний, аналітичний і словесний. Якщо функція двох змінних задана за допомогою аналітичного виразу без будь-яких додаткових умов, то областю її визначення вважатимемо множину всіх таких точок площини Oxy, для яких цей вираз має зміст і дає дійсне значення функції.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і побудувати її графік.



◀ Оскільки вираз $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ визначений, коли $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, то областю визначення функції є множина точок площини, для яких $x^2 + y^2 \leq R^2$. Маємо круг з центром в точці $(0; 0)$, радіус якого R. Графіком функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ є верхня половина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 1). ▶

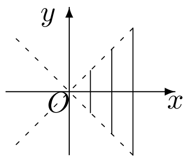
Приклад 4. Знайти область визначення функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$.

◀ Область визначення зданої функції визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y > 0, \end{cases}$$

що рівносильно нерівностям

$$-x < y < x.$$



Отже, область визначення

$\Omega = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -x < y < x\}$, тобто внутрішня частина кута, утвореного бісектрисами координатних кутів $y = -x$ і $y = x$. ►

Очевидно, що графік функції двох змінних складніший об'єкт, ніж графік функції однієї змінної. Крім того, поверхня в просторі володіє меншою наочністю, ніж лінія на площині. Тому у випадку двох змінних бажано використовувати очевидніші зображення. До них належать, зокрема, **лінії рівня**.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, називається множина точок площини, для яких значення функції одне й те саме і дорівнює C, тобто $f(x, y) = C$.

Як правило, лінії рівня, які відповідають різним значенням сталої величини C, проектують на одну площину, наприклад, на координатну площину Oxy. Тоді їх зручніше аналізувати і з їхньою допомогою досліджувати складний характер поверхні, яка описується функцією $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$.

Отже, лінії рівня функції $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, – це сім'я кривих на координатній площині Oxy, що описуються рівнянням

$$f(x, y) = C.$$

Як правило, беруть арифметичну прогресію чисел C_i з різницею h; тоді за взаємним розміщенням ліній рівня можна уявити форму поверхні, яка описується функцією $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Там, де функція змінюється швидше, лінії рівня скупчуються, а там, де поверхня полога, лінії рівня розміщуються рідше.

Лінії рівня застосовуються при зображені на географічних картах гір і впадин.

Приклад 5. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2y$.

◄ Лінія рівня $z = C$ – це крива на площині Oxy, задана рівнянням $x^2 + y^2 - 2y = C$ або $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$. Маємо рівняння кола з центром в точці $(0; 1)$ і радіусом $\sqrt{C+1}$ (рис. 2), якщо $C > -1$.

Точка $(0; 1)$ – вироджена лінія рівня, яка відповідає мінімальному значенню функції z, що досягається в точці $(0; 1)$. Лінії рівня –

концентричні кола, радіуси яких збільшується зі зростанням C, причому відстані між лініями рівня з однаковим кроком зменшуються з віддаленням від центра (рис. 2).

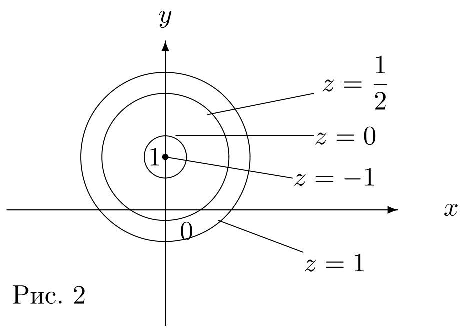


Рис. 2 ►

Ми розглянули детально поняття функції двох змінних та її області визначення. На практиці зустрічаються функції трьох й більшого числа змінних.

Дамо означення функції трьох змінних.

Нехай Ω – множина впорядкованих трійок дійсних чисел $(x;y;z)$, тобто множина точок простору $\mathbb{R}^3$, а X – деякий проміжок числової осі.

Функцією трьох змінних називається правило, за яким кожній трійці $(x;y;z)\in\Omega$ відповідає одне число $u\in X$.

При цьому x, y і z називаються **незалежними змінними (аргументами)**, u – **залежною змінною (функцією)**, множина Ω – **областю визначення** функції, а X – **множина значень** функції, тобто $X=\{u\in\mathbb{R} : u=f(x,y,z),(x;y;z)\in\Omega\}$.

Функції трьох змінних позначаються так само, як і функції однієї або двох змінних: $u=f(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$, де $(x;y;z)\in\Omega$.

Приклад 6. Знайти область визначення функції $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$.

◄ Вираз, яким задана функція, має зміст тоді й тільки тоді, коли $1-x^2-y^2-z^2>0$, або $x^2+y^2+z^2<1$. Отже, областю визначення функції є внутрішність кулі (відкрита куля) одиничного радіуса з центром в початку координат. ►

Аналогічно можна ввести поняття функції n змінних.

Областю визначення функції n змінних є деяка множина

Ω, яка складається з сукупностей $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ дійсних чисел. Позначення функції n змінних аналогічні позначенням функції двох і трьох змінних: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для збереження геометричної термінології, функцію n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n > 3$ також розглядатимемо як функцію точки $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$ і позначатимемо символом $u = f(x)$, $x \in \Omega$.

§2. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції. Точки розриву

При вивченні границі функції однієї змінної $y = f(x)$ було введено поняття околу точки x_0. Під околом точки x^0 розуміли довільний інтервал $(a;b)$, який містить цю точку. Для означення границі функції двох змінних $z = f(M)$ нам треба ввести поняття околу точки $M_0 \in \mathbb{R}^2$.

Околом точки $M_0(x_0; y_0)$ називається внутрішність круга з центром в цій точці. Якщо радіус даного круга дорівнює δ, то такий окіл називають **δ-околом точки** M_0.

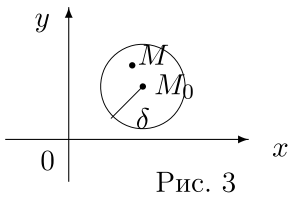


Рис. 3

Очевидно, що довільна точка M, яка належить δ-околу точки M_0, знаходиться від цієї точки на відстані, меншій за δ (рис. 3).

Нижче розглядатимемо функції двох змінних, визначених в деякому околі точки M_0. Число b називається **границею функції двох змінних** $z = f(M)$ **при** $M \to M_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий δ-окіл точки M_0, що для довільної точки M цього околу (за винятком, можливо, самої точки M_0) правильна нерівність

$$|f(M) - b| < \varepsilon.$$

При цьому пишуть

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b.$$

Функція двох змінних називається **нескінченно малою** при $M \to M_0$, якщо її границя дорівнює нулю.

Зауважимо, що коли число b є границею функції $z = f(M)$ при $M \to M_0$, то, як випливає з означення границі, різниця $f(M) - b = \alpha(M)$ є нескінченно малою при $M \to M_0$.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

◀ Маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left| \begin{array}{l} x^2+y^2=\rho^2, \\ (x;y)\to(0;0) \Leftrightarrow \rho\to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\rho^2+1-1} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2}(\sqrt{\rho^2+1}+1) = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+1}+1) = 1+1=2.$$

Знайдемо границю по-іншому. Для цього позбудемося ірраціональності в знаменику заданого дробу

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2. \quad ▶$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

◀ Розглянемо випадки прямування точки $(x;y)$ різними шляхами до точки $(0;0)$.

Нехай $y=0$, а $x\to 0$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Якщо ж $x=0$, а $y\to 0$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Оскільки ці границі різні, то це означає, що функція не має границі. ▶

Для функції багатьох змінних поряд із звичайною границею розглядають **повторні границі**, що пов'язано з вивченням границі функції при зміні тільки однієї змінної і фіксованих значеннях інших. Розглянемо ці поняття на прикладі функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в прямокутнику $\Omega = \{(x; y) : |x - x_0| < a_1, |y - y_0| < a_2\}$, крім, можливо точок відрізків прямих $x = x_0$, $y = y_0$. При фіксованому значенні змінної y функція $f(x, y)$ стає функцією однієї змінної x.

Нехай для довільного фіксованого значення y, такого, що $0 < |y - y_0| < a_2$, існує границя функції $f(x, y)$ при $x \to x_0$, яка, взагалі кажучи, залежить від y, тобто

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y-\text{фікс.}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Нехай, далі, границя функції $\varphi(y)$ при $y \to y_0$ дорівнює b:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b.$$

Тоді кажуть, що в точці $M_0(x_0; y_0)$ існує **повторна границя** функції $f(x; y)$ і пишуть

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b.$$

При цьому $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y-\text{фікс.} \\ 0<|y-y_0|<a_2}} f(x, y)$ називають **внутрішньою границею** в повторній.

Аналогічно означається друга повторна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, де внутрішньою є $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x-\text{фікс.} \\ 0<|x-x_0|<a_1}} f(x, y)$.

Правильним є таке твердження: *нехай в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *існує границя* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$, *та границі* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y-\textit{фікс.}}} f(x, y)$, $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x-\textit{фікс.}}} f(x, y)$. *Тоді існують повторні границі* $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ *і* $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, *які дорівнюють так само* b.

Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Приклад 3. Знайти повторні границі функції: 1) $f(x; y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ в точці $O(0; 0)$ за умови, що $c \neq 0$, $d \neq 0$; 2) $f(x; y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ в точці $O(0; 0)$.

◀ 1) Маємо

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фікс.}\\ x\neq 0}}\frac{ax+by}{cx+dy}\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{cx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{c}=\frac{a}{c}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\frac{b}{d}.$$

2) Легко можна довести, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Справді, якщо взяти $y=0$, а $x\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$. Якщо ж розглянути прямування $(x;y)\to(0;0)$ вздовж прямої $y=x$, то матимемо $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$. Тому подвійна границя не існує.

Знайдемо повторні границі

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фікс.}\\ x\neq 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)=\lim_{x\to 0}0=0.$$

Аналогічно знаходимо, що $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.

Отже, з того, що існують однакові повторні границі в даній точці, не випливає існування границі в цій точці. ▶

Функція багатьох змінних $z=f(M)$, $M(x_1;x_2;\ldots;x_n)\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, називається **неперервною в точці** $M_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$, якщо: 1) $M_0\in\Omega$, 2) існує $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; 3) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Зауважимо, що функція f, неперервна в точці M_0, повинна бути визначеною у цій точці й деякому її околі (у супротивному випадку не можна було б здійснити перехід до границі). Точка M_0, у якій функція декількох змінних $z=f(x)$ неперервна, називається **точкою неперервності цієї функції**.

Для неперервних функцій правильна така теорема.

Теорема 1. *Якщо функції f і g неперервні в точці M_0, то в цій точці будуть неперервними функції $f\pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ ($g(M_0)\neq 0$).*

За допомогою цієї теореми легко доводиться неперервність многочлена від двох незалежних змінних у будь-якій точці площини Oxy, неперервність раціональної функції в усіх точках площини, де знаменник не дорівнює нулю.

Точка M_0 називається **точкою розриву** функції f, якщо вона належить області визначення функції або її межі і не є точкою неперервності.

Приклад 4. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{1}{2x+y+1}$.

◀ Функція визначена і неперервна скрізь в $\mathbb{R}^2$, крім тих точок, координати яких задовольняють рівняння $2x+y+1=0$. Дана пряма є межею області визначення функції. Кожна точка цієї прямої є точкою розриву функції.

Справді, нехай $(x_0; y_0)$ – довільна точка на прямій $2x+y+1=0$, тобто $2x_0+y_0+1=0$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{1}{2x+y+1} = \infty$. ▶

Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

◀ Якщо $x^2+y^2 \neq 0$, то f неперервна як раціональна функція, коли знаменник не дорівнює нулю. Тому треба перевірити на неперервність дану функцію в точці $(0;0)$. У прикладі 2 доведено, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)$ не існує, а це означає, що f розривна в точці $(0;0)$. ▶

Функція f називається **неперервною на множині** Ω, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Якщо назвати **повним приростом** функції f в точці M_0

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) \quad \text{або} \quad \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0),$$

то означення неперервності функції f в точці M_0 можна сформулювати так: функція f називається неперервною в точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст в цій точці є нескінченно малою функцією, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta f = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0,$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = 0, \text{ де } \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Неперервні функції багатьох змінних мають в основному ті самі властивості, що й неперервні функції однієї змінної.

Теорема 2. *Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω, то вона в цій області:*

1) обмежена, тобто $|f(x,y)| \leq A$, $(x;y) \in \Omega$, де A – деяке додатне число;

2) досягає своїх найменшого m і найбільшого M значень;

3) набуває принаймні в одній точці будь-яке числове значення, що міститься між m і M, якщо для кожної пари точок з Ω існує ламана, яка сполучає ці точки і повністю лежить в Ω.

§3. Частинні похідні функції декількох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Зафіксуємо один з її аргументів, наприклад, y, поклавши $y = y_0$. Тоді функція $f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної x. Якщо x надати приросту Δx, то

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

називається **частинним приростом** по x функції f в точці $(x_0; y_0)$. Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

називається **частинною похідною першого порядку** функції $z = f(x, y)$ по x в точці $(x_0; y_0)$ і позначається символом $\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, або $z'_x(x_0, y_0)$, або $f'_x(x_0, y_0)$.

Отже,

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

З цього означення випливає, що частинна похідна функції двох змінних по одному з її аргументів дорівнює границі відношення частинного приросту функції до приросту аргументу, який спричинив цей приріст, коли приріст аргументу прямує до нуля. Отже, кожна частинна похідна є фактично похідною функції однієї змінної $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, де $y = const$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, де $x = const$. Тому при обчисленні частинних похідних можна користуватися відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну сталою.

З фізичної точки зору частинна похідна $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$ – це швидкість зростання функції z в точці $(x_0; y_0)$ у напрямку осі Ox, а $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}$ – у напрямку осі Oy.

З геометричної точки зору значення частинної похідної $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}$ дорівнює тангенсу кута, який утворює з віссю Ox дотична, що проведена в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до лінії перерізу поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$. Аналогічний зміст має частинна похідна $\frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y}$.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = x^2y - 3y^2 + 5x$.

◀ Диференціюємо функцію спочатку по x, вважаючи y фіксованою величиною, а потім повторюємо це саме, міняючи місцями x і y. Одержуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 5, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6y. \quad ▶$$

Приклад 2. Функція Кобба-Дугласа – виробнича функція, яка описує обсяг випуску продукції f при витратах капіталу x і трудових ресурсів y має вигляд

$$f = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

де $A > 0$ – параметр продуктивності конкретної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

Знайти граничні показники обсягу продукції f при зміні одного із факторів: витрат капіталу x або величини трудових ресурсів y.

◀ Граничні витрати – це частинні похідні від функції Кобба-Дугласа по змінній x і y відповідно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = A(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}.$$

Доведемо, що у функції Кобба-Дугласа показники степенів α і $1-\alpha$ є відповідно коефіцієнтами еластичності $E_x(f)$ і $E_y(f)$ по кожному із аргументів. Справді,

$$E_x(f) = \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}}A\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha} = \alpha,$$

$$E_y(f) = \frac{y}{f}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}}A(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha} = 1-\alpha. \quad ▶$$

Зауваження. Часто еластичності функції $z = f(x, y)$ по x і y записують у вигляді

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial(\ln z)}{\partial x},$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial(\ln z)}{\partial y}.$$

Приклад 3. Знайти коефіцієнти еластичності по x і y функції $z = x^y$ у точці $(2; 3)$.

◀ Маємо

$$E_x(z) = x\frac{\partial}{\partial x}(\ln x^y) = x\frac{\partial}{\partial x}(y \ln x) = xy\frac{1}{x} = y,$$

$$E_y(z) = y\frac{\partial}{\partial y}(\ln x^y) = y\frac{\partial}{\partial x}(y \ln x) = y \ln x.$$

Тому

$$E_x(z(2; 3)) = 3, \quad E_y(z(2; 3)) = 3 \ln 2. \quad ▶$$

У §1 цього розділу ми ввели поняття лінії рівня. Для характеристики напрямку і величини максимальної швидкості зростання функції в точці використовується поняття **градієнта**.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$**,** $(x; y) \in \Omega$**, в точці** $(x_0; y_0) \in \Omega$ називається вектор, координати якого дорівнюють відповідно частинним похідним $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точці $(x_0; y_0)$.

Для позначення градієнта користуються символом

$$\operatorname{grad} z(x_0; y_0) = \left(\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}; \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\right).$$

Приклад 4. Знайти градієнт і його модуль для функції $z = \dfrac{xy}{x + y + 1}$ у точці $(0; 1)$.

◀ Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x + y + 1) - xy}{(x + y + 1)^2} = \frac{y(y + 1)}{(x + y + 1)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2},$$

а тому

$$\operatorname{grad} z(x;y) = \left(\frac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}; \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2} \right).$$

При $x = 0$ і $y = 1$ дістаємо

$$\operatorname{grad} z(0;1) = \left(\frac{2}{2^2}; \frac{0}{2^2} \right) = \left(\frac{1}{2}; 0 \right),$$

$$|\operatorname{grad} z(0;1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}. \quad ►$$

Приклад 5. Знайти градієнт і його модуль для функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ у точці $(1;1;-2)$.

◄ Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z,$$

то

$$\operatorname{grad} u(x;y;z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) = (2x; 2y; -2z).$$

Підставивши в цей вираз координати точки (1; 1; -2), дістанемо

$$\operatorname{grad} u(1;1;-2) = (2;2;4), \quad |\operatorname{grad} u(1;1;-2)| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \quad ►$$

Частинні похідні функції багатьох змінних є функціями тих самих змінних. Вони, у свою чергу, можуть мати частинні похідні, які називаються **другими частинними похідними** або **частинними похідними другого порядку** функції.

Наприклад, функція $z = f(x,y)$ двох змінних має чотири частинні похідні другого порядку, які визначаться і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними частинними похідними другого порядку**.

Приклад 6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 y^2$.

◄ Послідовно диференціюючи, одержуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2\right) = 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2\right) = 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2 y\right) = 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2 y\right) = 2x^2. \quad ►$$

У цьому прикладі маємо, що мішані другі похідні однакові. Цей результат не випадковий. Доведено, що *мішані похідні збігаються в області* Ω, *тобто*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

якщо вони неперервні в цій області.

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної довільного порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 7. Для функції $z = e^{xy^2}$ знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

◄ Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^2} y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy^2} y^4$. Тоді $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ $= \dfrac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2} y^4) = e^{xy^2} 2xy^5 + e^{xy^2} 4y^3 = 2y^3 e^{xy^2}(xy^2 + 2)$. ►

§4. Повний диференціал. Диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$, яка визначена в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Припустимо, що існують частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в кожній точці області Ω.

Вирази вигляду $\dfrac{\partial z}{\partial x}dx$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ називають **частинними диференціалами** і позначають відповідно символами $d_x z$ і $d_y z$, тобто

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Сума частинних диференціалів

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1}$$

називається **повним диференціалом функції** двох змінних в точці $(x;y) \in \Omega$.

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(x+y^2)$.

◄ Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{x+y^2}$, а тому згідно з (1)

$$dz = \frac{1}{x+y^2}dx + \frac{2y}{x+y^2}dy,$$

якщо $x + y^2 > 0$. ►

Функція $z = f(x,y)$ називається **диференційовною** в точці $(x_0;y_0)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ і $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – нескінчено малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, A і B – сталі.

Доведемо, що коли функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $(x_0;y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = A$ і $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = B$.

Справді, згідно з означенням частинної похідної $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ маємо $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$. Оскільки функція f диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то її частинний приріст можна записати у вигляді $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x$, де $\alpha(\Delta x, 0)$ є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$. Тому

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(A + \alpha(\Delta x, 0)) = A.$$

Отже, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A$. Аналогічно доводиться, що $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B$. Тому умову диференційовності функції в точці $(x_0; y_0)$ можна записати й так:

$$\Delta z = dz + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Доведено, що з існування частнних похідних $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у точці $(x_0; y_0)$ не випливає диференційовність функції в цій точці. Якщо додатково припустити, що частинні похідні не тільки існують, але й неперервні, то функція буде диференційовною.

Теорема. *Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у деякому околі точки $(x_0; y_0)$, причому ці похідні неперервні в самій точці $(x_0; y_0)$, то вона диференційовна в точці $(x_0; y_0)$.*

◀ Нехай обидві частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ існують в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ і неперервні в цій точці. Надамо аргументам x і y приростів відповідно Δx і Δy таких, щоб точка $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не вийшла за межі вказаного околу точки $(x_0; y_0)$. Повний приріст функції $z = f(x, y)$ запишемо у вигляді

$$\Delta z = (f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) +$$

$$+ (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)).$$

Вираз $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)$ можна розглядати як приріст функції $f(x, y_0+\Delta y)$ однієї змінної x на відрізку $[x_0; x_0+\Delta x]$. Оскільки функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні, то функція $f(x, y_0+\Delta y)$ має похідну, яка збігається з частинною похідною $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Застосовуючи до вказаного приросту формулу Лагранжа, одержуємо, що

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x,$$

де $0<\theta_1<1$.

Міркуючи аналогічно, дістаємо рівність

$$f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

де $0<\theta_2<1$.

Оскільки похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в точці $(x_0; y_0)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+\alpha,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)+\beta,$$

де α і β – нескінченно малі функції при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Тому

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Отже, функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$. ►

Зауваження 1. Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то існує дотична площина до графіка цієї функції (поверхні) в точці $(x_0; y_0; z_0)$, де $z_0=f(x_0, y_0)$, яка має рівняння

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

Зауваження 2. Диференціал функції багатьох змінних використовують для наближеного обчислення значень функції. Для цього повний приріст диференційовної функції Δf замінюють її диференціалом, якщо прирости аргументів малі.

Наприклад, для функції двох змінних правильна така формула для наближеного знаходження значення функції:

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0; y_0)$$

або

$$f(x_0+\Delta, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y. \quad (2)$$

Аналогічні формули правильні й для функції довільного числа змінних.

Приклад 2. Знайти наближено

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}.$$

◀ Очевидно, що це число можна розглядати як значення функції $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ у відповідній точці $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, де $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0,02$ і $\Delta y = -0,03$.

Оскільки функція f диференційовна в точці $(1; 2)$, бо має неперервні в цій точці частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}$, то можна скористатися формулою (3). Для цього обчислимо значення функції f та її частинних похідних у точці $(1; 2)$:

$$f(1, 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3, \quad \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{1^3 + 2^3}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = \frac{12}{2\sqrt{1^3 + 2^3}} = 2.$$

Тоді

$$\sqrt{1,02^3 + 1,97^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 - 2 \cdot 0,03 = 2,95. \text{ ▶}$$

Як і у випадку функції однієї змінної з диференційовності функції двох змінних випливає її неперервність, але не навпаки. Справді, нехай $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, диференційовна в області Ω. Тоді, згідно з означенням диференційовності, для довільної точки $(x_0; y_0) \in \Omega$ правильна рівність

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) + \beta(\Delta x, \Delta y)) = 0.$$

Звідси випливає, що f неперервна в кожній точці $(x_0; y_0) \in \Omega$. Обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця, тобто з неперервності функції багатьох змінних не випливає її диференційовність. Наприклад, функція $f(x, y) = |x| + y$ є неперервною на $\mathbb{R}^2$, але вона не є диференційовною в точці $(0; 0)$, бо $f'_x(0, 0)$ не існує.

Приклад 3. Знайти на яку величину треба змінити у функції Кобба-Дугласа $f = Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}$ обсяг капіталу x, щоб при зміні трудових ресурсів на величину Δy випуск продукції залишався незмінним.

◀ Знайдемо частинні похідні функції f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = A(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}.$$

Згідно з умовою функція f повинна бути сталою, а тому диференціал цієї функції дорівнює нулю, тобто $df = 0$ або

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{3}$$

Оскільки $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то рівність (3) має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = 0.$$

Звідси одержуємо, що

$$\Delta x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\Delta y \quad \text{або} \quad \Delta x = -\frac{A(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}}{A\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}}\Delta y.$$

Отже,

$$\Delta x = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x}{y}\Delta y.$$

Якщо поділити обидві частини на x, то дістанемо

$$\frac{\Delta x}{x} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\Delta y}{y}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що для компенсації зміни ресурсу праці на 1% треба змінити ресурс капіталу на $-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\%$.

З формули (4) одержуємо, що

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x}{y},$$

або

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x}{y}. \qquad (5)$$

Рівність (5) називається **граничною нормою** заміни трудових ресурсів y капіталом x. ▶

Вище було введено поняття диференціала диференційовної в точці $(x; y)$ функції $z = f(x, y)$ і одержана формула (1).

Будемо називати dz **диференціалом першого порядку**. Для зручності домовимося позначати диференціал не тільки символом d, але й символом δ, наприклад, δx, δy, δz.

Нехай функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ диференційовні в точці $(x; y)$. Розглядатимемо dx і dy у виразі (1) для dz як сталі множники. Тоді функція dz є диференційовною функцією змінних x, y і її диференціал має вигляд

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)\delta y. \qquad (6)$$

Диференціал $\delta(dz)$ від диференціала dz в точці $(x; y)$, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом другого порядку** функції f в точці $(x; y)$ і позначається d^2z. У свою чергу, диференціал $\delta(d^2z)$ від d^2z, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом третього порядку** функції f і позначається символом d^3z і т.д. Диференціал $\delta(d^{n-1}z)$ від диференціала $d^{n-1}z$, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом n-го порядку (або n-м диференціалом)** функції $z = f(x, y)$ в точці $(x; y)$ і позначається символом d^nz.

Отже,

$$d^n z = \delta(d^{n-1}z)\big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}.$$

При знаходженні другого та наступних диференціалів знаходження $\delta(dz)$ й прирівнювання $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ здійснюють одночасно.

За допомогою формули (6) знайдемо вираз для d^2z:

$$d^2z = \delta(dz)|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Якщо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ неперервні, то вони однакові, а тому

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Аналогічно,

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Символічно можна другий, третій та наступні диференціали записати у вигляді

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y),$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x,y),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

Приклад 4. Знайти d^2z для функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

◀ Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. Отже,

$$d^2 z = \frac{-2xy(dx)^2 + 2(x^2-y^2)dxdy + 2xy(dy)^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad ▶$$

§5. Диференціювання складеної функції багатьох змінних

5.1. Диференціювання складеної функції. Нехай є функція двох змінних $f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, а також функції однієї змінної $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$. Вважатимемо, що для кожного $t \in T$ точка $(\varphi(t); \psi(t)) \in \Omega$. Тоді можна утворити складену функцію $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in T$. При цьому функцію f називають зовнішньою, а φ та ψ – внутрішніми для складеної функції.

Припустимо, що функція f диференційовна на Ω, а функції φ та ψ диференційовні на T. Доведемо, що тоді складена функція $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in T$, є диференційовною на проміжку T, і правильна рівність

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t), t \in T. \tag{1}$$

Справді, якщо надати змінній $t \in T$ приросту Δt такого, що $t + \Delta t \in T$, то функції φ і ψ одержать прирости

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \quad \Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t). \tag{2}$$

Оскільки функції φ і ψ диференційовні, то вони й неперервні, а тому $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$. Прирости Δx і Δy спричинять відповідний приріст функції f:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Згідно з диференційовністю функції f, цей приріст можна подати у вигляді

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y +$$
$$+ \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{3}$$

де функції α і β є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

Тепер розглянемо приріст Δz складеної функції $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, що відповідає приросту аргументу Δt. Якщо скористатися рівностями (2), то матимемо

$$\Delta z = f(\varphi(t+\Delta t), \psi(t+\Delta t)) - f(\varphi(t), \psi(t)) =$$

$$= f(\varphi(t)+\Delta x, \psi(t)+\Delta y) - f(\varphi(t), \psi(t)) = \Delta f(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in T.$$

Цей приріст , згідно з формулою (3), можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\Delta y +$$

$$+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Поділимо цю рівність на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Тоді одержимо, що

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$$+\alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}\Big) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t),$$

бо $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Отже, складена функція $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ має похідну в кожній точці $t \in T$ і правильною є формула (1).

Приклад 1. Знайти похідну складеної функції $z = f(3t^2 - 2t + 1, \cos t)$, $t \in T$, якщо f є диференційовною.

◀ Задана функція z аргументу t утворена з таких функцій: $f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, $x = 3t^2 - 2t + 1$, $y = \cos t$, $t \in T$. Оскільки ці функції диференційовні, то і $z(t)$ є диференційовною. Тоді, згідно з формулою (1), правильна рівність

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(3t^2-2t+1, \cos t)(3t^2-2t+1)' + \frac{\partial f}{\partial y}(3t^2-2t+1, \cos t)(\cos t)' =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(3t^2 - 2t + 1, \cos t)(6t - 2) - \frac{\partial f}{\partial y}(3t^2 - 2t + 1, \cos t) \sin t, \quad t \in T. \blacktriangleright$$

Якщо складена функція $u(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in T$, де функції f, φ, ψ і χ – диференційовні, то і $u(t)$ є диференційовною, причому

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t), t \in T. \tag{4}$$

Приклад 2. Знайти похідну складеної функції $u(t) = f(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)$, $t \in T$, якщо функція f є диференційовною.

$\blacktriangleleft$ Очевидно, що функція u аргументу t складається з диференційовних функцій $f(x, y, z)$, $(x; y; z) \in Q$ і $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$, $z = t + 1$, $t \in T$. Тоді згідно з формулою (4), маємо

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)(e^{2t})' + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)(e^{-2t})' +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)(t + 1)' =$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial x}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)e^{2t} - 2\frac{\partial f}{\partial y}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1)e^{-2t} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(e^{2t}, e^{-2t}, t + 1), \quad t \in T. \blacktriangleright$$

Розглянемо функцію, яка складена з функцій $f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$ і $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $(u; v) \in D$:

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad (u; v) \in D. \tag{5}$$

Цю функцію z аргументів u і v можна утворити, якщо з того, що $(u; v) \in D$ випливає, що $(\varphi(u, v); \psi(u, v)) \in \Omega$. Аналогічно тому, як це було зроблено вище, можна довести, що коли функції f, φ і ψ диференційовні, то і складена функція є диференційовною в області D, а отже, має частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, які знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u},(u;v)\in D; \tag{6}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v},(u;v)\in D. \tag{7}$$

Аналогічні формули для частинних похідних складеної функції правильні й тоді, коли зовнішня функція і внутрішні функції є функціями більшого числа змінних.

Приклад 3. Знайти частинні похідні та диференціал складеної функції $z=f\Big(uv,\dfrac{u}{v}\Big)$, якщо функція f є диференційовною функцією.

◄ Задана функція утворена з таких диференційовних функцій: $f(x,y)$, $(x;y)\in\Omega$, і $x=uv$, $y=\dfrac{u}{v}$, $(u;v)\in D$.

Тоді, згідно з формулами (6) і (7), маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)v+\frac{\partial f}{\partial y}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)\frac{1}{v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)u-\frac{\partial f}{\partial y}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)\frac{u}{v^2},\quad (u;v)\in D.$$

Диференціал складеної функції z знаходимо за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

тобто

$$dz=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)v+\frac{\partial f}{\partial y}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)\frac{1}{v}\Big)du+$$
$$+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)u-\frac{\partial f}{\partial y}\Big(uv,\frac{u}{v}\Big)\frac{u}{v^2}\Big)dv=$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(uv, \frac{u}{v}\Big)(vdu + udv) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(uv, \frac{u}{v}\Big)\Big(\frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2}\Big). \blacktriangleright$$

5.2. Існування та диференційовність неявної функції. У розділі 1, §1, п.1.1.10, ми ввели поняття неявної функції, але не з'ясували, коли існує і є диференційовною неявна функція, що визначається рівнянням $F(x, y) = 0$.

Нехай точка $(x_0; y_0)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$. Тоді в околі $\Pi = \{(x_0; y_0) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta_1\}$ цієї точки рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію змінної x, якщо для кожного значення $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ існує єдине $y \in (y_0 - \delta_1; y_0 + \delta_1)$ таке, що пара $(x; y)$ задовольняє це рівняння. Наприклад, розглянемо рівняння $x^2 - y^2 = 0$. Неперервними розв'язками цього рівняння є $y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$, $x \in \mathbb{R}$. Легко можна переконатися, що в достатньо малому околі точки $(1; 1)$ це рівняння має єдиний розв'язок $y = x$, а в будь-якому околі точки $(0; 0)$ – наведені вище чотири розв'язки. З'ясуємо чому у першому випадку рівняння визначає одну функцію, а в другому – багато. Введемо позначення $F(x, y) = x^2 - y^2$. Тоді $F'_y(x, y) = -2y$, а тому $F'_y(1, 1) \neq 0$, а $F'_y(0, 0) = 0$. Виявляється, що і в загальному випадку для єдиності розв'язку рівняння $F(x, y) = 0$ відносно y в околі точки $(x_0; y_0)$ важливу роль відіграє умова $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Теорема (існування і диференційовність неявної функції). *Нехай: 1) функція $F(x, y)$ диференційовна в деякому околі U точки $(x_0; y_0)$; 2) частинні похідні F'_x і F'_y неперервні в точці $(x_0; y_0)$; 3) $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує такий прямокутник $\Pi = \{(x; y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta_1\} \subset U$, у якому рівняння $F(x, y) = 0$ визначає єдину функцію вигляду $y = f(x)$, причому $f(x_0) = y_0$, функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ і її похідна знаходиться за формулою*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \tag{8}$$

$\blacktriangleleft$ Доведемо лише формулу (8). Нехай $y = f(x)$ – розв'язок рівняння $F(x, y) = 0$. Тоді правильна рівність $F(x, y(x)) = 0$,

$(x;y) \in \Pi$. Оскільки похідна функції, яка дорівнює нулю, також дорівнює нулю, то повна похідна $\dfrac{dF(x,y(x))}{dx} = 0$, тобто

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти похідну неявної функції y, яка визначена рівнянням $x^2 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$, і обчислити її значення в точці $M_0(2;-1)$.

◀ Введемо позначення $F(x,y) = x^2 + 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0$. Тоді $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 + y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 6y + x$. Отже, згідно з формулою (8)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x - 2 + y}{6y + x}.$$

Зокрема, в точці $M_0(2;-1)$

$$\frac{dy(2;-1)}{dx} = -\frac{2 \cdot 2 - 2 - 1}{6(-1) + 2} = \frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

§6. Екстремум функції багатьох змінних

6.1. Необхідні та достатні умови існування екстремуму. Поняття максимуму й мінімуму для функції багатьох змінних водяться аналогічно, як і для функції однієї змінної. Розглянемо ці поняття для випадку функції двох змінних.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ **має в точці** $(x_0; y_0) \in \Omega$ **максимум (мінімум)**, якщо існує такий окіл $U(x_0; y_0) \subset \Omega$ цієї точки, що для всіх точок $(x; y)$ з даного околу виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$.

Точка $(x_0; y_0)$, у якій функція f має максимум (мінімум), називається **точкою максимуму (мінімуму)**.

Згідно з означенням **локального екстремуму** (максимуму або мінімуму) повний приріст функції $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ задовольняє в околі точки $(x_0; y_0)$ одну з умов:

$\Delta z \leq 0$, якщо $(x_0; y_0)$ – точка локального максимуму;

$\Delta z \geq 0$, якщо $(x_0; y_0)$ – точка локального мінімуму.

Теорема 1 (необхідні умови екстремуму). *Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні першого порядку в точці локального екстремуму $(x_0; y_0)$, то* $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$.

◀ Частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по x в точці $(x_0; y_0)$ є похідною функції однієї змінної $\varphi(x) = f(x, y_0)$ в точці $x = x_0$. Оскільки в цій точці функція φ має екстремум, то $\varphi'(x_0) = 0$. Очевидно, що $\varphi'(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, а тому $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$. Аналогічно можна довести, що $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. ▶

Отже, перетворення в нуль у точці $(x_0; y_0)$ частинних похідних першого порядку функції $z = f(x, y)$, якщо вони існують, є **необхідними** умовами існування в точці $(x_0; y_0)$ екстремуму цієї функції.

Зауважимо, що функція може мати екстремум також в тих точках, де вона визначена, але принаймні одна з частинних похідних не існує.

Точки, у яких перші частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ перетворюються в нуль або не існують, називаються **критичними або стаціонарними точками** цієї функції.

Приклад 1. Знайти критичні точки функції $z = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$.

◄ Маємо
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4y.$$

Тоді з системи рівнянь
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$
знаходимо критичні точки. З першого рівняння одержуємо $x = \pm 1$, а з другого – $y = 0, \pm 1$. Отже, є шість стаціонарних точок (1; 0), (1; 1), (1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (-1; -1). ►

Умови теореми 1 не є достатніми умовами існування екстремуму. Наприклад, для функції $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю в точці (0; 0), але ця точка не є точкою локального екстремуму. Справді, в довільному околі точки (0; 0) існують точки вигляду $(x; 0)$, у яких $f(x, 0) > f(0, 0)$. Тому (0; 0) не є точкою локального максимуму. Аналогічно в довільному околі точки (0; 0) існують точки вигляду $(0; y)$, у яких $f(0, y) < f(0, 0)$. Тому (0; 0) не є точкою локального мінімуму.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму). *Нехай функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в деякому околі стаціонарної точки $(x_0; y_0)$. Покладемо*
$$\Delta(x_0; y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta(x_0;y_0) > 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ функція має локальний екстремум, причому при $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$ – локальний максимум, а при $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$ – локальний мінімум;

2) якщо $\Delta(x_0;y_0) < 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму;

3) якщо $\Delta(x_0;y_0) = 0$, то точка $(x_0;y_0)$ може бути, а може й не бути точкою екстремуму.

Приклад 2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y, \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

◀ Маємо $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18$. Тоді з системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$$

знаходимо, додаючи й віднімаючи ці рівняння,

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + y = \pm 4, \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, знаходимо чотири стаціонарні точки: 1) $(3;1)$; 2) $(1;3)$; 3) $(-1;-3)$; 4) $(-3;-1)$.

Тепер знайдемо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо вираз $\Delta(x;y)$ для кожної зі стаціонарних точок:

1) $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} = 6 \cdot 3 = 18$; $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot 1 = 6$; $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial y^2} = 6 \cdot 3 = 18$; $\Delta(3;1) = 18 \cdot 18 - 6^2 = 288 > 0$;

2) $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x^2} = 6 \cdot 1 = 6$; $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot 3 = 18$; $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial y^2} = 6 \cdot 1 = 6$; $\Delta(1;3) = 6 \cdot 6 - 18^2 = -288 < 0$;

3) $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial x^2} = 6 \cdot (-1) = -6$; $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot (-3) = -18$; $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial y^2} = 6 \cdot (-1) = -6$; $\Delta(-1;-3) = (-6)^2 - (-18)^2 = -288 < 0$;

4) $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x^2} = 6\cdot(-3) = -18$; $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x\partial y} = 6\cdot(-1) = -6$; $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial y^2} = 6\cdot(-3) = -18$; $\Delta(-3;-1) = (-18)\cdot(-18) - (-6)^2 = 288 > 0$.

Отже, функція має два екстремуми:
у точці (3; 1) – мінімум, бо $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} > 0$, $f_{\min} = f(3,1) = 3^3 + 3\cdot 3\cdot 1^2 - 30\cdot 3 - 18\cdot 1 = -72$;
у точці $(-3;-1)$ – максимум, бо $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x^2} < 0$, $f_{\max} = (-3)^3 + 3\cdot(-3)\cdot(-1)^2 - 30\cdot(-3) - 18\cdot(-1) = 72$.

Оскільки $\Delta(1;3)$ і $\Delta(-1;-3)$ від'ємні, то в точках (1; 3) і $(-1;-3)$ функція екстремуму не має. ►

Зауваження. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω, то вона досягає в цій області своїх найбільшого й найменшого значень. У випадку диференційовної в Ω функції для знаходження найбільшого й найменшого значень f треба знайти стаціонарні точки і обчислити значення функції в цих точках, а також її найбільші та найменші значення на межі області Ω. Далі серед усіх цих значень треба вибрати найбільше та найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$ в крузі одиничного радіуса з центром в початку координат.

◄ Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

Із системи рівнянь

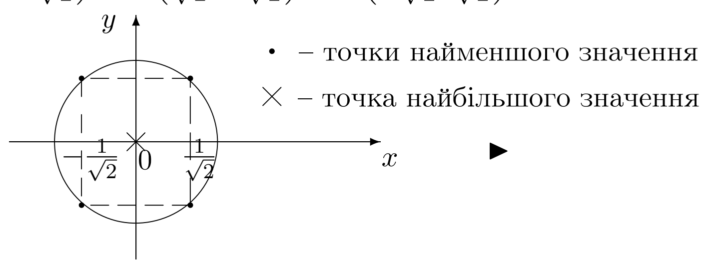
$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = 0$$

знаходимо, що стаціонарною точкою є (0; 0) і $z(0,0) = \dfrac{1}{1+0} + \dfrac{1}{1+0} = 2$.

Знайдемо критичні точки на межі області – колі, що визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 1$. Підставивши $y^2 = 1 - x^2$ у функцію z, дістанемо функцію однієї змінної $\widetilde{z} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2-x^2} = \dfrac{3}{2+x^2-x^4}$, де $x \in [-1;1]$. Дослідимо цю функцію на екстремум.

Знайдемо похідну $\widetilde{z}' = \dfrac{2x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2}$ і прирівняємо її до нуля. Тоді одержимо критичні точки на межі області: $x=0$, $x_{2,3} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Обчислимо значення функції в цих точках, а також на кінцях $x=\pm1$ відрізка $[-1;1]$: $\widetilde{z}(-1) = \widetilde{z}(1) = \dfrac{3}{2}$, $\widetilde{z}(0) = \dfrac{3}{2}$, $\widetilde{z}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \widetilde{z}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3}$.

Тепер серед значень $z(0,0) = 2$, $\widetilde{z}(-1) = \widetilde{z}(1) = \dfrac{3}{2}$; $\widetilde{z}(0) = \dfrac{3}{2}$; $\widetilde{z}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \widetilde{z}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3}$ вибираємо найбільше та найменше. Отже, $\max\limits_{x^2+y^2\le1} z(x,y) = z(0,0) = 2$, $\min\limits_{x^2+y^2\le1} z(x,y) = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3}$ (рис. 4)



▶

Рис. 4

6.2. Умовний екстремум. У багатьох прикладних задачах виникає необхідність досліджувати функцію багатьох змінних на ектремум за умови, що незалежні змінні задовольняють деякі додаткові умови, які називаються **умовами зв'язку**. Такого типу екстремум називають **умовним**.

Приклад 4. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо $x + y - 1 = 0$.

◀ З умови зв'язку $x+y-1=0$ знайдемо $y = 1-x$. Підставивши цей вираз у функцію z, дістанемо $\widetilde{z} = x^2 + (1-x)^2$ або $\widetilde{z} = 2x^2 - 2x + 1$. Тоді $\widetilde{z}' = 4(x-1/2)$, $\widetilde{z}'' = 4$. Звідси випливає, що в точці $x = \dfrac{1}{2}$

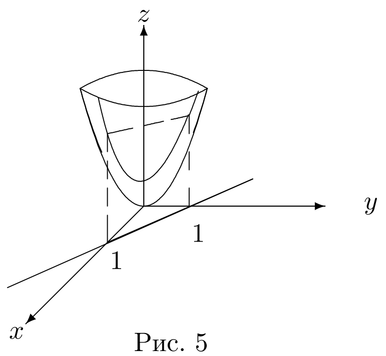


Рис. 5

функція $\widetilde{z}$ має мінімум і $\widetilde{z}_{\min} = \frac{1}{2}$. Отже, функція $z = x^2 + y^2$ за умови, що $x + y - 1 = 0$ має мінімум (умовний мінімум) в точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ і $z_{\min} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Очевидно, що безумовний екстремум – це мінімум в точці $(0; 0)$ і $z_{\min} = 0$ (рис. 5). ►

При розв'язуванні даної задачі, ми звели умовний екстремум до безумовного, виразивши з умови зв'язку одну змінну через іншу. Однак це не завжди можна зробити.

Розглянемо задачу про дослідження на екстремум функції

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad m < n. \end{cases} \tag{2}$$

Функція f має умовний максимум (мінімум) в точці $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, якщо існує такий окіл точки x^0, для всіх точок x якого, що задовольняють рівняння зв'язку (2), виконується нерівність $f(x^0) \geq f(x)$ $(f(x^0) \leq f(x))$.

Задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний екстремум **функції Лагранжа**

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де λ_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, – числа, які називаються **множниками Лагранжа**. Вважатимемо, що функції f, φ_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, неперервні разом зі своїми частинними похідними другого порядку.

Необхідні умови екстремуму виражаються системою $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\partial x_j} = 0, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i} \equiv \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$i \in \{1, \ldots, m\},$$

з яких знаходимо x_1, ..., x_n та λ_1, ..., λ_m – координати точки, в якій можливий екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму пов'язані з вивченням знаку другого диференціала функції Лагранжа $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n)$ для кожної системи значень x_1^0, ..., x_n^0; λ_1^0, ..., λ_m^0, одержуваної з (3) за умови, що dx_1, dx_2, ..., dx_n задовольняють рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k} dx_k = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \quad (4)$$

при $dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$. А саме: *функція f має умовний максимум у точці $M_0(x_1^0; \ldots; x_n^0)$, якщо для довільних значень dx_1, ..., dx_n, які задовольняють умови (4) і не дорівнюють нулю одночасно, виконується нерівність $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n) < 0$ і умовний мінімум, якщо за цих умов $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n) > 0$.*

У випадку функції $z = f(x, y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Система (3) складається з трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай x_0, y_0, λ_0 – будь-який розв'язок цієї системи і

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L(x_0,y_0;\lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L(x_0,y_0;\lambda_0)}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(x_0,y_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L(x_0,y_0;\lambda_0)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 L(x_0,y_0;\lambda_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x,y)$ має в точці $(x_0;y_0)$ умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 5. Знайти умовний екстремум функції $z = x+2y$ при $x^2+y^2 = 5$.

◀ Складемо функцію Лагранжа: $L(x,y;\lambda) = x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$. Маємо $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1+2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2+2\lambda y$, а тому система (3) набуває вигляду

$$\begin{cases} 1+2\lambda x = 0, \\ 2+2\lambda y = 0, \\ x^2+y^2 = 5. \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Оскільки $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2L = 2\lambda(dx^2+dy^2)$.

При $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ маємо, що $d^2L > 0$. Тому функція має умовний мінімум у точці $(-1;-2)$ і $z_{\min} = -5$. При $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ другий диференціал $d^2L < 0$, а це означає, що функція має умовний максимум у точці $(1;2)$ і $z_{\max} = 5$.

Проведемо це розв'язування по-іншому. Нехай $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Тоді $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y$. Очевидно, що $\dfrac{\partial\varphi(-1,-2)}{\partial x} = -2$, $\dfrac{\partial\varphi(-1,-2)}{\partial y} = -4$, $\dfrac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial x^2} = 1$, $\dfrac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial x\partial y} = 0$,

$\dfrac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial y^2} = 1$, а тому

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

тобто функція має умовний мінімум у точці $(-1;-2)$. Аналогічно для точки (1; 2) і $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

тобто (1; 2) є точкою умовного максимуму. ►

Приклад 6. Фірма виробляє два види товарів S_1 і S_2 у кількостях відповідно x і y. Функція витрат має вигляд $C = 10x + xy + 10y$, а функції попиту на ці товари мають відповідно вигляд $p_1 = 50 - x + y$ і $p_2 = 30 + 2x - y$. Крім того, фірма зв'язана обмеженням $x + y = 15$. Знайти максимальний прибуток, який одержить фірма при реалізації товарів S_1 і S_2.

◄ Відомо, що прибуток $\varPi(x,y) = P_1 + P_2 - C = p_1 x + p_2 y - C = (50-x+y)x + (30+2x-y)y - 10x - xy - 10y = 40x - x^2 + 2xy + 20y - y^2$.

Отже, треба дослідити на екстремум функцію $\varPi(x,y) = 40x - x^2 + 2xy + 20y - y^2$ за умови, що $x + y = 15$.

З умови зв'язку $x + y = 15$ виразимо y через x і підставимо у функцію $\varPi$: $y = 15 - x$, $\widetilde{\varPi} = 40x - x^2 + 2x(15-x) + 20(15-x) - (15-x)^2 = 80x - 4x^2 + 75$.

Дослідимо функцію $\widetilde{\varPi}$ на безумовний (звичайний) екстремум. Маємо $\widetilde{\varPi}'(x) = 80 - 8x$. Прирівнявши цю похідну до нуля, дістанемо, що $x_0 = 10$. Оскільки $\widetilde{\varPi}''(x) = -8 < 0$, то у цій точці x_0 функція $\widetilde{\varPi}$ досягає максимуму, причому $\widetilde{\varPi}_{\max} = \widetilde{\varPi}(10) = 80\cdot 10 - 4\cdot 10^2 + 75 = 475$.

Звідси випливає, що функція π має максимум в точці $(10;5)$ і $\varPi_{\max} = 475$. ►

6.3. Метод найменших квадратів. У багатьох прикладних задачах виникає необхідність відновлення функції за її значеннями у деяких точках, тобто побудови емпіричної формули, яка дозволяє аналітично записати дані вимірювань, спостережень, статистичної обробки результатів експериментів і т.п.

Одним з найкращих способів отримання такої формули є **метод найменших квадратів**.

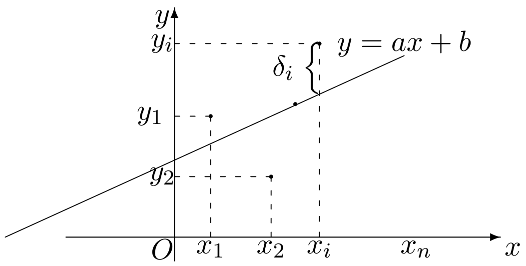
Нехай в результаті досліду одержано таблицю значень функції $y = f(x)$ для n значень незалежної змінної:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Припустимо, що точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\dots$, $(x_n; y_n)$ розміщуються приблизно на одній прямій. Це означає, що залежність між x і y близька до лінійної $y = ax + b$. Підберемо коефіцієнти a і b так, щоб пряма $y = ax + b$ лежала по можливості ближче до кожної з точок, які нанесені на площину. Тому, підставляючи значення координат точок у вираз $y - (ax + b)$, дістаємо рівності:

$$y_1 - (ax_1 + b) = \delta_1, \quad y_2 - (ax_2 + b) = \delta_2, \quad \dots, \quad y_n - (ax_n + b) = \delta_n,$$

де δ_1, δ_2, $\dots$, δ_n – деякі числа, які називаються **похибками**



.

Підберемо коефіцієнти a і b так, щоб ці похибки були малими за абсолютною величиною. Для цього скористаємося методом найменших квадратів. Розглянемо суму квадратів похибок

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2.$$

Тут x_i і y_i – задані числа, а коефіцієнти a і b невідомі, тому треба функцію F дослідити на екстремум як функцію двох змінних. Маємо

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) x_i, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)).$$

Прирівнявши ці частинні похідні до нуля, одержимо лінійну систему двох рівнянь з двома невідомими a і b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Ця система називається **нормальною системою методу найменших квадратів**.

Вона має єдиний розв'язок, оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 > 0.$$

Той факт, що функція $F(a, b)$ у знайденій точці $M_0(a_0; b_0)$ має мінімум, легко доводиться за допомогою достатньої умови екстремуму функції двох змінних. Маємо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = 2n.$$

Отже,

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

або

$$\Delta = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 > 0.$$

Оскільки $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2} > 0$, то в точці $M_0(a_0; b_0)$ функція F має мінімум.

Підставивши знайдені значення a_0 і b_0 в рівняння $y = ax+b$ дістанемо лінійну функцію, яка найкращим чином відображає залежність між величинами x і y, одержаними з досліду.

Зауваження. Якщо дані досліду такі, що при побудові графіка вони приблизно розміщуються на параболі $y = ax^2+bx+c$, то для знаходження коефіцієнтів a, b і c треба знайти мінімум функції

$$F(a,b,c) = \sum(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2.$$

Знаходження мінімуму цієї функції зводиться до розв'язування системи трьох рівнянь першого степеня:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

звідки визначаються невідомі параметри a, b і c.

Приклад 7. Одержані в результаті експерименту значення наведено в таблиці

x	0	1	$1,5$	$2,1$	3
y	$2,9$	$6,3$	$7,9$	$10,0$	$13,2$

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу вигляду $y = ax + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

◀ Складемо таблицю для знаходження сум $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,9	0,00	0,00
2	1,0	6,3	1,00	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3,0	13,2	9,00	39,60
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Нормальна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 16,66a + 7,6b = 78,75, \\ 7,6a + 5b = 40,3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $a = 3,42$, $b = 2,86$. Якщо підставити знайдені значення в рівняння $y = ax + b$, то одержимо шукану залежність

$$y = 3,42x + 2,86. \quad \blacktriangleright$$

Вправи

1. Знайти область визначення функції:
1) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$; 2) $z = \sqrt{xy}$; 3) $z = \arccos \dfrac{y}{x}$;
4) $z = \ln(x + y)$; 5) $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$; 6) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
7) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

2. Знайти границю:
1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$;
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} (\cos xy)^{\frac{1}{x^2 y^2}}$.

3. Знайти частинні похідні першого порядку функції:
1) $z = x^3 y - y^3 x$; 2) $u = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$;
3) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 4) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;
5) $z = 2^{x^2 - y}$; 6) $z = (1 + x^3)^y$; 7) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$;
8) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 9) $u = x^{\frac{y}{z}}$; 10) $u = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

4. Знайти градієнт і його модуль для заданої функції у вказаній точці:
1) $z = 4 - x^2 - y^2$, $M_0(1; 2)$; 2) $u = z^2 + y^2 - z^2$, $M_0(1; -1; 2)$;
3) $u = xyz$, $M_0(3; -1; 2)$; 4) $u = \operatorname{tg} x - x + 3 \sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Для поданих нижче функцій знайти похідні вказаного порядку:
1) $z = e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; 2) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; 3) $z = x^{2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 4) $z = e^x(\sin x + x \cos y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

6. Знайти: 1) закон зміни виробничої функції $z = f(x, y)$ відносно кожного з факторів x та y; 2) еластичність виробничої функції щодо кожного з факторів та коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $y = 1$. Розглянути випадки: а) $f(x, y) = e^{xy}$; б) $z = \ln(x^3 + 2y^3)$.

7. Знайти диференціали першого і другого порядків для функції:
1) $z = x^3y^3$; 2) $z = \left(\frac{y}{x}\right)^2$; 3) $z = 2^{xy}$; 4) $u = xy + yz + xz$;
5) $u = \sin(x + y + z)$.

8. Замінюючи приріст функції її диференціалом, наближено обчислити:
1) $1,04^{2,02}$; 2) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$; 3) $\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2}$;
4) $(2,01)^{3,03}$; 5) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$; 6) $1,002 \cdot 2,003^2 \cdot 3,04^3$.

9. Знайти частинні похідні складеної функції багатьох змінних, якщо зовнішня функція f є диференційовною:
1) $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 2) $z = f(u + v, u - v)$; 3) $z = f\left(\dfrac{u}{v}, \dfrac{v}{w}\right)$;
4) $w = f(u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv)$.

10. Знайти екстремум функції:
1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; 2) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;
3) $z = 2xy - 4x - 2y$; 4) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;
5) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; 6) $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

11. Знайти умовний екстремум функції: 1) $z = xy$ за умови, що $2x + 3y - 5 = 0$; 2) $z = xy^2$, якщо $x + 2y = 1$; 3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо $x + y + 3 = 0$.

12. Річні видатки підприємства виражаються функцією $f(x, y) = 1 + 9x + 64y + \dfrac{36}{x} + \dfrac{4}{y}$. За яких значень x і y ці видатки будуть мінімальними? Знайти коефіцієнти еластичності f при $x = 1$, $y = 1$.

13. Виробнича функція для даної фірми має вигляд $q = 4xy + y^2$, де x – капітал, y – праця. Витрати на одиницю капіталу складають 1 гр.од., а на одиницю праці – 2 гр.од. Знайти обсяги витрат на капітал і працю, за яких випуск продукції буде максимальним, якщо $x + 2y = 105$.

14. Результати вимірювань мають вигляд:

1)

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

; 2)

x	1	2	3	4	5	6
y	$-0,5$	0,2	0,4	1	1,4	1,9

;

3)

x	17,05	17,28	18,30	18,50	18,80	19,20
y	534	537	550	552	555	560

.

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність, знайти емпіричну формулу вигляду $y = ax + b$, використовуючи метод найменших квадратів.

Відповіді

1. 1) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, |x|\le 1; |y|\ge 1\}$; 2) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, xy\ge 0\}$; 3) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, |y|\le |x|, x\ne 0\}$; 4) $\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,\big|\, y>-x\}$; 5) $\mathbb{R}^2$; 6) $\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2\ge 0\}$; 7) $\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, x>0, y>0, z>0\}$.

2. 1) e^2; 2) 1; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) 2; 5) $e^{-\frac{1}{2}}$.

3. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$; 6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y(1+x^3)^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+x^3)^y\ln(1+x^3)$; 7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$; 8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}}-1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; 10) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

4. 1) $\operatorname{grad} z=(-2;-4)$, $|\operatorname{grad} z|=2\sqrt{5}$; 2) $\operatorname{grad} u=(2;-2;-4)$, $|\operatorname{grad} u|=2\sqrt{6}$; 3) $\operatorname{grad} u=(-2;6;-3)$, $|\operatorname{grad} u|=7$; 4) $\operatorname{grad} u=\left(1;\dfrac{3}{8}\right)$, $|\operatorname{grad} u|=\dfrac{\sqrt{73}}{8}$.

5. 1) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; 2) 0; 3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^{2y}\ln^2 x$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x(\sin y+2\cos y+x\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x(\cos y-\sin y-x\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x(\sin y+x\cos y)$.

6. а) 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$; 2) $E_x(z)=xy$, $E_x(z)|_{(1;1)}=1$, $E_y(z)=xy$, $E_y(z)|_{(1;1)}=1$; б) 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{x^3+2y^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

$\dfrac{6y^2}{x^3+2y^3}$; 2) $E_x(z)=\dfrac{3x^3}{x^3+2y^3}\dfrac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_x(z)|_{(1;1)}=\dfrac{1}{\ln 3}$, $E_y(z)=\dfrac{6y^3}{x^3+2y^3}\dfrac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_y(z)|_{(1;1)}=\dfrac{2}{\ln 3}$.

7. 1) $dz=3x^2y^4dx+4x^3y^3dy$, $d^2z=6xy^2(y^2dx^2+4xydxdy+2x^2dy^2)$; 2) $dz=-\dfrac{2y}{x^3}(ydx-xdy)$, $d^2z=\dfrac{2}{x^4}(3y^2dx^2-4yxdxdy+x^2dy^2)$; 3) $dz=2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)$, $d^2z=2^{xy}\ln 2(y^2\ln 2dx^2+2(1+xy\ln 2)dxdy+x^2\ln 2dy^2)$; 4) $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, $d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$; 5) $du=\cos(x+y+z)(dx+dy+dz)$, $d^2u=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

8. 1) $1,08$; 2) $0,005$; 3) $5,08$; 4) $8,29$; 5) $0,227$; 6) $108,972$.

9. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-f'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\Big(\dfrac{y}{x}\Big)\dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+v,u-v)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(u+v,u-v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+v,u-v)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(u+v,u-v)$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(\dfrac{u}{v},\dfrac{v}{w}\Big)\dfrac{1}{v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(\dfrac{u}{v},\dfrac{v}{w}\Big)\dfrac{u}{v^2}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(\dfrac{u}{v},\dfrac{v}{w}\Big)\dfrac{1}{w}$, $\dfrac{\partial z}{\partial w}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(\dfrac{u}{v},\dfrac{v}{w}\Big)\dfrac{v}{w^2}$; 4) $\dfrac{\partial w}{\partial u}=2u\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)\Big)+2v\dfrac{\partial f}{\partial z}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)$, $\dfrac{\partial w}{\partial v}=2v\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)\Big)+2u\dfrac{\partial f}{\partial z}(u^2+v^2,u^2-v^2,2uv)$.

10. 1) $z_{\min}=z(0,3)=-9$; 2) $z_{\min}=z(1,2)=-7$; 3) не існує; 4) $z_{\min}=z(0,0)=0$; 5) $z_{\min}=z\left(0,-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$, у стаціонарній точці $\left(2;-\dfrac{2}{3}\right)$ екстремуму немає; 6) $z_{\max}=z\,(-1,1)=1$.

11. 1) $z_{\max}=z\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{25}{24}$; 2) $z_{\min}=z(1,0)=0$, $z_{\max}=z\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}$; 3) $z_{\min}=z\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{19}{4}$.

12. $x=2$, $y=\dfrac{1}{4}$, $\min f=f\left(2,\dfrac{1}{4}\right)=69$, $E_x(f)|_{(1;1)}\approx-0,237$, $E_y(f)|_{(1;1)}\approx 0,526$.

13. $x=45$, $y=30$, $q_{\max}=6300$ гр.од.

14. 1) $y=0,425x+1,175$; 2) $y=0,46x-0,89$; 3) $y=15,317x+266,86$.

Розділ 10
Кратні інтеграли

§1. Подвійні інтеграли

1.1. Означення подвійного інтеграла та його властивості. Розглянемо задачу, яка приводить до подвійного інтеграла.

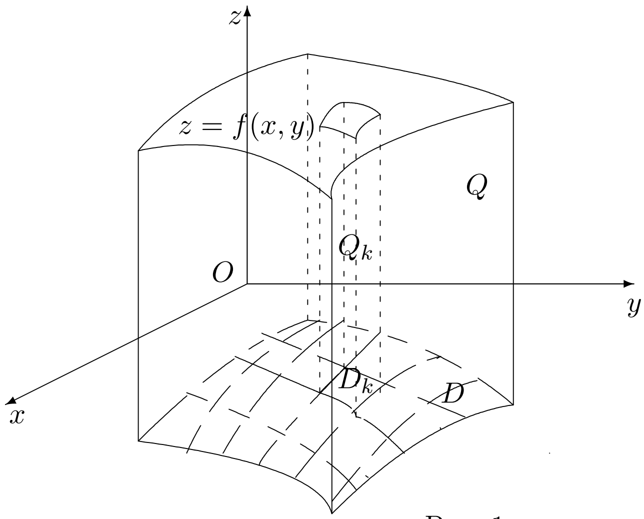


Рис. 1

Нехай в просторі $\mathbb{R}^3$ задано тіло Q (рис. 1), яке обмежене зверху графіком неперервної і невід'ємної функції $z = f(x, y)$, яка визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямною для якої є межа області D, яка лежить в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz. Такого типу тіло називається **криволінійним циліндром**. Знайдемо об'єм $V(Q)$ заданого тіла. Для цього розіб'ємо область D на елементарні частини D_k так, що $D = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$, причому D_k не мають спільних внутрішніх точок, тобто їхній переріз є порожньою множиною. На кожній з елементарних частин D_k побудуємо циліндричне тіло Q_k. Тоді $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$, де $Q_k \cap Q_j = \emptyset$, якщо $k \neq j$. Тому

$V(Q) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(Q_k)$.

Об'єм кожного елементарного тіла Q_k обчислимо наближено. Для цього візьмемо в D_k довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ і замінимо тіло Q_k прямим циліндром з площею основи $S(D_k)$ і висотою $f(\xi_k, \eta_k)$. Отже, маємо наближену рівність $V(Q_k) \approx f(\xi_k, \eta_k) S(D_k)$, а тому

$$V(Q) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S(D_k). \tag{1}$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим дрібніше розбиття області D на частини. Нехай λ – найбільший з діаметрів областей D_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ (діаметром області D_k є найбільша відстань між точками області D_k). Якщо перейти до границі при $\lambda \to 0$ в рівності (1), то одержимо точну рівність

$$V(Q) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S(D_k). \tag{2}$$

Скінченна границя в правій частині (2) називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D і позначається символом $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$.

Отже, об'єм тіла Q обчислюється за допомогою подвійного інтеграла, тобто

$$V(Q) = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \tag{3}$$

Зауважимо, що циліндричне тіло Q в просторі є аналогом криволінійної трапеції на площині. Тому подвійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

Дамо тепер точне означення подвійного інтеграла для довільної функції (не обов'язково невід'ємної як вище).

Нехай D – деяка обмежена квадровна область, а $z = f(x, y)$ – функція, яка визначена й обмежена в цій області.

Розіб'ємо область D довільно на n квадровних частин D_k, які не мають спільних внутрішніх точок, з площами $S(D_k)$,

$k \in \{1, \dots, n\}$. У кожній частині D_k візьмемо довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S(D_k), \tag{4}$$

яку назвемо **інтегральною сумою** для функції f в області D. Нехай λ – найбільший з діаметрів частинних областей D_k.

Якщо інтегральна сума (4) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття області D на частини, ні від вибору точок $(\xi_k; \eta_k) \in D_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, то функція $f(x, y)$ називається **інтегровною** в області D. Границя I при цьому називається **подвійним інтегралом від функції** $f(x, y)$ **по області** D і позначається символом $\iint\limits_D f(x, y) dxdy$.

Отже,

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S(D_k).$$

Приклад 1. Нехай функція $f(x, y)$ є сталою, тобто $f(x, y) = C$, $(x; y) \in D$. Довести, що f є інтегровною на D і обчислити $\iint\limits_D C dxdy$.

◀ Аналогічно, як це описано вище, складемо інтегральну суму σ для функції $f(x, y) = C$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} C S(D_k) = C \sum_{k=1}^{n} S(D_k) = C\, S(D).$$

Оскільки існує скінченна границя при $\lambda \to 0$ інтегральної суми σ

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} C\, S(D) = C S(D),$$

то функція $f(x, y) = C$, $(x; y) \in D$, є інтегровною на D і

$$\iint\limits_D C dxdy = C\, S(D). \tag{5}$$

З формули (5) при $C = 1$ одержуємо, що

$$\iint\limits_D dxdy = S(D),$$

тобто площу області D можна знайти за допомогою подвійного інтеграла. ▶

Як і у випадку функції однієї змінної, можна довести, що *будь-яка неперервна в області D функція є інтегровною в цій області.*

Основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла. Сформулюємо деякі з них.

1) *Якщо A – довільне число, а $f(x,y)$ – інтегровна в області D, то і функцій $Af(x,y)$ також інтегровна в D і*

$$\iint\limits_D Af(x,y)dxdy = A\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

2) *Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровні в області D, то їхня алгебраїчна сума також інтегровна в цій області і*

$$\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

З властивостей 1) і 2) випливає властивість

$$\iint\limits_D (Af(x,y) + Bg(x,y))dxdy = A\iint\limits_D f(x,y)dxdy +$$

$$+B\iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

яку називають **властивістю лінійності подвійного інтеграла.**

3) *Якщо область D є об'єднанням областей D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, у кожній з яких f інтегровна, то в області D ця функція також інтегровна і*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Цю властивість називають **властивістю адитивності подвійного інтеграла.**

4) *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна по області* D *і* $m \le f(x,y) \le M$, $(x;y) \in D$, *то*

$$mS(D) \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS(D).$$

Зокрема, якщо $f(x,y) \ge 0$, $(x;y) \in D$, *то* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$.

5) *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в області* D, *то в цій області існує точка* $(\xi;\eta)$ *така, що*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)S(D).$$

Цю властивість називають **теоремою про середнє для подвійного інтеграла.**

6) *Якщо функція* $f(x,y)$ *інтегровна по області* D, *то* $|f(x,y)|$ *так само є інтегровною по* D *і правильна нерівність*

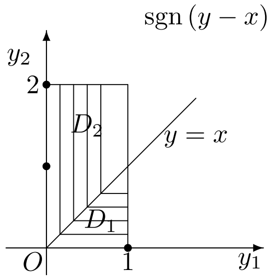
$$\Big|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\Big| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Зауважимо, що властивість 3) можна використати для обчислення інтеграл від розривної функції.

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(y-x)dxdy$, якщо $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

◄ Відомо,що

$$\operatorname{sgn}(y-x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } y-x<0, \\ 0, & \text{якщо } y-x=0, \\ 1, & \text{якщо } y-x>0. \end{cases}$$



Тому область D зручно розбити на дві частини D_1 і D_2. В області D_1 $\operatorname{sgn}(y-x) = -1$, а в області D_2 $\operatorname{sgn}(y-x) = 1$. На межі $y - x = 0$, що розділяє D_1 і D_2 $\operatorname{sgn}(y-x) = 0$. Тому пряма $y = x$ є лінією розриву підінтегральної функції.

Згідно з властивістю 3) маємо

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(y-x)dxdy = \iint\limits_{D_1} \operatorname{sgn}(y-x)dxdy + \iint\limits_{D_2} \operatorname{sgn}(y-x)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} (-1)dxdy + \iint\limits_{D_2} 1\,dxdy = -S(D_1) + S(D_2).$$

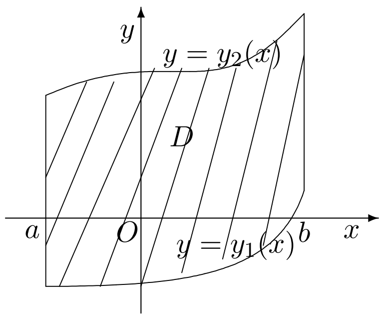
Знайдемо площі $S(D_1)$ і $S(D_2)$. Очевидно, що $S(D_1) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$, а $S(D_2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Отже,

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(y-x)dxdy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \quad \blacktriangleright$$

1.2. Зведення подвійного інтеграла до повторного. У цьому пункті розглянемо один з основних методів обчислення подвійних інтегралів. Він грунтується на зведенні подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ від неперервної функції f до повторного.

Розглянемо це зведення для двох типів області інтегрування.



1) Нехай область $D \subset \mathbb{R}^2$ обмежена знизу графіком неперервної функції $y = y_1(x)$, зверху – графіком неперервної функції $y = y_2(x)$, а з боків – прямими $x = a$ і $x = b$. Вважатимемо, що $y_1(x) \le y_2(x)$, $x \in [a;b]$. Таку область називатимемо **y-трапецієвидною**.

Для області D побудуємо криволінійний циліндр Q, який обмежений зверху поверхнею, що є графіком неперервної і невід'ємної функції $z = f(x,y)$, $(x;y) \in D$ так, як це зроблено в пункті 1.1. Обчислимо об'єм $V(Q)$ двома способами. У першому пункті ми з'ясували, що $V(Q) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. З іншого боку, обчислимо цей об'єм за допомогою площі поперечного перерізу $S(x)$, $x \in [a;b]$, а саме, $V(Q) = \int\limits_a^b S(x)dx$. Знайдемо формулу для обчислення площі поперечного перерізу $S(x)$.

Поперечним перерізом Q_x тіла Q площиною, що проходить через точку $x \in [a;b]$ перпендикулярно до осі Ox, є криволінійна трапеція, яка обмежена знизу відрізком $[y_1(x); y_2(x)]$; зверху – графіком функції $z = f(x,y)$, а з боків – прямими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ (рис. 2). Площа перерізу Q_x обчислюється за допомогою інтеграла

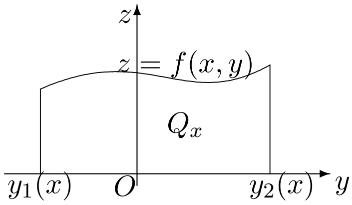


Рис. 2

$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Отже, об'єм $V(Q)$ знаходиться за формулою

$$V(Q) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

Цей інтеграл називається **повторним.**

Остаточно для даного типу областей одержуємо рівність

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx, \qquad (6)$$

яка називається **формулою зведення подвійного інтеграла до повторного.**

Зокрема, якщо область $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ – прямокутник, то формула (6) має вигляд

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy \Big) dx. \qquad (7)$$

Зауважимо, що формули (6), (7) правильні не лише для невід'ємної неперервної функції f, а для довільної неперервної функції f.

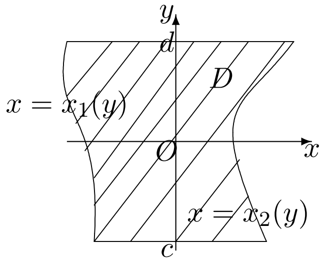


Рис. 3

2) Нехай область $D \subset \mathbb{R}^2$ обмежена знизу прямою $y = c$, зверху – прямою $y = d$, а з боків – графіками неперервних функцій $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in [c; d]$ (рис. 3). Таку область називатимемо x-**трапецієвидною**.

Аналогічно як і в першому випадку доводиться, що правильною є така формула зведення подвійного інтеграла до повторного:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy. \tag{8}$$

Зауважимо, що коли область інтегрування є одночасно областю обох типів, то правильними є формули (6) і (8), тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx =$$

$$= \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy. \tag{9}$$

Зокрема, у випадку, коли $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$, формула (9) має вигляд

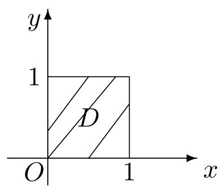
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy \Big) dx =$$

$$= \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b f(x,y)dx \Big) dy. \qquad (10)$$

Формули зведення подвійного інтеграла до повторного зручні тим, що вони дозволяють використовувати методи обчислення визначених інтегралів при обчисленні подвійних інтегралів.

Якщо область D не належить ні до першого, ні до другого типу, то її треба подати у вигляді об'єднання областей цих типів, а потім скористатися властивістю 3) подвійного інтеграла і формулами зведення подвійного інтеграла до повторного.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy$, якщо $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.



◀ Очевидно, що підінтегральна функція є неперервною в прямокутнику D. Тоді на основі формули (10) маємо

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy \Big) dx.$$

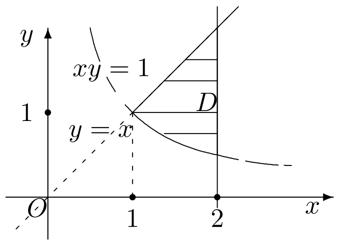
Для обчислення повторного інтеграла спочатку знайдемо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = x^2 \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = x^2 \operatorname{arctg} y \Big|_{y=0}^{y=1} = x^2 \operatorname{arctg} 1 - x^2 \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi x^2}{4}.$$

Тут x^2 винесено за знак інтеграла, оскільки інтегрування здійснюється по змінній y при фіксованому x, а тому в цьому інтегралі x^2 є сталою величиною. Отже,

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy = \int\limits_0^1 \frac{\pi x^2}{4} dx = \frac{\pi}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}. \quad ▶$$

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, якщо область D обмежена прямими $x = 2$, $y = x$ і гіперболою $xy = 1$.



◄ Зобразимо задану область інтегрування D на рисунку. Легко знаходимо точку перетину прямої $y = x$ з гіперболою $xy = 1$, якою є точка $(1;1)$. Область D – це область першого типу, що обмежена знизу графіком функції $y = \frac{1}{x}$, зверху $y = x$ і з боків – прямими $x = 1$ та $x = 2$.

У цій області D функція $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$ є неперервною. Тому, згідно з формулою (6), маємо

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \Big) dx.$$

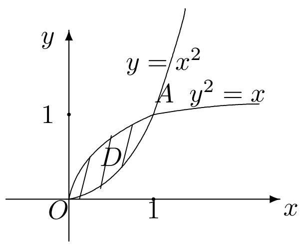
Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = x^2 \int\limits_{1/x}^{x} y^{-2} dy = -\frac{x^2}{y}\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = -x + x^3.$$

Тому

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy = \int\limits_1^2 (x^3 - x) dx = \Big(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big)\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}. \quad ►$$

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y) dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ і $y^2 = x$.



◄ Зобразимо область інтегрування D геометрично. Знайдемо точки перетину ліній $y = x^2$ та $y^2 = x$ як розв'язки системи $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x. \end{cases}$

Маємо $x^4 = x$, тобто $x(x^3 - 1) = 0$ і, отже, $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$. Звідси отримуємо, що є дві точки перетину цих ліній $O(0;0)$ і $A(1;1)$.

Область D є областю обох типів. Тому для обчислення заданого подвійного інтеграла від неперервної в D функції можемо скористатися формулою (6) або (8). Використаємо формулу (8), зауваживши при цьому, що D обмежена зліва графіком функції $x = y^2$, а справа – графіком функції $x = \sqrt{y}$, знизу ця область обмежена прямою $y = 0$, а зверху – прямою $y = 1$. Тоді

$$\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)dx \Big) dy.$$

Спочатку обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)dx = \Big(\frac{x^3}{3} + yx \Big)\Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{4y\sqrt{y}}{3} - \frac{y^6}{3} - y^3.$$

Тому

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\frac{4y\sqrt{y}}{3} - \frac{y^6}{3} - y^3 \Big) dy = \Big(\frac{8}{15} y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^7}{21} - \frac{y^4}{4} \Big)\Big|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

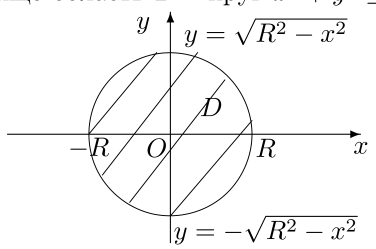
Отже,

$$\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy = \frac{33}{140}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 6. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dxdy,$$

якщо область D – круг $x^2 + y^2 \le R^2$.



◀ Область D можна розглядати як область першого типу. Вона обмежена знизу півколом $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, зверху – півколом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, а з боків прямими $x = -R$ і $x = R$. Тоді згідно з формулою (8) маємо

$$\iint\limits_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dxdy = \int\limits_{-R}^{R} \Big(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy \Big) dx.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\sqrt{R^2-x^2}dy = \sqrt{R^2-x^2}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy =$$

$$= \sqrt{R^2-x^2}\frac{y^3}{3}\Big|_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3}(R^2-x^2)^2.$$

Тоді

$$\iint\limits_D y^2\sqrt{R^2-x^2}dxdy = \frac{2}{3}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)^2dx = \frac{4}{3}\int\limits_0^R(R^2-x^2)^2dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^R(R^4-2R^2x^2+x^4)dx = \frac{4}{3}\Big(R^4x-\frac{2}{3}R^2x^3+\frac{x^5}{5}\Big)\Big|_0^R =$$

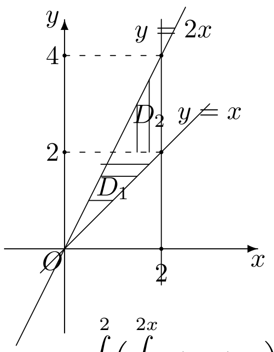
$$= \frac{4}{3}\Big(R^5-\frac{2}{3}R^5+\frac{R^5}{5}\Big) = \frac{32}{45}R^5. \quad \blacktriangleright$$

У багатьох задачах деякий повторний інтеграл, наприклад, $\int\limits_a^b\Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx$ від неперервної функції f треба звести до інтеграла вигляду $\int\limits_c^d\Big(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy$. Це означає, що треба поміняти порядок інтегрування у заданому інтегралі.

Приклад 7. Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int\limits_0^2\Big(\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy\Big)dx,$$

якщо f – деяка неперервна функція.



◀ Зобразимо область D інтегрування, яка обмежена прямими $x = 0$, $x = 2$, $y = x$ і $y = 2x$, на рисунку. Вона не є областю другого типу, але її можна подати як об'єднання областей D_1 і D_2, які є областями другого типу. Тоді інтеграл згідно з властивістю 3) записується у вигляді

$$\int_0^2 \Big(\int_x^{2x} f(x,y)dy \Big) dx = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Інтеграли по D_1 і D_2 запишемо скориставшись формулою (8):

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx \Big) dy;$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_2^4 \Big(\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx \Big) dy.$$

Тому остаточно матимемо

$$\int_0^2 \Big(\int_x^{2x} f(x,y)dy \Big) dx = \int_0^2 \Big(\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx \Big) dy + \int_2^4 \Big(\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx \Big) dy. \quad ▶$$

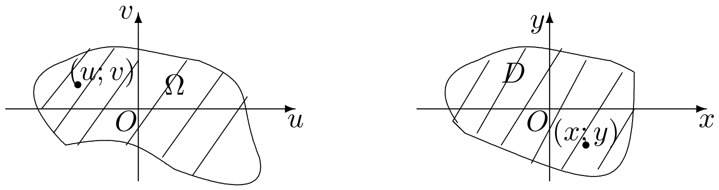
1.3. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій квадровній області D. Тоді існує подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x,y)dxdy. \tag{11}$$

Припустимо, що функції

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v) \tag{12}$$

здійснюють взаємно однозначне відображення між областями $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ і $D \subset \mathbb{R}^2$.



Вважатимемо, що φ і ψ мають в області Ω неперервні частинні похідні і визначник, складений з цих похідних

$$J(u,v) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u;v) \in \Omega. \tag{13}$$

Визначник (13) називається **функціональним визначником** або **якобіаном**.

Можна довести, що при зроблених припущеннях правильна **формула заміни змінних**

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv, \tag{14}$$

де інтеграл, який стоїть справа у формулі (14), обчислюється, взагалі кажучи, простіше.

Зауважимо, що формула (14) є правильною й тоді, коли порушується взаємно-однозначна відповідність між областями Ω і D або умова (13) у скінченній кількості точок чи на скінченній кількості ліній області Ω.

У застосуваннях важливу роль відіграють полярні координати:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{15}$$

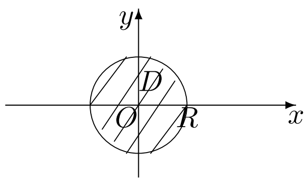
Якщо в подвійному інтегралі перейти до полярних координат за формулами (15), то одержимо формулу

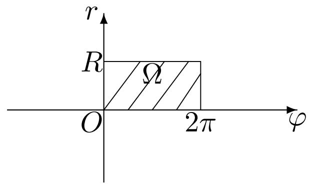
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi, \tag{16}$$

бо

$$J(r,\varphi) \equiv \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Якщо область D – круг з центром в початку координат і радіусом R, то $0 \le r \le R$, а $0 \le \varphi < 2\pi$, а це означає, що Ω – прямокутник.





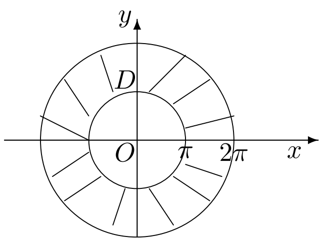
У цьому випадку рівність (16) набуває вигляду

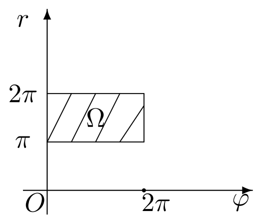
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\Big)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R\Big(\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi\Big)dr. \qquad (17)$$

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, якщо $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$ – кільце.

◀ Зобразимо область D на рисунку. Якщо перейти до полярних координат за формулами (15), то одержимо, що $\Omega = \{(r;\varphi) \,:\, \pi \le r \le 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ – прямокутник.





Тому
$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_{\pi}^{2\pi} r\sin r dr\Big)d\varphi.$$
Обчислимо внутрішній визначений інтеграл інтегруванням частинами
$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} r\sin r dr = \left|\begin{matrix} u=r, & du=dr \\ dv=\sin r dr, & v=-\cos r\end{matrix}\right| = -r\cos r\Big|_{\pi}^{2\pi} +$$
$$+\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos r dr = -2\pi-\pi+\sin r\Big|_{\pi}^{2\pi} = -3\pi.$$
Отже,
$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} 3\pi d\varphi = -3\pi\varphi\Big|_0^{2\pi} = -6\pi^2. \quad \blacktriangleright$$

1.4. Застосування подвійного інтеграла.

1.4.1. Обчислення об'ємів. У пункті 1.1 було розглянуто геометричну задачу, яка лежить в основі означення подвійного інтеграла, а саме задачу про обчислення об'єму криволінійного циліндра. Установлено, що для циліндра Q, обмеженого знизу областю D, а зверху поверхнею $z = f(x,y)$, де f невід'ємна неперервна функція, наближене значення об'єму визначається інтегральною сумою
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)S(D_k). \tag{18}$$

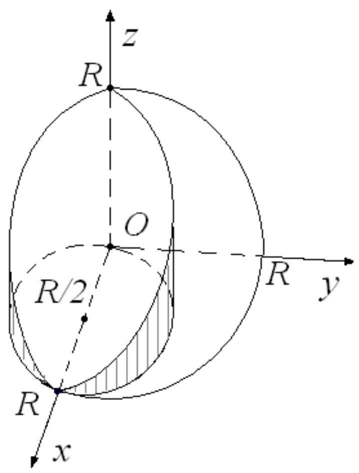
Точне значення об'єму – це границя, до якої прямують інтегральні суми при здрібненні розбиття фігури Q. Оскільки при зроблених вище припущеннях відносно f і Q границя інтегральних сум (18) існує і дорівнює подвійному інтегралу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, то об'єм V криволінійного циліндра, обмеженого знизу областю D, а зверху поверхнею $z = f(x,y)$, де f

неперервна функція, виражається подвійним інтегралом

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{19}$$

Приклад 9. Знайти об'єм тіла, вирізаного з кулі радіуса R, прямим круговим циліндром діаметра R, твірна якого проходить через центр кулі.

◄ Сумістимо початок координат з центром кулі, спрямувавши вісь Oz по твірній циліндра, а вісь Ox – вздовж діаметра основи циліндра. Згідно з симетрією тіла відносно координатних площин Oxy і Oxz досить знайти об'єм частини тіла, що знаходиться в першому октанті, і одержаний результат помножити на чотири. Скориставшись формулою (19), дістанемо



$$V = 4\iint\limits_D zdxdy,$$

де область D – півкруг в площині Oxy радіуса $\dfrac{R}{2}$ з центром в точці $\left(\dfrac{R}{2};0\right)$, тобто $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le Rx, x \ge 0, y \ge 0\}$. Оскільки рівняння сфери радіуса R з центром в початку координат має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то в першому октанті $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і, отже,

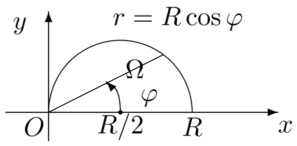
$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy.$$

Перейшовши до полярних координат, згідно з формулою (16), дістанемо

$$V = 4\iint\limits_\Omega \sqrt{R^2 - 4r^2}rdrd\varphi,$$

де $\Omega = \left\{(r;\varphi) \,:\, 0 \le r \le R\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$, тобто

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2 - r^2}dr.$$



Оскільки

$$\int\limits_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2-r^2}rdr=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{R\cos\varphi}(R-r^2)^{1/2}d(R^2-r^2)=$$

$$=-\Big(\frac{(R^2-r^2)^{3/2}}{3}\Big)\Big|_0^{R\cos\varphi}=-\frac{(R^2-R^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{3}+\frac{R^3}{3}=\frac{R^3}{3}(1-\sin^3\varphi),$$

то

$$V=4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{R^3}{3}(1-\sin^3\varphi)d\varphi=\frac{4}{3}R^3\Big(\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi-\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi\Big)=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\Big(\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi+\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi\Big)=\frac{4}{3}R^3\Big(\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\Big(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big)=\frac{4}{3}R^3\Big(\frac{\pi}{2}+\Big(-1+\frac{1}{3}\Big)\Big)=\frac{4}{3}R^3\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\Big).$$

Отже,

$$V=\frac{4}{3}R^3\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\Big)\text{ куб.од. }\blacktriangleright$$

1.4.2. Обчислення площі. Покладаючи в подвійному інтегралі підінтегральну функцію $f(x,y)$ тотожно рівною одиниці, $f(x,y)=1$, $(x;y)\in D$, одержуємо інтеград

$$\iint\limits_D dxdy, \qquad (20)$$

який дорівнює, очевидно, площі області D, оскільки цій площі дорівнюватиме кожна з інтегральних сум, що відповідає інтегралу (20) (п. 1.1.).

Формула

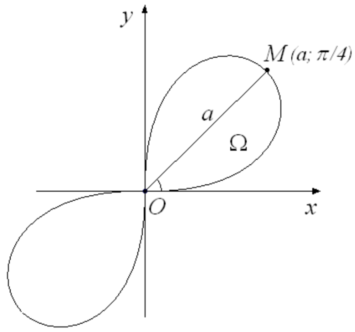
$$S = \iint\limits_D dxdy \tag{21}$$

для обчислення площі часто зручніша, ніж формула

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

яка визначає площу криволінійної трапеції, оскільки вона застосовна не тільки для обчислення площі криволінійної трапеції, але й площі довільної квадровної фігури.

Приклад 10. Знайти площу, обмежену **лемніскатою** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.



◄ Поклавши $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, перетворимо рівняння кривої до вигляду $r^2 = 2a^2\sin\varphi\cos\varphi = a^2\sin 2\varphi$. Очевидно, що зміні полярного кута φ від 0 до $\dfrac{\pi}{4}$ відповідає чверть шуканої площі.

Отже, якщо перейти до полярних координат в інтегралі (21), матимемо

$$S = 4\iint\limits_\Omega rdrd\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} rdr = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi = -a^2\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2. \blacktriangleright$$

1.4.3. Маса пластинки. Координати центра маси. Розглянемо на площині Oxy матеріальну пластинку, тобто деяку область D, по якій розподілена маса з густиною $\rho(x, y)$. Вважатимемо, що ρ – неперервна функція в області D і обчислимо масу цієї пластинки. Розіб'ємо деяким чином область D

на частини D_k, як у пункті 1.1, і в кожній з цих частин візьмемо довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$. Масу кожного елемента D_k можна вважати рівною наближено $\rho(\xi_k, \eta_k) S(D_k)$, де $S(D_k)$ – площа D_k. Тоді маса всієї пластинки наближено дорівнює сумі

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k) S(D_k).$$

Для того щоб одержати точне значення маси пластинки, перейдемо в цій сумі до границі при $\lambda \to 0$, де λ – найбільший з діаметрів областей D_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$. При цьому записана вище сума перейде у подвійний інтеграл, а тому маса пластинки визначається рівністю

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Розглянемо точку, віддалену від осі u на відстань d, в якій зосереджена маса m. **Статичним моментом** цієї точки відносно осі u називається величина

$$M_u = md,$$

а **моментом інерції** –

$$I_u = md^2.$$

Якщо є система точок, віддалених від осі u на d_i, маси яких m_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то

$$M_u = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i,$$

$$I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2.$$

Координати центра маси системи точок знаходиться за формулою

$$u_c = \frac{M_u}{m}.$$

У випадку пластинки, міркуючи аналогічно як при одержанні формули для знаходження маси системи точок, отримуємо, що

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy,$$

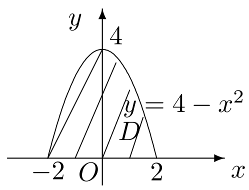
$$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy \ - \ \textbf{полярний момент}.$$

Координати центра маси пластинки визначаються формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Приклад 11. Знайти координати центра маси однорідної пластинки, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і віссю Ox.



◄ Оскільки пластинка однорідна, то $\rho(x,y) = \rho_0$, $(x;y) \in D$, ρ_0 – стала. Пластинка, як видно з рисунка, симетрична відносно осі Oy, то зрозуміло, що $x_c = 0$, а тому треба знайти y_c. Маємо

$$m = \iint\limits_D \rho_0 dxdy = \rho_0 \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} dy = \rho_0 \int\limits_{-2}^{2} y\Big|_0^{4-x^2} dx =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{-2}^{2} (4-x^2)dx = \rho_0 \Big(4x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-2}^{2} = 2\rho_0\Big(8 - \frac{8}{3}\Big) = \frac{32}{3}\rho_0,$$

$$M_x = \rho_0 \iint\limits_D ydxdy = \rho_0 \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} ydy = \frac{1}{2}\rho_0 \int\limits_{-2}^{2} (4-x^2)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0 \int\limits_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)dx = \frac{1}{2}\rho_0\Big(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\Big)\Big|_{-2}^{2} =$$

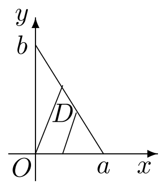
$$= \rho_0\Big(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\Big) = \frac{256}{15}\rho_0.$$

Тоді

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{256}{15}\rho_0}{\frac{32}{3}\rho_0} = \frac{8}{5}.$$

Отже, координати центра маси такі: $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{8}{5}$. ►

Приклад 12. Знайти полярний момент інерції фігури, обмеженої лініями $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, якщо $\rho(x, y) = 1$.



◄ Момент інерції заданої фігури D відносно початку координат дорівнює

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}(a-x)} (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^a \Big(x^2y+\frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx =$$

$$= \int\limits_0^a \Big(\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\Big)dx = \Big(\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\frac{1}{4}(a-x)^4\Big)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{3}ba^3 - \frac{1}{4}ba^3 + \frac{1}{12}b^3a = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}. \blacktriangleright$$

Вправи

1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:
1) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $x + y + z = 1$;
2) $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ і розміщеного в першому октанті;
3) $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $x = 1$.

2. Обчислити площу області D, яка обмежена лініями:
1) $y^2 = x + 1$, $x + y = 1$;
2) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$;
3) $y = 4x - x^2$, $y = 2x^2 - 5x$.

3. Обчислити подвійний інтеграл:
1) $\iint\limits_D (x^2 + xy + 2y^2)dxdy$, $D = \{(x; y) :\ 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 - x\}$;
2) $\iint\limits_D xydxdy$, $D = \{(x; y) :\ 1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$;

3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D – трикутник, який обмежений прямими $y=0$, $x=2$, $y=\frac{x}{2}$;
4) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D – область, яка обмежена лініями $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$;
5) $\iint\limits_D \sqrt{x}ydxdy$, D – область, яка обмежена лініями $y=x^2$, $y=2-x^2$, $x=0$.

4. Обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярної системи координат:
1) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, $D=\{(x;y):\ x^2+y^2\leq 2$;
2) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, D – область, яка обмежена віссю Ox і верхнім півколом $x^2+y^2=1$;
3) $\iint\limits_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$, $D=\{(x;y):\ x^2+y^2\leq 2\}$;
4) $\iint\limits_D \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, $D=\{(x;y):\ 1\leq x^2+y^2\leq 2\}$.

5. Знайти координати центра маси однорідної фігури, обмеженої лініями:
1) $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$;
2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=1$;
3) $y^2=x$, $x^2=y$.

6. Знайти моменти інерції однорідної фігури, обмеженої лініями: 1) $y=2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$, відносно осі Ox; 2) кардоїдою $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0;2\pi]$, відносно осі Ox; 3) $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, відносно початку координат.

Відповіді

1. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 12; 3) $\dfrac{88}{105}$. **2.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) 12; 3) $\dfrac{27}{2}$. **3.** 1) $\frac{7}{24}$; 2) $\frac{9}{4}$; 3) 13/6; 4) $\frac{67}{120}$; 5) $\frac{13}{24}$. **4.** 1) $\frac{16}{3}\pi$; 2) $\frac{\pi}{2}(e-1)$; 3) $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1)$; 4) $\frac{3}{8}\pi$. **5.** 1) $x_c=\dfrac{2}{5}$, $y_c=0$; 2) $x_c=\dfrac{10}{3(\pi-2)}$, $y_c=\dfrac{2}{\pi-2}$; 3) $x_c=y_c=\dfrac{9}{20}$. **6.** 1) 2,4; 2) $\dfrac{21}{32}\pi a^4$; 3) $\dfrac{8}{3}$.

§2. Потрійні інтеграли

2.1. Означення потрійного інтеграла та його властивості.

2.1.1. Задача про визначення маси тіла. Нехай в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ задано матеріальне тіло Q. Розглянемо деяку його елементарну частину ΔQ, яка містить точку $M(x;y;z)$. Відношення маси Δm цього малого тіла ΔQ до його об'єму Δv, тобто $\dfrac{\Delta m}{\Delta v}$, називається **середньою густиною** тіла ΔQ. Якщо існує скінченна границя ρ відношення $\dfrac{\Delta m}{\Delta v}$ при умові, що тіло ΔQ стягується в точку $M(x;y;z)$, то ця границя називається **густиною** в точці M. Вона залежить від положення точки M, а тому є функцією точки або функцією її координат, тобто $\rho = \rho(M)$ або $\rho = \rho(x,y,z)$.

Обчислимо масу m тіла Q, вважаючи, що густина в кожній точці цього тіла є неперервною функцією. Якщо б тіло було однорідним, тобто густина ρ в кожній його точці була б одна й та сама, що дорівнює ρ_0, то його маса m дорівнювала б $m = \rho_0 v$, де v – об'єм тіла Q. Оскільки в загальному випадку густина ρ змінюється від точки до точки, то ця формула для обчислення маси непридатна. Тому скористаємося методом розбиття тіла Q на елементарні частини, який ми неодноразово використовували раніше.

Розіб'ємо тіло Q на n малих частин Q_k, $k \in \{1,\dots,n\}$ так, що $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$. У кожному тілі Q_k виберемо точку $M_k(x_k;y_k;z_k)$. Якщо тіло Q_k мале, то можна вважати, що густина у кожному з них змінюється мало і майже не відрізняється від густини $\rho_k = \rho(M_k) = \rho(x_k,y_k,z_k)$. Тому можна наближено визначити масу m_k тіла Q_k рівністю

$$m_k \approx \rho_k v_k = \rho(x_k,y_k,z_k)v_k, \quad k \in \{1,\dots,n\},$$

де v_k – об'єм тіла Q_k, $k \in \{1,\dots,n\}$, тобто $v_k = V(Q_k)$.

Оскільки маса m всього тіла дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, то для її обчислення одержуємо наближену рівність

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) v_k.$$

За точне значення маси m візьмемо границю цієї суми, коли кожне з малих тіл Q_k стягується в точку, тобто максимальний діаметр $\lambda = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} d(Q_k)$ прямує до нуля,

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k) v_k.$$

Розв'язування задачі про знаходження маси тіла привело нас до вивчення границі певних інтегральних сум. Оскільки до знаходження границі сум такого вигляду зводиться багато задач геометрії, фізики, хімії і т.п., то природно вивчити властивості границь таких сум у загальному вигляді, незалежно від тієї або іншої задачі, що приведе нас до поняття потрійного інтеграла.

2.1.2. Потрійний інтеграл і його властивості. Основні поняття і теореми для потрійних інтегралів аналогічні відповідним поняттям і теоремам для подвійних інтегралів. Нехай Q – обмежена кубовна область у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ і нехай в цій області визначена обмежена функція $u = f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо область Q на n кубовних областей Q_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ так, щоб довільні дві частини не мали спільних внутрішніх точок і $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$. У кожній частині Q_k візьмемо довільну точку $M_k(x_k; y_k; z_k)$ і складемо **інтегральну суму**

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) V(Q_k), \tag{1}$$

де $V(Q_k)$ – об'єм тіла Q_k. Нехай d_k – діаметр Q_k, а $\lambda = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} d_k$.

Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття області Q на частини, ні від вибору точок $(x_k; y_k; z_k) \in Q_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, то функція $f(x, y, z)$ називається **інтегровною** в області Q. Границя I при цьому називається **потрійним інтегралом** від функції f по області Q і позначається символом $\iiint\limits_Q f(M)dv$ або $\iiint\limits_Q f(x, y, z)dxdydz$.

Отже,

$$\iiint\limits_Q f(M)dv = \iiint\limits_Q f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)V(Q_k).$$

Повертаючись до пункту 2.1.1 робимо висновок, що маса m тіла Q дорівнює потрійному інтегралу від густини $\rho = \rho(x, y, z)$, тобто

$$m = \iiint\limits_Q \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Ми бачимо, що потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок, коли область інтегрування міститься в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$. Як і у випадку подвійного інтеграла, має місце **теорема існування потрійного інтеграла**, яку наведемо без доведення.

Теорема. *Функція, яка неперервна в замкненій кубовній області, інтегровна в цій області.*

Потрійний інтеграл має ті самі властивості, що й подвійний інтеграл.

1) *Сталий множник можна виносити за знак потрійного інтеграла, тобто*

$$\iiint\limits_Q Af(x, y, z)dxdydz = A \iiint\limits_Q f(x, y, z)dxdydz.$$

2) *Якщо функції* f *і* g *інтегровні в* Q*, то їхня алгебраїчна сума так само інтегровна в* Q *і*

$$\iiint\limits_Q (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz \pm$$

$$\pm \iiint\limits_Q g(x,y,z)dxdydz.$$

3) *Якщо область* Q *є об'єднанням областей* Q_k*,* $k \in \{1,\ldots,n\}$*, тобто* $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$*, де будь-які області* Q_k *і* Q_j *не мають спільних внутрішніх точок,* $k \neq j$*, у кожній з яких* f *інтегровна, то в області* Q *ця функція також інтегровна, і*

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{Q_k} f(x,y,z)dxdydz.$$

4) *Якщо функція* f *інтегровна в області* Q *і* $m \leq f(x,y,z) \leq M$*,* $(x;y;z) \in Q$*, то*

$$mV(Q) \leq \iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz \leq MV(Q).$$

5) *Якщо функція* f *неперервна в замкненій обмеженій області* Q*, то в цій області існує така точка* $M_0(x_0;y_0;z_0)$*, що*

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V(Q),$$

де $V(Q)$ *– об'єм тіла* Q*.*

Ця властивість називається **теоремою про середнє значення**.

6) *Якщо функція f інтегровна в області Q, то і функція $|f|$ також інтегровна в Q і правильна нерівність*

$$\Big|\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz\Big| \le \iiint\limits_Q |f(x,y,z)|dxdydz.$$

Очевидно, що коли $f(x,y,z)=1$, $(x;y;z)\in Q$, то

$$\iiint\limits_Q dv = V(Q).$$

Це випливає з того, що у даному випадку будь-яка інтегральна сума має вигляд $\sum\limits_{k=1}^{n} 1V(Q_k) = V(Q)$, тобто дорівнює об'єму цього тіла.

2.2. Обчислення потрійного інтеграла за допомогою повторного інтегрування.

2.2.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах. Обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів. Припустимо, що областю інтегрування Q є тіло, яке обмежене знизу поверхнею $z=z_1(x,y)$, зверху – поверхнею $z=z_2(x,y)$, а з боків циліндричною поверхнею. Нехай це тіло проектується на площину Oxy в область D, обмежену лініями $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ $(y_1(x)\le y_2(x))$ і прямими $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (рис. 1). Проведемо через точку $P(x;y;0)$ області D пряму, паралельну до осі Oz. Ця пряма зустріне нижню поверхню $z=z_1(x,y)$ в деякій точці M і верхню поверхню $z=z_2(x,y)$ в точці N. Точку M називають точкою входу, а точку N – точкою виходу, а їхні аплікати позначають відповідно $z_{\text{ВХ}}=z_1(x,y)$ і $z_{\text{ВИХ}}=z_2(x,y)$.

Якщо $f(x,y,z)$ – неперервна функція в області Q, то можна довести, що значення потрійного інтеграла визначається за формулою

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \Big(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy. \qquad (2)$$

З'ясуємо зміст цієї формули.

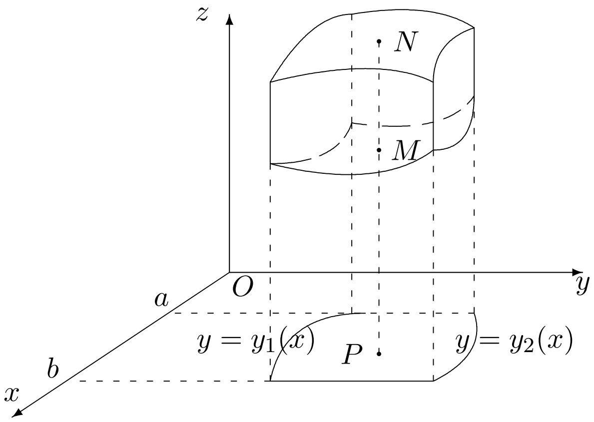


Рис. 1

Для того щоб обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz$, треба спочатку обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y,z)} f(x,y,z)dz$, вважаючи x і y сталими. Нижньою межею інтеграла є апліката точки M входу $z_{\text{ВХ}} = z_1(x,y)$, а верхнею межею інтегрування апліката $z_{\text{ВИХ}} = z_2(x,y)$ точки виходу N. Результат цього інтегрування є функція двох змінних x і y. Інтегруючи цю функцію по області D, яка є проекцією області Q на площину Oxy, дістаємо значення потрійного інтеграла. Якщо скористатися формулою для обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах, то одержимо формулу для обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (3)$$

Якщо область Q складніша, ніж розглянута, то її розбивають на скінченну кількість областей Q_1, Q_2, ..., Q_k указаного вигляду і для кожної з них застосовують формулу (3). Тоді інтеграл по всій області згідно з властивістю адитивності 3) дорівнює сумі інтегралів по кожній з областей Q_j.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_Q xy\sqrt{z}dxdydz$, де Q – область, яка обмежена поверхнями $z = 0$, $z = y$, $y = x^2$, $y = 1$.

◄ Область Q зображена на рис. 2. Її можна подати у вигляді $Q = \{(x; y; z) : (x; y) \in D, 0 \leq z \leq y\}$, де $D = \{(x; y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. Звівши потрійний інтеграл до повторного, дістанемо

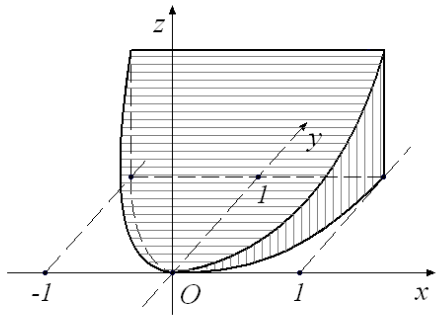


Рис. 2

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}dz = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 ydy \int\limits_0^y z^{1/2}dz = \int\limits_{-1}^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 \frac{2}{3}yz^{3/2}\Big|_0^y dy = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^1 xdx \int\limits_{x^2}^1 y^{5/2}dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^1 x^2\frac{2}{7}y^{7/2}\Big|_{x^2}^1 dx = \frac{4}{21}\int\limits_{-1}^1 x(1-|x|^7)dx =$$

$$= \frac{4}{21}\Big(\int\limits_{-1}^1 xdx + \int\limits_{-1}^0 x^8dx - \int\limits_0^1 x^8dx\Big) = \frac{4}{21}\Big(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 + \frac{x^9}{9}\Big|_{-1}^0 - \frac{x^9}{9}\Big|_0^1\Big) =$$

$$= \frac{4}{21}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\Big) = 0. \ ►$$

2.2.2. Заміна змінних в потрійному інтегралі. Аналогічно як і у випадку подвійного інтеграла, заміна змінних в потрійному інтегралі $\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz$ полягає у переході від змінних x, y, z до нових змінних u, v, w за формулами

$$x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \chi(u,v,w), (u;v;w) \in \Omega. \quad (4)$$

Згідно з формулами (4) деякій точці $(x;y;z) \in Q$ відповідає точка $(u;v;w) \in \Omega$, а кожна точка $(u;v;w) \in \Omega$ переходить у деяку точку $(x;y;z) \in Q$. Іншими словами, функції (4) здійснюють відображення області $\Omega \in \mathbb{R}^3$ на область $Q \in \mathbb{R}^3$. Вважатимемо, що відображення (4) задовольняє умови:

1) відображення (4) взаємно однозначне;

2) функції φ, ψ і χ мають в області Ω неперервні частинні похідні першого порядку;

3) якобіан відображення

$$J(u,v,w) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial w} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u;v;w) \in \Omega.$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області Q, а перетворення (4) задовольняє умови 1) – 3), то правильна формула заміни змінних у потрійному інтегралі

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dxdydz = \quad (5)$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw.$$

Зауважимо, що формула (5) має місце й тоді, коли умова неперервності підінтегральної функції f і умови 1) – 3) для відображення (4) порушуються на множині нульового об'єму, наприклад, в окремих точках, на лініях або на поверхнях.

Формули (4) можна розглядати як формули переходу до нових криволінійних координат (u, v, w) в області Q. Поверхні $u = \mathrm{const}$, $v = \mathrm{const}$, $w = \mathrm{const}$ є координатними поверхнями, взагалі кажучи, криволінійними в просторі (x, y, z). Криві, на яких дві криволінійні координати мають сталі значення, і змінюється тільки одна з координат, є **координатними лініями**.

Найпоширенішими криволінійними координатами є циліндричні та сферичні координати.

У випадку циліндричних координат формули (4) мають вигляд

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

$$0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Якобіан цього відображення

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Тому формула (5) у цьому випадку набуває вигляду

$$\iiint\limits_{Q} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{z_1(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{z_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos, \varphi, r\sin\varphi)dz,$$

де $r_1(\varphi) = r_{\text{вх}}$, а $r_2(\varphi) = r_{\text{вих}}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_{Q} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, якщо область Q обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $y = 0$, $z = 0$, $z = a$.

◀ Перейдемо до циліндричних координат. Рівняння циліндра в цих координатах набуде вигляду $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$ або $r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2r\cos\varphi$, тобто $r = 2\cos\varphi$. Отже, в області Q

координати r, φ і z змінюються так: $0 \le r \le 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le z \le a$. Тому

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} dr \int\limits_0^a z\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\, r dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a z dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 \frac{z^2}{2}\bigg|_0^a dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{a^2}{2} r^2 dr = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2\Big(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big)\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}a^2\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{8}{9}a^2. \blacktriangleright$$

Якщо розглянути сферичні координати, то відображення (4) визначається формулами

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$

$$0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

а якобіан $J(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\theta$.

Формула заміни змінних у цьому випадку набуває вигляду:

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \times$$

$$\times r^2 \sin\theta d\varphi dr d\theta.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint\limits_Q x^2 dxdydz,$$

якщо Q – куля $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

◀ Перейдемо до сферичних координат. В області Q координати r, φ і θ змінюються так: $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Отже,

$$I = \iiint\limits_{\Omega} r^4 \sin^3\theta \cos^2\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^4 dr = -\int\limits_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) d\cos\theta \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi \frac{r^5}{5}\Big|_0^R =$$

$$= -\Big(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\Big)\Big|_0^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} \frac{R^5}{5} =$$

$$= -\Big(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\Big)\frac{1}{2}\Big(2\pi + 0\Big)\frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{15}. \blacktriangleright$$

2.3. Застосування потрійного інтеграла. Опишемо деякі застосування потрійного інтеграла.

Об'єм тіла, що займає область Q, визначається за формулою

$$V = \iiint\limits_{Q} dxdydz.$$

Якщо густина тіла змінна, тобто $\rho = \rho(x, y, z)$, то **маса тіла**, що займає область Q, обчислюється за формулою

$$m = \iiint\limits_{Q} \rho(x, y, z) dxdydz.$$

Якщо x_c, y_c, z_c є координатами **центра маси** просторової області Q, заповненої масою з густиною $\rho(x, y, z)$, то

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – **статичні моменти** тіла відносно координатних площин

$$M_{yz} = \iiint\limits_{Q} x\rho(x, y, z) dxdydz, M_{xz} = \iiint\limits_{Q} y\rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{Q} z\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Моменти інерції тіла просторової області Q, заповненої масою з густиною $\rho(x, y, z)$ відносно осей координат дорівнюють відповідно

$$I_x = \iiint\limits_{Q} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{Q} (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz.$$

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $2z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 2$ (рис. 3).

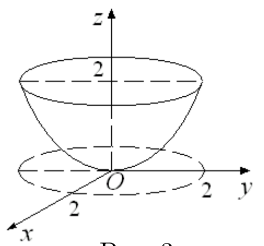


Рис. 3

◀ Задане тіло обмежене знизу параболоїдом $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, зверху площиною $z = 2$ і проектується в круг $x^2 + y^2 \leq 4$ на площину Oxy. Введемо циліндричні координати. Тоді рівняння параболоїда набуде вигляду $z = \dfrac{1}{2}r^2$.

При цьому $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\dfrac{1}{2}r^2 \leq z \leq 2$. Отже, об'єм тіла дорівнює

$$V = \iiint\limits_{Q} dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr \int\limits_{\frac{1}{2}r^2}^{2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rz\Big|_{\frac{1}{2}r^2}^{2} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\Big(2 - \frac{1}{2}r^2\Big)dr =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \Big(2\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = 2\pi\Big(r^2 - \frac{r^4}{8}\Big)\Big|_0^2 = 2\pi(4 - 2) = 4\pi. \text{ ▶}$$

Приклад 5. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідної піраміди Q з густиною $\rho = 3$, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ (рис. 4).

◀ Піраміда Q зображена на рисунку 4. Згідно з описаним вище маємо, що

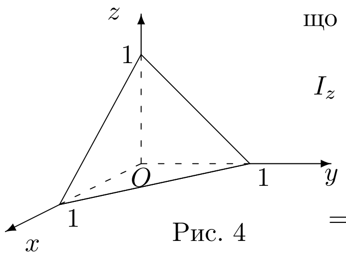


Рис. 4

$$I_z = \iiint\limits_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x^2 + y^2)3dz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)z\Big|_0^{1-x-y} dy = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)(1 - x - y)dy =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2(1 - x) - x^2y + y^2(1 - x) - y^3)dy =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \Big(x^2(1 - x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3(1 - x)}{3} - \frac{y^4}{4}\Big)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \Big(x^2(1 - x)^2 - \frac{x^2(1 - x)^2}{2} + \frac{(1 - x)^4}{3} - \frac{(1 - x)^4}{4}\Big)dx =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \Big(\frac{x^2(1 - x)^2}{2} + \frac{(1 - x)^4}{12}\Big)dx = \frac{3}{12}\int\limits_0^1 (7x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x + 1)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{7}{5}x^5 - 16\frac{x^4}{4} + 12\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\Big(\frac{7}{5} - 4 + 4 - 2 + 1\Big) = \frac{1}{10}. ▶$$

Приклад 6. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом обертання $2z = 4 - x^2 - y^2$ і площиною $z = 0$ (рис. 5).

◀ Якщо врахувати симетричність тіла відносно координатних площин Oxz і Oyz, то одержимо, що центр маси лежить на осі Oz

і, отже, $x_c = y_c = 0$. Залишається знайти координату z_c, яка визначається формулою

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

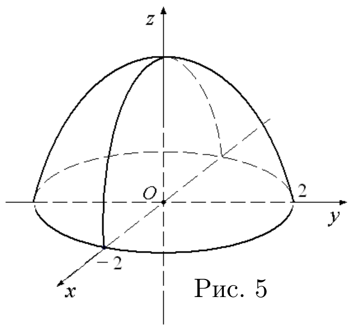


Рис. 5

Обчислимо масу тіла m і статичний момент M_{xy}, вважаючи, що $\rho(x,y,z) = 1$, $(x;y;z) \in Q$. Для цього перейдемо до циліндричної системи координат. Проекцією тіла Q на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 = 4$. Тому полярні координати змінюються так: $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 2$, а змінна z задовольняє нерівності $0 \le z \le \dfrac{4-r^2}{2}$.

Отже,

$$m = \iiint\limits_Q dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_0^{\frac{4-r^2}{2}} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rz\Big|_0^{\frac{4-r^2}{2}} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\frac{4-r^2}{2} dr =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi \int\limits_0^2 (4r - r^3)dr = \pi\Big(4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = \pi(8-4) = 4\pi;$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_Q zdxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_0^{\frac{4-r^2}{2}} zdz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 r\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\frac{4-r^2}{2}} dr = \pi \int\limits_0^2 r\Big(\frac{4-r^2}{2}\Big)^2 dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int\limits_0^2 (16r - 8r^3 + r^5)dr = \frac{\pi}{4}\Big(16\frac{r^2}{2} - 8\frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6}\Big)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big(32 - 32 + \frac{32}{3}\Big) = \frac{8\pi}{3}.$$

Тоді

$$z_c = \frac{\frac{8\pi}{3}}{4\pi} = \frac{2}{3},$$

а тому координати центра маси такі: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \dfrac{2}{3}$. ►

Вправи

1. Обчислити інтеграл:

1) $I = \iiint\limits_Q zdxdydz$, де Q – область, яка визначена нерівностями $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

2) $I = \iiint\limits_Q (x + y + z)dxdydz$, якщо область Q обмежена площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

3) $I = \iiint\limits_Q xy^2z^3dxdydz$, якщо область Q обмежена поверхнями $z = xy$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$;

4) $I = \iiint\limits_Q ze^x dxdydz$, якщо область Q обмежена поверхнями $x = 1$, $x = 2$, $y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$, де $z > 0$;

5) $I = \iiint\limits_Q (2x + 3y - z)dxdydz$, якщо область Q обмежена площинами $z = 0$, $z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$;

6) $I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{xy}} zdz$;

7) $I = \iiint\limits_Q xyzdxdydz$, де область Q обмежена поверхнями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$;

8) $I = \iiint\limits_Q x^3y^2zdxdydz$, де область Q визначена нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$;

9) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} dy \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$;

10) $I = \iiint\limits_Q zdxdydz$, якщо область Q обмежена площинами $x+y+z = 1$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

2. Перейшовши до циліндричних координат, обчислити інтеграл:

1) $I = \iiint\limits_Q x^2y^2dxdydz$, де область Q визначена нерівностями $x^2+y^2 \le 2$, $0 \le z \le x^2+y^2$;
2) $I = \iiint\limits_Q (x^2+y^2)dxdydz$, де область Q обмежена поверхнями $2z = x^2+y^2$, $z = 2$;
3) $I = \iiint\limits_Q ((x+y)^2 - z)dxdydz$, якщо область Q обмежена поверхнями $z = 0$ і $(z-1)^2 = x^2+y^2$.

3. Перейшовши до сферичних координат, обчислити інтеграл:
1) $I = \iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де Q – область, яка обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2 = z$;
2) $I = \iiint\limits_Q (x^2+y^2)dxdydz$, якщо область Q – півкуля $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$;
3) $I = \iiint\limits_Q \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, якщо Q – куля $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $hz = x^2+y^2$, $z = h$.

5. Знайти координати центра маси тіла, обмеженого площинами $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x+2z = 3$, якщо густина $\rho(x,y,z) \equiv 1$.

6. Обчислити масу m прямого круглого циліндра Q з висотою h і радіусом основи R, якщо густина ρ в довільній його точці дорівнює відстані r від цієї точки до осі циліндра, тобто $\rho(x,y,z) = r$.

Відповіді

1. 1) $\frac{7}{192}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{364}$; 4) $\frac{2}{3}e(e-1)$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{81}{4}$; 7) $\frac{1}{96}$; 8) $\frac{1}{110}$; 9) $\frac{1}{6}$; 10) $\frac{1}{24}$. **2.** 1) 8π; 2) $\frac{16\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{60}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{4}{15}\pi R^2$; 3) $\frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. **4.** $\frac{\pi h^3}{2}$. **5.** $\left(1; 2; \frac{1}{2}\right)$. **6.** $\frac{2\pi R^3 h}{3}$.

Розділ 11
Криволінійні інтеграли

§1. Криволінійні інтеграли першого роду

1.1. Означення криволінійного інтеграла першого роду. Нехай крива (лінія) L задана на площині Oxy параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \tag{1}$$

тобто складається з усіх точок $(x; y)$, координати x і y яких задовольняють рівняння (1). Вважатимемо, що функції φ і ψ є неперервними на відрізку $[\alpha; \beta]$. Нагадаємо, що крива L називається **простою незамкненою кривою**, якщо різним значенням параметра $t \in [\alpha; \beta]$ відповідають різні точки $M(\varphi(t); \psi(t)) \in L$. Якщо ж деякій точці $M_0(x_0; y_0) \in L$ відповідають різні значення параметра t_1 і t_2, $t_1 \neq t_2$, $\{t_1, t_2\} \subset [\alpha; \beta]$, тобто $x_0 = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ і $y_0 = \psi(t_1) = \psi(t_2)$, то вона називається **кратною**. Проста незамкнена крива не має жодної кратної точки. Якщо початок кривої L – точка $A(\varphi(\alpha); \psi(\alpha))$ збігається з її кінцем – точкою $B(\varphi(\beta); \psi(\beta))$, а інші точки не є кратними, то L називається **простою замкненою кривою**. Проста крива L називається **спрямлюваною**, якщо існує скінченна границя довжин ламаних, які вписані в криву, за умови, що довжини всіх ланок ламаних прямують до нуля. Ця границя називається **довжиною кривої (лінії)** L.

Аналогічні означення правильні й для просторової кривої L, яка задана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \tag{2}$$

в координатному просторі $Oxyz$.

Нехай L – проста спрямлювана і незамкнена крива, що задана рівняннями (1), а $f(x, y)$ – функція, яка визначена на цій кривій. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ довільним чином на n частин точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При цьому лінія L розіб'ється так само на n частин точками $M_0(\varphi(t_0); \psi(t_0))$,

$M_1(\varphi(t_1);\psi(t_1))$, ..., $M_n(\varphi(t_n);\psi(t_n))$. Позначимо через Δl_k довжину дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$. Далі виберемо на кожній елементарній дузі $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$ довільну точку $N_k(\xi_k,\eta_k)$ і складемо **інтегральну суму**

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ при $\Delta l \equiv \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} \Delta l_k \to 0$, яка не залежить від розбиття лінії L на частини і від вибору точки N_k на елементарній частині $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, то її називають **криволінійним інтегралом першого роду** від функції f по кривій L і позначають символом $\int\limits_L f(x,y)dl$.

Отже,

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \lim_{\Delta l\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k. \qquad (3)$$

Якщо крива L незамкнена, а точки A і B її кінці, то криволінійний інтеграл першого роду позначається символом $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$.

У випадку, коли лінія L є простою, спрямлюваною і замкненою, тобто $A = B$, то криволінійний інтеграл першого роду по цій кривій визначають як суму криволінійних інтегралів по незамкнених лініях AC і CB

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{AC} f(x,y)dl + \int\limits_{CB} f(x,y)dl,$$

де C – довільна точка на L.

З означення криволінійного інтеграла першого роду випливає, що він не залежить від того, в якому напрямку від A до B чи від B до A проходиться крива L, тобто

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl.$$

Якщо $f(x,y) = 1$, $(x;y) \in L$, то з рівності (3) безпосередньо випливає, що

$$\int\limits_{AB} dl = l,$$

де l – довжина кривої AB.

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла першого роду і у випадку, коли функція f визначена на просторовій кривій L, яка задана параметричними рівняннями (2):

$$\int\limits_{L} f(x,y,z)dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta l_k.$$

1.2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду за допомогою визначеного інтеграла. Крива L, що задана рівняннями (1), називається гладкою (кусково-гладкою), якщо функції φ і ψ мають неперервні (кусково-неперервні) похідні, які одночасно не перетворюються в нуль на $[\alpha;\beta]$ за винятком, можливо, скінченного числа точок. Для такої кривої відомо, що вона спрямлювана і її довжина l знаходиться за формулою

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \tag{4}$$

Нехай функція $f(x,y) \equiv f(M)$ визначена на кривій L і неперервна в кожній її точці, тобто

$$\lim_{L \ni M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

для будь-якої точки $M_0 \in L$.

Теорема 1. *Якщо L – кусково-гладка крива, задана рівняннями (1), а функція f неперервна в точках кривої L, то існує криволінійний інтеграл (3) і правильна рівність*

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \tag{5}$$

◀ Доведемо рівність (5), вважаючи, що криволінійний інтеграл першого роду від неперервної функції існує.

Оскільки кусково-гладка крива складається із скінченного числа гладких кривих, то надалі вважатимемо, що крива є гладкою і незамкненою.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\beta]$ на n частин точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta$. Йому відповідає розбиття кривої L на n частин точками $M_k(\varphi(t_k);\psi(t_k))$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Знайдемо довжину Δl_k дуги $\smile{M_{k-1}M_k}$ за допомогою формули (4)

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt, \quad k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Згідно з теоремою про середнє для визначеного інтеграла існує точка $\tau_k \in [t_{k-1};t_k]$ така, що

$$\Delta l_k = \sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2}\Delta t_k, \quad k \in \{1,\ldots,n\},$$

де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Розглянемо інтегральну суму σ, взявши за точку $N_k(\xi_k;\eta_k) \in \smile{M_{k-1}M_k}$ точку, де $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді одержимо, що

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\sqrt{(\varphi'(\tau_k))^2 + (\psi'(\tau_k))^2}\Delta t_k.$$

Цей вираз є інтегральною сумою визначеного інтеграла для неперервної функції $f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ на відрізку $[\alpha;\beta]$. Її границя при $\lambda^* = \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} \Delta t_k \to 0$ дорівнює визначеному інтегралу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

З іншого боку,

$$\lim_{\lambda^*\to 0} \sigma = \int\limits_L f(x,y)dl,$$

бо з того, що $\lambda^* \to 0$ випливає, що $\lambda \to 0$.

Тому, згідно з єдиністю границі, дістаємо рівність (5). ►

Зауваження. З формули (5) легко одержуються формули зведення криволінійного інтеграла першого роду до визначеного інтеграла, коли крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, або в полярних координатах рівнянням $r = r(\theta)$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

1) Нехай неперервна функція $f(x,y)$ визначена на кривій L, яка задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a;b]$. Якщо функція $y(x)$ неперервно диференційовна на $[a;b]$, то має місце формула

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx. \qquad (6)$$

2) Якщо крива L задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1;\theta_2]$, і $r(\theta)$ має неперервну похідну на $[\theta_1;\theta_2]$, то для неперервної функції $f(x,y)$, визначеної на кривій L, правильна рівність

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}d\theta. \quad (7)$$

У випадку гладкої просторової кривої L, заданої параметричними рівняннями (2), для неперервної функції $f(x,y,z)$, яка визначена на L, правильна формула

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}dt. \qquad (8)$$

Криволінійні інтеграли першого роду мають властивості, які аналогічні властивостям визначеного інтеграла: лінійність, адитивність, модуль інтеграла не перевищує інтеграла від модуля функції. Правильна так само формула середнього значення.

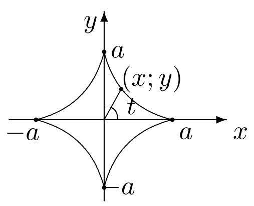
Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(4;3)$.

◄ Рівняння прямої AB має вигляд $\dfrac{x-0}{4-0} = \dfrac{y-0}{3-0}$ або $y = \dfrac{3}{4}x$. Оскільки $y' = \dfrac{3}{4}$, то, згідно з формулою (6), маємо

$$\int\limits_L (x-y)dl = \int\limits_0^4 \Big(x - \frac{3}{4}x\Big)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{16}\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{5}{2}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3} dl$, де L – астроїда $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

◄ Графік кривої L зображено на рисунку.



Параметричні рівняння астроїди мають вигляд: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$. Оскільки $x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$, то $x'^2 + y'^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$. Оскільки $x'^2 + y'^2 = 0$ в чотирьох точках $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \dfrac{3\pi}{2}$, то астроїда є кусково-гладкою кривою.

Для обчислення криволінійного інтеграла застосуємо формулу (5). Тоді

$$\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3})dl = \int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t)3a|\cos t \sin t|dt =$$

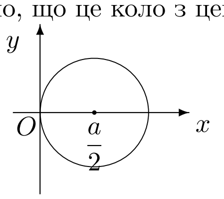
$$= 4 \cdot 3a^{7/3} \int\limits_0^{\pi/2} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t\cos t)dt =$$

$$= 12a^{7/3}\Big(- \int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 td\cos t + \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 td\sin t\Big) =$$

$$= 12a^{7/3}\Big(-\frac{\cos^6 t}{6}+\frac{\sin^6 t}{6}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = 4a^{7/3}. \blacktriangleright$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L – коло $x^2+y^2=ax$, a – деяке додатне число.

◀ Запишемо рівняння лінії L у вигляд $\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Очевидно, що це коло з центром в точці $C\Big(\frac{a}{2};0\Big)$ і радіуса $R=\frac{a}{2}$.



Перейшовши до полярних координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, одержимо, що рівняння кола набуде вигляду $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=ar\cos\varphi$ або $r=a\cos\varphi$, $\varphi\in\Big[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\Big]$.

Оскільки

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=r,$$

$$\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}=a,$$

то, згідно з формулою (7), одержимо

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\cdot a d\varphi=a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2a^2. \blacktriangleright$$

1.3. Застосування криволінійних інтегралів першого роду. Нехай L – матеріальна плоска крива, тобто крива вздовж якої розподілені маси з лінійною густиною $\rho(x,y)$. Тоді правильні такі формули:

1) $m=\int\limits_L \rho(x,y)dl$ – маса кривої;

2) $M_x=\int\limits_L y\rho(x,y)dl$, $M_y=\int\limits_L x\rho(x,y)dl$ – статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy;

3) $x_c=\frac{M_y}{m}$, $y_c=\frac{M_x}{m}$ – координати центра маси кривої;

4) $I_0 = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y)dl$ – момент інерції кривої відносно початку координат (**полярний момент інерції**);

5) $I_x = \int\limits_L y^2\rho(x,y)dl$, $I_y = \int\limits_L x^2\rho(x,y)dl$, – моменти інерції кривої відносно осей Ox і Oy.

Приклад 4. Знайти масу m матеріальної кривої L, що задана рівнянням $y = \ln x$, $x \in [1; e]$, якщо лінійна густина $\rho(x,y) = kx^2$, k – стала.

◄ Згідно з формулою для визначення маси кривої маємо $m = \int\limits_L kx^2 dx$. Для обчислення цього інтеграла скористаємося формулою (6).

Оскільки

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

то

$$m = \int\limits_1^e kx^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = k\int\limits_1^e x(1+x^2)^{1/2}dx = \frac{k}{2}\int\limits_1^e (1+x^2)^{1/2}d(1+x^2) =$$

$$= \frac{k}{2}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^e = \frac{k}{3}((1+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти центр маси однорідної циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0;\pi]$.

◄ Оскільки $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y'(t) = a\sin t$, то $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}$, $t \in [0;\pi]$.

Тоді

$$m = \int\limits_L \rho(x,y)dl = \int\limits_0^\pi \rho_0 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a\rho_0\frac{-\cos\frac{t}{2}}{1/2}\Bigg|_0^\pi =$$

$$= 4a\rho_0\Big(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\Big) = 4a\rho_0;$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{4a\rho_0}\int\limits_L x dl = \frac{1}{4a\rho_0}\int\limits_0^\pi \rho_0 a\Big(t - \sin t\Big) 2a \sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int\limits_0^\pi (t - \sin t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}\Big(\int\limits_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt - \int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\sin t dt\Big) =$$

$$= \frac{a}{2}\Big(-2\int\limits_0^\pi t d\cos\frac{t}{2} - 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt\Big) = a\left(-t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt - \right.$$

$$\left. -2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2} d\sin\frac{t}{2}\right) = a\left(2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^\pi\right) = a\Big(2 - \frac{2}{3}\Big) = \frac{4a}{3};$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{4a\rho_0}\int\limits_L y dl = \frac{1}{4a\rho_0}\int\limits_0^\pi \rho_0 a(1 - \cos t) 2a\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= \frac{a}{2}\int\limits_0^\pi (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt = \frac{a}{2}2\int\limits_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}dt = -2a\int\limits_0^\pi \Big(1 - \cos^2\frac{t}{2}\Big) d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= -2a\Big(\int\limits_0^\pi d\cos\frac{t}{2} - \int\limits_0^\pi \cos^2\frac{t}{2} d\cos\frac{t}{2}\Big) = -2a\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= -2a\Big(-1 + \frac{1}{3}\Big) = \frac{4a}{3}.$$

Отже, центр маси дуги L має координати $x_c = \dfrac{4a}{3}$, $y_c = \dfrac{4a}{3}$.▶

§2. Криволінійні інтеграли другого роду

2.1. Означення криволінійного інтеграла другого роду. Нехай AB проста спрямлювана і незамкнена крива на площині Oxy, яка визначена параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha; \beta],$$

де $A(\varphi(\alpha); \psi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta); \psi(\beta))$. Вважатимемо що на лінії AB вибрано такий напрямок руху, при якому A є початковою точкою, а B – кінцевою, що відображено в позначенні AB кривої.

Розглянемо на кривій AB дві обмежені функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n частин точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При цьому крива AB розіб'ється на n частин точками $A = M_0$, M_1, …, $M_n = B$ у напрямку від A до B. Нехай $(x_k; y_k)$ – координати точки M_k, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, Δl_k – довжина дуги $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, $\Delta l = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} \Delta l_k$. На кожній елементарній дузі $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$ візьмемо деяку точку $N_k(\xi_k; \eta_k)$ і складемо дві інтегральні суми:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k,$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta l \to 0} \sigma_1 = I_1, \quad \lim_{\Delta l \to 0} \sigma_2 = I_2,$$

які не залежать ні від розбиття, ні від вибору точки N_k на елементарній дузі $\overset{\smile}{M_{k-1}M_k}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, то вони називаються **криволінійним інтегралом другого роду** і позначаються відповідно символом

$$I_1 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx \quad \text{і} \quad I_2 = \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Сума $I_1 + I_2$ називається **загальним криволінійним інтегралом другого роду** і записується у вигляді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (9)$$

З означення криволінійного інтеграла другого роду випливає, що при зміні напрямку обходу кривої AB змінюється знак інтеграла, тобто

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Якщо крива AB є замкненою, тобто точка A збігається з точкою B, то для неї існує два напрямки обходу. Якщо область, яка лежить всередині контура, залишається зліва відносно точки, що рухається по кривій, то такий напрямок обходу контура L назвемо **додатним**, а протилежний до нього – **від'ємним**. Інтеграл (9) по замкненому контуру L в додатному напрямку позначають символом

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

і визначають як суму двох інтегралів по незамкнених контурах, які утворюють L.

Аналогічно визначається криволінійний інтеграл другого роду

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (10)$$

для випадку просторової кривої, яка задана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), z = \chi(t), \quad t \in [\alpha;\beta],$$

де $A(\varphi(\alpha);\psi(\alpha);\chi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta);\psi(\beta);\chi(\beta))$.

2.2. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду за допомогою визначеного інтеграла.

Теорема 2. *Якщо AB – кусково-гладка крива, яка задана рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні вздовж кривої AB, то існує інтеграл (9) і правильна рівність*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) +$$

$$+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt. \qquad (11)$$

У цій формулі точка $A(\varphi(\alpha);\psi(\alpha))$ є початком, а точка $B(\varphi(\beta);\psi(\beta))$ – кінцем лінії L.

◀ Опустимо доведення існування інтеграла (9), а доведемо правильність формули (11). Для цього досить довести окремо такі дві рівності:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (11')$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (11'')$$

Доведемо рівність $(11')$, бо рівність $(11'')$ доводиться аналогічно. Вважатимемо, що крива AB є гладкою незамкненою кривою. Розглянемо довільне розбиття відрізка $[\alpha;\beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_n = \beta$. Цьому розбиттю відповідає розбиття кривої AB на частини точками $A = M_0$, M_1, $\ldots$, M_{k-1}, M_k, $\ldots$, $M_n = B$, де $M_k(\varphi(t_k);\psi(t_k))$, $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Нехай $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, тоді $\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)dt$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Якщо скористатися теоремою про середнє, то одержимо, що

$$\Delta x_k = \varphi'(\tau_k)\Delta t_k,$$

де τ_k – деяка точка з відрізка $[t_{k-1}; t_k]$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Введемо позначення $\lambda^* = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} \Delta t_k$, $\lambda = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_k$. Можна довести, що коли $\lambda^* \to 0$, то й $\lambda \to 0$.

В інтегральній сумі σ_1 за точку N_k візьмемо точку з координатами $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k.$$

Ця сума є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від неперервної функції $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$, а тому

$$\lim_{\lambda^* \to 0} \sigma_1 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

З іншого боку, згідно з означенням криволінійного інтеграла другого роду

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_1 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx.$$

Оскільки границя єдина, то маємо рівність

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt. \blacktriangleright$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, і має кусково-неперервну похідну, а функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні вздовж кривої AB, то існує інтеграл (9) і має місце формула

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx, \tag{12}$$

де $A = A(a; y(a))$, $B = (b; y(b))$.

Зауваження. Криволінійні інтеграли другого порядку мають властивості лінійності й адитивності, але теорема про оцінку модуля інтеграла і формула середнього значення неправильні.

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L – парабола $y = x^2$, $x \in [-1; 1]$ з початком в точці $A(-1; 1)$ і кінцем $B(1; 1)$.

◀ Скористаємося формулою (12), підставивши в підінтегральний вираз $y = x^2$ і $dy = 2xdx$. Тоді одержимо, що

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)2x)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = \Big(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{6}x^6 - 4\frac{x^5}{5}\Big)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\Big)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L x^2ydy - y^2xdx$, якщо крива L задана параметрично рівняннями $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $t \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big]$ з початком в точці $A(1; 0)$ і кінцем в точці $B(0; 1)$.

◀ Маємо $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos t}}(-\sin t)dt$, $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin t}}\cos t dt$. Тому

$$I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \Big(\cos t\sqrt{\sin t}\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} + \sin t\sqrt{\cos t}\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\Big)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}t\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

2.3. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.

Теорема 3. *Нехай AB – кусково-гладка крива, яка задана рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні вздовж кривої AB і $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ – одиничний дотичний вектор до кривої AB в точці $M(x; y)$, причому напрямок $\overrightarrow{\tau}$ відповідає напрямку руху від A до B, де α – кут між вектором $\overrightarrow{\tau}$ в точці $M(x; y)$ і віссю Ox. Тоді має місце рівність*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)dl$$

або

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{\tau}\,dl, \qquad (13)$$

де $\overrightarrow{a} = P(x, y)\overrightarrow{i} + Q(x, y)\overrightarrow{j}$.

У випадку просторової кривої формула (13) має вигляд

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)dl =$$

$$= \int\limits_{AB} \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{\tau}\,dl, \qquad (14)$$

де $\overrightarrow{a} = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\tau} = \cos\alpha\overrightarrow{i} + \cos\beta\overrightarrow{j} + \cos\gamma\overrightarrow{k}$, де α, β, γ – кути між дотичним вектором $\overrightarrow{\tau}$ до кривої AB в точці $M(x; y; z)$ і осями Ox, Oy, Oz.

2.4. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

1) Робота сили $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ при переміщенні матеріальної точки одиничної маси з точки A в точку B вздовж кривої AB знаходиться за формулою

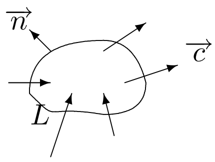
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Якщо крива AB замкнена, то цей інтеграл називається **циркуляцією** векторного поля $\overrightarrow{F}$ вздовж замкненого контура L.

Так само обчислюється робота сили і циркуляція при переміщенні матеріальної точки вздовж просторової кривої.

2) Нехай $\overrightarrow{c} = (u(x,y); v(x,y))$ – швидкість потоку нестисненої рідини в точці $M(x;y)$. Тоді кількість q рідини, що витікає за одиницю часу з області Ω, обмеженої гладким контуром L, дорівнює

$$q = \oint\limits_{L} \overrightarrow{c}\,\overrightarrow{n}\,dl,$$



де $\overrightarrow{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до кривої L в точці $M(x;y)$. Якщо напрямок дотичного вектора $\overrightarrow{\tau}$ до кривої L відповідає додатному напрямку обходу кривої і α – кут між вектором $\overrightarrow{\tau}$ і віссю Ox, то

$$\overrightarrow{n} = \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\alpha; -\cos\alpha),$$

$$\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{n} = u(x,y)\sin\alpha - v(x,y)\cos\alpha.$$

Тоді

$$q = \oint\limits_{L} (u(x,y)\sin\alpha - v(x,y)\cos\alpha)dl = \oint\limits_{L} udy - vdx.$$

Приклад 3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, вздовж кола L, утвореного перерізом циліндра $x^2+y^2=1$ площиною $z=1$, яке проходиться в додатному напрямку.

◀ Запишемо параметричні рівняння кола L:

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=1,\quad t\in[0;2\pi].$$

Оскільки $x'(t)=-\sin t$, $y'(t)=\cos t$, $z'=0$, то

$$\oint\limits_L (xdx+2ydy+zdz)=\int\limits_0^{2\pi}(\cos t(-\sin t)+2\sin t\cos t+0)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cos tdt=\int\limits_0^{2\pi}\sin td\sin t=\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}=0,$$

тобто циркуляція вектора $\overrightarrow{F}=x\overrightarrow{i}+2y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$ вздовж контура L дорівнює нулю. ▶

2.5. Формула Гріна. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування.

2.5.1. Поняття простої області. На рис. 1,а) зображена замкнена область D_1, яка обмежена знизу і зверху кусково-гладкими кривими $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, $x\in[a;b]$, а зліва і справа відрізками прямих $x=a$ і $x=b$.

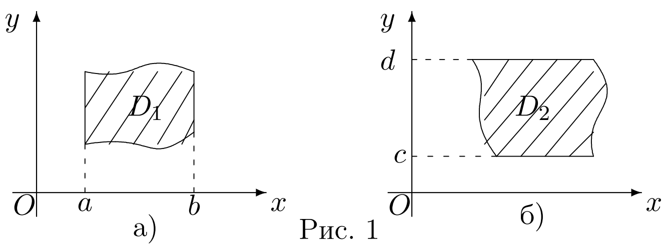
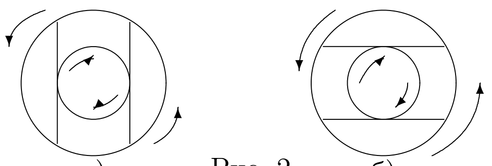


Рис. 1

Така область називається **y-трапецієвидною** або областю першого типу (див. §2, розділ 10). Аналогічно визначається **x-трапецієвидна область** (рис. 1, б)) або область другого типу (див. §2, розділ 10). Замкнену область D назвемо **простою**, якщо її можна розбити на скінченне число як x-трапецієвидних, так і y-трапецієвидних областей. При цьому жодні дві області не мають спільних внутрішніх точок. Прикладами простих областей є круг, прямокутник, кільце. На рис. 2, а) показано розбиття кільця на y–трапецієвидні, а на рис. 2, б) – на x-трапецієвидні області. Стрілками вказано додатний напрямок обходу межі кільця.



а) Рис. 2 б)

2.5.2. Формула Гріна.

Теорема 4. *Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ неперервні в простій області D. Тоді правильна рівність*

$$\oint\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big) dxdy, \quad (15)$$

де криволінійний інтеграл береться по межі L області D у додатному напрямку.

◀ Розглянемо спочатку випадок, коли область D є y-трапецієвидною (рис. 3). Вона обмежена знизу кусково-гладкою кривою FA, рівняння якої $y = y_1(x)$, зверху – кривою BC, яка має рівняння $y = y_2(x)$, а з боків – відрізками прямих CF (рівняння $x = a$) і AB (рівняння $x = b$).

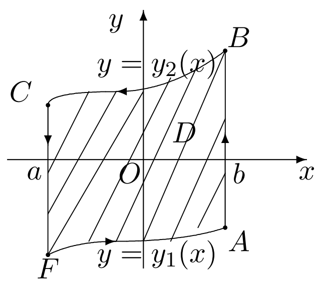


Рис. 3

Очевидно, що межа L області D є об'єднанням цих ліній. Обчислимо подвійний інтеграл по області D від неперервної функції $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, звівши його до повторного, і внутрішній інтеграл знайшовши за формулою Ньютона-Лейбніца. Маємо

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\Big)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\Big)dx = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx.$$

Визначені інтеграли, які стоять справа у цій рівності можна подати у вигляді криволінійних інтегралів другого роду, а саме:

$$\int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx = -\int\limits_{BC} P(x,y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx = \int\limits_{FA} P(x,y)dx.$$

Тому

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{FA} P(x,y)dx - \int\limits_{BC} P(x,y)dx.$$

Розглянемо ще криволінійні інтеграли другого роду $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ і $\int\limits_{CF} P(x,y)dx$. Вони обидва дорівнюють нулю, бо на AB абсциса $x = b$, а на CF – $x = a$ і тому $dx = 0$.

Отже, подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy$ можна вирази-ти через криволінійний інтеграл другого роду по всій межі L області D:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\Big(\int\limits_{PA} P(x,y)dx + \int\limits_{BC} P(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{CF} P(x,y)dx\Big) = -\oint\limits_L P(x,y)dx,$$

де крива L проходиться у додатному напрямку.

Тому для довільної y-трапецієвидної області D правильна рівність

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx. \qquad (16)$$

Нехай область D є простою, тобто об'єднанням скінченного числа y-трапецієвидних областей (рис. 4). Очевидно, що відрізок AC розбиває область D на три частини D_1, D_2, D_3, кожна з яких є y-трапецієвидною. Доведемо, що формула (16) правильна і в цьому випадку.

Для області D_1, згідно з формулою (16), маємо

$$\iint\limits_{D_1} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L_1} P(x,y)dx - \int\limits_{CF} P(x,y)dx -$$

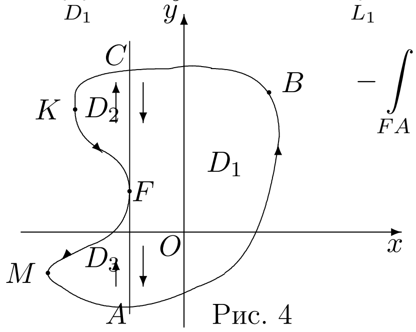


Рис. 4

$$-\int\limits_{FA} P(x,y)dx, \qquad (17)$$

де L_1 – крива ABC, яка проходиться у додатному напрямку. Аналогічно для областей D_2 і D_3

$$\iint\limits_{D_2} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L_2} P(x,y)dx - \int\limits_{FC} P(x,y)dx, \qquad (18)$$

$$\iint\limits_{D_3} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{L_3} P(x,y)dx - \int\limits_{AF} P(x,y)dx, \qquad (19)$$

де L_2 – крива CKF, а L_3 – крива FMA, які проходяться у додатному напрямку.

Якщо додати ліві та праві частини рівностей (17) – (19), то, згідно з властивістю адитивності, сума трьох подвійних інтегралів по областях D_1, D_2 і D_3 дає інтеграл $\iint\limits_{D} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$, а сума правих частин дає інтеграл $-\oint\limits_L P(x,y)dx$, бо криволінійні інтеграли по відрізках CF і FA взаємно знищуються. Отже,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\Big(\int\limits_{L_1} P(x,y)dx+$$

$$+\int\limits_{L_2} P(x,y)dx + \int\limits_{L_3} P(x,y)dx\Big) = -\oint\limits_L P(x,y)dx,$$

тобто формула (16) правильна для довільної простої області D.

Розглянувши x-трапецієвидну область D, аналогічно як у попередньому випадку матимемо

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy. \tag{20}$$

Легко доводиться, що ця формула правильна також і для довільної простої області D.

Оскільки формули (16) і (20) правильні для довільної простої області, то, додавши їх, одержимо формулу

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big)dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

яка називається **формулою Гріна**. ▶

Можна довести, що формула Гріна правильна й тоді, коли D не обов'язково проста. Вона може бути довільною обмеженою областю з кусково-гладкою межею.

Якщо у формулі Гріна взяти $Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$, $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ і врахувати, що $\iint\limits_D dxdy = S(D)$, то отримаємо формулу для знаходження площі $S(D)$ області D за допомогою криволінійного інтеграла

$$S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \tag{21}$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$.

◀ Скориставшись формулою (21), одержимо

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos^3 t\, 3b\sin^2 t\cos t + b\sin^3 t\, 3a\cos^3 t\sin t)dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2tdt = \frac{3ab}{8}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= \frac{3ab}{16}\Big(\int\limits_0^{2\pi}dt - \int\limits_0^{2\pi}\cos 4tdt\Big) = \frac{3ab}{16}\Big(t\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{2\pi}\Big) = \frac{3ab\pi}{8}. ▶$$

2.5.3. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування. Може трапитися, що криволінійний інтеграл другого роду має те саме значення для будь-якої кусково-гладкої кривої, що з'єднує точки A і B. У цьому випадку кажуть, що криволінійний інтеграл другого роду **не залежить від шляху інтегрування**, тобто не залежить від вибору кривої, яка з'єднує дві задані точки A і B, а залежить тільки від самих цих точок.

Для формулювання умов, при виконанні яких криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, введемо поняття однозв'язної області.

Область D на площині називається **однозв'язною**, якщо для довільного замкненого контуру, який лежить в цій області, обмежена ним частина площини повністю належить області D.

Прикладами однозв'язних областей є круг, прямокутник, а прикладом неоднозв'язної області – кільце.

Теорема 5. *1) Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні в області D. Тоді наступні три умови еквівалентні, тобто із кожної з них випливають дві інші:*

а) для довільного замкненого кусково-гладкого контура Γ, *розміщеного в області* D, *правильна рівність*

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

б) для довільних двох точок A *і* B *з області* D *криволінійний інтеграл* $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *не залежить від шляху інтегрування, розміщеного в області* D.

в) вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *є повним диференціалом, тобто в області* D *існує функція* $u(M) = u(x,y)$ *така, що*

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

При цьому для довільної кусково-гладкої кривої AB, *що лежить в області* D, *має місце рівність*

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A).$$

2) Нехай D *– однозв'язна область, а* P *і* Q *мають в області* D *неперервні частинні похідні* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. *Тоді кожна з умов а) – в) еквівалентна умові:*

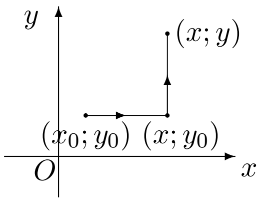
г) в області D *виконується рівність*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Зауваження. Функція $u(x,y)$ з умови в) знаходиться за формулою

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(t,s)dt + Q(t,s)ds + C,$$

де інтеграл в правій частині є криволінійним інтегралом другого роду по довільній кривій Γ, яка лежить в області D і з'єднує певну фіксовану точку $(x_0; y_0)$ з точкою $(x; y)$, а C – довільна стала. За криву Γ у багатьох випадках зручно брати ламану, яка складається з двох відрізків, паралельних до координатних осей.



Тоді

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y_0)} P(t,s)dt +$$

$$+ \int\limits_{(x;y_0)}^{(x;y)} Q(t,s)ds + C =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,s)ds + C.$$

Приклад 5. Знайти сукупність первісних для диференціального виразу $(x^2+y^2)dx + 2xydy$.

◀ Маємо $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = 2xy$. Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, то умова $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ виконується в усій площині Oxy. Отже,

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} (t^2+s^2)dt + 2tsds + C.$$

За початкову точку $(x_0; y_0)$ візьмемо $(0; 0)$ – початок координат. Тоді

$$u(x,y) = \int\limits_{(0;0)}^{(x;y)} (t^2+s^2)dt + 2tsds + C = \int\limits_{0}^{x} (t^2+0^2)dt + \int\limits_{0}^{y} 2xsds + C =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + 2x\frac{s^2}{2}\Big|_0^y + C = \frac{x^3}{3} + xy^2 + C.$$

Отже, $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + C$ і визначає сукупність усіх первісних для заданого диференціального виразу. ▶

Вправи

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$;

2) $\int\limits_L y^2 dl$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

3) $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, де L – межа кругового сектора $\Big\{(r;\varphi) : 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}\Big\}$, r і φ – полярні координати;

4) $\int\limits_L \dfrac{ydl}{\sqrt{x}}$, якщо L – дуга напівкубічної параболи $y^2 = \dfrac{4}{9}x^3$ від точки $A(3;2\sqrt{3})$ до точки $B\Big(8;\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\Big)$;

5) $\int\limits_L \dfrac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = \dfrac{1}{2}x - 2$, що міститься між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$;

6) $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0;2\pi]$;

7) $\int\limits_L (x^2+y^2)^4 dl$, де L – коло $x^2+y^2 = a^2$.

2. Знайти масу матеріальної кривої L з лінійною густиною $\rho(x,y,z)$, якщо:

1) L: $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, $t \in [0;\ln 3]$, $\rho(x,y,z) = \rho_0$;

2) L: $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{2}$, $z = \dfrac{t^3}{3}$, $t \in [0;1]$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{2y}$.

3. Знайти координати центра маси однорідної меншої дуги кола $x^2+y^2 = 4$, що з'єднує точки $A(2;0)$ і $B(-1;\sqrt{3})$.

4. Знайти полярний момент інерції $I_0 = \int\limits_L (x^2+y^2)dl$ відносно точки $O(0;0)$, якщо L – квадрат, який утворений відрізками прямих $x = \pm a$, $y = \pm a$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

2) $\int\limits_{AB} (4x+y)dx + (x+4y)dy$, де крива AB задана рівнянням $y = x^4$, $A(1;1)$, $B(-1;1)$;

2) $\int\limits_{L} xdy - ydx$, де L – дуга параболи $y = x^3$, $x \in [0;2]$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(2;8)$;

3) $\int\limits_{L} \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, якщо L – чверть кола $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, яке обходиться проти годинникової стрілки;

4) $\int\limits_{L} y^2dx + x^2dy$, де L – верхня половина еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, який обходиться за годинниковою стрілкою;

5) $\int\limits_{L} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, де L – крива $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, яка обходиться у напрямку зростання параметра t;

6) $\int\limits_{L} (2-y)dx + xdy$, де L – арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, початок якої відповідає значенню параметра $t = 0$, а кінець – $t = 2\pi$;

7) $\int\limits_{L} ydx + zdy + xdz$, де L – виток гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0;2\pi]$, яка обходиться у напрямку зростання параметра t.

6. Знайти роботу сили $\overrightarrow{F}$ вздовж кривої AB, якщо:
1) $\overrightarrow{F} = (y;-x)$, AB – коло $x^2 + y^2 = 1$, яке обходиться за ходом годинникової стрілки від точки $A\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ до точки $B\Big(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$;
2) $\overrightarrow{F} = (z;-x;y)$, AB – виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = ct$, $t \in [0;2\pi]$, $A(a;0;0)$, $B(a;0;2\pi)$.

7. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$, яка прилягає до початку координат.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0;2\pi]$.

9. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду, застосувавши формулу Гріна:

1) $\oint\limits_{L} xy^2dy - x^2ydx$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$, яке обходиться проти годинникової стрілки;

2) $\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$, де L – еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, який обходиться проти годинникової стрілки.

10. Знайти функцію $u(x,y)$, якщо:
1) $du(x,y)=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$;
2) $du(x,y)=e^x(e^y(x-y+2)+y)dx+e^x(e^y(x-y)+1)dy$.

Відповіді

1. 1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{256a^3}{15}$; 3) $2(e^a-1)+\dfrac{\pi a}{4}e^a$; 4) $\dfrac{2152}{45}$; 5) $\sqrt{5}\ln 2$; 6) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{(1+2\pi^2)^3}-1)$. Скористатися тим, що $dl=\sqrt{t^2+2}dt$; 7) $2\pi a^2$. Покласти $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

2. 1) $\dfrac{2\rho_0}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{1}{8}\Big(3\sqrt{3}-1+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\Big)$.

3. $x_0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, $y_0=\dfrac{9}{2\pi}$. Перейти до параметричної форми запису дуги кола: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in\Big[0;\dfrac{2\pi}{3}\Big]$.

4. $\dfrac{32a^3}{3}$.

5. 1) -2; 2) 8; 3) π; 4) $\dfrac{4}{3}ab^2$. Зробити заміну $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; 5) $\dfrac{1}{35}$; 6) $-\pi a^2$; 7) $-\pi$.

6. 1) π; 2) $\pi a(2c-b)$.

7. $\dfrac{1+3\ln 2}{24}$.

8. πab.

9. 1) $\dfrac{\pi R^4}{2}$; 2) $-2\pi ab$.

10. 1) $u(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\dfrac{y^3}{3}+C$; 2) $u(x,y)=(x+1)e^x-1+e^xy+e^{x+y}(x-y+1)-(x+1)e^x+C$.

Розділ 12
Поверхневі інтеграли

§1. Площа поверхні

1.1. Основні поняття й означення. У попередніх розділах розглядалася поверхня S в просторі $\mathbb{R}^3$, яка є графіком неперервної функції

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in D. \tag{1}$$

Задання поверхні рівнянням (1), а також рівнянням

$$x = f(y, z), \quad (y; z) \in D_1, \tag{1'}$$

або рівнянням

$$y = f(x, z), \quad (x; z) \in D_2, \tag{1''}$$

називається **явним**.

Поверхню S можна задати рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

не розв'язаним відносно жодної із змінних. Таке задання називається **неявним**. При цьому поверхня S є множиною всіх точок, координати яких задовольняють рівняння (2). Наприклад, рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{3}$$

задає сферу радіуса R з центром в початку координат.

Крім того, поверхню S можна задавати **параметрично**:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u; v) \in \Omega, \tag{4}$$

де φ, ψ, χ – неперервні функції в області Ω. Змінні u, v називаються **параметрами**. За формулами (4) кожній точці $(u; v) \in \Omega$ ставиться у відповідність деяка точка $(x; y; z)$ тривимірного простору. Сукупність цих точок і утворює поверхню S.

Наприклад, у сферичних координатах, рівняння

$$x = R\sin u\cos v, \quad y = R\sin u\sin v, \quad z = R\cos u, \qquad (5)$$

$$(u;v) \in \Omega = \{(u;v): \ 0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi\}$$

визначають ту саму сферу, що й рівняння (3).

Рівняння (4) можна записати у векторному вигляді

$$\overrightarrow{r} = \varphi(u,v)\overrightarrow{i} + \psi(u,v)\overrightarrow{j} + \chi(u,v)\overrightarrow{k}, \quad (u;v) \in \Omega, \qquad (6)$$

де $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ – радіус-вектор точки $M(x;y;z)$, а $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ – орти осей координат Ox, Oy і Oz відповідно.

Надалі, розглядаючи поверхні, які задані параметричними рівняннями (4), вважатимемо виконаними певні умови:

1) область Ω обмежена і замкнена, а її межа – кусково-гладка крива без самоперетинів;

2) функції φ, ψ і χ неперервно диференційовні, тобто мають неперервні частинні похідні першого порядку в області Ω;

3) різним внутрішнім точкам $(u;v)$ області Ω відповідають різні точки $(x;y;z)$ поверхні.

Якщо умова, аналогічна 3), виконується також для точок межі області Ω, то поверхню називатимемо **простою**. Множина точок поверхні, які відповідають точкам межі області Ω, утворюють **межу** або **край** поверхні. На рис. 1 зображено частину конічної поверхні $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u$, $(u;v) \in \Omega = \{(u;v) \ : \ 0 < a \le u \le b, \ 0 \le v \le \pi\}$, межею якої є замкнений контур $A'B'C'D'$, що відповідає прямокутнику $ABCD$ – межі області Ω.

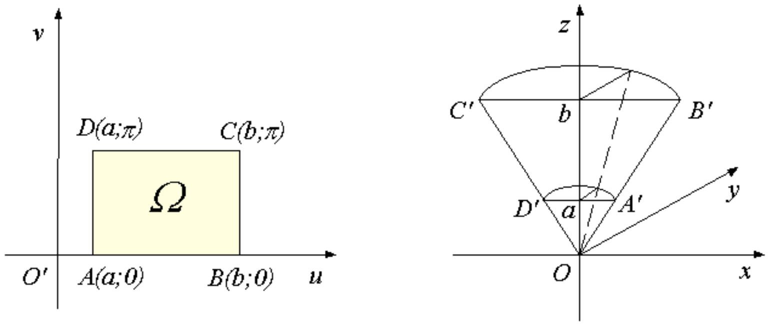


Рис. 1

Точки поверхні, які не належать її межі, називаються **внутрішніми точками**. Якщо ж умова типу 3) не виконується для межі області Ω, то поверхня може не мати краю і у такому випадку вона називається **замкненою**. Прикладом такої поверхні є сфера, яка задана рівнянням (5).

Поняття внутрішніх і межових точок поверхні можна ввести й так: точка M поверхні називається **внутрішньою**, якщо існує окіл точки M такий, що множина точок цього околу, які не належать поверхні, не є зв'язною; точка поверхні, яка не є внутрішньою, називається **межевою**.

1.2. Поняття гладкої поверхні. Нехай поверхня S задана або явно, або неявно, або параметрично. Будемо цю поверхню називати **гладкою**, якщо для довільної її внутршіньої точки існує такий окіл, що вирізає частину поверхні S, яка допускає явне зображення вигляду (1), або ($1'$), або ($1''$), де f – неперервно диференційовна функція.

З цього означення випливає, що в кожній внутрішній точці гладкої поверхні S існує дотична площина і нормаль.

Відомо, що рівняння дотичної площини до поверхні S в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

а вектор нормалі

$$\overrightarrow{n} = \Big(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}; -1\Big),$$

якщо поверхня S задана рівнянням (1).

Нехай поверхня S задана неявно рівнянням (2) і нехай функція F неперервно диференційовна. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхні S називається **неособливою**, якщо в цій точці $\Big(\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}\Big)^2 \neq 0$. У протилежному випадку точка M_0 називається **особливою**. Якщо поверхня не містить особливих точок, то вона є гладкою. Рівняння дотичної площини до поверхні S в неособливій внутрішній точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Вектор

$$\overrightarrow{n} = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0); \frac{\partial F}{\partial y}(M_0); \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\Big)$$

є вектором нормалі до поверхні S в точці M_0.

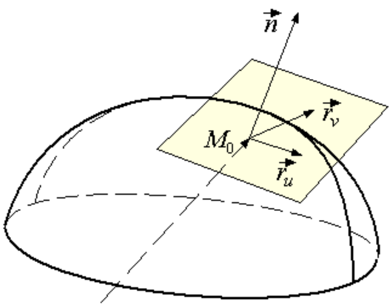


Рис. 2

Нехай поверхня S задана параметрично рівняннями (4) або, що одне й те саме, рівнянням (6). Точка $M_0(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ називається **неособливою** точкою поверхні S, якщо в цій точці вектори $\overrightarrow{r}_u = \varphi'_u(u,v)\overrightarrow{i} + \psi'_u(u,v)\overrightarrow{j} + \chi'_u(u,v)\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{r}_v = \varphi'_v(u,v)\overrightarrow{i} + \psi'_v(u,v)\overrightarrow{j} + \chi'_v(u,v)\overrightarrow{k}$ лінійно незалежні (неколінеарні). У протилежному випадку точка M_0 називається **особливою**.

Проста поверхня, яка не має особливих точок, є гладкою.

Якщо зафіксувати в рівняннях (4) значення параметра $u = u_0$, то одержимо на поверхні S криву

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v).$$

Змінюючи значення u_0, дістанемо цілу сім'ю ліній, які називають **u-лініями**.

Аналогічно, фіксуючи v_0, матимемо сім'ю **v-ліній** на поверхні S

$$x = \varphi(u, v_0), \quad x = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0).$$

Вектор $\overrightarrow{r}_u$ є дотичним вектором до v-лінії, а $\overrightarrow{r}_v$ – дотичним вектором до u-лінії. Тому, якщо точка M_0 поверхні S неособлива, то ці два вектори, які виходять з однієї точки, неколінеарні й утворюють площину, що називається **дотичною площиною** до поверхні S в точці M_0.

Рівняння дотичної площини до поверхні S в неособливій внутрішній точці $M_0(\varphi(u_0, v_0); \psi(u_0, v_0); \chi(u_0, v_0))$ має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

де $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, $z_0 = \chi(u_0, v_0)$,

$$A = A(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = B(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$C = C(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Вектор

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v] = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k} \tag{8}$$

є вектором нормалі до поверхні S в точці M_0.

1.3. Поняття площі поверхні. Нехай S – обмежена гладка поверхні без особливих точок, яка задана параметричними рівняннями (6). Введемо поняття площі поверхні, розглянувши один із найпростіших підходів. Розіб'ємо область Ω зміни параметрів u і v на частини прямими, які паралельні осям координат: $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$. В області Ω_k виберемо довільним чином точку $(u_k; v_k)$ (рис. 3). Цій точці відповідає точка $M_k(\varphi(u_k, v_k); \psi(u_k, v_k); \chi(u_k, v_k))$ поверхні S, а області Ω_k – частина S_k цієї поверхні (рис. 4). При цьому поверхня S розіб'ється на частини S_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, тобто $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$. У дотичній площині до поверхні S в точці M_k, побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{r}_u(M_k)$, $\overrightarrow{r}_v(M_k)$. Площа цього паралелограма не залежить від величини площі області Ω_k, а отже, і поверхні S_k. За наближене значення σ_k площі поверхні S_k візьмемо число, яке є добутком площі паралелограма $|[\overrightarrow{r}_u(M_k), \overrightarrow{r}_v(M_k)]|$ на площу $S(\Omega_k)$ області Ω_k, тобто

$$\sigma_k \approx |[\overrightarrow{r}_u(M_k), \overrightarrow{r}_v(M_k)]| S(\Omega_k) =$$

$$= \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} S(\Omega_k), k \in \{1, \dots, n\}.$$

Тоді площа всієї поверхні S наближено дорівнюватиме

$$\sigma \approx \sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} S(\Omega_k).$$

Очевидно, що чим дрібніше розбиття області Ω, то тим точнішим буде це наближення.

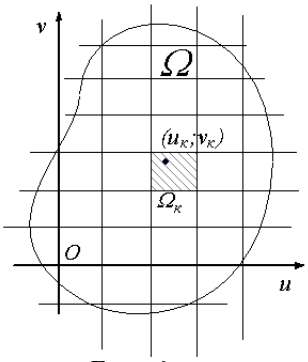


Рис. 3

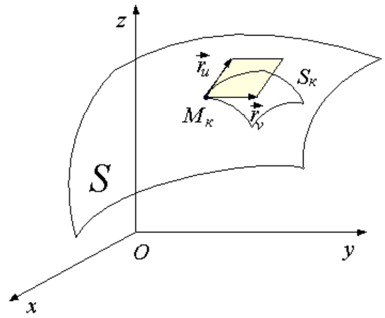


Рис. 4

Площею $\sigma = \sigma(S)$ **поверхні** S, заданої параметричним рівнянням (4), називається границя

$$\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} S(\Omega_k), \quad (8)$$

де $\lambda = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,n\}} \operatorname{diam} \Omega_k$, якщо ця границя не залежить від розбиття області Ω і вибору точок $(u_k; v_k) \in \Omega_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо поверхня S має площу, то вона називається **квадровною**.

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} \cdot S(\Omega_k)$ є інтегральною сумою для подвійного інтеграла $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)} dudv$ від неперервної функції $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ в області Ω, то границя (8) є скінченною, не залежить від розбиття області Ω, вибору точок $(u_k; v_k) \in \Omega_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, і дорівнює цьому подвійному інтегралу, тобто

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)} dudv. \quad (9)$$

Отже, ми довели теорему про квадровність поверхні S.

Теорема. *Гладка поверхня S, яка задана параметричними рівняннями (4) або векторним рівнянням (6) і не має особливих точок, є квадровною і її площа σ обчислюється за формулою (9).*

Введемо позначення

$$E = \overrightarrow{r}_u^2 = \Big(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u}\Big)^2,$$

$$G = \overrightarrow{r}_v^2 = \Big(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v}\Big)^2,$$

$$F = (\overrightarrow{r}_u, \overrightarrow{r}_v) = \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} + \\ + \frac{\partial\chi(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\chi(u,v)}{\partial v}. \tag{10}$$

Безпосередні обчислення доводять, що

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2. \tag{11}$$

Тому формулу (9) можна подати ще й в такому вигляді

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}dudv. \tag{12}$$

Поверхню S, яка задана рівнянням (1), можна розглядати як таку, що визначена параметричними рівняннями (4), де параметрами є x і y:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v), \quad (u;v) \in D.$$

Якщо область D задовольняє умови 1) з пункту 1.1, а функція f неперервно диференційовна в області D, то з формули (9) або (12), випливає формула для площі поверхні, яка задана у явному вигляді рівнянням (1)

$$\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big)^2}dxdy. \tag{13}$$

Поверхня, яка складається з декількох гладких поверхонь, називається **кусково-гладкою**. Площа такої поверхні дорівнює сумі площ гладких поверхонь, які утворюють цю поверхню.

Означення площі поверхні природньо поширюється на поверхні, які не мають дотичної площини в скінченному числі внутрішніх точок. Прикладом такої поверхні є конічна поверхня, яка не має дотичної площини у своїй вершині.

Формули (9) і (12) правильні й для кусково-гладких поверхонь, а також поверхонь, які мають скінченне число особливих точок.

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини і знайти напрямні косинуси нормалі до поверхні $x = u$, $y = v$, $z = u^3 + v^2$ в точці $M_0(1; 1; 2)$.

◄ Якщо скористатися рівнянням поверхні (4), то у нашому випадку маємо

$$\varphi(u, v) = u, \quad \psi(u, v) = v, \quad \chi(u, v) = u^3 + v^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = 1,$$
$$\frac{\partial\chi}{\partial u} = 3u^2, \quad \frac{\partial\chi}{\partial v} = 2v.$$

Оскільки точці M_0 відповідають значення параметрів $u = 1$, $v = 1$, то коефіцієнти A, B і C при цих значеннях параметрів такі:

$$A(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 3u^2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}\Bigg|_{\substack{u=1\\v=1}} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$B(1,1) = \begin{vmatrix} 3u^2 & 1 \\ 2v & 0 \end{vmatrix}\Bigg|_{\substack{u=1\\v=1}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C(1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді рівняння дотичної площини має вигляд

$$-3(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$$

або

$$3x + 2y - z - 3 = 0,$$

а векторн нормалі

$$\overrightarrow{n} = -3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{n}$ і його напрямні косинуси:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти площу частини гіперболічного параболоїда $z = xy$, вирізаної циліндром $x^2 + y^2 = 8$.

◀ Згідно з формулою (13)

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint\limits_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy,$$

де D – круг $x^2 + y^2 \leq 8$. Перейдемо в інтегралі до полярних координат. Тоді одержимо

$$\sigma = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{8}} \rho\sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{1}{2} 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{8}} (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + \rho^2) =$$

$$= \pi \frac{(1 + \rho^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{2}{3}\pi(27 - 1) = \frac{52}{3}\pi. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Знайти площу частини сфери радіуса R, яка обмежена двома паралелями і двома меридіанами.

◀ Розглянемо декартову прямокутну систему координат, початок якої знаходиться в центрі сфери. У такій системі координат рівняння сфери має вигляд $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. У параметричній формі це рівняння запишеться у вигляді (5). Заданій частині поверхні відповідають значення параметрів u і v такі, що $\theta_1 \leq u \leq \theta_2$ і $\varphi_1 \leq v \leq \varphi_2$, де кути φ_1 і φ_2 описують задані меридіани, а θ_1 і θ_2 – паралелі. Поверхня S зображена на рис. 5.

Знайдемо функції A, B, C, використовуючи формули (7):

$$A = \begin{vmatrix} R\cos u \sin v & -R\sin u \\ R\sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 u \cos v;$$

$$B = \begin{vmatrix} -R\sin u & R\cos u \cos v \\ 0 & -R\sin u \sin v \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 u \sin v;$$

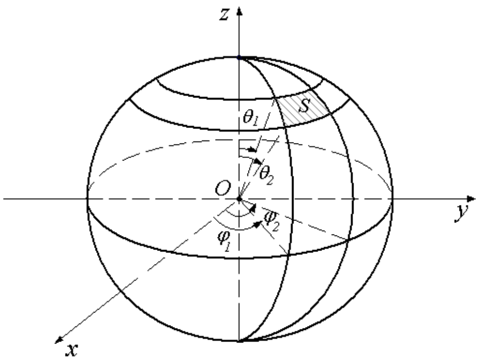


Рис. 5

$$C = \begin{vmatrix} R\cos u\cos v & R\cos u\sin v \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v \end{vmatrix} = R^2\sin u\cos u\cos^2 v +$$

$$+R^2\sin u\cos u\sin^2 v = R^2\sin u\cos u.$$

Тоді

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} =$$

$$= \sqrt{R^4\sin^4 u\cos^2 v + R^4\sin^4 u\sin^2 v + R^4\sin^2 u\cos^2 u} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^4 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u\cos^2 u} =$$

$$= R^2\sqrt{\sin^2 u(\sin^2 u + \cos^2 u)} = R^2\sin u.$$

Згідно з формулою (9) маємо, що шукана площа

$$\sigma = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big(\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} R^2\sin u du\Big)dv = R^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)dv =$$

$$= R^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Зауважимо, що за допомогою цієї формули можна знаходити площі частин земної поверхні. ►

§2. Поверхневі інтеграли першого роду

2.1. Означення поверхневого інтеграла першого роду. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду за допомогою подвійного інтеграла. Нехай на квадровній поверхні S визначена функція $f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню S на квадровні частини S_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, що не мають спільних внутрішніх точок, так, що $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$. Таке розбиття можна здійснити, наприклад, за допомогою кусково-гладких ліній. На кожній елементарній частині S_k виберемо довільну точку M_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ і складемо **інтегральну суму**

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k,$$

де $\Delta\sigma_k$ – площа поверхні S_k, тобто $\Delta\sigma_k = \sigma(S_k)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Нехай d_k – діаметр S_k, а $d = \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} d_k$.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум α при $d \to 0$, що не залежить від способу розбиття поверхні S на частини S_k і вибору точок M_k на цих частинах, то вона називається **поверхневим інтегралом першого роду** від функції f на поверхні S і позначається символом

$$\iint\limits_S f(M)d\sigma \quad \text{або} \quad \iint\limits_S f(x, y, z)d\sigma,$$

де $d\sigma$ називають диференціалом площі поверхні.

Отже,

$$\iint\limits_S f((x, y, z)d\sigma = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\sigma_k. \qquad (1)$$

Нехай S – гладка поверхня, яка не має особливих точок, задана параметричними рівняннями (4):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u; v) \in \Omega.$$

Розглянемо на цій поверхні неперервну функцію $f(x, y, z)$ і доведемо, що для такої функції існує поверхневий інтеграл першого роду, а також виведемо формулу за якою він обчислюється.

Як і раніше розглянемо розбиття поверхні S на частини S_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, кусково-гладкими лініями. Оскільки поверхня S є простою, то це розбиття породжує відповідне розбиття області Ω: $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$, де $\Omega_k = \{(u; v) \in \Omega : (\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \in S_k\}$. Правильним є і обернене твердження, тобто кожне розбиття області Ω породжує відповідне розбиття поверхні S. При цьому, якщо $d_k^* = \operatorname{diam} \Omega_k$, $d^* = \max\limits_{k \in \{1, \ldots, n\}} d_k^*$, то з того, що $d \to 0$ випливає, що й $d^* \to 0$ і, навпаки.

Тоді згідно з формулою (9) маємо

$$\Delta\sigma_k = \sigma(S_k) = \iint\limits_{\Omega_k} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Якщо скористатися теоремою про середнє для подвійного інтеграла, то дістанемо, що

$$\Delta\sigma_k = \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} S(\Omega_k),$$

де $(u_k; v_k)$ – деяка точка з області Ω_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тепер утворимо інтегральну суму, що відповідає поверхневому інтегралу першого роду для функції f:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k), \chi(u_k, v_k)) \times$$

$$\times \sqrt{A^2(u_k, v_k) + B^2(u_k, v_k) + C^2(u_k, v_k)} S(\Omega_k),$$

де $M_k(\varphi(u_k, v_k); \psi(u_k, v_k); \chi(u_k, v_k))$ – точка поверхні S_k, що відповідає точці $(u_k; v_k) \in \Omega_k$. Ця сума є інтегральною сумою для подвійного інтеграла від функції $f(\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k), \chi(u_k, v_k)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, що визначена на Ω. Оскільки ця функція неперервна, то існує подвійний інтеграл і правильна рівність

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \lim_{d\to 0}\alpha = \lim_{d^*\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(u_k,v_k),\psi(u_k,v_k),\chi(u_k,v_k))\times$$

$$\times\sqrt{A^2(u_k,v_k)+B^2(u_k,v_k)+C^2(u_k,v_k)}S(\Omega_k) =$$

$$= \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv.$$

Отже, доведено рівність

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\times$$

$$\times\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}dudv. \qquad (2_1)$$

Згідно з формулою (11) §1, маємо $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{EG-F^2}$, а тому формулу (2_1) можна подати у вигляді

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv. \qquad (2_2)$$

З формул (2_1) і (2_2) випливають формули для диференціала площі поверхні

$$d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv \quad \text{або} \quad d\sigma = \sqrt{EG-F^2}dudv.$$

Якщо поверхня S є графіком неперервно диференційовної функції $z = z(x,y)$, $(x;y)\in D$, то з (2_1) випливає рівність

$$\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy. \qquad (3)$$

Можна довести, що формули (2_1), (2_2) і (3) є правильними і для кусково-гладких поверхонь.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $I = \iint\limits_S z d\sigma$, де S – частина гіперболічного параболоїда $z = xy$, яка вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 4$.

◀ Згідно з формулою (3) маємо

$$I = \iint\limits_S z d\sigma = \iint\limits_D z\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \iint\limits_D xy\sqrt{1 + y^2 + x^2} dxdy,$$

де D – круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Перейшовши до полярних координах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 2]$, і звівши подвійний інтеграл до повторного, дістанемо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1 + r^2} dr = \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2} dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2} dr = -\frac{1}{4}\cos 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2} dr = 0 \int\limits_0^2 r^3\sqrt{1 + r^2} dr = 0. \quad ▶$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma$, де S – частина параболоїда обертання $z = 1 - x^2 - y^2$, яка відрізана площиною $z = 0$ (рис. 1).

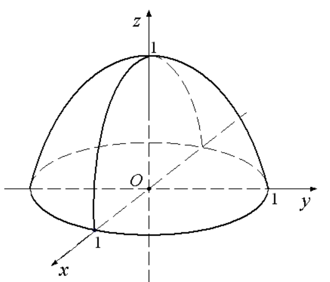


Рис. 1

◀ Поверхня S, що задана рівнянням $z = 1 - x^2 - y^2$, проектується на площину Oxy в область D, обмежену колом $x^2 + y^2 = 1$. Рівняння кола одержується з рівняння параболоїда при $z = 0$. Отже, областю D є круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Оскільки $z'_x = -2x$, $z'_y = -2y$, то згідно з формулою (3)

$$I = \iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma =$$

$$\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (1+4x^2+4y^2)dxdy.$$

Перейшовши в подвійному інтегралі до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; 1]$, матимемо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1+4r^2)rdr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + r^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma$, якщо S – межа тіла $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

◀ Очевидно, що межа S заданого тіла складається з двох гладких поверхонь S_1 і S_2, де S_1 – частина поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, а S_2 – частина площини $z = 1$ (рис. 2). Знайдемо окремо поверхневі інтеграли по кожній з цих поверхонь.

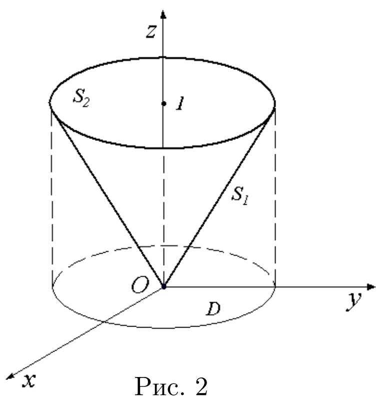


Рис. 2

Маємо $I_1 = \iint\limits_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma$, де S_1 – конус, який визначається рівнянням $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x; y) \in D$, де D – проекція S_1 на площину Oxy, тобто круг $x^2+y^2 \le 1$. Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2},$$

а тому, згідно з формулою (3),

$$I_1 = \iint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy.$$

У цьому подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; 1]$. Тоді одержимо, що

$$I_1 = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^1 r^3 dr\Big)d\varphi = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\varphi = 2\sqrt{2}\frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.$$

Обчислимо $I_2 = \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)d\sigma$, де S_2 визначається рівнянням $z = 1$, $(x; y) \in D$. У цьому випадку $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ і тому $\sqrt{1+\Big(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big)^2} = 1$. Якщо скористатися формулою (3), то отримаємо, що

$$I_2 = \iint\limits_D (x^2+y^2+1)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^1 (r^2+1)rdr\Big)d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 (r^3+r)dr = 2\pi\Big(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\Big)\Big|_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{3\pi}{2}.$$

Отже,

$$I = I_1 + I_2 = \sqrt{2}\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\pi. \quad \blacktriangleright$$

2.2. Застосування поверхневих інтегралів першого роду. Нехай S – матеріальна поверхня з поверхневою густиною $\rho(x, y, z)$ в точці $M(x; y; z) \in S$. Тоді правильні формули:

1) $m = \iint\limits_S \rho(x, y, z)d\sigma$ – маса поверхні;

2) $M_{xy} = \iint\limits_S z\rho(x,y,z)d\sigma$, $M_{xz} = \iint\limits_S y\rho(x,y,z)d\sigma$, $M_{yz} = \iint\limits_S x\rho(x,y,z)d\sigma$ – статичні моменти поверхні відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz;

3) $x_c = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $y_c = \dfrac{M_{xz}}{m}$, $z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$ – координати центра маси поверхні;

4) $I_x = \iint\limits_S (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)d\sigma$ – момент інерції поверхні відносно осі Ox;

5) $I_{yz} = \iint\limits_S x^2\rho(x,y,z)d\sigma$ – момент інерції поверхні відносно площини Oyz;

6) $I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)d\sigma$ – момент інерції поверхні відносно початку координат.

Приклад 4. Знайти масу параболічної оболонки $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0 \le z \le 1$, густина якої змінюється за законом $\rho(x,y,z) = z$.

◀ Маємо $m = \iint\limits_S zd\sigma$. На поверхні S правильною є рівність $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, і множина точок поверхні, по якій проводиться інтегрування, проектується на площину Oxy в круг $x^2+y^2 \le (\sqrt{2})^2$. Оскільки $d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$, то

$$m = \iint\limits_S \frac{1}{2}(x^2+y^2)d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярної системи координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; \sqrt{2}]$. Тоді одержимо, що

$$m = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}dr = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}dr =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{1+r^2}rdr = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+r^2}=t, & rdr = tdt, \\ r^2 = t^2-1, & \begin{array}{c|cc} r & 0 & \sqrt{2} \\ \hline t & 1 & \sqrt{3} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)dt = \pi\Big(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\pi(6\sqrt{3}+1)}{15}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти координати центра маси площини $z = x$, обмеженої площинами $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 3), якщо $\rho(x, y, z) = 1$.

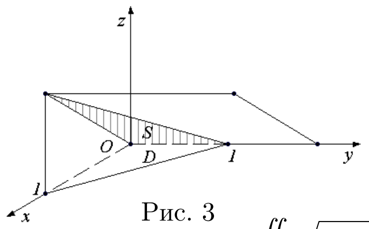


Рис. 3

◀ Знайдемо масу вказаної частини площини $z = x$. Оскільки $z'_x = 1$, $z'_y = 0$, то

$$m = \iint_S d\sigma =$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{2}\int_0^1 y\Big|_0^{1-x} dx = \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_S xd\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \sqrt{2}dy = 2\int_0^1 x(1-x)dx =$$

$$= 2\Big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_S yd\sigma = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{2}ydy = 2\int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$z_c = \frac{1}{m} \iint\limits_S z d\sigma = \frac{1}{m} \iint\limits_S x d\sigma = \frac{1}{3},$$

бо $z = x$ на S. ►

Приклад 6. Знайти момент інерції півсфери $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ відносно осі Oz.

◄ Маємо $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $d\sigma = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

$$I_z = \iint\limits_S (x^2+y^2) d\sigma = \iint\limits_D (x^2+y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy,$$

де областю інтегрування D є проекція півсфери на площину Oxy, тобто круг $x^2 + y^2 \le a^2$. Перейшовши до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, де $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; a]$, одержимо

$$I_z = \iint\limits_\Omega r^2 \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\varphi = 4a \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 4a\varphi \Big|_0^{\pi/2} \times$$

$$\times \int\limits_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{a^2-r^2} = t, & rdr = -tdt, \\ a^2 - r^2 = t^2 & \begin{array}{c|cc} r & 0 & a \\ \hline t & a & 0 \end{array} \\ r^2 = a^2 - t^2 & \end{array} \right| = -2\pi a \times$$

$$\times \int\limits_a^0 \frac{(a^2-t^2)}{t} t dt = 2\pi a \int\limits_0^a (a^2-t^2) dt = 2\pi a \Big(a^2 t - \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^a = \frac{4\pi a^4}{3}. \quad ►$$

§3. Поверхневі інтеграли другого роду

3.1. Сторона поверхні. Якщо поверхня обмежує деяке тіло, то розрізняють **зовнішню** і **внутрішню** її сторони. Прикладом такої поверхні є сфера. Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то розрізняють **верхню** і **нижню** її сторони, тобто вона має дві сторони. Поряд з ними існують й односторонні поверхні. Розглянемо ці поняття детальніше.

Нехай задано деяку гладку поверхню S. На цій поверхні візьмемо внутрішню точку M_0 і проведемо в ній нормаль до поверхні. На нормалі за допомогою одиничного вектора $\overrightarrow{n}$ виберемо один з двох напрямків. Проведемо на поверхні S через точку M_0 деяку замкнену криву L, яка не має спільних точок з краями поверхні S. Вздовж L переміщатимемо вектор $\overrightarrow{n}$ так, щоб він весь час був нормальним вектором до поверхні S і змінювався неперервно. Тоді матимемо такі два випадки: 1) при поверненні в точку M_0 напрям вектора $\overrightarrow{n}$ не зміниться; 2) напрям вектора $\overrightarrow{n}$ зміниться на протилежний.

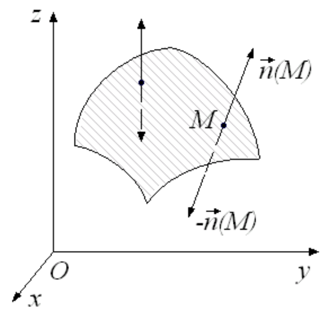
Гладка поверхня S називається **двосторонньою**, якщо при обході будь-якого замкненого контура L, який лежить на поверхні S і не має спільних точок з краями поверхні, напрямок нормалі до поверхні не змінюється при поверненні в початкову точку $M_0 \in L$.

Якщо ж на поверхні S існує замкнений контур, при обході якого напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхня S називається **односторонньою**.

З цього означення випливає, що коли поверхня S двостороння, то в кожній її точці M можна вибрати одиничний вектор нормалі $\overrightarrow{n}(M)$ так, щоб вектор $\overrightarrow{n}(M)$ залежав від точки M неперервно. Очевидно, що на двосторонній поверхні S можна побудувати тільки дві такі неперервні функції $\overrightarrow{n}(M)$ і $-\overrightarrow{n}(M)$, причому, кожна з цих функцій задає на S неперервне поле нормалей.

Прикладами двосторонньої поверхні є звичайна площина, круг, многокутник, тощо.

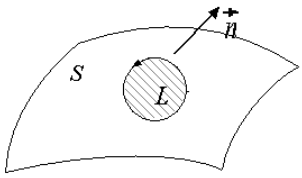
Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D$, де f – неперервна і має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то легко бачити, що така поверхня є двосторонньою.



Двосторонню поверхню ще називають **орієнтованою**, а вибір її певної сторони – **орієнтацією** поверхні.

Нехай S – орієнтована поверхня, обмежена одним або кількома контурами.

Напрям обходу контура L вважається **додатним** або **узгодженим з орієнтацією** S, якщо спостерігач, розміщений на поверхні так, що напрямок вектора нормалі збігається з напрямком від ніг до голови, обходить контур L, залишаючи поверхню S зліва від себе. Протилежний напрямок вважається **від'ємним**.



Якщо L будь-який замкнений контур, що охоплює частину орієнтованої поверхні S, то напрямок обходу цього контура, узгоджений з орієнтацією поверхні S, вважається додатним, якщо при обході конутра частина поверхні залишається зліва.

Правило узгодження орієнтації поверхні S і контура L, що її охоплює, можна сформулювати так: нехай $\overrightarrow{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні S в деякій точці M, що лежить на L і нехай $\overrightarrow{\nu}$ – вектор, перпендикулярний до L і до $\overrightarrow{n}$ і напрямлений у той бік, де розміщена поверхня S. Тоді додатний напрямок обходу контура L визначається напрямком вектора $[\overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{n}]$.

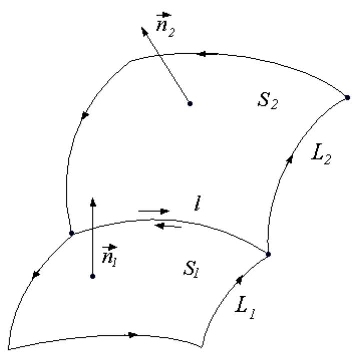
Якщо поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$, $(x; y) \in D$, де функція f неперервно диференційовна на D, то на верхній стороні поверхні неперервне поле нормалей можна задати вектор-функцією

$$\overrightarrow{n}(M) = \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(M); -\frac{\partial f}{\partial y}(M); 1 \Big),$$

а на нижній стороні – вектор-функцією

$$-\overrightarrow{n}(M) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(M); \frac{\partial f}{\partial y}(M); -1\Big)$$

Якщо гладка двостороння поверхня задана параметрично, то на одній її стороні неперервне поле нормалей можна задати вектор-функцією $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$, а на другій – вектор-функцією $-\overrightarrow{n} = (-A; -B; -C)$, де A, B, C визначаються формулами (7) з пункту 1.2.



Нехай поверхня S є кусково-гладкою, тобто вона складається, наприклад, з двох гладких поверхонь S_1 і S_2: $S = S_1 \cup S_2$, де S_1 і S_2 мають спільну частину l межі. Визначити на поверхні S сторону поверхні так, як це робилося вище, не можна хоча б тому, що нормаль не завжди змінюється неперервно, якщо контур перетинає межу l, бо на ній може не існувати дотична площина. У цьому випадку сторона поверхні S визначається так. Візьмемо на гладкій поверхні S_1 одну із сторін, тобто один із двох напрямків нормалі. Йому відповідає обхід контура L_1 поверхні S_1. Отже, й на l маємо певний напрямок руху. Оскільки поверхня S двостороння, то на S_2 можна вибрати таку сторону, тобто напрямок обходу контура L_2, при якому межа l обходиться у напрямку, який протилежний до того, який був при обході контура L_1.

Очевидно, що двостороння кусково-гладка поверхня має дві сторони. Наприклад, якщо замкнена поверхня S є кусково-гладкою і обмежує деяке тіло, то вона двостороння і одна з її сторін буде зовнішньою, а друга внутрішньою по відношенню до тіла, що відповідає нормалі, яка напрямлена зовні або в середину тіла. Наприклад, якщо S є межею призми, то S є кусково-гладкою поверхнею, що складається з її бічних граней.

Тоді на S можна виділити як зовнішню сторону, так і внутрішню сторону відносно призми.

3.2. Означення поверхневого інтеграла другого роду та його обчислення. Нехай S – гладка двостороння поверхня. Розглядатимемо надалі одну із її сторін, визначену полем нормалей $\overrightarrow{n}(M)$, $M \in S$. Нехай $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ – кути, які утворює вектор $\overrightarrow{n}(M)$ з осями координат Ox, Oy і Oz відповідно. Припустимо, що на поверхні S задано неперервну вектор-функцію

$$\overrightarrow{F}(M) = P(M)\overrightarrow{i} + Q(M)\overrightarrow{j} + R(M)\overrightarrow{k},$$

де $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$ – неперервні функції на S.

Поверхневий інтеграл першого роду вигляду

$$\iint\limits_S (P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\cos\beta(M) + R(M)\cos\gamma(M))d\sigma \quad (1)$$

називають поверхневим інтегралом другого роду і позначають символом

$$\iint\limits_S P(M)dydz + Q(M)dzdx + R(M)dxdy. \quad (2)$$

Отже, згідно з означенням маємо рівність

$$\iint\limits_S (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy. \quad (3)$$

Очевидно, що поверхневий інтеграл другого роду залежить від вибору сторони поверхні. Якщо взяти другу сторону поверхні, то вектор $\overrightarrow{n}(M)$ змінить напрямок на протилежний, а тому його напрямні косинуси поміняють знак, і отже, знак інтеграла зміниться на протилежний.

Оскільки поверхневий інтеграл другого роду є поверхневим інтегралом першого роду від функції $P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\cos\beta(M) + R(M)\cos\gamma(M)$, який згідно з попереднім зводиться до подвійного інтеграла, коли P, Q і R – неперервні на S, то легко одержуємо формули для обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай гладка двостороння поверхня S задана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u;v) \in \Omega,$$

і не має особливих точок. Виберемо ту сторону поверхні, на якій $\overrightarrow{n}(M) = (A;B;C)$. Тоді

$$\cos\alpha(M) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\beta(M) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\cos\gamma(M) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Згідно з формулою (2_2) §2

$$I_1 = \iint\limits_S P(M)\cos\alpha(M)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_\Omega P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}\sqrt{EG-F^2}dudv =$$

$$= \iint\limits_\Omega P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))A(u,v)dudv. \tag{4}$$

Аналогічно

$$I_2 = \iint\limits_S Q(M)\cos\beta(M)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_\Omega Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))B(u,v)dudv, \tag{5}$$

$$I_3 = \iint\limits_S R(M) \cos\gamma(M) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_\Omega R(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) C(u,v) du dv. \qquad (6)$$

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z = f(x,y)$, $(x;y) \in D$, і вибрана верхня (зовнішня) сторона поверхні, тобто $\overrightarrow{n}(M) = \Big(-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y); -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y); 1\Big)$, то $\cos\gamma(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$ і згідно з формулою (3) §2 знаходимо

$$I_3 = \iint\limits_S R(M) \cos\gamma(M) d\sigma = \iint\limits_D R(x,y,f(x,y)) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2} dx dy =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,f(x,y)) dx dy. \qquad (7)$$

Для нижньої сторони поверхні маємо

$$\cos\gamma(M) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

звідки

$$I_3 = -\iint\limits_D R(x,y,f(x,y)) dx dy. \qquad (8)$$

Аналогічно одержуються формули для обчислення інтегралів I_1 і I_2, якщо поверхня S задана відповідно рівнянням $x = g(y,z)$, $(y;z) \in D'$ і рівнянням $y = h(z,x)$, $(z;x) \in D''$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy$, де S – верхня сторона поверхні $z = \sqrt{1-x^2}$, відрізана площинами $y = 0$, $y = 1$ (рис. 5).

◀ Проекцією D заданої поверхні на площину Oxy є прямокутник, що визначається нерівностями $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Тоді, згідно з формулою (7), маємо

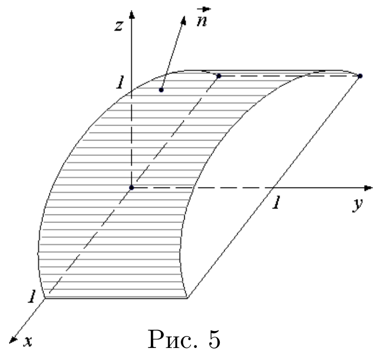


Рис. 5

$$I = \iint\limits_D (y^2 + (\sqrt{1-x^2})^2)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^1 (y^2+1-x^2)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{y^3}{3} + (1-x^2)y\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}+1-x^2\right)dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx = \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2. \quad ▶$$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $0 \le z \le 2$.

◀ Згідно з формулою (3) маємо

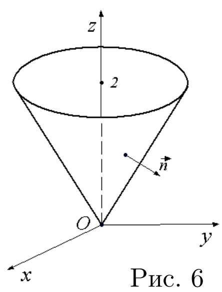


Рис. 6

$$I = \iint\limits_S \Big((y-z)\cos\alpha +$$

$$+(z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma\Big)d\sigma.$$

Зовнішня одинична нормаль до вибраної сторони конічної поверхні утворює з віссю Oz тупий кут (рис. 6), а тому в кожній з формул

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}} \quad \cos\beta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}}$$

перед квадратним коренем візьмемо знак ”–“. Оскільки $f = z = \sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{z}$, $z \neq 0$, $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\dfrac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$, то $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2}z}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{2}z}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z \neq 0$.

Тоді

$$I = \iint\limits_D \frac{(y-z)x+(z-x)y+(y-x)z}{z}dxdy = 2\iint\limits_D (y-x)dxdy,$$

де D – круг $x^2+y^2 \leq 4$. Перейшовши до полярної системи координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; 2]$, дістанемо

$$I = 2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int\limits_0^2 r^2dr = 2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\frac{r^3}{3}\bigg|_0^2 d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi = \frac{16}{3}(-\cos\varphi-\sin\varphi)\bigg|_0^{2\pi} = 0. \quad \blacktriangleright$$

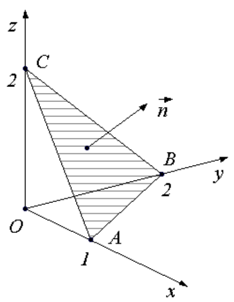
Оскільки $P(M)\cos\alpha(M)+Q(M)\cos\beta(M)+R(M)\cos\gamma(M) = \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}$, то поверхневий інтеграл другого роду (1) можна записати у вигляді

$$\Pi = \iint\limits_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{n}d\sigma, \tag{9}$$

де $\overrightarrow{n}$ – одиничний вектор нормалі, що характеризує вибрану сторону поверхні.

Інтеграл (9) називається **потоком вектора** $\overrightarrow{F}(M) = (P(M); Q(M); R(M)))$ **(векторного поля)** через вибрану сторону поверхні S, яка визначається вектором $\overrightarrow{n}(M) = (\cos\alpha(M); \cos\beta(M); \cos\gamma(M))$. Зокрема, якщо $\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{v}(M)$ – швидкість руху рідини в точці M, то $\Pi = \iint\limits_S \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{n}\,d\sigma$ є потоком рідини через вибрану сторону поверхні, тобто кількість рідини, що протікає через поверхню S за одиницю часу в заданому напрямку.

Приклад 3. Знайти потік вектора $\overrightarrow{F} = xy\overrightarrow{i} + (y+z)\overrightarrow{j} + (x + 2z)\overrightarrow{k}$ через верхню сторону площини $2x + y + z = 2$, що лежить у першому октанті.



◄ Нехай задана площина перетинає осі координат в точках A, B і C. Треба обчислити потік поля вектора $\overrightarrow{F}$ через площину трикутника ABC, коли нормаль до ΔABC утворює гострий кут з віссю Oz. Маємо

$$\Pi = \iint\limits_S xydydz + (y+z)dzdx + (x+2z)dxdy,$$

де S – площина трикутника ABC.

Обчислимо кожний з інтегралів окремо, звівши його до подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_S xydydz = \iint\limits_{OBC} \frac{2-y-z}{2} ydydz =$$

$$= \int\limits_0^2 ydy \int\limits_0^{2-y} \Big(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\Big)dz =$$

$$= \int\limits_0^2 y\Big(z - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{2}\frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^{2-y} dy = \int\limits_0^2 y\Big(1 - y + \frac{1}{4}y^2\Big)dy = \int\limits_0^2 \Big(y - y^2 + \frac{1}{4}y^3\Big)dy =$$

$$= \Big(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{16}\Big)\Big|_0^2 = 2 - \frac{8}{3} + 1 = \frac{1}{3};$$

$$\iint_S (y+z)dzdx = \iint_{OAC} ((2-2x-z)+z)dzdx = \int_0^2 dz \int_0^{1-\frac{z}{2}} 2(1-x)dx =$$

$$= -2\int_0^2 \frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^{1-\frac{z}{2}} dz = -\int_0^2 \Big(\frac{z^2}{4}-1\Big)dz = -\Big(\frac{z^3}{12}-z\Big)\Big|_0^2 = -\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3};$$

$$\iint_S (x+2z)dxdy = \iint_{OAB} (x+2(2-2x-y))dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (-3x-2y+4)dy =$$

$$= \int_0^1 (-3xy-y^2+4y)\Big|_0^{2-2x} dx = \int_0^1 (-3x(2-2x)-(2-2x)^2+4(2-2x))dx =$$

$$= \int_0^1 (4-6x+2x^2)dx = \Big(4x-3x^2+\frac{2}{3}x^3\Big)\Big|_0^1 = 4-3+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже,

$$\Pi = \iint_S \vec{F}\vec{n}\,d\sigma = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3} = \frac{10}{3}. \quad ▶$$

§4. Формула Стокса

Формула Стокса є узагальненням на тривимірний випадок формули Гріна (див. розділ 11, §2, п. 2.5.2).

Нехай є двостороння, гладка або кусково-гладка поверхня S в $\mathbb{R}^3$, межа якої крива L є кусково-гладкою. Відкрита множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, тобто сукупність точок простору, кожна з яких належить цій множині разом з деяким своїм околом, називається **околом поверхні** S, якщо вона містить дану поверхню S.

Теорема 1. *Якщо в деякому околі двосторонньої гладкої або кусково-гладкої поверхні* $S \subset \mathbb{R}^3$ *задано неперервні функції* $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$, *які мають в цьому околі всі неперервні частинні похідні першого порядку, то правильна рівність*

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz = \iint_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+$$

$$+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy, \tag{1}$$

причому вибір сторони поверхні S у поверхневому інтегралі справа визначає відповідний обхід межі L поверхні S в криволінійному інтегралі зліва.

Рівність (1) називається **формулою Стокса**. Цю формулу можна записати і за допомогою поверхневого інтеграла першого роду

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\Big(\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\cos\alpha+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\cos\beta+$$

$$+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big)d\sigma. \tag{2}$$

◀ Доведемо правильність формули (1) для випадку деяких найпростіших типів поверхонь. Для доведення формули (1) досить одержати такі рівності:

$$\oint\limits_L Pdx=\iint\limits_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy, \tag{1_1}$$

$$\oint\limits_L Qdy=\iint\limits_S\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz, \tag{1_2}$$

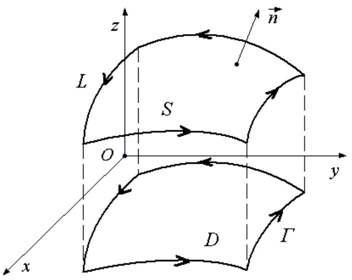
$$\oint\limits_L Rdz=\iint\limits_S\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx. \tag{1_3}$$

Оскільки ці формули доводяться аналогічно, то доведемо одну з них, наприклад, (1_1).

Доведемо рівність (1_1) для випадку, коли гладка поверхня S задана явно рівнянням $z=\varphi(x,y)$, $(x;y)\in D$. Вважатимемо, що межа L цієї поверхні є гладкою або кусково-гладкою кривою. Нехай на S вибрано її верхню сторону. Тоді напрямні косинуси одиничного вектора нормалі $\overrightarrow{n}$ знаходяться за формулами:

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{1+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2}},\cos\beta=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{1+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}. \qquad (3)$$



У відповідності до вибраної сторони поверхні S визначається обхід вздовж контура L, як зображено на рисунку.

Розглянемо поверхневий інтеграл правої частини формули (1_1) і зведемо його до подвійного, перетворивши спочатку в поверхневий інтеграл першого роду

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\Big)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial z}\frac{-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}dxdy =$$

$$= -\iint\limits_D \Big(\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial z}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y}\Big)dxdy. \qquad (4)$$

Якщо розглянути в області D складену функцію $P(x,y,\varphi(x,y))$, то, згідно з умовами теореми 1, вона має частинну похідну по змінній y

$$\frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,\varphi(x,y))}{\partial z}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y},$$

$(x;y) \in D$. Тому рівність (4) набуде вигляду

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,\varphi(x,y)))dxdy. \quad (5)$$

Застосувавши до подвійного інтеграла у правій частині рівності (5) формулу Гріна, одержимо

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint\limits_\Gamma P(x,y,\varphi(x,y))dx, \quad (6)$$

де обхід межі Γ області D додатний, тобто здійснюється проти годинникової стрілки. Зауважимо, що коли точка $(x;y) \in \Gamma$, то точка $(x;y;\varphi(x,y)) \in L$, а додатний обхід кривої Γ спричиняє відповідний обхід лінії L – межі поверхні S. Тому

$$\oint\limits_\Gamma P(x,y,\varphi(x,y))dx = \oint\limits_L P(x,y,z)dx,$$

а, тоді з рівності (6) випливає, що

$$\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint\limits_L P(x,y,z)dx,$$

тобто рівність (1_1). ▶

Запишемо формулу Стокса у векторній формі. Для цього введемо вектор-функцію

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)), \quad (x;y;z) \in \Omega,$$

і побудуємо **ротор** або **вихор вектора** $\overrightarrow{F}$, який позначається символом $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ і визначається формулою

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \quad (7)$$

Тоді формула Стокса (2) матиме вигляд

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,d\sigma. \quad (8)$$

Ліва частина формули (8) є циркуляцією вектора $\overrightarrow{F}$ вздовж лінії L, а права частина – потік вектора $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ через поверхню S у заданому напрямку.

Введемо **символічний вектор Гамільтона** або **вектор набла** $\overrightarrow{\nabla} = \Big(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\Big)$. Тоді градієнт функції $f(x,y,z)$ записується у вигляді добутку вектора $\overrightarrow{\nabla}$ на функцію f

$$\operatorname{grad} f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\Big) f = \overrightarrow{\nabla} f,$$

а $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ у вигляді векторного добутку $\overrightarrow{\nabla}$ на $\overrightarrow{F}$, тобто

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = [\overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{F}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

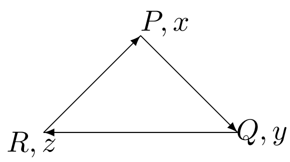
Зауважимо, що коли поверхня S є плоскою, наприклад, область у площині $z = \text{const}$, то з формули (1) випливає формула Гріна

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx dy,$$

оскільки в цьому випадку $\overrightarrow{n} = (0;0;1)$, а $dz = 0$.

Якщо межа L поверхні S складається з декількох кривих, то в лівій частині формули (1) треба писати суму інтегралів по цих кривих, які проходяться в додатному напрямку відносно вибраної сторони поверхні.

Для запам'ятовування формули Стокса зауважимо, що третій доданок у правій частині цієї формули є одним з елементів формули Гріна. Перший і другий доданки формули Стокса одержуються з її третього доданку циклічною перестановкою змінних x, y, z і функцій P, Q, R:



За допомогою формули Стокса можна вивчити питання про незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування у випадку простору $\mathbb{R}^3$, аналогічно тому як це було зроблено раніше за допомогою формули Гріна у випадку площини $\mathbb{R}^2$.

Теорема 2. *Якщо функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ і $R = R(x, y, z)$ неперервні в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то наступні твердження еквівалентні:*

1) для довільного замкненого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset \Omega$, правильна рівність

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

2) для довільних точок A і B з області Ω криволінійний інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від шляху інтегрування, що міститься в Ω;

3) вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом в Ω, тобто існує функція $u = u(x, y, z)$, $(x; y; z) \in \Omega$, така, що

$$du(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

При цьому для довільної кусково-гладкої кривої AB, що лежить в Ω, правильна рівність

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A).$$

Сформульовані вище умови складно перевірити на практиці. Тому виникає необхідність знайти ефективну умову, що еквівалентна їм. Для того щоб сформулювати цю умову, введемо поняття поверхнево однозв'язної просторової області. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ називається **поверхнево однозв'язною**, якщо для довільного замкненого контура $L \subset \Omega$ існує поверхня $S \subset \Omega$, для якої цей контур є межею. Наприклад, якщо Ω – куля або тіло, обмежене двома концентричними сферами, то Ω – поверхнево однозв'язна область. Однак тор (бублик) не є поверхнево однозв'язною областю.

Теорема 3. *Якщо* Ω *– поверхнево однозв'язна область простору* $\mathbb{R}^3$*, а функції* P*,* Q *і* R *неперервні в* Ω *разом зі своїми частинними похідними першого порядку, то кожна з умов 1), 2), 3) теореми 2 еквівалентна умові:*

4) в області Ω *мають місце рівності*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{10}$$

тобто $\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Зауваження. Функція u з умови 3) знаходиться за формулою

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C, \tag{11}$$

де інтеграл в правій частині є криволінійним інтегралом другого роду по довільній лінії, яка лежить в Ω і з'єднує фіксовану точку $(x_0; y_0; z_0) \in \Omega$ з будь-якою точкою $(x; y; z) \in \Omega$, а C – довільна стала. Якщо за цю лінію взяти ламану, яка складається з трьох відрізків, що паралельні відповідно осі Ox, Oy і Oz, то формула (11) набуде вигляду

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz + C. \tag{12}$$

Функцію u називають **первісною для виразу** $Pdx+Qdy+Rdz$ в області Ω, а також – **потенціалом векторного поля**, що визначається вектором $\overrightarrow{F} = (P; Q; R)$. Векторне поле $\overrightarrow{F}(M)$ при цьому називають **потенціальним**.

Приклад 1. Застосовуючи формулу Стокса, знайти криволінійний інтеграл другого роду $I = \oint\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, яке обходиться проти годинникової стрілки.

◀ Згідно з формулою (1) маємо

$$I = \oint\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz = \iint\limits_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz +$$

$$+\Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy,$$

де S – поверхня сфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, у якої взято верхню сторону, щоб узгодити з обходом контура L .

Оскільки $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 0 = 0, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 3x^2y^2 = -3x^2y^2,$$

а тому

$$I = -3\iint\limits_D x^2y^2dxdy,$$

де D – круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Перейдемо в останньому інтегралі до полярної системи координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $r \in [0; R]$. Тоді одержимо

$$I = -3\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R r^5dr = -12\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi \times$$

$$\times\int\limits_0^R r^5dr = -12\frac{r^6}{6}\Big|_0^R \int\limits_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)^2 d\varphi = -2R^6\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 4\varphi)}{2}d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{4}\Big(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{R^6}{4}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi R^6}{8}. \quad ▶$$

Приклад 2. Знайти циркуляцію векторного поля $\overrightarrow{F} = (x + 3y + 2z)\overrightarrow{i} + (2x + z)\overrightarrow{j} + (x - y)\overrightarrow{k}$ по контуру трикутника KMN, де $K(2;0;0)$, $M(0;3;0)$, $N(0;0;1)$.

◀ Скористаємося формулою Стокса (8), де S – верхня сторона площини трикутника KMN. Оскільки

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+2z & 2x+z & x-y\end{vmatrix}=\Big(\frac{\partial(x-y)}{\partial y}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\Big)\overrightarrow{i}-$$

$$-\Big(\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial z}\Big)\overrightarrow{j}+\Big(\frac{\partial(2x+z)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial y}\Big)\overrightarrow{k}=$$

$$=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},$$

а контур L – трикутник KMN з додатною орієнтацією, який лежить в площині

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1,\quad \text{або}\quad 3x+2y+6z-6=0,$$

то

$$\text{Ц}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{n}\,d\sigma=\iint\limits_S(\operatorname{rot}\overrightarrow{F})_x dydz+(\operatorname{rot}\overrightarrow{F})_y dzdx+(\operatorname{rot}\overrightarrow{F})_z dxdy=$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}dydz+\iint\limits_{D_{zx}}dzdx-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-2\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{1-\frac{y}{3}}dz+\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{2-2z}dx-$$

$$-\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3-\frac{3x}{2}}dy=-2\Big(y-\frac{y^2}{6}\Big)\Big|_0^3+(2z-z^2)\Big|_0^1-\Big(3x-\frac{3}{4}x^2\Big)\Big|_0^2=-5.$$ ▶

Приклад 3. Знайти $u(x,y,z)$, якщо $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

◀ Функції $P(x,y,z)=x^2-2yz$, $Q(x,y,z)=y^2-2xz$, $R(x,y,z)=z^2-2xy$ визначені і мають неперервні частинні похідні першого порядку в усьому просторі $\mathbb{R}^3$. Розглянемо векторне поле $\overrightarrow{F}=(x^2-2yz;y^2-2xz;z^2-2xy)$, $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$. Оскільки простір $\mathbb{R}^3$ є поверхнево однозв'язною областю, то згідно з теоремою 3 поле $\overrightarrow{F}$ є потенціальним тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z)=\overrightarrow{0}$, $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$. Маємо

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-2yz & y^2-2xz & z^2-2xy\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-2xz & z^2-2xy\end{vmatrix}-$$

$$-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-2yz & z^2-2xy \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ x^2-2yz & y^2-2xz \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(-2x+2x)-$$

$$-\overrightarrow{j}(-2y+2y)+\overrightarrow{k}(-2z+2z)=\overrightarrow{0}, \quad (x;y;z)\in\mathbb{R}^3,$$

а це означає, що векторне поле $\overrightarrow{F}$ потенціальне. Знайдемо його потенціал, скориставшись формулою (12), де $(x_0;y_0;z_0)=(0;0;0)$

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x(\alpha^2-2yz)d\alpha+\int\limits_0^y(\beta^2-2\cdot 0\cdot z)d\beta+\int\limits_0^z(\gamma^2-2\cdot 0\cdot 0)d\gamma=$$

$$=\left(\frac{\alpha^3}{3}-2yz\alpha\right)\Bigg|_0^x+\frac{\beta^3}{3}\Bigg|_0^y+\frac{\gamma^3}{3}\Bigg|_0^z=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2xyz+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}+C=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-3xyz+C, \quad (x;y;z)\in\mathbb{R}^3. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти криволінійний інтеграл $\int\limits_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yzdx+xzdy+xydz$, скориставшись тим, що підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції.

◄ Функції $P(x,y,z)=yz$, $Q(x,y,z)=xz$, $R(x,y,z)=xy$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в усьому просторі $\mathbb{R}^3$. Розглянемо векторне поле $\overrightarrow{F}=(yz;xz;xy)$, $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, і переконаємося, що воно потенціальне, тобто $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z)=\overrightarrow{0}$, $(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, а це означатиме, що вираз $yzdx+xzdy+xydz$ є повним диференціалом функції $u(x,y,z)$, яка знаходиться за формулою (12).

Маємо

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy \end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy \end{vmatrix}+$$

$$+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ yz & xz \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}(x-x)-\overrightarrow{j}(y-y)+\overrightarrow{k}(z-z)=\overrightarrow{0}, \quad (x;y;z)\in\mathbb{R}^3,$$

а тому

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x yzd\alpha+\int\limits_0^y 0d\beta+\int\limits_0^z 0d\gamma=xyz+C, \quad (x;y;z)\in\mathbb{R}^3.$$

Тоді, згідно з теоремами 2 і 3, одержуємо

$$\int\limits_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yzdx + xzdy + xydz = u(6,1,1) - u(1,2,3) = 6 - 6 = 0. \quad \blacktriangleright$$

§5. Формула Остроградського-Гаусса

У цьому параграфі розглянемо ще одну з важливих формул інтегрального числення функцій багатьох змінних – формулу Остроградського-Гаусса. Вона зв'язує між собою поверхневий інтеграл по межі тіла з потрійним інтегралом по цьому тілу.

Теорема. *Нехай в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій кусково-гладкою замкненою поверхнею S, задано неперервні функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$, які мають в Ω неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Тоді правильною є формула Остроградського-Гаусса*

$$\iiint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy, \quad (1)$$

де поверхневий інтеграл обчислюється по зовнішній стороні поверхні S.

◀ Згідно з умовою теореми інтеграли в обох частинах рівності (1) існують, оскільки їхні підінтегральні функції неперервні. Тому досить довести правильність рівності відповідних інтегралів

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz, \quad (2)$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint\limits_{S} Qdzdx, \quad (3)$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S} Rdxdy. \quad (4)$$

Рівності (2) – (4) доводяться аналогічно, а тому розглянемо доведення однієї з них, наприклад, (4). Доведемо цю рівність для випадку, коли область Ω – це тіло, яке обмежене знизу графіком функції $z = \varphi_1(x, y)$, $(x; y) \in D$, зверху – графіком функції $z = \varphi_2(x, y)$, $(x; y) \in D$, а з боків – циліндричною поверхнею (рис. 1). Вважатимемо, що функції φ_1 і φ_2 неперервні разом з їхніми частинними похідними першого порядку.

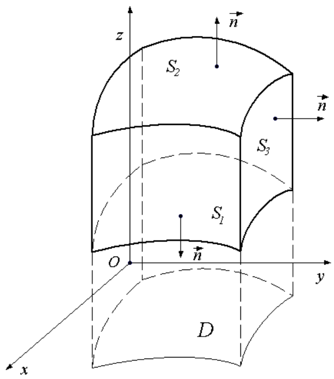


Рис. 1

Розглянемо поверхні, які обмежують тіло Ω. Нехай S_1 – поверхня, що визначена рівнянням $z = \varphi_1(x, y)$, $(x; y) \in D$, згідно з умовою теореми вектор нормалі $\overrightarrow{n}$ на ній напрямлений зовні, а це означає, що береться нижня сторона поверхні S_1. Поверхня S_2 має рівняння $z = \varphi_2(x, y)$, $(x; y) \in D$. На ній треба розглядати верхню сторону.

Поверхня S_3 є циліндричною поверхнею, на якій нормаль $\overrightarrow{n}$ є зовнішньою. Отже, межа S тіла Ω складається з трьох поверхонь $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$.

Зведемо потрійний інтеграл формули (4) до повторного:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} \Big(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \Big) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y))dxdy - \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y))dxdy.$$

Скориставшись формулою, яка зв'язує поверхневий інтеграл з подвійним, дістанемо

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_2} R(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x, y, z)dxdy. \quad (5)$$

Розглянемо поверхневий інтеграл другого роду від функції $R(x,y,z)$ по циліндричній поверхні S_3 і зведемо його до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma,$$

де γ – кут між нормаллю $\overrightarrow{n}$ до поверхні S_3 і віссю Oz. Оскільки $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\gamma = 0$ скрізь на поверхні S_3. Тому

$$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy = 0. \tag{$5'$}$$

Отже, скориставшись формулами (5) і ($5'$), одержимо

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{S_3} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy,$$

тобто формулу (4). ►

Формулу Остроградського-Гаусса (1) можна записати і за допомогою поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma, \tag{6}$$

де $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S.

Розглянемо векторне поле $\overrightarrow{F} = (P;Q;R)$ і введемо поняття **дивергенції** $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{7}$$

Якщо скористатися (7), то формулу (6) можна записати у вигляді

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \overrightarrow{F} dxdydz = \iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \overrightarrow{n} d\sigma. \tag{8}$$

Зауважимо, що $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$ – це функція, яка визначена на Ω. Дивергенцію векторного поля можна записати і за допомогою вектора Гамільтона $\overrightarrow{\nabla}$, а саме:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{F},$$

тобто $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$ є скалярним добутком векторів $\overrightarrow{\nabla}$ і $\overrightarrow{F}$.

З фізичної точки зору $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$ в точці $M(x; y; z) \in \Omega$ визначає потужність потоку векторного поля $\overrightarrow{F}$, що виходить з точки M, яка припадає на одиницю об'єму. Якщо $\operatorname{div} \overrightarrow{F} > 0$, то ця величина характеризує потужність джерела, що знаходиться в точці M, а у випадку $\operatorname{div} \overrightarrow{F} < 0$ – потужність стоку, що знаходиться в точці M.

Якщо у формулі Остроградського-Гаусса (1) взяти $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y$, а $R(x, y, z) = z$, то матимемо формули для обчислення об'єму тіла Ω за допомогою поверхневого інтеграла

$$V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint\limits_{S} xdydz + ydzdx + zdxdy, \tag{9}$$

де поверхневий інтеграл розглядається по зовнішній стороні поверхні S.

Приклад 1. За допомогою формули Остроградського-Гаусса обчислити інтеграл

$$I = \iint\limits_{S} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

де S – зовнішня сторона сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

◀ Згідно з формулою Остроградського-Гаусса, маємо

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dxdydz,$$

де Ω – куля $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leq R^2$. Для обчислення інтеграла скористаємося сферичною системою координат

$$x = a + r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = b + r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = c + r\cos\theta,$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Якобіан перетворення дорівнює $r^2\sin\theta$, а рівняння межі області Ω має вигляд $r = R$. Тому

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R r^2(a+b+c+r(\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta))dr =$$

$$= \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ через межу тіла $\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h$, $h > 0$, $R > 0$.

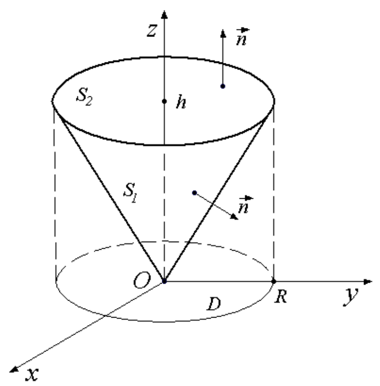


Рис. 2

◀ Очевидно, що межа заданого тіла Ω (рис. 2) складається з конічної поверхні S_1 і частини S_2 площини $z = h$. Проекція D цих поверхонь на площину Oxy – це круг $x^2+y^2 \leq R$.

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\overrightarrow{F}$ за допомогою формули (7):

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 2x+2y+1, \quad (x;y;z) \in \Omega.$$

Для обчислення потоку векторного поля через поверхню тіла, скористаємося формулою (1)

$$\Pi = \iint_S x^2dydz + y^2dzdx + zdxdy = \iiint_\Omega (2x+2y+1)dxdydz.$$

Зведемо потрійний інтеграл до повторного

$$\iiint_\Omega (2x+2y+1)dxdydz = \iint_D \Big(\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} (2x+2y+1)dz \Big) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2x + 2y + 1)\Big(h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\Big)dxdy =$$

$$= h \iint\limits_D (2x + 2y + 1)\Big(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\Big)dxdy.$$

В одержаному подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, тоді

$$\Pi = h \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^R (2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + 1)\Big(r - \frac{r^2}{R}\Big)dr\Big)d\varphi =$$

$$= h \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{2R^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) - \frac{R^2}{3}\Big)d\varphi =$$

$$= \frac{hR^3}{6}\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi + \frac{R^2h}{6}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{hR^3}{6}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{\pi hR^2}{3} = \frac{\pi hR^2}{3}.$$

Отже, шуканий потік векторного поля дорівнює

$$\Pi = \frac{\pi hR^2}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Вправи

1. Знайти площу частини:
1) площини $x+y+z=a$, яка відрізається циліндром $y^2=ax$ і площиною $x=a$, $a>0$;
2) сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що лежить всередині конуса $x^2+y^2=z^2$;
3) поверхні $z^2=2xy$, що знаходиться над прямокутником, який розміщений в площині $z=0$ і обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=6$;
4) поверхні $z^2=4x$, яка відрізається циліндром $y^2=4x$ і площиною $x=1$;
5) поверхні $z=xy$, що відтинається циліндром $x^2+y^2=R^2$;
6) сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що міститься в циліндрі $x^2+y^2=R^2$, $R \leq a$;
7) сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, яка лежить в циліндрі $x^2+y^2=Rx$;
8) поверхні $z^2=2xy$, що відтинається площинами $x+y=1$, $x=0$, $y=0$;
9) поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що лежить всередині циліндра $x^2+y^2=2x$.

2. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:
1) $\iint\limits_S xyz d\sigma$, якщо S – частина площини $x+y+z=1$, яка розміщена в першому октанті;
2) $\iint\limits_S x d\sigma$, якщо S – частина сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, яка розміщена в першому октанті;
3) $\iint\limits_S y d\sigma$, якщо S – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;
4) $\iint\limits_S x^2y^2 d\sigma$, де S – півсфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$;
5) $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{r^2}$, якщо S – циліндр $x^2+y^2=R^2$, обмежений площинами $z=0$ і $z=h$, а r – відстань від точки поверхні до початку координат;
6) $\iint\limits_S (x+y+z) d\sigma$, де S – частина сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$;
7) $\iint\limits_S (x^2+y^2) d\sigma$, якщо S – межа тіла $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$;

8) $\iint\limits_S \dfrac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, де S – межа тетраедра $x+y+z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

9) $\iint\limits_S |xyz| d\sigma$, якщо S – частина поверхні $z = x^2+y^2$, яка відтинається площиною $z = 1$;

10) $\iint\limits_S z d\sigma$, де S – частина поверхні гелікоїда $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 \le u \le a$; $0 \le v \le 2\pi$.

3. Знайти масу півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, густина якої $\rho(x, y, z) = \dfrac{z}{a}$.

4. Визначити масу, що розподілена по всій поверхні куба $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$, якщо густина $\rho(x, y, z) = k^3\sqrt{xyz}$, a, k – деякі додатні сталі.

5. Знайти моменти інерції параболоїда $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ відносно осі Oz, якщо $0 \le z \le 1$.

6. Обчислити поверхневий інтеграл 2-го роду:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, якщо S – зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$;

2) $\iint\limits_S zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

3) $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

4) $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, якщо S – зовнішня сторона поверхні, яка розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2+y^2 = R^2$ та площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $z = H$;

5) $\iint\limits_S xdydz + ydxdy + zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$;

6) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, якщо S – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$;

7) $\iint\limits_S dxdy$, де S – нижня сторона частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$.

7. Знайти потік вектора $\overrightarrow{F}$ через поверхню S у заданому напрямку нормалі, якщо:

1) $\overrightarrow{F} = 2x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$, S – частина поверхні циліндра $x^2+y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le h$ у напрямку зовнішньої нормалі;

2) $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$, S – частина поверхні параболоїда $\dfrac{h}{R^2}(x^2+y^2) = z$, $z \le h$ у напрямку зовнішньої нормалі;
3) $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} - y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$, S – частина сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ у напрямку зовнішньої нормалі;
4) $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} - 2z\overrightarrow{k}$, S – поверхня куба, обмежена площинами $x = \pm a$, $u = \pm a$, $z = \pm a$, у напрямку зовнішньої нормалі;
5) $\overrightarrow{F} = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$, S – зовнішня сторона поверхні $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

8. За допомогою формули Стокса обчислити криволінійний інтеграл:
1) $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, де L – коло $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$, яке обходиться проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатньої сторони осі Ox;
2) $\oint\limits_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, якщо L – еліпс $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le 2\pi$, який обходиться у напрямку зростання параметра t.

9. Знайти циркуляцію вектора $\overrightarrow{F}$ вздовж контура L скориставшись формулою Стокса:
1) $\overrightarrow{F} = -2y\overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j}$, L – коло $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, що обходиться у додатному напрямку;
2) $\overrightarrow{F} = (x-2z)\overrightarrow{i} + (x+3y+z)\overrightarrow{j} + (3x+y)\overrightarrow{k}$, L – контур $ABCA$, де $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ і $C(0;0;1)$;
3) $\overrightarrow{F} = z\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$, L – коло $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x+y+z = R$ у додатному напрямку відносно орта $\overrightarrow{k}$;
4) $\overrightarrow{F} = z^2\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j} + y^2\overrightarrow{k}$, L – коло, що є перетином сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$ з площиною $x+y+z = R$ у додатному напрямку відносно орта $\overrightarrow{k}$.

10. Знайти потенціал поля $\overrightarrow{F}$, якщо:
1) $\overrightarrow{F} = (yz - xy)\overrightarrow{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\overrightarrow{j} + (xy + y^2 z)\overrightarrow{k}$;
2) $\overrightarrow{F} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\overrightarrow{k}$.

11. Знайти функцію u, якщо $du = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}dz$.

12. Скориставшись тим, що підінтегральний вираз є повним диференціалом, обчислити криволінійний інтеграл:

1) $\int\limits_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$; 2) $\int\limits_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} xdx - y^2dy + zdz$;

3) $\int\limits_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx + zxdy + xydz$.

13. За допомогою формули Остроградського-Гаусса обчислити поверхневий інтеграл:

1) $\iint\limits_S xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, якщо S – зовнішня сторона піраміди, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $x + y + z = 1$;

2) $\iint\limits_S yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні, яка розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ і площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $z = h$;

3) $\iint\limits_S y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, якщо S – зовнішня сторона поверхні, яка розміщена в першому октанті і складається з параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і координатних площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

4) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона всієї межі куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$;

5) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, якщо S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

6) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, де S – зовнішня частина конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

14. Знайти потік вектора $\overrightarrow{F}$ через поверхню S, скориставшись формулою Остроградського-Гаусса:

1) $\overrightarrow{F} = x^3\overrightarrow{i} + y^3\overrightarrow{j} + R^2z\overrightarrow{k}$, S – межа тіла $\frac{h}{R^2}(x^2 + y^2) \le z \le h$ у напрямку зовнішньої нормалі;

2) $\overrightarrow{F} = x^3\overrightarrow{i} + y^3\overrightarrow{j} - z^3\overrightarrow{k}$, S – поверхня куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ у напрямку зовнішньої нормалі;

3) $\overrightarrow{F} = x^2y\overrightarrow{i} + xy^2\overrightarrow{j} + xyz\overrightarrow{k}$, S – поверхня тіла $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ у напрямку зовнішньої нормалі;

4) $\overrightarrow{F} = x^2y\,\overrightarrow{i} - xy^2\,\overrightarrow{j} + (x^2+y^2)z\,\overrightarrow{k}$, S – поверхня тіла $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$ у напрямку зовнішньої нормалі.

Відповіді

1. 1) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}a^2$; 2) $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$; 3) 36; 4) $\dfrac{16}{3}(2\sqrt{2}-1)$; 5) $\dfrac{2\pi}{3}((1+R^2)^{3/2}-1)$; 6) $4\pi a(a-\sqrt{a^2-R^2})$; 7) $2R^2(\pi-2)$; 8) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; 9) $\pi\sqrt{2}$.

2. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$; 2) $\dfrac{\pi R^3}{4}$; 3) 0; 4) $\dfrac{2\pi R^6}{15}$; 5) $2\pi\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{h}{R}$; 6) πa^3; 7) $\dfrac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$; 8) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; 9) $\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$; 10) $\pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2}))$.

3. πa^2.

4. $\dfrac{27}{2}ka^3$.

5. $\dfrac{4\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$.

6. 1) 3; 2) $\dfrac{4}{3}\pi abc$; 3) 0; 4) $R^2H\Big(\dfrac{2R}{3}+\dfrac{\pi H}{8}\Big)$; 5) $4\pi R^3$; 6) 0; 7) $-\pi$.

7. 1) $\dfrac{\pi R^2 h}{4}$; 2) $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$; 3) $\dfrac{\pi R^4}{8}$; 4) 0; 5) $\dfrac{8\pi R^3}{2}(a+b+c)$. Записати рівняння поверхні S у вигляді $x = a+R\cos\theta\sin u$, $y = b+R\sin v\sin u$, $z = c+R\cos u$, $0 \le u \le \pi$; $0 \le v \le 2\pi$.

8. 1) $-\pi a^2\sqrt{3}$; 2) 0.

9. 1) 36π; 2) -3; 3) $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

10. 1) $xyz - \dfrac{x^2y}{2} + \dfrac{y^2z^2}{2} + C$; 2) $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+C$, якщо $x \ne 0$, $y \ne 0$ і $z \ne 0$.

11. $u = x - \dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{z} + C$, якщо $y \ne 0$ і $z \ne 0$.

12. 1) $-53\dfrac{7}{12}$; 2) $\dfrac{10}{3}$; 3) 0.

13. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $R^2h\Big(\dfrac{2R}{3}+\dfrac{\pi h}{8}\Big)$; 3) $\dfrac{\pi}{8}$; 4) $3a^4$; 15) $\dfrac{12}{5}\pi R^5$; 6) 0. Доповнити поверхню до замкненої.

14. 1) $\pi h R^4$; 2) a^5; 3) $\dfrac{R^5}{3}$; 4) $\dfrac{\pi R^4 h}{2}$.

Розділ 13
Числові та функціональні ряди

§1. Числові ряди

1.1. Поняття числового ряду. Нехай задано числову послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається **числовим рядом** або просто **рядом**.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються **членами** ряду, а число a_n з довільним номером n називається **загальним членом ряду.**

Сума n перших членів ряду називається **n-ою частинною сумою ряду**:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

Оскільки число членів ряду нескінченне, то частинні суми утворюють послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ряд (1) називається **збіжним**, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ збігається до деякого числа S, яке називається **сумою ряду**. Символічно це записується так:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

або

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ж послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ розбігається, то ряд (1) називається **розбіжним**.

Приклад 1. Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

◄ Розглянемо n-у частинну суму ряду

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Після розкриття дужок всі доданки, крім першого й останнього, взаємно знищуються, і як результат одержуємо, що $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Звідси випливає, що

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює одиниці. ►

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, $a \neq 0$, який називається **геометричним**.

◄ Частинна сума S_n цього ряду при $q \neq 1$ має вигляд

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

Звідси випливає, що:

1) при $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q}q^n = \dfrac{a}{1-q}$, тобто ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$, бо $\lim\limits_{\to\infty} q^n = 0$;

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{1-q} - \dfrac{a}{1-q}q^n\right) = \infty$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, а це означає, що ряд розбіжний;

3) якщо $q = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, отже, ряд розбігається. Якщо ж $q = -1$, то ряд набуде вигляду

$$a - a + a - a + \ldots .$$

Частинні суми цього ряду мають вигляд $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, $\ldots$. Тому границя частинних сум не існує і ряд розбігається й в цьому випадку.

Отже, геометричний ряд збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$. ►

При вивченні рядів виникають дві задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знаючи, що ряд збіжний, знайти його суму. Цими задачами ми і займатимемося надалі.

1.2. Властивості збіжних рядів.

Теорема 1. *Якщо ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *збігається і його сума* S, *а* c *– деяке число, то збігається також ряд* $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$ *і його сума дорівнює* cS.

◀ Нехай S_n – n-а частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\widetilde{S}_n$ – n-а частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тоді

$$\widetilde{S}_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS,$$

тобто послідовність частинних сум $\{\widetilde{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ збігається до числа cS. ▶

Теорема 2. *Якщо ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігаються, а їхні суми дорівнюють відповідно* S *і* $\overline{S}$, *то й ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *збігається і його сума дорівнює* $S \pm \overline{S}$.

◀ Якщо позначити через S_n, $\overline{S}_n$ і σ_n частинні суми відповідно рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, то $\sigma_n = S_n \pm \overline{S}_n$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \overline{S}_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S \pm \overline{S}. \quad ▶$$

Теорема 3. *Якщо збігається ряд (1), то збігається і ряд*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{3}$$

і навпаки, із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (1).

◀ Ця теорема стверджує, що на збіжність ряду не впливає відкидання скінченного числа його перших членів.

Нехай ряд (1) збігається і його сумою є S, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Якщо $\sigma_{n,m}$ – n-а частинна сума ряду (3), то

$$S_{n+m} = S_m + \sigma_{n,m}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,m} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+m} - S_m) = \lim_{n\to\infty} S_{n+m} - S_m = S - S_m,$$

а це означає, що ряд (3) збігається і його сумою є $r_m = S - S_m$.

Припустимо, що ряд (3) збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n,m} = r_m$. Тоді з (4) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+m} = \lim_{n\to\infty} (S_m + \sigma_{n,m}) = S_m + r_m,$$

а це означає збіжність ряду (1). ►

З рівності $r_m = S - S_m$ одержуємо, що $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$, бо $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$. Тому має місце наслідок.

Наслідок 1. *Ряд (1) збігається тоді й тільки тоді, коли* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

1.3. Необхідні умови збіжності ряду.

Теорема 4. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{5}$$

а також

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = 0. \tag{6}$$

◄ Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

і

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n})=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0. \quad ►$$

Умови (5), (6) називаються **необхідними умовами** збіжності ряду.

Наслідок 2. *Якщо загальний член ряду не прямує до нуля ($a_n \not\to 0$, $n\to\infty$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ розбігається.*

Наслідок 3. *Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n})\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ розбігається.*

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

який називається **гармонічним**.

◄ Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Доведемо, що заданий ряд розбігається. Перевіримо, чи виконується умова (6):

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\geq$$
$$\geq\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отже, згідно з наслідком 3, ряд розбігається. ►

Якщо загальний член ряду прямує до нуля, то ще не можна зробити висновок про збіжність цього ряду. Про це свідчать приклад 3 і приклад 2, де $|q|<1$. Як і в прикладі 3, так і в прикладі 2, $|q|<1$, загальний член прямує до нуля, але у першому з них ряд розбігається, а в другому збігається. Тому необхідне додаткове дослідження, яке можна провести за допомогою певних достатніх умов (ознак) збіжності ряду.

Якщо ж для деякого ряду його загальний член не прямує до нуля, то згідно з наслідком 1 можна зразу сказати, що такий ряд розбігається.

1.4. Ряди з невід'ємними членами. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n, n \in \mathbb{N},$$

тобто послідовність частинних сум даного ряду є неспадною. Оскільки необхідною й достатньою умовою збіжності монотонної послідовності є її обмеженість, а саме обмеженість зверху неспадної послідовності, то звідси випливає необхідна і достатня умова збіжності ряду з невід'ємними членами.

Теорема 5. *Для того щоб ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *з невід'ємними членами збігався, необхідно й достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмеженою.*

Розглянемо декілька ознак, які дають достатні умови збіжності ряду.

Теорема 6 (перша ознака порівняння). *Якщо є два ряди з невід'ємними членами:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{7}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{8}$$

причому

$$a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

то із збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (7), а з розбіжності ряду (7) – розбіжність ряду (8).

◀ Позначимо відповідно через S_n і $\overline{S}_n$ частинні суми рядів (7) і (8). Тоді з нерівності (9) випливає, що $S_n \leq \overline{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо ряд (8) збігається, то згідно з теоремою 5 послідовність його частинних сум $\{\overline{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ обмежена зверху, тобто $\overline{S}_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, а тоді й $S_n \leq \overline{S}_n \leq M$. Звідси випливає, що ряд (7) збігається. Якщо ж ряд (7) розбігається, то послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ необмежена зверху, тоді й послідовність $\{\overline{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ є необмеженою зверху, а тому ряд (8) розбігається. ▶

Теорема 6 залишається правильною, якщо нерівність (9) замінити нерівністю $a_n \leq cb_n$, c – стала, $c > 0$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots . \tag{10}$$

◀ Порівняємо заданий ряд із збіжним рядом, що розглянутий в прикладі 1,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots .$$

Оскільки

$$\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{(n-1)n},\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\},$$

то згідно з теоремою 6 ряд (10) збіжний. ▶

Приклад 5. Довести розбіжність ряду

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots .$$

◀ Порівнюватимемо цей ряд з гармонічним рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

який розбіжний.

Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N},$$

а тому ряд розбігається. ▶

Зауваження. Узагальненням рядів, які наведені у прикладах 3, 4 і 5 є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \tag{11}$$

який називається **узагальненим гармонічним рядом**.

У випадку, коли $s=1$, маємо гармонічний ряд, який розбігається, що доведено в прикладі 3.

Якщо $s<1$, то правильною є нерівність

$$\frac{1}{n^s}\le\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Звідси випливає, згідно з теоремою 6, що ряд розбігається.

Нехай $s > 1$. Скориставшись оцінкою

$$\frac{1}{n^s} \le \int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}\Big(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\Big), \quad n \in \mathbb{N} \text{ і } n \ge 2,$$

для n-ої частинної суми S_n ряду (11), одержимо нерівність

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{s-1}\Big(1 - \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{3^{s-1}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{n^s}\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1}\Big(1 - \frac{1}{n^s}\Big) < 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}, \quad n \in N \text{ і } n \ge 2.$$

Отже, в цьому випадку послідовність частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ нашого ряду обмежена зверху, а тому згідно з теоремою 5 ряд (11) є збіжним.

Остаточно одержали, що узагальнений гармонічний ряд розбігається при $s \le 1$ і збігається при $s > 1$.

Теорема 7 (друга ознака порівняння). *Якщо для рядів (7) і (8) з додатними членами існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

то ряди (7) і (8) збігаються або розбігаються одночасно.

◀ Оскільки $K = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то, згідно з означенням границі, для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що при $n \ge n_0$

$$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon.$$

Можна вважати, що ця нерівність виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, бо скінченна кількість членів ряду не впливає на його збіжність. Отже, $(K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $0 < \varepsilon < K$. Тоді із збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (7), а з розбіжності ряду (7) випливає розбіжність ряду (8), бо виконуються умови теореми 6. ▶

Наслідок 4. *Якщо $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряди (7) і (8) збігаються і розбігаються одночасно.*

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+3n^2+5n+1}.$$

◀ Оскільки загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$ як $\frac{1}{n^2}$, то порівнюватимемо його з рядом (10), який збіжний.

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+3}{n^3+3n^2+5n+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+3)}{n^3+3n^2+5n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{2}{1} = 2,$$

а тому ряд збігається за другою ознакою порівняння. ▶

Теорема 8 (ознака Даламбера). *Нехай всі члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні й*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді: 1) якщо $l < 1$, то ряд збігається; 2) якщо $l > 1$, то ряд розбігається; 3) якщо ж $l = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

◀ Згідно з умовою $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, а це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ правильні нерівності

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon. \tag{12}$$

Можна вважати, що ці нерівності мають місце для всіх $n \in \mathbb{N}$, бо відкидання скінченної кількості перших членів ряду не впливає на його збіжність.

1) Нехай $l < 1$, тоді знайдеться таке додатне число ε, що $q \equiv l + \varepsilon < 1$. Для цього ε маємо нерівності

$$\frac{a_2}{a_1} < q, \quad \frac{a_3}{a_2} < q, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} < q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо перемножити ці нерівності, то дістанемо

$$\frac{a_n}{a_1} < q^{n-1} \quad \text{або} \quad a_n < a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ є геометричним рядом з $0 < q < 1$, то він є збіжним. Тоді, скориставшись теоремою 6, одержимо, що й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.

2) Нехай тепер $l > 1$. Тоді знайдеться таке додатне ε, що $l - \varepsilon > 1$. Тому з лівої нерівності (12) одержуємо, що

$$1 < l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

тобто $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Це означає, що послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ додатних чисел є зростаючою, а отже, її границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Звідси випливає, що загальний член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не прямує до нуля, а тому він розбіжний, бо не виконується необхідна умова збіжності ряду.

3) У випадку $l = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ може бути як збіжним, так і розбіжним, про що свідчать наступні приклади.

Розглянемо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який, як доведено в прикладі 3, розбіжний. Для нього $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Якщо досліджувати на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то для нього так само $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, але він збіжний, що доведено в прикладі 4. ►

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots .$$

◄ Маємо $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Тоді

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збіжний. ►

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{16}+\frac{8}{81}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots .$$

◄ Очевидно, що $a_n = \dfrac{2^n}{n^4}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^4}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4} = \frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4 2^n} = \frac{2n^4}{(n+1)^4} = \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4} = 2 > 1$$

і ряд розбіжний. ►

Теорема 9 (ознака Коші). *Якщо всі члени ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *невід'ємні й* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, *то ряд збігається при* $l < 1$ *і розбігається при* $l > 1$. *У випадку* $l = 1$ *ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 8.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

◀ Застосуємо ознаку Коші:

$$a_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}e.$$

Оскільки $l > 1$, то ряд розбігається. ▶

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots.$$

◀ Маємо $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. Тут зручно застосувати ознаку Коші, оскільки $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n} = \dfrac{n}{2n+1}$. Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що ряд збіжний, бо $l = \dfrac{1}{2} < 1$. ▶

1.5. Знакозмінні ряди. До цих пір ми розглядали ряди з невід'ємними членами. У цьому пункті розглянемо ряди, які містять як від'ємні, так і додатні члени. Такі ряди називаються **знакозмінними**.

Вивчення знакозмінних рядів розпочнемо з частинного випадку рядів, у яких знаки їхніх членів чергуються, тобто рядів, де за кожним додатним членом слідує від'ємний, а за кожним від'ємним – додатний. Для зручності вважатимемо, що перший член такого ряду додатний. Тоді ряд, знаки членів якого чергуються, можна подати у вигляді

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n-1}p_n + \ldots, \tag{13}$$

де $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 10 (ознака Лейбніца). *Якщо виконуються умови: 1)* $p_{n+1} < p_n$, $n \in \mathbb{N}$*; 2)* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$*, то ряд (13) збігається, причому його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.*

◀ Розглянемо частинну суму ряду з парним числом членів

$$S_{2n} = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \ldots + p_{2n-1} - p_{2n} =$$

$$= (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}).$$

Усі доданки в дужках додатні, тому послідовність частинних сум $\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ є зростаючою. Доведемо, що вона обмежена. Для цього подамо S_{2n} у вигляді

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n} < p_1, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ зростаюча й обмежена, а тому має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причому $S \le p_1$.

Доведемо, що й послідовність частинних сум непарного числа членів має ту саму границю S. Справді, $S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1}$. Перейшовши в цій рівності до границі при $n \to \infty$ і скориставшись другою умовою теореми, одержимо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + p_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Звідси випливає, що послідовність частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ ряду (13) збігається до S. Це означає, що ряд (13) збігається і його сума $S \le p_1$. ▶

Наслідок 5. *Якщо за суму ряду Лейбніца взяти наближено суму його* n *перших членів, то похибка при цьому за абсолютною величиною не перевищить першого з відкинутих членів.*

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

◀ Маємо $p_n = \dfrac{1}{n}$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Оскільки $p_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то з теореми 9 випливає, що ряд збіжний. ▶

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} + \ldots .$$

◀ Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)^2} > \dfrac{1}{(n+1)(n+2)^2} = p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} = 0$.

Отже, ряд збігається. ▶

Тепер розглянемо довільний ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{14}$$

де числа a_1, a_2, …, a_n, … можуть бути як додатними, так і від'ємними, причому розміщення додатних і від'ємних членів у ряді довільне.

Поряд з рядом (14) розглядатимемо ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{15}$$

Якщо ряд (15) збігається, то ряд (14) називається **абсолютно збіжним**. Доведемо, що із збіжності ряду (15) випливає збіжність ряду (14).

Справді, запишемо a_n у вигляді $a_n = b_n - c_n$, де $b_n = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}$, $c_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $b_n \le |a_n|$, $c_n \le |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, а тому, згідно з першою ознакою порівняння ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ збігаються, бо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ є також збіжним, як різниця збіжних рядів.

Якщо ж ряд (14) збігається, а ряд (15) розбігається, то ряд (14) називають **умовно збіжним**.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots .$$

◀ Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots .$$

Цей ряд є збіжним, як доведено в прикладі 4. Звідси випливає, що заданий ряд збігається абсолютно. ▶

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots .$$

◀ Ряд з абсолютних величин

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

розбігається, як доведено в прикладі 5. У той же час вихідний ряд збігається, бо виконуються умови теореми 10. Це означає, що ряд збігається умовно. ▶

1.6. Властивості сум збіжних числових рядів. З попереднього випливає, що поняття суми нескінченного ряду чисел істотно відрізняється від поняття суми скінченного числа доданків, бо воно використовує граничний перехід. У той же час деякі властивості звичайних сум переносяться й на випадок сум рядів, але, як правило, при виконанні певних додаткових умов. У цьому пункті розглянемо ці умови, причому детально розглянемо випадки, коли властивості сум скінченної кількості доданків і сум числових рядів відрізняються істотно.

Розглянемо **сполучну властивість суми**. Нехай задано числовий ряд (1). Згрупуємо довільним чином в дужки члени цього ряду без зміни порядку їхнього слідування. Тоді одержимо новий ряд

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots +$$
$$+(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots . \qquad (16)$$

З'ясуємо, який зв'язок між збіжностями рядів (1) і (16) та їхніми сумами.

Теорема 11. *Якщо ряд (1) збігається, то збігається й ряд (16), причому їхні суми однакові, тобто для збіжного числового ряду має місце сполучна властивість.*

◀ Нехай $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ – послідовність частинних сум ряду (1), а S – його сума. Тоді, згідно з означенням збіжності ряду, маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для кожного номера $n \geq n_0$ правильна нерівність

$$|S_n - S| < \varepsilon. \qquad (17)$$

Розглянемо тепер послідовність $\{\tilde{S}_k, k \in \mathbb{N}\}$ частинних сум ряду (16). Тоді

$$\tilde{S}_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} = S_{n_1},$$

$$\tilde{S}_2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) = S_{n_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tilde{S}_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots +$$
$$+(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}) = S_{n_k}.$$

Отже, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ правильна рівність $\tilde{S}_k = S_{n_k}$. Зауважимо, що послідовність номерів $\{n_k, k \in \mathbb{N}\}$ задовольняє нерівності $n_k \geq k$, $k \in \mathbb{N}$. Тому для кожного $k \geq n_0$ маємо, що $n_k \geq k \geq n_0$, а тоді з нерівності (17) випливає, що

$$|\tilde{S}_k - S| = |S_{n_k} - S| < \varepsilon, \quad k \geq n_0.$$

Це означає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{S}_k = S$, тобто ряд (16) є збіжним і його сумою є число S – сума ряду (1). ▶

З того, що збігається ряд (16) не випливає збіжність ряду (1). Це підтверджують приклади.

Розглянемо ряд типу (16)

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots.$$

Цей ряд збігається і його сума дорівнює нулю. Однак, відповідний ряд типу (1)

$$1-1+1-1+\ldots+1-1+\ldots,$$

як встановлено в прикладі 2 п.1.1, є розбіжним.

Доведено, що коли вирази в кожній дужці ряду (16) зберігають знак, то із збіжності ряду (16) випливає збіжність ряду (1) і рівність їхніх сум.

Розглянемо **переставну властивість ряду**. Переставимо довільним чином члени ряду (1) і утворимо ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_k' + \ldots, \tag{18}$$

де кожний член a_k' цього ряду збігається з деяким членом a_{n_k} ряду (1), причому всі члени ряду (1) присутні в ряді (18). Дослідимо, як зв'язані між собою збіжності цих рядів та їхні суми.

Переконаємося, що коли ряд (1) з невід'ємними членами є збіжним, то ряд (18) також збіжний і їхні суми однакові. Справді, нехай S сума ряду (1). Розглянемо послідовність $\{\tilde{S}_k, k \in \mathbb{N}\}$ частинних сум ряду (18). Очевидно, що

$$\tilde{S}_k = a_1' + a_2' + \ldots + a_k' \le S, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Звідси випливає, що послідовність частинних сум $\{\tilde{S}_k, k \in \mathbb{N}\}$ ряду (18) з невід'ємними членами є обмеженою зверху числом S. Тоді згідно з теоремою 5 ряд (18) збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{S}_k = \tilde{S}$, яка є сумою ряду (18). З нерівності (19) випливає, що $\tilde{S} \le S$. З іншого боку, можна вважати, що ряд (1) одержується з ряду (18) відповідною перестановкою його членів. Тому, міркуючи аналогічно попередньому, отримаємо, що $S \le \tilde{S}$. Звідси дістаємо, що $\tilde{S} = S$. Отже, для рядів з невід'ємними членами має місце переставна властивість.

Якщо члени ряду (1) довільні за знаком, то можна довести загальніше твердження.

Теорема 12. *Якщо ряд (1) абсолютно збіжний, то й ряд (18) також абсолютно збіжний і суми їхніх рядів однакові, тобто для абсолютно збіжних рядів має місце переставна властивість.*

Умовно збіжні ряди мають властивість, яка не має аналогу для скінченних сум.

Теорема 13. *Якщо ряд (1) умовно збіжний, то для довільного числа A (включаючи й символ $\pm\infty$), перестановкою членів рядку (1) можна утворити ряд (18), який має своєю сумою число A (або $\pm\infty$).*

Вправи

1. Знайти суму ряду:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+2)}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$.

2. Дослідити на збіжність ряд, застосувавши ознаку порівняння:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n^4+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$.

3. За ознакою Даламбера дослідити на збіжність ряд:

1) $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\ldots$; 2) $\dfrac{2}{2}+\dfrac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\dfrac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3^n}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\dfrac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\ldots+\dfrac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}+\ldots$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

4. За ознакою Коші дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}$, $a\neq 0$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^2}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

5. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд:

1) $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$;

2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}+\ldots$;

3) $1,1-1,01+1,001-1,0001+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)+\ldots$;

4) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{4^n}$;

7) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots$.

Відповіді

1. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{23}{90}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1.

2. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) розбігається; 5) розбігається.

3. 1) збігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) збігається; 6) розбігається; 7) розбігається.

4. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) розбігається; 6) збігається; 7) розбігається.

5. 1) збігається умовно; 2) збігається умовно; 3) розбігається; 4) збігається абсолютно; 5) збігається абсолютно; 6) збігається абсолютно; 7) збігається умовно.

§2. Функціональні ряди

2.1. Поняття про функціональний ряд. Область збіжності функціонального ряду. Тут ми розглядатимемо ряди, членами яких є функції, визначені на деякій множині X числової осі:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

які називаються **функціональними**.

Візьмемо довільне $x_0 \in X$ і розглянемо ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \tag{2}$$

Цей числовий ряд може збігатися або розбігатися. Якщо він збігається, то точка x_0 називається **точкою збіжності** функціонального ряду (1). Якщо ж ряд (2) розбігається, то точка x_0 називається **точкою розбіжності** функціонального ряду. Сукупність D усіх точок збіжності функціонального ряду називається **областю його збіжності**. Очевидно, що $D \subset X$.

Частинна сума функціонального ряду, тобто сума перших його n членів

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

є функцією змінної $x \in X$.

З означення області збіжності D функціонального ряду випливає, що для довільної точки x цієї області існує скінченна границя послідовності частинних сум $\{S_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ при $n \to \infty$. У точках, які не належать області збіжності, послідовність частинних сум $\{S_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ не має скінченої границі. Зрозуміло, що сумою S функціонального ряду є деяка функція змінної x, визначена в області збіжності ряду. У цьому випадку пишуть

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \quad x \in D.$$

Отже, якщо ряд (1) збігається на множині D і його сумою є $S(x)$, то це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),\ x \in D, \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq n_0 :$$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \ x \in D.$$

Ця збіжність називається **поточковою збіжністю** ряду (1) на множині D.

Якщо в цьому означенні номер n_0 залежить тільки від ε і не залежить від x, тобто $n_0 = n_0(\varepsilon)$, то кажуть, що послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ збігається **рівномірно** до функції $S(x)$, а ряд (1) у цьому випадку називають **рівномірно** або **правильно збіжним** на множині D.

Отже, функціональний ряд (1) називається **рівномірно збіжним на множині** D, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує номер* $n_0 \in \mathbb{N}$*, залежний лише від* ε*, такий, що для всіх номерів* $n \geq n_0$ *і довільних* $x \in D$*, має місце нерівність* $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$. Зауважимо, що коли нерівність $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ справджується для всіх $x \in D$, то $\sup\limits_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$. Тому означення рівномірної збіжності ряду (1) можна сформулювати і по-іншому: ряд (1) називається **рівномірно збіжним на множині** D, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

Розглянемо різницю

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \equiv r_n(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N},$$

яка називається **залишком** ряду (1). Якщо скористатися цим поняттям, то означення рівномірної збіжності ряду (1) можна подати у такій формі: *ряд (1) називається рівномірно збіжним на множині* D*, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |r_n(x)| = 0$.

Користуватися означенням при дослідженні функціонального ряду на рівномірну збіжність не завжди легко, а тому наведемо найуживанішу достатню ознаку рівномірної збіжності.

Теорема 1 (ознака Вейєрштрасса). *Якщо на множині D члени функціонального ряду (1) за модулем не перевищують відповідних членів збіжного числового ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, тобто* $|u_n(x)| \le a_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \in D$*, то ряд (1) збігається рівномірно на* D*.*

◀ З нерівностей $|u_n(x)| \le a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in D$, і теореми 6, §1, одержуємо, що ряд (1) є абсолютно збіжним на множині D. Оцінимо залишок $r_n(x)$ ряду (1):

$$|r_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n^*,$$

$n \in \mathbb{N}$, $x \in D$, де r_n^* – залишок числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Звідси отримуємо, що $\sup\limits_{x \in D} |r_n(x)| \le r_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки, як випливає з наслідку 1, §1, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n^* = 0$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |r_n(x)| = 0$, а це означає, що ряд (1) збігається рівномірно на D. ▶

Приклад 1. Дослідити на поточкову та рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big).$$

◀ Розглянемо послідовність $\{S_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ частинних сум заданого ряду:

$$S_n(x) = \Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2}\Big) + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big) + \ldots + \Big(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big) =$$

$$= x - \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big) = x$$

є скінченною лише для $x \in [-1;1]$. Тому заданий ряд є поточково збіжним на проміжку $D = [-1;1]$ і його сума $S(x) = x$, $x \in D$.

Поза відрізком $[-1;1]$ рівномірної збіжності не може бути, бо з рівномірної збіжності випливає поточкова. Отже, треба дослідити ряд на рівномірну збіжність на проміжку $D=[-1;1]$. Оскільки

$$\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in D}\Big|-\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|=\frac{1}{n+1},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Тому заданий ряд є рівномірно збіжним на відрізку $D=[-1;1]$. ►

Приклад 2. Дослідити на поточкову та рівномірну збіжність функціональний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

◄ Заданий ряд є геометричним. Він, як відомо (приклад 2, §1, п.1.1), є збіжним лише для $x\in(-1;1)$ і його сума $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ для цих значень аргументу. Отже, областю поточкової збіжності ряду є проміжок $D=(-1;1)$.

Переконаємося, що на множині $D=(-1;1)$ ряд не збігається рівномірно. Оскільки частинна сума $S_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$, то маємо

$$\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in D}\Big|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}\Big|=\sup_{x\in D}\frac{|x|^n}{1-x}=\infty,$$

$n\in\mathbb{N}$. Звідси випливає, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=\infty$, тобто не дорівнює нулю, а це означає, що ряд не збігається рівномірно на множині $D=(-1;1)$. У той же час на кожному відрізку $[-a;a]\subset(-1;1)$, де $0<a<1$, цей ряд є рівномірно збіжним. Справді,

$$\sup_{x\in[-a;a]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[-a;a]}\Big|\frac{|x|^n}{1-x}\Big|=\frac{a^n}{1-a},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-a;a]}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1-a}=0,$$

а це означає, що ряд збігається рівномірно на відрізку $[-a;a]\subset(-1;1)$. ►

Рівномірно збіжні функцональні ряди мають властивості аналогічні властивостям скінченних сум функцій:

1) *якщо члени* $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *рівномірно збіжного ряду (1) неперервні на множині* D, *то і його сума* $S(x)$ *так само неперервна на* D;

2) *якщо члени рівномірно збіжного на множині* D *функціонального ряду (1) неперервні на цій множині, то ряд можна почленно інтегрувати, тобто для довільного відрізка* $[a;b] \subset D$ *маємо* $\int\limits_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$;

3) *якщо члени збіжного ряду (1) непрерервно диференційовні на проміжку* D, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збігається на цьому проміжку, то і сума* $S(x)$ *ряду (1) є диференційовною функцією і правильна рівність*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in D,$$

тобто рівномірний збіжний ряд (1) можна почленно диференціювати на множині D.

Треба зауважити, що для поточково збіжних функціональних рядів властивості 1) – 3), взагалі кажучи, не мають місця.

Приклад 3. Довести, що функціональний ряд

$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 2x}{2!} + \ldots + \frac{\cos nx}{n!} + \ldots$$

збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

◀ Очевидно, що

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ і за допомогою ознаки Даламбера дослідимо його на збіжність. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

а це означає, що ряд збіжний. Тоді, згідно з ознакою Вейєрштрасса, функціональний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. ▶

Приклад 4. Дослідити на неперервність суму функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ для $x\in[0;+\infty)$.

◀ Згідно з ознакою Лейбніца одержуємо, що для кожного $x\in[0;+\infty)=D$ заданий ряд є збіжним, а це означає, що він поточково збіжний на цій множині. Нехай функція $S(x)$, $x\in D$, є сумою цього ряду.

Доведемо, що $S(x)$ є неперервною функцією на множині D. Оскільки кожний доданок заданого ряду $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$, $n\in\mathbb{N}$, є неперервною функцією на D, то досить переконатися у рівномірній збіжності функціонального ряду на цій множині. Для цього оцінимо залишок ряду

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k},\quad n\in\mathbb{N},x\in D.$$

Якщо скористатися наслідком 5 з теореми Лейбніца, то одержимо нерівність

$$|r_n(x)|\le\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n+1}\right|\le\frac{1}{n+1},\quad n\in\mathbb{N},x\in D.$$

Тому $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)}|r_n(x)|\le\dfrac{1}{n+1}$, а отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0;+\infty)}|r_n(x)|=0$. Це означає, що заданий функціональний ряд рівномірно збіжний на множині D.

Згідно з властивістю 1) рівномірно збіжних рядів, маємо, що $S(x)$ є неперервною функцією на множині $[0;+\infty)$. ▶

Приклад 5. Функція $S(x)$ визначається рівністю

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}.$$

Довести, що ця функція є неперервною для $x>0$ і знайти $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}S(x)dx$.

◀ Нехай a – довільне додатне число. Доведемо, що на проміжку $[a; +\infty)$ заданий функціональний ряд збігається рівномірно. Оскільки правильна оцінка

$$ne^{-nx} \leq ne^{-na} \equiv a_n, \quad x \in [a; +\infty),$$

то треба дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$. Маємо, згідно з ознакою Даламбера, що цей ряд збіжний, бо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{ne^{-na}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} e^{-a} = e^{-a} < 1.$$

Отже, виконуються умови ознаки Вейєрштрасса і тому заданий функціональний ряд є рівномірно збіжним на кожному проміжку $[a; +\infty)$, де $a > 0$. Тоді він є і поточково збіжним на множині $X = (0; +\infty)$.

Якщо x_0 будь-яка точка з множини X, то існує таке число $a > 0$, що $x_0 \in [a; +\infty)$. Оскільки всі члени заданого ряду є неперервними функціями для $x > 0$, а на множині $[a; +\infty)$ він рівномірно збіжний, то його сума $S(x)$ є неперервною на $[a; +\infty)$ функцією. Зокрема, $S(x)$ неперервна і в точці x_0. Врахувавши, що точка x_0 довільна точка множини X, одержимо, що $S(x)$ є неперервною функцією для всіх $x > 0$.

Візьмемо $a = \ln 2$. Тоді на проміжку $[\ln 2; +\infty)$ заданий ряд збігається рівномірно і тому його можна почленно інтегрувати, наприклад, на відрізку $[\ln 2; \ln 3]$. Отже, маємо

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n\ln 2} - e^{-n\ln 3}) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\ln 2^{-n}} - e^{\ln 3^{-n}}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} S(x)dx = \frac{1}{2}. \text{ ▶}$$

Приклад 6. Довести, що функція

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

має неперервну похідну на всій числовій осі та знайти $S'(\pi)$.

◀ Оцінимо загальний член заданого функціонального ряду $u_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$, $n\in\mathbb{N}$, для $x\in\mathbb{R}$. Маємо

$$|u_n(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3},\quad n\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R}.$$

Оскільки числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збіжний, як узагальнений гармонічний ряд з показником більшим за одиницю, то, згідно з ознакою порівняння, заданий функціональний ряд збігається абсолютно в кожній точці $x\in\mathbb{R}$. Отже, функція $S(x)$ визначена на всій числовій осі.

Кожний доданок заданого ряду $u_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n^3}$ має на $\mathbb{R}$ неперервну похідну $u_n'(x)=-\dfrac{\sin nx}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$. Утворимо функціональний ряд з цих похідних

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Скориставшись нерівностями $\left|-\dfrac{\sin nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$, і ознакою Вейєрштрасса, одержимо рівномірну збіжність цього ряду на $\mathbb{R}$, бо числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний. Оскільки виконуються всі умови третьої властивості рівномірно збіжних рядів, то заданий ряд можна почленно диференціювати

$$S'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Функціональний ряд, що стоїть у правій частині цієї рівності, рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$, а його члени є неперервними функціями. Тому $S'(x)$ є неперервною функцією на всій числовій осі. Якщо взяти $x=\pi$, то

$$S'(\pi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n^2}=0,$$

бо для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\sin n\pi = 0$. ▶

2.2. Степеневі ряди.

2.2.1. Степеневий ряд і його область збіжності. Ряд вигляду

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \tag{3}$$

називається **степеневим**.

Числа c_0, c_1, …, c_n, … називаються **коефіцієнтами степеневого ряду.**

З'ясуємо, який вигляд має область збіжності степеневого ряду (3). Розглянемо додатний ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду

$$|c_0| + |c_1x| + |c_2x^2| + \ldots + |c_nx^n| + \ldots \tag{4}$$

і застосуємо для його дослідження ознаку Даламбера. Для цього знайдемо границю відношення наступного члена $a_{n+1} = |c_{n+1}x^{n+1}|$ до попереднього $a_n = |c_nx^n|$ при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x^{n+1}|}{|c_n||x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

Припустимо, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \neq 0$, яку позначимо через $\dfrac{1}{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \dfrac{1}{R}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \frac{1}{R}.$$

З ознаки Даламбера випливає, що коли $\dfrac{|x|}{R} < 1$, тобто $|x| < R$, то ряд (4) збігається, а отже, збігається і ряд (3), причому абсолютно. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (4) розбігається. Оскільки в цьому випадку для всіх достатньо великих n члени ряду (4) зростають, то загальний член $a_n = |c_nx^n|$ не прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, не прямує до нуля і загальний член ряду (3). Тому для всіх значень x, які задовольняють нерівність $|x| > R$, степеневий ряд (3) розбігається.

Якщо, нарешті, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{|x|}{R} = 1$, тобто $|x| = R$, то тоді ознаку Даламбера не можна застосувати і як ряд (4), так і ряд (3), може збігатися або розбігатися.

У випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 0$ рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = 0 < 1$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а тому з ознаки Даламбера випливає, що ряд (4), а отже, і ряд (3) збігається на всій числовій осі, тобто $R = \infty$.

Отже, в припущенні, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ існує, доведена така теорема.

Теорема 2. *Областю збіжності степеневого ряду*

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

є інтервал $(-R; R)$, до якого, в залежності від конкретних випадків, треба долучити крайні точки $-R$ і R. У кожній точці інтервалу $(-R; R)$ ряд збігається абсолютно.

Інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневого ряду, а число R – **радіусом збіжності.**

Очевидно, що будь-який степеневий ряд (3) збігається при $x = 0$, оскільки при $x = 0$ маємо числовий ряд $c_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$. Якщо інших точок збіжності немає, то у цьому випадку вважатимемо, що радіус збіжності $R = 0$. Якщо степеневий ряд збігається у всіх точках числової осі, то вважатимемо, що радіус збіжності $R = \infty$.

З викладеного вище випливає, що в усіх випадках радіус збіжності R можна знайти за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Приклад 7. Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots .$$

◄ Очевидно, що радіус збіжності ряду $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Звідси випливає, що інтервалом збіжності є $(-1;1)$. Дослідимо ряд на збіжність в точках $x=-1$ і $x=1$.

При $x=1$ маємо гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

який розбігається (приклад 3, §1).

Якщо ж $x=-1$, то одержимо ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

який збігається (приклад 11, §1).

Отже, область збіжності ряду $[-1;1)$. ►

Приклад 8. Знайти область збіжності ряду

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

◄ Оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

то ряд збігається на всій числовій осі $(-\infty;+\infty)$. ►

2.2.2. Властивості степеневих рядів. Розглянемо ряд (3), що збігається на інтервалі $(-R;R)$, де $R>0$ – його радіус збіжності. Тоді кожному $x_0 \in (-R;R)$ відповідає сума $f(x_0)$ числового ряду

$$c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+\ldots+c_nx_0^n+\ldots.$$

Звідси випливає, що сума степеневого ряду є функцією x на проміжку $(-R;R)$:

$$f(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots\ . \tag{5}$$

У цьому випадку кажуть, що степеневий ряд збігається до $f(x)$ на проміжку $(-R; R)$ або, що функція $f(x)$ розкладається в степеневий ряд на $(-R; R)$.

Доведено [8], що сума f степеневого ряду (3) є неперервною і диференційовною функцією на всьому інтервалі збіжності.

Наведемо без доведення деякі теореми про властивості степеневих рядів.

Теорема 3 (про почленне диференціювання степеневого ряду). *Нехай функція f розкладається на інтервалі $(-R; R)$ в степеневий ряд (5). Розглянемо степеневий ряд*

$$c_1 + 2c_2x + \ldots + nc_nx^{n-1} + \ldots, \tag{6}$$

одержаний почленним диференціюванням ряду (5). Тоді:

1) ряд (6) має той самий радіус збіжності R, що й ряд (5);

2) сума ряду (6) дорівнює $f'(x)$, $x \in (-R; R)$.

Застосовуючи теорему 2 повторно, дістанемо, що друга похідна $f''(x)$ також існує і дорівнює сумі ряду, одержаного двократним диференціюванням ряду (5). Аналогічні висновки можна зробити для третьої похідної і т.д.

Отже, функція $f(x)$, яка розкладається в степеневий ряд (5) на інтервалі $(-R; R)$, нескінченно диференційовна на цьому інтервалі. Розклад в степеневий ряд будь-якої похідної одержується почленним диференціюванням ряду (5). При цьому радіуси збіжності відповідних рядів дорівнюють радіусу збіжності ряду (5).

Теорема 4 (про почленне інтегрування степеневого ряду). *Якщо функція $f(x)$ розкладається в степеневий ряд на інтервалі $(-R; R)$, то вона інтегровна на цьому інтервалі. При цьому інтеграл від суми ряду дорівнює сумі інтегралів від членів ряду, тобто степеневий ряд можна почленно інтегрувати на інтервалі збіжності.*

Іншими словами, якщо $[x_1; x_2] \subset (-R; R)$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots)dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} c_0 dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} c_1 x dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} c_2 x^2 dx + \ldots + \int\limits_{x_1}^{x_2} c_n x^n dx + \ldots \ .$$

Важливим випадком є інтегрування степеневого ряду по відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$:

$$\int\limits_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots \ .$$

Цей ряд має той самий радіус збіжності, що й ряд (5).

Зауважимо, що часто розглядають степеневий ряд загального вигляду

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad (7)$$

який заміною $x - x_0 = y$ зводиться до ряду (3).

Якщо функція f є сумою ряду (7), то кажуть, що вона розкладається в ряд за степенями $(x - x_0)$.

Усі властивості ряду (7) і його суми, аналогічні тим, що правильні для ряду (5) і його суми.

2.3. Розклад функції в степеневий ряд. Для застосування важливим є вміння розкладати функцію f в степеневий ряд на деякому відрізку $[-r; r]$ або інтервалі $(-r; r)$, $r > 0$.

При цьому треба дати відповідь на такі два запитання:

1) чи можна задану функцію подати на цьому відрізку або інтервалі у вигляді суми деякого степеневого ряду?

2) якщо так, то як знайти цей ряд?

Спочатку дамо відповідь на друге запитання. Припустимо, що функція f на деякому відрізку $[-r; r]$ розкладена в степеневий ряд

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \ . \qquad (8)$$

Знайдемо коефіцієнти c_0, c_1, …, c_n, … цього ряду.

З попереднього пункту відомо, що степеневий ряд (8) можна почленно диференціювати довільну кількість разів на інтервалі $(-r; r)$. Тому для будь-якого $x \in (-r; r)$ маємо

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots,$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3x + 4 \cdot 3 \cdot c_4x^2 + \ldots,$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4x + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n + \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Покладаючи в цих рівностях, а також в розкладі (8) $x = 0$, дістанемо $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2$, $f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3$, $\ldots$, $f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n$. Звідси одержуємо формулу

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (8), матимемо

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, x \in (-r; r) \tag{9}$$

Рівність (9) називається **рядом Маклорена** або **рядом Тейлора з центром в точці 0 для функції** f**.**

Отже, якщо функція f розкладається в степеневий ряд у деякому околі точки $x = 0$, то цей ряд є рядом Маклорена.

Нехай f – довільна нескінченно диференційовна функція. Для неї можна скласти ряд Маклорена

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\ . \tag{10}$$

З'ясуємо, за яких умов сума цього ряду збігається з функцією f. Для цього розглянемо формулу Маклорена для функції $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

де залишковий член

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < c < x \text{ або } -x < c < 0.$$

Якщо позначити через $S_n(x)$ частинну суму ряду Маклорена (10), то формулу Маклорена можна подати у вигляді

$$f(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Звідси випливає, що рівність (9) правильна тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (f(x) - S_n(x)) = 0$, $x \in (-r; r)$.

У багатьох випадках зручно користуватися теоремою, яка дає достатні умови розкладу функцій в ряд Маклорена.

Теорема 5. *Нехай функція f визначена і нескінченно диференційовна на інтервалі $(-r; r)$. Якщо існує стала M така, що*

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in (-r; r),$$

то на цьому інтервалі ряд Маклорена збігається до функції f.

◀ Вище було зазначено, що рівність (9) правильна тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, $x \in (-r; r)$. Тому розглянемо залишковий член формули Тейлора функції $f(x)$, $x \in (-r; r)$, і проведемо його оцінку:

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}, x \in (-r; r).$$

Для того щоб знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$, утворимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ і застосуємо до нього ознаку Даламбера. Тоді матимемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Mr^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!Mr^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+2} = 0.$$

Звідси випливає, згідно з ознакою Даламбера, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$ збіжний, а отже, його загальний член прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}=0$.

З нерівностей

$$0\le\lim_{n\to\infty}|R_{n+1}(x)|\le\lim_{n\to\infty}\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}=0,\quad x\in(-r;r),$$

одержуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$, $x\in(-r;r)$, а це означає, що ряд Маклорена для функції f збігається до цієї функції, тобто правильна рівність (9). ▶

Розглянемо розклад деяких елементарних функцій в ряд Маклорена.

1. Розклад в степеневий ряд функції $f(x)=e^x$**.** Оскільки $f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то $|f^{(n)}x)|=e^x<e^r$ на довільному інтервалі $(-r;r)\subset\mathbb{R}$. Згідно з теоремою 4 функція e^x є сумою свого ряду Маклорена при $x\in(-r;r)$, а отже, для будь-якого $x\in\mathbb{R}$, бо r – довільне. Маємо, що $f^{(n)}(0)=e^0=1$, $n\in\mathbb{Z}_+$, тому ряд Маклорена для функції $f(x)=e^x$ має вигляд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{11}$$

2. Розклад в ряд Маклорена функцій $f(x)=\sin x$ **і** $f(x)=\cos x$**.** Оскільки $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то $|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le1$, $x\in(-r;r)$, де r – довільне дійсне число. Отже, виконуються умови теореми 4, а це означає, що для будь-якого x функція $f(x)=\sin x$ є сумою свого ряду Маклорена.

При $x=0$ маємо, що $f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$, …, тобто всі похідні парного порядку дорівнюють нулю, а непарного порядку – $(-1)^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Звідси випливає, що ряд Маклорена для $f(x)=\sin x$ має вигляд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ряд для $\cos x$ одержується з цього ряду почленним диференціюванням:

$$\cos x = (\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \ldots + \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' + \ldots$$

або

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Розклад функцій $f(x) = \ln(1+x)$ і $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Розглянемо геометричний ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \ .$$

Відомо (приклад 2, §1), що при $|x| < 1$ даний ряд збігається і його сума дорівнює $\dfrac{1}{1-x}$. Отже,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \tag{12}$$

тобто (12) є розкладом функції $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в степеневий ряд при $|x| < 1$. Зробимо в (12) заміну змінної $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots, |t| < 1. \tag{13}$$

Проінтегрувавши (13) у межах від 0 до x, $|x| < 1$, дістанемо

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots\right) dt$$

або

$$\ln(1+t)\big|_0^x = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \ldots\right)\Bigg|_0^x.$$

Звідси одержуємо розклад функції $f(x) = \ln(1+x)$ в степеневий ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1. \quad (14)$$

Можна довести, що розклад (14) правильний і при $x = 1$.

Знайдемо тепер розклад функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Для цього підставимо в рівність (11) $x = -t^2$ і проінтегруємо по t від 0 до x. Тоді матимемо розклад

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad (15)$$

який правильний при $|x| < 1$. Очевидно, що даний ряд збігається і в точках $x = -1$ й $x = 1$ і тому рівність (15) є правильною і для цих x.

4. Розклад функції $f(x) = (1+x)^\alpha$. Нехай $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α – довільне дійсне число. Тоді маємо $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \ldots$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \ldots$. Поклавши $x = 0$ в усі ці рівності, одержимо $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$, ..., $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$, ... Підставивши вирази для похідних в ряд Маклорена (9), дістанемо

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (16)$$

Легко можна переконатися, що радіус збіжності даного ряду дорівнює одиниці, тобто ряд (16) збігається при $|x| < 1$ і рівність (16) правильна для цих x.

Для натуральних $\alpha = m$ права частина рівності (16) перетворюється в многочлен, а сама рівність (16) у формулу бінома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m.$$

Приклад 9. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = e^{-x^2}$.
◀ Скористаємося розкладом в степеневий ряд функції $f(t) = e^t$:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Замінюючи в цій формулі t на $-x^2$, дістанемо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Приклад 10. Обчислити наближено з точністю до 0,0001:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$.

◀ 1) Для обчислення $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$ запишемо ряд (11) при $x = -\dfrac{3}{5}$, яке належить області збіжності $(-\infty; +\infty)$ цього ряду:

$$e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 2!} - \frac{3^3}{5^3 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^n}{5^n n!} + \ldots =$$

$$= 1 - 0,6 + 0,18 - 0,036 + 0,0054 - 0,000648 + 0,0000648 - \ldots .$$

Взявши перші шість членів розкладу, на основі наслідку з ознаки Лейбніца, ми одержимо похибку R_7, яка менше першого з відкинутих членів, тобто $|R_7| < 0,0000648 < 0,0001$.

Отже, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} \approx 1 - 0,6 + 0,18 - 0,036 + 0,0054 - 0,000648 = 0,548752 \approx 0,5488$.

2) Інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ не обчислюється точно, а тому обчислимо його наближено.

Замінивши x на $-x$ в розкладі (11), одержимо

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Помножимо цей ряд на $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \ldots, \quad x \in [0; +\infty)$$

і проінтегруємо на проміжку $[0;1]$. Тоді матимемо

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{1/2}dx - \int_0^1 x^{3/2}dx + \ldots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\frac{3}{2}}\frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!}\Bigg|_0^1 + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \ldots = 0,66667 - 0,40000 + 0,14286-$$

$$-0,03704 + 0,00758 - 0,00128 + 0,00018 - \ldots \approx 0,37897 \approx 0,3790.$$

Оцінка похибки обчислення проводиться, як і у випадку 1). ►

Приклад 11. Обчислити $\ln 1,6$, взявши три члени розкладу функції $\ln(1+x)$ в степеневий ряд.

◄ Скористаємося розкладом (14):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

де $x = 0,6 \in (-1;1]$, обмеживщись трьома членами ряду. Маємо

$$\ln 1,6 \approx 0,6 - \frac{0,6^2}{2} + \frac{0,6^3}{3} = 0,6(1 - 0,3 + 0,12) = 0,492.$$

Похибка, яку ми при цьому робимо, оцінюється так:

$$|R_4| < \frac{(0,6)^4}{4} = \frac{0,1296}{4} = 0,0324. \quad ►$$

Вправи

1. Знайти область збіжності функціонального ряду:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x(1-x)^{n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{nx}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nx}-1}$.

2. Довести рівномірну збіжність, у зазначеному проміжку, ряду:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^{n-1}}$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+x^2)}$, $x\in\mathbb{R}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$, $x\in[0;+\infty)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sin^2 x+n}$, $x\in\mathbb{R}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, $x\in[-1;1]$.

3. Функція $f(x)$ задана рівністю

$$f(x)=\sum_{n=1}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Довести, що вона визначена і неперервна на $\mathbb{R}$. Знайти значення функції $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ та інтеграл $\int\limits_0^{\pi}f(x)dx$.

4. Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=1}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $x\in\mathbb{R}$. Довести, що ця функція визначена і неперервна на всій числовій осі.

5. Функція $f(x)$ визначена рівністю

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}+\ldots.$$

Довести, що ця функція неперервна на інтервалі $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0{,}125}f(x)dx$.

6. За допомогою почленного диференціювання функціонального ряду знайти суму ряду:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-3}}{4n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; .

7. Довести, що функція

$$f(x)=\sum_{n=1}\frac{\sin nx}{n^5}$$

є двічі неперервно диференційовною на множині $\mathbb{R}$.

8. Використовуючи рівності $\int\limits_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, знайти суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

9. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1) $(x-2) + \dfrac{1}{2^2}(x-2)^2 + \dfrac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots$;

2) $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \ldots$;

3) $\dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n \cdot 3^n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

10. Розкласти в степеневий ряд за степенями x функцію:

1) $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$; 4) $f(x) = x\ln(1+x^2)$, $x \in (-1;1)$; 5) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$; 6) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1;1)$.

11. Обчислити наближено з точністю до 0,0001:

1) $\ln 1,1$; 2) $\sin 0,4$; 3) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$.

Відповіді

1. 1) $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$; 2) $[0;1)$; 3) $(-\infty;0)$; 4) $(0;+\infty)$.

3. $f(0) = \dfrac{1}{9}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{101}$, $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = 0$.

5. $0,2$. **6.** 1) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 2) $(x+1)\ln(x+1) - x$.

8. 1) $\dfrac{1}{3}\left(\ln 2 + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(1+\sqrt{2}) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. 1) $[1;3]$; 2) $\{5\}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$; 5) $[-4;2)$; 6) $\mathbb{R}$; 7) $\left[-\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{10}\right)$.

10. 1) $1 + x\ln 3 + \dfrac{x^2 \ln^2 3}{2!} + \dfrac{x^3 \ln^3 3}{3!} + \ldots$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots$, $x\in\mathbb{R}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}$;

6) $2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$.

11. 1) 0,0953; 2) 0,3894; 3) 0,7635.

§3. Ряди Фур'є

3.1 Ряд Фур'є за ортогональною системою функцій. Обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є методом Ейлера-Фур'є.

3.1.1. Ортогональність тригонометричної системи функцій. У тривимірному простору $\mathbb{R}^3$ важливу роль відіграє система одиничних векторів $\overrightarrow{i} = (1;0;0;)$, $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$ – ортів відповідно осей Ox, Oy, Oz. Для них скалярні добутки різних векторів дорівнюють нулю, тобто $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 0$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = 0$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) = 0$, а скалярні добутки однакових векторів дорівнюють одиниці, тобто $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = 1$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 1$, $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) = 1$. Цю ортонормовану систему векторів називають декартовим ортонормованим базисом в $\mathbb{R}^3$. Відомо, що довільний вектор $\overrightarrow{a} = (x;y;z)$ єдиним чином можна розкласти по базису $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, тобто записати у вигляді

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Аналогічно у випадку n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ ортонормованим базисом є система векторів

$$\overrightarrow{e}_1 = (1;0;\ldots;0), \overrightarrow{e}_2 = (0;1;\ldots;0), \ldots, \overrightarrow{e}_n = (0;0;\ldots;1). \quad (1)$$

Для них

$$(\overrightarrow{e}_k, \overrightarrow{e}_l) = 0, k \neq l, \{k,l\} \subset \{1,\ldots,n\},$$

$$(\overrightarrow{e}_k, \overrightarrow{e}_k) = 1, \quad k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Довільний n-вимірний вектор $\overrightarrow{a} = (x_1;x_2;\ldots;x_n)$ однозначно розкладається по базису $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, …, $\overrightarrow{e}_n$

$$\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + \ldots + x_n\overrightarrow{e}_n.$$

У цьому параграфі поширимо поняття ортонормованості на системи функцій, які розглядаються у певному просторі, а також вивчимо питання розкладу довільної функції по базису, утвореному цією системою.

Розглянемо на деякому відрізку $[a;b]$ сукупність $R([a;b])$ усіх інтегровних на цьому відрізку функцій. До них, зокрема, належить кожна неперервна на відрізку $[a;b]$ функція. Ця множина утворює лінійний простір, тобто з того, що $\{f,g\} \subset R([a;b])$ випливає, що будь-яка їхня лінійна комбінація $\alpha f + \beta g$ також належить до цього простору при довільних $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$.

У просторі $R([a;b])$ введемо поняття **скалярного добутку** функцій (f,g), який означимо рівністю

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{2}$$

Зауважимо, що добуток двох інтегровних функцій $\{f,g\} \subset R[a;b]$ є також інтегровною на $[a;b]$ функцією.

Якщо скористатися властивостями визначених інтегралів, то легко можна довести, що:

1) $(f,g) = (g,f)$;

2) $(\alpha f, g) = (f, \alpha g) = \alpha(f,g)$, де α – дійсне число;

3) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$, $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$;

4) $(f,f) \geq 0$.

У випадку, коли f неперервна на $[a;b]$, з рівності $(f,f) = 0$ випливає, що $f(x) = 0$, $x \in [a;b]$. Якщо ж f розривна функція, а серед інтегровних на $[a;b]$ такі функції можливі, то з рівності $(f,f) = 0$ не завжди випливає, що $f(x)$ дорівнює нулю скрізь на $[a;b]$. Наприклад, для функції $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a;b], \\ 1, & x = a \end{cases}$ $(f,f) = 0$, але ця функція не дорівнює нулю скрізь на $[a;b]$.

Введемо поняття **ортогональності функцій**. Функції $\{f,g\} \subset R([a;b])$ називаються **ортогональними** на $[a;b]$, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(f,g) = 0$.

У просторі $R([-\pi;\pi])$ розглянемо нескінченну тригонометричну систему функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{3}$$

і доведемо, що вона ортогональна на відрізку $[-\pi;\pi]$. Для цього знайдемо скалярні добутку двох різних функцій цієї системи.

Маємо

$$(1, \cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin n\pi + \sin n\pi) = 0,$$

$n \in \mathbb{N}$;

$$(1, \sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos n\pi) = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(\cos nx, \sin kx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(k+n)x +$$

$$+ \sin(k-n)x) dx = -\frac{\cos(k+n)x}{2(k+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(k-n)x}{2(k-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$\{k, n\} \subset \mathbb{N}$,

$$(\cos kx, \cos nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+n)x +$$

$$+ \cos(k-n)x) dx = \frac{1}{2} \Big(\frac{\sin(k+n)x}{k+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \Big) =$$

$$= \frac{\sin(k+n)\pi}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\pi}{k-n} = 0, k \neq n, \{k, n\} \subset \mathbb{N},$$

$$(\sin kx, \sin nx) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-n)x -$$

$$- \cos(k+n)x) dx = \frac{1}{2} \Big(\frac{\sin(k-n)x}{k-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(k+n)x}{k+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \Big) =$$

$$= \frac{\sin(k-n)\pi}{k-n} - \frac{\sin(k+n)\pi}{k+n} = 0, k \neq n, \{k, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Далі знайдемо скалярні добутки однакових функцій системи:

$$(1,1)=\int_{-\pi}^{\pi}1dx=x\Big|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

$$(\cos nx,\cos nx)=\int_{\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(x+\frac{\sin 2nx}{2n}\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi+\pi)=\pi,$$

$$(\sin nx,\sin nx)=\int_{\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(x-\frac{\sin 2nx}{2n}\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi+\pi)=\pi, n\in\mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що нескінченна система функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ldots,$$

$$\ldots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ldots, \qquad (4)$$

є ортонормованою на відрізку $[-\pi;\pi]$ в просторі $R([-\pi;\pi])$.

Аналогічно можна довести, що система функцій (3) і (4) є ортогональною в кожному з просторів $R([a;a+2\pi])$, де $a\in\mathbb{R}$, зокрема, і в просторі $R([0;2\pi])$.

3.1.2. Коефіцієнти Фур'є і ряд Фур'є. Розглянемо функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (5)$$

де a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, – дійсні числа. Цей ряд називають **тригонометричним**, а числа a_0, a_n,b_n, $n \in \mathbb{N}$, – **коефіцієнтами** тригонометричного ряду.

Нехай тригонометричний ряд (5) збігається на $\mathbb{R}$ і його сумою є функція $f(x)$, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Оскільки кожний член ряду (6) є 2π-періодичною функцією, то його сума $f(x)$ також є 2π-періодичною, тобто $f(x+2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Якщо для 2π-періодичної функції $f(x)$ правильна рівність (6), то кажуть, що ця функція розкладається в тригонометричний ряд. Знайдемо формули для обчислення коефіцієнтів цього розкладу a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що функція f є інтегровною на відрізку $[-\pi;\pi]$, а ряд (6) можна почленно інтегрувати. Це має місце, зокрема, коли ряд збігається рівномірно.

Проінтегруємо ліву і праву частини рівності (6) на відрізку $[-\pi;\pi]$, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}x\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx\Big).$$

Оскільки, як доведено вище, функція $g(x) = 1$ ортогональна до $\cos nx$ і $\sin nx$ на відрізку $[-\pi;\pi]$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$$

або

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{7}$$

Для знаходження коефіцієнтів a_k, $k \in \mathbb{N}$, помножимо обидві частини ряду (6) на $\cos kx$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx dx\Big).$$

Скориставшись ортогональністю тригонометричної системи функцій (3), одержимо, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k\pi$$

або

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Помноживши тепер ліву і праву частини рівності (6) на $\sin kx$, і, проінтегрувавши одержану рівність в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Очевидно, що формули (7) і (8) можна об'єднати в одну

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Формули (9), (10) називають **формулами Ейлера-Фур'є**, а самі числа a_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, b_k, $k \in \mathbb{N}$, які визначаються цими формулами, називають **коефіцієнтами Фур'є** для функції $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$.

Отже, якщо функція $f(x)$ розкладається на відрізку $[-\pi;\pi]$ в рівномірно збіжний тригонометричний ряд (6), то коефіцієнти цього ряду визначаються за формулами Ейлера-Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є функції f.

Розглянемо тепер довільну 2π-періодичну та інтегровну на відрізку $[-\pi;\pi]$ функцію $f(x)$. Для такої функції за формулами (9), (10) знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$. Складемо тригонометричний ряд (5), де a_0, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Цей ряд називається **рядом Фур'є для функції** f. Оскільки про збіжність ряду (5) нічого не відомо, то виникає запитання, коли він збігається і чи його сумою є $f(x)$.

Якщо функція f парна, то функції $f(x)\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, непарні на відрізку $[-\pi;\pi]$, а тому згідно з формулами (9), одержуємо, що $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Коефіцієнти a_n знаходяться за формулами

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx dx, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Отже, для парної функції $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, її ряд Фур'є (5) має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{12}$$

де коефіцієнти a_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обчислюються за формуламии (11).

У випадку, коли $f(x)$ непарна, то функції $f(x)\cos nx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, також непарні на $[-\pi;\pi]$, а тому $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Оскільки $f(x)\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, парні на $[-\pi;\pi]$, то

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Ряд Фур'є (5) для непарної функції $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{14}$$

де коефіцієнти b_n, $n \in \mathbb{N}$, знаходяться за формулами (13).

Ряди (12) і (14) називають **неповними рядами Фур'є** відповідно за косинусами і синусами кратних кутів.

Зауваження 1. Оскільки 2π-періодична інтегровна на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція f є інтегровною також на кожному відрізку $[a;a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, і правильна рівність $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)dx$, то формули (9) і (10) можна записати по-іншому. Правильні такі формули для знаходження коефіцієнтів Фур'є 2π-періодичної інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції f:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx, a \in \mathbb{R},$$

зокрема,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx, n \in \mathbb{Z}_+;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx, a \in \mathbb{R},$$

зокрема,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx, n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Розклад функцій в ряд Фур'є.

3.2.1. Розклад в ряд Фур'є 2π-періодичних функцій.

Раніше було визначено, що для розкладу функції f в ряд Фур'є (6) необхідно, щоб вона була 2π-періодичною та інтегровною на відрізку $[-\pi;\pi]$ або на будь-якому відрізку довжини 2π. Якщо формально побудувати ряд Фур'є для такої функції, то він не обов'язково збіжний, а у випадку збіжності виникає запитання, чи є його сумою функція $f(x)$, за допомогою якої знаходилися коефіцієнти Фур'є. Виявляється, що збіжність ряду Фур'є до заданої функції має місце для широкого класу функцій. Нижче будуть наведені деякі достатні умови збіжності ряду Фур'є, а, отже, можливості розкладу функції f в ряд Фур'є. Для цього розглянемо поняття **кусково-диференційовної функції**.

Функція $f(x)$, яка визначена на відрізку $[a; b]$, називається **кусково-диференційовною** на цьому відрізку, якщо точками

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_j < a_{j+1} < \ldots < a_n = b$$

його можна розбити на скінченну кількість відрізків $[a_j; a_{j+1}]$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ таких, що всередині кожного інтервалу $(a_j; a_{j+1})$ функція f диференційовна, а на кінцях відрізків і сама функція і похідна від неї першого порядку мають однобічні скінченні границі

$$f(a_j + 0), f(a_{j+1} - 0), f'(a_j + 0), f'(a_{j+1} - 0).$$

Отже, кусково-диференційовна функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ можуть мати на відрізку лише скінченну кількість точок розриву першого роду, а тому функція f є інтегровною на відрізку $[a; b]$.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом 2π і кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi; \pi]$ або будь-якому відрізку довжиною 2π, то її ряд Фур'є (5) збігається в кожній точці x_0 і має суму*

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, \tag{15}$$

тобто

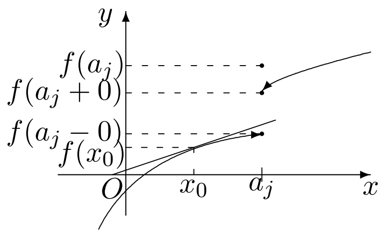
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = S_0. \tag{16}$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ неперервна. Тоді

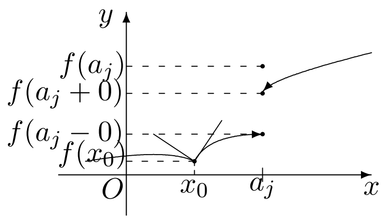
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0). \tag{17}$$

Зробимо деякі геометричні пояснення умов теореми 1.

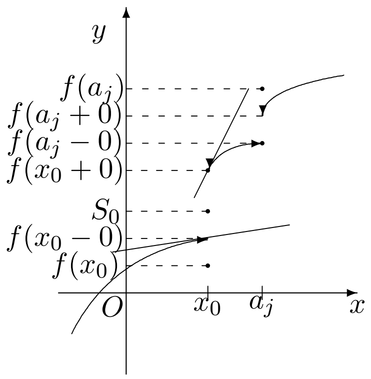
Якщо в точці x_0 функція f диференційовна, то існує дотична до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$. У цьому випадку правильна формула (17), оскільки диференційовна функція f є неперервною в точці x_0.



Нехай тепер функція f в точці x_0 неперервна, але не диференційовна. Тоді існують права й ліва похідні в точці x_0, але $f'(x_0-0) \neq f'(x_0+0)$. Тому в точці $(x_0; f(x_0))$ графік функції f має праву й ліву дотичні, які різні. Сумою ряду Фур'є є $f(x_0)$, тобто правильна рівність (17).



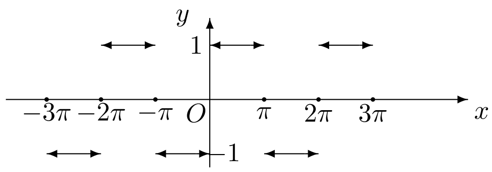
Якщо ж функція f розривна в точці x_0, тобто $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, але існують ліва й права похідні $f'(x_0-0)$ і $f'(x_0+0)$, то у цьому випадку існують дотичні до графіка функції f в точках $(x_0; f(x_0-0))$ і $(x_0; f(x_0+0))$. Це означає, що правильна рівність (16). Якщо ж число S_0 збігається із значенням $f(x_0)$, то правильна рівність (17).



Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

◄ Задана функція є 2π-періодичною, оскільки $f(x+2\pi) = \operatorname{sgn}(\sin(x+2\pi)) = \operatorname{sgn}(\sin x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Для $x \in (0;\pi)$ функція

$y = \sin x$ є додатною і тому $f(x) = 1$. Якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $y = \sin x$ від'ємна, і, отже, $f(x) = -1$. У точках $x = 0$ і $x = \pi$ одержуємо, що $f(0) = f(\pi) = 0$. Звідси випливає, що графік функції має вигляд, зображений на рисунку.



На відрізку $[-\pi; \pi]$ функція f кусково-диференційовна. Справді, якщо взяти розбиття цього відрізка на частини точками $-\pi = a_0 < a_1 = 0 < a_2 = \pi$, то на частинах $(-\pi; 0)$ і $(0; \pi)$ функція диференційовна і $f'(x) = 0$ на цих відрізках. У точках $x = -\pi$, $x = 0$ і $x = \pi$ маємо відповідно $f(-\pi+0) = -1$, $f'(-\pi+0) = 0$, $f(0+0) = 1$, $f'(0+0) = 0$, $f(0-0) = -1$, $f'(0-0) = 0$, $f(\pi-0) = 1$, $f'(\pi-0) = 0$. Звідси випливає, що всі умови теореми 1 виконуються і ряд Фур'є в точках неперервності функції f збігається до значення функції в цих точках, а в точках розриву $x_0 = -\pi, 0, \pi$ маємо $S_0 = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$. Очевидно, точками розриву функції також є $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. У кожній з цих точок $\dfrac{f(k\pi+0) + f(k\pi-0)}{2} = 0$, і, крім того, $f(k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому рівність (17) буде правильною для заданої функції f в усіх точках $x \in \mathbb{R}$. Отже, розглядувана функція розкладається в ряду Фур'є (6).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є. Оскільки задана функція f непарна, то $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sgn}(\sin nx)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi n}\cos n\pi + \frac{2}{\pi n}\cos 0 = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n), n \in \mathbb{N}.$$

Коефіцієнти b_n можна подати також у вигляді

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отже, ряд Фур'є для функції $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ такий

$$\operatorname{sgn}(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright \tag{18}$$

Розглянутий приклад показує, що сума нескінченної кількості неперервних функцій може бути розривною функцією. Це через те, що ряд (18) не збігається рівномірно.

Зауваження 2. Розклад функції в ряд Фур'є можна використовувати для обчислення сум числових рядів. Наприклад, якщо взяти в рівності (18) $x = \dfrac{\pi}{2}$, то дістанемо

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}.$$

Оскільки $\sin(2k-1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, то з цієї рівності одержимо, що

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k-1}.$$

У правій частині цієї рівності стоїть ряд Лейбніца.

3.2.2. Розклад в ряд Фур'є функції, яка задана на відрізку довжини 2π або π. У попередніх пунктах вивчалося питання розкладу в ряд Фур'є функції, яка є 2π-періодичною і визначена на всій числовій осі. У цьому пункті розглядатимемо питання розкладу в ряд Фур'є функції, яка визначена на проміжку $(-\pi;\pi]$, $[-\pi;\pi)$, $(-\pi;\pi)$ або $[-\pi;\pi]$.

Розглянемо довільну інтегровну на відрізку $[-\pi;\pi]$ функцію $f(x)$. Для такої функції за формулами (7), (8), (9) знайдемо коефіцієнти a_0, a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}$, і складемо ряд Фур'є (5). Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ відповідає свій ряд Фур'є. Оскільки про збіжність ряду (5) нічого не відомо, то замість знаку рівності ставлять знак відповідності, тобто записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{19}$$

З попереднього випливає, що *коли функція* $f(x)$ *на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *розкладається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей ряд єдиний і він є рядом Фур'є для функції* $f(x)$.

Оскільки члени ряду (19) є періодичними функціями з періодом 2π, то сума цього ряду у випадку його збіжності буде також періодичною з періодом 2π. Отже, для того щоб ряд Фур'є для функції f збігався до цієї самої функції, необхідно, щоб f була періодичною з періодом 2π, тобто $f(x+2\pi) = f(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

Якщо f не є періодичною, а визначеною, наприклад, на деякому відрізку $[a;b] \subset [-\pi;\pi]$, то можна побудувати допоміжну інтегровну періодичну функцію $\tilde{f}(x)$ з періодом 2π таку, щоб всередині відрізка $[a;b]$ вона збігалася з функцією $f(x)$. Тоді, якщо ряд Фур'є функції $\tilde{f}$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ збігається до f, то для $x \in [a;b]$ він збігається до f.

У випадку, коли неперіодична функція $f(x)$ визначена на деякому відрізку $[a;b] \supset [-\pi;\pi]$, або на $\mathbb{R}$, можна побудувати інтегровну функцію $g(x)$, яка на відрізку $[-\pi;\pi]$ збігається з $f(x)$ і має період 2π. Якщо ряд Фур'є, складений для $g(x)$, збігається до $g(x)$, то на відрізку $[-\pi;\pi]$ він зображує задану функцію $f(x)$.

Побудова періодичної з періодом 2π функції $g(x)$, яка дорівнює заданій функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ або на деякій частині його у випадку, коли $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b] \subset [-\pi;\pi]$, називається **періодичним продовженням функції** $f(x)$.

Для того щоб періодичне продовження було однозначним і всюди визначеним, треба спочатку $g(x)$ задати на проміжку $(-\pi;\pi]$ або на проміжку $[-\pi;\pi)$. На кінцях відрізка $[-\pi;\pi]$ за періодичне продовження функції $f(x)$ беруть

$$g(\pi) = g(-\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Важливу роль відіграє продовження кусково-гладкої функції $f(x)$, заданої на відрізку $[0;\pi]$, на відрізок $[-\pi;\pi]$ парно або непарно. У першому випадку на відрізку $[-\pi;\pi]$ матимемо парну функцію, яка розкладається в неповний ряд Фур'є за косинусами, а в другому – непарну, яка розкладається в ряд Фур'є за синусами. На проміжку $(0;\pi)$ кожний з цих рядів збігається до $f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$.

Оскільки при парному продовженні довільної кусково-неперервної і кусково-гладкої функції $f(x)$, заданої на відрізку $[0;\pi]$, правильні співвідношення

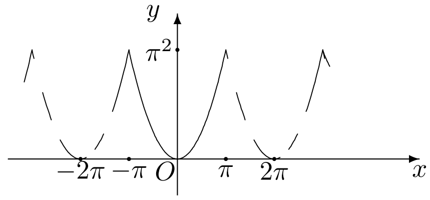
$$f(0-0)=f(0+0) \quad \text{і} \quad f(-\pi+0)=f(\pi-0),$$

то сума її тригонометричного ряду Фур'є в точках $x=0$ і $x=\pm\pi$ буде неперервною і дорівнюватиме відповідно $f(0+0)=f(0-0)$ і $f(-\pi+0)=f(\pi-0)$. Якщо ж $f(x)$, крім того, неперервна на кінцях відрізка $[0;\pi]$, тобто $f(0+0)=f(0)$, $f(\pi-0)=f(\pi)$, то звідси випливає, що сума її ряду за косинусами дорівнює $f(x)$ і на кінцях цього відрізка.

При розкладі функції $f(x)$, $x\in[0;\pi]$. в ряд за синусами, тобто при непарному продовженні $f(x)$ на відрізок $[-\pi;0]$, у сумі ряду Фур'є можуть з'явитися розриви в точках $x=0$ і $x=\pm\pi$, навіть у випадку неперервності і гладкості $f(x)$ на відрізку $[0;\pi]$. Оскільки при непарному продовженні $f(0-0)=$ $=-f(0+0)$ і $f(-\pi+0)=-f(\pi-0)$, то рівності $f(0-0)=f(0+0)$ і $f(-\pi+0)=f(\pi-0)$, які необхідні для неперервності суми ряду Фур'є в точках $x=0$ і $x=\pm\pi$, будуть правильними тільки у випадку, коли $f(0+0)=0$ і $f(\pi-0)=0$.

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$ функцію $f(x)=x^2$.

◄ Графік функції f та її 2π-періодичного продовження $\tilde{f}$ зображено на рисунку, де пунктиром позначено продовження функції f на всю числову вісь.



Очевидно, що умови теореми 1 виконуються, бо $\tilde{f}$ є 2π-періодичною і $\tilde{f}(x) = f(x) = x^2$, $x \in [-\pi;\pi]$, є кусково-диференційовною на цьому відрізку, оскільки вона диференційовна на $(-\pi;\pi)$ та існують похідні $f'(\pi-0) = 2\pi$, $f'(-\pi+0) = -2\pi$, і, крім того, f неперервна на відрізку $[-\pi;\pi]$. Тоді згідно з цією теоремою f розкладається в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Функція $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi;\pi]$, є парною, а тому $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Знайдемо коефіцієнти a_0 і a_n, $n \in \mathbb{N}$. Маємо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x^2 d(\sin nx) = \frac{2}{\pi n}\Big(x^2 \sin nx\Big|_0^{\pi} -$$

$$-2\int\limits_0^{\pi} x \sin nx dx\Big) = -\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi} x d(\cos nx) =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\Big(x \cos nx\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \cos nx dx\Big) = \frac{4}{\pi n^2}\Big((-1)^n \pi - \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\Big) =$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

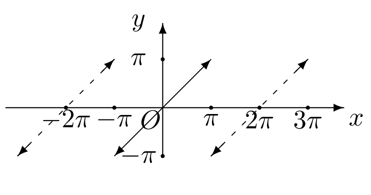
Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi;\pi].$$

Для $x \notin [-\pi;\pi]$ одержаний ряд також збігається, але його сумою для цих x буде функція $\tilde{f}$.▶

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi;\pi)$ функцію $f(x) = x$.

◀ Продовжимо задану функцію на всю числову вісь з періодом 2π. На рисунку графік продовження $\tilde{f}$ зображено пунктиром.



Одержана функція $\tilde{f}$ є кусково-диференційовною на відрізку $[-\pi;\pi]$ і неперервною на ньому скрізь, крім точок $x=-\pi$ і $x=\pi$. Тоді згідно з теоремою 1 функція f розкладається в ряд Фур'є, який збігається до неї в точках інтервалу $(-\pi;\pi)$, а в точках $x=\pm\pi$ сумою ряду Фур'є буде $S_0=0$, оскільки

$$S_0=\frac{f(\pi-0)+\tilde{f}(\pi+0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$$

$$S_0=\frac{f(-\pi+0)+\tilde{f}(-\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

Знайдемо коефіцієнти розкладу. Функція f непарна, а тому $a_n=0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, і, отже, треба обчислити b_n, $n\in\mathbb{N}$. Маємо

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin nxdx=-\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi xd(\cos nx)=-\frac{2}{\pi n}\Big(x\cos nx\Big|_0^\pi-$$

$$-\int\limits_0^\pi\cos nxdx\Big)=-\frac{2}{\pi n}\Big((-1)^n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi\Big)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тому розклад має вигляд

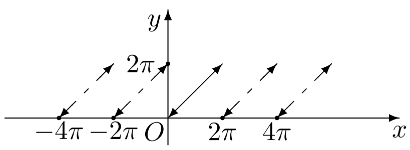
$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in(-\pi;\pi).$$

Поза інтервалом $(-\pi;\pi)$ сума цього ряду збігається з функцією $\tilde{f}(x)$, крім точок $x=(2n-1)\pi$, $n\in\mathbb{N}$. Якщо в цих точках довизначити функцію $\tilde{f}$ нулем, то правильною буде рівність

$$\tilde{f}(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in\mathbb{R}.\ \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на інтервалі $(0;2\pi)$.

◀ Продовжимо задану функцію періодично з періодом 2π на всю числову вісь. Графік цього продовження $\tilde{f}$ має вигляд, зображений на рисунку.



Очевидно, що продовжена функція $\tilde{f}$ кусково-диференційовна на відрізку $[0; 2\pi]$. Тому, як випливає з теореми 1, її можна розкласти в ряд Фур'є на цьому відрізку.

Оскільки функція $\tilde{f}$ ні парна, ні непарна, то треба знаходити всі коефіцієнти розкладу. Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} x d \sin nx = \frac{1}{\pi n}\Big(x \sin nx \Big|_0^{2\pi} -$$

$$- \int_0^{2\pi} \sin nx dx \Big) = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos 2\pi - 1) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} x d \cos nx = -\frac{1}{\pi n}\Big(x \cos nx \Big|_0^{2\pi} -$$

$$- \int_0^{2\pi} \cos nx dx \Big) = -\frac{1}{\pi n}\Big(2\pi - \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} \Big) = -\frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, шуканий розклад

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (0; 2\pi).$$

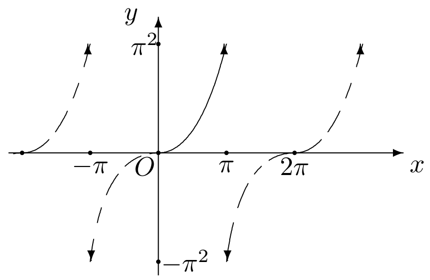
У точках $x = 0$ і $x = 2\pi$ сума ряду, що стоїть справа дорівнює $S_0 = \pi$.

Якщо порівняти одержаний розклад з тим, який ми отримали в прикладі 3, то побачимо, що вони різні. Це пов'язано з тим, що продовження заданих функцій різні.►

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = x^2$ на проміжку $[0; \pi]$.

◄ Для того щоб розкласти задану функцію за синусами, продовжимо її спочатку непарно на інтервал $(-\pi; 0)$, а далі – 2π-періодично на всю числову вісь. Позначимо це продовження через $\tilde{f}$

Оскільки функція $\tilde{f}$ на відрізку $[0; \pi]$ кусково-диференційовна і неперервна на $[0; \pi)$, то вона згідно з теоремою 1 розкладається в ряд Фур'є на цьому проміжку. Причому цей розклад містить тільки синуси, бо функція $\tilde{f}$ непарна.



Це означає, що $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тому знайдемо коефіцієнти b_n, $n \in \mathbb{N}$. Маємо

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2 d\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\Big(x^2 \cos nx\Big|_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi 2x\cos nx dx\Big) = -\frac{2}{\pi n}\Big((-1)^n\pi^2 - \frac{2}{n}\int_0^\pi x d\sin nx\Big) = -\frac{2}{\pi n}\Big((-1)^n\pi^2 -$$

$$-\frac{2}{n}\Big(x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx\Big)\Big) = -\frac{2}{\pi n}\Big((-1)^n\pi^2 - \frac{2}{n^2}((-1)^n - 1)\Big) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}2\pi + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що

$$\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{8}{\pi(2k-1)^3}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а тому ряд Фур'є для функції $f(x) = x^2$, $x \in [0; \pi)$, за синусами має вигляд

$$x^2 = 2\pi\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)x, \quad x \in [0; \pi).$$

У випадку, коли треба було б розкласти функцію $f(x) = x^2$, $x \in [0; \pi]$, в ряд Фур'є за косинусами, то цей розклад збігався б з тим, який одержано в прикладі 2. ▶

3.3. Розклад в ряд Фур'є функцій з періодом $2l$. У застосуваннях часто доводиться розкладати в ряд Фур'є функції, період яких відмінний від 2π.

Цей випадок зводиться до вивченого вище. Нехай функція $f(x)$ кусково-диференційовна і має період $2l$, тобто $f(x+2l) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Введемо нову незалежну змінну t за допомогою співвідношення $t = \dfrac{\pi}{l}x$. Розглянемо допоміжну функцію $g(t) = f\Big(\dfrac{lt}{\pi}\Big)$, $t \in \mathbb{R}$, яка одержується з функції $f(x)$ після цієї заміни. Доведемо, що функція g періодична з періодом 2π. Справді,

$$g(t+2\pi) = f\Big(\frac{lt+2\pi l}{\pi}\Big) = f\Big(\frac{lt}{\pi}+2l\Big) = f\Big(\frac{lt}{\pi}\Big) = g(t), t \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що коли функція f кусково-диференційовна на $[-l;l]$, то функція g кусково-диференційовна на $[-\pi;\pi]$ і навпаки.

Складемо для функції g ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{20}$$

де коефіцієнти a_0, a_n і b_n знаходяться за формулами Ейлера-Фур'є. Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)dt.$$

Зробимо заміну змінної $t = \dfrac{\pi}{l}x$, тоді $dt = \dfrac{\pi}{l}dx$, $\begin{array}{c|cc} t & -\pi & \pi \\ \hline x & -l & l \end{array}$, а отже,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)dt = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Аналогічно знаходимо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi}t\Big)\cos nt dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\Big(\frac{l}{\pi} t\Big) \sin ntdt = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Отже, для кусково-диференційовної функції $f(x)$, яка має період $2l$, коефіцієнти Ейлера-Фур'є обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Якщо замінити в ряді (20) t на $\dfrac{\pi x}{l}$, то дістанемо ряд для функції $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \Big). \tag{22}$$

У випадку, коли функція f є $2l$-періодичною і парною, то $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, а a_n знаходяться за формулами

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Ряд Фур'є (22) у цьому випадку має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \tag{24}$$

Аналогічно, якщо функція f $2l$-періодична і непарна, то $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а b_n обчислюються за формулами

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Ряд Фур'є (22) для такої функції має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{26}$$

Достатні умови розкладу $2l$-періодичної функції в ряд Фур'є визначаються теоремою

Теорема 2. *Якщо функція f періодична з періодом $2l$ і кусково-диференційовна на відрізку $[-l;l]$, то її ряд Фур'є (22) збігається в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$ і має суму*

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

тобто

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x_0}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right) = S_0.$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо f є неперервною в точці x_0.

Нехай кусково-неперервна і кусково-диференційовна функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$. Її можна продовжити різним чином на відрізок $[-l;0]$, зокрема: 1) парно, 2) непарно.

У першому випадку на відрізку $[-l;l]$ одержимо парну функцію. Для неї $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, a_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, обчислюються за формулами (23), а ряд Фур'є має вигляд (24).

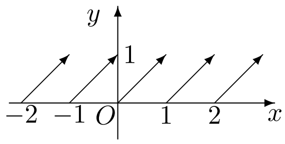
У другому випадку дістаємо непарну функцію на відрізку $[-l;l]$. Для неї $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, b_n, $n \in \mathbb{N}$, знаходяться за формулами (25), а ряд Фур'є набуває вигляду (26).

На проміжку $(0;l)$ кожний з рядів (24) і (26) збігається до $f(x)$ у точках неперервності f.

Отже, можна сказати, що довільну кусково-диференційовну функцію f, задану на відрізку $[0; l]$, можна, за бажанням, розкласти в ряд Фур'є або за косинусами (24), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (23), або за синусами (26), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (25).

Приклад 6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Функція $f(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, де $[x]$ – ціла частина x, періодична з періодом $2l = 1$, що видно на рисунку.



На відрізку $[0; 1]$ функція f кусково-диференційовна і неперервна на інтервалі $(0; 1)$. Тому згідно з теоремою 2 її можна розкласти в ряд Фур'є (22) на множині $\mathbb{R}$ за винятком точок $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$. У цих точках сума ряду Фур'є дорівнює $S_0 = \dfrac{f(n+0) + f(n-0)}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Знайдемо коефіцієнти розкладу функції в ряд Фур'є. Маємо

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xdx = x^2\Big|_0^1 = 1;$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x dx = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^1 xd\sin 2n\pi x =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big(x\sin 2n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin 2n\pi x dx\Big) = \frac{1}{n\pi}\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi^2}(1-1) = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2n\pi x dx = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 xd\cos 2n\pi x =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\Big(x\cos 2n\pi x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \cos 2n\pi x dx\Big) = -\frac{1}{n\pi}\Big(1 - \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1\Big) =$$

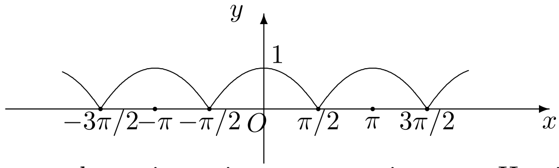
$$= -\frac{1}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \ ►$$

Приклад 7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |\cos x|$, $x \in \mathbb{R}$.

◄ Графік функції зображено на рисунку.



Задана функція періодична з періодом π. На відрізку $\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big]$ функція f є кусково-диференційовною і неперервною. Тому вона розкладається в ряд Фур'є в довільній точці $x \in \mathbb{R}$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є. Оскільки функція парна, $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, а

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} |\cos x| \cos 2nx dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2nx \cos x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{2n+1} + \frac{\sin(\pi n - \frac{\pi}{2})}{2n-1}\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos n\pi}{2n+1} - \frac{\cos n\pi}{2n-1}\Big) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

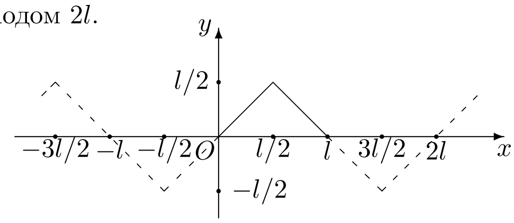
Тому шуканий розклад має вигляд

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx, \quad x \in \mathbb{R}. \ ►$$

Приклад 8. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x \le l, l \text{ — деяке додатне число.} \end{cases}$$

◀ Згідно з умовою функція f визначена на відрізку $[0; l]$, а тому щоб одержати розклад цієї функції в ряд Фур'є за синусами, треба продовжити її на відрізок $[-l; 0]$ непарно, а далі на всю числову вісь періодично з періодом $2l$.



Продовження $\tilde{f}$ на відрізку $[-l; l]$ є непарною, неперервною і кусково-диференційовною функцією, а тому вона розкладається в ряд Фур'є за синусами. На відрізку $[0; l]$ сума цього ряду збігається з функцією $f(x)$. Знайдемо коефіцієнти цього розкладу. Маємо $a_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{2}{l}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{l/2} xd\cos\frac{n\pi x}{l} - \frac{2}{n\pi}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)d\cos\frac{n\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big(x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2} - \int\limits_0^{l/2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\Big) - \frac{2}{n\pi}\Big((l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l} +$$

$$+ \int\limits_{l/2}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\Big) = -\frac{2}{n\pi}\Big(\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}\Big) -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\Big(-\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}\Big) = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} +$$

$$+\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, що коли n є парним, тобто $n = 2k$, то $b_n = \frac{l}{k^2\pi^2}\sin k\pi = 0$. Якщо ж n – непарне, тобто $n = 2k-1$, то $b_n = \frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = \frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}\cos k\pi = \frac{(-1)^{k+1}4l}{(2k-1)^2\pi^2}$, $k\in\mathbb{N}$.

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l},\quad x\in[0;l].\ \blacktriangleright$$

Зауваження. Якщо порівнювати розклад функції в степеневий ряд із розкладом її в ряд Фур'є, то останній має істотні переваги. Це пов'язано з тим, що при розкладі в ряд Фур'є достатньо кускової диференційовності і неперервності функції у той час, як для розкладу в степеневий ряд, взагалі кажучи, мало навіть нескінченної диференційовності. Тому клас функцій, які розкладаються в ряд Фур'є значно ширший, ніж клас функцій, які розкладаються в степеневий ряд.

3.4. Подвійні ряди Фур'є. Аналогічно, як і для випадку функції однієї змінної, введемо поняття ряду Фур'є функції двох змінних.

Нехай $P = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in[a;b], y\in[c;d]\}$. Розглянемо сукупність $R(P)$ всіх інтегровних на цьому прямокутнику функцій двох змінних. Зокрема, всі неперервні функції належать до цієї сукупності. Простір $R(P)$ є лінійним простором, а добуток двох інтегровних функцій є знову інтегровною функцією, тобто належить $R(P)$.

У просторі $R(P)$ введемо поняття **скалярного добутку** (f,g) функцій f і g, а саме:

$$(f,g)=\iint\limits_P f(x,y)g(x,y)dxdy. \tag{27}$$

Легко можна переконатися, що, введений за допомогою формули (27) скалярний добуток, має такі самі властивості 1)

– 4), як скалярний добуток інтегровних на відрізку функцій однієї змінної, що описані в пункті 3.1.1.

Функції $f \in R(P)$ і $g \in R(P)$ називаються **ортогональними**, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(f, g) = 0$.

Розглянемо випадок, коли $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\pi; \pi], y \in [-\pi; \pi]\}$ або $P = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; a + 2\pi], y \in [b; b + 2\pi]\}$, де a, b – деякі дійсні числа. Якщо скористатися рівностями (4), то легко можна довести ортогональність системи функцій

$$1, \cos mx, \sin mx, \cos ny, \sin ny, \cos mx \cos ny, \sin mx \cos ny,$$
$$\cos mx \sin ny, \sin mx \sin ny, \quad \{m, n\} \subset \mathbb{N}, \tag{28}$$

у просторі $R(P)$.

Наприклад,

$$\iint\limits_P 1\, \cos mx dx dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \Big) dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 0 dy = 0, m \in \mathbb{N};$$

$$\iint\limits_P 1\, \sin ny dx dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin ny dy \Big) dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 0 dx = 0, n \in \mathbb{N};$$

$$\iint\limits_P (\cos kx \cos my)(\cos lx \cos ny) dx dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx \times$$
$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos my \cos ny dy = 0, k \neq l \quad \text{або} \quad m \neq n \tag{29}$$

і т.д.

Аналогічно одержуємо, що

$$\iint\limits_P 1 dx dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 4\pi^2;$$

$$\iint\limits_P \cos^2 mxdxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx \Big) dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi dy = 2\pi^2, m \in \mathbb{N};$$

$$\iint\limits_P \sin^2 nydxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nydy \Big) dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi dx = 2\pi^2, n \in \mathbb{N};$$

$$\iint\limits_P \cos^2 mx \cos^2 nydxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mxdx \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nydy = \pi^2,$$

$\{m, n\} \subset \mathbb{N}$;

$$\iint\limits_P \sin^2 mx \sin^2 nydxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nydy = \pi^2,$$

$\{m, n\} \subset \mathbb{N}$;

$$\iint\limits_P \sin^2 mx \cos^2 nydxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mxdx \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nydy = \pi^2, \quad (30)$$

$\{m, n\} \subset \mathbb{N}$.

За допомогою тригонометричної системи функцій (28) побудуємо **подвійний тригонометричний ряд**

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}(a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny +$$

$$+c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny), \quad (31)$$

$(x; y) \in \mathbb{R}^2$, де

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & m = n = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & m > 0, n = 0, \text{ або } m = 0, n > 0, \\ 1, & m > 0, n > 0, \end{cases}$$

а a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn} – задані числа, які називаються коефіцієнтами ряду.

Наведемо спочатку деякі факти з теорії подвійних числових рядів.

Подвійний числовий ряд має вигляд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} l_{mn} \equiv \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} l_{mn}, \tag{32}$$

де $\{l_{mn},\ \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+\}$ – задана числова послідовність. Вираз

$$A_{rs} = \sum_{m=0}^{r}\sum_{n=0}^{s} l_{mn} \equiv l_{00}+l_{10}+\ldots+l_{r0}+l_{01}+l_{02}+\ldots+l_{0s}+l_{11}+\ldots+$$

$$+l_{rs}, \{r,s\} \subset \mathbb{N},$$

називається частинною сумою ряду (32).

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ s\to\infty}} A_{rs} = A$, то ряд (32) називається **збіжним**, а число A – **сумою** цього ряду і записують це так: $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} l_{mn} = A$. Якщо ж границя $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ s\to\infty}} A_{rs} = \infty$ або не існує, то подвійний ряд (32) називають **розбіжним** і вважають, що він у цьому випадку не має суми.

Легко бачити, що коли $l_{mn} = p_m q_n$, $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, то подвійний ряд (32) збіжний тоді й тільки тоді, коли збіжні ряди $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$. При цьому правильна рівність $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} l_{mn} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$.

Якщо зафіксувати точку $(x;y) \in P$, поклавши $(x;y) = (x_0;y_0) \in P$, то функціональний ряд (31) стане числовим рядом, який може бути як збіжним, так і розбіжним. У першому випадку точка $(x_0;y_0)$ називається точкою збіжності ряду (31), а у другому випадку – точкою розбіжності. Надалі вивчатимемо поточкову збіжність ряду (31), тобто збіжність у кожній точці $(x;y) \in P$.

Нехай ряд (31) є збіжним у кожній точці $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ і $f(x,y)$ є його сумою, тобто

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}(a_{mn}\cos mx \cos ny + b_{mn}\sin mx \cos ny +$$

$$+c_{mn}\cos mx \sin ny + d_{mn}\sin mx \sin ny), \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (33)$$

Функція f є 2π-періодичною відносно x при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}$ і 2π-періодичною відносно y при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$f(x+2\pi, y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x, y+2\pi) = f(x,y),\ y \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що сума $f(x,y)$ ряду (33) є інтегровною функцією на $P = \{(x;y) : x \in [-\pi;\pi], y \in [-\pi;\pi]\}$. Вважаючи, що ряд (33) збігається рівномірно на P, проінтегруємо обидві частини рівності (33)

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\Big(a_{mn}\iint\limits_P \cos mx \cos ny dxdy +$$

$$+b_{mn}\iint\limits_P \sin mx \cos ny dxdy + c_{mn}\iint\limits_P \cos mx \sin ny dxdy +$$

$$+d_{mn}\iint\limits_P \sin mx \sin ny dxdy\Big).$$

Якщо скористатися рівностями (29) і (30), то одержимо

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \lambda_{00}a_{00}\iint\limits_P 1\, dxdy = a_{00}\pi^2,$$

звідки випливає, що

$$a_{00} = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_P f(x,y)dxdy. \qquad (34)$$

Для того щоб знайти коефіцєнт a_{rs}, помножимо обидві частини рівності (33) на $\cos rx \cos sy$, проінтегруємо по області P і скористаємося рівностями (29) і (30). Тоді дістанемо, що

$$\iint\limits_P f(x,y)\cos rx\cos sy dxdy = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}\Big(a_{mn}\iint\limits_P \cos mx \cos ny \times$$

$$\times \cos rx \cos sy dxdy + b_{mn}\iint\limits_P \sin mx\cos ny\cos rx\cos sy dxdy +$$

$$+c_{mn}\iint\limits_P \cos mx\sin ny\cos rx\cos sy dxdy + d_{mn}\iint\limits_P \sin mx\sin ny \times$$

$$\times \cos rx\cos sy dxdy\Big)$$

або

$$\iint\limits_P f(x,y)\cos rx\cos sy dxdy = \lambda_{rs}a_{rs}\iint\limits_P \cos^2 rx\cos^2 sy dxdy =$$

$$= \pi^2 a_{rs}.$$

Звідси випливає, що

$$a_{rs} = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_P f(x,y)\cos rx\cos sy dxdy. \tag{35}$$

Формули (34) і (35) можна об'єднати, записавши їх у вигляді

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_P f(x,y)\cos mx\cos ny dxdy,\ \{m,n\}\subset \mathbb{Z}_+. \tag{36}$$

Аналогічно одержуються формули для знаходження інших коефіцієнтів ряду Фур'є (33):

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_P f(x,y)\sin mx\cos ny dxdy, \tag{37}$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_P f(x,y) \cos mx \sin ny dxdy, \tag{38}$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_P f(x,y) \sin mx \sin ny dxdy, \ \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{39}$$

Очевидно, що в ряді (33) множник λ_{mn} підібрано так, щоб формули (35) – (39) мали подібний вигляд.

Ряд (31), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (36) – (39), називається **подвійним рядом Фур'є**, побудованим для 2π-періодичної по кожній змінній та інтегровної в області $P = \{(x;y) : x \in [-\pi;\pi], y \in [-\pi;\pi]\}$ функції $f(x,y)$. Сформулюємо найпростіші достатні умови розкладу функції у подвійний ряд Фур'є (31).

Теорема 3. *Нехай функція $f(x,y)$ є 2π-періодичною по кожній змінній та інтегровна в квадраті $P = \{(x;y) : \ x \in [-\pi;\pi], y \in [-\pi;\pi]\}$ або в будь-якому з таких квадратів $P = \{(x;y) : \ x \in [a;a+2\pi], y \in [b;b+2\pi]\}$, де $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$. Якщо f неперервна в $\mathbb{R}^2$, а в квадраті P має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, то її подвійний ряд Фур'є збігається до $f(x,y)$ у кожній точці $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, тобто*

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn}(a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny +$$

$$+ c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny), \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2, \tag{40}$$

де коефіцієнти Фур'є a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn} знаходяться за формулами (36) – (39).

Якщо функція $f(x,y)$ не є 2π-періодичною відносно кожної із змінних і визначена лише на квадраті $P = \{(x;y) : \ x \in [-\pi;\pi], y \in [-\pi;\pi]\}$, то аналогічно, як і для функції однієї змінної, періодично продовжимо її на всю площину $\mathbb{R}^2$ по кожній змінній при фіксованій іншій з періодом 2π. Якщо для продовженої функції $\tilde{f}(x,y)$ виконуються умови теореми 3, то для неї має місце розклад в подвійний ряд Фур'є. Цей ряд має своєю сумою $f(x,y)$ у кожній внутрішній точці $(x;y) \in P$.

Приклад 9. Розкласти в подвійний ряд Фур'є функцію $f(x,y) = xy$, $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$.

◀ Продовжимо задану функцію за неперервністю на весь квадрат $P = \{(x;y): \ -\pi \le x \le \pi, -\pi \le y \le \pi\}$, поклавши $f(x,y) = xy$, $(x;y) \in P$, а далі 2π-періодично по кожній із змінних на всю площину $\mathbb{R}^2$. У внутрішніх точках квадрата P функція f є неперервною разом з частинними похідними $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ і $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, а тому, згідно з теоремою 3, вона розкладається у подвійний ряд Фур'є всередині області P.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є для функції $f(x,y) = xy$, скориставшись формулами (36) – (39), а також тим, що функції $x\cos mx$ і $y\cos ny$ – непарні на $[-\pi;\pi]$, а тому $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos mx dx = 0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\cos ny dy = 0$:

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} xy\cos mx\cos ny dx\Big)dy = \frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos mx dx\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\cos ny dy = 0;$$

$$b_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} xy\sin mx\cos ny dy\Big)dx = \frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin mx dx\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\cos ny dy = 0;$$

$$c_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} xy\cos mx\sin ny dy\Big)dx = \frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos mx dx\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\sin ny dy = 0, \{m,n\} \subset \mathbb{Z}.$$

З формули (39) випливає, що коли принаймні один із коефіцієнтів m або n дорівнює нулю, то $d_{mn} = 0$. Залишилося знайти $d_{m,n}$, коли $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$. Маємо

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} xy \sin mx \sin ny dx \Big) dy = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny dy = \frac{1}{\pi^2 mn} \int_{-\pi}^{\pi} x d \cos mx \int_{-\pi}^{\pi} y d \cos ny =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 mn} \Big(x \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \Big) \Big(y \cos ny \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny dy \Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 mn} \Big((-1)^m 2\pi - \frac{\sin mx}{m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \Big) \Big((-1)^n 2\pi - \frac{\sin ny}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \Big) =$$

$$= \frac{4\pi^2}{\pi^2 mn} (-1)^{m+n} = \frac{4}{mn} (-1)^{m+n}, \quad \{m, n\} \subset \mathbb{N}.$$

Отже, розклад функції $f(x, y) = xy$ в ряд Фур'є має вигляд

$$xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \sin ny}{mn}, \quad \{x, y\} \subset (-\pi; \pi). \qquad (41)$$

Розклад (41) можна одержати іншим методом. Для цього скористаємося розкладом

$$x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin mx, \quad x \in (-\pi; \pi),$$

який одержано в прикладі 3.

Правильним є також розклад

$$y = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin ny, \quad y \in (-\pi; \pi).$$

Якщо перемножити ці ряди, то одержимо розклад

$$xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+2}}{mn} \sin mx \sin ny, \quad \{x, y\} \subset (-\pi; \pi),$$

який збігається з розкладом (41). ►

У застосуваннях важливу роль відіграють подвійні ряди Фур'є, коли функція $f(x,y)$ має різні періоди відносно змінних x і y. Нехай функція $f(x,y)$ визначена на $\mathbb{R}^2$ і має період $2p$ по змінній x, тобто $f(x+2p,y)=f(x,y)$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$, а по змінній y – період $2q$, тобто $f(x,y+2q)=f(x,y)$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Припустимо, що функція f є інтегровною в прямокутнику $Q=\{(x;y)\ :\ x\in[-p;p], y\in[-q;q]\}$ або в прямокутнику $Q=\{(x;y)\ :\ x\in[a;a+2p], y\in[b;b+2q]\}$, де $\{a,b\}\subset\mathbb{R}$. Подвійний тригонометричний ряд вигляду

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{mn}\Big(a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}+b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}+$$

$$+c_{mn}\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}+d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\Big),\qquad(42)$$

де λ_{mn} такі, як в (31), а коефіцієнти a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} і d_{mn} є коефіцієнтами Фур'є, що обчислюються за формулами

$$a_{mn}=\frac{1}{pq}\iint\limits_{P}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}dxdy,$$

$$b_{mn}=\frac{1}{pq}\iint\limits_{P}f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}dxdy,$$

$$c_{mn}=\frac{1}{pq}\iint\limits_{P}f(x,y)\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy,$$

$$b_{mn}=\frac{1}{pq}\iint\limits_{P}f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}dxdy,\quad\{m,n\}\subset\mathbb{Z}_+,$$

називається **рядом Фур'є**, побудованим за функцією $f(x,y)$, $(x;y)\in Q$.

Якщо додатково припустити, що $f(x,y)$ неперервна в $\mathbb{R}^2$ і має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ в прямокутнику Q, то правильною є рівність

$$f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{mn}\Big(a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}+b_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\cos\frac{n\pi y}{q}+$$

$$+c_{mn}\cos\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}+d_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\Big),\quad (x;y)\in\mathbb{R}^2. \tag{44}$$

У випадку, коли функція f визначена лише в прямокутнику Q, то рівність (44) правильна в усіх внутрішніх точках $(x;y)$ прямокутника Q.

Приклад 10. Розкласти в подвійний ряд Фур'є функцію $f(x,y)=x^2y$, $x\in(-1;1)$, $y\in(-2;2)$.

◄ Задамо функцію f в прямокутнику $Q=\{(x,y)\,:\,x\in[-1;1], y\in[-2;2]\}$ тим самим аналітичним виразом $f(x,y)=x^2y$. Тоді вона є неперервною і має неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$ і $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x$ в Q, а тому розкладається у подвійний ряд Фур'є (42) в прямокутнику Q, де $p=1$, $q=2$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є цього розкладу, скориставшись формулами (43).

Маємо

$$a_{mn}=\frac{1}{2}\iint\limits_P x^2y\cos m\pi x\cos\frac{n\pi y}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^2\cos m\pi x dx\times$$

$$\times\int\limits_{-2}^{2}y\cos\frac{n\pi y}{2}dy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^2\cos m\pi x dx\int\limits_{-2}^{2}y\cos\frac{n\pi y}{2}dy=0;$$

$$b_{mn}=\frac{1}{2}\iint\limits_P x^2y\sin m\pi x\cos\frac{n\pi y}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^2\sin m\pi x dx\times$$

$$\times\int\limits_{-2}^{2}y\cos\frac{n\pi y}{2}dy=0, \{m,n\}\subset\mathbb{Z},$$

бо функція $y\cos\frac{n\pi y}{2}$ непарна на $[-2;2]$, а тому $\int\limits_{-2}^{2}y\cos\frac{n\pi y}{2}dy=0$;

$$d_{mn}=\frac{1}{2}\iint\limits_P x^2y\cos m\pi x\sin\frac{n\pi y}{2}dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^2\sin m\pi x dx\times$$

$$\times \int\limits_{-2}^{2} y \cos \frac{n\pi y}{2} dy = 0, \{m, n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

оскільки функція $x^2 \sin m\pi x$ непарна на $[-1;1]$, а тому $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \sin m\pi x dx = 0.$

Знайдемо коефіцієнти c_{mn}. Нехай $n = 0$, а m – довільне, тоді

$$c_{m0} = \frac{1}{2} \iint\limits_{P} x^2 y \cos m\pi x \sin \frac{0\,\pi y}{2} dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos m\pi x dx \times$$

$$\times \int\limits_{-2}^{2} y \cdot 0 dy = 0, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Якщо $m = 0$, а n – довільне, то

$$c_{0n} = \frac{1}{2} \iint\limits_{P} x^2 y \cos 0\pi x \sin \frac{n\pi y}{2} dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx \int\limits_{-2}^{2} y \sin \frac{n\pi y}{2} dy =$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} \Big(-\frac{2}{n\pi} \int\limits_{-2}^{2} y d \cos \frac{n\pi y}{2} \Big) = -\frac{2}{3n\pi} \Big(y \cos \frac{n\pi y}{2}\Big|_{-2}^{2} - \int\limits_{-2}^{2} \cos \frac{n\pi y}{2} dy \Big) =$$

$$= -\frac{2}{3n\pi} \Big(4(-1)^n - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{2}\Big|_{-2}^{2} \Big) = \frac{8(-1)^{n+1}}{3n\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

У випадку, коли $\{m, n\} \subset \mathbb{N}$, маємо

$$c_{mn} = \frac{1}{2} \iint\limits_{P} x^2 y \cos m\pi x \sin \frac{n\pi y}{2} dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos m\pi x dx \times$$

$$\times \int\limits_{-2}^{2} y \sin \frac{n\pi y}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} \frac{1}{mn} \int\limits_{-1}^{1} x^2 d \sin m\pi x dx =$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{mn\pi^2} \Big(x^2 \sin m\pi x\Big|_{-1}^{1} - 2 \int\limits_{-1}^{1} x \sin m\pi x dx \Big) =$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1}}{m^2 n\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} x d\cos m\pi x = \frac{8(-1)^{n+1}}{m^2 n\pi^2} \Big(x\cos m\pi x \Big|_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1} \cos m\pi x dx \Big) =$$

$$= \frac{8(-1)^{n+1}}{m^2 n\pi^2} \Big(2(-1)^m - \frac{\sin m\pi x}{m\pi} \Big|_{-1}^{1} \Big) = \frac{16(-1)^{m+n+1}}{m^2 n\pi^3}, \{m,n\} \subset \mathbb{N}.$$

Отже, розклад заданої функції в подвійний ряд Фур'є має вигляд

$$x^2 y = \frac{8}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{n\pi y}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+1}}{m^2 n} \cos m\pi x \sin\frac{nxy}{2},$$

$$x \in (-1;1), y \in (-2;2).$$

Аналогічно як і в прикладі 9 цей розклад можна одержати, коли перемножити ряди Фур'є для функцій $\varphi(x) = x^2$, $x \in (-1;1)$ і $\psi(y) = y$, $y \in (-2;2)$. ►

Вправи

1. Довести, що наведені нижче функції є ортогональними у відповідному просторі функцій:
1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots$ в $R([0;\pi])$;
2) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$ в $R([0;\pi])$;
3) $\sin x, \sin 3x, \ldots, \sin(2n+1)x, \ldots$ в $R\Big(\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]\Big)$;
4) $1, \cos\dfrac{\pi x}{l}, \sin\dfrac{\pi x}{l}, \cos\dfrac{2\pi x}{l}, \sin\dfrac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\dfrac{n\pi x}{l}, \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ в $R\Big(\Big[-\dfrac{l}{2};\dfrac{l}{2}\Big]\Big)$, $l>0$;
5) $1, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 4\pi x, \sin 4\pi x, \ldots, \cos 2n\pi x, \sin 2n\pi x, \ldots$ в $R(0;1)$;
6) $1, \cos\dfrac{\pi x}{l}, \cos\dfrac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\dfrac{n\pi x}{l}, \ldots$ в $R([0;l])$, $l>0$;
7) $\sin\dfrac{\pi x}{l}, \sin\dfrac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\dfrac{n\pi x}{l}, \ldots$ в $R([0;l])$, $l>0$;
8) $1, \cos\dfrac{\pi x}{2l}, \cos\dfrac{3\pi x}{2l}, \ldots, \cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}, \ldots$ в $R([0;l])$, $l>0$;
9) $\sin\dfrac{\pi x}{2l}, \sin\dfrac{3\pi x}{2l}, \ldots, \sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}, \ldots$ в $R([0;l])$, $l>0$.

2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ і скориставшись цим розкладом знайти суму числового ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

3. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = |\sin x|$ і за допомогою одержаного ряду знайти суми числових рядів $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)^2}$ і $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k-1)^2}$.

4. Пропоновані нижче функції розкласти в ряд Фур'є на заданому проміжку:
1) $f(x) = x^2$ на $(0;2\pi)$;
2) $f(x) = ax^2+bx+c$ на $(-\pi;\pi)$;
3) $f(x) = ax^2+bx+c$ на $(0;2\pi)$;
4) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \le 0, \\ 3, & 0 < x < \pi \end{cases}$ на $(-\pi;\pi)$;
5) $f(x) = e^x - 1$ на $(0;2\pi)$;
6) $f(x) = \cos ax$, a – неціле число, на $(-\pi;\pi)$;
7) $f(x) = \sin ax$, a – неціле число, на $(-\pi;\pi)$.

5. Розкласти в ряд Фур'є функцію:
1) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < h, \\ 0, & h \le x < \pi \end{cases}$ за косинусами на $[0;\pi)$;

2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ за: а) косинусами; б) синусами на інтервалі $[0;\pi]$;

3) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ за синусами на інтервалі $(0;\pi)$.

6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|$ на інтервалі $(-1;1)$.

7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}a, & 0<x\le l,\\ 0, & l<x<2l,\end{cases}$ $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $l>0$.

8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^{ax}$ на інтервалі $(-l;l)$, $l>0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на інтервалі $(a;a+2l)$, $a\in\mathbb{R}$, $l>0$.

10. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=e^x$ на інтервалі $(0;\ln 2)$.

11. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=x^2$ на $(0;\pi)$.

12. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ 0, & \dfrac{l}{2}<x\le l, l>0.\end{cases}$

13. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0\le x\le\dfrac{l}{2},\\ 0, & \dfrac{l}{2}<x\le l, l>0.\end{cases}$

14. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\left|\cos\dfrac{\pi x}{l}\right|$, де $l>0$.

15. Розкласти в подвійний ряд Фур'є функцію $f(x,y)=xy$ в області $P=\{(x;y):\ x\in(0;2\pi), y\in(0;2\pi)\}$.

16. Розкласти в подвійний ряд Фур'є функцію $f(x,y)=\dfrac{(\pi-x)(\pi-y)}{4}$ в області $P=\{(x;y):\ x\in(-\pi;\pi), y\in(-\pi;\pi)\}$.

17. Розкласти в подвійний ряд Фур'є функцію $f(x,y)=x\dfrac{(\pi-y)^2}{4}$ в області $Q=\{(x;y):\ x\in(-1;1), y\in(-\pi;\pi)\}$.

Відповіді

2. $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $x \in [-\pi;\pi]$; $\dfrac{\pi^2}{8}$. **3.** $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$; $\dfrac{1}{2}$ і $\dfrac{2-\pi}{4}$. **4.** 1) $x^2 = \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in (0;2\pi]$; 2) $ax^2 + bx + c = \dfrac{a\pi^2}{3} + c + 4a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2} - 2b\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in (-\pi;\pi)$; 3) $ax^2 + bx + c = \dfrac{4a\pi^2}{3} + b\pi + c + 4a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2} - (4\pi a - 2b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in (0;2\pi)$; 4) $f(x) = 2 + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $x \in (-\pi;\pi)$, $x \neq 0$; 5) $e^x - 1 = \dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\Big(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{1+n^2} - \dfrac{n\sin nx}{1+n^2}\Big) - 1$, $x \in (0;2\pi)$, $x \neq 0$; 6) $\cos ax = \dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\Big(\dfrac{1}{2a} + a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos nx}{n^2-a^2}\Big)$, $x \in (-\pi;\pi)$; 7) $\sin ax = \dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n^2-a^2}$, $x \in (-\pi;\pi)$.

5. 1) $f(x) = \dfrac{2h}{\pi}\Big(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nh}{nh}\cos nx\Big)$, $x \in [0;\pi)$, $x \neq h$; 2) а) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\Big(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{1+n^2}\Big)$, $x \in [0;\pi]$; б) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1 - (-1)^n\dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\Big)\dfrac{n}{1+n^2}\sin nx$, $x \in [0;\pi]$; 3) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}\sin nx$, $x \in (0;\pi)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$.

6. $|x| = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $x \in [-1;1)$.

7. $f(x) = \dfrac{a}{2} - \dfrac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$, $x \in (0;2l)$, $x \neq l$.

8. $e^{ax} = \dfrac{e^{al} - e^{-al}}{2}\Big(\dfrac{1}{al} + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{al\cos\frac{\pi nx}{l} - \pi n\sin\frac{\pi nx}{l}}{(al^2) + (\pi n)^2}\Big)$, $x \in$

$(-l;l)$.

9. $x=a+l+\dfrac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\Big(\sin\dfrac{n\pi a}{l}\cos\dfrac{n\pi x}{l}-\cos\dfrac{n\pi a}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\Big)$, $x\in(a;a+2l)$.

10. $e^x=\dfrac{1}{\ln 2}+2\ln 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cos n\pi-1}{\ln^2 2+n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{\ln 2}$, $x\in(0;\ln 2)$.

11. $x^2=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{2}{n^3}((-1)^n-1)\Big)\sin nx$, $x\in(0;\pi)$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{l}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\dfrac{2\pi nx}{l}$, $x\in[0;l]$.

13. $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi x}{l}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\dfrac{2\pi nx}{l}$, $x\in[0;l]$, $x\neq\dfrac{l}{2}$.

14. $\Big|\cos\dfrac{\pi x}{l}\Big|=\dfrac{4}{\pi}\Big(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos\frac{2\pi nx}{l}}{4n^2-1}\Big)$, $x\in\mathbb{R}$.

15. $xy=\pi^2-2\pi\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}-2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n}+4\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}$, $(x;y)\in P$.

16. $\dfrac{(\pi-x)(\pi-y)}{4}=\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m}\sin mx+\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin ny+\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+n}}{mn}\sin mx\sin ny$, $(x;y)\in P$.

17. $\dfrac{x(\pi-y)^2}{4}=\dfrac{2\pi}{3}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}}{m}\sin\pi mx+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+n+1}}{mn^2}\sin\pi mx\cos\pi ny$, $(x;y)\in P$.

Розділ 14
Диференціальні рівняння

§1. Основні поняття про диференціальні рівняння

При розв'язуванні багатьох прикладних задач і вивченні закономірностей суспільних процесів одержують математичні моделі, в основі яких лежать диференціальні рівняння. **Диференціальним** називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну або змінні, шукану функцію та похідні різних порядків від цієї функції. При цьому рівняння може не містити у явному вигляді незалежну змінну (змінні) і шукану функцію, але обов'язково повинно містити одну або декілька похідних шуканої функції.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається **звичайним**, якщо ж від декількох – **рівнянням з частинними похідними**. Ми розглядатимемо тут тільки звичайні диференціальні рівняння.

У загальному випадку диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де F – деяка функція від $n+2$ змінних, $n \in \mathbb{N}$. Порядок n старшої похідної, яка входить в (1) називається **порядком** диференціального рівняння. Наприклад, рівняння $y' = 3x^2$, $y' - \sqrt{y} = 0$ – першого порядку; рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, $y'' - x^2 = y$ – другого порядку; рівняння $y^{(4)} + y'' \ln x = x$ – четвертого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, яка визначена і неперервна разом зі своїми похідними до порядку рівняння на проміжку X і така, що при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **задачею інтегрування** диференціального рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою** або **інтегральною лінією**.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = x^2$.

◀ Розв'язати це рівняння означає, що треба знайти функцію y, похідна якої дорівнює x^2. З інтегрального числення відомо, що такою функцією є $y = \dfrac{x^3}{3} + C$, де $C \in \mathbb{R}$. ▶

З прикладу 1 видно, що розв'язок рівняння визначається неоднозначно, тобто диференціальне рівняння визначає сім'ю інтегральних ліній на площині. Для виділення конкретного розв'язку треба задати додаткову умову. Цією умовою є $y(x_0) = y_0$, або умова того, що інтегральна лінія проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) n-го порядку називається такий його розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{2}$$

який є функцією змінної x і n довільних незалежних сталих C_1, C_2, …, C_n, тобто сталих, що не зв'язані між собою жодними співвідношеннями.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при деяких конкретних числових значеннях сталих C_1, C_2, …, C_n.

У наступних параграфах ми уточнимо поняття загального і частинного розв'язків диференціального рівняння, а також наведемо приклади математичних моделей деяких явищ, які описуються диференціальними рівняннями.

§2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її першу похідну. В загальному випадку його можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, y' – її похідна, а F – відома функція своїх аргументів.

Рівняння (3) може не містити у явному вигляді x і y, але обов'язково містить y'.

Розв'язуючи рівняння (3), якщо це можливо, відносно y', дістанемо

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

Рівняння (4) називається **рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної**.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x)$, яка неперервна разом із своєю похідною на проміжку X і при підстановці її в рівняння, перетворює його в тотожність, тобто

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Як випливає з прикладу 1 з §1, сукупність розв'язків диференціального рівняння першого порядку містить довільну сталу, змінюючи яку ми одержуватимемо різні розв'язки рівняння. Для виділення з цієї множини конкретного розв'язку треба задати деяку додаткову умову, а саме:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y(x)|_{x=x_0} = y_0, \tag{5}$$

яка називається **початковою умовою**.

В теорії диференціальних рівнянь основними є питання існування та єдиності розв'язку. Відповідь на нього дає теорема Коші, яка наведена нижче.

Теорема (теорема Коші). *Якщо права частина f рівняння (4) та її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ визначені й неперервні* *у деякій області* Ω *зміни* x *і* y*, то задача (4), (5) має єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$*, якщо* $(x_0; y_0) \in \Omega$.

Геометрично це означає, що через кожну внутрішню точку $(x_0; y_0)$ області Ω проходить єдина інтегральна крива.

Задача (4), (5), тобто задача, у якій треба знайти розв'язок рівняння (4), що задовольняє початкову умову (5), називається **задачею Коші**.

Якщо умови теореми Коші не виконуються у деяких точках $(x; y)$, то ці точки називаються **особливими точками диференціального рівняння**. У цих точках є розривною або функція f або її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Через кожну таку точку може проходити декілька інтегральних кривих, або не проходити жодна.

Дамо означення загального й частинного розв'язків рівняння (4), права частина f якого задовольняє у деякій області Ω умови теореми Коші.

Функція $y = \varphi(x, C)$ називається **загальним розв'язком** рівняння (4) в області Ω, якщо вона задовольняє умови:

1) при будь-яких значеннях сталої C, які належать деякій множині, функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння (4);

2) яка б не була точка $(x_0; y_0) \in \Omega$ існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову (5).

Значення $C = C_0$ знаходиться з умови $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ рівняння (4), який одержується із загального розв'зку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значення $C = C_0$, називається **частинним розв'язком**.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у вигляді, не розв'язаному відносно y, тобто у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то він називається **загальним інтегралом диференціального рівняння**.

Перейдемо тепер до розгляду методів розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Взагалі кажучи, не існує єдиного методу знаходження розв'язків рівняння (4) для довільної правої частини f. Тому ми розглянемо методи розв'язування (методи інтегрування) цього рівняння лише у деяких частинних випадках.

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. Диференціальне рівняння першого порядку називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y). \tag{6}$$

Права частина рівняння (6) є добутком двох множників, кожний з яких є функцією тільки одного аргументу.

Перепишемо рівняння (6) у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y). \tag{7}$$

Помножимо обидві частини (7) на dx і поділимо на $f_2(y) \neq 0$, тоді одержимо

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{8}$$

У цьому рівнянні змінна x входить в праву частину, а змінна y – тільки в ліву, тобто змінні відокремлені.

Припустимо, що ми знайшли розв'язок $y(x)$ рівняння (7). Якщо цю функцію підставити в (8), то ми одержимо тотожність, де два диференціали дорівнюють один другому, тільки в правій частині диференціал виражений через x, а в лівій – через y. Оскільки диференціали однакові, то їхні невизначені інтеграли відрізняються на сталу величину, тобто, інтегруючи зліва по змінній y, а справа по змінній x, дістанемо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{9}$$

де C – довільна стала.

Вираз (9) є загальним інтегралом рівняння (6). У диференціальних рівняннях символ невизначеного інтеграла означає одну із первісних, а не сукупність усіх первісних.

Очевидно, що коли f_1 неперервна на $[a; b]$, а f_2 – неперервна на $[c; d]$ і $f_2(y) \neq 0$, $y \in [c; d]$, то інтеграли у формулі (9) існують.

Зауваження. При діленні обох частин рівняння (6) на $f_2(y)$, ми могли втратити розв'язки, при яких $f_2(y) = 0$. Справді, якщо $f_2(y_0) = 0$, то $y = y_0$ є розв'язком рівняння (6).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$.

◄ Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

і відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння (праву по x, а ліву по y), одержуємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

Потенціюючи, отримуємо

$$|y| = |C_1||x|,$$

що еквівалентне рівності $y = \pm C_1 x$. Покладаючи $\pm C_1 = C$, остаточно матимемо

$$y = Cx, \quad C \neq 0.$$

Це сукупність розв'язків заданого рівняння, але тут не міститься розв'язок $y = 0$, який ми втратили при відокремленні змінних. Його можна включити в одержану сукупність, якщо вважати, що C набуває також значення $C = 0$. Тоді загальним розв'язком рівняння є $y = Cx$, де $C \in \mathbb{R}$. ►

Приклад 2. Тіло охололо за 10 хв. від 100^0 до 60^0. Температура оточуючого середовища стала і дорівнює 10^0. Знайти, через скільки хвилин температура тіла дорівнюватиме 20^0.

◄ Позначимо через $f(t)$ температуру тіла в момент часу t, тоді швидкість зміни температури дорівнює $\dfrac{df(t)}{dt}$. Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла й оточуючого середовища, то дістанемо рівняння

$$\frac{df}{dt} = k(f - 10),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Відокремивши змінні, отримаємо рівність

$$\frac{df}{f-10} = kdt.$$

Інтегруючи, дістаємо:

$$\ln|f-10| = kt + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$|f-10| = C_1 e^{kt}, \quad f - 10 = \pm C_1 e^{kt}.$$

Якщо позначити $\pm C_1$ через C, то одержимо загальний розв'язок рівняння

$$f = 10 + Ce^{kt}, \quad \text{де } C \in \mathbb{R}.$$

Тут ми включили і $C = 0$, оскільки $f = 10$ є розв'язком рівняння.

Для виділення частинного розв'язку скористаємося початковою умовою $f(0) = 100^0$, тоді $Ce^{k\cdot 0} + 10 = 100$, звідки $C = 90$. Отже, частинним розв'язком є функція

$$f(t) = 10 + 90e^{kt}.$$

Цей розв'язок містить невідомий множник k. Для його визначення скористаємося тим, що $f(10) = 60^0$. Тоді $60 = 10 + 90e^{kt}$, звідки $e^{10k} = \dfrac{5}{9}$. Отже, шуканий розв'язок рівняння має вигляд

$$f(t) = 90\left(e^{10k}\right)^{\frac{t}{10}} + 10 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} + 10.$$

Для відповіді на питання, через який час тіло охолоне до 20^0, дістанемо рівняння

$$20 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} + 10,$$

або

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Прологарифмувавши, одержимо

$$t = \frac{10\lg 9}{\lg 9 - \lg 5} \approx 37,4 \text{ хв.} \blacktriangleright$$

Приклад 3. Скласти математичну модель природного росту випуску продукції і знайти функцію, що описує цей ріст.

◀ Нехай деяка продукція продається за фіксованою ціною p. Позначимо через $f(t)$ кількість продукції, реалізованої на момент часу t. Тоді на цей момент матимемо доход, що дорівнює $pf(t)$. Нехай частина вказаного доходу витрачається на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто

$$I(t) = mpf(t), \tag{10}$$

де m – норма інвестицій, $0 < m < 1$.

Якщо припустити, що ринок не насичений, тобто продукція реалізується повністю, то в результаті розширення виробництва буде одержано доход, частина якого знову використовуватиметься для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску (акселерації), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$f'(t) = lI(t), \tag{11}$$

де $\dfrac{1}{l}$ – норма акселерації. Підставивши (11) у (10), дістанемо

$$f'(t) = kf(t), \tag{12}$$

де $k = lmp$. Отже, процес природного росту випуску продукції описується диференціальним рівнянням (12), яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Оскільки в початковий момент часу t_0 випуск продукції дорівнював f_0, то маємо початкову умову

$$f(t_0) = f_0. \tag{13}$$

Задача (12), (13) є математичною моделлю природного росту випуску продукції.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (12), відокремивши змінні та проінтегрувавши одержану рівність:

$$\frac{df}{f} = kdt,$$

$$\int \frac{df}{f} = k \int dt + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\ln|f| = kt + \ln|C_1|, \quad f(t) = \pm C_1 e^{kt}.$$

Включивши сюди розв'язок $f = 0$, дістанемо загальний розв'язок рівняння
$$f(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Якщо задовольнити цієї функцією умову (13), то одержимо рівняння для знаходження C:
$$f_0 = Ce^{kt_0}, \quad \text{звідки } C = f_0 e^{-kt_0}.$$

Підставивши це значення C в (14), отримаємо розв'язок задачі (12), (13):
$$f(t) = f_0 e^{k(t-t_0)}. \blacktriangleright \tag{15}$$

Зауваження. Математичні моделі мають властивість загальності. Зокрема, формулою (15) описуються процес розмноження бактерій, процес радіоактивного розпаду та деякі інші явища й процеси.

До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння вигляду
$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16}$$
яке називається **однорідним**.

Запишемо рівняння (16) у вигляді
$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$
і зробимо заміну
$$\frac{y}{x} = z. \tag{17}$$
Тоді $y = zx$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}x + z$, а тому рівняння набуде вигляду
$$\frac{dz}{dx}x + z = \varphi(z),$$
або
$$\frac{dz}{dx}\, x = \varphi(z) - z.$$

Відокремимо змінні,
$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}, \quad \varphi(z) - z \not\equiv 0$$

і проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C. \qquad (18)$$

Знайшовши інтеграл у лівій частині (18), і повернувшись до змінної y, дістанемо загальний розв'язок рівняння (16). При цьому треба також перевірити, чи не втрачено розв'язок, коли $\varphi(z) - z = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(xy + y^2)dx - x^2 dy = 0.$$

◄ Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Зробивши заміну $y = z\ x$, $y' = z'\ x + z$, дістанемо рівняння

$$\frac{dz}{dx}\ x + z = z + z^2,$$

$$\frac{dz}{dx}\ x = z^2.$$

Відокремивши змінні й проінтегрувавши, матимемо

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}, \quad z \neq 0, \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln|C|, \quad -\frac{1}{z} = \ln|Cx|, \quad C \neq 0.$$

Якщо повернутись до змінної y, то одержимо сукупність розв'язків нашого рівняння

$$y = -\frac{x}{\ln|Cx|}, \quad C \neq 0.$$

Оскільки при відокремленні змінних ми ділили на z, то могли втратити розв'язок $z = 0$ або $y = 0$. Підставивши $y = 0$ у вихідне рівняння, одержимо тотожність, а це означає, що $y = 0$

є розв'язком рівняння. Цей розв'язок не міститься у сукупності $y = -\dfrac{x}{\ln|Cx|}$, $C \neq 0$, а тому його треба дописати. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = -\frac{x}{\ln|Cx|}, \quad C \neq 0, \quad y = 0. \quad ►$$

2.2. Лінійні рівняння першого порядку. Диференціальне рівняння першого порядку називається **лінійним**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{19}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані функції, які визначені й неперервні на відрізку $[a;b]$.

Назва рівняння пояснюється тим, що невідома функція y та її похідна y' входять в рівняння лінійно, тобто у першому степені.

Якщо $q(x) = 0$, $x \in [a;b]$, то рівняння (19) називається **лінійним однорідним** рівнянням, якщо ж $q(x) \neq 0$, $x \in [a;b]$, то – **лінійним неоднорідним**.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (19) скористаємося **методом варіації довільної сталої**.

Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y' = p(x)y, \tag{20}$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx, \quad \ln|y| = \int p(x)dx + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$y = C_1 e^{\int p(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки, відокремлюючи змінні, ми втратили розв'язок $y = 0$, то сукупність усіх розв'язків рівняння (20) має вигляд

$$y = Ce^{\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (19) у формулі (21) замість сталої C візьмемо деяку диференційовну функцію $z(x)$:

$$y = z(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{22}$$

Очевидно, що (22) буде розв'язком рівняння (19), коли

$$z'(x)e^{\int p(x)dx} + z(x)e^{\int p(x)dx}p(x) = p(x)z(x)e^{\int p(x)dx} + q(x),$$

або

$$z'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Звідси, проінтегрувавши, дістанемо

$$z(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Якщо підставити знайдену функцію z в (22), то одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = C_2e^{\int p(x)dx} + \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right)e^{\int p(x)dx}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

З формули (23) випливає, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку $C_2e^{\int p(x)dx}$ відповідного лінійного однорідного рівняння (20) і частинного розв'язку $\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}\right)e^{\int p(x)dx}$ лінійного неоднорідного рівняння (19).

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y' + 3y = e^{2x}.$$

◄ Розв'яжемо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y' + 3y = 0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$\frac{dy}{y} = -3dx, \quad \int\frac{dy}{y} = -3\int dx + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\ln|y| = -3x + \ln|C_1|, \quad y = C_1 e^{-3x}.$$

Оскільки ми, відокремлюючи змінні, ділили на y, то щоб не втратити розв'язок $y = 0$, вважатимемо, що C_1 може дорівнювати нулю, тобто

$$y = Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Шукатимемо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$y = z(x)e^{-3x}.$$

Після підстановки цієї функції в рівняння, одержимо

$$z'(x)e^{-3x} - z(x)e^{-3x}3 + 3z(x)e^{-3x} = e^{2x},$$

або $z'(x) = e^{5x}$.

Звідси випливає, що

$$z(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок нашого рівняння

$$y = C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

До лінійного рівняння зводиться рівняння вигляду

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \tag{24}$$

яке називається **рівнянням Бернуллі**.

Якщо $\alpha = 0$, то рівняння Бернуллі перетворюється у лінійне рівняння (19), а при $\alpha = 1$ воно переходить в рівняння з відокремлюваними змінними.

Вважаючи, що $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо обидві частини рівняння (24) на y^{α}. Тоді дістанемо рівняння

$$y^{-\alpha}y' = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \tag{25}$$

Зробимо підстановку $z(x) = y^{1-\alpha}$. Оскільки $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, то рівняння (25) набуде вигляду

$$z'(x) = (1-\alpha)p(x)z(x) + (1-\alpha)q(x),$$

а це означає, що рівняння (24) зведено до лінійного рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$xy'(x) = y(x) + y^2(x).$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x}y^2(x).$$

Це рівняння Бернуллі, де $\alpha = 2$. Тому зробимо заміну $z = \dfrac{1}{y}$. Тоді $z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$, а отже, рівняння набуде вигляду

$$z' + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Відповідне однорідне рівняння $z' + \dfrac{z}{x} = 0$ має розв'язок $z(x) = \dfrac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $z(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Тоді $z' = \dfrac{C'(x)}{x} - \dfrac{C(x)}{x^2}$, а тому матимемо рівняння для знаходження C:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{x},$$

або

$$C'(x) = -1.$$

Звідси випливає, що $C(x) = -x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Отже, $z(x) = \dfrac{C_1}{x} - 1$. Оскільки $z = \dfrac{1}{y}$, то $\dfrac{1}{y} = \dfrac{C_1}{x} - 1$, або $y = \dfrac{x}{C_1 - x}$. Це і є загальний розв'язок заданого рівняння. ▶

2.3. Рівняння в повних диференціалах. Розглянемо диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{26}$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

а тому воно є рівнянням першого порядку. Припустимо, що $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – функції, які неперервні разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$. Якщо ліва частина рівняння (26) є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{27}$$

то рівняння (26) називається **рівнянням в повних диференціалах** і його можна записати у вигляді

$$du(x,y) = 0.$$

Якщо функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (26), то $du(x,y(x)) \equiv 0$, і, отже,

$$u(x,y(x)) = C, \tag{28}$$

де C – стала, і навпаки, якщо деяка функція $y(x)$ перетворює в тотожність рівність (28), то, диференціюючи одержану тотожність, дістанемо $du(x,y) = 0$, і отже, $u(x,y) = C$, де C – довільна стала, є загальним інтегралом заданого рівняння (26).

У розділі 11, §2, теорема 5, доведено, що необхідною і достатньою умовою того, щоб ліва частина рівняння (26) була повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ в однозв'язній області D є виконання рівності

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \quad (x;y) \in D. \tag{29}$$

Якщо ця мова виконується, то функція $u(x,y)$ знаходиться за формулою

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(u,y_0)du + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,v)dv + C_1.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння (26) запишеться так:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(u,y_0)du + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,v)dv = C. \tag{30}$$

Очевидно, що цей загальний інтеграл можна знайти по-іншому. Якщо виконується умова (29), то

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

З іншого боку,

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Тому

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),$$

звідки випливає, що

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y). \tag{31}$$

При знаходженні інтеграла $\int P(x,y)dx$ величина y розглядається як стала, а тому стала інтегрування φ є функцією від y. Для визначення цієї функції продиференціюємо рівність (31) по y і прирівняємо до $Q(x,y)$. Тоді одержимо, що

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int P(x,y)dx\Big) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

З цього рівняння знайдемо $\varphi'(y)$, а проінтегрувавши, визначимо $\varphi(y)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = 0.$$

◄ Маємо $P(x,y) = x+y+1$, $Q(x,y) = x-y^2+3.$, Перевіримо виконання умови (29):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

Отже, задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Знайдемо його загальний інтеграл за формулою (30), де $x_0 = 0$ і $y_0 = 0$:

$$\int_0^x (u + 0 + 1)du + \int_0^y (x - v^2 + 3)dv = C.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\Big(\frac{u^2}{2} + u\Big)\Big|_0^x + \Big(xv - \frac{v^3}{3} + 3v\Big)\Big|_0^y = C$$

або

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

Розв'яжемо вихідне рівняння іншим методом.

Оскільки

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = x + y + 1,$$

то

$$u(x,y) = \int (x + y + 1)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y)$$

або

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + (y+1)x + \varphi(y).$$

Продиференціюємо цю функцію по y і прирівняємо до $Q(x,y) = x - y^2 + 3$:

$$x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3,$$

$$\varphi'(y) = 3 - y^2, \quad \varphi(y) = 3y - \frac{y^3}{3} + C_1.$$

Тоді

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + (y+1)x + 3y - \frac{y^3}{3} + C_1,$$

а тому загальним інтегралом рівняння є вираз

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C. \blacktriangleright$$

У деяких випадках, коли ліва частина рівняння (26) не є повним диференціалом, легко можна підібрати функцію $\mu(x,y)$, після множення на яку ліва частина рівняння перетворюється в повний диференціал

$$du = \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy.$$

Така функція μ називається **інтегрувальним множником**. Зауважимо, що множення на інтегрувальний множник μ може привести до появи зайвих частинних розв'язків, які перетворюють цей множник в нуль.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$xdx + ydy + (x^2+y^2)x^2dx = 0.$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$(x + x^2(x^2+y^2))dx + ydy = 0.$$

Маємо $P(x,y) = x + x^2(x^2+y^2)$, $Q(x,y) = y$, а тому

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x^2y - 0 = 2x^2y \neq 0.$$

Це означає, що рівняння не є рівнянням в повних диференціалах.

Очевидно, що після множення на функцію $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ ліва частина рівняння перетворюється у повний диференціал. Справді, після множення на $\mu = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ дістанемо

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + x^2dx = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x^2dx = 0.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, одержимо, $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \dfrac{x^3}{3} = \ln C_1$, $C_1 > 0$. Після множення на 2 і потенціювання, матимемо

$$(x^2+y^2)e^{\frac{2}{3}x^3} = C, \quad C > 0. ▶$$

Звичайно, не завжди інтегрувальний множник підбирається легко. У загальному випадку для знаходження інтегрувального множника треба підібрати принаймні один ненульовий частинний розв'язок рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

або
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\mu,$$
яке після ділення на μ і перенесення деяких доданків у другий бік рівності приводиться до вигляду
$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}P-\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Якщо наперед відомо, що $\mu=\mu(\omega)$, де ω – задана функція від x і y, то це рівняння зводиться до звичайного диференціального рівняння
$$\frac{d\ln\mu}{d\omega}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\frac{\partial\omega}{\partial y}}, \tag{28}$$
якщо ліва частина є функцією від ω.

Приклад 9. Проінтегрувати рівняння
$$xdx+ydy+xdy-ydx=0,$$
якщо відомо, що існує інтегрувальний множник вигляду $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

◀ Маємо $P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=x+y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1-1=-2$. Отже, рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Якщо $\omega=x^2+y^2$, то $Q\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-P\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=(x+y)2x-(x-y)2y=2(x^2+y^2)$, а тому права частина рівняння (28) є функцією від $\omega=x^2+y^2$:
$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{-2}{2(x^2+y^2)}=-\frac{1}{\omega}.$$
Отже, для визначення інтегрувального множника маємо диференціальне рівняння
$$\frac{d\ln\mu}{d\omega}=-\frac{1}{\omega}.$$

Звідси, проінтегрувавши і взявши за сталу інтегрування $C=1$, одержимо
$$\ln\mu=-\ln\omega$$
або
$$\mu=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Помноживши вихідне рівняння на μ, зведемо його до вигляду

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

або

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2}d\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \ln C.$$

Після потенціювання матимемо

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}, \quad C > 0. \blacktriangleright$$

2.4. Особливі розв'язки. Згідно з теоремою Коші, якщо права частина рівняння $y' = f(x, y)$ неперервна у деякій області Ω і має в ній неперервну похідну $f'_y(x, y)$, то через кожну внутрішню точку $(x_0; y_0)$ області Ω проходить єдина інтегральна крива. Умови теореми Коші можуть не виконуватися в точках, які лежать на межі області Ω. Такі точки, де не виконуються умови теореми Коші, як було відзначено раніше, називаються особливими. Якщо $M_0(x_0; y_0)$ – особлива точка то може трапитись, що через неї або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить декілька інтегральних кривих.

Якщо графік функції $y = \varphi(x)$ складається тільки з особливих точок рівняння, то функція φ є **особливим розв'язком** цього рівняння.

Умови теореми Коші є достатніми для того, щоб в деякій області Ω не існувало особливого розв'язку. Тому для існування особливого розв'язку необхідно, щоб не виконувалися умови теореми Коші. Отже, *для того щоб знайти особливий розв'язок диференціального рівняння* $y' = f(x, y)$, *треба знайти функцію* $y = \varphi(x)$, *в кожній точці графіка якої має розрив* *або f, або f'_y і перевірити чи є функція φ розв'язком цього рівняння.* Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння, то вона й буде особливим розв'язком.

Приклад 10. Чи має рівняння $y' = y^2 + x^2$ особливий розв'язок?

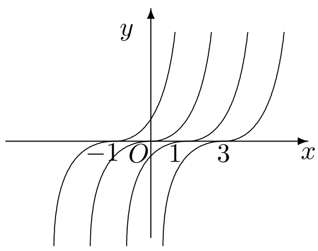
◀ Маємо $f(x, y) = y^2 + x^2$, $f'_y = 2y$. Ці функції неперервні в будь-якій області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а це означає, що умови теореми Коші виконуються, і отже, особливого розв'язку рівняння не має.▶

Приклад 11. Знайти особливий розв'язок рівняння $y' = \sqrt[3]{y^2}$.

◀ Права частина цього рівняння $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ неперервна при всіх значеннях y, але похідна $f'_y(x, y) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ має розрив при $y = 0$, тобто в точках осі Ox. Отже, кожна точка прямої $y = 0$ є особливою. Оскільки $y = 0$ є розв'язком заданого рівняння, то це – особливий розв'язок.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння. Відокремивши змінні та проінтегрувавши рівність $y^{-2/3}dy = dx$, дістанемо загальний розв'язок

$$3y^{1/3} = x + C \quad \text{або} \quad y = \frac{(x + C)^3}{27}.$$



Сім'я інтегральних ліній, які відповідають знайденому загальному розв'язку, складається з кубічних парабол. Оскільки через кожну точку особливого розв'язку $y = 0$ (вісь Ox) проходить ще одна інтегральна крива цього розв'язку, тобто кубічна парабола, то в кожній точці осі Ox порушується властивість єдиності.▶

Слід відзначити, що *особливий розв'язок, взагалі кажучи, не міститься у загальному розв'язку і не може бути* виділений з нього при жодному конкретному значенні сталої C.

Приклад 12. Чи має рівняння $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$ особливий розв'язок?

◀ Як і в попередньому прикладі, множиною всіх особливих точок рівняння є пряма $y = 0$ (вісь Ox). Легко можна переконатися, що функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння. Тому це рівняння не має особливих розв'язків.▶

2.5. Застосування диференціальних рівнянь в природознавстві. У цьому пункті наведемо деякі застосування диференціальних рівнянь в природознавстві, доповнюючи наведені вище приклади використання таких рівнянь у фізиці й економіці. Ряд прикладів цього пункту запозичено з підручника [3].

Приклад 13 (внутрішньовенне харчування глюкозою). Нехай $x(t)$ – кількість глюкози в крові пацієнта в момент часу t. Вважатимемо, що глюкоза поступає в кров зі сталою швидкістю a (*г*/хв). У той же час глюкоза розкладається і виводиться із кровоносної системи зі швидкістю, що пропорційна наявній кількості глюкози. Скласти математичну модель задачі і розв'язати її, якщо $x(0) = x_0$.

◀ Оскільки, згідно з умовою, швидкість зміни глюкози $\frac{dx}{dt}$ дорівнює $a - kx(t)$, де $k \neq 0$ – деякий коефіцієнт пропорційності, то маємо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = a - kx(t),$$

яке визначає разом з початковою умовою $x(0) = x_0$ математичну модель задачі.

Одержане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Для його розв'язання відокремимо змінні

$$\frac{dx}{a - kx} = dt,$$

і проінтегруємо обидві частини отриманої рівності. Тоді одержимо

$$-\frac{1}{k} \ln |a - kx| = t - \frac{1}{k} \ln |C_1|,$$

де $C_1 \neq 0$. Звідси випливає, що $a - kx = C_1 e^{-kt}$ і тому $x = \dfrac{a}{k} + C_1 e^{-kt}$, де C_1 – довільна стала.

Відокремлюючи змінні, ми ділили на вираз $a - kx$ і тому могли втратити розв'язок $x = \frac{a}{k}$. Безпосередньо переконуємося, що ця функція є розв'язком рівняння. Його можна одержати із $x =$

$\dfrac{a}{k} + C_1 e^{-kt}$ при $C_1 = 0$. Отже, всі розв'язки диференціального рівняння записуються у вигляді $x = \dfrac{a}{k} + Ce^{-kt}$, де $C \in \mathbb{R}$.

Тепер знайдемо сталу C, використовуючи початкову умову $x(0) = x_0$. Маємо $x_0 = \dfrac{a}{k} + C$, тобто $C = x_0 - \dfrac{a}{k}$. Тому розв'язком задачі є $x(t) = \dfrac{a}{k} + \left(x_0 - \dfrac{a}{k}\right) e^{-kt}$. ►

Приклад 14 (логістичний ріст). Швидкість зростання популяції на одну особину дорівнює різниці між середньою народжуваністю і середньою смертністю. Вважатимемо, що середня народжуваність є додатною сталою β, що не залежить від часу t і розміру популяції $y(t)$. Припустимо також, що середня смертність пропорційна розміру популяції і тому дорівнює $\delta y(t)$, де $\delta \geq 0$ – коефіцієнт пропорційності. Скласти математичну модель задачі й розв'язати її.

◄ Оскільки відносна швидкість росту $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}$ дорівнює $\beta - \delta y(t)$, то дістанемо, що розмір популяції $y(t)$ описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dy}{dt} = y(\beta - \delta y(t)).$$

Очевидно, що це є диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо одержану рівність:

$$\frac{dy}{y(\beta - \delta y)} = dt,$$

$$\int \frac{dy}{y(\beta - \delta y)} = \int dt + C_1.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{y(\beta - \delta y)} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{y} + \frac{\delta}{\beta}\frac{1}{\beta - \delta y}$$

і тому

$$\frac{1}{\beta}\int \frac{dy}{y} + \frac{\delta}{\beta}\int \frac{dy}{\beta - \delta y} = \int dt + C_1;$$

$$\frac{1}{\beta}\ln y + \frac{\delta}{\beta}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\ln(\beta - \delta y) = t + \frac{1}{\beta}\ln C_2,$$

де $C_1 = \dfrac{1}{\beta}\ln C_2$, $C_2 > 0$.

Отже, дістали таку рівність:

$$\frac{1}{\beta}(\ln y - \ln(\beta - \delta y)) = t + \frac{1}{\beta}\ln C_2$$

або

$$\frac{1}{\beta}\ln\frac{y}{\beta - \delta y} = t + \frac{1}{\beta}\ln C_2,$$

$$\frac{y}{\beta - \delta y} = C_2 e^{\beta t}, \quad C_2 > 0.$$

Остаточно маємо, що всі розв'язки рівняння визначаються формулою

$$y(t) = \frac{\beta C e^{\beta t}}{1 + \delta C e^{\beta t}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Якщо задовольнити початкову умову $y(0) = y_0$, то одержимо

$$y_0 = \frac{\beta C}{1 + \delta C} \quad \text{або} \quad C = \frac{y_0}{\beta - y_0\delta}.$$

Тому

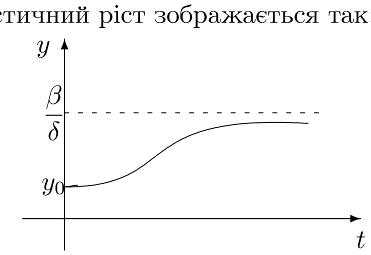
$$y(t) = \frac{y_0 \beta e^{\beta t}}{\beta - y_0\delta + \delta y_0 e^{\beta t}}.$$

Процес зростання, який описується цією функцією, називається **логістичним ростом**. При логістичному рості популяція із зростанням часу t наближається до граничного (рівноважного) розміру. Рівноважній популяції відповідає величина

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{y_0\beta e^{\beta t}}{\beta - y_0\delta + y_0\delta e^{\beta t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{y_0\beta e^{\beta t}}{e^{\beta t}((\beta - y_0\delta)e^{-\beta t} + \delta y_0)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{y_0\beta}{(\beta - y_0\delta)e^{-\beta t} + \delta y_0} = \frac{\beta}{\delta}, \quad \text{оскільки} \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-\beta t} = 0.$$

Графічно логістичний ріст зображається так:



.▶

Приклад 15 (математична модель епідемії). Для простоти обмежимося розглядом епідемії найпростішого вигляду. Припустимо, що досліджуване захворювання продовжується достатньо довго, а тому можна вважати, що інфекція поширюється швидше, ніж триває сама хвороба. Нас цікавитиме процес передачі інфекції. При цьому інфіковані особини не вилучаються з колонії і, отже, інфекція передається неінфікованим особинам контактним способом. Скласти математичну модель процесу і знайти закон залежності числа неінфікованих від часу.

◀ Нехай a та b – відповідно кількість інфікованих і неінфікованих особин в початковий момент, $x = x(t)$ – кількість неінфікованих в момент t, а $y = y(t)$ – кількість інфікованих у момент t. Для всіх моментів часу із деякого не дуже великого відрізка $0 \le t \le T$ (T менше часу життя одного покоління, тому в наших рівняннях можемо не враховувати природну смертність) має місце рівність $x+y = b+a$.

Оскільки інфекція передається при зустрічах інфікованих з неінфікованими, то кількість неінфікованих буде зменшуватися з часом пропорційно кількості зустрічей між ними, тобто пропорційно добутку xy. Тому швидкість зменшення кількості неінфікованих особин $\dfrac{dx}{dt}$ пропорційна xy, тобто

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy,$$

де β – коефіцієнт пропорційності. Згідно з умовою $y = b + a - x$ і тому отримаємо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(b + a - x).$$

Відокремивши змінні, отримаємо

$$\frac{dx}{x(b + a - x)} = -\beta dt$$

або

$$\frac{(b + a - x) + x}{x(b + a - x)} dx = -\beta(b + a)dt.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{b + a - x} = -\beta(b + a)dt$$

і проінтегруємо. Тоді одержимо, що

$$\ln x - \ln(b - x + a) = -\beta(b + a)t + \ln C_1,$$

або

$$\ln \frac{x}{b - x + a} = -\beta(b + a)t + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

Звідси випливає, що всі розв'язки рівняння визначаються рівністю

$$\frac{x}{b - x + a} = Ce^{-\beta(b+a)t}, \quad C \geq 0.$$

Для визначення C скористаємося початковою умовою: при $t = 0$ кількість неінфікованих особин дорівнює b, тобто $x(0) = b$. Тоді $C = \frac{b}{a}$, і, отже,

$$\frac{x}{b - x + a} = \frac{b}{a} e^{-\beta(b+a)t}.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно x, отримаємо

$$x = \frac{b(b + a)}{b + ae^{\beta(b+a)t}}.$$

Ця формула дає закон зменшення кількості $x(t)$ неінфікованих у залежності від часу. ►

Приклад 16 (ріст листків рослин). Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна довжині кола листка і кількості сонячного світла, що падає на нього. Відомо, що кількість сонячного світла, яка падає на листок, пропорційна площі листка і косинусу кута між напрямком променів і перпендикуляром до листка. Знайти залежність площі S листка від часу t, якщо о 6 год. ранку ця площа дорівнювала 1600 см^2, а о 18 год того самого дня – 2500 см^2. Вважатимемо, що кут між напрямком променя Сонця і перпендикуляром до листка о 6 год. ранку і о 18 год. (без врахування знаку) дорівнює $\pi/2$, а опівдні – 0.

◄ Нехай t – час, що відраховується від півночі. Позначимо через $S(t)$ площу листка в момент часу t. Тоді, згідно з умовою задачі, швидкість $\frac{dS}{dt}$ пропорційна довжині кола листка і кількості сонячного світла, що падає на нього, тобто

$$\frac{dS}{dt} = k_1 2\pi r Q,$$

де $2\pi r$ – довжина кола листка в момент t, Q – кількість сонячного світла, k_1 – коефіцієнт пропорційності.

Площа листка $S = \pi r^2$, а тому $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. Тоді

$$\frac{dS}{dt} = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S} Q.$$

Згідно з умовою $Q = k_2 S \cos\alpha$, де α – кут між напрямком сонячних променів і напрямком перпендикуляра до листка, k_2 – коефіцієнт пропорційності. Кут α є лінійною функцією аргументу t, а тому $\alpha = k_3 t + b$. Параметри k_3 і b знаходимо із умов: при $t = 12$ год. кут $\alpha = 0$, а при $t = 18$ год. кут $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b, \\ \frac{\pi}{2} = 18k_3 + b. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо $k_3 = \dfrac{\pi}{12}$, $b = -\pi$ і тому $\alpha = \dfrac{\pi}{12} t - \pi = \dfrac{\pi}{12}(t - 12)$. Тоді кількість Q сонячного світла дорівнює

$$Q = k_2 S \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right).$$

Отже, для функції S маємо рівняння

$$\frac{dS}{dt} = k_1 k_2 2\sqrt{\pi} S \sqrt{S} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right).$$

Позначимо $k = k_1 k_2$. Тоді, відокремлюючи змінні, отримуємо

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = 2k\sqrt{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right) dt.$$

Проінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Для обчислення сталої C і коефіцієнта k використаємо умови задачі: при $t = 6$ год. площа $S = 1600$ см^2, а при $t = 18$ год. – $S = 2500$ см^2. Тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{20} = -\frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C, \\ -\frac{1}{25} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $C = -\dfrac{9}{200}$, $k = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4800}$. Тому

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24\sqrt{\pi}}{4800\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right) - \frac{9}{200}.$$

Отже, маємо залежність площі S від часу t:

$$S = \frac{160000}{\left(9 - \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)\right)^2}. \qquad \blacktriangleright$$

Наведемо приклади математичних моделей хімічних процесів, які описуються диференціальними рівняннями.

Хімічні реакції. Молекулярність хімічної реакції дорівнює загальній кількості молекул, які входять в ліву частину хімічного рівняння. Порядком реакції є сума показників степенів концентрацій, що входять до її кінетичного рівняння. Наприклад, $RaB \to RaC$ є реакцією першого порядку. Швидкість, з якою система компонентів лівої частини перетворюється в систему компонентів правої частини рівняння, називається швидкістю реакції. Діюча маса або концентрація реагуючої речовини A є кількість молей (моль або грам-молекула речовини – кількість грамів цієї речовини, яка дорівнює її молекулярній масі). Наприклад, 1 моль кисню дорівнює 16 *г*, а 1 моль водню – 2 *г* цієї речовини в одиниці об'єму. Згідно з законом діючих мас швидкість реакції пропорційна добутку концентрацій реагуючих речовин у даний момент.

Хімічні реакції першого порядку. Якщо a – початкова концентрація речовини A, x – кількість молей на літр, які реагували за час t від початку реакції, то швидкість цієї реакції є $\dfrac{dx}{dt}$, а діюча маса речовини на цей момент становить $a - x$. Тоді за законом діючих мас маємо

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від типу і умов хімічного процесу. Оскільки це рівняння з відокремлюваними змінними, то після відокремлення змінних та інтегрування, одержимо:

$$\frac{dx}{a-x} = kdt,$$

$$-\ln(a-x) + \ln C = kt$$

або

$$\ln \frac{C}{a-x} = kt, \quad C > 0.$$

Для визначення сталої C скористаємося тим, що при $t = 0$ $x = 0$. Тоді $C = a$ і, отже, $\ln \dfrac{a}{a-x} = kt$. Звідси випливає, що $x = a(1 - e^{-kt})$.

Розглянемо конкретний приклад хімічної реакції першого порядку.

Приклад 17. Радіоактивний елемент RaB розпадається наполовину, утворюючи радіоактивний елемент RaC, протягом 26,7 хв. Знайти час розпаду 0,2 початкової кількості RaB.

◀ Маємо реакцію першого порядку $RaB \to RaC$. Тоді, згідно з викладеним вище, отримуємо математичну модель, що описує цю реакцію

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x), x(0) = 0.$$

Звідси, після інтегрування одержуємо, що $\ln \dfrac{a}{a-x} = kt$. Тому

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a-x}.$$

Коефіцієнт пропорційності k знаходимо з умови, що $x(26,7) = \dfrac{a}{2}$. Тоді маємо

$$26,7 = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{a - \frac{a}{2}} \quad \text{або} \quad 26,7 = \frac{1}{k} \ln 2$$

і тому $k = \dfrac{\ln 2}{26,7}$.

Отже, для розпаду кількості $x = 0,2a$ радіоактивного елемента потрібний час

$$t = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{a}{a - 0,2a} = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{1}{0,8} = \frac{26,7}{\ln 2} \ln \frac{5}{4} \approx 8,6 \text{ (хв)}. \quad ▶$$

Хімічні реакції другого порядку. Нехай a і b – початкові концентрації речовин A і B; x – кількість прореагованих до моменту часу t молей речовини A, а, отже, і речовини B, оскільки кожний моль речовини A сполучається з молем речовини B, і тому кількість прореагованих молей обох речовин однакова. В момент часу t швидкість реакції буде $\frac{dx}{dt}$, а діюча маса речовини A, тобто кількість речовини в одиниці об'єму, дорівнюватиме $a - x$, а речовини B – $b - x$. Тому на основі закону діючих мас одержуємо таке диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Отже, маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Після відокремлення змінних одержимо

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt.$$

Розглянемо два випадки:

1) Нехай $a = b$. Тоді, проінтегрувавши це рівняння, одержимо:

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = k \int dt + C$$

або

$$\frac{1}{a-x} = kt + C.$$

Оскільки при $t = 0$ $x = 0$, то $C = \frac{1}{a}$ і тому

$$x = a - \frac{a}{1+akt}.$$

2) Нехай $a \neq b$. Очевидно, що $\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right)\frac{1}{b-a}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a} \int \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}(-\ln(a-x) + \ln(b-x)) = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x}.$$

Тому, проінтегрувавши рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} = kt + C.$$

Оскільки $x(0) = 0$, то $C = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$ і тому

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{b-x}{a-x} = kt + \frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a} \quad \text{або} \quad kt = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a}e^{(b-a)kt} \quad \text{і} \quad x = \frac{ab(e^{(b-a)kt} - 1)}{be^{(b-a)kt} - 1}.$$

Приклад 18. В реакції омилення оцитовоетилового ефіру гідроксидом натрію

$$\underset{\text{етилацетат}}{CH_3COOC_2H_5} + \underset{\substack{\text{натрій}\\ \text{гідроксид}}}{NaOH} \to \underset{\substack{\text{натрій}\\ \text{ацетат}}}{CH_3COONa} + \underset{\text{етанол}}{C_2H_5OH}$$

початкові концентрації еталацетату і натрію гідроксиду були відповідно $a = 0,01$ і $b = 0,002$. Після 23 хв концентрація оцтовоетилового ефіру зменшилась на 10%. За який час вона зменшиться на 15%?

◀ Оскільки маємо реакцію другого порядку, то її математична модель має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \quad x(0) = 0.$$

Після розв'язування цієї задачі Коші, одержуємо, що

$$kt = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Коефіцієнт пропорційності визначимо з умови, що при $t = 23$ хв $x = 0,1 \cdot 0,01 = 0,001$. Тоді

$$23k = \frac{1}{0,002 - 0,01}\ln\frac{0,01(0,002 - 0,001)}{0,002(0,01 - 0,001)}$$

або

$$k = \frac{125}{23}\ln 1,8.$$

Тепер знайдемо час, за який концентрація зменшиться на 15%:

$$\frac{125\ln 1,8}{23}t = \frac{1}{0,002-0,01}\ln\frac{0,01(0,002-0,0015)}{0,002(0,01-0,0015)},$$

звідки випливає, що

$$t = \frac{23\ln 3,4}{\ln 1,8} \approx 47,9 \text{ (хв)}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 19 (про концентрацію солі). У резервуар, що містить 10 кг солі на 100 л суміші, щохвилини вливається 30 л води і витікає 20 л суміші. Визначити, яка кількість солі залишиться в резервуарі через t хв, вважаючи, що суміш миттєво перемішується.

◀ Нехай x – кількість солі в резервуарі в момент часу t; $-dx$ – кількість солі, яка переходить у розчин і витікає з резервуара за час dt (знак мінус у виразі $-dx$ пов'язаний з тим, що x – спадна функція). Об'єм суміші в резервуарі в момент часу t дорівнює

$$x(t) = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t.$$

Тому концентрація солі (тобто кількість солі, яка міститься в одному літрі суміші) в момент часу t дорівнюватиме $\dfrac{x}{100+10t}$. Отже, за проміжок часу dt кількість солі зменшиться на величину $\dfrac{x}{100+10t}20dt$. Звідси одержуємо таке диференціальне рівняння:

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{20x}{100+10t} \quad \text{або} \quad -\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{10+t}.$$

Відокремивши змінні, отримаємо рівність

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{10+t},$$

після інтегрування якої матимемо

$$\ln x = -2\ln(10+t) + \ln C$$

або

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}, \quad C > 0.$$

Функція $x = 0$ також, очевидно, є розв'язком досліджуваного рівняння. Тому всі розв'язки рівняння визначаються формулою $x = \dfrac{C}{(10+t)^2}$, де $C \geq 0$ – довільна стала. Скориставшись тим, що при $t = 0$ $x = 10$, одержуємо, що $C = 1000$. Отже, закон зміни кількості солі в кг, що знаходиться в резервуарі, в залежності від часу t (хв) має вигляд

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}.$$

Зауважимо, що з цієї формули, знаючи кількість солі, що залишилася в резервуарі (останню легко встановити, знаючи об'єм резервуара і концентрацію солі), можна визначити, скільки часу пройшло від початку процесу. На цьому грунтується метод обчислення віку морів та океанів. ▶

Вправи

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:
1) $xy' - y = 0$, якщо $y = 4$ при $x = -2$;
2) $yy' + x = 0$; 3) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;
4) $x^2y' + y = 0$, $y = e$ при $x = 1$;
5) $(x+1)y' + xy = 0$; 6) $2y'\sqrt{x} = y$, $y = 1$ при $x = 4$;
7) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y = 1$ при $x = 0$;
8) $x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ при $x = -1$;
9) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$, $y = \dfrac{1}{2}$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$;
10) $(1 + y^2)dx - xydy = 0$, $y = 1$ при $x = 2$.
2. Розв'язати однорідне рівняння:
1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$;
2) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, якщо $y = \dfrac{1}{2}$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$;
3) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$; 4) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;
5) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; 6) $(x - y)y - x^2y' = 0$;
7) $(x^2 + 2xy) + xyy' = 0$.
3. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:
1) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$; 2) $xy' + y = \ln x + 1$;
3) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$; 4) $y' + y = \cos x$;

5) $y' = x + y$; 6) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; 7) $y' - y = e^x$.

4. Розв'язати рівняння Бернуллі:

1) $xy' + y = -x^2y^2$; 2) $xy' - y = y^3$;

3) $y' + xy = xy^3$; 4) $xy' + 2y = x^5y^2$.

5. Розв'язати рівняння в повних диференціалах:

1) $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xydy = 0$;

2) $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$; 3) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$;

4) $xdx + ydy + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$; 5) $yx^{y-1}dx + x^y \ln xdy = 0$.

6. Розв'язати рівняння, знайшовши спочатку інтегрувальний множник:

1) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$, $\mu = \mu(y)$;

2) $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy$, $\mu = \mu(xy)$;

3) $(x + x^2 + y^2)dy - yds = 0$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$;

4) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$, $\mu = \mu(x)$.

7. Нехай є N потенційних покупців деякого товару. Після рекламного оголошення інформація про даний товар поширюється через спілкування покупців між собою. Враховуючи, що швидкість зміни числа покупців, які знають про товар, пропорційна як числу проінформованих про товар, так і числу покупців, які про нього нічого не знають, скласти математичну модель задачі і знайти закон залежності числа проінформованих покупців від часу.

8. Граничні і повні витрати виробництва задовольняють рівняння $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію y повних витрат, що задовольняє умову $y(0) = 0$.

9. Відомо, що ціна p на деякий товар залежить від часу t, а попит q і пропозиція s визначаються формулами $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$. Знайти, якою повинна бути ціна p, щоб попит і пропозиція зрівноважувалися, якщо $p(0) = 1$.

10. За який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного суспільного продукту P, якщо його залежність від часу визначається рівнянням розширеного відтворення $\dfrac{dP}{dt} = 0,1P$.

11. Швидкість реакції перетворення цукру описується рівнянням $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, де a – кількість молей цукру перед початком реакції, x – кількість молей, які вступають в реакцію протягом часу t; k – коефіцієнт пропорційності. Знайти $x(t)$ і $t(x)$, якщо $x(0) = 0$.

12. Корабль зупинився у тихій воді, нахилившись на кут α, і потім, без стороннього втручання, став рівномірно погойдуватися. Кут φ його відхилення від положення рівноваги (в радіанах) і час t (в секундах) зв'язані рівнянням $\frac{d\varphi}{dt} + a\varphi + b\varphi^2 = 0$, де a і b – сталі. Знайти $\varphi(t)$, якщо $\varphi(0) = \alpha$.

13. З деякої суміші (хімічно неактивної) добувають сірку, розчиняючи її в бензолі. Відомо, що протягом 42 хв, користуючись великою кількістю бензолу, вдається екстрагувати половину всієї наявної сірки. Швидкість екстракції пропорційна добутку нерозчиненої кількості сірки і різниці концентрації насиченого розчину і розчину в даний момент. Знайти скільки сірки можна розчинити протягом 6 год, якщо в даній речовині міститься 6 *г* сірки і якщо взято 100 *г* бензолу – кількості, яка при насичені розчиняє 11 *г* сірки.

14. Проходячи через ліс і зазначаючи опору дерев, вітер втрачає частину своєї швидкості. На нескінченно малому шляху ця втрата пропорційна швидкості на початку цього шляху і його довжині. Знайти швидкість вітру, який пройшов в лісі 150 м, якщо відомо, що початкова швидкість вітру $v_0 = 12$ м/с, а після проходження шляху $x = 1$ м швидкість вітру зменшилася до $v_1 = 11,8$ м/с.

15. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dt} = 0,1y$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1000$. Якщо $y(t)$ є кількість популяції бактерій після t годин росту, то чому дорівнює розмір популяції після 10 год?

16. Популяція $x(t)$ бактерій збільшується так, що відносна швидкість зростання у момент часу t (в год) дорівнює $\dfrac{1}{1+2t}$. Нехай початкова популяція складає $x(0) = 1000$. Якою буде ця популяція після 4 годин росту?

17. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє задану початкову умову:
1) $\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$, $y(0) = 1000$; 2) $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = te^{-t^2}$, $y(0) = 1$.

18. Вихід речовини S у деякій хімічній реакції складає a молів за хвилину. У той же час вона розкладається зі швидкістю k молів за хвилину на кожний моль S. Нехай $S(t)$ – кількість молів речовини в момент часу t. Скласти диференціальне рівняння, яке задовольняє $S(t)$ і розв'язати його, якщо $S(0) = S_0$.

19. Для рівняння $\dfrac{dy}{dt} = y(0,1 - 0,001y)$ знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 10$. Чому дорівнює рівноважний розмір популяції $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$?

20. Дві речовини A і B беруть участь у хімічній реакції в однакових кількостях і дають сполуку C. Нехай a і b – початкові концентрації речовин A і B. Позначимо через $x(t)$ концентрацію речовини C у момент часу t. Швидкість збільшення концентрації C виражається величиною $\dfrac{dx}{dt} = r(a-x)(b-x)$, де r – додатна стала. Знайти: 1) концентрацію $x(t)$ сполуки C для $t > 0$, коли $x(0) = 0$; 2) граничну концентрацію $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, якщо $a = 10$, $b = 15$ од.

21. Ріст, виживання та поділ клітин визначається потоком поживних речовин через оболонку клітини. Це означає, що на ранніх стадіях клітинного росту збільшення маси клітини пропорційне площі її поверхні. Якщо під час росту форма і густина клітини не змінюються, то маса клітини $x(t)$ у момент часу t пропорційна кубу радіуса, а площа її поверхні пропорційна квадрату радіуса. Потрібно: 1) переконатися у тому, що на ранніх стадіях росту $x(t)$ задовольняє рівняння $\dfrac{dx}{dt} = Cx^{2/3}$, де $C \geq 0$ – коефіцієнт пропорційності; 2) знайти $x(t)$, якщо $x(0) = x_0$; 3) знайти час, за який маса клітини подвоїться, якщо $C = 3$, а $x_0 = 1$.

22. Речовина A перетворюється в речовину B. Після 1 год з початку реакції залишилося 44,8 *г* речовини A, а після 3 год – 11,2 *г* речовини A. Визначити початкову кількість a речовини A і час, коли залишиться половина цієї речовини.

23. В резервуарі знаходиться 100 л розчину, який містить 10 кг солі. В резервуар зі швидкістю 3 л за хвилину подається вода і одночасно зі швидкістю 2 л за хвилину розчин виливається із резервуара, причому концентрація розчину залишається весь час рівномірною завдяки перемішуванню. Скільки солі залишається в резервуарі через годину?

Відповіді

1. 1) $y = -2x$; 2) $x^2 + y^2 = C^2$; 3) $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$; 4) $y = e^{1/x}$; 5) $y = C(x+1)e^{-x}$; 6) $y = e^{\sqrt{x}-2}$; 7) $y^2 = 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)$; 8) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{4}$; 9) $y = 2\sin^2 x - \dfrac{1}{2}$; 10) $2y^2 = x^2 - 2$.

2. 1) $y = \dfrac{2x}{1 - Cx^2}$; 2) $y = 2x \operatorname{arctg} x$; 3) $\sin\dfrac{y}{x} + \ln|x| = C$;
4) $y = x\ln\dfrac{C}{x}$; 5) $(x - C)^2 - y^2 = C^2$;
6) $x = Ce^{x/y}$; 7) $\ln|x+y| + \dfrac{x}{x+y} = C$.

3. 1) $y = Cx^3 - x^2$; 2) $y = \ln x + 1 - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{C}{x}$;
3) $y = \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{C}{x^2}$; 4) $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$;
5) $y = Ce^x - x - 1$; 6) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$; 7) $y = (x + C)e^x$.

4. 1) $y(C_1x+x^2)=1$; 2) $y^{-2}=\dfrac{C}{x^2}-1$; 3) $y^{-2}=Ce^{x^2}+1$; 4) $y^{-1}=-\dfrac{x^5}{3}+Cx^2$.

5. 1) $x\sin xy=C$; 2) $x^2+2xy-y^2=C$; 3) $x^4+2(xy)^2+y^4=C$; 4) $\dfrac{x^2}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y^2}{2}=C$; 5) $x^y=C$.

6. 1) $\mu=\dfrac{1}{y^2}$, $x^2y-x+y^2+y\ln|y|=Cy$; 2) $\mu=\dfrac{1}{x^2y^2}$, $(x^2+y^2)xy+1=Cxy$; 3) $\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}-y=C$; 4) $\mu=\dfrac{1}{x^2}$, $x=Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

7. $\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x)$, $x(0)=\dfrac{N}{\psi}$, $x=\dfrac{N}{1+(\psi-1)e^{-Nkt}}$.

8. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{16}e^{4x}$. **9.** $p=10-9e^{t/10}$.

10. $t=\dfrac{\ln 2}{0,1}\approx 7$ років.

11. $x=a(1-e^{-kt})$, $t=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}$.

12. $\frac{\varphi}{a+b\varphi}=\frac{\alpha}{a+b\alpha}e^t$.

13. $x(t)$ – кількість нерозчиненої сірки на момент часу t. Концентрація сірки в насиченому розчині дорівнює 0,11 *г* в 1 *г* бензолу. Тоді $\frac{dx}{dt}=-0,15x(0,11-\frac{6-x}{100})$. Отже, при початковій умові $x(42)=3$ маємо $x(6)=0,18$ *г*.

14. Якщо $v(x)$ – швидкість вітру на відстані x м від краю лісу, то $dv=kvdx$. Тоді $v(x)=v_0e^{-kx}$, а $v(150)=0,931$ м/с.

15. $y(t)=1000e^{0,1t}$, $y(10)\approx 2718$.

16. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+2t}$, $x(t)=C(1+2t)^{1/2}$, $x(4)=3000$.

17. 1) $y(t)=Ce^{-t}+te^{-t}$, $y(t)=(1000+t)e^{-t}$; 2) $y(t)=Ce^{-t^2}+\dfrac{t^2}{2}e^{-t^2}$, $y(t)=(1+\frac{t^2}{2})e^{-t^2}$.

18. $\dfrac{dS}{dt}=a-kS$, $S(t)=\dfrac{a}{k}+(S_0-\dfrac{a}{k})e^{-kt}$.

19. $y(t)=\dfrac{e^{0,1t}}{0,09+0,01e^{0,1t}}$, $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=100$.

20. 1) $x(t)=\dfrac{ab(1-e^{(b-a)rt}}{a-be^{(b-a)rt}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x(t)=a=10$.

21. 2) $x(t)=(\sqrt[3]{x_0}+\frac{Ct}{3})^2$; 3) $t=0,26$.

22. $a=89,6$ *г*; $t=1$ год.

23. $3,9$ кг.

§3. Диференціальні рівняння другого порядку

3.1. Основні поняття. Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

або, якщо це можливо, у вигляді, розв'язаному відносно другої похідної

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2}$$

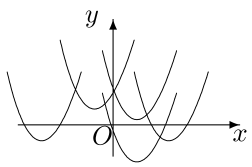
Як і у випадку диференціального рівняння першого порядку, для рівняння другого порядку існують загальний і частинний розв'язки.

Приклад 1. Знайти всі розв'язки рівняння

$$y'' = 2.$$

◄ Введемо позначення $y' = z(x)$. Тоді $y'' = z'$ і задане рівняння набуде вигляду $z' = 2$. Звідси випливає, що $z = 2x + C_1$, або $y' = 2x + C_1$. Проінтегрувавши ще раз, дістанемо

$$y = x^2 + C_1 x + C_2. \tag{3}$$



Одержаний загальний розв'язок залежить від двох довільних сталих. Очевидно, що (3) – це сукупність парабол, причому через кожну точку площину проходить безліч парабол, які мають в цій точці різні дотичні.

Для виділення з цієї множини деякої інтегральної кривої необхідно, крім координат точки $(x_0; y_0)$, через яку проходить параболи, додатково задати кутовий коефіцієнт дотичної, тобто $y'(x_0)$.

Отже, умови, за допомогою яких із загального розв'зку рівняння другого порядку виділяється частинний розв'язок мають вигляд

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \tag{4}$$

де x_0, y_0, y'_0 – задані числа. Перша з цих умов визначає точку, через яку повинна проходити інтегральна крива, а друга – нахил інтегральної кривої в цій точці.

Задамо, наприклад, для рівняння $y'' = 2$ такі початкові умови:

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1.$$

Із загального розв'язку (3) одержуємо $y' = 2x + C_1$. Використовуючи початкові умови, дістанемо для визначення C_1 і C_2 систему рівнянь

$$\begin{cases} 2 = 1 + 1C_1 + C_2, \\ 1 = 2 + C_1. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо, що $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Тому шуканий розв'язок має вигляд $y = x^2 - x + 2$.▶

Результати, одержані в прикладі 1, залишаються правильними і для довільного диференціального рівняння другого порядку (2). Для цього рівняння правильна **теорема існування і єдиності** (**теорема Коші**): *нехай права частина $f(x, y, y')$ рівняння (2) і її частинні похідні $f'_y(x, y, y')$ і $f'_{y'}(x, y, y')$ визначені та неперервні в деякій області Ω зміни x, y і y'. Тоді для будь-якої внутрішньої точки $(x_0; y_0; y'_0)$ цієї області рівняння (2) має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє початкові умови (4).*

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), який задовольняє початкові умови (4), називається **задачею Коші**.

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ називається **загальним розв'язком** рівняння (2) в області Ω, якщо вона задовольняє умови:

1) при довільних значеннях сталих C_1 і C_2 φ є розв'язком рівняння (2);

2) які б не були початкові умови (4) існують єдині значення сталих C_{10} і C_{20} такі, що функція $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ є розв'язком рівняння (2) і задовольняє початкові умови (4).

Очевидно, що значення сталих C_{10} і C_{20} знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}$$

При заданні початкових умов (4) треба пам'ятати, що точка $(x_0; y_0; y'_0)$ повинна належати області Ω.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку одержано у вигляді, не розв'язаному відносно шуканої функції $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, то це співвідношення називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння.

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ рівняння (2), що одержується із загального розв'язку $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретних значеннях сталих $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, називається **частинним розв'язком**.

Якщо загальний розв'язок рівняння (2) записано в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2), \\ y = \psi(t, C_1, C_2), \end{cases} \tag{5}$$

то (5) називається **загальним розв'язком рівняння (2) у параметричній формі.**

3.2. Найпростіші рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку. У цьому пункті розглянемо рівняння другого порядку, які за допомогою заміни змінної зводяться до рівнянь першого порядку.

3.2.1. Рівняння $y'' = f(x)$. Припустимо, що f неперервна в інтервалі $(a; b)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші, причому початкові дані y_0, y'_0 можна задавати довільно, а x_0 повинно належати інтервалу $(a; b)$. Цей розв'язок визначений в усьому інтервалі $(a; b)$. Особливих розв'язків рівняння не має, тобто всі розв'язки є частинними.

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння $y'' = xe^x$, якщо $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

◀ Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння. Для цього двічі послідовно проінтегруємо задане рівняння

$$y' = \int xe^x dx + C_1 = \int xde^x + C_1 =$$

$$= xe^x - \int e^x dx + C_1 = xe^x - e^x + C - 1 = (x-1)e^x + C_1,$$

$$y = \int ((x-1)e^x + C_1)dx = \int (x-1)de^x + C_1 x =$$

$$= (x-1)e^x - \int e^x dx + C_1 x = (x-2)e^x + C_1 x + C_2, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Знайдемо розв'язок, який задовольняє початкові умови. Для цього підставимо $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y' = 0$ в одержані вище вирази для y і y':

$$\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ 1 = -2 + C_2. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = 1$, $C_2 = 3$, а шуканим розв'язком є

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \blacktriangleright$$

3.2.2. Рівняння $y'' = f(x, y')$. Це рівняння не містить явно y. Введемо нову функцію $y' = z(x)$. Тоді $y'' = z'(x)$ і рівняння набуде вигляду

$$z'(x) = f(x, z(x)).$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z(x) = \varphi(x, C_1)$. Замінивши в одержаному розв'язку z на y', дістанемо рівняння

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Якщо проінтегрувати цей вираз, то знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$, який задовольняє умови $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

$\blacktriangleleft$ Нехай $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'(x)$. Підставивши ці вирази в задане рівняння, одержимо рівняння першого порядку

$$(1+x^2)z' - 2xz = 0.$$

Відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1+x^2}.$$

Якщо проінтегрувати, то отримаємо

$$\ln|z| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0.$$

Після потенціювання матимемо

$$z = \pm C_1(1+x^2)$$

або

$$z = C_2(1+x^2), \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

якщо врахувати втрачений розв'язок $z = 0$.

Оскільки $z = y'$, то $y' = C_2(1+x^2)$. Проінтегрувавши ще раз, одержимо загальний розв'язок рівняння

$$y = C_2\Big(x + \frac{x^3}{3}\Big) + C_3, \quad \{C_2, C_3\} \subset \mathbb{R}.$$

Виділимо з цього загального розв'язку частинний розв'язок. Скориставшись першою початковою умовою, знаходимо, що $0 = C_2\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) + C_3$ або $\frac{4}{3}C_2 + C_3 = 0$. Продиференціювавши загальний розв'язок і скориставшись другою початковою умовою, матимемо:

$$y' = C_1(1+x^2),$$

$$1 = C_2(1+1) \quad \text{або} \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Отже, для визначення C_2 і C_3 дістали систему

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4}{3}C_2 + C_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо, що $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{2}{3}$, а тому частинний розв'язок має вигляд

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

3.2.3. Рівняння $y'' = f(y, y')$. Це рівняння не містить явно змінної x. Для зниження порядку рівняння введемо нову функцію $z(y)$, залежну від змінної y, покладаючи $y' = z(y)$.

Продиференціюємо цю рівність по x, вважаючи y функцією від x:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z.$$

Якщо підставити вирази для y' і y'' у задане диференціальне рівняння, то дістанемо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $z(y)$

$$\frac{dz}{dy}z = f(y, z).$$

Нехай функція $z(y) = \varphi(y, C_1)$ є загальним розв'язком цього рівняння. Оскільки $z(y) = \dfrac{dy}{dx}$, то дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Проінтегрувавши його, знайдемо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $1 + {y'}^2 = 2yy''$.

◀ Введемо нову невідому функцію $z(y)$, поклавши $y' = z(y)$. Оскільки $y'' = \dfrac{dz}{dy}z$, то після підстановки y' і y'' в задане рівняння, одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$2yz\frac{dz}{dy} = 1 + z^2.$$

Відокремивши змінні та проінтегрувавши, знайдемо, що

$$\ln(1 + z^2) = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$1 + z^2 = \pm C_1 y, \quad 1 + z^2 = C_2 y, C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Звідси випливає, що $z = \pm\sqrt{C_2 y - 1}$.

Оскільки $z = \dfrac{dy}{dx}$, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_2 y - 1}.$$

Відокремивши змінні й проінтегрувавши, дістанемо загальний розв'зок рівняння:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{C_2 y - 1}} = dx, \quad \pm\frac{2}{C_2}\sqrt{C_2 y - 1} = x + C_3, \quad \frac{4}{C_2^2}(C_2 y - 1) = (x + C_3)^2$$

або

$$y = \frac{C_2^2(x + C_3)^2 + 4}{4C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, C_3 \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

3.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

3.3.1. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь. Диференціальне рівняння вигляду

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \varphi(x) \tag{6}$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням другого порядку**. Тут коефіцієнти рівняння $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ і вільний член $\varphi(x)$ – задані функції аргументу x. Вважатимемо, що a_0, a_1, a_2 і φ – неперервні функції на $[a; b]$ і $a_0(x) \neq 0$, $x \in [a; b]$. Поділимо рівняння (26) на $a_0(x)$ і введемо позначення $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = p(x)$, $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} = q(x)$, $\dfrac{\varphi(x)}{a_0(x)} = f(x)$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{7}$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, $x \in [a; b]$, то рівняння (7) називається **лінійним однорідним** і воно має вигляд

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{8}$$

Якщо ж $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a; b]$, то рівняння (7) називається **лінійним неоднорідним рівнянням**.

Відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку рівняння (6), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{9}$$

дає **теорема Коші**: *якщо коефіцієнти a_0, a_1, a_2 і права частина φ лінійного рівняння (6) неперервні на відрізку $[a; b]$, причому коефіцієнт a_0 не перетворюється в нуль у жодній точці цього відрізка, то якими б не були початкові умови (9), де $x_0 \in (a; b)$, існує єдиний розв'язок рівняння (6), який задовольняє початкові умови (9).*

При побудові загального розв'язку рівняння (6) важливу роль відіграє поняття лінійної незалежності розв'язків рівняння.

Два розв'язки y_1 і y_2 називаються **лінійно залежними на відрізку** $[a; b]$, якщо існують числа α_1 і α_2 такі, що $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ і

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \quad x \in [a; b]. \tag{10}$$

Якщо ж рівність (10) виконується тоді й тільки тоді, коли $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 = 0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються **лінійно незалежними**.

Виникає запитання, як можна перевірити, чи є частинні розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежними на відрізку $[a; b]$, тобто утворюють **фундаментальну систему** розв'язків заданого рівняння. Це можна зробити за допомогою **визначника Вронського**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}.$$

Правильними є такі твердження:

1) якщо функції y_1 і y_2 лінійно залежні на відрізку $[a; b]$, то визначник Вронського дорівнює нулю на цьому відрізку;

2) якщо лінійно незалежні функції y_1 і y_2 є розв'язками лінійного однорідного рівняння (8) з неперервними на відрізку $[a; b]$ коефіцієнтами, то визначник Вронського $W(x)$ не може перетворитися в нуль у жодній точці цього відрізка.

Приклад 5. Довести, що функції $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні на довільному відрізку числової осі при $k_1 \neq k_2$.

◀ Припустимо, що задані функції лінійно залежні на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} = 0, \quad x \in [a;b],$$

де, наприклад, $\alpha_2 \neq 0$. Тоді

$$e^{(k_2-k_1)x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad x \in [a;b].$$

Продиференціювавши цю рівність, одержимо, що $(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} = 0$, $x \in [a;b]$, а це неможливо, оскільки $k_1 \neq k_2$, $e^{(k_2-k_1)x} \neq 0$, $x \in [a;b]$. ▶

Аналогічно можна довести, що: 1) функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні на довільному відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$; 2) функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ лінійно незалежні на довільному відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $\{k, \alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$.

Очевидно, що коли функції y_1 і y_2 лінійно незалежні на $[a;b]$, то жодна з цих функцій не дорівнює тотожно нулю на цьому відрізку.

Виявляється, що для одержання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку досить мати два будь-які лінійно незалежні розв'язки цього рівняння.

Теорема 1. *Якщо y_1 і y_2 – довільні лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку (8), то його загальним розв'язком є функція*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{11}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

◀ Доведемо, що функція, яка визначається формулою (11), є розв'язком рівняння (8). Підставивши (11) в (8), матимемо

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y + C_2y)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) =$$
$$= C_1\,0 + C_2\,0 = 0.$$

Можна довести, що формула (11) визначає всі розв'язки рівняння (8). ▶

Відповідь на те, яка будова загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (7) дає теорема.

Теорема 2. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (7) є сумою його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння (8), тобто*

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}. \tag{12}$$

◀ Нехай $y_{\text{ч.н.}} \equiv \widetilde{y}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7), тобто

$$\widetilde{y}'' + p(x)\widetilde{y}' + q(x)\widetilde{y} = f(x). \tag{13}$$

Зробимо в рівнянні (7) заміну

$$y = z + \widetilde{y}. \tag{14}$$

Тоді матимемо

$$\widetilde{y}'' + p(x)\widetilde{y}' + q(x)\widetilde{y} + z'' + p(x)z' + q(x)z = f(x),$$

або, згідно з (13),

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0. \tag{15}$$

Отже, розв'язування рівняння (7) ми звели до розв'язування рівняння (15), яке з точністю до позначень збігається з рівнянням (7). Оскільки загальним розв'язком рівняння (15) є функція (11), то одержимо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (7) має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \widetilde{y},$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки рівняння (8) або (15). ▶

З теорем 1 і 2 випливає, що для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (7) треба знайти два лінійно незалежних розв'язки відповідного однорідного рівняння (8) і деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7). Доведено, що для лінійного однорідного рівняння (8) з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами завжди існує два лінійно незалежних розв'язки цього рівняння. Для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами лінійно незалежні розв'язки знаходяться відносно просто.

3.3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{16}$$

де p і q – сталі.

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (16) у вигляді

$$y = e^{\lambda x}. \tag{17}$$

Диференціюючи цю функцію двічі й підставляючи вирази $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ і $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ у рівняння (16), дістанемо рівність

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то, скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{18}$$

Рівняння (18) називається **характеристичним рівнянням** для диференціального рівняння (16). З цього рівняння визначаються ті значення λ, при яких функція $e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (16).

Характеристичне рівняння є рівнянням другого степеня і має два корені. Ці корені можуть бути або дійсними різними, або дійсними й рівними, або комплексно спряженими.

Розглянемо, який вигляд має **фундаментальна система** розв'язків, тобто сукупність лінійно незалежних частинних розв'язків, у кожному з цих випадків.

I. Корені характеристичного рівняння (18) дійсні та різні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. У цьому випадку згідно з формулою (17) знаходимо два частинні розв'язки $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ і $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Ці два розв'язки лінійно незалежні (приклад 5), а тому вони утворюють фундаментальну систему. Тоді загальний розв'язок, як випливає з теореми 1, має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

II. Корені характеристичного рівняння (18) кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2$. У цьому випадку, скориставшись формулою (17), дістанемо тільки один частинний розв'язок $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. За другий частинний розв'язок візьмемо функцію $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, яка лінійно незалежна з y_1 на будь-якому відрізку $[a; b]$ числової осі і є розв'язком (16). Отже, ці функції утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків. Тому загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

III. Якщо дискримінант характеристичного рівняння $\frac{p^2}{4} - q < 0$**, то воно має комплексні корені** $\lambda_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$**,** $\lambda_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$**, де** $i = \sqrt{-1}$.

Для зручності позначимо $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Тоді $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. У цьому випадку фундаментальною системою розв'язків рівняння є функції $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$y'' + 7y' - 8y = 0.$$

◄ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$ має корені $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 1$, а тому фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^{-8x}$, $y_2 = e^{x}$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{x}. \quad ►$$

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

◄ Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, що має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Загальним розв'язком рівняння є функція

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо, скориставшись початковими умовами. Оскільки

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-3x},$$

то маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -3C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

Шуканим розв'язком є

$$y = 2xe^{-3x}. \quad ►$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 10y = 0$.

◄ Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ має корені

$$\lambda_1 = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} = 1 \pm 3i.$$

Фундаментальною системою частинних розв'язків є $y_1 = e^x \cos 3x$ і $y_2 = e^x \sin 3x$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad ►$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння $y'' + 2y = 0$.

◄ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{-2} = -i\sqrt{2}$. Тут $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{2}$. Фундаментальна система розв'язків $y_1 = \cos\sqrt{2}x$, $y_2 = \sin\sqrt{2}x$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x. \quad ►$$

3.3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо тепер рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{19}$$

де p, q – деякі дійсні числа, а f – неперервна функція на відрізку $[a; b]$. Як відомо з попереднього, загальний розв'язок рівняння (19) є сумою частинного розв'язку неоднорідного рівняння й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вміємо знаходити, а тому залишилося розглянути питання знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Якщо права частина f рівняння (19) є многочлен, або показникова функція, або тригонометрична функція $\cos\beta x$ чи $\sin\beta x$, або лінійна комбінація цих функцій, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою **методу невизначених коефіцієнтів**.

I. Права частина рівняння (19) $f(x) = P_n(x)$**, де** $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ **– многочлен степеня** n.

У цьому випадку частинний розв'язок $y_{\text{ч.н.}}(x) \equiv \widetilde{y}(x)$ слід шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = Q_n(x)x^r, \tag{20}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того самого степеня n, що й многочлен $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю. Для знаходження коефіцієнтів многочлена Q_n треба підставити (20) в (19) і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x справа й зліва в одержаній рівності.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = x + 1$.

◄ Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ і знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Маємо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{з.о.}}(x) = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Оскільки права частина рівняння є многочленом першого степеня і серед коренів характеристичного рівняння немає нульових, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = (Ax + B)x^0 = Ax + B.$$

Підставимо цей вираз в неоднорідне рівняння і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$(Ax + B)'' - 2(Ax + B)' + (Ax + B) = x + 1,$$

$$-2A + Ax + B = x + 1,$$

або

$$Ax + (B - 2A) = x + 1,$$

звідки одержуємо, що

$$\begin{cases} A = 1, \\ B - 2A = 1, \end{cases}$$

тобто $A = 1$, $B = 3$.

Отже, частинним розв'язком неоднорідного рівняння є $\widetilde{y} = x + 3$, а тому його загальний розв'язок має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 11. Відомо, що функція попиту $q = 3p'' - p' - 2p + 18$, а функція пропозиції $s = 4p'' + p' + 3p + 3$, де $p(t)$ – ціна товару на момент часу t, $p'(t)$ – тенденція формування ціни, $p''(t)$ – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни p від часу, за умови, що попит і пропозиція зрівноважуються, а $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$.

◀ Оскільки рівновага ринку характеризується рівністю $q = s$, то маємо рівняння

$$3p'' - p' - 2p + 18 = 4p'' + p' + 3p + 3,$$

або

$$p'' + 2p' + 5p = 15.$$

Одержане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'яжемо спочатку лінійне однорідне рівняння $p'' + 2p' + 5p = 0$. Оскільки коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ є $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$p(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t.$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\widetilde{p} = A$. Після підстановки $\widetilde{p}$ в рівняння матимемо $5A = 15$, тобто $A = 3$, тому $\widetilde{p} = 3$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$p(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t + 3.$$

Знайдемо сталі C_1, C_2, скориставшись початковими даними $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$. Маємо $4 = C_1 + 3$, $p'(t) = -(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)e^{-t} + (-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t)e^{-t}$, $1 = -C_1 + 2C_2$; $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, а тому

$$p(t) = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + 3. \quad \blacktriangleright$$

II. Права частина рівняння (19) $f(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, а коефіцієнт γ – дійсне число.

У цьому випадку частинний розв'язок $\widetilde{y}$ неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = Q_n(x) e^{\gamma x} x^r.$$

Тут $Q_n(x)$ – многочлен того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють γ.

Зауваження 1. При $\gamma = 0$ маємо випадок I, оскільки $f(x) = e^{0 \cdot x} P_n(x) = P_n(x)$.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

◀ Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Оскільки серед коренів характеристичного рівняння є тільки один корінь $\lambda = \gamma = 1$, то $r = 1$, і частинний розв'язок $\widetilde{y}$ треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Знаходимо $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$: $\widetilde{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$, $\widetilde{y}'' = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$. Підставляючи вирази для $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$ у вихідне рівняння, і, скорочуючи на $e^x \neq 0$, одержуємо тотожність:

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx) -$$

$$-4(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx) + 3(Ax^2 + Bx) = x,$$

або

$$-4Ax + 2A - 2B = x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 2A - 2B = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{1}{4}$. Отже, $\widetilde{y} = -\dfrac{1}{4}(x^2 + x)e^x$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x. \quad ▶$$

III. Права частина рівняння (19) $f(x) = e^{\gamma x}(P_n(x)\cos\delta x + P_m(x)\sin\delta x)$**, де** $P_n(x)$ **– многочлен степеня** n**, а** P_m **– многочлен степеня** m**.** У цьому випадку частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y = x^r e^{\gamma x}(Q_s(x)\cos\delta x + R_s(x)\sin\delta x),$$

де $Q_s(x)$ і $R_s(x)$ – многочлени степеня $s = \max\{m, n\}$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\gamma \pm \delta i$.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 5\sin 2x$.

◀ Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ є $\lambda_1 = 2i$ і $\lambda_2 = -2i$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд $y_{\text{з.о.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Права частина $f(x) = 5\sin 2x$ належить до розглядуваного типу, бо її можна записати у вигляді $f(x) = 0\cos 2x + 5\sin 2x$. Зауважимо, що $\gamma \pm \delta i = 0 \pm 2i$, і, отже, $r = 1$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\widetilde{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Диференціюючи $\widetilde{y}$ і підставляючи в неоднорідне рівняння, отримуємо

$$\widetilde{y}' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)x + (A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$\widetilde{y}'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)+$$
$$+(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)+$$

$$+(-4A\sin 2x + 4B\cos 2x);$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x)+$$
$$+(4A\cos 2x + 4B\sin 2x)x = 5\sin 2x.$$

Після зведення подібних членів, дістанемо

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Звідси, прирівнявши коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$, одержимо

$$\begin{cases} -4A = 5, \\ 4B = 0, \end{cases}$$

або $A = -\dfrac{5}{4}$, $B = 0$. Отже, $\tilde{y} = -\dfrac{5}{4}x\cos 2x$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x. \quad \blacktriangleright$$

Зауваження 2. Якщо $\widetilde{y}_1$ – розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

а $\widetilde{y}_2$ – розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то сума $\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2$ є розв'язком рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Зауваження 3. У випадку, коли права частина $f(x)$ не належить до попередніх типів, для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння використовують метод варіації сталих, який дозволяє знаходити частинний розв'язок неоднорідного рівняння за відомим загальним розв'язком однорідного рівняння.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (19). Нехай знайдено загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_{\text{з.о.}} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки, які утворюють фундаментальну систему. Візьмемо у цьому розв'язку замість сталих C_1 і C_2 деякі функції $z_1(x)$ і $z_2(z)$, і підберемо їх так, щоб функція

$$\widetilde{y} = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) \tag{21}$$

була розв'язком неоднорідного рівняння (19).

Продиференціювавши $\widetilde{y}$ по x, дістанемо

$$\widetilde{y}' = z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) + z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \tag{22}$$

Оскільки ми ввели дві невідомі функції z_1 і z_2, то для їхнього визначення треба мати два рівняння. За одне рівняння візьмемо

$$z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{23}$$

Тоді вираз (22) для $\tilde{y}'$ спроститься і набуде вигляду

$$\widetilde{y}' = z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \tag{24}$$

Диференціюючи цю рівність ще раз, одержимо

$$\widetilde{y}'' = z_1'(x)y_1'(x) + z_1(x)y_1''(x) + z_2'(x)y_2'(x) + z_2(x)y_2''(x). \tag{25}$$

Підставляючи (21), (24) і (25) у рівняння (19), дістанемо

$$(z_1'(x)y_1'(x) + z_1(x)y_1''(x) + z_2'(x)y_2'(x) + z_2(x)y_2''(x))+$$

$$+p(x)(z_1(x)y_1'(x)+z_2(x)y_2'(x))+q(x)(z_1(x)y_1(x)+z_2(x)y_2(x)) = f(x),$$

або

$$\begin{aligned} &z_1(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x))+ \\ &+z_2(x)(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x))+ \\ &+z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{aligned} \tag{26}$$

Оскільки функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками однорідного рівняння, то правильними є рівності

$$\begin{matrix} y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0, \\ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0, \end{matrix} \quad x \in [a;b].$$

Тому рівність (26) набуде вигляду

$$z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{27}$$

Рівняння (27) є другим рівнянням, яке повинні задовольняти функції z_1 і z_2.

Отже, для знаходження похідних від функцій $z_1(x)$ і $z_2(x)$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) = 0, \\ z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{28}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

який не дорівнює нулю для $x \in [a; b]$, бо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків. Тому z_1' і z_2' визначаються з системи (28) однозначно: $z_1'(x) = \varphi_1(x)$, $z_2'(x) = \varphi_2(x)$. Проінтегрувавши, знайдемо z_1 і z_2 і підставимо їх в (21). У результаті матимемо частинний розв'язок рівняння (19).

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, а тому фундаментальну систему утворюють функції $y_1(x) = \sin 2x$, $y_2(x) = \cos 2x$. Звідси випливає, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння згідно з формулою (21) запишемо у вигляді

$$\widetilde{y} = z_1(x) \sin 2x + z_2(x) \cos 2x. \tag{29}$$

Система (28) для знаходження $z_1'(x)$ і $z_2'(x)$ у даному випадку є такою:

$$\begin{cases} z_1'(x) \sin 2x + z_2'(x) \cos 2x = 0, \\ 2z_1'(x) \cos 2x - 2z_2'(x) \sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$z_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} = \frac{1}{2},$$

$$z_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{-2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$z_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad z_2(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|.$$

Довільних сталих не пишемо, бо шукаємо частинний розв'язок.

Підставивши знайдені $z_1(x)$ і $z_2(x)$ у (29), отримаємо частинний розв'язок $\widetilde{y}$ рівняння

$$\widetilde{y} = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|. \quad ▶$$

Вправи

1. Проінтегрувати рівняння і, де вказано, виділити розв'язок, який задовольняє початкові умови:
1) $y'' = \sin x + \cos x$; 2) $y'' = xe^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; 3) $y'' = 2x\ln x$; 4) $xy'' = y'$; 5) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$; 6) $y'' = y'\ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; 7) $3y'y'' = 2y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; 8) $yy'' + y'^2 = 0$; 9) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; 10) $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2. Розв'язати рівняння:
1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' - 8y' + 25 = 0$; 4) $y'' + 4y' = 0$;

5) $y'' + 2y' + 2y = 0$; 6) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
7) $y'' + y = 0$; 8) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;
9) $y'' + y' - 2y = -4$; 10) $y'' - 4y = 8x^3$;
11) $y'' - 2y' = 2e^x$; 12) $y'' + y' = xe^{-x}$;
13) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$; 14) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$;
15) $y'' + y = x + 2e^x$.

3. Попит і пропозиція на деякий товар визначаються співвідношеннями $q = 2p'' - p' - p + 15$, $s = 2p'' + p' + p + 5$, де p – ціна товару, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни від часу, за умови, що пропозиція і попит зрівноважені, а $p(0) = 6$; $q(0) = 10$; $s(0) = 10$.

4. Розв'язати подане нижче рівняння і згідно із заданими початковими або крайовими умовами, знайти частинний розв'язок:
1) $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
2) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$;
3) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
4) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$;
5) $\frac{1}{2}y''(t) + 3y'(t) + 17y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
6) $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 10$.

5. Знайти загальний розв'язок і розв'язати задачу Коші:
1) $y''(t) - y(t) = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
2) $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
3) $y''(t) + y(t) = 2\cos t$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$.

6. Довести, що: 1) $y(t) = te^{2t}$ є частинним розв'язком рівняння $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}$; 2) $y(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{2t}$ є частинним розв'язком рівняння $y''(t) - 21y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$.

7. Висота $x(t)$ в момент часу t тіла, яке вільно падає під дією сили земного тяжіння, задовольняє рівняння $x''(t) = -g$, де g – прискорення сили земного тяжіння. Виразити $x(t)$ через початкову висоту $x(0) = x_0$ і початкову швидкість $x'(0) = x_0'$. Якщо тіло падає з висоти h при нульовій початковій швидкості, то з якою швидкістю воно досягає Землі?

8. Урівноважений обсяг популяції деякого виду в заданому середовищі становить 1000 особин. Кількість популяції коливається навколо цього середнього значення і описується рівнянням $y''(t) = 4\pi^2(1000 - y(t))$, де $y(t)$ – кількість популяції в момент часу t (роки). Знайти кількість популяції через 6, 12 і 18 місяців, якщо $y(0) = 1500$, $y'(0) = 0$.

9. У моторного човна, який рухається прямолінійно зі швидкістю $v_0 = 5$ мм/с, вимикають мотор. При цьому русі човен зазнає опору води, сила якого пропорційна квадрату швидкості з коефіцієнтом $k = \dfrac{m}{50}$, де m – маса човна. Через який час швидкість човна зменшиться вдвоє і який шлях пройде човен за цей час?

10. Куля входить в дерев'яний брус товщиною 12 см зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з нього, пробивши його, зі швидкістю 60 м/с. Куля зазнає опору деревини, сила якого пропорційна квадрату швидкості руху. Знайти час проходження кулі через брус.

11. Знайти закон руху матеріальної точки масою m вздовж прямої OA під дією відштовхуючої сили, яка обернено пропорційна третьому степеню відстані x точки від нерухомого центра O.

Відповіді

1. 1) $y = -\sin x - \cos + C_1x + C_2$; 2) $y = (x-2)e^x + x + 2$; 3) $y = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{5}{18}x^3 + C_1x + C_2$; 4) $y = C_1x^2 + C_2$; 5) $y = C_1e^{x^2} + C_2$; 6) $y = x$; 7) $y = \left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3$; 8) $y^2 = C_1x + C_2$; 9) $y = -\ln|x-1|$; 10) $y = x^3 + 3x + 1$.

2. 1) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$; 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$;
3) $y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 4) $y = C_1 + C_2e^{-4x}$;
5) $y = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}$; 6) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;
7) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; 8) $y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{2x}$;
9) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 2$; 10) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$;
11) $y = c_1 + c_2e^{2x} - 2e^x$; 12) $y = c_1 + e^{-x}(c_2 - \frac{x^2}{2} - x)$;
13) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$;
14) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$;
15) $y = C_1\cos x + C_2\cos x + x + e^x$.

3. $p(t) = 5 + e^{-t}\cos t$.

4. 1) $y(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}$, $y(t) = \dfrac{3}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{3t}$; 2) $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}$, $y(t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-3t}}{e^2 - e^{-3}}$; 3) $y(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$, $y(t) = e^{2t} - 2te^{2t}$; 4) $y(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}$, $y(t) = 2(t-1)e^{3(t-1)}$; 5) $y(t) = C_1e^{-3t}\cos 5t + C_2e^{-3t}\sin 5t$, $y(t) = e^{-3t}\cos 5t + \dfrac{3}{5}e^{-3t}\sin 5t$; 6) $y(t) = C_1e^t\cos 2t + C_2e^t\sin 2t$, $y(t) = 2e^t\cos 2t + 4e^t\sin 2t$.

5. 1) $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t$, $y(t) = \dfrac{t}{2}e^t + \dfrac{1}{4}e^t + \dfrac{3}{4}e^{-t}$; 2) $y(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} + \frac{t^2}{2}e^{3t}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{3t} + te^{3t}$; 3) $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \sin t$, $y(t) = (t+2)\sin t + 5\cos t$.

7. $x(t) = x_0 + x'_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$, $v = \sqrt{2gh}$.

8. $y(t) = 500\cos 2\pi t + 1000$, $y(\frac{1}{2}) = 500$, $y(1) = 1500$, $y(\frac{3}{2}) = 500$.

9. $mS''(t) = -\dfrac{m}{50}\Big(S'(t)\Big)^2$, $S(0) = 0$, $S'(0) = 5$ м/с; $S(t) = 50\ln\dfrac{t+10}{10}$; $t_0 = 10$ с; $S-1 = S(10) \approx 34,5$ м.

10. Згідно з другим законом динаміки

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2,$$

де $x(t)$ – шлях, пройдений кулею в брусі за час t. Загальний розв'язок рівняння $x(t) = \dfrac{m}{k}\ln\Big(\dfrac{k}{m}t - C_1\Big) + C_2$. Сталі C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов $x(0) = 0$; $x'(0) = 200$ м/с, $C_1 = -\dfrac{1}{200}$, $C_2 = \dfrac{m}{k}\ln 200$. Тому $x(t) = \dfrac{m}{k}\ln\Big(200\dfrac{k}{m}t + 1\Big)$ або $t = \det\frac{m}{200k}\Big(e^{\frac{kx}{m}} - 1\Big)$. Коефіцієнт пропорційності знаходимо з умови, що при $x = 12$ см $= 0,12$ м, $x'(t_0) = 60$ м/с. Тоді

$$e^{\frac{k}{m}} = \Big(\frac{10}{3}\Big)^{\frac{25}{3}}, \quad k = \frac{m}{0,12}\ln\frac{10}{3} \approx 10,08 \text{ м}.$$

Отже,

$$t_0 = \frac{m}{200\cdot 10,08m}\Big(\Big(\frac{10}{3}\Big)^{\frac{25}{3}\cdot 0,12} - 1\Big) = \frac{1}{2000}\Big(\frac{10}{3} - 1\Big) \approx 0,00114 \text{ с}.$$

11. Згідно з другим законом динаміки $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{k}{x^3}$, де k – коефіцієнт пропорційності, $x(t)$ – відстань від рухомої точки до нерухомого центра в момент часу t. Зробимо очевидні перетворення, а потім проінтегруємо:

$$2x'x''dt = 2a^2x'\frac{dt}{x^3}, d(x')^2 = a^2 d\Big(-\frac{1}{x^2}\Big), x'^2 = a^2\Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{C_1}\Big),$$

$$x' = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x}, \frac{dx}{dt} = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x},$$

$$x^2 - C_1 = \frac{a^2}{C_1}(t + C_2)^2, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}, a^2 = \frac{k}{m}.$$

§4. Поняття про системи лінійних диференціальних рівнянь

У багатьох прикладних задачах треба визначити одночасно декілька функцій, які зв'язані між собою певними диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь називається **системою диференціальних рівнянь**. Обмежимося вивченням систем диференціальних рівнянь першого порядку в **нормальній формі**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t, x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Розв'язком системи (1) називається сукупність функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, які задовольняють кожне з рівнянь системи на проміжку T.

Для нормальної системи диференціальних рівнянь правильна **теорема Коші про існування і єдиність розв'язку**: *якщо праві частини рівнянь системи (1), тобто функції f і g неперервні за сукупністю змінних в деякій області Ω і мають в ній неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, то для довільної точки $(t_0; x_0; y_0) \in \Omega$ існує єдиний розв'язок системи $x(t)$, $y(t)$, який задовольняє початкові умови*

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

4.1. Інтегрування системи диференціальних рівнянь за допомогою зведення до одного рівняння другого порядку. Один із основних методів інтегрування системи диференціальних рівнянь полягає у зведенні цієї системи до одного рівняння другого порядку. Проінтегрувавши одержане рівняння, знайдемо одну з невідомих функцій, а другу функцію, по можливості без інтегрування, визначаємо з початкових рівнянь і рівнянь, які одержуються з них диференціюванням.

Приклад 1. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases} \tag{3}$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{4}$$

◀ Диференціюючи перше рівняння системи по t, знаходимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Підставивши в цю рівність вираз $\dfrac{dy}{dt}$ з другого рівняння системи, дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5y.$$

Замінивши функцію y її виразом з першого рівняння системи

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x, \tag{5}$$

одержимо лінійне однорідне рівняння другого порядку відносно невідомої функції $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7\frac{dx}{dt} - 2x - 5\left(\frac{dx}{dt} + 7x\right),$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 37x = 0. \tag{6}$$

Складемо характеристичне рівняння, і, знайшовши його корені, запишемо фундаментальну систему розв'язків, а отже, й загальний розв'язок:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 37} = -6 \pm i,$$

$$x_1(t) = e^{-6t}\cos t, \quad x_2(t) = e^{-6t}\sin t,$$

$$x(t) = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^{-6t}. \tag{7}$$

Продиференціювавши (7), дістанемо

$$\frac{dx}{dt} = e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) - 6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Підставляючи вирази для x і $\frac{dx}{dt}$ в рівність (5), і, зводячи подібні члени, отримуємо

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$

$$+7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t).$$

Функції

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{-6t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t) \end{cases} \tag{8}$$

визначають загальний розв'язок системи (3).

Виділимо із одержаного загального розв'язку (8) частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови (4). Для цього підставимо в рівності (8) $t = 0$, $x(0) = 0$, а $y(0) = 1$:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 1 = (C_2 + C_1)\, 1 + (C_2 - C_1)\, 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = e^{-6t} \sin t, \\ y = e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{cases} \blacktriangleright$$

4.2. Знаходження інтегровних комбінацій. Інтегрування системи (1) часто здійснюється за допомогою знаходження інтегровних комбінацій.

Інтегровною комбінацією називається диференціальне рівняння, яке є наслідком рівнянь системи (1), але вже легко інтегрується, наприклад, є рівнянням вигляду

$$d\psi(t, x, y) = 0$$

або рівнянням, яке за допомогою заміни змінних зводиться до інтегровного рівняння з однією невідомою функцією.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

◀ Додавши почленно рівняння системи, знайдемо одну інтегровну комбінацію

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y \quad \text{або} \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

звідки після інтегрування одержимо

$$\ln|x+y| = t + \ln|\overline{C}_1|,$$

$$|x+y| = |\overline{C}_1|e^t, \quad x+y = \pm\overline{C}_1 e^t,\ \overline{C}_1 \neq 0,$$

або

$$x+y = C_1 e^t, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Почленно віднявши від першого рівняння системи друге, отримаємо другу інтегровну комбінацію

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \quad \text{або} \quad \frac{d(x-y)}{-x-y} = -dt,$$

Проінтегрувавши, дістанемо, що

$$x-y = C_2 e^{-t}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, одержали систему двох рівнянь

$$\begin{cases} x+y = C_1 e^t, \\ x-y = C_2 e^{-t}, \end{cases}$$

з яких знаходимо загальний розв'язок системи

$$x = \frac{1}{2}(C_1 e^t + C_2 e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(C_1 e^t - C_2 e^{-t}). \blacktriangleright$$

Одна інтегровна комбінація дає можливість одержати рівність

$$\psi(t,x,y) = C_1,$$

яка називається **першим інтегралом** системи (1).

Отже, **першим інтегралом**

$$\psi(t, x, y) = C \tag{9}$$

системи рівнянь (1) називається рівність, яка перетворюється в тотожність при деякому значенні C, якщо замість $x(t)$ і $y(t)$ підставлено розв'язок системи (1).

Часто першим інтегралом називають також ліву частину $\psi(t, x, y)$ рівняння (9), і тоді перший інтеграл визначається як функція, що не є тотожно сталою, але зберігає стале значення на розв'язках системи (1).

Якщо знайдено дві інтегровні комбінації, то одержимо два перших інтеграли

$$\begin{cases} \psi_1(t, x, y) = C, \\ \psi_2(t, x, y) = C_2. \end{cases}$$

Якщо ці інтеграли незалежні, то з цих співвідношень можна знайти x і y, а отже, одержати загальний розв'язок системи (1).

Для знаходження інтегровних комбінацій часто зручно переходити до **симетричної форми запису** системи рівнянь (1):

$$\frac{dx}{\varphi_1(t, x, y)} = \frac{dy}{\varphi_2(t, x, y)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x, y)}, \tag{10}$$

де $\varphi_1(t, x, y) = \dfrac{f(t, x, y)}{\varphi_0(t, x, y)}$, $\varphi_2(t, x, y) = \dfrac{g(t, x, y)}{\varphi_0(t, x, y)}$.

У системі (10) змінні входять рівноправно, що інколи полегшує знаходження інтегровних комбінацій.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x^2 + y^2)t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4xyt. \end{cases}$$

◄ Додавши почленно обидва рівняння, дістаємо

$$\frac{d(x + y)}{dt} = (x + y)^2 2t,$$

звідки
$$-\frac{1}{x+y} = t^2 - C_1 \quad \text{або} \quad \frac{1}{x+y} + t^2 = C_1.$$

Віднімаючи почленно обидва рівняння, одержуємо
$$\frac{d(x-y)}{dt} = 2t(x-y)^2,$$
звідки
$$\frac{1}{x-y} + t^2 = C_2.$$

Отже, знайдено два перші інтеграли заданої системи
$$\psi_1(t,x,y) \equiv t^2 + \frac{1}{x+y} = C_1,$$
$$\psi_2(t,x,y) \equiv t^2 + \frac{1}{x-y} = C_2,$$
які є незалежними, оскільки
$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \end{vmatrix} =$$
$$= -\frac{2}{(x^2-y^2)^2} \neq 0, \quad x \neq y.$$

Тому загальним інтегралом системи є
$$t^2 + \frac{1}{x+y} = C_1, \quad t^2 + \frac{1}{x-y} = C_2.$$

Розв'язавши цю систему відносно x і y, дістанемо загальний розв'язок системи:
$$x = \frac{C_1 + C_2 - 2t^2}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}, \quad y = \frac{C_2 - C_1}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь
$$\frac{dt}{4y-5x} = \frac{dx}{5t-3y} = \frac{dy}{3x-4t}. \tag{11}$$

◀ Якщо помножити чисельники і знаменники дробів у системі (11) відповідно на 3, 4, 5 і додати чисельники і знаменники, то одержимо похідну пропорцію

$$\frac{3dt}{12y-15x}=\frac{4dx}{20t-12y}=\frac{5dy}{15x-20t}=\frac{3dt+4dx+5dy}{0}.$$

Звідси випливає, що $3dt+4dx+5dy=0$ або $d(3t+4x+5y)=0$, а отже, $3t+4x+5y=C_1$ – це перший інтеграл системи (11).

Аналогічно, якщо помножити в системі (11) чисельники і знаменники дробів відповідно на $2t$, $2x$, $2y$ і додати чисельники і знаменники, то дістанемо

$$\frac{2tdt}{8yt-10xt}=\frac{2xdx}{10tx-6yx}=\frac{2ydy}{6xy-8ty}=\frac{2tdt+2xdx+2ydy}{0}.$$

Звідси знаходимо другий інтеграл, бо

$$2tdt+2xdx+2ydy=0 \quad \text{або} \quad d(t^2+x^2+y^2)=0,$$

а отже, $t^2+x^2+y^2=C_2$.

Сукупність перших інтегралів, які є незалежними, визначає загальний інтеграл системи (11):

$$3t+4x+5y=C_1, \quad t^2+x^2+y^2=C_2, \quad \{C_1,C_2\}\subset\mathbb{R}. \blacktriangleright$$

4.3. Лінійні системи диференціальних рівнянь першого порядку. У багатьох прикладних задачах часто виникає необхідність розглядати системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Розглянемо систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=a_{11}x(t)+a_{12}y(t)+f(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=a_{21}x(t)+a_{22}y(t)+g(t), \end{cases} \qquad t\in T, \qquad (12)$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21} і a_{22} – сталі, а $f(t)$ і $g(t)$ – деякі відомі функції. Розв'язати цю систему на проміжку T означає знайти дві функції $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють обидва рівняння на цьому проміжку.

У попередніх пунктах доведено, що систему (12) можна звести до одного рівняння другого порядку. Нехай одна із заданих функцій $f(t)$ чи $g(t)$ (наприклад, $f(t)$) диференційовна на деякому проміжку T. Тоді функція $x(t)$, що є розв'язком системи (12), як випливає з першого рівняння цієї системи, є двічі диференційовною на T і

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_{11}\frac{dx(t)}{dt} + a_{12}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt}. \tag{13}$$

Тепер із другого рівняння системи (12) підставимо значення $\dfrac{dy}{dt}$ у рівність (13). Тоді отримаємо, що на проміжку T правильною є рівність

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_{11}\frac{dx(t)}{dt} + a_{12}(a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + g(t)) + \frac{df(t)}{dt} =$$

$$= a_{11}\frac{dx(t)}{dt} + a_{12}a_{21}x(t) + a_{12}a_{22}y(t) + a_{12}g(t) + \frac{df(t)}{dt}. \tag{14}$$

Далі з першого рівняння системи (12) знайдемо вираз для $a_{12}y(t)$ і підставимо його в (14). В результаті цього матимемо

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_{11}\frac{dx(t)}{dt} + a_{12}a_{21}x(t) +$$

$$+ a_{22}\Big(\frac{dx(t)}{dt} - a_{11}x(t) - f(t)\Big) + a_{12}g(t) + \frac{df(t)}{dt}.$$

Остаточно отримаємо, що на проміжку T функція $x(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx(t)}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x(t) =$$

$$= a_{12}g(t) - a_{22}f(t) + \frac{df(t)}{dt}. \tag{15}$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке можна розв'язати методами попереднього параграфа. Знайдений розв'язок рівняння (15) підставимо, наприклад, в перше рівняння системи (12), з якого знаходимо $y(t)$ за умови, що $a_{12} \neq 0$. Якщо ж $a_{12} = 0$, але $a_{22} \neq 0$, то знаходимо $y(t)$ із другого рівняння системи (12), як розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Отримана пара $x(t)$ і $y(t)$ є, очевидно, розв'язком системи (12).

Приклад 5 (модель міжвидової конкуренції). Однорідна система

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

описує взаємовплив популяцій двох конкуруючих видів на швидкість їхнього росту. Знайти кількість $x(t)$ і $y(t)$ особин обох видів у довільний момент часу t, якщо $x(0) = 100$, $y(0) = 200$ особин. Проаналізувати еволюцію кількості особин обох видів при зростанні часу t.

◄ Диференціюючи перше рівняння, дістаємо $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 2\dfrac{dx(t)}{dt} - \dfrac{dy(t)}{dt}$. Оскільки з другого рівняння випливає, що $\dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) + 2y(t) = -x(t)+2\Big(2x(t)-\dfrac{dx(t)}{dt}\Big)$, то $x(t)$ задовольняє рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, а тому загальним розв'язком диференціального рівняння є функція

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

З першого рівняння системи одержуємо, що

$$y(t) = -\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = -C_1e^t - 3C_2e^{3t} + 2C_1e^t + 2C_2e^{3t} = C_1e^t - C_2e^{3t}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи має вигляд

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}, \\ y(t) = C_1e^t - C_2e^{3t}. \end{cases}$$

Оскільки $x(0) = 100$ і $y(0) = 200$, то для знаходження сталих C_1 і C_2 одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 100, \\ C_1 - C_2 = 200, \end{cases}$$

звідки випливає, що $C_1 = 150$, $C_2 = -50$.

Тому частинний розв'язок задачі

$$\begin{cases} x(t) = 150e^t - 50e^{3t}, \\ y(t) = 150e^t + 50e^{3t}. \end{cases}$$

Проаналізуємо одержаний розв'язок. Очевидно, що вимирання першого виду відбудеться, коли $150e^t - 50e^{3t} = 0$, тобто $e^{2t} = 3$ або $t = \dfrac{1}{2}\ln 3 \approx 0,552$ од. часу. (Зауважимо, що другий вид ніколи не знищиться!). Отже, при $t \geq 0$ і $t \leq t_0 = \dfrac{1}{2}\ln 3$ розвиток популяцій характеризується цим рівняннями. Після того, як мине t_0 одиниць часу другий вид продовжує зростати згідно з рівнянням $y'(t) = 2y(t)$. Його загальним розв'язком є функція $y(t) = y(t_0)e^{2(t-t_0)}$ при $t \geq t_0$. При $t_0 = \dfrac{1}{2}\ln 3$ $y(t_0) = 150e^{\frac{1}{2}\ln 3} + 50^{\frac{3}{2}\ln 3} = 150e^{\ln\sqrt{3}} + 50e^{\ln\sqrt{27}} = 150\sqrt{3} + 50\sqrt{27} = 300\sqrt{3}$. Для $t \geq \ln\sqrt{3}$ ріст популяції другого виду характеризується функцією $y(t) = 300\sqrt{3}e^{2t}e^{-\ln 3} = 100\sqrt{3}e^{2t}$. ▶

4.3.1. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо однорідну систему (12), тобто систему вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t). \end{cases} \tag{16}$$

Для інтегрування таких систем застосовують **метод Ейлера**.

Шукатимемо розв'язок системи (16) у вигляді

$$x = \gamma_1 e^{\lambda t}, \quad y = \gamma_2 e^{\lambda t}. \tag{17}$$

Підставивши (17) в (16) і скоротивши на $e^{\lambda t} \neq 0$, дістанемо систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Відомо, що система (18) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Рівняння (19) називається **характеристичним рівнянням**.

У залежності від того, які корені характеристичного рівняння (19) відповідним чином будується сукупність лінійно незалежних розв'язків системи (16), а отже, і загальний розв'язок цієї системи. Продемонструємо цей метод на конкретних прикладах.

Приклад 6. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

◄ Шукатимемо частинний розв'язок системи у вигляді (17). Тоді одержимо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Воно має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Побудуємо частинний розв'язок вигляду (17), що відповідає кореневі $\lambda_1 = 1$. Згідно з (18), числа γ_1 і γ_2 є розв'язком системи

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

яка зводиться до одного рівняння

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

а тому одне із чисел γ_1, γ_2 можна вибрати довільно. Покладемо $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Звідси випливає, що характеристичному числу $\lambda_1 = 1$ відповідно частинний розв'язок

$$x_1 = e^t, \quad y_1 = -e^t.$$

Аналогічно знаходимо частинний розв'язок, який відповідає характеристичному числу $\lambda_2 = 2$:

$$x_2 = 2e^{2t}, \quad y_2 = -3e^{2t}.$$

Отже, загальний роз'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}, \end{cases} \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Для того щоб знайти частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, підставимо в загальний розв'язок $t = 0$, $x = -1$, $y = 2$:

$$\begin{cases} -1 = C_1 + 2C_2, \\ 2 = -C_1 - 3C_2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1$, $C_2 = -1$.

Тому шуканим розв'язком є

$$\begin{cases} x(t) = e^t - 2e^{2t}, \\ y(t) = -e^t + 3e^{2t}. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$\blacktriangleleft$ Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$. Знайдемо розв'язок вигляду

$$x = \gamma_1 e^{(2+i)t}, \quad y = \gamma_2 e^{(2+i)t},$$

який відповідає характеристичному числу $\lambda_1 = 2 + i$. Згідно з (18) невідомі γ_1 і γ_2 знаходимо з системи

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

яка зводиться до одного рівняння $-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Якщо взяти $\gamma_1 = 1$, то дістанемо, що $\gamma_2 = -i$. Отже, розв'язок, який відповідає λ_1 має вигляд

$$\begin{cases} x = e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i \sin t), \\ y = -ie^{(2+i)t} = e^{2t}(\sin t - i \cos t). \end{cases}$$

Тут ми скористалися тим, що

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

Якщо в одержаному розв'язку виділити дійсну та уявну частини, то одержимо два дійсних лінійно незалежних розв'язки:

$$x_1 = e^{2t} \cos t, \quad y_1 = e^{2t} \sin t,$$

$$x_2 = e^{2t} \sin t, \quad y_2 = -e^{2t} \cos t.$$

Загальним розв'язком системи є

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t). \end{cases} \blacktriangleright$$

Приклад 8. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$$

◀ Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

має кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Розв'язок системи слід шукати у вигляді

$$x = (\gamma_{11} + \gamma_{21} t)e^{3t}, \quad y = (\gamma_{12} + \gamma_{22} t)e^{3t}.$$

Підставивши ці вирази, наприклад, у перше рівняння системи, дістанемо

$$3(\gamma_{11} + \gamma_{21} t) + \gamma_{21} = 2(\gamma_{11} + \gamma_{21} t) + (\gamma_{12} + \gamma_{22} t).$$

Якщо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах цієї рівності, то одержимо

$$\begin{cases} 3\gamma_{11} + \gamma_{21} = 2\gamma_{11} + \gamma_{12}, \\ 3\gamma_{11} = 2\gamma_{21} + \gamma_{22}. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\gamma_{12} = \gamma_{11} + \gamma_{21}, \quad \gamma_{22} = \gamma_{21}.$$

Величини γ_{11} і γ_{21} є довільними. Якщо позначити їх відповідно через C_1 і C_2, то дістанемо, що $\gamma_{12} = C_1 + C_2$, $\gamma_{22} = C_2$. Тому загальний розв'язок системи має вигляд

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \quad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}. \blacktriangleright$$

4.3.2. Лінійні неоднорідні системи рівнянь із сталими коефіцієнтами. Розглянемо неоднорідну лінійну систему зі сталими коефіцієнтами (12). Як і у випадку неоднорідного лінійного рівняння другого порядку, доведено, що загальний розв'язок неоднорідної системи (12) є сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи (16) і будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи (12).

Розглянемо деякі методи інтегрування неоднорідних лінійних систем.

4.3.2.1. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Ідея цього методу полягає в тому, що спочатку знаходять загальний розв'язок відповідної однорідної системи (16). Потім шукають загальний розв'язок неоднорідної системи (12) у такому самому вигляді як загальний розв'язок системи (16), але замість сталих C_1 і C_2 беруть деякі функції, які знаходять, підставивши цей розв'язок в неоднорідну систему.

Приклад 9. За допомогою методу варіації сталих розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases} \tag{20}$$

◄ Спочатку розв'яжемо відповідну однорідну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases} \tag{21}$$

З другого рівняння системи (21) маємо $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, а тому $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2}$. Підставимо ці вирази для x і $\dfrac{dx}{dt}$ у перше рівняння системи (21):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0. \tag{22}$$

Оскільки характеристичне рівняння $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ для рівняння (22) має різні корені $\lambda_1 = -3$ і $\lambda_2 = 2$, то загальним розв'язок цього рівняння є $y = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$.

Тоді $x = y - \dfrac{dy}{dt} = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t} + 3C_1e^{-3t} - 2C_2e^{2t} = 4C_1e^{-3t} - C_2e^{2t}$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи (21)

$$\begin{cases} x = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \\ y = 4C_1e^{-3t} - C_2e^{2t}. \end{cases}$$

Розв'язок неоднорідної системи (20) шукатимемо у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1(t)e^{-3t} + C_2(t)e^{2t}, \\ y = 4C_1(t)e^{-3t} - C_2(t)e^{2t}. \end{cases} \tag{23}$$

Підставивши (23) в (20) і звівши подібні члени, дістанемо

$$\begin{cases} 4C_1'(t)e^{-3t} - C_2'(t)e^{2t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)e^{-3t} + C_2'(t)e^{2t} = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{(3t^2 + 8t + 2)}{10}e^{3t}, \\ C_2'(t) = \dfrac{(6t^2 - 4t - 1)}{5}e^{-2t}, \end{cases}$$

Якщо проінтегрувати, то одержимо

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{10}(2t + t^2)e^{3t} + \overline{C}_1, \\ C_2(t) &= -\frac{1}{5}(t + 3t^2)e^{-2t} + \overline{C}_2, \end{aligned} \tag{24}$$

де $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ – довільні сталі.

Підставивши (24) у (23), отримаємо загальний розв'язок системи (20)

$$\begin{cases} x = 4\overline{C}_1 e^{-3t} - \overline{C}_2 e^{2t} + t + t^2, \\ y = \overline{C}_1 e^{-3t} + \overline{C}_2 e^{2t} - \dfrac{1}{2}t^2, \qquad \{\overline{C}_1, \overline{C}_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{cases}$$

4.3.2.2. Метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод застосовується при розв'язуванні неоднорідної системи (12), коли функції f і g мають спеціальний вигляд: многочлени $P_m(t)$, показникові функції $e^{\alpha t}$, синуси і косинуси $\sin \beta t$, $\cos \beta t$ і добутки цих функцій. У залежності від вигляду f та g і знаходять частинний розв'язок неоднорідної системи, аналогічно як у випадку одного рівняння.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + e^{2t}. \end{cases} \tag{25}$$

◀ Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases} \tag{26}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Кореню $\lambda_1 = 2$ відповідає частинний розв'язок системи

$$x = \gamma_1 e^{2t}, \quad y = \gamma_2 e^{2t},$$

де γ_1 і γ_2 є, згідно з (18), розв'язком системи

$$\begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо, наприклад, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -1$, а тому

$$x_1 = 2e^{2t}, \quad y_1 = -e^{2t}.$$

Кореню $\lambda_2 = 3$ відповідає частинний розв'язок

$$x = \gamma_1 e^{3t}, \quad y = \gamma_2 e^{3t}.$$

Числа γ_1 і γ_2 знаходимо з системи

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

яку задовольняють, наприклад, числа $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Тоді другий частинний розв'язок системи (26)

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_1 = -e^{3t}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Частинний розв'язок системи (25) шукатимемо у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{x} = Ke^t + (Lt + M)e^{2t}, \\ \tilde{y} = Ne^t + (Pt + Q)e^{2t}, \end{cases} \tag{27}$$

бо $\alpha_1 = 1$ не збігається з коренем характеристичного рівняння, а $\alpha_2 = 2$ дорівнює $\lambda_1 = 2$.

Підставляючи (27) в (25), маємо

$$Ke^t + 2(Lt+M)e^{2t} + Le^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} - 2Ne^t - 2(Pt+Q)e^{2t} + e^t,$$

$$Ne^t + 2(Pt+Q)e^{2t} + Pe^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} + 4Ne^t + 4(Pt+Q)e^{2t} + e^{2t}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при e^t, e^{2t} і te^{2t} в обох частинах цих тотожностей, одержимо з першої:

$$\begin{array}{c|l} e^t & K = K - 2N + 1, \\ e^{2t} & 2M + L = M - 2Q, \\ te^{2t} & 2L = L - 2P, \end{array}$$

а з другої:

$$\begin{array}{c|l} e^t & N = K + 4N, \\ e^{2t} & 2Q + P = M + 4Q + 1, \\ te^{2t} & 2P = L + 4P. \end{array}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо, що $K = -\dfrac{3}{2}$, $L = 2$, $M = 0$, $N = \dfrac{1}{2}$, $P = -1$, $Q = -1$.

Отже, частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} \tilde{x} = -\dfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \\ \tilde{y} = \dfrac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}. \end{cases}$$

Тому загальним розв'язком системи (25) є

$$\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \dfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \\ y = -C_1e^{2t} - C_2e^{3t} + \dfrac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}, \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \blacktriangleright \end{cases}$$

Приклад 11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases} \tag{28}$$

◀ Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Загальний розв'язок відповідної однорідної системи такий:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}, \\ y = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{cases}$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідної системи (28), пам'ятаючи, що $f(t) = 0$, $g(t) = -5\sin t$. Оскільки число $\gamma \pm \delta i = 0 \pm i$ не є коренем характеристичного рівняння, то шукатимемо частинний розв'язок у вигляді

$$\tilde{x} = A\cos t + B\sin t, \quad \tilde{y} = M\cos t + N\sin t$$

і підставимо в систему (28):

$$\begin{cases} -A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2M\cos t + 2N\sin t, \\ -M\sin t + N\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t. \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin t$ і $\cos t$ в обох частинах рівностей:

$$\begin{cases} -A = B + 2N, \\ B = A + 2M, \\ -M = B - 5, \\ N = A, \end{cases}$$

звідки $A = -1$, $B = 3$, $M = 2$, $N = -1$. Тому

$$\begin{cases} \tilde{x} = -\cos t + 3\sin t, \\ \tilde{y} = 2\cos t - \sin t. \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи (28) має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t, \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t. \blacktriangleright \end{cases}$$

Вправи

1. Методом виключення розв'язати системи диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$ якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 4;$

3) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + \\ +3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x}. \end{cases}$

2. За допомогою методу інтегровних комбінацій розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t}, \end{cases}$ якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 1;$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x + 3y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x + 3y}, \end{cases}$ якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 2;$

4) $\dfrac{dt}{y - x} = \dfrac{dx}{t - y} = \dfrac{dy}{x - t};$ 5) $\dfrac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \dfrac{dx}{2tx} = \dfrac{dy}{2ty}.$

3. Методом Ейлера розв'язати систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$.

4. Якщо $x(t)$ – кількість виду хижак, а $y(t)$ – кількість виду жертва на момент часу t, то при певних припущеннях можна вважати, що швидкість росту їхніх популяцій описується системою лінійних диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$ Знайти кількість популяцій обох видів в довільний момент часу t, якщо $x(0) = y(0) = 1000$ особин. Коли наступить вимирання жертви?

5. Речовина S розпадається на дві речовини S_1 і S_2 зі швидкістю утворення кожної з них, яка пропорційна кількості речовини, що не розклалася. Знайти закон зміни кількості x і y речовин S_1 і S_2 в залежності від часу t, якщо $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, а $x(1) = \dfrac{m}{8}$, $y(1) = \dfrac{3m}{8}$, де m – початкова кількість речовини S.

6. Методом варіації сталих розв'язати лінійну неоднорідну систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x - y = -e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x - 2y = 6e^{2t}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - 2x + \cos t + \sin t \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = -2$; 3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$.

7. Розв'язати неоднорідну лінійну систему:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

Відповіді

1. 1) $\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + 7e^t + e^{-t}, \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + e^t + 2e^{-t}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = C_2e^{C_1t}, \\ y = C_1C_2e^{C_1t}. \end{cases}$

2. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + t = C_1, \\ \dfrac{1}{x-y} + t = C_2; \end{cases}$ 2) $x = t + e^{-t}$, $y = e^t$;

3) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{8} + 1, \\ y = \dfrac{t}{4} + 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} t + x + y = C_1, \\ t^2 + x^2 + y^2 = C_2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1, \\ \dfrac{t^2 + x^2 + y^2}{x} = C_2. \end{cases}$

3. 1) $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^t, \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = ((C_1 - C_2)\cos t + \\ \quad +(C_1 + C_2)\sin t)e^{2t}, \\ y = 2(C_1\cos t + C_2\sin t)e^{2t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^{3t}, \\ y = (C_1t + C_1 + C_2)e^{3t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 5C_1\cos 2t + 5C_2\sin 2t, \\ y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - \\ \quad -(2C_1 + 4C_2)\sin 2t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1 + C_2t), \\ y = e^{-2t}(-C_1 + C_2 - C_2t). \end{cases}$

4. $x(t) = 1000e^t(\cos t + \sin t)$, $y(t) = 1000e^t(\cos t - \sin t)$; вимирання жертви наступить при $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(m - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(m - x - y); \end{cases}$ $k_1 = \dfrac{1}{4}\ln 2$, $k_2 = \dfrac{3}{4}\ln 2$,

$\begin{cases} x = \dfrac{m}{4}(1 - 2e^{-t}), \\ y = \dfrac{3m}{4}(1 - 2e^{-t}). \end{cases}$

6. 1) $\begin{cases} x = \dfrac{8}{3}e^{2t} + 2C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = \dfrac{29}{3}e^{2t} + 3C_1e^t + C_2e^{-t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = (1 - t)\cos t - \sin t, \\ y = (t - 2)\cos t + t\sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{cases}$

7. 1) $\begin{cases} x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + t, \\ y = C_1\sin 2t - C_2\cos 2t + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -C_1\sin t + C_2\cos t - \cos t, \\ y = C_1\cos t + C_2\sin t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t + 13)e^t, \\ y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t + 6)e^t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t. \end{cases}$

Література

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432 с.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Задачник. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

3. *Баврин И.И.* Высшая математика. – М.: Просвещение, 1980. – 384 с.

4. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

5. *Гроссман С., Тернер Дж.* Математика для биологов: Пер. с англ. – М.: Высшая школа, 1983. – 383 с.

6. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах, Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с., Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 365 с.

7. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

8. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

9. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1992. – 228 с.

10. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.

11. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Математика для економістів: теорія та застосування. Підручник. – К.: Кондор, 2007. – 596 с.

12. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.

13. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 471 с.

14. *Шнейдер В.Е. и др.* Краткий курс высшей математики (в двух томах). Т. 1. – М.: Высшая школа, 1978. – 384 с., Т.2. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.

Предметний покажчик

Зміст

Навчальне видання

Лавренчук Володимир Петрович
Настасієв Павло Павлович
Мартинюк Ольга Василівна
Кондур Оксана Созонтівна

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Підписано до друку 9.12.2009. Формат 60 х 84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум.друк.арк. 30,7.
Обл.-вид. арк. 33. Зам. 50-п. Тираж 300.

Видавництво "Книги – XXI"
Україна, 59000, м. Сторожинець, Чернівецької обл.
вул. О. Кобилянської, 7
Свідоцтво про державну реєстрацію
ДК № 1839 від 10.06.2004 р.

Друк ПП Валь Л. О.