В.П.Лавренчук, П.П.Настасієв,
О.В.Мартинюк, О.С.Кондур

# Вища математика

## Загальний курс

### Частина I

## Лінійна алгебра й аналітична геометрія

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
*як навчальний посібник для студентів*
*вищих навчальних закладів*

Чернівці
Книги – XXI
2010

ББК 22.11я73
Л 135
УДК 51(075.8)

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист про надання грифу №1.4/18-Г-239 від 28.01.08 р.)**

Рецензенти:

*Євтухов В.М.,* доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова,

*Іванчов М.І.,* доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка,

*Ільків В.С.*, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри обчислювальної математики та програмування НУ „Львівська політехніка”,

*Никифорчин О.Р.,* кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С.**
**Л 135** Вища математика. Загальний курс. Частина 1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія: Навчальний посібник. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – 319 с.
**ISBN 978- 966- 2147- 72- 8**

Посібник написаний у відповідності з програмою курсу вищої математики для нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Матеріал викладено строго і доступно. У кожному розділі курсу наведено велику кількість прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал, а також багато задач і вправ для самостійної роботи.

Перша частина посібника містить такі розділи: елементи векторної та лінійної алгебри, аналітичну геометрію на площині та в просторі, а також елементи математичного програмування.

Для студентів напрямів: біологія, хімія, географія, туризм, землевпорядкування та кадастр, економічні та інженерно-економічні.

ББК 22.11я73

**ISBN 978- 966- 2147- 72- 8**

## Передмова

У процесі історичного розвитку взаємозв'язок математики з іншими науками був неоднаковим. Одні науки систематично і ґрунтовно використовували математичні методи, інші – лише поверхнево. Істотний вплив на глибину та характер цих взаємозв'язків мали рівень розвитку математичного апарату і ступінь зрілості тієї науки, в межах якої передбачалося застосування математики. Останнє означає досягнення наукою відповідного рівня накопичення і систематизації знань про об'єкти, які вивчаються, можливість опису їхніх основних характеристик і властивостей на мові математичних понять і співвідношень або, як тепер прийнято говорити, можливість побудови математичної моделі об'єкту, що досліджується. Математична модель ґрунтується на деякому спрощенні та ідеалізації й тому ніколи не буває тотожною з розглядуваним об'єктом, не передає всіх його властивостей і особливостей, але є його приблизним відображенням. Однак, саме завдяки тому, що вдається замінити реальний об'єкт його моделлю, з'являється можливість математичного формулювання задачі, вивчення і використання для аналізу його властивостей відповідного математичного апарату. Цей апарат не залежить від конкретної природи об'єкту і тому дозволяє математично описати широке коло фактів і спостережень, провести їхній детальний кількісний аналіз, передбачити поведінку об'єкту в різних умовах, тобто зпрогнозувати результати майбутніх спостережень.

Загальновідомо, що математичні моделі давно і з успіхом використовуються в механіці, фізиці та астрономії. У сучасний період математичні методи знайшли широке застосування також у біології, хімії, географії, економіці та інших науках.

Посібник охоплює матеріал з курсу вищої математики для студентів, які навчаються у вищих навчальних закладах за технічними, економічними, біологічними, хімічними та географічними спеціальностями. Значна увага в ньому приділяється не лише формулюванню і вивченню необхідних математичних понять і фактів, але й побудові математичних моделей тих процесів, які досліджуються.

Основу посібника склали курси лекцій з вищої математики, що читалися авторами протягом багатьох років студентам вказаних спеціальностей Чернівецького національного університету, Чернівецького торговельно-економічного інституту Київського національного торговельно-економічного університету, Прикарпатського національного університету.

Кожний розділ посібника поділено на параграфи і пункти, в яких у логічній послідовності вводяться поняття і факти курсу вищої математики. Автори вважали за доцільне розглядати доведення лише тих теорем, доведення яких є типовими і повчальними для того чи іншого розділу вищої математики, відображає його основні ідеологічні засади і служить поглибленому вивченню. Крім того, всі теоретичні положення курсу ілюструються прикладами, які полегшують засвоєння матеріалу. Значна увага авторами приділяється формуванню у студентів вмінь і навичок складання математичних моделей в економічних, біологічних, фізичних, хімічних та географічних науках та описанню і алгоритмізації методів їхнього розв'язування. Ми вважаємо, що це є одним із найголовніших завдань вивчення курсу вищої математики у вузах студентами нематематичних спеціальностей. Кожний параграф посібника завершується вправами, які пропонуються для розв'язування в аудиторії або для самостійної роботи. Тому його можна використовувати і як збірник задач і вправ.

У першій частині посібника викладено достатньо повно матеріал, що стосується теорії множин, дійсних чисел, різних систем координат на площині і в просторі, основ лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині і в просторі. Крім того, розглянуто елементи лінійного програмування, включаючи питання двоїстості та транспортну задачу.

Короткий виклад теоретичного матеріалу та описання алгоритмів розв'язування задач, разом з наведеними прикладами дають можливість кожному, хто буде ним користуватися, опанувати програмний матеріал і навчитися його застосовувати. При цьому автори звертали велику увагу на те, щоб мова посібника була лаконічною, основні факти і твердження подавались просто й зрозуміло, і в той же час строго математично.

# Розділ 1
# Деякі питання теорії множин. Декартові координати на прямій, площині та в просторі. Полярна та сферична системи координат

У цьому розділі розглянемо деякі поняття теорії множин, комбінаторики, математичної логіки, дійсних чисел, поняття декартових координат на прямій, площині та в просторі, а також познайомимося з полярною, циліндричною та сферичною системами координат.

## §1. Основні поняття теорії множин та математичної логіки

**1.1. Множини та дії над ними.** Сукупність, об'єднання, система, набір об'єктів певної природи називається **множиною**. При цьому треба чітко окреслити клас всіх об'єктів, що розглядаються, який називається **універсальною множиною**. Об'єкти, з яких складається множина, називаються її **елементами** або **точками**. Множини бувають **скінченними** і **нескінченними**, що визначається кількістю їхніх елементів. Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\emptyset$. Ця множина вважається скінченною. Множини найчастіше позначають великими літерами латинського алфавіту $A$, $B$, $C$, ..., $X$, $Y$, $Z$, а їхні елементи – малими $a$, $b$, $c$, ..., $x$, $y$, $z$. Якщо $x$ – елемент множини $X$, то пишуть $x \in X$ ($x$ належить $X$). Якщо $x$ не є елементом множини $X$, то пишуть $x \notin X$ або $x \bar{\in} X$ ($x$ не належить $X$).

Множина $X$, яка складається з деяких елементів множини $Y$, називається **підмножиною** множини $Y$. Записують цей факт так: $X \subset Y$ або $Y \supset X$ ($X$ міститься в $Y$ або $Y$ містить $X$). Вважають, що $\emptyset \subset X$ для довільної множини $X$, $X \subset X$ і $X \subset U$, де $U$ – універсальна множина. Символи $\in, \subset$ називають відповідно **знаками належності** і **включення**.

Якщо множини $X$ і $Y$ складаються з одних і тих самих елементів, то кажуть, що вони збігаються і пишуть $X = Y$, що рівносильно включенням $X \subset Y$ і $Y \subset X$.

Множина, елементами якої є числа, називається **числовою множиною**. Зокрема, проміжки числової осі є числовими множинами.

Для описання множини, утвореної з будь-яких елементів, користуватимемося двома способами.

Для довільних об'єктів $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ множину з цих об'єктів позначатимемо символом $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, тобто перераховуючи всі її елементи. Наприклад, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{2, 5, 7, 10\}$. Інший спосіб задання полягає в описанні спільної властивості об'єктів, з яких утворюємо множину: $A = \{x : P(x)\}$. Наприклад, $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 7\}$ – множина всіх дійсних чисел, які задовольняють нерівність $2 < x < 7$; $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \leq 0\}$ – сукупність розв'язків нерівності $x^2 - 9 \leq 0$, тобто множина точок відрізка $[-3; 3]$; $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ є сукупністю коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, тобто це множина з двох елементів 1 і 2.

Основними числовими множинами є такі множини:

1) натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

2) цілих чисел $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

3) раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, тобто множина $\mathbb{Q}$ складається з усіх звичайних дробів;

4) дійсних чисел $\mathbb{R} = \{a_0, a_1a_2 \ldots : a_0 \in \mathbb{Z},\ a_k \in \{0, 1, ..., 9\},\ k \in \mathbb{N}\}$, тобто множина $\mathbb{R}$ складається з усіх нескінченних десяткових дробів. Для них правильні співвідношення $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Нехай $a$ і $b$ – дійсні числа, причому $a < b$. Використовуватимемо такі позначення:

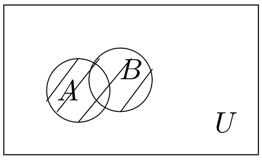
$$
\begin{array}{ll}
\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a; b]; & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} = (a; b]; \\
\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} = [a; b); & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = (a; b); \\
\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} = [a; +\infty); & \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = (a; +\infty); \\
\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} = (-\infty; b]; & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = (-\infty; b).
\end{array}
$$

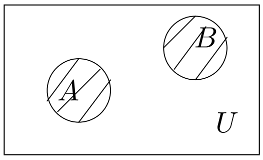
Ці множини називаються **проміжками**, причому $[a; b]$ називають **відрізком** або **сегментом**, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; +\infty)$ і $(-\infty; b]$ – **напівінтервалами**, а $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ – **інтервалами**. Проміжки $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ називають **об-**

**меженими**; $a$ і $b$ – їхніми **кінцями**. Решту проміжків називають **необмеженими**.

Над множинами можна виконувати такі дії: об'єднання, переріз, доповнення, різниця, декартів добуток.

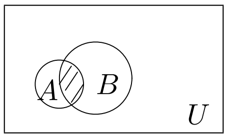
**Об'єднанням** $A \cup B$ двох множин $A$ і $B$ називають множину, елементи якої належать хоча б одній з цих множин.



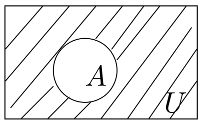

Аналогічно, об'єднанням кількох множин $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ називається множина $C$ усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин: $C = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ або $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

**Перерізом** множин $A$ і $B$ називається множина, елементи якої належать обом цим множинам і позначається вона $A \cap B$.

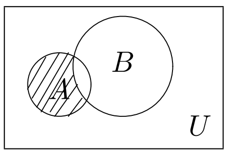



Перерізом кількох множин $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ називається множина $C$ усіх їх спільних елементів і позначається так: $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ або $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

**Доповнення** множини $A$ – це така множина $\overline{A}$, елементами якої є лише ті елементи відповідної універсальної множини $U$, що не належать $A$.




**Різниця** множин $A$ і $B$ – множина $A \setminus B$, яка дорівнює $A \cap \overline{B}$, тобто складається з тих елементів множини $A$, що не належать $B$.




**Декартів добуток** множин $A$ і $B$ – це така множина $A \times B$ – елементами якої є всі пари $(a, b)$, де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Аналогічно визначається декартів добуток множин $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, а саме: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.

**Приклад 1.** Знайти $A \cup B$ і $A \cap B$, якщо: 1) $A = \{-2, -1, 0, 3, 5\}$, $B = \{-2, 0, 4, 5\}$; 2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1\}$; 3) $A = [0; 1)$, $B = (\frac{1}{2}; 2]$.

◀ Маємо 1) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{-2, 0, 5\}$;

2) $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \emptyset$;

3) $A \cup B = [0; 2]$, $A \cap B = (\frac{1}{2}; 1)$. ▶

**Приклад 2.** Довести, що $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для довільних множин $A$ і $B$.

◀ Нехай $x \in \overline{A \cup B}$. Тоді $x \notin A \cup B$, звідки випливає, що $x \notin A$ і $x \notin B$, тобто $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$. Останнє означає, що $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, і отже, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Повторивши ці міркування у зворотному порядку, одержимо $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$. Тому $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ▶

**Приклад 3.** Нехай множини $A$, $B$, $C$ мають відповідно два, чотири і шість елементів. Скільки елементів має множина $A \times B \times C$?

◀ Згідно з означенням декартового добутку $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$. Оскільки $a$ може набувати два значення з $A$, $b$ – чотири значення з $B$, $c$ – шість значень з $C$, то всього матимемо $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ трійок вигляду $(a, b, c)$. Тому $A \times B \times C$ має 48 елементів. ▶

Будемо говорити, що між елементами множин $A$ і $B$ встановлено **взаємно однозначну відповідність**, якщо кожному елементу множини $A$ відповідає єдиний елемент множини $B$ і, навпаки, кожному елементу множини $B$ відповідає єдиний елемент множини $A$.

Якщо між елементами множин $A$ і $B$ встановлено взаємно однозначну відповідність, то ці множини називають **еквівалентними** і пишуть $A \sim B$. Очевидно, що еквівалентні скінченні множини мають однакову кількість елементів або, як кажуть, мають однакову потужність.

Множину, яка еквівалентна множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, називають **зліченною**. Очевидно, що всі зліченні множини еквівалентні.

**1.2. Елементи комбінаторики.** У багатьох прикладних задачах доводиться підраховувати число всіх підмножин даної скінченної множини, які задовольняють певні умови. Ці задачі вивчає **комбінаторика**.

Нехай $A$ – множина, число елементів якої $N(A) = n$. Таку множину називають $n$-множиною.

В основі багатьох теорем і формул комбінаторики лежать правила суми і добутку.

**Правило суми.** Якщо деякий об'єкт $a$ можна вибрати $m$ способами, а об'єкт $b$ – $n$ способами, причому ніякий вибір $a$ не збігається з жодним з виборів $b$, то один з об'єктів $a$ або $b$ можна вибрати $m + n$ способами.

На мові множин дане правило означає, що коли $A$ є $m$-множиною, $B$ – $n$-множиною, причому $A \cap B = \emptyset$, то $N(A \cup B) = N(A) + N(B) = m + n$.

**Правило добутку.** Якщо об'єкт $a$ можна вибрати $m$ способами і при кожному виборі об'єкта $a$ об'єкт $b$ можна вибрати $n$ способами, то вибір пари $(a, b)$ можна здійснити $mn$ способами.

На мові множин правило добутку означає, що коли $A$ є $m$-множиною, $B$ – $n$-множиною, причому $A \cap B = \emptyset$, то $N(A \times B) = N(A) \cdot N(B) = mn$.

**Приклад 4.** Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) жодна з цифр не повторюється; б) цифри можуть повторюватися?

◄ а) Першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана 5 способами, третя – 4 способами, четверта – 3 способами. Згідно з правилом множення, загальна кількість способів дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

б) У цьому випадку першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, тобто 5 випадків. Для кожної наступної маємо 6 випадків (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, шукана кількість чотиризначних чисел дорівнює $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$. ►

Множину $A$ називають **упорядкованою**, коли в ній встановлено відношення порядку $\prec$, яке має такі властивості:

1) для будь-яких $\{a, b\} \subset A$ або $a \prec b$ ($a$ передує $b$), або $b \prec a$;

2) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$.

Для впорядкування $n$-множини $A$ досить кожному її елементу приписати один з номерів 1, 2, ...,$n$ або просто записати її елементи в певному порядку. Наприклад, множину $A = \{a, b, c\}$ можна впорядкувати так: $(a, b, c)$, $(b, a, c)$, $(a, c, b)$, $(b, c, a)$, $(c, a, b)$, $(c, b, a)$.

Дві впорядковані множини вважають **рівними**, якщо вони складаються з тих самих елементів і однаково впорядковані.

Нехай є $n$-множина $A$ і деяке натуральне число $k \leq n$. **Розміщенням** з $n$ елементів по $k$ називають будь-яку впорядковану $k$-підмножину множини $A$. Число розміщень з $n$ елементів по $k$ позначають символом $A_n^k$. Обчислюється це число за формулою

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \qquad (1)$$

Справді, розглянемо деяку впорядковану $k$-підмножину $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ $n$-множини $A$. Перший елемент $a_1$ можна вибрати $n$ способами, другий елемент $a_2$ – $(n-1)$ способами, ..., останній елемент $a_k$ – $(n-k+1)$ способами. Згідно з правилом добутку одержуємо формулу (1).

**Приклад 5.** Правління фірми складається з 7 осіб. Скількома способами з них можна обрати голову правління, директора та менеджера.

◄ Скористаємося формулою (1), де $n = 7$, $k = 3$:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \quad ►$$

Розміщення з $n$ елементів по $n$ називаються **перестановками** з $n$ елементів і їхня кількість позначається $P_n$.

Очевидно, що $P_n$ – це число різних способів, якими можна впорядкувати $n$-множину, і, отже, $P_n = A_n^n$. З формули (1) випливає, що

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \equiv n!. \qquad (2)$$

**Приклад 6.** Скількома способами можна скласти список з 8 студентів.

◄ Оскільки складання списку є певним упорядкуванням множини з 8 осіб, то маємо $P_8 = 8! = 40\,320$.

Отже, список можна скласти 40 320 способами. ►

**Комбінацією** з $n$ елементів по $k$ називається будь-яка $k$-підмножина $n$-множини $A$. Число всіх комбінацій з $n$ елементів по $k$ позначається символом $C_n^k$.

Згідно з означенням, комбінації – це невпорядковані $k$-підмножини з $n$-множини. Розглянемо будь-яку комбінацію $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Упорядковуючи її всеможливими способами, одержимо $k!$ різних розміщень, тобто маємо рівність $A_n^k = k!C_n^k$.

Отже,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}. \tag{3}$$

**Приклад 7.** Агрохімік перевіряє 6 типів мінеральних добрив, для чого йому треба провести декілька дослідів, щоб вивчити сумісність будь-якої трійки добрив. Для кожного досліду беруть ділянку 0,25 га. На якій площі проводяться всі досліди?

◄ Знайдемо спочатку число дослідів, які слід провести. Скористаємось формулою (3), де $n = 6$, $k = 3$: $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Оскільки на кожний дослід виділяється 0,25 га, то на всі досліди треба виділити $20 \cdot 0,25 = 5$ га. ►

Формулу (3) можна записати у вигляді

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Якщо вважати, що $0! = 1$, то формула (4) є правильною і при $n = k$.

Числа $C_n^k$ називають **біномними коефіцієнтами**. Ця назва пов'язана з тим, що вони є коефіцієнтами у формулі бінома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{5}$$

При $a = b = 1$ з формули (5) випливає, що $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, тобто число всіх підмножин $n$-множини дорівнює $2^n$.

Для будь-яких натуральних $n$ і $k$ $(k \leq n)$, як випливає з формули (3) або (4), маємо

$$\begin{gathered} C_n^k = C_n^{n-k}, \\ C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Оскільки $C_n^n = 1$, то можна вважати, що $C_n^0 = 1$ і тоді перша формула з (6) у даному випадку є тотожністю 1=1.

**1.3. Квантори. Логічні символи.** У математичних твердженнях часто повторюються окремі слова й цілі вирази. Тому при їхньому записі корисно використовувати логічну символіку. Для цього зручно вживати значки $\forall$ і $\exists$, які називаються відповідно **кванторами загальності** й **існування**.

Символ $\forall x$ означає: "для всіх $x$ "для будь-якого $x$" або "яке б не було $x$". Наприклад, запис $\forall x > 0$ читається так: "для довільного додатного $x$" або "для всіх додатних $x$".

Символ $\exists x$ означає: "існує таке $x$, що ... "для деяких $x$ ..." або "принаймні для одного $x$ ...". Наприклад, запис $\exists x > 0$ читається так: "існує таке додатне $x$, що ...".

Символ $\Rightarrow$ означає **логічний наслідок**. Так, якщо $A$ і $B$ – деякі твердження, то запис $A \Rightarrow B$ означає, що з $A$ випливає $B$ або якщо має місце $A$, то має місце $B$.

Знак $\Leftrightarrow$ означає **логічну рівносильність**. Запис $A \Leftrightarrow B$ означає, що з $A$ випливає $B$ і, навпаки, з $B$ випливає $A$.

Запис $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 :\ |x_n - a| < \varepsilon$ читається так: "для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $n_0$, що для довільного $n > n_0$ правильна нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$".

**1.4. Межі числових множин.** Числова множина $X$ називається **обмеженою зверху** (**знизу**), якщо існує таке число $M(m)$, при якому для довільного $x \in X$ виконується нерівність $x \leq M$ $(x \geq m)$. Число $M(m)$ називається **верхньою** (**нижньою**) **межею** множини $X$. Множина, обмежена знизу і зверху, називається **обмеженою**. Будь-який обмежений проміжок є обмеженою множиною. Інтервали $(a; +\infty)$ і $(-\infty; b)$ є множинами, обмеженими відповідно знизу і зверху, але не обмеженими відповідно зверху і знизу. Вся числова пряма не обмежена ні зверху, ні знизу.

Очевидно, що обмежена зверху (знизу) множина має безліч верхніх (нижніх) меж. Справді, якщо число $M$ є верхньою межею множини $X$, то і будь-яке число $M_1 > M$, згідно з означенням верхньої межі, також буде верхньою межею цієї множини. Найменша верхня межа множини $X$, обмеженої зверху, називається **точною верхньою межею** цієї множини; вона позначається символом $\sup X$ (супремум ікс).

Якщо $M^* = \sup X$, то:

1) $x \leq M^*$, $x \in X$,

2) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $x \in X$ такий, що $x > M^* - \varepsilon$.

Найбільша нижня межа, обмеженої знизу множини $X$, називається **точною нижньою межею** цієї множини і позначається символом $\inf X$ (інфімум ікс).

Якщо $m^* = \inf X$, то:

1) $x \geq m^*$, $x \in X$,

2) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $x \in X$ такий, що $x < m^* + \varepsilon$.

Наведемо деякі приклади. Нехай $X = (a; b)$, тоді числа $a$ і $b$ є відповідно точними нижньою і верхньою межами множини $X$, тобто $\inf X = a$, $\sup X = b$. Якщо $X = (-\infty, b)$, то нижніх меж, а отже, й точної нижньої межі множина $X$ не має, а число $b$ є її точною верхньою межею: $\sup X = b$. У випадку множини $[a; b]$ маємо, що $\inf X = a$, $\sup X = b$.

Можна довести, що *довільна непорожня множина, яка обмежена зверху (знизу), має точну верхню (нижню) межу.*

### Вправи

**1.** Довести тотожності для довільних множин $A$, $B$, $C$:

а) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$;

б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$;

д) $A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U$ (тут $U$ – універсальна множина).

**2.** Знайти всі підмножини множини: а) $A = \{0, 1\}$; б) $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

**3.** Нехай $A = \{2, 3\}$. Скільки елементів має множина: а) $A \times A$; б) $A \times A \times A$.

**4.** Нехай $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 1\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$. Знайти і зобразити такі множини: а) $A \cap B$; б) $A \times B$.

**5.** В їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

**6.** У розиграші першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі?

**7.** Для визначення швидкості росту бактерій треба вибрати 4 штами бактерій з наявних восьми. Скількома способами це можна зробити?

**8.** Збори з 80 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

**9.** Вісім студентів подорожували у двох човнах, у меншому з яких могло вміститися не більше 4 осіб, а в більшому – не більше 6 осіб. Скількома способами вони можуть розміститися у цих човнах?

**10.** Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 чоловік?

**11.** На вечірці присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танців?

**12.** Число перестановок з $n$ літер відноситься до числа перестановок з $n+2$ літер, як 0,1 до 3. Знайти $n$.

### Відповіді

**2.** а) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $A$; б) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $A$. **3.** а) 4; б) 8. **4.** а) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$; б) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$. **5.** 30. **6.** $16 \cdot 15 = 240$. **7.** $C_8^4 = 70$. **8.** $A_{80}^2 C_{78}^3 = \frac{80!}{3!75!}$. **9.** $C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 = 154$. **10.** $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5$. **11.** $A_{12}^4 A_{15}^4$. **12.** $n = 4$.

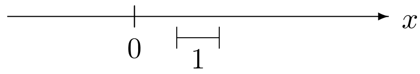
## §2. Дійсні числа. Координати точки на прямій, площині та в просторі

**2.1. Поняття дійсного числа.** Нагадаємо основні відомості про дійсні числа.

Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ складається з усіх раціональних та ірраціональних чисел. **Раціональним числом** називається число, яке можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, будь-яке ціле число $m$ зображається у вигляді $\frac{m}{1}$, і тому є раціональним. Усі раціональні числа складають множину раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Дійсні числа, які не входять у цю множину, тобто їх не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, називаються **ірраціональними**.

Як відомо, кожне дійсне число зображається у вигляді нескінченного десяткового дробу $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, де $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому раціональне число зображується у вигляді скінченного чи нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад, $\frac{15}{1} = 15 = 15,0$; $\frac{-3}{4} = -0,75$; $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$. Кожне ірраціональне число зображується у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Наприклад, $\sqrt{2} = 1,414...$, $\pi = 3,14159...$, $e = 2,718....$ Тому найчастіше в арифметичних діях ірраціональні числа заокруглюють, тобто замінюють на наближене раціональне з потрібною точністю. Наприклад, $\pi \approx 3,14159 \approx 3,1416 \approx 3,142 \approx 3,14$. При заокругленні ірраціонального числа залишають всі до $n-1$ цифри дробової частини без змін, а $n$-у цифру збільшують на 1, якщо після неї стоїть одна із цифр 5, 6, 7, 8 або 9, а якщо одна із цифр 0, 1, 2, 3, 4, то $n$-у цифру залишають без зміни. При цьому помилка (або похибка) обчислень не перевищить величини $\frac{1}{10^n}$.

**2.2. Геометричне зображення дійсного числа. Координати точки на прямій. Числовою віссю** називається пряма, на якій вибрані початкова точка (початок), додатний напрямок (відмічений на рисунку стрілкою) і відрізок, довжина якого дорівнює одиниці (одиниця масштабу).




Напрямок, протилежний до вибраного напрямку числової осі, називається від'ємним. Якщо дійсне число $x > 0$, то йому відповідає точка числової осі, яка знаходиться від початку на відстані $x$ у додатному напрямку. Якщо ж $x < 0$, то точка числової осі, яка йому відповідає, лежить на тій самій відстані, але у від'ємному напрямку від початку. Число 0 є початком числової осі.

Дійсне число $x$ називається **координатою** точки $M$ числової осі, яка його зображує. Домовимось писати $M(x)$ у тому випадку, коли $x$ є координатою точки $M$. Доводиться, що кожному дійсному числу $x$ відповідає єдина точка $M$ числової осі, і, навпаки, кожній точці $M$ цієї осі відповідає єдине дійсне число $x$ – координата цієї точки. Кажуть, що між множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна відповідність, тобто ці множини еквівалентні. Тому надалі замість слова "число $x$" часто використовуватимемо слово "точка $x$".

Множина дійсних чисел є впорядкованою. Це означає, що довільні різні дійсні числа $x_1$ і $x_2$ задовольняють тільки одну з двох нерівностей $x_1 > x_2$ або $x_1 < x_2$.

Зауважимо, що множина дійсних чисел є **щільною**, тобто має властивість: *між двома різними дійсними числами знаходиться безліч інших дійсних чисел.* Це означає, що коли $x_1 < x_2$, то існує $x$ для якого $x_1 < x < x_2$ і таких $x$ є нескінченно багато. Так само щільними є множини раціональних та ірраціональних чисел у множині дійсних чисел.

**2.3. Абсолютна величина дійсного числа. Відстань між двома точками на прямій. Окіл точки. Абсолютною величиною** (**модулем**) дійсного числа $x$ називається саме це число, коли воно невід'ємне, і протилежне число $-x$, коли воно від'ємне. Позначається абсолютна величина дійсного числа символом $|x|$. Отже,
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Згідно з означенням $|x| \geq 0$ і $|x| = |-x|$.

Розглянемо основні властивості модуля:

1) $-|x| \leq x \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}$;

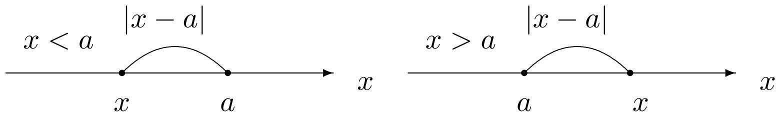
2) нехай $a \geq 0$, тоді нерівності $|x| \leq a$ і $-a \leq x \leq a$ рівносильні;

3) для довільних дійсних чисел $x_1$ і $x_2$:

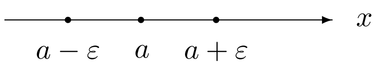
$$
\begin{gathered}
|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \\
|x_1 - x_2| \geq \big|\,|x_1| - |x_2|\,\big|, \\
|x_1 x_2| = |x_1|\,|x_2|, \\
\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}, \quad x_2 \neq 0.
\end{gathered}
$$

Геометричний зміст модуля $x$ – це відстань точки $M(x)$ числової осі від початку.

Абсолютна величина різниці двох чисел $|x-a|$ означає відстань між точками $x$ і $a$ числової прямої як для випадку $x < a$, так і $x > a$ (див. рисунки).




Тому, наприклад, розв'язками нерівності $|x-a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, будуть всі точки інтервалу $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.




Довільний інтервал, який містить точку $a$, називається **околом** точки $a$. Інтервал вигляду $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ називається $\varepsilon$-**околом** точки $a$.

**Приклад 1.** Спростити вираз $|x - 2|x||$.

◀ Нехай $x \geq 0$, тоді $|x| = x$, і отже, $|x-2|x|| = |x-2x| = |-x| = |x| = x$. Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$, а тому $|x-2|x|| = |x+2x| = |3x| = |3||x| = -3x$. Отже,

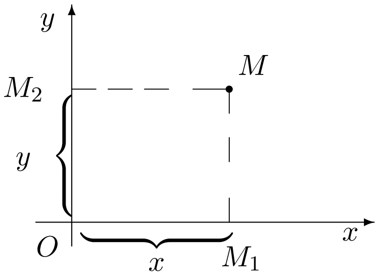
$$
|x-2|x|| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -3x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \quad ▶
$$

**Приклад 2.** Знайти відстань між точками $M_1(-0,5)$ і $M_2(3,5)$.
◄ Маємо $d = |3,5-(-0,5)| = |3,5+0,5| = |4| = 4$. ►

**2.4. Координати точки на площині та в просторі.** У попередньому пункті ми відзначили, що положення точки на числовій прямій визначається одним числом – координатою цієї точки. Положення точки на площині визначається уже двома числами, а в просторі – трьома.

Розглянемо на площині дві взаємно перпендикулярні числові осі $Ox$ і $Oy$, які мають спільний початок $O$, який збігається з точкою перетину осей, і спільну одиницю масштабу. Вісь $Ox$ називається **віссю абсцис**, а вісь $Oy$ – **віссю ординат**.

Площину, в якій розміщені осі $Ox$ і $Oy$ назвемо **координатною площиною** і позначимо $Oxy$.



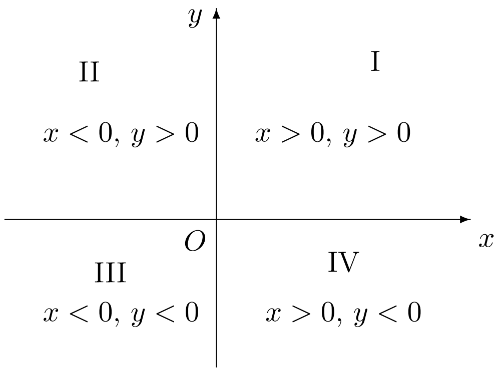

Візьмемо довільну точку $M$ координатної площини $Oxy$. Опустимо з неї перпендикуляри $MM_1$ і $MM_2$ відповідно на осі $Ox$ і $Oy$. Координата $x$ точки $M_1$ на осі $Ox$ називається **абсцисою** точки $M$, а координата $y$ точки $M_2$ на осі $Oy$ – **ординатою** точки $M$.

Розглядувані разом, числа $x$ і $y$ називаються **прямокутними** або **декартовими прямокутними координатами** точки $M$. Той факт, що точка $M$ має координати $x$ і $y$, символічно позначають так: $M(x;y)$. При цьому першою в дужках вказують абсцису, а другою – ординату. Початок координат має координати $(0;0)$.

Отже, у вибраній системі координат кожній точці $M$ площини відповідає упорядкована пара чисел $(x;y)$ – її прямокутні координати і, навпаки, кожній упорядкованій парі $(x;y)$ відповідає, і при тому одна, точка $M$ на площині $Oxy$ така, що її абсциса дорівнює $x$, а ордината – $y$. Отже, прямокутна система координат на площині встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок площини і множиною всіх упорядкованих пар дійсних чисел.

Точки на осі $Ox$ мають координати $(x; 0)$, а точки на осі $Oy$ – $(0; y)$.

Осі $Ox$ і $Oy$ ділять координатну площину на чотири частини, які називаються **чвертями** і позначаються римськими цифрами I, II, III і IV так, як показано на рисунку.




Для довільних двох точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ площини відстань $d$ між ними визначається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Приклад 3.** Знайти відстань $d$ між точками $M_1(-2; 4)$ і $M_2(5; 3)$.

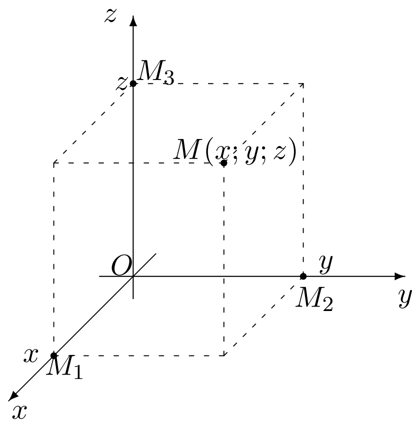
◄ Маємо $d = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. ►

Переконаємося, що положення точки в просторі можна визначити трьома числами.

Розглянемо три взаємно перпендикулярні осі в просторі $Ox$, $Oy$ і $Oz$, які мають спільний початок $O$ – точку перетину осей і спільну масштабну одиницю. Назвемо ці осі **координатними осями**, а їх спільний початок – **початком координат**.

Простір, у якому задано осі $Ox$, $Oy$ і $Oz$, позначимо символом $Oxyz$.

Нехай $M$ – довільна точка простору $Oxyz$. Проведемо через неї три площини, які перпендикулярні координатним осям. Точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ перетину цих площин з осями $Ox$, $Oy$ і $Oz$ називаються **проекціями** точки $M$ на відповідні осі. Нехай точка $M_1$ на осі $Ox$ має координату $x$, точка $M_2$ на осі $Oy$ – координату $y$ і точка $M_3$ на осі $Oz$ – координату $z$. Числа $x$, $y$, $z$ називаються прямокутними або декартовими прямокутними координатами точки $M$ в просторі. Той факт, що точка $M$ має координати $x$, $y$, $z$ записують символічно так: $M(x;y;z)$. При цьому $x$ називають **абсцисою**, $y$ – **ординатою**, а $z$ – **аплікатою**. Такі самі назви мають і координатні осі: вісь $Ox$ називають **віссю абсцис**, вісь $Oy$ – **віссю ординат**, вісь $Oz$ – **віссю аплікат**.




Очевидно, що кожна точка $M$ простору $Oxyz$ визначає єдину впорядковану трійку чисел $(x;y;z)$ – її координати. Навпаки, положення точки $M$ в просторі $Oxyz$ цілком визначається трьома її декартовими координатами.

Якщо через кожну пару координатних осей провести площину, то дістанемо три взаємно перпендикулярних площини $Oxy$, $Oyz$ і $Ozx$, які називаються **координатними площинами**. Вони ділять простір на вісім частин – **октантів**.

Якщо в просторі $Oxyz$ взято точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то відстань між ними знаходиться за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Приклад 4.** Знайти відстань між точками $M_1(-1;2;-3)$ і $M_2(1;1;-5)$.

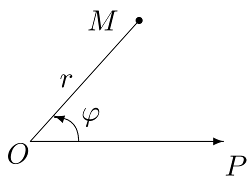
◀ Згідно з попередньою формулою, одержимо

$$d = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-2)^2 + (-5-(-3))^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3. \quad \blacktriangleright$$

## 2.5. Полярні координати на площині. Сферичні координати в просторі.

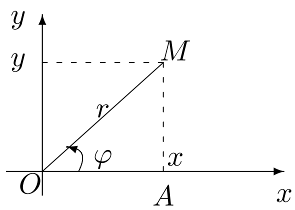
**2.5.1. Полярні координати на площині.** Візьмемо в площині деяку точку $O$, яку назвемо **полюсом**. Проведемо з точки $O$ фіксований промінь $OP$ (тобто напрямлену півпряму $OP$), який називається **полярною віссю**.




Нехай $M$ – довільна точка площини. З'єднаємо точку $M$ з полюсом $O$ відрізком $OM$. Довжина відрізка $OM = r$ називається **полярним радіусом** точки $M$, а кут $\varphi = \angle MOP$ – **полярним кутом**.

Полярні радіус $r$ і полярний кут $\varphi$ повністю визначають положення точки $M$ на площині і називаються **полярними координатами** $M$. Позначаємо це так: $M(r;\varphi)$. При цьому полярний кут $\varphi$ вважається додатним, якщо відраховувати його від полярної осі проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним – за ходом годинникової стрілки. Тому, щоб описати всі точки площини досить змінювати $\varphi$ в таких межах: $0 \le \varphi < 2\pi$, а $r \ge 0$. Зауважимо, що полюсу $O$ відповідає $r = 0$, а полярний кут для нього не визначається. Це єдина точка площини, у якої полярний кут не визначається.

**Зв'язок між прямокутними та полярними координатами.** Припустимо, що полюс полярної системи збігається з початком декартової прямокутної системи координат $Oxy$, а полярна вісь – з додатною піввісю $Ox$.




Тоді для довільної точки $M$, що має прямокутні координати $(x;y)$, а полярні $(r;\varphi)$ маємо такі співвідношення:

$$OA = x, AM = y, OM = r, \angle AOM = \varphi.$$

Вважаючи кут $\varphi$ гострим, із прямокутного трикутника $MOA$ знаходимо $OA = OM\,\cos\varphi$, $AM = OM\,\sin\varphi$, тобто

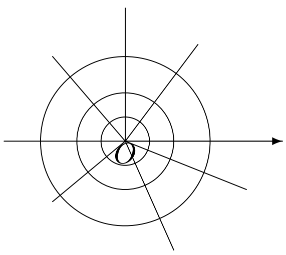
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Легко переконатися, що формули (7) правильні для будь-якого кута $\varphi$, і вони виражають декартові координати через полярні.

З іншого боку, з цього самого трикутника $AOM$ маємо $OM = \sqrt{OA^2 + AM^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{AM}{OA}$ або

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \tag{8}$$

Так виражаються полярні координати через прямокутні. Зауважимо, що при визначенні кута $\varphi$ за значенням $\operatorname{tg}\varphi$, потрібно враховувати знаки координат $x$ та $y$.




Якщо в полярній системі координат фіксувати $\varphi$, а довільним чином змінювати лише $r \geq 0$, то одержимо напівпрямі, що виходять з полюса (промені). Навпаки, при фіксованому $r$ та зміні $\varphi$ від 0 до значення $2\pi$ отримаємо коло з центром в точці $O$ радіуса $r$.

Отже, полярна система координат характеризується полярною сіткою, яка складається з променів, що виходять з точки $O$, і кіл, з центром в цій точці.

Полярну сітку використовують, наприклад, у фізичній географії для побудови "рози" вітрів або діаграм орієнтації уламків породи.

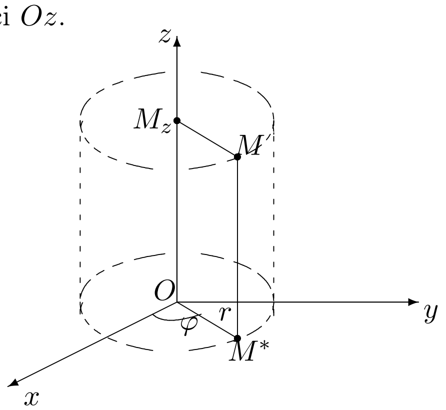
**Приклад 5.** Дано прямокутні координати точки $M$: $x = 1$, $y = 1$. Знайти її полярні координати.

◄ За формулами (8) знаходимо $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Із двох значень $\varphi = \frac{\pi}{4}$ і $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ слід розглянути $\varphi = \frac{\pi}{4}$, оскільки точка $M$ лежить в першому квадранті. Отже, полярні координати точки $M$ такі: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. ►

**Приклад 6.** Полярні координати точки $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Знайти її прямокутні координати.

◀ За формулами (7) маємо $x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $y = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$. ▶

**2.5.2. Циліндричні координати в просторі.** Виберемо на фіксованій площині $P$ деяку точку $O$ і взаємно перпендикулярні промені $Ox$ і $Oy$, що виходять з неї. Прямі, що містять ці промені, візьмемо за осі координат в цій площині. Крім того, розглянемо вісь $Oz$, яка проходить через точку $O$ перпендикулярно до площини $P$. Нехай $M$ – довільна точка простору, $M^*$ – проекція цієї точки на площину $P$, а $M_z$ – проекція $M$ на вісь $Oz$. **Циліндричними координатами точки** $M$ називаються три числа $r$, $\varphi$ і $z$, перші два з яких $r$ і $\varphi$ є полярними координатами точки $M^*$ в площині $P$ відносно полюса $O$ і полярної осі $Ox$, а число $z$ є координатою точки $M_z$ на осі $Oz$. Точку $M$ з циліндричними координатами $r$, $\varphi$ і $z$ позначають $M(r;\varphi;z)$. Назва циліндричні координати пов'язана з тим, що **координатна поверхня** $r = \text{const}$, тобто поверхня, всі точки якої мають одну й ту саму координату $r$, є циліндром з твірними паралельними осі $Oz$.

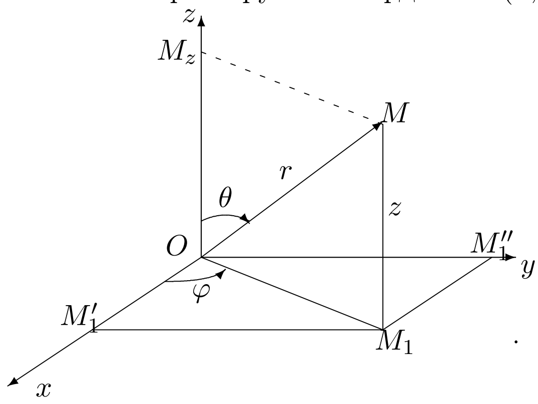



Якщо вибрати осі декартової прямокутної системи координат $Oxyz$ так, як показано на рисунку, то декартові координати $x$, $y$, $z$ точки $M$ будуть зв'язані з її циліндричними координатами співвідношеннями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, & r \geq 0, \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < \infty. \end{cases}$$

Оскільки перші дві циліндричні координати $r$ і $\varphi$ є полярними координатами проекції $M^*$ точки $M$ на площину $P$, то їх стосуються всі зауваження і висновки, які зроблено в попередньому пункті.

**2.5.3. Сферичні координати в просторі.** Розглянемо прямокутну систему координат $Oxyz$ в просторі. Тоді, як відомо, довільна точка $M$ простору має координати $(x; y; z)$.




Положення точки $M$ в просторі можна задавати трійкою чисел $r$, $\varphi$, $\theta$, де $r$ – довжина відрізка $OM$, $\theta$ – кут, який утворює промінь $OM$ з віссю $Oz$, а $\varphi$ – кут між променем $OM_1$ і додатним напрямком осі $Ox$. Щоб описати всі точки простору досить брати $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ і $0 \leq \theta \leq \pi$. Точка $O$ – початок координат, характеризується тим, що для неї $r = 0$, а координати $\varphi$ і $\theta$ не мають певного значення; всі точки на осі $Oz$ описуються значеннями $\theta = 0$ або $\theta = \pi$ і $r \geq 0$, а кут $\varphi$ для них не визначається.

Введена впорядкована трійка чисел $r$, $\varphi$, $\theta$ називається **сферичними координатами** точки $M$ в просторі.

Назва сферичні координати пов'язана з тим, що координатна поверхня $r = \text{const}$, тобто поверхня, всі точки якої мають одну й ту саму координату $r$, є сферою.

Встановимо зв'язок між прямокутними і сферичними координатами. Нехай точка $M$ знаходиться у першому октанті. Якщо $M(x; y; z)$, то відрізок $OM_1' = x$, $OM_1'' = y$, $M_1M = z$. Тоді з трикутника $\triangle OMM_1$ маємо: $MM_1 = OM \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, тобто

$MM_1 = r\cos\theta$; $OM_1 = OM\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = r\sin\theta$. З трикутника $\triangle OM_1M_1'$ випливає, що $OM_1' = OM_1\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$, а $M_1'M_1 = OM_1'' = OM_1\sin\varphi$, тобто $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$. Отже, отримали формули

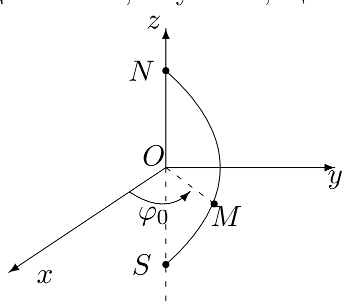
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{9}$$

які встановлюють зв'язок між прямокутними і сферичними координатами точки $M$ з першого октанту. Легко можна пересвідчитися, що вони є правильними для точок всіх інших октантів.

Для формул (9) оберненими є, очевидно (дивись той самий рисунок), формули

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ \cos\theta = \dfrac{z}{r}. \end{cases} \tag{10}$$

Сферичні координати часто застосовують в географії, особливо при складанні карт земної поверхні. При цьому Земля вважається наближено кулею з центром в початку координат, радіус якої $r \approx 6371$ км. Тоді розташування будь-якої точки на земній поверхні характеризується кутом $\varphi$, що називається **довготою**, і кутом $\theta$, що називається **широтою**.

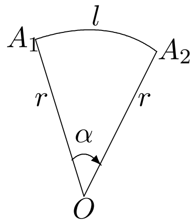



Якщо зафіксувати кут $\varphi = \varphi_0$, а $\theta$ змінювати від 0 до $\pi$, то на поверхні сфери одержимо півколо великого радіуса $NMS$, яке називається **меридіаном**, тут $N(r;0;0)$ – північний полюс Землі, а $S(r;0;\pi)$ – південний полюс Землі.

Куту $\varphi = 0$ відповідає меридіан, що проходить через полюси Землі і місто Гринвіч . Якщо ж зафіксувати кут $\theta$, а кут

$\varphi$ змінювати в межах від 0 до $2\pi$, то одержимо **паралель** (зокрема, при $\theta = \pi/2$ – екватор).

Знаючи довготу і широту населених пунктів земної поверхні, можна знайти відстані між ними. Нехай $A_1$ і $A_2$ – дві точки на поверхні Землі, яким відповідають довгота і широта відповідно $\varphi_1$, $\theta_1$ та $\varphi_2$, $\theta_2$. За відстань між цими точками беруть довжину найкоротшої дуги великого кола земної кулі, що проходить через ці дві точки $A_1$ і $A_2$.




На рисунку зображена частина цього великого кола, $\alpha$ – кут між променями $OA_1$ і $OA_2$ (вважатимемо, що кути $\alpha$, $\varphi$, $\theta_1$, $\varphi_2$, $\theta_2$ вимірюються в градусах), а $r$ – радіус Землі. Довжина $l$ дуги великого кола знаходиться із пропорції

$$\frac{2\pi r}{360^0} = \frac{l}{\alpha} \text{ тобто } l = \frac{\pi r \alpha}{180^0}.$$

Кут $\alpha$ знаходимо, скориставшись поняттям скалярного добутку векторів і тим, що, з одного боку, $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = r^2 \cos\alpha$, а з другого боку,

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

бо $\overrightarrow{OA_1} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OA_2} = (x_2; y_2; z_2)$, де $x_k$, $y_k$, $z_k$, $k \in \{1, 2\}$, визначаються за формулами (9). Тому

$$r^2\cos\alpha = r^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + r^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\theta_1\sin\theta_2 +$$

$$+ r^2\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\alpha = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

або

$$\alpha = \arccos(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Тоді

$$l = \frac{\pi r}{180^0} \arccos(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Наприклад, для Києва $\theta_1 = 39,7^0$, $\varphi_1 = 30,5^0$, а для Берліна $\theta_2 = 37,5^0$, $\varphi_2 = 13^0$. Тому

$$l = \frac{\pi \cdot 6377}{180^0} \arccos(\cos 39,7^0 \cos 37,5^0 +$$

$$+ \sin 39,7^0 \sin 37,5^0 \cos 16,5^0) \approx 1169.$$

Отже, відстань між Києвом і Берліном дорівнює 1169 км.

## Вправи

**1.** Побудувати точку за її полярними координатами:
а) $A(5;0)$; б) $B(2;\frac{\pi}{4})$; в) $C(3;\frac{\pi}{2})$; г) $D(1;\pi)$; д) $E(2;\frac{5\pi}{6})$.

**2.** Які прямокутні координати має точка, що задана за допомогою полярних координат:
а) $A(5;0)$; б) $B(6;\frac{\pi}{4})$; в) $C(2;\frac{\pi}{2})$; г) $D(4;\frac{5\pi}{4})$?

**3.** За відомими декартовими координатами точки $M$ знайти її полярні координати:
а) A(2; 2); б) $B(\sqrt{3};1)$ , в) $C(-3;0)$, г) $D(1;-\sqrt{3})$.

**4.** Написати в полярних координатах рівняння лінії, заданої в прямокутних координатах:
а) $x = 1$; б) $y = -2$; в) $y = x$; г) $y = 2x$; д) $x^2 + y^2 = 25$.

**5.** Рівняння кривої в полярних координатах має вигляд $r = a\cos\varphi$. Написати рівняння цієї кривої в прямокутних координатах і з'ясувати, якою є ця крива.

**6.** Знайти сферичні координати точок $A(8;4;1)$, $B(-2;-2;-1)$, $C(0;-4;3)$, $D(1;-1;-1)$; $E(0;1;0)$.

**7.** Знайти сферичні координати точки $M$, якщо промінь $OM$ утворює з осями $Ox$ і $Oy$ кути, відповідно рівні $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$, а третя координата точки $z = -1$.

**8.** Знайти декартові координати точки, що лежить на кулі радіуса 1, знаючи її широту $\theta = 45^0$ і довготу $\varphi = 330^0$.

**9.** Знайти циліндричні координати точок за їх декартовими координатами $A(3;4;5)$, $B(1;-1;-1)$, $C(-6;0;8)$.

**10.** Знайти циліндричні координати точки $M$, знаючи, що промінь $OM$ утворює з осями координат кути $60^0$, $60^0$ і $135^0$, а довжина відрізка $OM$ дорівнює 1.

## Відповіді

**2.** а) $A(5;0)$; б) $B(3\sqrt{2};3\sqrt{3})$; в) $C(0;2)$; г) $D(-2\sqrt{2};-2\sqrt{3})$. **3.** а) $A(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$; б) $B(2;\frac{\pi}{6})$; в) $C(3;\pi)$; г) $D(2;\frac{5\pi}{3})$. **4.** а) $r=\frac{1}{\cos\varphi}$; б) $r=-\frac{2}{\sin\varphi}$; в) $\varphi=\frac{\pi}{4}$ або $\varphi=\frac{5\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg}\varphi=2$; д) $r=5$. **5.** $x^2+y^2=ax$; коло з центром в точці $(\frac{a}{2};0)$, радіуса $\frac{|a|}{2}$. **6.** $A(9;\operatorname{arctg}\frac{1}{2};\arccos\frac{1}{9})$; $B(3;\frac{5\pi}{4};\pi-\arccos\frac{1}{3})$; $C(5;\frac{3\pi}{2};\arccos\frac{3}{5})$; $D(\sqrt{3};\frac{7\pi}{4};\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3})$; $E(1;\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. **7.** $M(2;\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2\pi}{3})$. **8.** $(\frac{\sqrt{6}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})$. **9.** $A(5;\operatorname{arctg}\frac{4}{3};5)$; $B(\sqrt{2};\frac{7\pi}{4};-1)$; $C(6;\pi;8)$. **10.** $M(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

# Розділ 2
# Основи лінійної алгебри

У цьому розділі розглянемо деякі поняття лінійної алгебри, зокрема, визначники та їхні властивості, розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці та дії над матрицями. Крім того, наведемо приклади застосування цих понять у різних галузях знань.

## §1. Елементи теорії визначників

**1.1. Визначники другого й третього порядків.** Нехай задано таблицю (матрицю), яка складається з чотирьох дійсних чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Матриця має два рядки і два стовпчики. Її називають **матрицею другого порядку**, а числа $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$ – її елементами. Елементи прийнято позначати літерою з двома індексами. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпчика, на перетині яких знаходиться даний елемент.

**Визначником (детермінантом) другого порядку**, що відповідає матриці (1), називають число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, яке позначають символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{2}$$

Числа $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$ називаються **елементами визначника**.

Множини елементів з однаковим першим індексом називають **рядками**, а з однаковим другим індексом – **стовпчиками** визначника, тобто елементи, розміщені на горизонталях, утворюють рядки, а на вертикалях – стовпчики визначника. Діагональ, яка утворена елементами $a_{11}$, $a_{22}$ називається **головною**, а діагональ, яка утворена елементами $a_{12}, a_{21}$ – **побічною**.

**Визначником третього порядку**, що відповідає матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$, яке позначають символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Отже,

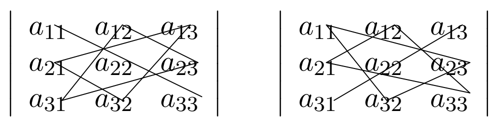
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (3)$$

Поняття елементів, рядків, стовпчиків, діагоналей, введені для визначників другого порядку, правильні й для визначників третього порядку.

Існують декілька правил обчислення визначників третього порядку.

1) **Правило трикутників**. У формулі (3) три перші доданки визначника третього порядку є добутками елементів головної діагоналі та елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Для трьох інших добутків, які беруться у формулі (3) зі знаком "− використовується таке саме правило, тільки береться не головна, а побічна діагональ.



2) **Правило Сарруса**. За цим правилом складаємо матрицю (таблицю), для якої обчислюватимемо визначник. Справа

від неї записуємо її перший і другий стовпчики. В основній таблиці проводимо головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що містять по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома членами визначника, що беруться зі своїми знаками. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводимо побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що містять по три елементи. Добутки цих елементів беруться з протилежним знаком. Схематично це правило зображено на рисунку

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & - & - & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & + & + & + \end{array} \end{array}$$

**Приклад 1.** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

◀ Згідно з формулою (2) $\Delta = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 = -8 - 15 = -23$. ▶

**Приклад 2.** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

◀ Скористаємося правилом трикутника обчислення визначника третього порядку: $\Delta = 2\cdot6\cdot3+5\cdot0\cdot(-4)+3\cdot7\cdot8-8\cdot6\cdot(-4)-0\cdot7\cdot2-3\cdot5\cdot3 = 36 + 168 + 192 - 45 = 351$. ▶

**Приклад 3.** За допомогою правила Сарруса обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

◀ Маємо таблицю $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Тоді $\Delta = 2\cdot5\cdot1+1\cdot(-1)\cdot2+1\cdot3\cdot(-3)-2\cdot5\cdot1-(-3)\cdot(-1)\cdot2-1\cdot3\cdot1 = 10-2-9-10-6-3 = -20$. ▶

Розглянемо властивості визначників. Ці властивості правильні для визначників будь-якого порядку.

**Властивість 1.** *Величина визначника не зміниться, якщо його рядки поміняти місцями з відповідними стовпчиками,* *тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

◄ Доведення випливає безпосередньо з означення визначника, якщо застосувати його до правої і лівої частин рівності (4). ►

Операція заміни рядків стовпчиками, а стовпчиків рядками з однаковими номерами називається **транспонуванням**. Отже, при транспонуванні значення визначника не змінюється.

З цієї властивості випливає, що рядки та стовпчики визначника рівноправні, тобто всі властивості, встановлені для рядків, правильні й для стовпчиків, і навпаки. Надалі всі властивості можна формулювати і доводити тільки для рядків або стовпчиків.

**Властивість 2.** *При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник зберігає абсолютну величину і змінює знак на протилежний.*

◄ Доведення випливає з означення визначника. ►

**Властивість 3.** *Визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.*

◄ Поміняємо місцями два однакових рядки визначника. Тоді, з одного боку, визначник $\Delta$ не зміниться, а з іншого – згідно з властивістю 2, знак його зміниться на протилежний. Отже, $\Delta = -\Delta$, звідки $2\Delta = 0$, тобто $\Delta = 0$. ►

Введемо поняття **мінора** й **алгебраїчного доповнення** елемента визначника.

Нехай є визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Викреслимо в ньому $i$-й рядок і $j$-й стовпчик, на перетині яких розміщено елемент $a_{ij}$. Внаслідок цього одержимо визначник другого порядку, який називається **мінором**, що відповідає елементу $a_{ij}$ у визначнику $\Delta$, і позначається символом $M_{ij}$. Наприклад, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

**Алгебраїчним доповненням** $A_{ij}$ **елемента** $a_{ij}$ визначника $\Delta$ називається мінор $M_{ij}$, взятий зі своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпчика, на перетині яких розміщений елемент $a_{ij}$, парна, і зі знаком мінус, якщо ця сума непарна.

Залежність між мінором $M_{ij}$ й алгебраїчним доповненням $A_{ij}$ виражається співвідношенням

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де $i$ – номер рядка, $j$ – номер стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент $a_{ij}$.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

**Властивість 4. Розклад визначника за елементами рядка (стовпчика).** *Визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого з його рядків (стовпчиків) на їхні алгебраїчні доповнення. Сума попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпчика), дорівнює нулю.*

◀ Запишемо формулу (3) у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$

$$-a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Отже,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (5)$$

Формулу (5) називають **розкладом визначника за елементами першого рядка**. Визначник можна розкладати за елементами інших рядків, а також стовпчиків.

Для доведення другої половини властивості 4 розглянемо визначник

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

утворений з визначника $\Delta$ заміною другого рядка третім рядком. Згідно з властивістю 3 визначник $\Delta'$ дорівнює нулю. Алгебраїчні доповнення будь-якого з елементів другого рядка не залежать від елементів цього рядка, оскільки вони викреслюються при утворенні алгебраїчних доповнень. Тому алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого рядка визначників $\Delta$ і $\Delta'$ збігаються. Розклавши визначник $\Delta'$ за елементами його другого рядка, матимемо

$$\Delta' = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0.$$

Аналогічно можна розглянути й інші варіанти. ►

**Властивість 5.** *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює нулю.*

◄ Нехай усі елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю. Розклавши визначник за елементами цього рядка (стовпчика), дістаємо суму нулів, а отже, і сам визначник дорівнює нулю. ►

**Властивість 6.** *Множник, спільний для всіх елементів деякого рядка (стовпчика), можна винести за знак визначника.*

◄ Нехай, наприклад, усі елементи другого рядка мають спільний множник $\lambda$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Розклавши визначник $\Delta'$ за елементами 2-го рядка, дістанемо

$$\Delta' = \lambda a_{21}A_{21} + \lambda a_{22}A_{22} + \lambda a_{23}A_{23} = \lambda(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}).$$

Вираз у дужках є визначником

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а тому

$$\Delta' = \lambda\Delta. \quad \blacktriangleright$$

**Властивість 7.** *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника $\Delta$ є сумою двох доданків, то й сам визначник дорівнює сумі двох визначників $\Delta_1$ і $\Delta_2$. У визначнику $\Delta_1$ вказаний рядок (стовпчик) складається з перших доданків, а у $\Delta_2$ – з других доданків. Решта рядків (стовпчиків) визначників $\Delta_1$ і $\Delta_2$ – ті самі, що й в $\Delta$.*

◀ Доведемо, наприклад, рівність

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник зліва за першим рядком. Тоді одержимо суму

$$(b_{11}+c_{11})A_{11} + (b_{12}+c_{12})A_{12} + (b_{13}+c_{13})A_{13},$$

або після розкриття дужок,

$$(b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + b_{13}A_{13}) + (c_{11}A_{11} + c_{12}A_{12} + c_{13}A_{13}).$$

Перша з цих сум дорівнює першому з визначників справа, а друга сума дорівнює другому визначнику. ▶

**Властивість 8.** *Визначник не зміниться, якщо до одного з рядків (стовпчиків) додати інший рядок (стовпчик), помножений на довільне число.*

◀ Доведемо, що

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для цього застосуємо до визначника, розміщеного зліва, властивість 7. Тоді одержимо, що цей визначник дорівнює

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Другий з цих визначників дорівнює нулю, оскільки, після винесення за знак визначника спільного множника $\lambda$ елементів першого рядка, одержується визначник з двома однаковими рядками. ▶

**1.2. Поняття про визначники вищих порядків.** Властивість розкладу визначника за елементами рядка (стовпчика) дає можливість за аналогією ввести поняття визначника $n$-го порядку.

Нехай є таблиця (матриця) складена з $n^2$ чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**Визначником $n$-го порядку**, що відповідає матриці (6), є число, яке дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їхні алгебраїчні доповнення.

Позначається визначник $n$-го порядку символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Згідно з означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, ..., n\} \tag{7}$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{8}$$

Формула (7) дає розклад визначника за елементами $i$-го рядка, а формула (8) – за елементами $j$-го стовпчика. При цьому, якщо деякі елементи рядка або стовпчика, за якими розкладається визначник, дорівнюють нулю, то доданки, що відповідають цим елементам у розкладі визначника, випадають. Тому доцільно розкладати визначник за тими рядками або стовпчиками, які містять найбільшу кількість нулів. Згідно з властивістю 8 можна накопичувати нулі в будь-якому рядку або стовпчику визначника.

**Приклад 4**. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◀ Розкладемо даний визначник за елементами першого рядка

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 7 + 0 - 0 - 18 - 10 = 3. ▶$$

**Приклад 5**. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

◀ Перетворимо спочатку визначник так, щоб у першому рядку всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. Для цього послідовно помножимо перший стовпчик на $-2$, $-3$, $-4$, і додамо відповідно до другого, третього і четвертого стовпчиків. Дістанемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & -8 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix},$$

який розкладемо за елементами першого рядка

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$

Помножимо перший рядок останнього визначника послідовно на $-2$ та на $-3$ і додамо до другого і третього рядків. Матимемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами другого рядка, знайдемо

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 10 = -20. \ ▶$$

## Вправи

**1.** Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

**2.** Розв'язати рівняння або нерівність:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 3) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$;

4) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

6) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$; 7) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

**3.** Обчислити визначник, розклавши за елементами будь-якого рядка або стовпчика:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

## Відповіді

**1.** 1) 11; 2) $4ab$; 3) $-1$; 4) $-12$; 5) 0; 6) $2a^3$; 7) 87. **2.** 1) 12; 2) $x > 3$; 3) $-1 < x < 7$; 4) $x_1 = -\dfrac{1}{6}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$; 5) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$; 6) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$; 7) $-6 < x < -4$. **3.** 1) $-60$; 2) 180; 3) 0; 4) 0; 5) $-28$; 6) $-70$; 7) 640.

## §2. Системи лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь має вигляд

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{9}$$

Тут $x_1$, $x_2$,..., $x_n$ – **невідомі**, які треба знайти; $a_{ij}$ – сталі, які називають **коефіцієнтами** системи, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, у якому знаходиться цей коефіцієнт, а другий індекс – номер невідомого, на який множимо цей коефіцієнт); $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$ – сталі, які називаються **вільними членами**.

**Розв'язком** системи (9) називають будь-яку сукупність чисел $(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$, яка при підстановці її в систему замість відповідних невідомих $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ перетворює всі рівняння системи в правильні рівності.

Систему (9) називають **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків. Якщо сумісна система має тільки один розв'язок, то її називають **визначеною**, а якщо більше одного розв'язку, то **невизначеною**.

Систему (9) називають **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і **неоднорідною**, якщо принаймні один з вільних членів не дорівнює нулю. Очевидно, що однорідна система завжди сумісна, оскільки має розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... ,$x_n = 0$, який називають **нульовим** або **тривіальним**.

Дві системи лінійних рівнянь називаються **рівносильними** або **еквівалентними**, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв'язки або якщо вони несумісні. За допомогою елементарних перетворень систему (9) можна звести до еквівалентної системи. **Елементарними** називають такі перетворення:

1) викреслювання рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ – нульового рядка;

2) перестановка рівнянь або доданків $a_{ij}x_j$ у рівняннях;

3) додавання до обох частин одного рівняння відповідно обох частин іншого рівняння цієї системи, помноженого на довільне число;

4) відкидання рівнянь, які є лінійними комбінаціями інших рівнянь системи, тобто рівнянь, що є алгебраїчною сумою інших рівнянь з деякими коефіцієнтами.

Розглянемо деякі методи розв'язування лінійних систем.

**2.1. Системи $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими. Правило Крамера.** Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{10}$$

Введемо позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j \in \{1, ..., n\}.$$

Визначник $\Delta$ називається **головним визначником системи (10)**. Визначники $\Delta_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, одержуються з визначника $\Delta$ заміною $j$-го стовпчика стовпчиком з вільних членів.

**Теорема 1 (правило Крамера)**. *Якщо визначник $\Delta$ системи $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими (10) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, що визначається формулами*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{11}$$

◀ Нехай $(x_1; x_2; ...; x_n)$ розв'язок системи (10). Для того щоб знайти його складову $x_j$, домножимо перше рівняння на $A_{1j}$, друге – на $A_{2j}$ і так далі, $n$-е рівняння – на $A_{nj}$, де $A_{1j}$, $A_{2j}$, ..., $A_{nj}$ – алгебраїчні доповнення елементів $j$-го стовпчика, і додамо ці рівняння. Тоді одержимо вираз

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+...+a_{n1}A_{nj})x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+...+a_{n2}A_{nj})x_2+$$

$$+\ldots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj})x_j+...+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+...+$$

$$+a_{nn}A_{nj})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}. \tag{12}$$

Коефіцієнт при невідомому $x_j$ є сумою добутків елементів $j$-го стовпчика визначника $\Delta$ на відповідні їм алгебраїчні доповнення і, згідно з властивістю 4 визначників, дорівнює визначнику $\Delta$. Коефіцієнти при всіх інших невідомих є сумами добутків елементів усіх стовпчиків, крім $j$-го, на алгебраїчні доповнення елементів $j$-го стовпчика і, у відповідності з властивістю 4 визначників, дорівнюють нулю. Вираз у правій частині (12) є $\Delta_j$, а тому (12) набуває вигляду

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{13}$$

звідки випливають рівності (11), які називаються **формулами Крамера**.

Отже, ми довели, що коли $(x_1; x_2; ...; x_n)$ є розв'язком системи (10), то числа $x_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, визначаються формулами (11).

Навпаки, сукупність чисел $x_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, які визначаються формулами (11), є розв'язком системи (10). Справді, підставляючи ці $x_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, у ліву частину $k$-го рівняння, $k \in \{1, ..., n\}$, системи (10), згідно з властивістю 4 визначника, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{sj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} b_k \Delta = b_k, \quad k \in \{1, ..., n\}. \quad ▶$$

**Приклад 1**. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 2. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера. Знайдемо $\Delta_1$ і $\Delta_2$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 6 = -41; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 28 = -24.$$

Тоді, згідно з формулами (11),

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{41}{22}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{11}.$$

Відповідь: $(\frac{41}{22}; \frac{12}{11})$. ▶

**Приклад 2**. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

◀ Знайдемо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 21 + 12 + 10 - 21 + 6 = 33.$$

Оскільки визначник системи не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 7 + 48 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 84 + 4 + 40 - 7 - 48 = 33;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Відповідь: $(1;1;1)$. ►

Істотним недоліком розв'язування систем $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими за формулами Крамера є велика трудомісткість при обчисленні визначників. Тому цей метод застосовувати на практиці для розв'язування реальних прикладних задач не завжди доцільно. Значно швидше можна розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Жордана–Гаусса), який буде розглянуто пізніше.

**2.2. Однорідна система лінійних рівнянь.** Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{14}$$

яка називається **однорідною**. Очевидно, що система (14) завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок $(0;0;\dots;0)$. З'ясуємо, коли ця система має ненульові (нетривіальні) розв'язки.

**Теорема 2**. *Якщо визначник $\Delta$ однорідної системи (14) не дорівнює нулю, то вона має лише тривіальний розв'язок.*

◄ Оскільки всі $\Delta_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, дорівнюють нулю, бо містять нульовий стовпчик, то згідно з теоремою 1 (формули (11)) $x_j = 0$, $j \in \{1, ..., n\}$. ►

Якщо ж система (14) має нетривіальний розв'язок, то її визначник $\Delta$ дорівнює нулю. Це випливає з того, що коли б $\Delta \neq 0$, то згідно з теоремою 2, єдиним розв'язком системи (14) був би нульовий. Отже, *ненульові розв'язки система (14) має тоді й тільки тоді, коли $\Delta = 0$.*

**Приклад 3**. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

◀ Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 + 3 - 6 - 2 + 2 = -6 \neq 0,$$

то система має лише єдиний розв'язок $(0; 0; 0)$. ▶

**Приклад 4**. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

◀ Маємо, що $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, бо перший і другий рядки пропорційні. Тому система має ненульові розв'язки. Знайдемо ці розв'язки. Для цього запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ми відкинули друге рівняння, оскільки воно одержується з першого множенням обох його частин на 2.

Маємо

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3, \\ 3x_1 - x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Тоді, згідно з формулами Крамера,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ -2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_3 + 6x_3}{-2 - 9} = -\frac{5}{11}x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x_3 \\ 3 & -2x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4x_3 - 3x_3}{-2 - 9} = \frac{7}{11}x_3.$$

Нехай $\dfrac{x_3}{11} = t$, тобто $x_3 = 11t$, тоді $x_1 = -5t$, $x_2 = 7t$, де $t$ – довільне дійсне число.

Отже, загальним розв'язком системи є $x_1 = -5t$, $x_2 = 7t$, $x_3 = 11t$, $t \in \mathbb{R}$. ▶

**Приклад 5. Співіснування бактерій.** Три види бактерій співіснують в пробірці й споживають три субстрати. Відомо, що в середньому бактерія $i$-го виду споживає в день $a_{ij}$ одиниць $j$-го субстрату, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, а кожного дня в пробірку подають $h_j$ одиниць $j$-го субстрату. Знайти кількість популяцій трьох видів бактерій, які можуть існувати у даному середовищі, якщо вважати, що бактерії споживають весь запас субстратів.

Розв'язати задачу для випадку, коли матриця $A = (a_{ij})$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

а матриця субстратів $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 30000 \\ 45000 \end{pmatrix}$.

◀ Позначимо кількість бактерій кожного з трьох видів відповідно через $x_1$, $x_2$, $x_3$. Тоді матимемо таку систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3. \end{cases}$$

Для нашого конкретного випадку – це система вигляду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30000, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 45000. \end{cases}$$

Якщо від другого й третього рівнянь відняти перше, то одержимо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_2 + 2x_3 = 15000, \\ 2x_2 + 4x_3 = 30000, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_2 + 2x_3 = 15000, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Тоді одержуємо, що $x_1 = \dfrac{15000 - x_2}{2}$ і $x_3 = \dfrac{15000 - x_2}{2}$, де $x_2$ – довільне. Кількість бактерій повинна бути невід'ємною, а тому $0 \le x_2 \le 15000$, $0 \le x_1 \le 7500$, $0 \le x_3 \le 7500$.

Загальна кількість співіснуючих популяцій бактерій складає 15000, а кількість бактерій кожного з видів дорівнює відповідно $x_1 = x_3$ і $x_2 = 15000 - x_1$, якщо вони споживають всі субстрати. ▶

## Вправи

**1.** Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 12, \\ 2x + 7y = 81; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1, \\ x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x + 4y = 13, \\ 4x + 2y = 10; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 3, \\ 4x + 9y + 16z = 11. \end{cases}$

**2.** Визначити, при яких значеннях $a$ і $b$ система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - ay = 1, \\ 6x + 4y = b \end{cases}$$

1) має єдиний розв'язок; 2) не має розв'язків; 3) має безліч розв'язків?

**3.** При яких значеннях $k$ однорідна система $\begin{cases} kx + y = 0, \\ x + ky = 0 \end{cases}$ має ненульові розв'язки?

**4.** Визначити, для яких значеннях $a$ і $b$ система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

1) має єдиний розв'язок; 2) невизначена; 3) несумісна?

**5.** Для яких значень $a$ система $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ має лише нульовий розв'язок?

**6.** Яка з поданих нижче систем рівнянь має нетривіальні розв'язки:

1) $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 0, \\ x_1 - 4x_2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0? \end{cases}$

**7.** Знайти всі розв'язки системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$$

**8.** Розв'язати систему:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7, \\ 5x + 3y - 4z = -1, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$

**9.** Знайти кількість популяцій трьох видів бактерій, які можуть співіснувати у даному середовищі, якщо вважати, що бактерії споживають весь даний запас субстратів, у випадку, коли матриці $A$ та $H$ мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 20000 \\ 30000 \\ 40000 \end{pmatrix}.$$

## Відповіді

**1.** 1) (16; 7); 2) $x = 1 + y\sqrt{3}$, $y \in \mathbb{R}$; 3) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$; 4) несумісна; 5) $x = -2t$, $y = 7t$, $z = 4t$, $t \in \mathbb{R}$; 6) $x = y = z = 0$; 7) $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$; 8) $(1; 3)$; 9) $(1; -1; 1)$. **2.** 1) $a \neq -2$; 2) $a = -2$, $b \neq 2$; 3) $a = -2$, $b = 2$. **3.** $k = \pm 1$. **4.** Якщо $a \neq -3$, то система має єдиний розв'язок; при $a = -3$; $b \neq \dfrac{1}{3}$ система несумісна; при $a = -3$, $b = 1/3$ система має безліч розв'язків. **5.** $a = 5$. **6.** Система 1). **7.** $x_1 = \dfrac{20}{3} + x_3$, $x_2 = -\dfrac{2}{3}$, $x_3 \in \mathbb{R}$. **8.** 1) $(1; 1; 1)$; 2) $(1; 2; 3)$. **9.** 1) $x_1 = 10000 + x_3$, $x_2 = 10000 - 2x_3$, $0 \leq x_3 \leq 5000$.

## §3. Матриці

**3.1. Основні поняття про матриці.** Таблиця з чисел $a_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею** порядку (розміру) $m \times n$.

При цьому числа $a_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, називаються **елементами** матриці. Елементи з однаковими першими індексами утворюють рядки, а з однаковими другими індексами – стовпчики матриці. Якщо $m = n$, то матрицю називають **квадратною $n$-го порядку**. Якщо ж $m \neq n$, то – **прямокутною**.

У випадку, коли $n = 1$ матрицю $A$ порядку $m \times 1$ називають **одностовпчиковою** або **матрицею-стовпчиком**, або **вектором-стовпчиком**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а при $m = 1$, тобто матрицю порядку $1 \times n$ називають **однорядковою**, або **матрицею-рядком**, або **вектором-рядком**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів $a_{11}$, $a_{22}$, $\cdots$, $a_{nn}$ квадратної матриці $n$-го порядку утворює **головну діагональ**, а множина елементів $a_{1n}$, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, $\cdots$, $a_{n1}$ – **побічну діагональ**. Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю, то таку матрицю називають **діагональною**

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}.$$

У випадку, коли $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, діагональну матрицю називають **одиничною** і позначають її буквою $E$ або $I$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називають **нульовою** або **нуль-матрицею**

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо маємо квадратну матрицю $n$-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то для неї існує визначник, який позначатимемо символом $|A|$ або $det\, A$. У випадку, коли $|A| \neq 0$, матриця називається **невиродженою**, а при $|A| = 0$ – **виродженою**.

**Приклад 1**. З'ясувати, чи є виродженою матриця:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

Отже, матриця $A$ вироджена.

2) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0,$

а це означає, що матриця $B$ невироджена. ▶

**Транспонованою** щодо матриці $A$ називають матрицю $A^T$, утворену з матриці $A$ заміною рядків однаковими за номером стовпчиками. Матрицю $A$ називають **симетричною**, якщо $A = A^T$, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх $i, j$. Квадратну матрицю називають **трикутною**, якщо всі її елементи $a_{ij}$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, розміщені під головною діагоналлю $(i > j)$ або над головною діагоналлю $(i < j)$, дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**3.2. Дії над матрицями.** Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одного й того самого розміру $m \times n$ називають **рівними**, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

**Сумою (різницею)** двох матриць $A$ і $B$ одного й того самого розміру $m \times n$ називають матрицю $C$, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів $a_{ij}$ і $b_{ij}$, тобто $C = A + B$ $(C = A - B)$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

**Добутком матриці** $A$ **на число** $\lambda$ називають матрицю $\lambda A$, елементи якої дорівнюють добуткам всіх елементів матриці $A$ на число $\lambda$, тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операції множення матриці на число і додавання матриць мають такі властивості:

а) $A+B=B+A$ (комутативний закон);

б) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативний закон додавання);

в) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ і $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (дистрибутивний закон);

г) $A+0=A$,

де $A$, $B$, $C$ і 0 матриці однакових розмірів, $\lambda$ і $\mu$ – сталі.

Розглянемо дві матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

де число стовпчиків матриці $A$ дорівнює числу рядків матриці $B$.

**Добутком цих двох матриць** $A$ **і** $B$ називають третю матрицю $C$, елементи $c_{ij}$, $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,k\}$, якої дорівнюють сумі добутків елементів $i$-го рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$-го стовпчика матриці $B$, тобто $C=A\,B$, якщо $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ для всіх $i$ та $j$.

**Приклад 2**. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

◀ Маємо

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}. \quad ▶$$

Наступний приклад показує, що добуток матриць не володіє властивістю комутативності, тобто $AB\neq BA$ і, крім того, добуток матриць може дорівнювати нулю навіть у тому випадку, коли жодна з них не є нульовою матрицею.

**Приклад 3**. Знайти $AB$ і $BA$, коли

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

◀ Згідно з правилом множення матриць

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 3(-1) & 3 \cdot 1 + 3(-1) \\ 3 \cdot 1 + 3(-1) & 3 \cdot 1 + 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix},$$

тобто $AB \neq BA$. ▶

Одинична матриця при множенні матриць має властивість: *для довільної квадратної матриці $A$ правильна рівність*

$$AE = EA = A.$$

Доводиться, що коли $A$ і $B$ дві квадратні матриці одного й того самого порядку з визначниками $|A|$ і $|B|$, то визначник матриці $C = AB$ дорівнює добутку визначників співмножників, тобто $|C| = |A|\,|B|$.

Добуток матриць має властивості:

1) $(A + B)C = AC + BC$;
2) $C(A + B) = CA + CB$;
3) $A(BC) = (AB)C$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$.

**3.3. Обернена матриця.** Нехай $A$ – квадратна матриця, визначник якої $|A| \neq 0$.

**Оберненою до матриці** $A$ називається матриця $A^{-1}$, яка задовольняє співвідношення $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де $E$ – одинична матриця.

Доводиться, що коли матриця $A$ квадратна і невироджена, то обернена матриця $A^{-1}$ існує та єдина. Знаходиться $A^{-1}$ за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де $A_{ij}$ – алгебраїчні доповнення елементів $a_{ij}$, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$, матриці $A$.

**Приклад 5**. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю $A^{-1}$.

◄ Маємо

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то матриця $A$ невироджена і, отже, для неї існує обернена.

Знайдемо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$ елементів $a_{ij}$, $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді згідно з формулою (15) маємо

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

або

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Наведемо деякі властивості оберненої матриці.

**Властивість 1**. *Визначник оберненої матриці дорівнює оберненій величині визначника даної матриці, тобто* $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

**Властивість 2**. *Обернена матриця добутку квадратних матриць дорівнює добутку обернених матриць-множників, узятих у зворотному порядку, тобто* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

◀ Справді, $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ і $(B^{-1}A^{-1})AB = B(AA^{-1})B^{-1} = BEB^{-1} = BB^{-1} = E$.

Отже, $B^{-1}A^{-1}$ є оберненою матрицею для $AB$. ▶

**Властивість 3**. *Матриця, яка є транспонованою до оберненої матриці, дорівнює оберненій матриці до транспонованої, тобто* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

**3.4. Матричний запис і матричний розв'язок системи лінійних рівнянь.** Нехай задано систему $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь із $n$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{16}$$

Позначимо через $A$ матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через $X$ – матрицю-стовпчик з невідомих і через $B$ – матрицю-стовпчик із вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо скористатись правилом множення матриць і умовою рівності матриць, то систему (16) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

або

$$AX = B. \tag{17}$$

Припустимо, що матриця $A$ – невироджена, тобто $|A| \neq 0$, тоді існує обернена матриця $A^{-1}$. Помножимо зліва обидві частини рівності (17) на $A^{-1}$:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, то остаточно дістанемо

$$X = A^{-1}B. \tag{18}$$

Отже, матриця-стовпчик із невідомих дорівнює добутку оберненої матриці $A^{-1}$ на матрицю-стовпчик вільних членів.

Рівність (17) називається **матричним рівнянням** або **матричним записом системи** (16), а (18) – **матричним розв'язком** цієї системи.

**Приклад 6**. Розв'язати за допомогою матричного методу систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

◄ Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 2 - 1 - 3 - 4 = 1;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (18) одержуємо

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 + 2 \\ -1 - 0 + 2 \\ 5 + 1 - 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.►

Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою матричного методу ефективне тоді, коли ліва частина системи залишається незмінною, а змінюється лише стовпчик із вільних членів. Справді, замість того, щоб кожного разу розв'язувати нову систему, можна скористатись матричним методом, обчислити $A^{-1}$, а потім за формулою (18) знаходити нові значення невідомих при кожному зміненому стовпчику з вільних членів.

**3.5. Власні значення і власні вектори матриці.** Ненульовий вектор-стовпчик (матриця-стовпчик)

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ називається **власним вектором** квадратної матриці $A$ $n$-го порядку, якщо існує таке число $\lambda$ – **власне значення матриці** $A$, що $AX = \lambda X$ або $(A - \lambda E)X = 0$.

Власні вектори знаходимо як розв'язки однорідної системи рівнянь $(A - \lambda E)X = 0$, яку можна записати в розгорнутому вигляді так:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Ненульові розв'язки цієї системи існують, як зазначено вище, тоді й тільки тоді, коли її визначник $|A - \lambda E| = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Рівняння (20) називається **характеристичним рівнянням** матриці $A$. Розв'язавши характеристичне рівняння, отримаємо власні значення матриці, а після цього із системи (19) для даних власних значень – її ненульові розв'язки, тобто власні вектори.

**Приклад 7**. Знайти власні вектори і власні значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

◄ Складемо характеристичне рівняння матриці $A$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Власні значення $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Запишемо системи рівнянь, які аналогічні системі (19), для визначення власних векторів $X_1$ і $X_2$.

Нехай $\lambda_1 = 2$. Тоді система має вигляд

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $x_2 = -x_1$. Якщо взяти $x_1 = 1$, то $x_2 = -1$ і тоді вектор $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, є власним вектором матриці $A$, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = 2$.

У випадку $\lambda_2 = 3$ маємо систему

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \; ; \quad x_2 = -2x_1,$$

тому $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, є власним вектором матриці $A$, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 3$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ▶

**3.6. Ранг матриці.** Розглянемо прямокутну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \dots & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і виділимо в ній $k$ довільних рядків і $k$ довільних стовпчиків. Елементи, які розміщені на перетині виділених рядків і стовпчиків, утворюють квадратну матрицю порядку $k$. Визначник цієї матриці називають **мінором $k$-го порядку матриці** $A$. Очевидно, що $k \le \min(m, n)$.

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

одним із мінорів третього порядку є визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, а одним з мінорів другого порядку – $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку. Деякі мінори матриці можуть дорівнювати нулю, інші – ні.

**Рангом матриці** називають найбільший порядок мінора даної матриці, який не дорівнює нулю, тобто натуральне число $r$ називають рангом матриці $A$, якщо серед мінорів $r$-го порядку цієї матриці є принаймні один відмінний від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку і вищого дорівнюють нулю. Той факт, що натуральне число $r$ є рангом матриці $A$, записують так: $rang(A) = r$ або $r(A) = r$.

При знаходженні рангу матриці використовують спеціальні прийоми, які базуються на елементарних перетвореннях матриць. До елементарних перетворень матриць належать:

1) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпчика) на одне й те саме число, відмінне від нуля;

2) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпчика) відповідних елементів іншого рядка (стовпчика), помножених на одне й те саме число;

3) переставляння місцями будь-яких двох рядків (стовпчиків);

4) дописування або викреслювання рядка (стовпчика), що повністю складається з нулів.

Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо від однієї з них можна перейти до іншої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці, взагалі кажучи, не рівні, але вони мають однаковий ранг, що істотно використовується при обчисленні рангу матриці.

**Приклад 8**. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Зведемо дану матрицю до еквівалентної матриці, ранг якої знаходиться простіше.

Помноживши перший рядок на $(-1)$ і додавши до третього рядка, одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

У матриці $A_1$ помножимо перший стовпчик по черзі на $(-2)$, $(-1)$, $(-1)$ і додамо відповідно до другого, третього і четвертого стовпчика, тоді $A_1$ перейде в матрицю

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Додавши другий рядок матриці $A_2$ до третього рядка, отримаємо матрицю

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Викреслимо третій рядок у матриці $A_3$, тоді матимемо

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо помножити другий стовпчик на $(-1)$ і додати спочатку до третього стовпчика, а потім до четвертого, то дістанемо матрицю

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Викреслювання третього і четвертого стовпчиків дає матрицю

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, то ранг матриці $A$ дорівнює рангу матриці $A_6$ і дорівнює 2, тобто $rang(A) = rang(A_6) = 2$. ▶

**3.7. Метод Жордана-Гаусса послідовного виключення змінних.** Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера та за допомогою матричного методу (методу оберненої матриці) пов'язані з великою кількістю обчислень. Значно швидше можна розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих, який називають **методом Жордана-Гаусса**.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{21}$$

Нехай деякий коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$. Назвемо його **розв'язувальним (провідним)**. Рядок, якому належить розв'язувальний елемент, називатимемо **розв'язувальним (провідним) рядком**, а стовпчик, якому належить розв'язувальний елемент – **розв'язувальним (провідним) стовпчиком**.

Запишемо систему (21) у вигляді таблиці

| $A_1$ | $A_2$ | $\ldots$ | $A_n$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\ldots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо на нього всі елементи першого рядка. Користуючись першим рядком, виключимо змінну $x_1$ з решти рівнянь. Для цього помножимо перший рядок по черзі на $-a_{21}$, $-a_{31}, \ldots, -a_{m1}$ і додамо відповідно до другого, третього, …, $m$-го рядка. Дістанемо таблицю

| $A_1$ | $A_2$ | $\ldots$ | $A_n$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a'_{12}$ | $\ldots$ | $a'_{1n}$ | $b'_1$ |
| 0 | $a'_{22}$ | $\ldots$ | $a'_{2n}$ | $b'_2$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| 0 | $a'_{m2}$ | $\ldots$ | $a'_{mn}$ | $b'_m$ |

Далі за розв'язувальний елемент візьмемо $a'_{22} \neq 0$ (якщо $a'_{22} = 0$, то міняємо місцями друге рівняння з якимось із наступних, щоб одержати рівносильну систему з $a'_{22} \neq 0$) і з його допомогою виключимо, аналогічно як $x_1$, змінну $x_2$ з решти рівнянь (дістанемо нулі в другому стовпчику під $a'_{22}$)

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $\dots$ | $A_n$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a'_{12}$ | $a'_{13}$ | $\dots$ | $a'_{1n}$ | $b'_1$ |
| 0 | 1 | $a''_{23}$ | ... | $a''_{2n}$ | $b''_2$ |
| 0 | 0 | $a''_{33}$ | $\dots$ | $a''_{3n}$ | $b''_3$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 0 | 0 | $a''_{m3}$ | $\dots$ | $a''_{mn}$ | $b''_m$ |

Якщо під час перетворень одержимо рядок, який складається з нулів, то його можна відкинути.

Продовжуємо процес далі. При цьому можливі такі ситуації: 1) після деякого кроку дістанемо рядок, у якому всі елементи лівіше вертикальної риски дорівнюють нулю, а елемент правіше цієї риски не дорівнює нулю (всі коефіцієнти при змінних деякого рівняння дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля), тоді система несумісна; 2) такого рядка не дістанемо, то система сумісна.

У другому випадку матимемо таблицю

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $\dots$ | $A_r$ | $\dots$ | $A_n$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $c_{12}$ | $c_{13}$ | $\dots$ | $c_{1r}$ | $\dots$ | $c_{1n}$ | $d_1$ |
| 0 | 1 | $c_{23}$ | $\dots$ | $c_{2r}$ | $\dots$ | $c_{2n}$ | $d_2$ |
| 0 | 0 | 1 | $\dots$ | $c_{3r}$ | $\dots$ | $c_{3n}$ | $d_3$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| 0 | 0 | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $c_{rn}$ | $d_r$ |

Якщо ранг відповідної системи $r = n$, то вона має єдиний розв'язок. Щоб одержати цей розв'язок, необхідно в передостаннє рівняння замість $x_n$ підставити його значення з останнього рівняння і знайти $x_{n-1}$ і т.д. Якщо $r < n$, то перші $r$ змінні $x_1, x_2, \dots, x_r$ виражаємо через решту змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = c'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{1,n}x_n + d'_1, \\ x_2 = c'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{2,n}x_n + d'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{r,n}x_n + d'_r. \end{array}\right. \tag{22}$$

У системі (22) змінні $x_1$, $x_2$,…,$x_r$ виражені через $x_{r+1}$, $x_{r+2}$, …, $x_n$. Такий розв'язок системи називається **загальним розв'язком**, змінні $x_1$, $x_2$, …, $x_r$ називаються **базисними**, змінні $x_{r+1}$, $x_{r+2}$, …, $x_n$ – **вільними**. Надаючи вільним змінним довільних значень, діставатимемо частинні розв'язки.

Якщо вільним змінним надати нульових значень, то із системи (22) одержимо значення базисних змінних

$$x_1 = d'_1, \quad x_2 = d'_2, \quad \dots, \quad x_r = d'_r.$$

Одержаний розв'язок системи (21) називають **базисним розв'язком**. Кількість базисних розв'язків не перевищує $C_n^m$. Якщо один базисний розв'язок знайдено, то для відшукання іншого одну з небазисних змінних переводять у базисні, а відповідну базисну – у небазисні.

Базисний розв'язок, у якого всі базисні змінні невід'ємні, називається **допустимим базисним розв'язком**.

Зручно здійснювати зведення системи (21) до базисної форми

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 \qquad + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{23}$$

за допомогою методу Жордана-Гаусса.

Розглянемо детально цей процес. Нехай змінна $x_s$ входить у $r$-е рівняння з коефіцієнтом $a_{rs}$. Для того щоб вона стала базисною, поділимо $r$-е рівняння на $a_{rs} \neq 0$, тобто зробимо коефіцієнт при $x_s$ одиницею, і результат віднімемо від кожного з решти рівнянь, множачи кожного разу його на відповідний елемент $a_{is}$ (дістанемо змінну $x_s$ з коефіцієнтом 0).

Сукупність операцій, які утворюють крок жорданових виключень, називаються **жордановим перетворенням**. Формули для обчислення коефіцієнтів $a'_{ij}$, $b'_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, нової системи, одержаної у результаті одного кроку жорданових виключень із розв'язувальним елементом $a_{rs}$, мають вигляд:

$$a'_{rj} = \frac{1}{a_{rs}} a_{rj}, \quad b'_r = \frac{1}{a_{rs}} b_r;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_r}{a_{rs}},$$
$$i \in \{1, \dots, m\}, \quad i \neq r, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{24}$$

Обчислення за формулами (24) можна описати за допомогою **правила прямокутника**: *щоб знайти елемент $a'_{ij}$, треба від елемента $a_{ij}$ відняти добуток коефіцієнтів, які стоять навпроти нього у провідних стовпчику і рядку, поділений на провідний елемент, розміщений по діагоналі від елемента $a_{ij}$*

$$\begin{array}{ccccc} a_{ij} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & a_{is} \\ | & & & & | \\ | & & & & | \\ | & & & & | \\ a_{rj} & \text{—} & \text{—} & \text{—} & \boxed{a_{rs}} \end{array} \quad .$$

Отже, послідовність дій, які виконуються на одному кроці жорданових перетворень у відповідності з формулами (24) така: *провідний елемент замінюється одиницею; усі решта елементів провідного рядка діляться на провідний елемент; усі решта елементів провідного стовпчика замінюються нулями; елементи, які не належать провідним рядку або стовпчику, обчислюються за правилом прямокутника.*

Для перетворення системи (21) у базисну форму (23) треба не більше ніж $m$ кроків жорданових перетворень. На першому кроці за провідний елемент вибирається довільний елемент $a_{rs} \neq 0$. На другому кроці провідний елемент вибирається у будь-якому рівнянні (крім $r$-го) серед ненульових коефіцієнтів системи, одержаної після першого кроку і т.д. Якщо в процесі виключень з'явиться рівняння, у якому ліва частина дорівнює нулю, а вільний член відмінний від нуля, – це ознака несумісності системи. Якщо ліва і права частини деякого рівняння перетворюються в нуль, то воно є лінійною комбінацією решти рівнянь, і його треба виключити з розгляду. Отже, у процесі жорданових перетворень або встановлюється несумісність системи рівнянь, або система зводиться до еквівалентної базисної системи (23), звідки розв'язок одержується безпосередньо. Формули жорданових перетворень (24) застосовуються як у випадку $m = n$, так і у випадку $m < n$.

**Приклад 9**. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = 4, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & +4x_5 & = -3, \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & & = 1, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = 1. \end{cases}$$

◀ Результати обчислень подамо у вигляді таблиці

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_6$ | $A_0$ | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_6$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | $-2$ | 3 | $-4$ | 2 | 4 | | 1 | 0 | 1 | $-2$ | 10 | $-2$ |
| 0 | 1 | $-1$ | 1 | 4 | $-3$ | | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 4 | $-3$ |
| 1 | 3 | 0 | $-3$ | 0 | 1 | | 0 | 0 | 2 | $-4$ | $-22$ | 12 |
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | 3 | 1 | | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | $-2$ | $-11$ | 6 |
| 1 | $-2$ | 3 | $-4$ | 2 | 4 | | 1 | 0 | 0 | 0 | 21 | $-8$ |
| 0 | $\boxed{1}$ | $-1$ | 1 | 4 | $-3$ | | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $-7$ | 3 |
| 0 | 5 | $-3$ | 1 | $-2$ | $-3$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 3 | $-2$ | 1 | 1 | $-3$ | | 0 | 0 | 1 | $-2$ | $-11$ | 6 |

.

Отже, система набула вигляду

$$\begin{cases} x_1 & & & & +21x_5 = -8, \\ & x_2 & & -x_4 & -7x_5 = 3, \\ & & x_3 & -2x_4 & -11x_5 = 6, \end{cases}$$

де $x_1$, $x_2$, $x_3$ – базисні змінні, а $x_4$, $x_5$ – вільні змінні. Тому загальний розв'язок системи: $x_1 = -8-21x_5$, $x_2 = 3+x_4+7x_5$, $x_3 = 6+2x_4+11x_5$, $\{x_4, x_5\} \subset \mathbb{R}$. Якщо покласти $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, то одержимо базисний розв'язок $x_1 = -8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. ▶

За допомогою методу Жордана-Гаусса можна знаходити матрицю, обернену до даної. При цьому не треба досліджувати задану матрицю на особливість, обчислюючи її визначник. Якщо можливе число кроків жорданових перетворень $r$ менше від порядку $n$ матриці $(r < n)$, то матриця особлива й оберненої немає.

**Приклад 10**. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Запишемо матрицю $A$, а справа поряд із нею – одиничну матрицю $E$ третього порядку і виконаємо такі жорданові перетворення, щоб на місці матриці $A$ утворити одиничну матрицю $E$. Обчислення подамо у вигляді таблиць

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{2}$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $-1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | $3/2$ | $1/2$ | 0 | 0 |
| 0 | $\boxed{-2}$ | $-3/2$ | $-1/2$ | 1 | 0 |
| 0 | 3 | $5/2$ | $1/2$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $3/4$ | $1/4$ | $1/2$ | 0 |
| 0 | 1 | $3/4$ | $1/4$ | $-1/2$ | 0 |
| 0 | 0 | $\boxed{1/4}$ | $-1/4$ | $3/2$ | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $-4$ | $-3$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $-5$ | 3 |
| 0 | 0 | 1 | $-1$ | 6 | 4 |

.

Отже, на місці матриці $A$ дістали одиничну матрицю $E$, а на місці одиничної матриці $E$ – обернену матрицю $A^{-1}$. Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

**3.8. Теорема Кронекера-Капеллі.** Розглянемо систему (21). Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею системи (21), а матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

– розширеною матрицею системи (21).

Відповідь на питання, коли система (21) є сумісною дає така теорема.

**Теорема Кронекера-Капеллі**. *Система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто* $rang(A) = rang(A_1)$.

Отже, якщо $rang(A) < rang(A_1)$, то система (21) не має розв'язків. Вона суперечлива – не існує вектора $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, який задовольняє одночасно всі рівняння (21).

У випадку, коли $rang(A) = rang(A_1) = k$, система (21) має розв'язки. Щоб знайти їх, ми повинні вибрати із системи (21) деякі $k$ рівнянь, матриця коефіцієнтів яких має ранг $k$, і розв'язати ці рівняння. Розв'язків у цієї системи $k$ рівнянь з $n$ невідомими безліч. При цьому довільний розв'язок даних $k$ рівнянь є розв'язком і решти $n - k$ рівнянь системи (21).

Описані вище випадки вичерпують усі можливі ситуації, оскільки ранг $A_1$ не може бути меншим, ніж ранг $A$.

Для розв'язання системи (21) у загальному випадку не треба обчислювати ранги матриць $A$ і $A_1$, а потім їх порівнювати. Достатньо одразу застосувати метод Жордана-Гаусса.

Метод Жордана-Гаусса зручний тим, що він є найменш трудомістким, дозволяє одночасно встановити сумісна дана система чи ні, і у випадку сумісності знайти її розв'язки. Крім того, він дає можливість знайти максимальне число лінійно незалежних рівнянь – ранг матриці системи.

**Приклад 11**. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

має визначник $|A| = 0$. Очевидно, що ранг матриці $A$ дорівнює 2, бо є визначник, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

Матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

має ранг, що дорівнює 3, оскільки визначник, породжений даною матрицею

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, $rang(A) < rang(A_1)$, і система несумісна. ▶

**Приклад 12**. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $|A| = 0$, а $rang(A_1) = rang(A) = 2$. Отже, система сумісна і для знаходження її розв'язків виберемо два рівняння таких, щоб ранг матриці з їхніх коефіцієнтів дорівнював 2. Візьмемо, наприклад, перше і друге рівняння

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 - x_2, \\ x_1 + 2x_3 = 1 - x_2. \end{cases}$$

Визначник $\Delta$ останньої системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

тому вона має єдиний розв'язок при довільній правій частині:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 - x_2 & 1 \\ 1 - x_2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - x_2, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_2 \\ 1 & 1 - x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, трійки чисел $(1 - x_2; x_2; 0)$ при будь-якому $x_2 \in \mathbb{R}$ дають всі розв'язки даної системи. ▶

**Вправи**

**1.** Знайти матрицю $A + 3B - C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

**2.** Обчислити матрицю $D = (AB)^T - C^2$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

**3.** Знайти $AB$ і $BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.** Обчислити $AB$, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**5.** Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислити $AB$, $BA$, $AC$, $BC$, і $C^2$.

**6.** Знайти добуток матриць $ABC$, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**7.** Обчислити $A^3$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

**8.** Знайти матрицю, обернену до даної:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**9.** Знайти власні значення і власні вектори матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

**10.** Знайти ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**11.** Матричним методом розв'язати систему:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

**12.** Методом Жордана-Гаусса розв'язати систему:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

**13.** Знайти матрицю, обернену до даної, використовуючи метод Жордана-Гаусса:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Відповіді

**1.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. **3.** $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
**4.** 1) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; 2) (31). **5.** $AB = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 15 & 32 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 12 & 15 \\ 13 & 17 & 21 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 16 & 7 & 11 \end{pmatrix}$, $BC$ невизначена, $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
**6.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$. **8.** 1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$;
2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -10/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}$. **9.** 1) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 3) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, $X_3 = C\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
**10.** 1) 2; 2) 2. **11.** 1) $(0;2)$; 2) $(5;6;10)$; 3) $(2;-1;-3)$. **12.** 1) $(1;1;1)$; 2) несумісна; 3) $(1;2;3;4)$; 4) $x_1 = 6-8x$, $x_2 = 1-2x_3$, $x_4 = -1$, $x_3 \in \mathbb{R}$; 5) $(-1;0;1)$. **13.** 1) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;
3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# §4. Лінійні моделі

**4.1. Застосування алгебри матриць.** При розв'язуванні багатьох економічних та інших прикладних задач використовується алгебра матриць.

**Приклад 1**. Підприємство випускає продукцію трьох видів $P_1$, $P_2$, $P_3$ і використовує сировину двох типів $S_1$ і $S_2$. Норми витрат сировини характеризуються матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, де кожний елемент $a_{ij}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$, указує, скільки одиниць сировини $j$-го типу витрачається на виробництво одиниці продукції $i$-го виду. План випуску продукції задано матрицею-рядком $C = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$, вартість одиниці кожного типу сировини – матрицею-стовпчиком $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Знайти витрати сировини, необхідні для планового випуску продукції, а також загальну вартість сировини.

◀ Витрати сировини 1-го типу складають $S_1 = 2 \cdot 100+ +5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$, а другого – $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$, а це означає, що матрицю-рядок $S$ витрат сировини можна подати у вигляді

$$S = CA = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$$

Тоді сумарна вартість сировини

$$Q = SB = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = (730 \cdot 30 + 980 \cdot 50) = (70900).$$

Сумарну вартість сировини можна обчислити й по-іншому: спочатку обчислимо матрицю вартостей сировини на одиницю продукції, тобто матрицю $R = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а потім загальну вартість сировини

$$Q = CR = C(AB) = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900). \quad ▶$$

**Приклад 2**. Галузь складається з $n$ підприємств, кожне з яких випускає по одному виду продукції в обсязі $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, одиниць. Для забезпечення свого виробництва підприємство використовує частину продукції, яка випускається ним самим та іншими підприємствами. Нехай $a_{ij}$ – частина продукції $i$-го підприємства, яка використовується $j$-им підприємством для забезпечення випуску своєї продукції обсягом $x_j$ одиниць.

Знайти обсяг кінцевого продукту $y_j$, тобто кількість продукції $j$-го підприємства для реалізації поза даною галуззю. Розрахунки провести для випадку, коли $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ мають відповідно вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

◄ Позначимо через $Y$ матрицю-стовпчик

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $y_i = x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i \in \{1, ..., n\}$, або в матричній формі $Y = X - AX$, тобто $Y = (E - A)X$, де $E$ – одинична матриця.

У нашому випадку маємо

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - 0,4 & -0,2 & -0,3 \\ -0,3 & 1 - 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 1 - 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 240 - 100 - 60 \\ -120 + 250 - 40 \\ -40 - 100 + 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 3. Контакти першого і другого порядків у епідеміології**. Припустимо, що троє осіб захворіли деякою хворобою. Другу групу з шести осіб опитують з метою з'ясування, хто з них мав контакт з трьома хворими. Потім опитують третю групу з семи осіб, щоб з'ясувати їхні контакти з ким-небудь із шести осіб другої групи. Описати можливі контакти (прямі та непрямі) осіб другої і третьої груп між собою та з хворими першої групи.

◀ Визначимо матрицю $A = (a_{ik})_{\substack{i\in\{1,2,3\}\\ k\in\{1,\ldots,6\}}}$, покладаючи $a_{ik} = 1$, якщо $k$-та особа другої групи знаходилася в контакті з $i$-ою хворою особою з першої групи, і $a_{ik} = 0$ – у протилежному випадку. Аналогічно визначимо матрицю $B = (b_{kj})_{\substack{k\in\{1,\ldots,6\}\\ j\in\{1,\ldots,7\}}}$, покладаючи $b_{kj} = 1$, якщо $k$-та особа третьої групи знаходилася в контакті з $j$-ою особою з другої групи, і $b_{kj} = 0$ – у протилежному випадку. Ці дві матриці описують схему контактів першого порядку між групами.

Нас можуть цікавити також непрямі контакти, або контакти другого порядку, між особами третьої групи і хворими з першої групи. Ці контакти описує добуток матриць $C = AB$, де $c_{ij} = \sum_{k=1}^{6} a_{ik}b_{kj}$ - кількість контактів другого порядку між $j$-ою особою третьої групи та $i$-ою особою з групи хворих.

Нехай матриці $A$ і $B$ мають, наприклад, вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку $a_{24}$ означає, що четверта особа другої групи знаходилася в контакті з другим хворим першої групи. Аналогічно, $b_{33} = 0$ означає, що третя особа з третьої групи не контактувала з третьою особою другої групи.

Знайдемо матрицю $C$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елемент $c_{23} = 2$ показує, що є два контакти другого порядку між третьою особою третьої групи і другою хворою особою. Зауважимо, що у шостої особи з третьої групи виявилося $1 + 1 + 2 = 4$ непрямих контактів з інфікованими хворими. Таких контактів немає лише у п'ятої особи. ►

**Приклад 4. Застосування матриць в географії**. У географії матриці широко використовуються при вивченні географічних сіток. Зокрема, у фізичній географії розглядають річкові системи, які класифікують за водостоками, враховуючи кількість та довжину приток. Для цього зображують ділянку річкової сітки в матричній формі відповідно до кількості приток (ребра), які зустрічаються у точках їхнього злиття (вузли).

Розглянемо деяку просту річкову сітку. Занумеруємо ребра числами від 1 до 5, а вузли – буквами від $a$ до $f$. Запишемо матриці, що характеризують дану річкову сітку. Елементи цих матриць – це або одиниці, або нулі в залежності від того, чи зв'язані між собою притоки (вузли) чи ні.

$$\underset{\text{Матриця ребер}}{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}} \qquad \underset{\text{Матриця вузлів}}{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}.$$

◄ У матриці ребер, наприклад, видно, що притока 2 безпосередньо зв'язана з притоками 3 і 4, а з притоками 1 і 5 не зв'язана. Аналогічно з матриці вузлів випливає, що вузол $d$ безпосередньо зв'язаний з вузлом $e$, але не зв'язаний з іншими вузлами, а вузол $b$ зв'язаний з вузлами $a$, $c$ та $e$.

Кожна з цих матриць є симетричною, але очевидно, що ця симетричність втрачається, якщо ми хочемо відобразити у якому напрямку тече річка. Це означає, що зв'язок в одному із напрямків є неможливим. Умовно даний факт відобразимо так: рядки визначають течію "із" $a$, $b$, $c$ і т.д., а стовпчики – течію "в" $a$, $b$, $c$ і т.д. Оскільки можливі зв'язки лише із 1 в 5 або із $f$ в $e$, то в кожній з наведених матриць деякі зв'язки втрачаються. Тому матриці матимуть у цьому випадку вигляд

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Сума елементів в кожному стовпчику дає загальну кількість приток, що впадають у кожну річку. В нашому випадку маємо по дві притоки – ребра 4 і 5 та два вузли $b$ і $e$.

Зміни річкової сітки можна подати за допомогою додавання і віднімання матриць.

Запропонований матричний метод можна використовувати й для інших характеристик річкової сітки,наприклад, описання витрат води, розмірів русла і т.п. ►

**4.2. Застосування систем лінійних рівнянь.** Наведемо приклади задач економіки, математичні моделі яких описуються системами лінійних рівнянь.

**Приклад 5.** Завод спеціалізується з випуску чотирьох видів виробів $P_1$, $P_2$, $P_3$ і $P_4$. При цьому використовується сировина чотирьох типів $S_1$, $S_2$, $S_3$ і $S_4$. Норми витрат кожної з них на одиницю продукції відповідного виду задано таблицею

| Вид сировини | Норми витрат одиниць сировини на одиницю продукції | | | | Витрати сировини на 1 день, ум.од |
|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | |
| $S_1$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 8 |
| $S_2$ | 0 | 1 | 3 | 1 | 15 |
| $S_3$ | 4 | 0 | 1 | 1 | 11 |
| $S_4$ | 1 | 1 | 0 | 5 | 23 |

Знайти щоденний обсяг випуску продукції кожного виду.

◄ Нехай завод випускає $x_j$ одиниць продукції $P_j$, $j \in \{1, ..., 4\}$. Тоді, згідно з нормами витрат сировини кожного типу, маємо систему рівнянь

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\
x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\
4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\
x_1 + x_2 + 5x_4 = 23.
\end{cases}
$$

Розв'яжемо цю систему методом Жордана-Гаусса

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | 2 | 1 | 0 | 8 |
| 0 | 1 | 3 | 1 | 15 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 11 |
| 1 | 2 | 0 | 5 | 23 |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 8 |
| 0 | $\boxed{1}$ | 3 | 1 | 15 |
| 0 | −8 | −3 | 1 | −21 |
| 0 | −1 | −1 | 5 | 15 |
| 1 | 0 | −5 | −2 | −22 |
| 0 | 1 | 3 | 1 | 15 |
| 0 | 0 | 21 | 9 | 99 |
| 0 | 0 | $\boxed{2}$ | 6 | 30 |

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 13 | 53 |
| 0 | 1 | 0 | −8 | −30 |
| 0 | 0 | 0 | $\boxed{-54}$ | −216 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 15 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |

.

Отже, завод випускає в день 1 ум.од. продукції $P_1$; 2 ум.од. продукції $P_2$; 3 ум.од. продукції $P_3$ і 4 ум.од. продукції $P_4$. ►

**Приклад 6**. Для виплати заробітної платні працівникам чотирьох категорій $B_1$, $B_2$, $B_3$ і $B_4$ виділено купюри таких вартостей: 1850 купюр по 100 грн., 230 купюр по 50 грн., 250 купюр по 10 грн. і 740 купюр по 1 грн. Заробітна платня працівника категорії $B_1$ складає 962 грн., категорії $B_2$ – 713 грн., категорії $B_3$ – 452 грн., категорії $B_4$ – 261 грн.

Визначити скільки працівників даної категорії працює на підприємстві, якщо кожному з них видали заробітну платню мінімальним числом купюр.

◄ Оскільки оплата проводиться мінімальним числом купюр, то таблиця розподілу купюр різної вартості, які видають співробітникам різних категорій, має вигляд

| Вартість купюри, грн. | Розподіл купюр по категоріях | | | | Загальна кількість купюр |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| 100 | 9 | 7 | 4 | 2 | 1850 |
| 50 | 1 | – | 1 | 1 | 230 |
| 10 | 1 | 1 | – | 1 | 250 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 740 |

Нехай $x_j$ – кількість працівників категорії $B_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді за даними наведеної вище таблиці матимемо систему рівнянь балансу

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1850, \\ x_1 \quad\; + x_3 + x_4 = 230, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 250, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 740. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему методом Жордана-Гаусса.

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 4 | 2 | 1850 |
| $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 1 | 230 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 250 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 740 |
| 0 | 7 | $-5$ | $-7$ | $-220$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 230 |
| 0 | $\boxed{1}$ | $-1$ | 0 | 20 |
| 0 | 3 | 0 | $-1$ | 280 |
| 0 | 0 | $\boxed{2}$ | $-7$ | $-360$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 230 |
| 0 | 1 | $-1$ | 0 | 20 |
| 0 | 0 | 3 | $-1$ | 220 |

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $-7/2$ | $-180$ |
| 1 | 0 | 0 | $9/2$ | 410 |
| 0 | 1 | 0 | $-7/2$ | $-160$ |
| 0 | 0 | 0 | $\boxed{19/2}$ | 760 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 100 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 120 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 80 |

.

Отже, працівників категорії $B_1$ на підприємстві працює 50 осіб, категорії $B_2$ – 120 осіб, категорії $B_3$ – 100 осіб і категорії $B_4$ – 80 осіб. ►

**4.3. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки.** Метою балансового аналізу є відповідь на питання, яке виникає в макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з $n$ галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції даної галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з другого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Припустимо, що є $n$ галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на споживання всередині даної галузі, а також іншими галузями, а друга частина – для реалізації (споживання) у невиробничій сфері.

Розглянемо процес виробництва за деякий проміжок часу, наприклад, рік.

Введемо такі позначення: $x_i$ – сумарний (валовий) обсяг продукції $i$-ої галузі, $y_i$ – обсяг кінцевого продукту $i$-ої галузі для невиробничого споживання $(i \in \{1, ..., n\})$, $x_{ij}$ – обсяг продукції $i$-ої галузі, що споживається $j$-ою галуззю в процесі виробництва $(\{i, j\} \subset \{1, ..., n\})$.

Балансовий принцип зв'язку між різними галузями промисловості полягає в тому, що валовий випуск $i$-ої галузі повинен дорівнювати сумі обсягів споживання у виробничій і невиробничій сферах, тобто

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{25}$$

Ці рівняння називаються **співвідношеннями балансу**. Розглядатимемо вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини, які входять до рівності (25), мають вартісне вираження.

Уведемо коефіцієнти прямих витрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \{i, j\} \subset \{1, ..., n\}, \tag{26}$$

які виражають витрати продукції $i$-ої галузі на виробництво одиниці продукції $j$-ої галузі. Леонтьєвим було помічено, що протягом довгого часу величини $a_{ij}$ змінюються мало, і тому їх можна вважати сталими й залежними лише від технології виробництва. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто $x_{ij} = a_{ij}x_j \quad (\{i, j\} \subset \{1, ..., n\})$. При цьому співвідношення балансу набувають вигляду

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{27}$$

Розглядатимемо матрицю-стовпчик $X$ обсягів виробленої продукції (матриця валового випуску), матрицю $Y$ обсягів продукції кінцевого споживання (матриця кінцевого споживання), а також матрицю $A$ коефіцієнтів прямих витрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді система рівнянь (27) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \tag{28}$$

Це рівняння називають **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**, або **моделлю Леонтьєва**.

Рівняння (28) можна використовувати двояко: 1) відома матриця-стовпчик валового випуску $X$, а треба знайти матрицю-стовпчик кінцевого споживання $Y$ (задача розглянута вище у прикладі 2); 2) для періоду $T$ (наприклад, рік) відома матриця стовпчик кінцевого споживання $Y$ і треба знайти матрицю-стовпчик валового випуску.

У другому випадку треба розв'язати систему рівнянь (28) з відомими матрицею $A$ і матрицею стовпчиком $Y$. Перепишемо рівняння (28) у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{29}$$

Якщо матриця $(E - A)$ невироджена, тобто $det(E - A) \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1}Y. \tag{30}$$

Матриця $S \equiv (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат**; кожний її елемент $s_{ij}$ є величиною валового випуску продукції $i$-ої галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці **кінцевого** продукту $j$-ої галузі $y_j$, $j \in \{1, ..., n\}$.

У відповідності з економічним змістом задачі значення $x_i$ повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях $y_i$ і $a_{ij}$, де $\{i, j\} \subset \{1, ..., n\}$.

Матриця $A \geq 0$ ($a_{ij} \geq 0$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$) називається **продуктивною**, якщо для довільної матриці-стовпчика $Y \geq 0$ ($y_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$) існує розв'язок $X \geq 0$ ($x_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$) рівняння (28). У цьому випадку й модель Леонтьєва називається продуктивною.

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці $A$. Один з них стверджує, що матриця $A$ продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпчиків не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпчиків сума елементів строго менша одиниці, тобто матриця $A$ продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для довільних $\{i, j\} \subset \{1, ..., n\}$, $\quad \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ та існує номер $j$ такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

**Приклад 7.** У таблиці наведено дані про виконання балансу за певний звітний період

| N п/п | Галузь | Споживання | | Кінцевий продукт | Валовий випуск |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Енергетика | Машинобуд. | | |
| 1 | Енергетика | 7 | 21 | 72 | 100 |
| 2 | Машино-будування | 12 | 15 | 63 | 100 |

Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а машинобудування залишиться на попередньому рівні.

◀ Маємо $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 63$. За формулою (26) знаходимо коефіцієнти прямих витрат: $a_{11} = \frac{7}{100} = 0,07$, $a_{12} = \frac{21}{100} = 0,21$, $a_{21} = \frac{12}{100} = 0,12$, $a_{22} = \frac{15}{100} = 0,15$. Матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності, оскільки $\max\{0,07 + 0,12;\ 0,21 + 0,15\} = \max\{0,19; 0,36\} = 0,36 < 1$.

Тому для довільної матриці-стовпчика кінцевого продукту $Y$ можна знайти необхідний обсяг валового випуску $X$ за формулою $X = (E - A)^{-1}Y$.

Оскільки згідно з умовою $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}$, то треба знайти $(E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,21 \\ -0,12 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$det(E - A) = 0,93 \cdot 0,85 - 0,12 \cdot 0,21 = 0,7653 \neq 0;$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор кінцевого продукту

$$X = \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 \cdot 144 + 0,21 \cdot 63 \\ 0,12 \cdot 144 + 0,93 \cdot 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 177,2 \\ 99,1 \end{pmatrix},$$

тобто валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 177,2 ум.од., а в машинобудуванні – до 99,1 ум.од. ►

**Приклад 8**. Визначити міжгалузевий баланс виробництва й споживання продукції трьох галузей, коли відома матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}$ і кінцевий продукт кожної галузі

$$\begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix}.$$

◄ Маємо $X = (E - A)^{-1}Y$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Отже,

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0,0 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,0 & 0,9 \end{pmatrix};$$

$$\det(E - A) = 0,421;$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 223280 \\ 562946 \\ 247030 \end{pmatrix}.$$

Обсяг виробництва першої галузі $x_1 = 223280$, другої $x_2 = 562946$ і третьої $x_3 = 247030$. Знаючи ці обсяги й коефіцієнти прямих витрат, можна обчислити потоки продукції від $i$-ої до $j$-ої галузі.

Якщо, наприклад, на одиницю продукції другої галузі йде 0,1 одиниць продукції першої галузі, то на 562946 одиниць всієї продукції другої галузі витрачається $0,1 \cdot 562946 = 56294,6$ одиниць продукції першої галузі. Решта продукції першої галузі споживається у ній самій: $0,3 \cdot 223280 = 66984,0$, бо у третій галузі її продукція не споживається, оскільки $a_{13} = 0$.

Отже, продукція першої галузі розподіляється так: $x_{11} = 66984,0$; $x_{12} = 56294,6$; $x_{13} = 0$; $y_1 = 100000$, що разом складає $x \approx 223279$.

Подібним чином можна знайти балансовий розподіл продукції другої й третьої галузей. ►

**4.4. Лінійна модель торгівлі.** Вважатимемо, що частини бюджетів $n$ країн, які ми позначимо відповідно $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, витрачаються на купівлю товарів. Розглянемо **лінійну модель обміну**, або **модель міжнародної торгівлі**.

Нехай $a_{ij}$ – частина бюджету $x_j$, яку $j$-а країна витрачає на закупівлю товарів $i$-ої країни. Уведемо матрицю з коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Якщо весь бюджет витрачається лише на закупки всередині країни та зовні неї, то це можна розглядати як торговельний баланс, а тому правильна рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{32}$$

Матриця $A$, елементи якої задовольняють умови (32) називається **структурною матрицею торгівлі**. Очевидно, що для $i$-ої країни загальна виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Умовою бездефіцитності (збалансованості) торгівлі є $P_i \geq x_i$ або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{33}$$

Якщо матриця $A$ є структурною, тобто виконуються умови (32), то в (33) не можуть бути знаки нерівності. Справді, додамо всі нерівності (33) і погрупуємо доданки з величинами $x_j$. Тоді одержимо, що

$$x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + \ldots +$$

$$+x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Оскільки в дужках стоять суми елементів матриці по стовпчиках, які дорівнюють одиниці за умовою (32), то одержимо нерівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Звідси випливає, що можливий лише знак рівності.

Отже, умови (33) набувають вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases} \tag{34}$$

Позначимо через $X$ матрицю-стовпчик, кожна компонента якої характеризує бюджет відповідної країни, тобто $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Цю матрицю називають **матрицею бюджетів**. За допомогою даної матриці систему (34) можна подати у вигляді

$$AX = X. \tag{35}$$

З цього рівняння випливає, що власний вектор структурної матриці, який відповідає її власному значенню $\lambda = 1$, складається з бюджетів країн бездефіцитної міжнародної торгівлі.

Рівняння (35) можна подати у вигляді

$$(A - E)X = 0, \tag{36}$$

звідки й знаходиться матриця $X$.

**Приклад 9**. Структурна матриця торгівлі чотирьох країн має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети цих країн, які задовольняють умову збалансованої бездефіцитної торгівлі, якщо сума бюджетів $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6270$.

◀ Треба розв'язати систему (36), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,2-1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3-1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5-1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,4x_1 - 0,7x_2 + 0,1x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 - 0,5x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,6x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} -8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник даної системи дорівнює нулю, то система має безліч розв'язків. Візьмемо друге, третє і четверте рівняння і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Маємо, згідно з формулами Крамера,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2x_4 & -7 & 1 \\ -2x_4 & 3 & -5 \\ 6x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{140x_4}{121}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2x_4 & 1 \\ 3 & -2x_4 & -5 \\ 1 & 6x_4 & 2 \end{vmatrix}}{121} = \frac{146}{121}x_4,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 & -2x_4 \\ 3 & 3 & -2x_4 \\ 1 & 1 & 6x_4 \end{vmatrix}}{121} = \frac{220}{121} x_4.$$

Оскільки $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$, то

$$\left(\frac{140}{121} + \frac{146}{121} + \frac{220}{121} + \frac{121}{121}\right) x_4 = 6270, \quad \frac{627}{121} x_4 = 6270,$$

$$x_4 = \frac{6270 \cdot 121}{627} = 1210.$$

Тому шукані величини бюджетів країн при бездефіцитній торгівлі такі:

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210. \quad \blacktriangleright$$

## Вправи

**1.** Підприємство щодобово випускає чотири види виробів, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці

| Вид виробу N п/п | Кількість виробів, од. | Витрати сировини, кг | Норма часу виготовлення год/видів | Ціна виробу, гр.од/видів |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 5 | 10 | 30 |
| 2 | 50 | 2 | 5 | 15 |
| 3 | 30 | 7 | 15 | 45 |
| 4 | 40 | 4 | 8 | 20 |

Знайти добові показники: витрати сировини $S$, затрати робочого часу $T$ і вартість $P$ продукції.

**2.** Підприємство випускає продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного виду задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вартості одиниць сировини кожного типу задані матрицею $B = (10 \;\; 15)$. Які загальні витрати виробництва на виготовлення 100 одиниць продукції першого виду, 200 одиниць продукції другого виду і 150 одиниць продукції третього виду?

**3.** При виготовленні деталей чотирьох видів $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задано таблицею

| Ресурси | Витрати (ум.од.) на одну деталь | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
| Матеріали | 1 | 3 | 0,5 | 2 |
| Робоча сила | 1,5 | 2 | 3 | 1 |
| Електроенергія | 2 | 1 | 1 | 0,5 |

Обчислити загальні потреби в матеріалах $y_1$, робочій силі $y_2$ та електроенергії $y_3$ для виготовлення загальної кількості деталей кожного виду: $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$.

**4.** Виконати розрахунок заробітної платні, яка припадає на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі матриці: 1) затрат робочого часу в годинах на кожному робочому місці $\Pi_j$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, і на кожний виріб виду $A_i$, $i \in \{1,2,3\}$,

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 & \Pi_5 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array};$$

2) кількість виробів $B_k$, $k \in \{1,2,3\}$ (у штуках), у кожній партії виробів виду $A_i$, $i \in \{1,2,3\}$,

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array};$$

3) погодинної заробітної платні (у грошових одиницях) на кожному робочому місці

$$Y = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

**5.** (Прогноз випуску продукції за запасами сировини). Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва задано таблицею.

| Тип сировини | Витрати сировини за видами продукції | | | Запаси сировини |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 6 | 4 | 5 | 2400 |
| 2 | 4 | 3 | 1 | 1450 |
| 3 | 5 | 2 | 3 | 1550 |

Треба визначити обсяг випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

**6.** На підприємстві є три цехи. Скільки продукції слід випускати кожному цеху, якщо задані матриця прямих витрати $A$ і матриця кінцевого продукту $Y$:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1200 \\ 2000 \\ 2400 \end{pmatrix};$

2 ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1224 \\ 1632 \\ 816 \end{pmatrix}$?

**7.** Галузь складається з чотирьох підприємств; матриця випуску продукції і матриця внутрішнього споживання мають відповідно вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,10 & 0,24 & 0,25 \\ 0,20 & 0,15 & 0,36 & 0,17 \\ 0,15 & 0,20 & 0,20 & 0,25 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю обсягів кінцевого продукту, який має реалізовуватися поза галуззю.

**8.** Є дві фірми, які виробляють певний товар.

1) Сукупний продукт першої фірми дорівнює 200, а другої фірми – 300, матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$. Знайти кінцевий продукт кожної фірми.

2) Кінцевий продукт першої фірми дорівнює 70 а другої – 120. Треба знайти необхідний сукупний продукт, якщо матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

**9.** Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети першої і другої країн, які задовольняють умову збалансованої бездефіцитної торгівлі, якщо бюджет третьої країни дорівнює 1100 ум.од.

**10.** Нехай двоє осіб захворіли інфекційною хворобою. Друга група з п'яти осіб мала контакти з хворими, а третя група з чотирьох осіб мала контакти з другою групою. Треба описати контакти другого порядку між третьою групою і двома інфікованими особами, якщо контакти першого порядку (прямі контакти) визначаються такими матрицями:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**11.** Дані про виконання балансу за звітний період (у певних гр. од.) наведено в таблиці:

| Галузь виробництва | Розподіл випуску продукції в галузях | | Обсяг кінцевої продукції | Обсяг валової продукції |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | | |
| 1 | 9 | 25 | 66 | 100 |
| 2 | 8 | 27 | 165 | 200 |

Знайти необхідний обсяг валової продукції кожної галузі, якщо обсяг кінцевої продукції першої галузі збільшиться вдвоє, а другої не зміниться.

**12.** Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети цих країн, які задовольняють умову збалансованої бездефіцитної торгівлі, якщо сума бюджетів $x_1+x_2+x_3 = 9000$ гр. од.

## Відповіді

**1.** $S = 570$ кг, $T = 1220$ год., $P = 3500$ гр.од. **2.** 2800. **3.** $y_1 = 28$, $y_2 = 47$, $y_3{-}32$. **4.** (99,6; 81,90; 102,55). **5.** $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$. **6.** 1) $X = \begin{pmatrix} 1640 \\ 2940 \\ 3116 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1910 \\ 2440 \\ 2190 \end{pmatrix}$. **7.** $Y = (135\ 34\ 35\ 40)$. **8.** 1) $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix}$. **9.** 1000 од. і 1200 од. **10.** 1) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** $X = \begin{pmatrix} 173,461 \\ 206,794 \end{pmatrix}$, тобто обсяг валової продукції в першій галузі треба збільшити до 173,461 гр. од., а в другій – до 206,794 гр. од. **12.** $x_1 = 4000$, $x_2 = 3000$, $x_3 = 2000$.

## §5. Квадратичні форми

**Квадратичною формою** $f$ **від** $n$ **змінних** $x_1$**,** $x_2$**, …,** $x_n$ називається алгебраїчна сума доданків, кожний з яких є або квадратом однієї з цих змінних, або добутком різних змінних, взятих з деякими коефіцієнтами.

Вважаючи, що в квадратичній формі $f$ уже зведено подібні члени, через $a_{jj}$ позначимо коефіцієнт при $x_j^2$, а через $2a_{jk}$ коефіцієнт при добутку $x_jx_k$, $j \neq k$. Оскільки $x_jx_k = x_kx_j$, то коефіцієнт при цьому добутку можна позначати також і через $2a_{kj}$. Згідно з цими позначеннями повинні виконуватися рівності $a_{jk} = a_{kj}$, $\{j,k\} \subset \{1,\ldots,n\}$, і тоді $2a_{jk}x_jx_k = a_{jk}x_jx_k + a_{kj}x_kx_j$. Тому

$$f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k. \tag{37}$$

З коефіцієнтів квадратичної форми (37) складемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яка називається **матрицею квадратичної форми**. Ранг матриці $A$ називається **рангом квадратичної форми**. Зокрема, якщо $r = n$, тобто матриця $A$ невироджена, то і квадратична форма називається **невиродженою**.

Оскільки $a_{jk} = a_{kj}$, то матриця $A$ є симетричною, тобто її елементи симетричні відносно головної діагоналі. Очевидно, що для будь-якої симетричної матриці $A$ за формулою (37) можна побудувати квадратичну форму $f$, коефіцієнти $a_{ij}$ якої є елементами матриці $A$.

Якщо ввести позначення

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots & x_n \end{pmatrix},$$

то квадратичну форму (37) можна записати у вигляді

$$f = X^T A X. \tag{38}$$

Розглянемо лінійне перетворення

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} q_{jk} y_k, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{39}$$

матрицею якого є

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді перетворення (39) запишеться так:

$$X = QY, \tag{40}$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тоді

$$X^T = Y^T Q^T. \tag{41}$$

З'ясуємо як зміниться квадратична форма $f$ при перетворенні (39).

Для цього підставимо (40), (41) в (38):

$$f = Y^T Q^T A Q Y = Y^T (Q^T A Q) Y.$$

Введемо позначення $B = Q^T A Q$, тоді

$$f = Y^T B Y,$$

а це означає, що матриця $B$ є матрицею квадратичної форми $f$ від змінних $y_1$, $y_2$, …, $y_n$. Матриця $B$ є симетричною, оскільки

$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T Q = Q^T AQ = B$. Якщо матриця $Q$ перетворення (39) невироджена, тобто $|Q| \neq 0$, то ранг матриці $B$ збігається з рангом матриці $A$, бо матриці $Q$ і $Q^T$ невироджені одночасно. Отже, *ранг квадратичної форми $f$ не змінюється при здійсненні невиродженого лінійного перетворення (39).*

Вивчимо яким повинно бути перетворення (39), щоб квадратична форма $f$ набула вигляду

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2. \tag{42}$$

Вираз (42) називається **канонічним виглядом** квадратичної форми. Зокрема, якщо $\lambda_j \in \{-1; 0; 1\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то (42) називається **нормальним канонічним виглядом** квадратичної форми.

Якщо квадратична форма (37) зведена за допомогою деякого невиродженого перетворення до канонічного вигляду (42), то число коефіцієнтів $\lambda_j$, які відмінні від нуля, дорівнює рангу $r$ квадратичної форми. Справді, оскільки ми прийшли до (42) за допомогою невиродженого перетворення, то, як відзначено вище, квадратична форма (42) має ранг $r$. Очевидно, що матриця квадратичної форми (42) має вигляд

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Її ранг визначається числом відмінних від нуля елементів, що стоять на головній діагоналі, а тому цих елементів, тобто $\lambda_j$, повинно бути саме $r$.

Можна довести, що *будь-яку квадратичну форму (37) можна звести за допомогою деякого невиродженого перетворення (39) до канонічного вигляду (42).* При цьому кількість додатних і від'ємних $\lambda_j$ в (42) не залежить від вибору невиродженого перетворення (39) (**закон інерції квадратичної форми**).

Розглянемо один із методів зведення квадратичної форми до канонічного вигляду, який називається **методом Лагранжа виділення повних квадратів**.

Нехай у квадратичній формі (37) всі доданки з квадратами змінних відсутні, тобто $a_{jj} = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але принаймні один з коефіцієнтів $a_{jk} \neq 0$. Для зручності вважатимемо, що, наприклад, $a_{12} \neq 0$. Це означає, що в квадратичній формі є доданок $2a_{12}x_1x_2$. Перейдемо до нових змінних $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ за допомогою невиродженого перетворення:

$$x_1 = y_1 - y_2$$

$$x_2 = y_1 + y_2,$$

$$x_j = y_j, \quad j \in \{3, \ldots, n\}.$$

Тоді вираз $2a_{12}x_1x_2$ набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2.$$

Отже, в квадратичній формі з'явилися члени з $y_1^2$ і $y_2^2$. Тому надалі можна вважати, що в квадратичній формі обов'язково є доданки з квадратами змінних.

Нехай, наприклад, в квадратичній формі (37) коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Розглянемо частину квадратичної форми $f$, яка містить змінну $x_1$, тобто

$$f_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Доповнимо цей вираз до повного квадрата:

$$f_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \alpha,$$

де $\alpha$ є алгебраїчною сумою доданків, які не містять змінної $x_1$. Якщо зробити невироджене лінійне перетворення

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$

$$y_j = x_j, \quad j \in \{2, \ldots, n\},$$

то квадратична форма $f$ у змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ набуде вигляду

$$f = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} a'_{jk} y_j y_k$$

або

$$f = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + f_2,$$

де $a'_{jk}$ – деякі нові коефіцієнти при добутках $y_j y_k$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, організуємо повний квадрат відносно змінної $y_2$ в $f_2$ і т.д.У результаті дістанемо канонічний вигляд квадратичної форми.

**Приклад 1.** Звести квадратичну форму

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

до канонічного вигляду.

◀ Запишемо квадратичну форму у вигляді

$$f = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3.$$

Вираз $2x_3^2 - 3x_2^2 - 2x_2x_3$ не містить змінної $x_1$. Утворимо повний квадрат відносно змінної $x_3$. Тоді одержимо, що

$$f = (x_1+2x_2+x_3)^2+2(x_3^2-x_2x_3)-3x_2^2 = (x_1+2x_2+x_3)^2+2(x_3-\frac{1}{2}x_2)^2-\frac{1}{2}x_2^2-3x_2^2 =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2(x_3 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{7}{2}x_2^2.$$

Тепер введемо нові змінні $y_1$, $y_2$ і $y_3$ за формулами

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2, \\ y_3 = x_2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно $x_1$, $x_2$ і $x_3$, знайдемо шукане перетворення

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \end{cases}$$

матрицею якого є

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що це перетворення невироджене, бо $|Q| = -1 \neq 0$. Воно зводить квадратичну форму до канонічного вигляду

$$f = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{7}{2}y_3^2.$$

Оскільки є три повні квадрати у канонічній формі, то форма $f$ є невиродженою. ►

**Приклад 2**. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

◄ Оскільки у даній формі відсутні квадрати, то зробимо таке невироджене перетворення

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Тоді матимемо

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 6y_1y_3 + 6y_2y_3 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

Організуємо повний квадрат відносно змінної $y_1$. Тоді одержимо, що

$$f = 2(y_1^2 - 2y_1y_3) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_3^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3.$$

Далі утворимо повний квадрат відносно змінної $y_2$:

$$f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3) - 2y_3^2 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

Тепер зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$$

Тоді дістанемо, що квадратична форма набула канонічного вигляду

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

Знайдемо перетворення, яке звело квадратичну форму до цього вигляду. Маємо

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

а тому

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Матрицею цього перетворення є

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|Q| = -2 \neq 0$, то перетворення невироджене. Квадратична форма так само невироджена, бо її канонічний вигляд містить квадрати всіх змінних.

Легко можна перевірити, що квадратична форма зводиться до канонічного вигляду

$$f = 2z_1^2 + 6z_2^2 - 8z_3^2$$

за допомогою невиродженого лінійного перетворення

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 3z_2 + 2z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

У цьому новому канонічному вигляді, як і в попередньому, є два додатних $\lambda_j$ та одне від'ємне, що й має бути згідно із законом інерції квадратичної форми. ►

Квадратичну форму називають **додатно-визначеною (від'ємно-визначеною)**, якщо для довільних значень $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, з яких принаймні одне не дорівнює нулю, квадратична форма $f$ набуває додатних (від'ємних) значень.

Обидва ці випадки об'єднують під спільною назвою **знаковизначені квадратичні форми**.

Якщо квадратична форма $f$ має як додатні, так і від'ємні значення, то її називають **знакозмінною**.

Для визначення типу квадратичної форми використовують **критерій Сільвестра**.

Розглянемо матрицю $A$, складену з коефіцієнтів квадратичної форми (37). Визначники

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають **головними мінорами матриці** $A$.

**Теорема (критерій Сільвестра).** *Квадратична форма (37) додатно-визначена тоді й тільки тоді, коли всі головні мінори матриці $A$ є додатними, тобто $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$.*

*Квадратична форма (37) від'ємно-визначена тоді й тільки тоді, коли знаки головних мінорів чергуються, починаючи з від'ємного, тобто виконуються нерівності $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$, $(-1)^n\Delta_n > 0$.*

### Вправи

Пропоновану квадратичну форму звести до канонічного вигляду:
**1.** $f = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$;
**2.** $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
**3.** $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
**4.** $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;
**5.** $f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
**6.** $f = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;
**7.** $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$;
**8.** $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
**9.** $f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

### Відповіді

**1.** $f = -y_1^2 + y_2^2 - 12y_3^2$. **2.** $f = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$. **3.** $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. **4.** $f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. **5.** $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. **6.** $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$. **7.** $f = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$. **8.** $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. **9.** $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$.

# Розділ 3
# Елементи векторного аналізу

## §1. Вектори та лінійні операції над ними

**1.1. Вектори на площині та в просторі.** При вивченні різних явищ і процесів зустрічаються величини, які повністю визначаються заданням їхніх числових значень. Такі величини називаються **скалярними**. Скалярними величинами є, наприклад, довжина, площа, маса, температура і т.п. Крім скалярних величин, у різних задачах зустрічаються величини, для визначення яких, крім числового значення, необхідно знати також їхній напрямок у просторі або на площині. Такі величини називаються **векторними**. Векторні величини зображуються за допомогою векторів.

Векторними величинами, наприклад, є сила, що діє на тіло, швидкість і прискорення тіла при його русі в просторі, напруженість магнітного поля в даній точці і т.д.

**Вектором** називається напрямлений відрізок у просторі або на площині, у якого одна з його обмежуючих точок береться за початок, а друга – за кінець. Якщо $A$ – початок вектора, а $B$ – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначатимемо також і символом $\overrightarrow{a}$.

**Довжиною (модулем)** $|\overrightarrow{AB}|$ **вектора** $\overrightarrow{AB}$ називається число, що дорівнює довжині відрізка $AB$, який зображає цей вектор. Якщо вектор позначено через $\overrightarrow{a}$, то його модуль позначається символом $|\overrightarrow{a}|$.

Вектор, у якого кінець збігається з початком, називається **нульовим** і позначається $\overrightarrow{0}$. Нульовий вектор не має певного напрямку, а його модуль $|\overrightarrow{0}| = 0$.

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**. Якщо ж вектори в просторі лежать на одній площині або на паралельних площинах, то вони називаються **компланарними**.

Два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називаються **рівними**, якщо вони: 1) мають однакові модулі; 2) колінеарні; 3) напрямлені в один бік. У цьому випадку пишуть $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. Іншими словами, вектори $\overrightarrow{a}$

і $\overrightarrow{b}$ називаються рівними, якщо при деякому паралельному перенесенні вони суміщаються, причому збігаються їхні початки і кінці. З цього означення випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, поміщаючи його початок у будь-яку точку простору (площини).

Для кожного ненульового вектора $\overrightarrow{a}$ існує **протилежний вектор**, який позначається символом $-\overrightarrow{a}$. Вектор $-\overrightarrow{a}$ має модуль, який дорівнює модулю вектора $\overrightarrow{a}$, колінеарний з ним, але напрямлений у протилежний бік.

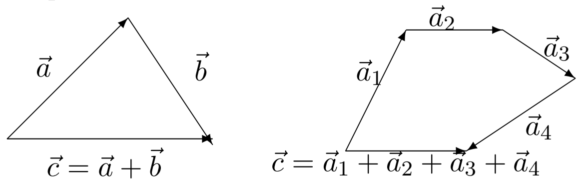
**1.2. Лінійні операції над векторами.** Лінійними операціями називаються операції додавання й віднімання векторів і множення вектора на число.

**Добутком вектора $\overrightarrow{a}$ на число** $\lambda \neq 0$ називається вектор $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, що колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$, довжина якого $|\overrightarrow{b}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$, а напрямок збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний при $\lambda < 0$.

Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ завжди розміщені на одній або на паралельних прямих, оскільки вони є колінеарними. Правильним є й обернене твердження: з колінеарності векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ випливає, що

$$\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}. \tag{1}$$

**Сумою векторів** $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається вектор $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{a}$, а кінець з кінцем вектора $\overrightarrow{b}$, за умови, що початок вектора $\overrightarrow{b}$ знаходиться в кінці вектора $\overrightarrow{a}$.




Дане означення можна поширити на довільне скінченне число векторів. Це правило називається **правилом трикутника (многокутника)**.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

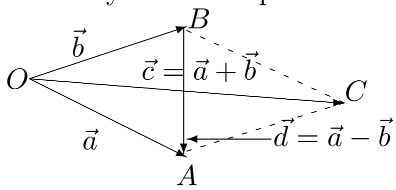
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; 3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

4) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; 5) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

6) $0\,\vec{a} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна одержати і таким чином: відкладемо від точки $O$ вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і побудуємо паралелограм $OACB$. Вектор $\overrightarrow{OC}$, який є діагоналлю паралелограма і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



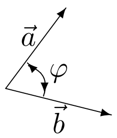

Описане правило називається **правилом паралелограма додавання векторів**.

**Різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

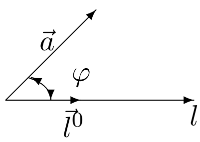
Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним**.

Нехай задано вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$. Розглянемо одиничний вектор $\vec{a^0}$, колінеарний вектору $\vec{a}$ й однаково з ним напрямлений, тоді $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a^0}$. Вектор $\vec{a^0}$ називають **ортом** вектора $\vec{a}$.

**1.3. Кут між двома векторами. Проекція вектора на вісь.** Нехай у просторі задано два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які зведено до спільного початку.




**Кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший кут $\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$ на який треба повернути один із векторів до його суміщення з другим.

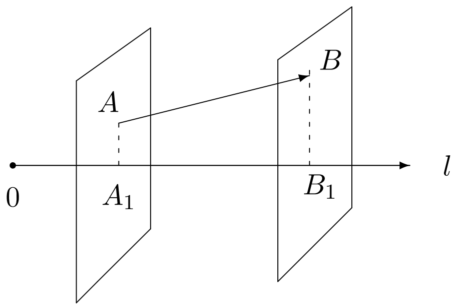



Розглянемо вісь $l$, додатний напрямок якої збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{l^0}$, розміщеного на осі $l$.

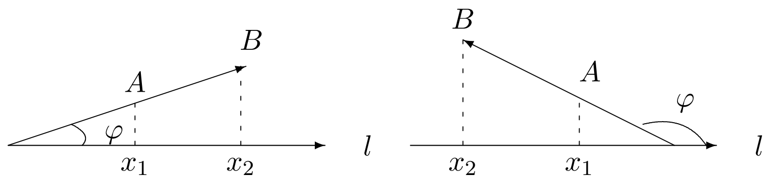
Під кутом між вектором $\vec{a}$ і віссю $l$ розуміємо кут $\varphi$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{l^0}$.

Нехай $l$ – деяка вісь, а $\overrightarrow{AB}$ – вектор, який розміщений довільно у просторі. Позначимо через $A_1$ та $B_1$ проекції на вісь $l$ відповідно початку $A$ і кінця $B$ цього вектора. Припустимо, що $A_1$ має на осі $l$ координату $x_1$, а $B_1$ – координату $x_2$.

Різницю $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця і початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ назвемо **проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь**.




Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з віссю $l$ гострий кут, то $x_2 > x_1$,і проекція $x_2 - x_1 > 0$, якщо ж кут між віссю $l$ і вектором $\overrightarrow{AB}$ – тупий, то $x_2 < x_1$, і проекція $x_2 - x_1 < 0$.

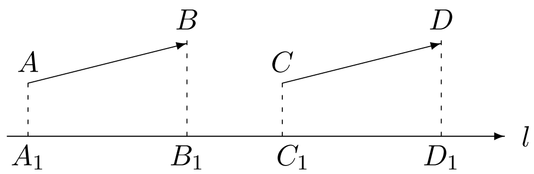



У випадку, коли $\overrightarrow{AB} \perp l$, маємо $x_2 = x_1$ і тому проекція $x_2 - x_1 = 0$.

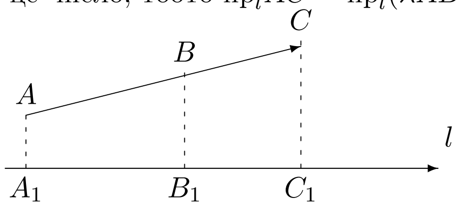
Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ позначатимемо символом $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$.

Основні властивості проекції вектора на вісь:

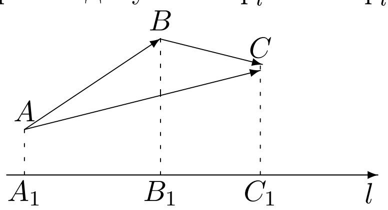
1) проекції рівних векторів на одну й ту саму вісь однакові, тобто $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \text{пр}_l \overrightarrow{CD}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;



2) при множенні вектора на число $\lambda$, його проекція множиться на це число, тобто $\text{пр}_l\overrightarrow{AC} = \text{пр}_l(\lambda\overrightarrow{AB}) = \lambda\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$;

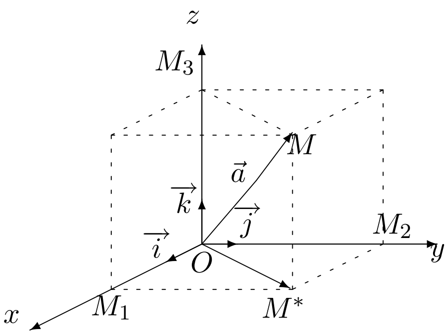



3) проекція суми векторів на вісь $l$ дорівнює сумі проекцій цих векторів на дану вісь: $\text{пр}_l\overrightarrow{AC} = \text{пр}_l\overrightarrow{AB} + \text{пр}_l\overrightarrow{BC}$;




4) проекція вектора $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута $\varphi$ між цим вектором і віссю $l$: $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$.

**1.4. Прямокутний декартів базис. Розклад вектора по осях координат. Дії над векторами, заданими своїми координатами.** Розглянемо прямокутну систему координат у просторі. На кожній осі виберемо одиничний вектор, напрямок якого збігається з додатним напрямком осі. На осі $Ox$ візьмемо одиничний вектор $\vec{i}$, на осі $Oy$ – $\vec{j}$, на осі $Oz$ – $\vec{k}$: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.




Ці вектори взаємно перпендикулярні. Їх називають **ортами осей координат**. Прийнято також називати ці орти **декартовим прямокутним базисом.**

Розглянемо вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$ у просторі. Згідно з правилом додавання векторів

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM^*} + \overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{2}$$

Якщо координати точки $M(x; y; z)$, то

$$\overrightarrow{OM_1} = x\,\vec{i}; \quad \overrightarrow{OM_2} = y\,\vec{j}; \quad \overrightarrow{OM_3} = z\,\vec{k}. \tag{3}$$

Тоді з (2) і (3) випливає, що

$$\overrightarrow{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}. \tag{4}$$

Рівність (4) називають **розкладом вектора $\vec{a}$ по координатних осях**. Очевидно, що $x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a}$, $y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a}$, $z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{a}$, а це означає, що коефіцієнти розкладу (4) є **проекціями вектора $\overrightarrow{a}$ на осі координат**.

Якщо початок вектора суміщено з початком координат, то його проекції $x$, $y$, $z$ на координатні осі збігаються з координатами кінця вектора – точки $M$. Тому проекції будь-якого вектора на координатні осі називають **координатами вектора** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$.

Після вибору в просторі певної системи координат вектор і трійка його координат однозначно визначають одне одного, тому вектор (4) можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{a} = (x; y; z). \tag{5}$$

Оскільки осі координат взаємно перпендикулярні, то довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ дорівнює діагоналі прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ і тому виражається рівністю

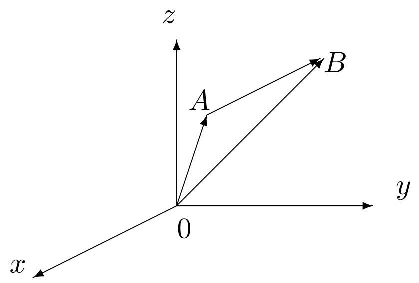
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{6}$$

Оскільки вектор повністю визначається заданням початку і кінця, то можна виразити координати даного вектора через координати цих точок. Якщо в заданій системі координат початок вектора $\overrightarrow{a}$ знаходиться в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{OA} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$.

З рівності $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ випливає, що

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}.$$




Отже,

$$\overrightarrow{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Формула (6) у цьому випадку набуває вигляду

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Очевидно, що відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, а тому обчислюється за формулою

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Запис вектора у координатній формі дозволяє лінійні операції над векторами здійснювати над їхніми координатами.

Нехай є вектори $\overrightarrow{a} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\overrightarrow{b} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$ і $\lambda$ – деяке число.

Тоді

$$\lambda\overrightarrow{a} = \lambda(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) = (\lambda x_1)\,\vec{i} + (\lambda y_1)\,\vec{j} + (\lambda z_1)\,\vec{k}$$

або

$$\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1). \qquad (7)$$

Далі

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) \pm (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) =$$

$$= (x_1 \pm x_2)\,\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\,\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\,\vec{k}$$

або

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \qquad (8)$$

Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$, тобто

$$x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k} = \lambda(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}). \qquad (9)$$

Звідси випливає, що

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1$$

або

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (10)$$

Оскільки умови (10) – це відношення, то один або два знаменники можуть дорівнювати нулю, але тоді й відповідні чисельники дорівнюватимуть нулю.

Умова (10) є необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів.

**Приклад 1**. Задано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 0; 1)$ і $\overrightarrow{b} = (3; 5; -2)$. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

◄ Маємо $\overrightarrow{c} = 2(2; 0; 1) - 3(3; 5; -2) = (4; 0; 2) - (9; 15; -6) = (4 - 9; 0 - 15; 2 + 6) = (-5; -15; 8)$.

Тоді $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(-5)^2 + (-15)^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 225 + 64} = \sqrt{314}$. ►

**Приклад 2**. Для яких значень $\alpha$ і $\beta$ вектори $\overrightarrow{a} = (-2; 3; \beta)$ і $\overrightarrow{b} = (\alpha; -6; 2)$ колінеарні?

◄ Згідно з (10)

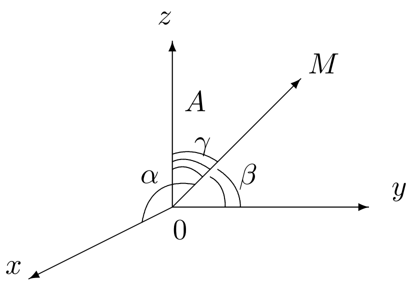
$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{-3}{6} = \frac{\beta}{2}.$$

Тому

$$-\frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 4; \quad \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -1.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, коли $\alpha = 4$, $\beta = -1$. ►

Напрямок вектора $\overrightarrow{a}$ в просторі визначається кутами $\alpha$, $\beta$ і $\gamma$, які цей вектор утворює з осями координат. Косинуси цих кутів $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають **напрямними косинусами вектора**.




Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ заданий своїми координатами, тобто $\overrightarrow{a} = (x; y; z)$. Оскільки $x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\alpha$, $y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\beta$, $z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\gamma$, де $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{11}$$

Піднісши кожну з рівностей (11) до квадрата і додавши їх, дістанемо, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці.

Очевидно, що орт вектора $\overrightarrow{a}$

$$\overrightarrow{a^0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

**Приклад 3**. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з осями координат, якщо $A(1;2;3)$ і $B(2;4;5)$.

◀ Маємо $\overrightarrow{AB} = (2-1; 4-2; 5-3)$, тобто $\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$. Тоді $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$. ▶

**1.5. Лінійна залежність векторів.** Вектори $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$ називаються **лінійно залежними**, якщо існують числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_k$, принаймні одне з яких не дорівнює нулю ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_k^2 \neq 0$), такі, що виконується рівність

$$\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + ... + \lambda_k\overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}. \tag{12}$$

Якщо ж рівність (12) виконується тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, то вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$ називаються **лінійно незалежними**.

З рівності (12), припускаючи, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$, дістанемо

$$\overrightarrow{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_3 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_k.$$

Покладаючи $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2$, ..., $-\frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \mu_k$, одержимо

$$\overrightarrow{a}_1 = \mu_2\overrightarrow{a}_2 + \mu_3\overrightarrow{a}_3 + ... + \mu_k\overrightarrow{a}_k. \tag{13}$$

Вираз $\mu_2\overrightarrow{a}_2 + ... + \mu_k\overrightarrow{a}_k$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$.

Отже, якщо декілька векторів лінійно залежні, то принаймні один із них завжди можна зобразити у вигляді лінійної комбінації решти.

Правильне й обернене твердження, а саме: якщо один із векторів є лінійною комбінацією інших, то всі ці вектори лінійно залежні. Справді, нехай, наприклад, вектор $\overrightarrow{a}_1$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$, ..., $\overrightarrow{a}_k$. Тоді правильною є рівність (13), яку можна записати так: $-\overrightarrow{a}_1 + \mu_2\overrightarrow{a}_2 + ... + \mu_k\overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}$. Звідси, згідно з означенням лінійної залежності векторів, випливає, що вектори $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$ лінійно залежні, оскільки виконується (12), де $\lambda_1 = -1$, відмінне від нуля.

**Приклад 4**. Скласти лінійну комбінацію векторів $\overrightarrow{a}_1 = (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (-3; 2; 1)$ з коефіцієнтами $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

◀ Маємо $2\overrightarrow{a}_1 = (2 \cdot 2; 2 \cdot (-1); 2 \cdot 0) = (4; -2; 0)$, $3\overrightarrow{a}_2 = (3 \cdot (-3); 3 \cdot 2; 3 \cdot 1) = (-9; 6; 3)$. Тоді $2\overrightarrow{a}_1 + 3\overrightarrow{a}_2 = (4; -2; 0) + (-9; 6; 3) = (4 - 9; -2 + 6; 0 + 3) = (-5; 4; 3)$. ▶

**Приклад 5**. Довести, що вектори $\overrightarrow{a}_1 = (2; 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0; 3)$ є лінійно незалежними.

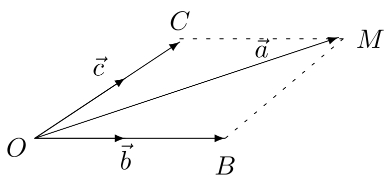
◀ Треба довести, що рівність $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{0}$ рівносильна тому, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Маємо, $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 = (2\lambda_1 + 0\lambda_2; 0\lambda_1 + 3\lambda_2) = (2\lambda_1; 3\lambda_2)$, а тому з рівності $(2\lambda_1; 3\lambda_2) = \overrightarrow{0}$ випливає, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. ▶

Приклад 5 показує, що на площині існує система лінійно незалежних векторів, яка містить два вектори.

**Теорема**. *Будь-які три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ на площині лінійно залежні.*

◀ Справді, нехай серед векторів є два колінеарні, наприклад, $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Тоді $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ або $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b} + 0\overrightarrow{c}$, тобто вектор $\overrightarrow{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$. Отже, в цьому випадку вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ лінійно залежні.

Якщо серед заданих векторів немає жодної пари колінеарних, то, звівши всі три вектори до спільного початку, побудуємо паралелограм. Тоді $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, а, оскільки $\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \lambda_2 \overrightarrow{c}$ то $\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{b} + \lambda_2 \overrightarrow{c}$. Це означає, що вектор $\overrightarrow{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$. Тому і в цьому випадку вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ лінійно залежні. ▶




Очевидно, що два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ на площині лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли вони неколінеарні.

Звідси і з попереднього випливає, що максимальне число лінійно незалежних векторів на площині дорівнює двом.

**Базисом на площині** називаються два довільних лінійно незалежних вектори.

Згідно з теоремою, будь-який вектор $\overrightarrow{c}$ на площині можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}. \qquad (14)$$

Числа $\lambda$ і $\mu$ називаються **координатами вектора** $\overrightarrow{c}$ відносно базису $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а саму формулу (14) називають **розкладом вектора** $\overrightarrow{c}$ по базису $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.

**Приклад 6.** Розкласти вектор $\overrightarrow{b} = (4; -15)$ по базису $\overrightarrow{a}_1 = (2; 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0; 3)$.

◀ У прикладі 5 доведено, що вектори $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$ лінійно незалежні, а отже, утворюють базис. Тоді $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$ або $(4; -15) = (2\lambda_1; 0) + (0; 3\lambda_2)$, що рівносильне рівності $(4; -15) = (2\lambda_1; 3\lambda_2)$, звідки випливає, що $4 = 2\lambda_1$, $-15 = 3\lambda_2$, отже, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$.

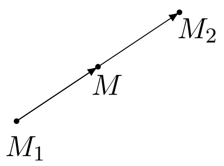
Тому

$$\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{a}_1 - 5\overrightarrow{a}_2. \ ▶$$

Аналогічно, як і у випадку площини, доводиться, що будь-які чотири вектори у просторі лінійно залежні, а максимальне число лінійно незалежних векторів у просторі дорівнює трьом.

Отже, у просторі базис складається з трьох довільних лінійно незалежних векторів.

**1.6. Поділ відрізка в даному відношенні.** Нехай треба відрізок $M_1M_2$ поділити у відношенні $\lambda > 0$. Це означає, що треба знайти на даному відрізку точку $M$, для якої $M_1M : MM_2 = \lambda$, або $M_1M = \lambda MM_2$.




Нехай точки $M_1$ і $M_2$ мають відповідно координати $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо координати точки $M(x; y; z)$. Очевидно, що $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ або $(x - x_1; y - y_1; z - z_1) = (\lambda(x_2 - x);\ \lambda(y_2 - y);\ \lambda(z_2 - z))$.

Звідси випливає, що $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, тобто

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{15}$$

Якщо точка $M$ є серединою відрізка $M_1M_2$, то $M_1M = MM_2$ і, отже, $\lambda = 1$. У цьому випадку рівності (15) набудуть вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{16}$$

**Приклад 7.** Дано точки $M_1(1; 2)$, $M_2(3; 4)$. Поділити відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$.

◀ Оскільки $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, то згідно з формулами (15) маємо

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Отже, точка $M(\frac{5}{3}; \frac{8}{3})$ ділить відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$. ▶

## Вправи

**1.** Дано точки $A(3;-1;2)$ і $B(-1;2;1)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

**2.** Знайти лінійну комбінацію векторів $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, де $\vec{a}=(4;1;3)$, $\vec{b}=(1;2;-2)$, $\vec{c}=(10;8;1)$.

**3.** Дано $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

**4.** Для яких значень $\alpha$ і $\beta$ вектори $\vec{a}=(-4;6;\beta)$ і $\vec{b}=(\alpha;-3;2)$ колінеарні?

**5.** Дано чотири точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$ і $D(5;-4;2)$. Перевірити, чи вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні; знайти який з них довший і у скільки разів, як вони напрямлені – в один чи в протилежні боки.

**6.** Знайти початок вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1;-1;2)$.

**7.** На площині дано три вектори $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(-2;1)$ і $\vec{c}=(7;-4)$. Знайти розклад кожного з цих векторів, беручи за базис два інших.

**8.** Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a}=(6;-8;-7,5)$ і утворює з віссю $Oz$ гострий кут. Знаючи, що $|\vec{x}|=50$, знайти його координати.

**9.** Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $\vec{a}=(3;-5;8)$ і $\vec{b}=(-1;1;-4)$.

**10.** Знайти орт вектора $\vec{a}=(6;-2;-3)$.

**11.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^0$, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=8$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

**12.** Обчислити модуль вектора $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}-\frac{1}{5}(4\overrightarrow{i}+8\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k})$ і знайти його напрямні косинуси.

**13.** Дано точки $M_1(2;4;-2)$ і $M_2(-2;4;2)$. На прямій $M_1M_2$ знайти точку $M$, що ділить відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\lambda=3$.

**14.** Дано вектор $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. Знайти вектор $\overrightarrow{b}$, якщо $|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|$, $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{b}=0$, $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{b}=\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a}$.

**15.** Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{a}$ на осі координат, якщо $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, де $A(0;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(4;6;5)$ і $D(1;6;3)$.

**16.** Дано координати середин сторін трикутника $K(7;8)$, $M(-4;5)$, $N(1;4)$. Визначити координати вершин трикутника.

**17.** Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$. Визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини $A$.

**18.** Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо його вершинами є точки $A(7;4)$, $B(-1;8)$, $C(-12;-1)$.

## Відповіді

**1.** $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4; -3; 1)$. **2.** (6; 3; 0). **3.** $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. **4.** $\alpha = 2$, $\beta = -4$. **5.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ у два рази довший за вектор $\overrightarrow{CD}$, вони напрямлені в один бік. **6.** (−1; 2; 3). **7.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **8.** $\vec{x} = (-24; 32; 30)$. **9.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$. **10.** $\vec{a}^0 = \left(\dfrac{6}{7}; -\dfrac{2}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$. **11.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. **12.** $|\overrightarrow{a}| = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$. **13.** $M(-1; 4; 1)$. **14.** $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ або $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}$. **15.** $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = 0$, $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = 2$, $\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{a} = -2$. **16.** $A(2; 17)$, $B(12; -1)$, $C(-10; -7)$. **17.** $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}$. **18.** $M(-2; 1)$.

## §2. Скалярний, векторний і мішаний добутки

**2.1. Скалярний добуток двох векторів. Косинус кута між двома векторами. Скалярним добутком векторів** $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута $\varphi$ між ними. Позначається скалярний добуток символом $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$ або $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, або $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$. Тому

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi. \tag{17}$$

Оскільки $|\overrightarrow{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, то з рівності (17) випливає, що

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} \quad \text{або} \quad \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}.$$

Звідси знаходимо, що

$$\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \text{а} \quad \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}.$$

Скалярний добуток двох векторів має властивості:

1) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$;

2) $\lambda(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}) = (\lambda\overrightarrow{a})\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}(\lambda\overrightarrow{b})$;

3) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$;

4) якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то дорівнює нулю або один із цих векторів, або косинус кута між ними, тобто вектори ортогональні. Навпаки, якщо ненульові вектори $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$, то $\cos\varphi = 0$, і, отже, скалярний добуток векторів дорівнює нулю. Тому два ненульові вектори перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Очевидно, що

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}|\cos 0 = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2,$$

тобто

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2. \tag{18}$$

**Приклад 1.** Дано вектор $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, причому $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 5$. Кут $\varphi$ між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ дорівнює $60^0$. Знайти модуль вектора $\overrightarrow{c}$.

◀ Скориставшись рівністю (18), дістанемо

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{\overrightarrow{c}^2} = \sqrt{(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b})^2} = \sqrt{4\overrightarrow{a}^2 + 12\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + 9\overrightarrow{b}^2}.$$

Маємо, що

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2 = 4^2 = 16, \quad \overrightarrow{b}^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = 5^2 = 25,$$

і

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi = 4\cdot 5\cdot\cos 60^0 = 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 10.$$

Тому

$$|\overrightarrow{c}| = \sqrt{4\cdot 16 + 12\cdot 10 + 9\cdot 25} = \sqrt{409}.\ ▶$$

Запишемо скалярний добуток векторів через їхні координати.

Нехай $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2; z_2)$ або $\overrightarrow{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\overrightarrow{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} +$$

$$+ x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{i}\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j}\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k}\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 1\cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{19}$$

Якщо скористатися (19), то отримаємо, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ ортогональні тоді й тільки тоді, коли

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{20}$$

**Приклад 2**. При якому значенні $m$ вектори $\overrightarrow{a} = (2; 3; -1)$ і $\overrightarrow{b} = (1; -5; m)$ перпендикулярні?

◀ З умови (20) випливає, що

$$2\cdot 1 + 3(-5) + (-1)m = 0,$$

звідки одержуємо, що $m = -13$.

Отже, вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні, коли $m = -13$. ▶

З формули (17) дістаємо, що у випадку ненульових векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Якщо скористатися формулою (19), то звідси знаходимо, що

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{21}$$

**Приклад 3**. Обчислити косинус кута між векторами $\overrightarrow{a} = (3; 1; -1)$ і $\overrightarrow{b} = (2; 2; 1)$.

◀ Згідно з формулою (21)

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 0,703. \text{ ▶}$$

**2.2. Векторний добуток.** У пункті 2.1 вивчено скалярний добуток двох векторів, тобто добуток векторів результатом якого є число. Тут ми розглянемо такий добуток векторів, коли результатом є вектор.

Три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ в просторі $\mathbb{R}^3$ називатимемо **впорядкованою трійкою** або просто **трійкою**, якщо вказано, який з цих векторів є першим, який – другим і який – третім. Наприклад, запис $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ означає, що першим елементом трійки є $\overrightarrow{a}$, другим – $\overrightarrow{b}$, а третім – $\overrightarrow{c}$.

Нагадаємо, що три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ називається **правою** (**лівою**), якщо знаходячись всередині тригранного кута, що утворений цими векторами, зведеними до спільного початку, ми бачимо поворот на найменший кут від $\overrightarrow{a}$ до $\overrightarrow{b}$ і від $\overrightarrow{b}$ до $\overrightarrow{c}$, що здійснюється проти стрілки годинника (за стрілкою годинника). На рис. 1 зображено праву трійку $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, а на рис. 2 – ліву трійку $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Відзначимо, що коли вектори

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ є компланарними, то для них втрачає зміст поняття правої й лівої трійок.

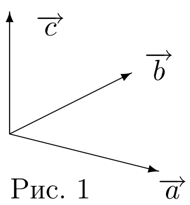


Рис. 1

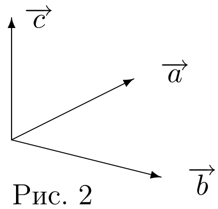


Рис. 2

Якщо дві трійки векторів є правими або лівими, то їх називатимемо **однаково орієнтованими**. В іншому випадку називатимемо ці трійки **протилежно орієнтованими**. Очевидно, що з трьох заданих векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ можна утворити шість упорядкованих трійок:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}), \quad (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}), \quad (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}); \tag{22}$$

$$(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}), \quad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}), \quad (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}). \tag{23}$$

Усі трійки (22) мають ту саму орієнтацію, що трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, а всі трійки (23) – орієнтацію, яка є протилежною до трійки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Декартова прямокутна система координат називається **правою** (**лівою**), якщо три її базисні вектори $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ утворюють праву (ліву) трійку. На рис. 3 зображено праву систему координат, а на рис. 4 – ліву систему координат.

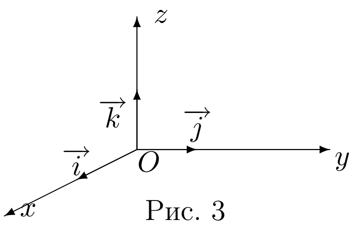


Рис. 3

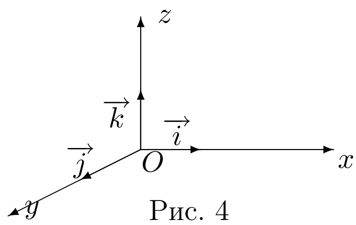


Рис. 4

Надалі ми розглядатимемо лише праві системи координат.

**Векторним добутком** вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ називається вектор $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, який задовольняє умови:

1) довжина вектора $\overrightarrow{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ на синус кута $\alpha$ між ними, тобто

$$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\sin\alpha; \qquad (24)$$

2) вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$;

3) напрямок вектора $\overrightarrow{c}$ такий, що трійка векторів $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ є правою (рис. 5).

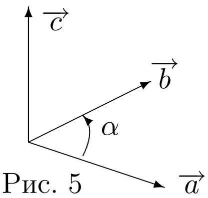



Рис. 5

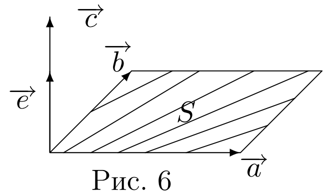



Рис. 6

Поняття векторного добутку виникло в механіці. Якщо $\overrightarrow{b}$ – сила, що прикладена в точці $M$, а вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$, то вектор $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ є моментом сили $\overrightarrow{b}$ відносно точки $O$.

З умови 1) означення векторного добутку випливає, що для колінеарних векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ їхній векторний добуток дорівнює нулю, бо $\alpha = 0$, а отже, $\sin\alpha = 0$. Навпаки, якщо $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \overrightarrow{0}$ і принаймні один з векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ є нульовим, то ці вектори колінеарні, оскільки нульовий вектор має невизначений напрямок і тому його можна вважати колінеарним до будь-якого вектора. Якщо ж обидва вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ ненульові, тобто $|\overrightarrow{a}| > 0$ і $|\overrightarrow{b}| > 0$, то з формули (24) випливає, що $\sin\alpha = 0$, а це означає, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні. Отже, *необхідною і достатньою умовою колінеарности двох векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.*

З формули (24) випливає, що довжина (модуль) векторного добутку $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ дорівнює площі $S$ паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, які зведені до спільного початку. Тому, якщо $\overrightarrow{e}$ – орт векторного добутку $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, то (рис. 6)

$$\overrightarrow{c} \equiv [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = S\overrightarrow{e}.$$

Розглянемо основні властивості векторного добутку.

1). *При перестановці множників векторний добуток змінює свій знак, зберігаючи модуль, тобто*

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}].$$

◀ З означення векторного добутку випливає, що вектори $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ і $[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$ мають однакові модулі, колінеарні, але напрямлені в протилежні боки. Тому вектори $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ і $[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$ є протилежними і, отже, $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]$. ▶

2). *Векторний добуток має сполучну властивість відносно скалярного множника, тобто*

$$[\alpha\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \alpha[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3). *Для векторного добутку правильна розподільча властивість, тобто*

$$[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] + [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}].$$

Доведення властивостей 2) і 3) не будемо наводити, бо воно складніше.

4). $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] = \overrightarrow{0}$.

Ця властивість випливає безпосередньо з формули (24).

З цих властивостей легко одержуються такі два наслідки.

**Наслідок 1.** *Для довільних векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ та числа $\alpha \in \mathbb{R}$ правильна рівність*

$$[\overrightarrow{a}, \alpha\overrightarrow{b}] = \alpha[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]. \tag{25}$$

◀ З властивостей 1) і 2) випливає, що

$$[\overrightarrow{a}, \alpha\overrightarrow{b}] = -[\alpha\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}] = -\alpha[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}] = \alpha[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]. \text{ ▶}$$

**Наслідок 2.** *Для довільних векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ правильна рівність*

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}]. \tag{26}$$

◀ Згідно з властивостями 1) – 3) маємо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}] = -[\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}]-[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]+[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}]. \text{ ▶}$$

**Приклад 4.** Знайти $[(2\vec{a}+3\vec{b}),(\vec{a}-2\vec{b})]$.

◄ Маємо

$$[(2\vec{a}+3\vec{b}),(\vec{a}-2\vec{b})]=[2\vec{a},\vec{a}]+[3\vec{b},\vec{a}]-[2\vec{a},2\vec{b}]-[3\vec{b},2\vec{b}]=$$

$$=-3[\vec{a},\vec{b}]-4[\vec{a},\vec{b}]=-7[\vec{a},\vec{b}],$$

оскільки $[\vec{a},\vec{a}]=0$, $[\vec{b},\vec{b}]=0$, $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$. ►

Нехай задано два вектори

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Знайдемо вираз векторного добутку $[\vec{a},\vec{b}]$ через координати $x_1$, $y_1$, $z_1$ і $x_2$, $y_2$, $z_2$. Спочатку знайдемо всі парні векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Оскільки векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору, то

$$[\vec{i},\vec{i}]=[\vec{j},\vec{j}]=[\vec{k},\vec{k}]=\vec{0}. \tag{27}$$

Розглянемо тепер, наприклад, добуток $[\vec{i},\vec{j}]$. Знайдемо його модуль

$$|[\vec{i},\vec{j}]|=|\vec{i}|\,|\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Вектор $[\vec{i},\vec{j}]$ розміщений на прямій, перпендикулярній до площини векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$, тобто на осі $Oz$. Цей вектор напрямлений у бік додатного напрямку осі $Oz$, оскільки при цьому поворот від $\vec{i}$ до $\vec{j}$ вздовж найкоротшого шляху видно з кінця вектора $[\vec{i},\vec{j}]$ здійснюваний проти годинникової стрілки (рис. 3). Звідси випливає, що цей вектор збігається з вектором $\vec{k}$, тобто

$$[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}. \tag{28}$$

Очевидно, що

$$[\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k}. \tag{29}$$

За допомогою аналогічних міркувань переконуємося, що

$$[\vec{j},\vec{k}]=\vec{i},\quad [\vec{k},\vec{j}]=-\vec{i},\quad [\vec{k},\vec{i}]=\vec{j},\quad [\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}. \tag{30}$$

Розглянемо тепер добуток $[\vec{a},\vec{b}]$.

Використовуючи властивості векторного добутку і рівності (27) – (30), дістанемо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [(x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}), (x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k})] =$$

$$= x_1 x_2 [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}] + y_1 x_2 [\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}] + z_1 x_2 [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}] + x_1 y_2 [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}] +$$

$$+ y_1 y_2 [\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}] + z_1 y_2 [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}] + x_1 z_2 [\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}] + y_1 z_2 [\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}] +$$

$$+ z_1 z_2 [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}] = y_1 x_2 (-\overrightarrow{k}) + z_1 x_2 \overrightarrow{j} + x_1 y_2 \overrightarrow{k} + z_1 y_2 (-\overrightarrow{i}) +$$

$$+ x_1 z_2 (-\overrightarrow{j}) + y_1 z_2 \overrightarrow{i} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \overrightarrow{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \overrightarrow{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \overrightarrow{k}.$$

Різниці, які стоять в дужках, є визначниками другого порядку. Тому

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}.$$

Одержаний вираз, згідно з властивістю про розклад визначника третього порядку за елементами першого рядка, можна остаточно записати у вигляді

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

**Приклад 5.** Обчислити $|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 10$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ і $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 12$.

◀ Скористаємося формулою $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}| \cos\alpha$, де $\alpha$ – кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Тоді

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

а тому $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Згідно формулою (24) маємо

$$|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = 10 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = 16. \blacktriangleright$$

**Приклад 6.** Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні. Знайти $|[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}]|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 3$ і $|\overrightarrow{b}| = 4$.

◀ Згідно з властивостями векторного добутку маємо

$$[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}]=[\overrightarrow{a},\overrightarrow{a}]-[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]+[\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}]-[\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}]=-2[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}].$$

Тому

$$|[\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}]|=|-2[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]|=2|[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]|=$$
$$=2|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cdot\sin 90^\circ=2\cdot 3\cdot 4=24.\ ▶$$

**Приклад 7.** Довести, що вектори $\overrightarrow{a}=[\overrightarrow{p},\overrightarrow{n}]$, $\overrightarrow{b}=[\overrightarrow{q},\overrightarrow{n}]$ і $\overrightarrow{c}=[\overrightarrow{r},\overrightarrow{n}]$ компланарні для будь-яких векторів $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{n}$.

◀ 1). Якщо $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{0}$, то згідно з означенням векторного добутку $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$, а тому вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ є компланарними.

2). Якщо ж $\overrightarrow{n}\neq\overrightarrow{0}$, то зведемо всі вектори до спільного початку $O$. Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ перпендикулярні до вектора $\overrightarrow{n}$, що випливає з умови 2) означення векторного добутку. Тому вони лежать в площині, яка проходить через точку $O$, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n}$. Отже, вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні й в цьому випадку. ▶

**Приклад 8.** Знайти координати векторного добутку $[2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}]$, якщо $\overrightarrow{a}=(3;-1;-2)$, $\overrightarrow{b}=(1;2;-1)$.

◀ Знайдемо спочатку координати вектора $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$. Маємо

$$2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=2(3;-1;-2)+(1;2;-1)=(7;0;-5).$$

Тоді

$$[2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}]=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 7 & 0 & -5\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix}0 & -5\\ 2 & -1\end{vmatrix}-$$
$$-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix}7 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix}7 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=10\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+14\overrightarrow{k}$$

або

$$[2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{b}]=(10;2;14).\ ▶$$

**Приклад 9.** Вектор $\overrightarrow{c}$, перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}=(4;-2;-3)$ і $\overrightarrow{b}=(0;1;3)$, утворює з віссю $Oy$ тупий кут. Знайти координати вектора $\overrightarrow{c}$, якщо $|\overrightarrow{c}|=26$.

◀ Оскільки вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, то він перпендикулярний і до площини, утвореної цими векторами.

Векторний добуток $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, згідно з означенням, так само перпендикулярний до цієї площини, а тому вектори $\overrightarrow{c}$ і $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ колінеарні, тобто $\overrightarrow{c} = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, де $\lambda$ – деякий коефіцієнт.

Очевидно, що

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k},$$

а тому

$$|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + 4^2} = 13.$$

З рівності $\overrightarrow{c} = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ випливає, що $|\overrightarrow{c}| = |\lambda|\,|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|$, тобто $26 = |\lambda| \cdot 13$ або $|\lambda| = 2$. Отже, $\lambda_1 = 2$, а $\lambda_2 = -2$. Тому маємо два вектори $\overrightarrow{c}_1 = 2(-3;-12;4) = (-6;-24;8)$ і $\overrightarrow{c}_2 = -2(-3;-12;4) = (6;24;-8)$. Згідно з умовою вектор $\overrightarrow{c}$ утворює з віссю $Oy$ тупий кут, а тому $\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{j} < 0$. Оскільки $\overrightarrow{c}_1\overrightarrow{j} = -6 \cdot 0 - 24 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = -24 < 0$, то шуканим вектором є $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}_1 = (-6;-24;8)$. ►

**Приклад 10.** Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини $B$ на сторону $AC$.

◄ Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = (4;-5;0)$ і $\overrightarrow{AC} = (0;4;-3)$. Їхній векторний добуток

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} + 16\overrightarrow{k}.$$

Оскільки модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, то площа трикутника $ABC$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2}$. З іншого боку, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|\,|\overrightarrow{AC}|$, а тому

$$|\overrightarrow{BD}| = \frac{2S_{\Delta ABC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot \frac{25}{2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Отже, висота дорівнює 5. ►

**Приклад 11.** Сила $\overrightarrow{F} = (3;2;-4)$ прикладена до точки $M(2;-1;1)$. Знайти момент цієї сили відносно початку координат $O(0;0;0)$.

◀ Відомо, що моментом сили $\overrightarrow{F}$ відносно початку координат є векторний добуток

$$[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{F}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} + 11\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}. \blacktriangleright$$

**2.3. Мішаний добуток трьох векторів.** Нехай задано впорядковану трійку векторів $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Знайдемо спочатку векторний добуток $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, а потім скалярний добуток цього вектора на вектор $\overrightarrow{c}$, тобто $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$. Одержане число $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$ називається **мішаним добутком** векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$.

Розглянемо геометричний зміст мішаного добутку векторів.

**Теорема.** *Мішаний добуток $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, взятому із знаком плюс, якщо трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ права, і зі знаком мінус, якщо трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ ліва. Якщо ж вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні, то $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$ дорівнює нулю.*

◀ Якщо вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, то в цьому випадку вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні, оскільки серед трьох некомпланарних векторів не можу бути двох колінеарних векторів. Для двох колінеарних векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ векторний добуток $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = 0$, тому і мішаний добуток $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}$ дорівнює нулю.

Залишилося розглянути випадок, коли вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ не колінеарні. Позначимо через $S$ площу паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а через $\overrightarrow{e}$ – орт векторного добутку $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.

У попередньому пункті доведена формула $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = S\overrightarrow{e}$. За допомогою цієї формули і властивості скалярного добутку одержуємо, що

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = (S\overrightarrow{e})\overrightarrow{c} = S(\overrightarrow{e}\,\overrightarrow{c}) = S|\overrightarrow{e}|\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = S\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c}. \quad (32)$$

Спочатку припустимо, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ не компланарні. Тоді пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c}$ з точністю до знака дорівнює висоті $h$ паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, за умови, що основою є паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ (рис. 7).

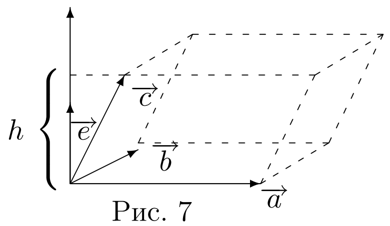


Рис. 7

Отже, з точністю до знака, права частина (32) дорівнює об'єму $V$, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ паралелепіпеда. Залишилося вияснити знак.

Очевидно, що пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = +h$, якщо вектори $\overrightarrow{e}$ і $\overrightarrow{c}$ лежать по один бік від площини, яка визначається векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, і пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = -h$, якщо вектори $\overrightarrow{e}$ і $\overrightarrow{c}$ лежать по різні боки від вказаної площини. Це означає, що пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = +h$, якщо трійки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ і $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{e})$ однаково орієнтовані, і пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = -h$, якщо вказані трійки протилежної орієнтації. Оскільки трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ є правою, то

$$\text{пр}_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = \begin{cases} +h, & \text{якщо } (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \text{ – права трійка}, \\ -h, & \text{якщо } (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \text{ – ліва трійка}. \end{cases}$$

Якщо підставити це значення пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c}$ у праву частину рівності (32), то дістанемо,

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \pm Sh \quad \text{або} \quad [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \pm V,$$

що й треба було довести.

Якщо ж вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні, то вектор $\overrightarrow{c}$ лежить в площині, що визначається векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Звідси випливає, що пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{c} = 0$, і згідно з формулою (32) $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = 0$. Отже, теорема доведена. ►.

**Наслідок 1.** *Для мішаного добутку правильна рівність*

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}].$$

◄ З переставної властивості скалярного добутку випливає, що $\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]\overrightarrow{a}$. Тому досить довести правильність рівності $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]\overrightarrow{a}$. З точністю до знака ця рівність має місце, оскільки з точністю до знака кожна частина цієї рівності дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, які зведені до спільного початку. Знаки обох частин цієї рівності так само однакові, бо трійки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ і $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a})$ мають однакову орієнтацію (див. (22)). Проведені вище міркування правильні, коли вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ некомпланарні. У випадку компланарності цих векторів $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = 0$ і $\overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = 0$, а тому $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$. ▶

Доведена рівність $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$ дозволяє записувати мішаний добуток трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ просто у вигляді $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$, не вказуючи при цьому, які саме два вектори перемножуються векторно, тобто

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}].$$

**Наслідок 2.** *Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні тоді й тільки тоді, коли їхній мішаний добуток $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$.*

◀ Справді, якщо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні, то згідно з теоремою $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$.

Якщо ж мішаний добуток $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$, а вектори не компланарні, то одержимо суперечність. Це випливає з того, що згідно з теоремою $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$ дорівнює з точністю до знака об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, тобто $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \pm V \neq 0$. Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні. ▶

Знайдемо вираз для мішаного добутку через координати векторів, що перемножуються. Нехай $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2; z_2)$ і $\overrightarrow{c} = (x_3; y_3; z_3)$. Тоді, згідно з формулою (31), маємо

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}.$$

Оскільки $\overrightarrow{c} = x_3\overrightarrow{i} + y_3\overrightarrow{j} + z_3\overrightarrow{k}$, то скориставшись формулою (19) для скалярного добутку, одержимо

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Легко бачити, що отриманий вираз є розкладом визначника $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка. Отже,

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Якщо скористатися формулою (33), то наслідок 2 можна сформулювати так: *вектори* $\overrightarrow{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2; y_2; z_2)$ *і* $\overrightarrow{c} = (x_3; y_3; z_3)$ *компланарні тоді й тільки тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

**Приклад 12.** Визначити орієнтацію трійки векторів $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, якщо $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k}$.

◀ Згідно з теоремою, якщо мішаний добуток $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} > 0$, то трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ є правою, а коли $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} < 0$, то – лівою. Якщо ж $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$, то вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ компланарні, а тому для них відсутнє поняття орієнтації трійки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Тому обчислимо мішаний добуток $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

Подамо вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ за допомогою їхніх координат:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = (1; 0; 0) + (0; 1; 0) = (1; 1; 0),$$
$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} = (1; 0; 0) - (0; 1; 0) = (1; -1; 0),$$
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} = (0; 0; 1).$$

Згідно з формулою (33)

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Звідси випливає, що трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ є лівою. ►

**Приклад 13.** Вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, кут між якими дорівнює $30°$. Обчислити $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 6$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ і $|\overrightarrow{c}| = 3$.

◄ Згідно з геометричним змістом мішаного добутку $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \pm V$, де $V$ – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, зведених до спільного початку. Знайдемо об'єм $V$, вважаючи, що основою паралелепіпеда є паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Тоді вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярний до площини цього паралелограма, бо $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$, а тому $|\overrightarrow{c}|$ – висота паралелепіпеда.

Маємо, що площа $S$ паралелограма дорівнює

$$S = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}| \sin 30° = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9 \text{ (кв. од.)}.$$

Тоді

$$V = S|\overrightarrow{c}| = 9 \cdot 3 = 27 \text{ (куб. од.)}.$$

Отже, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \pm 27$, причому $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 27$, якщо трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ права і $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = -27$, якщо ця трійка ліва. ►

**Приклад 14.** Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ і $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

◄ Точки $A$, $B$, $C$ і $D$ лежать в одній площині тоді й тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{AB} = (-1;-1;6)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;0;2)$ і $\overrightarrow{AD} = (1;-1;4)$ компланарні. Умовою компланарності є виконання рівності (34). Оскільки

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 - 8 - 2 = 0,$$

то ця умова виконується, а тому задані чотири точки лежать в одній площині. ►

**Приклад 15.** Точки $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ і $D(-5;-4;8)$ є вершинами трикутної піраміди. Знайти довжину висоти цієї піраміди, яка опущена з вершини $D$ на основу.

◄ Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$ і $\overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$. Об'єм $V$ паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює модулю їхнього мішаного добутку, тобто $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD}|$. Оскільки

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 84 + 84 - 0 + 54 + 84 = 308,$$

то $V = 308$ (куб. од.).

Очевидно, що об'єм $V_{ABCD}$ трикутної піраміди $ABCD$ дорівнює $\frac{1}{6}V$, а тому

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3} \text{ (куб. од).}$$

З іншого боку, якщо вважати трикутник $ABC$ основою трикутної піраміди $ABCD$, маємо

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H,$$

де $H$ – висота піраміди, яка опущена з вершини $D$ на її основу. Тому

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}}.$$

Площу $S_{\triangle ABC}$ знайдемо за допомогою векторного добутку

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Оскільки

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = -12\overrightarrow{i} - 24\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k},$$

то $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28$.

Тоді

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14 \text{ (кв. од),}$$

а тому шукана висота $H = \dfrac{154}{14} = 11$ (од.). ▶

## Вправи

**1.** Для якого значення $\alpha$ вектори $\vec{a} = (\alpha; -3; 2)$ і $\vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ перпендикулярні?

**2.** Дано точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$. Обчислити $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

**3.** Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2; 3; -1)$ і $\vec{b} = (4; 5; 2)$.

**4.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут $\alpha$ між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

**5.** Знайти кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з віссю $Ox$, знаючи циліндричні координати $r$, $\varphi$ і $h$ точки $M$.

**6.** Дано вектори $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ і $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k}$. Обчислити $\text{пр}_{\overrightarrow{c}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

**7.** Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Знайти внутрішній кут при вершині $A$.

**8.** Знайти кут між діагоналлями паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = (2;1;0)$, $\overrightarrow{b} = (0;-2;1)$.

**9.** Нехай $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$ і кут між векторами $\dfrac{2\pi}{3}$. Обчислити: 1) $|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|$; 2) $|[2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}]|$; 3) $|[\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}]|$.

**10.** Спростити вираз: 1) $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}] - [\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}] + [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}]$; 2) $[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}] + [\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}] + [\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}]$; 3) $[2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}]$; 4) $2\overrightarrow{i}[\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}] + 3\overrightarrow{j}[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}] + 4\overrightarrow{k}[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}]$.

**11.** Нехай $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 5$ і кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ і $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$.

**12.** Нехай $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 5$ і кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{6}$. Виразити за допомогою векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ одиничний вектор $\overrightarrow{e}$, перпендикулярний до цих векторів, і такий, що: 1) трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{e})$ права; 2) трійка $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{a})$ ліва.

**13.** Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Обчислити $|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|$, якщо $|\overrightarrow{a}| = 6$, $|\overrightarrow{b}| = 5$.

**14.** Відомо, що $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 26$ і $|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = 72$. Обчислити $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$.

**15.** Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні. Знаючи, що $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 4$. Обчислити $|[3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}]|$.

**16.** Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ утворюють кут $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, обчислити:

1) $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]^2$; 2) $[2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}]^2$; 3) $[\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}]^2$.

**17.** Довести тотожність $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]^2 + (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2\,\overrightarrow{b}^2$.

**18.** Вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ задовольняють умову $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$. Довести, що $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}]$.

**19.** Задано вектори $\overrightarrow{a} = (3;-1;-2)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-1)$. Знайти координати векторного добутку:

1) $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$; 2) $[2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}]$.

**20.** Задано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ і $C(3;2;1)$. Знайти координати векторного добутку:

1) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$; 2) $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.

**21.** Задано вектори $\overrightarrow{a} = (2;-3;1)$, $\overrightarrow{b} = (-3;1;2)$ і $\overrightarrow{c} = (1;2;3)$. Знайти координати вектора $[\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]]$.

**22.** Обчислити синус кута, утвореного векторами $\overrightarrow{a} = (2;-2;1)$ і $\overrightarrow{b} = (2;3;6)$.

**23.** Точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ і $C(5;2;6)$ є вершинами трикутника $ABC$. Знайти площу цього трикутника.

**24.** Вектор $\overrightarrow{b}$, перпендикулярний до осі $Oz$ і до вектора $\overrightarrow{a} = (8;-15;3)$, утворює гострий кут з віссю $Ox$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{b}$, якщо $|\overrightarrow{b}| = 51$.

**25.** Знайти вектор $\overrightarrow{c}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a} = (2;-3;1)$, $\overrightarrow{b} = (1;-2;3)$ і задовольняє умову $\overrightarrow{c}(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}) = 10$.

**26.** Задано вектори $\overrightarrow{a} = (2;-3;1)$, $\overrightarrow{b} = (-3;1;2)$ і $\overrightarrow{c} = (1;2;3)$. Обчислити $[[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}]$ і $[\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]]$.

**27.** Обчислити площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$ і $4\overrightarrow{e}_1 - 5\overrightarrow{e}_2$, якщо $\overrightarrow{e}_1$ і $\overrightarrow{e}_2$ – одиничні вектори і кут між ними дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$.

**28.** Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-1;2;0)$ та $\overrightarrow{e}_1 = (1;0;1)$ і $\overrightarrow{e}_2 = (1;1;1)$. Розкласти вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ на такі вектори $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, що $\overrightarrow{b}$ перпендикулярний до площини векторів $\overrightarrow{e}_1$ та $\overrightarrow{e}_2$, а вектор $\overrightarrow{c}$ лежить у площині цих векторів.

**29.** Сила $\overrightarrow{F} = 2\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ прикладена до точки $M_0(4;-2;3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3;2;-1)$.

**30.** Сила $\overrightarrow{F} = (3;4;-2)$ прикладена до точки $M(2;-1;-2)$. Знайти модуль і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно початку координат.

**31.** Визначити, якою є трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ (правою чи лівою), якщо: 1) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{j}$; 2) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{j}$; 3) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k}$; 4) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k}$.

**32.** Обчислити мішаний добуток $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$, якщо $\overrightarrow{a} = (1;-1;3)$, $\overrightarrow{b} = (-2;2;1)$ і $\overrightarrow{c} = (3;-2;5)$. Як орієнтовані трійки: 1) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$; 2) $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$; 3) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$?

**33.** Знайти $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}$, якщо трійка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ є правою, вектори взаємно перпендикулярні і $|\overrightarrow{a}| = 4$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $|\overrightarrow{c}| = 3$.

**34.** Довести, що $|\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}| \le |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$. У якому випадку можливий знак рівності?

**35.** Довести тотожність $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}) = 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

**36.** Довести, що для довільних векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$ вектори $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ і $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$ компланарні.

**37.** Визначити чи є компланарними вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$, якщо: 1) $\overrightarrow{a}=(2;3;-1)$, $\overrightarrow{b}=(1;-1;3)$, $\overrightarrow{c}=(1;9;-11)$; 2) $\overrightarrow{a}=(3;-2;1)$, $\overrightarrow{b}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{c}=(3;-1;-2)$; 3) $\overrightarrow{a}=(2;-1;2)$, $\overrightarrow{b}=(1;2;-3)$, $\overrightarrow{c}=(3;-4;7)$?

**38.** Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках: 1) $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ і $D(4;1;3)$; 2) $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$ і $D(3;2;4)$.

**39.** Обчислити об'єм трикутної піраміди $OABC$, якщо $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}$.

**40.** У трикутній піраміді з вершинами у точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$ і $D(3;4;-3)$ визначити довжину висоти, проведеної з вершини $D$.

### Відповіді

**1.** $\alpha=-6$. **2.** $-524$. **3.** $\cos\varphi=\sqrt{\frac{7}{10}}$, $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{7}{10}}$. **4.** $\alpha=\arccos\frac{2}{7}$. **5.** $\arccos\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2+h^2}}$. **6.** $-4$. **7.** $\varphi=\arccos\frac{4}{9}$. **8.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **9.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $10\sqrt{3}$. **10.** 1) $2(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i})$; 2) $2[\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}]$; 3) $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}]$; 4) 3. **11.** $50\sqrt{2}$. **12.** 1) $\frac{1}{5}[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]$; 2) $-\frac{1}{5}[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]$. **13.** 15. **14.** $\pm30$. **15.** 60. **16.** 1) 3; 2) 27; 3) 300. **19.** 1) $(5;1;7)$; 2) $(20;4;28)$. **20.** 1) $(6;-4;-6)$; 2) $(-12;8;12)$. **21.** $(10;13;19)$. **22.** $\sin\alpha=\frac{5\sqrt{17}}{21}$. **23.** 14 (кв. од). **24.** $(45;24;0)$. **25.** $(7;5;1)$. **26.** $(-7;14;-7)$; $(10;13;19)$. **27.** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (кв. од). **28.** $\overrightarrow{b}=\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{c}=\left(-\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$. **29.** $(-4;3;4)$. **30.** 15; $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$. **31.** 1) Права; 2) ліва; 3) ліва; 4) права. **32.** $-7$; 1) ліва; 2) права; 3) права. **33.** 24. **34.** У випадку, коли вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ взаємно перпендикулярні. **37.** 1) Компланарні; 2) не компланарні; 3) компланарні. **38.** 1) 3 (куб. од.); 2) 6 (куб. од.). **39.** $\frac{17}{2}$ (куб. од.). **40.** $3\sqrt{2}$ (од.).

## §3. Поняття $n$-вимірного евклідового простору

У попередніх пунктах було доведено, що вектор $\overrightarrow{a}$ у просторі визначається трійкою чисел – його координатами $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; x_3)$, а на площині – двома числами $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2)$. Тому у просторі вектор називають **тривимірним**, а на площині – **двовимірним**.

Поняття $n$-вимірного вектора вводиться аналогічно.

Упорядкована система $n$ дійсних чисел $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ називається **$n$-вимірним вектором** і позначається символом $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$. Числа $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ називаються **координатами вектора**.

Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, називається **нуль-вектором або нулем** $\overrightarrow{0} = (0; 0; ...; 0)$.

Вектор $(-x_1; -x_2; ...; -x_n)$ називається **протилежним** до вектора $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і позначається символом $-\overrightarrow{a}$.

Два вектори $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ називаються **рівними** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, якщо їхні відповідні координати однакові, тобто $x_i = y_i$, $i \in \{1, ..., n\}$.

**Сумою (різницею)** двох векторів $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ називається вектор $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm y_1; x_2 \pm y_2; , ..., x_n \pm y_n)$.

**Добутком** вектора $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ на число $\lambda$ називається вектор $\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)$.

Лінійні операції над $n$-вимірними векторами мають ті самі властивості, що й лінійні операції над векторами у тривимірному просторі та на площині.

Множина всіх $n$-вимірних векторів, для яких введено операції додавання й множення на число, називається **арифметичним векторним простором** і позначається символом $\mathbb{R}^n$.

Означення лінійної залежності і незалежності векторів, лінійної комбінації векторів на площині і в просторі переносяться без змін і на арифметичний простір $\mathbb{R}^n$.

Максимальне число лінійно незалежних векторів у $\mathbb{R}^n$ дорівнює $n$.

**Базисом** векторного простору $\mathbb{R}^n$ називають будь-яку сукупність $n$ лінійно незалежних векторів цього простору. Базис із векторів $\overrightarrow{e}_1 = (1; 0; ...; 0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0; 1; ...; 0)$, ..., $\overrightarrow{e}_n = (0; 0; ...; 1)$ називають **одиничним**.

**Скалярним добутком** векторів $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ називається число

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n. \tag{22}$$

Означений таким чином скалярний добуток володіє всіма властивостями скалярного добутку на площині і в просторі.

Якщо в $n$-вимірному просторі введено скалярний добуток, то його називають **$n$-вимірним евклідовим простором** і позначають символом $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2} = \sqrt{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a}} \qquad \text{або} \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Для знаходження кута $\varphi$ між ненульовими векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ користуються формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Для векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$

$$\overrightarrow{e}_i\overrightarrow{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Базис $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$ називають також одиничним **ортонормованим базисом**.

Розглянемо $n$-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ з ортонормованим базисом $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$. Нехай дано вектор $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, де $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – координати вектора у даному базисі. Як і у випадку тривимірного простору, поставимо у відповідність кожному вектору $\overrightarrow{a}$ простору $\mathbb{R}^n$ точку $M$, під якою розумітимемо набір чисел $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Ці числа називають **прямокутними декартовими координатами точки** $M$ і записують $M(x_1; x_2; ...; x_n)$. Точку $O(0; 0; ...; 0)$ називають **початком координат**. Сукупність початку координат $O$ і векторів базису $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$ називають **декартовою прямокутною системою координат** в $n$-вимірному просторі.

Під вектором $\overrightarrow{AB}$, який з'єднує точки $A(x_1; x_2; ...; x_n)$ і $B(y_1; y_2; ...; y_n)$ як і у випадку тривимірного простору розумітимемо вектор $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; ...; y_n - x_n)$. При цьому точку $A$ називатимемо **початком**, а точку $B$ – **кінцем** вектора $\overrightarrow{AB}$. Якщо початок вектора збігається з початком координат $O(0; 0; ...; 0)$, а кінець – із точкою $M(x_1; x_2; ...; x_n)$, то вектор $\overrightarrow{OM} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ називають **радіус-вектором** точки $M$. Його координати збігаються з координатами точки $M$.

**Відстанню** між двома точками $A$ і $B$ назвемо модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, а саме

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}.$$

**Приклад 1**. З'ясувати, чи вектори $\overrightarrow{a}_1 = (1;3;1;3)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2;1;1;2)$ і $\overrightarrow{a}_3 = (3;-1;1;1)$ лінійно залежні.

◀ Складемо векторну рівність $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + \lambda_3\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{0}$ або $\lambda_1(1;3;1;3) + \lambda_2(2;1;1;2) + \lambda_3(3;-1;1;1) = \overrightarrow{0}$. Ця рівність рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему методом Жордана-Гаусса, зведемо її до вигляду

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

звідки знайдемо всі її розв'язки $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -2c$, $\lambda_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Отже, для даних векторів їхня лінійна комбінація дорівнює нулю при довільних ненульових $\lambda_1$, $\lambda_2$ і $\lambda_3$, а це означає, що вектори лінійно залежні. ▶

**Приклад 2**. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a} = (3;1;-2;3;0)$ і $\overrightarrow{b} = (0;2;-4;3;-1)$.

◀ Згідно з (22) маємо

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-2)(-4) + 3 \cdot 3 + 0(-1) = 2 + 8 + 9 = 19. \ ▶$$

Розглянемо економічний приклад на ортогональність векторів.

**Приклад 3**. Нехай $\overrightarrow{q} = (q_1; q_2; \ldots; q_k)$ – вектор спожитих товарів, $\overrightarrow{c} = (c_1; c_2; \ldots; c_k)$ – вектор цін у даному місяці, $\overrightarrow{c}_n = (c_{1n}; c_{2n}; \ldots; c_{kn})$ – вектор цін у попередньому місяці. Знайти формулу для визначення індексу цін та індексу інфляції.

◀ Очевидно, що індекс цін

$$p = \frac{\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{q}}{\overrightarrow{c}_n\overrightarrow{q}} 100\%.$$

Якщо перетворити цю формулу, то одержимо, що

$$100(\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{q}) = p(\overrightarrow{c}_n\overrightarrow{q}) \quad \text{або} \quad (100\overrightarrow{c} - p\overrightarrow{c}_n)\overrightarrow{q} = 0.$$

Звідси випливає, що індекс цін можна визначити як числовий коефіцієнт $p$, що робить вектор $\overrightarrow{q}$ ортогональним до вектора $100\overrightarrow{c} - p\overrightarrow{c}_n$.

Індекс інфляції розраховується за формулою

$$i = p - 100 = \frac{\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{q}}{\overrightarrow{c}_n\,\overrightarrow{q}}100 - 100$$

або

$$i = \frac{(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{c}_n)\overrightarrow{q}}{\overrightarrow{c}_n\,\overrightarrow{q}}100. \blacktriangleright$$

### Вправи

**1.** Знайти сумарні затрати робочого часу $T$ і вартість $P$ виробленої продукції, якщо відомі вектори: асортименту $\vec{q} = (20; 40; 60; 10)$, затрат робочого часу $\vec{t} = (5; 10; 7; 12)$ і цін $\vec{p} = (30; 15; 40; 20)$.

**2.** Для векторів $\vec{a} = (2; 4; -3; 0)$ і $\vec{b} = (-1; 2; 2; -5)$ знайти їхні довжини і кут між ними.

**3.** Довести, що вектори $\overrightarrow{a}_1 = (7; 1; 3; -2)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0; -1; 2; 0)$, $\overrightarrow{a}_3 = (0; 0; 0; -2; 6)$, $\overrightarrow{a}_4 = (0; 0; 0; 1)$ утворюють базис в просторі $\mathbb{R}^4$.

**4.** З'ясувати, чи вектори $\overrightarrow{a}_1 = (-1; 3; 3; 2; 5)$, $\overrightarrow{a}_2 = (-3; 5; 2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a}_3 = (-3; 1; -5; 0; 7)$, $\overrightarrow{a}_4 = (-5; 7; 1; 4; 1)$ лінійно залежні.

**5.** Знайти лінійну комбінацію векторів $\overrightarrow{d} = (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{c} - 3(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c})\overrightarrow{a} + 3(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}$, де $\overrightarrow{a} = (4; 1; 3; -2)$, $\overrightarrow{b} = (1; 2; -2; 3)$, $\overrightarrow{c} = (10; 8; 1; -3)$.

### Відповіді

**1.** $T = 1040$, $P = 3000$. **2.** $|\vec{a}| = \sqrt{29}$; $|\vec{b}| = \sqrt{34}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. **4.** Лінійно залежні. **5.** $\overrightarrow{d} = (-699; -129; -609; 495)$.

# Розділ 4.
# Аналітична геометрія

## §1. Лінії, поверхні та їхні рівняння

В аналітичній геометрії об'єкти (точки, лінії, поверхні) та їхнє розміщення на площині або в просторі визначаються аналітично, тобто за допомогою методів алгебри. Робиться це з використанням декартового методу координат. При цьому геометричні об'єкти за допомогою формул описуються рівняннями або нерівностями, які зв'язують між собою координати кожної точки даного об'єкта.

Рівнянням, яке відповідає заданій множині точок на площині або в просторі, називають рівність, яку задовольняють координати будь-якої точки цієї множини і не задовольняють координати точок, що не належать даній множині.

**Приклад 1.** Знайти рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точок $M_1(-4;2)$ і $M_2(-2;-6)$.

◀ Відомо, що відстань між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначається за формулою

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка шуканої лінії. Тоді згідно з умовою $MM_1 = MM_2$, тобто

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+6)^2}.$$

Якщо піднести обидві частини до квадрата, то після перетворень одержимо

$$x - 4y - 5 = 0 \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

Очевидно, що це рівняння прямої, яка є серединним перпендикуляром відрізка $M_1M_2$.

Перевіримо, що кожна точка прямої $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$ рівновіддалена від точок $M_1(-4;2)$ і $M_2(-2;-6)$. Справді, нехай $M(x; \frac{x}{4} - \frac{5}{4})$ – довільна точка на цій прямій. Тоді

$$M_1M = \sqrt{(-4-x)^2 + (2 - \frac{x}{4} + \frac{5}{4})^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (\frac{13}{4} - \frac{x}{4})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{17x^2}{16} + \frac{51x}{8} + \frac{425}{16}};$$

$$M_2M = \sqrt{(-2-x)^2 + (-6 - \frac{x}{4} + \frac{5}{4})^2} = \sqrt{(2+x)^2 + (\frac{19}{4} + \frac{x}{4})^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{17x^2}{16} + \frac{51x}{8} + \frac{425}{16}}.$$

Отже, $M_1M = M_2M$. Тому рівняння заданої множини є $y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$. ►

**Приклад 2.** Вивести рівняння множини точок, що знаходяться на відстані $R$ від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

◄ Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ даної множини. Згідно з умовою
$$d(M, M_0) = R$$
або
$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R.$$
Якщо піднести до квадрата, то одержимо рівняння
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2,$$
яке називають **рівнянням сфери** з центром у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і радіусом $R$. Навпаки, якщо координати $(x; y; z)$ точки задовольняють одержане рівняння, то ця точка знаходиться на відстані $R$ від точки $M_0$.

Якщо центр сфери збігається з початком координат, то рівняння сфери набуде вигляду
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad ►$$

Доводиться, що якщо рівняння
$$F(x, y, z) = 0,$$
визначає деякий геометричний об'єкт, то цей об'єкт є поверхнею в просторі. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не визначає жодного реального геометричного образу, бо ліва частина не може бути від'ємною, а рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ визначає точку $(0; 0; 0)$.

Аналогічно рівняння
$$F(x, y) = 0,$$
якщо воно має зміст, визначає деяку лінію на площині.

Для того щоб переконатися, чи лежить точка $M(x_0; y_0)$ на даній лінії, треба перевірити, чи задовольняють її координати рівняння, яким задана лінія.

У прикладі 1 для заданої відповідними властивостями множини точок знайдено її рівняння. Розглянемо тепер задачу, коли за відомим рівнянням треба знайти множину точок.

**Приклад 3.** Визначити, яку множину точок описує рівняння $|x| + |y| = 1$.

◀ Оскільки $|a| = |-a|$, $a \in \mathbb{R}$, то разом із точкою $(x_0; y_0)$ до шуканої множини належать також точки $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$. Це означає, що осі $Ox$ і $Oy$ – осі симетрії шуканої множини. Тому знайдемо її частину, що лежить у першій чверті, а решту дістанемо, симетрично відобразивши цю частину відносно осей координат.

Для $x \geq 0$ і $y \geq 0$ маємо $|x| = x$, $|y| = y$, а тому рівняння набуде вигляду $x + y = 1$. Нарисувавши частину цієї прямої, що лежить у першій чверті, і відобразивши її симетрично відносно осей координат, одержимо шукану множину – квадрат, що зображений на рисунку 1.

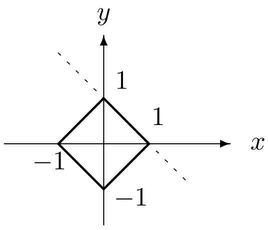



Рис. 1

. ▶

Розглянуті приклади показують, як метод координат дозволяє застосовувати алгебраїчні методи при розв'язуванні геометричних задач. Тепер розглянемо приклад, коли алгебраїчну задачу можна розв'язати геометрично за допомогою методу координат.

**Приклад 4.** При яких значеннях параметра $a$ система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

не має розв'язків, має єдиний розв'язок, має безліч розв'язків?

◀ Перше рівняння системи – це рівняння кола з центром у початку координат і радіусом 1. Друге рівняння є рівнянням прямої, яка відтинає на осях координат відрізки, довжиною $a$. Розв'язати систему – це означає знайти точки, координати яких задовольняють як перше, так і друге рівняння, тобто знайти точки перетину прямої $x + y = a$ і кола. З рис. 2 випливає, що при $a > \sqrt{2}$ і при $a < -\sqrt{2}$

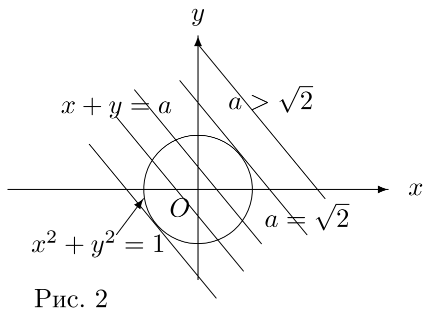


Рис. 2

пряма не перетинає кола, тобто система не має розв'язків; при $a = \pm\sqrt{2}$ маємо дотичні до кола, тобто система має єдиний (кратний) розв'язок; при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ пряма перетинає коло, тобто система має два розв'язки. Інших випадків немає. ►

## Вправи

**1.** Один кінець відрізка рухається по осі $Ox$, а другий – по осі $Oy$. Знайти рівняння лінії, яка описується серединою цього відрізка, якщо його довжина дорівнює $l$.

**2.** Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ дорівнює відстані цієї самої точки від прямої $y = -\frac{1}{4}$.

**3.** Знайти рівняння множини точок, добуток відстаней яких від точок $F_1(-a; 0)$ і $F_2(a; 0)$ є сталою величиною, що дорівнює $a^2$.

**4.** Скласти рівняння множин точок, рівновіддалених від точок $A(1; 1)$ і $B(3; 3)$.

**5.** Знайти рівняння множини точок, сума квадратів відстаней яких від точок $A(2; 0)$ і $B(0; 2)$ дорівнює квадрату відстані між точками $A$ і $B$.

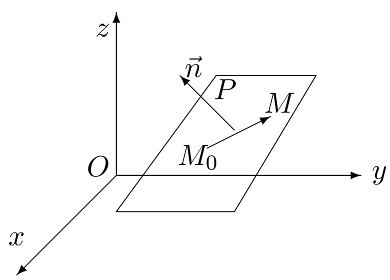
## Відповіді

**1.** $x^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}$. **2.** $y = x^2$. **3.** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. **4.** $x + y - 4 = 0$. **5.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

## §2. Площина й пряма в просторі

### 2.1. Площина в просторі.

**2.1.1. Нормальний вектор площини. Різні типи рівнянь площини.** Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^3$ площину $P$. Її положення повністю визначається заданням ненульового вектора $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$, перпендикулярного до цієї площини, і деякої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що лежить у цій площині. Вектор $\overrightarrow{n}$ називається **нормальним вектором** площини.




Знайдемо рівняння площини $P$, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$. Для цього візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ площини, яка не збігається з точкою $M_0$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$

Оскільки $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$, то

$$\overrightarrow{M_0M}\,\overrightarrow{n} = 0, \tag{1}$$

що еквівалентно рівнянню

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, що рівняння (2) не задовольняють координати жодної точки $N \notin P$, бо $\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{M_0N} \neq 0$.

Рівняння (2) називається **рівнянням площини, що проходить через задану точку.** Це рівняння є рівнянням першого степеня відносно змінних (координат) $x$, $y$ і $z$.

**Приклад 1.** Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n} = (5; 1; -4)$.

◄ Маємо $A = 5$, $B = 1$, $C = -4$. Згідно з (2), одержуємо рівняння площини

$$5(x - 2) + 1(y - (-3)) + (-4)(z - 1) = 0$$

або

$$5x + y - 4z - 3 = 0. \quad ►$$

Надаючи коефіцієнтам $A$, $B$, $C$ у рівнянні (2) конкретних значень, можна одержати рівняння будь-якої площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Сукупність площин, що проходять через задану точку, називається **в'язкою площин**. Рівняння (2), у якому коефіцієнти $A$, $B$ і $C$ набувають довільних значень, називається **рівнянням в'язки** площин.

**Приклад 2.** Знайти рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

◄ Запишемо рівняння в'язки площин, що проходять через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3}$$

У цьому рівнянні коефіцієнти $A$, $B$ і $C$ невідомі. Щоб їх знайти, скористаємося тим, що координати точок $M_2$ і $M_3$ повинні задовольняти рівняння (3):

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \tag{4}$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, що (3), (4), (5) – це однорідна система трьох рівнянь із трьома невідомими $A$, $B$, $C$. Така система, як відомо, має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) і є **рівнянням площини, що проходить через три задані точки**.

Зокрема, у випадку, коли $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(2; 1; -3)$ і $M_3(-1; 0; 0)$, рівняння площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 2 - 1 & 1 + 1 & -3 \\ -1 - 1 & 0 + 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x - 1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y + 1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$3(x - 1) + 6(y + 1) + 5z = 0$ або $3x + 6y + 5z + 3 = 0$. ►

**2.1.2. Загальне рівняння площини.** У попередньому пункті ми довели, що будь-якій площині відповідає рівняння першого степеня відносно змінних координат.

Розглянемо тепер загальне рівняння першого степеня з трьома змінними

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7}$$

Принаймні один із коефіцієнтів $A$, $B$, $C$ не дорівнює нулю, бо в противному випадку ми мали б рівність $D = 0$. Зазначимо, що тотожність $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$ задовольняють всі точки простору і тому вона не визначає площину.

Нехай, наприклад, $C \neq 0$. Запишемо (7) у вигляді

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z + \frac{D}{C}) = 0. \tag{8}$$

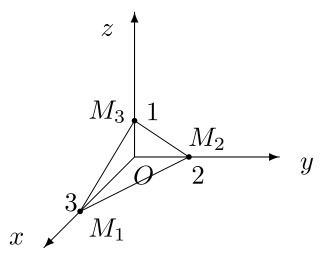
Рівняння (8) рівносильне рівнянню (7). Порівнюючи (8) із (2), ми бачимо, що (8), а отже, і (7) є рівнянням площини, що має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ і проходить через точку $M_0(0; 0; -\frac{D}{C})$. Отже, доведено, що будь-яке рівняння першого степеня (7) є рівнянням деякої площини.

Рівняння (7) називається **загальним рівнянням площини**.

Якщо вільний член $D = 0$, то рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, і його задовольняють координати початку координат $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Отже, площина проходить через початок координат.

Очевидно, що рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно є рівняннями координатних площин $Oyz$, $Oxz$, $Oxy$.

**Приклад 3.** Побудувати площину $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.




◀ Знайдемо точки перетину площини з осями координат. Для знаходження точки перетину з $Ox$, треба підставити в рівняння площини $y = 0$, $z = 0$. Тоді матимемо $2x + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 6 = 0$, звідки $x = 3$.

Аналогічно, покладаючи $x = 0$, $y = 0$, знаходимо точки перетину з віссю $Oz$, а саме $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6z - 6 = 0$, звідки $z = 1$. Нарешті, при $x = 0$, $z = 0$ знаходимо $y = 2$. Отже, дана площина проходить через три точки $M_1(3;0;0)$, $M_2(0;2;0)$ і $M_3(0;0;1)$. ▶

Якщо в рівнянні (7) $D \neq 0$, то, поділивши дане рівняння на $-D$, дістанемо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{9}$$

де $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. Рівняння (9) називається **рівнянням площини у відрізках** на осях координат.

### 2.1.3. Взаємне розміщення площин у просторі.

Розглянемо дві площини $P_1$ і $P_2$, що задані відповідно рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Очевидно, що площини $P_1$ і $P_2$ є: 1) паралельними тоді й тільки тоді, коли їхні нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ колінеарні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \tag{10}$$

2) перпендикулярними тоді й тільки тоді, коли їхні нормальні вектори $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ перпендикулярні, тобто $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 0$ або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{11}$$

Дві площини $P_1$ і $P_2$ збігаються, коли

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{12}$$

Під кутом між двома площинами розуміємо кут $\varphi$ між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин. Тому

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{13}$$

**Приклад 4.** Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-2;1;4)$ паралельно площині $3x+2y-7z+8=0$.

◀ Рівняння в'язки площин, що проходять через точку $M_0(-2;1;4)$ має вигляд

$$A(x+2)+B(y-1)+C(z-4)=0. \tag{14}$$

З цієї сукупності виділимо ту з них, яка паралельна площині $3x+2y-7z+8=0$. Очевидно, що це можливо, коли нормальний вектор $\overrightarrow{n_1}=(A;B;C)$ площини (14) колінеарний вектору $\overrightarrow{n_2}=(3;2;-7)$. Зокрема, можна взяти $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}$. Тому рівняння шуканої площини

$$3(x+2)+2(y-1)+(-7)(z-4)=0$$

або

$$3x+2y-7z+32=0. \quad ▶$$

**Приклад 5.** Знайти кут між площинами $x+2y-3z+4=0$ і $2x+3y+z+8=0$.

◀ Згідно з формулою (13)

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{5}{14}.$$

Отже, один із суміжних кутів дорівнює $\varphi=\arccos\frac{5}{14}$, а другий – $\pi-\varphi$. ▶

**Приклад 6.** Через точку $M_0(-2;3;6)$ провести площину, перпендикулярну до площин $2x+3y-2z-4=0$ $(P_1)$ і $3x+5y+z=0$ $(P_2)$.

◀ Нехай $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$ нормальний вектор шуканої площини. Тоді рівняння цієї площини має вигляд

$$A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0 \quad (P).$$

Для того щоб знайти $A$, $B$, $C$, скористаємося тим, що $P\perp P_1$ і $P\perp P_2$, тобто $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n_2}$, де $\overrightarrow{n_1}=(2;3;-2)$, $\overrightarrow{n_2}=(3;5;1)$. Отже, дістанемо систему

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0, \\ 3A+5B+C=0. \end{cases}$$

Звідки, взявши, наприклад, $C=1$, одержуємо, що

$$A=13, \quad B=-8.$$

Тому рівняння шуканої площини

$$13(x+2)-8(y-3)+(z-6)=0$$

або

$$13x-8y+z+44=0.$$

Цей приклад можна розв'язати, використовуючи поняття векторного добутку. Оскільки нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ шуканої площини перпендикулярний до нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ відповідно площин $P_1$ і $P_2$, то він є векторним добутком цих векторів, тобто

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2]=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=13\overrightarrow{i}-8\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}.$$

Це означає, що $A=13$, $B=-8$, $C=1$, а тому рівняння площини

$$13(x+2)-8(y-3)+(z-6)=0$$

або

$$13x-8y+z+44=0. \blacktriangleright$$

**2.1.4. Точка перетину трьох площин.** Нехай задано три площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $(P_1)$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $(P_2)$ і $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ $(P_3)$. Щоб знайти точку перетину цих площин, треба, очевидно, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases}$$

Якщо визначник цієї системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

то вона має єдиний розв'язок, тобто три площини перетинаються в одній точці.

**Приклад 7**. Знайти точку перетину площин $x+y-2z+3=0$, $2x-2y+3z-7=0$, $x+3y-z-4=0$.

◀ Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x+y-2z+3=0, \\ 2x-2y+3z-7=0, \\ x+3y-z-4=0 \end{cases},$$

за допомогою формул Крамера, знайдемо координати точки перетину площин

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 7 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-18}{-18}=1, y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-36}{-18}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-54}{-18}=3. \qquad ▶$$

**2.1.5. Відстань від точки до площини.** Нехай задані точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і площина $P$, що має рівняння $Ax+By+Cz+D=0$. Відстань $d$ між ними, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з точки $M_1$ на площину $P$, визначається за формулою

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{15}$$

**Приклад 8**. Знайти відстань між площинами $2x+y-z-3=0$ $(P_1)$ і $4x+2y-2z+6=0$ $(P_2)$.

◀ Оскільки площини паралельні, то відстань між ними – це відстань від будь-якої точки площини $P_1$ до площини $P_2$. Візьмемо, наприклад, точку $M_1(0;0;-3)$ на площині $P_1$ і знайдемо відстань від неї до площини $P_2$. Маємо

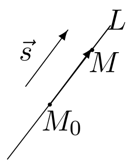
$$d=\frac{|4\cdot 0+2\cdot 0-2\cdot(-3)+6|}{\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|6+6|}{\sqrt{24}}=\frac{12}{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}.\quad \blacktriangleright$$

**2.2. Пряма в просторі.**

**2.2.1. Канонічні та параметричні рівняння прямої.** Положення прямої у просторі повністю визначається заданням довільної фіксованої її точки $M_0$ і ненульового вектора $\overrightarrow{s}$, який паралельний цій прямій або лежить на ній. Вектор $\overrightarrow{s}$ називається **напрямним вектором** даної прямої.

Виведемо рівняння прямої $L$, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і напрямним вектором якої є $\overrightarrow{s}=(m;n;p)$.




Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка прямої $L$, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ колінеарний вектору $\overrightarrow{s}=(m;n;p)$, тобто

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.\qquad (16)$$

Рівняння (16) називаються **канонічними рівняннями прямої в просторі**.

Числа $m$, $n$ і $p$ є проекціями напрямного вектора $\overrightarrow{s}$ на координатні осі.

Оскільки вектор $\overrightarrow{s}$ – ненульовий, то всі три числа $m$, $n$ і $p$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, але один або два з них можуть дорівнювати нулю. Наприклад, можливий такий запис:

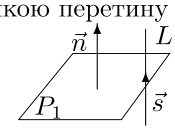
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0},\qquad (16')$$

який означає, що проекції вектора $\overrightarrow{s}$ на осі $Oy$ і $Oz$ дорівнюють нулю. Тому і вектор $\overrightarrow{s}=(m;0;0)$, і пряма, яка визначена рівняннями $(16')$, перпендикулярні осям $Oy$ і $Oz$, тобто площині $Oyz$.

Зауважимо, що рівності ($16'$) рівносильні таким: $y = y_0$, $z = z_0$, а $x$ – довільне.

**Приклад 9.** Записати рівняння прямої $L$, що перпендикулярна до площини $2x-3y+4z-8=0$ ($P_1$) і проходить через точку перетину цієї площини з віссю $Oz$.

◀ Знайдемо спочатку точку перетину площини $P_1$ із віссю $Oz$ : $x = 0$, $y = 0$, тоді $4z - 8 = 0$ або $z = 2$. Отже, точка $M_0(0;0;2)$ є точкою перетину даної площини з віссю $Oz$.




Згідно з умовою задачі пряма $L$ перпендикулярна площині $P_1$, а це означає, що вектор $\overrightarrow{s}$ колінеарний нормальному вектору $\overrightarrow{n}$ площини $P_1$, тому можна взяти $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n} = (2;-3;4)$.

Якщо скористатися рівняннями (16), то одержимо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{4}$$

або

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{4}. \quad ▶$$

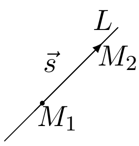
Якщо прирівняти співвідношення (16) до $t \in \mathbb{R}$, то дістанемо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (17)$$

Рівняння (17) називаються **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

### 2.2.2. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Нехай пряма $L$ проходить через дві різні точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Складемо канонічне рівняння цієї прямої. Для цього за напрямний вектор прямої візьмемо




$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Отже, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, тому з рівнянь (16) одержимо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (18)$$

Рівняння (18) називаються **рівняннями прямої, що проходить через дві точки**.

**Приклад 10.** Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2;3;-5)$ і $M_2(-4;3;2)$.

◀ Згідно з (18) маємо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{3-3}=\frac{z+5}{2+5} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{-6}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+5}{7}.$$

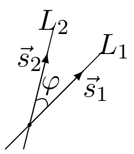
Дана пряма перпендикулярна осі $Oy$. ▶

### 2.2.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності прямих.

Нехай у просторі задано дві прямі:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad (L_1),$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \quad (L_2).$$




За кут між прямими $L_1$ і $L_2$ візьмемо кут $\varphi$ між напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ даних прямих. Оскільки $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$, то

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}$$

або

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{19}$$

Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих $L_1$ і $L_2$ рівносильні відповідно умовам колінеарності й перпендикулярності їхніх напрямних векторів $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$, а саме:

$$L_1\|L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}\|\overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}; \tag{20}$$

$$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2} \quad \Leftrightarrow \quad m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{21}$$

**Приклад 11.** Знайти кут між прямими

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-2} \ (L_1), \quad \frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5} \ (L_2).$$

◀ Згідно з формулою (19) маємо

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5}{\sqrt{5^2+3^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+2^2+5^2}} = \frac{11}{38}$$

або $\varphi = \arccos\dfrac{11}{38}$. ▶

**2.2.4. Пряма як лінія перетину площин.** Пряму в просторі можна визначити як лінію перетину двох непаралельних площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $(P_1)$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $(P_2)$, тобто як множину точок, координати яких задовольняють систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{22}$$

Правильне й обернене твердження: система двох незалежних лінійних рівнянь (22) визначає пряму як лінію перетину площин (якщо вони не паралельні). Рівняння (22) називаються **загальними рівняннями прямої**.

**Приклад 12.** Скласти канонічні рівняння прямої, що задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x-5y+z+4=0,\\ x+2y-z+2=0. \end{cases}$$

◀ Знайдемо спочатку параметричні рівняння прямої. Для цього розв'яжемо дану систему відносно $y$ і $z$:

$$\begin{cases} -5y+z=-2x-4,\\ 2y-z=-x-2; \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2x-4 & 1\\ -x-2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1\\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = x+2;\; z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2x-4\\ 2 & -x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1\\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 3x+6.$$

Отже, $x=t$, $y=t+2$, $z=3t+6$ – параметричні рівняння прямої. Тоді канонічні рівняння прямої такі:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}, \quad \overrightarrow{s} = (1;1;3).$$ ▶

**Приклад 13.** Знайти координати точки $M$, що ділить навпіл відрізок прямої

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1},$$

який міститься між площинами $Oxz$ і $Oxy$.

◀ Знайдемо точку перетину даної прямої з площиною $Oxz$. Для цього підставимо $y = 0$ у рівняння прямої

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1}{5} = \frac{z-3}{-1} \text{ або } \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{1}{5}, \\ \frac{z-3}{-1} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $x = \frac{13}{5}$, $z = \frac{14}{5}$. Отже, точкою перетину прямої з площиною $Oxz$ є точка $M_1(\frac{13}{5}; 0; \frac{14}{5})$.

Аналогічно, підставивши $z = 0$ у рівняння прямої, дістанемо точку перетину прямої з площиною $Oxy$:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = 3 \text{ або } \begin{cases} x-2 = 9, \\ y+1 = 15; \end{cases}$$

звідки $x = 11$, $y = 14$, $z = 0$. Точка перетину прямої з площиною $Oxy$ – $M_2(11; 14; 0)$.

Знайдемо координати точки $M(x; y; z)$, що є серединою відрізка $M_1M_2$:

$$x = \frac{13/5 + 11}{2} = \frac{34}{5}; \quad y = \frac{0+14}{2} = 7; \quad z = \frac{14/5 + 0}{2} = \frac{7}{5}.$$

Отже, $M\left(\frac{34}{5}; 7; \frac{7}{5}\right)$. ▶

**2.2.5. Відстань від точки до прямої у просторі.** Нехай є пряма $L$: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ поза нею. Доводиться, що відстань від даної точки до прямої знаходиться за формулою

$$d = \qquad (23)$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

**Приклад 14.** Знайти відстань від точки $M_1(1; -1; -2)$ до прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

◀ Скористаємося формулою (23):

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -1+2 & -2-8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -2-8 & 1+3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1+3 & -1+2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -10 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{17}}=$$

$$=\frac{\sqrt{18^2+(-22)^2+5^2}}{\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{833}{17}}=7. \quad ▶$$

### 2.3. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

**2.3.1. Умови паралельності й перпендикулярності прямої й площини.** Розглянемо пряму

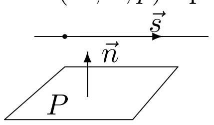
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (L) \tag{24}$$

і площину

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (P). \tag{25}$$

Очевидно, що пряма $L$ і площина $P$:

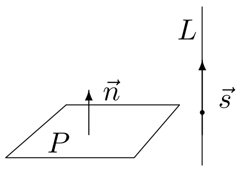
1)паралельні тоді й тільки тоді, коли напрямний вектор $\overrightarrow{s}=(m;n;p)$ прямої і нормальний вектор $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$




площини перпендикулярні, тобто

$$Am+Bn+Cp=0, \tag{26}$$

2) перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{s}=(m;n;p)$ і $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$ колінеарні, тобто




$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{27}$$

**Приклад 15.** Написати рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(2; -3; 4)$ паралельно до прямих

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}.$$

◄ Нехай $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ – нормальний вектор шуканої площини $P$. Тоді рівняння площини матиме вигляд

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-4) = 0. \tag{28}$$

Оскільки площина $P$ паралельна прямим $L_1$ і $L_2$, то її нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ перпендикулярний до напрямних векторів $\overrightarrow{s}_1 = (1; 2; 8)$ і $\overrightarrow{s}_2 = (4; 0; 2)$ прямих $L_1$ і $L_2$, тобто є їхнім векторним добутком.

Отже,

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{s}_1, \overrightarrow{s}_2] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} + 30\overrightarrow{j} - 8\overrightarrow{k},$$

тобто $A = 4$, $B = 30$, $C = -8$.

Підставивши знайдені коефіцієнти в (28), дістанемо рівняння шуканої площини

$$4(x-2) + 30(y+3) - 8(z-4) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 15y - 4z + 57 = 0. \quad ►$$

**2.3.2. Перетин прямої з площиною.** Щоб знайти точку перетину прямої $L$ і площини $P$, треба розв'язати систему рівнянь (24), (25).Для цього запишемо рівняння прямої $L$ у параметричній формі

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt \tag{29}$$

і підставимо (29) у рівняння (25). Тоді одержимо, що

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

або

$$t(Am + Bn + Cp) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Звідси, якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто нормальний вектор площини $P$ не перпендикулярний до напрямного вектора $\overrightarrow{s}$ прямої $L$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Підставивши це значення $t = t_0$ у (29), одержимо координати точки перетину прямої $L$ і площини $P$.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{s}$, то можливі два випадки: 1) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $(x_0; y_0; z_0) \notin P$, то значення $t$ не можна визначити, а це означає, що пряма $L$ і площина не перетинаються; 2) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $(x_0; y_0; z_0) \in P$, то рівняння для знаходження $t$ має безліч розв'язків, а це означає, що пряма $L$ лежить в площині $P$; і тому всі точки цієї прямої є точками перетину прямої $L$ і площини $P$.

**Приклад 16**. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$ із площиною $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

◄ Запишемо рівняння прямої в параметричній формі $x = 2t + 1$, $y = 3t - 1$, $z = 2t + 5$. Підставивши ці вирази в рівняння площини, дістанемо

$$2(2t + 1) + 3(3t - 1) - 2(2t + 5) + 2 = 0 \quad \text{або} \quad t = 1.$$

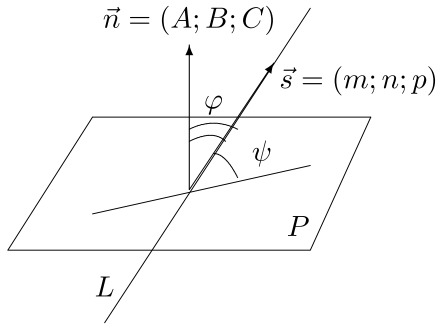
Тоді координати точки перетину прямої та площини $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $z = 2 \cdot 1 + 5 = 7$, тобто точкою перетину прямої і площини є $M(3; 2; 7)$ ►.

**2.3.3. Кут між прямою і площиною.** Розглянемо пряму $L$, яка визначається рівнянням (24), і площину $P$, рівняння якої (25). Знайдемо кут $\psi$ між прямою $L$ і площиною $P$. Очевидно, що $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, тому $\cos\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = \sin\psi$. Оскільки

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}|\ |\overrightarrow{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

то

$$\sin\psi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (30)$$




**Приклад 17**. Знайти кут між прямою $L$ і площиною $P$, якщо пряма й площина задані відповідно рівняннями:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases} \quad (L) \qquad 2x - 5y + z - 2 = 0 \quad (P).$$

◀ Для того щоб записати канонічні рівняння прямої $L$, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x - y = -z, \\ x + 2y = 2 - 2z. \end{cases}$$

Маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -2z+2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{3}z + \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -2z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3}.$$

Якщо взяти $z = -3t$, то дістанемо параметричні рівняння прямої:

$$x = 4t + \frac{2}{3}, \quad y = t + \frac{2}{3}, \quad z = -3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді канонічні рівняння даної прямої такі:

$$\frac{x - 2/3}{4} = \frac{y - 2/3}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Тому, згідно з (30), маємо

$$\sin\psi = \frac{2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = 0,$$

а, отже, $\psi = 0^0$. ▶

## Вправи

**1**. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0$.

**2.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;4)$ і $M_2(3;2;-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$.

**3.** Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.

**4.** Знайти кут між площинами: 1) $2x-3y+3z-1=0$ і $-2x+3y-3z+5=0$; 2) $3x-4y-z-1=0$ і $2x+3y-6z-2=0$.

**5.** Обчислити відстань $d$ від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ і $M_3(4;-5;-2)$.

**6.** Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

**7.** Знайти точку перетину площин $x+2y-z-2=0$, $3x-y-z-3=0$ і $x+2y+z-4=0$.

**8.** Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(1;1;-2)$, $M_2(3;-1;0)$.

**9.** Знайти канонічні та параметричні рівняння прямої $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2z+1=0$.

**10.** Знайти гострий кут між прямими
$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

**11.** Для якого значення $m$ пряма $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$?

**12.** Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

**13.** Знайти кут між прямою $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ і площиною $x+2y+2z+3=0$.

**14.** Знайти відстань від точки $M_1(1;-1;-2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.

**15.** Знайти канонічні й параметричні рівняння прямої, що утворює з осями координат кути $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$ і проходить через точку $M_0(-1;0;5)$.

**16.** Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1; 2; -3)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{2}$.

**17.** Знайти проекцію $M_1$ точки $M(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

**18.** Знайти проекцію $N$ точки $M(4; 3; 10)$ на пряму $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{5}$.

**19.** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3; 2; -1)$ і перетинає вісь $Ox$ під прямим кутом.

**20.** Записати рівняння прямої, яка паралельна осі $Oy$ і проходить через точку $M_0(1; -1; 2)$.

### Відповіді

**1.** $2x - 3z - 27 = 0$. **2.** $4x - 3y - z - 7 = 0$. **3.** $x + y + z + 5 = 0$. **4.** 1) $\varphi = \pi$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. **5.** $d = 4$. **6.** $d = \dfrac{41}{6}$. **7.** $\left(\dfrac{11}{7}; \dfrac{5}{7}; 1\right)$. **8.** $x = t + 3$, $y = -t - 1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. **9.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{z+2}{-19}$; $x = t + 1$, $y = -7t$, $z = -19t + 2$, $t \in \mathbb{R}$. **10.** $60^0$. **11.** $m = -3$. **12.** $(2; -3; 6)$. **13.** $0^0$. **14.** 7. **15.** $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \dfrac{z-5}{-1}$, $x = t - 1$, $y = \sqrt{2}t$, $z = 5 - t$, $t \in \mathbb{R}$. **16.** $4x + 3y + 2z + 4 = 0$. **17.** $M_1(1; 4; -7)$. **18.** $N(3; 6; 8)$. **19.** $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$. **20.** $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{0}$ або $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$

## §3. Пряма на площині

**3.1. Нормальний вектор прямої. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до заданого вектора.** З попереднього параграфа відомо, що пряму в просторі можна задати як перетин двох площин. Розглянемо частинний випадок, коли одна з площин $z = 0$, тобто пряма розглядається на площині $Oxy$:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Якщо у перше рівняння підставити $z = 0$, то дістанемо систему

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{32}$$

що визначає пряму перетину координатної площини $Oxy$ площиною $Ax + By + D = 0$, яка паралельна осі $Oz$.

Нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; 0)$ площини $Ax+By+D = 0$ одночасно є нормальним вектором прямої, що задана системою (32).

Якщо наперед відомо, що пряма розглядається на площині $Oxy$, то друге рівняння системи (32) опускається.

Отже, пряма в $\mathbb{R}^2$ визначається одним рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

яке називається **загальним рівнянням прямої на площині**, якщо коефіцієнти $A$ і $B$ не дорівнюють нулю одночасно. Ми замінили в позначеннях $D$ на $C$ для зручності.

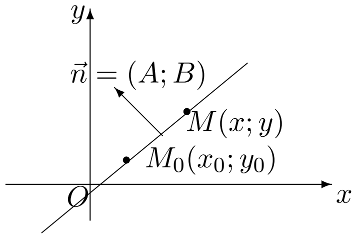
Вектор $\overrightarrow{n} = (A; B)$ називається **нормальним вектором** прямої на площині.

Можна вивести рівняння прямої на площині іншим способом.

Розглянемо пряму $L$ на площині. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ деяка її точка, а $\overrightarrow{n} = (A; B)$ ненульовий вектор, перпендикулярний цій прямій, тобто нормальний вектор даної прямої. Точка $M_0$

і нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ повністю визначають положення прямої $L$ на площині. Візьмемо довільну точку $M(x;y)$ прямої $L$. За умовою вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{n} = (A;B)$, тобто $\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{M_0M} = 0$ або

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (33)$$




Одержане рівняння задовольняють координати довільної точки $M(x;y)$ прямої $L$. Якщо деяка точка $M_1(x_1;y_1)$ не лежить на прямій $L$, то її координати не задовольняють рівняння (33), оскільки в цьому випадку $\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{M_0M_1} \neq 0$. Отже, рівняння (33) є рівнянням прямої $L$. Воно називається **рівнянням прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до заданого вектора**.

**Приклад 1**. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1;3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n} = (2;-5)$.

◄ Скористаємося рівнянням (33), де $A = 2$, $B = -5$, $x_0 = -1$, $y_0 = 3$:

$$2(x + 1) - 5(y - 3) = 0$$

або

$$2x - 5y + 17 = 0. \quad ►$$

**3.2. Точка перетину прямих. Побудова прямої за її рівнянням.** Нехай задано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ($L_1$) та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ($L_2$) і треба знайти точку їхнього перетину. Оскільки ця точка належить кожній з двох заданих прямих, то її координати повинні задовольняти як рівняння першої прямої, так і рівняння другої прямої.

Отже, для знаходження координат точки перетину двох прямих, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок $(x_0, y_0)$, то у цьому випадку прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в одній точці $(x_0; y_0)$. Якщо ж система не має розв'язків, то прямі $L_1$ і $L_2$ не перетинаються, тобто $L_1 \parallel L_2$. У випадку, коли система має безліч розв'язків, то прямі $L_1$ і $L_2$ збігаються.

**Приклад 2**. Знайти точку перетину прямих $2x + y - 1 = 0$ і $x + 2y + 1 = 0$.

◀ Координати шуканої точки перетину знайдемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$$

Маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2+1}{4-1} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2-1}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1,$$

тобто точка перетину $M$ має координати $x = 1$ і $y = -1$. ▶

Для побудови прямої за відомим рівнянням досить знати дві її точки. Щоб знайти кожну з цих точок, задамо довільне значення однієї з її координат, а потім із рівняння одержимо відповідне значення другої координати.

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax+By+C = 0$ обидва коефіцієнти при $x$ і $y$ не дорівнюють нулю, тобто $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то для побудови цієї прямої найкраще знаходити точки її перетину з осями координат.

**Приклад 3**. Побудувати пряму $2x + y - 2 = 0$.

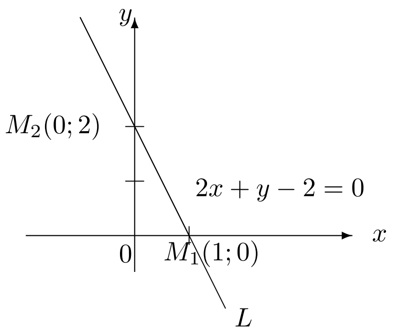
◀ Знайдемо точку $M_1(x_1; y_1)$ перетину даної прямої з віссю $Ox$. Для цього розв'яжемо сумісно їхні рівняння:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Отже, знайдено точку $M_1(1; 0)$ перетину прямої з віссю абсцис. Розв'язуючи аналогічно систему

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

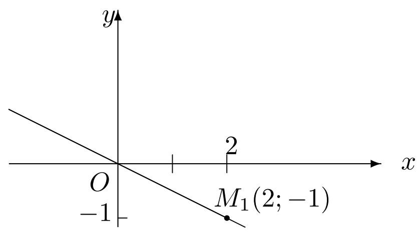
знаходимо точку $M_2(0; 2)$ перетину прямої з віссю ординат. За точками $M_1$ і $M_2$ будуємо нашу пряму




. ▶

**Приклад 4**. Побудувати пряму $x + 2y = 0$.

◀ Очевидно, що задана пряма проходить через точку $O(0; 0)$. Для того щоб знайти другу точку, через яку проходить ця пряма, візьмемо $x = 2$, тоді $2 + 2y = 0$ або $y = -1$. Отже, другою точкою є $M_1(2; -1)$

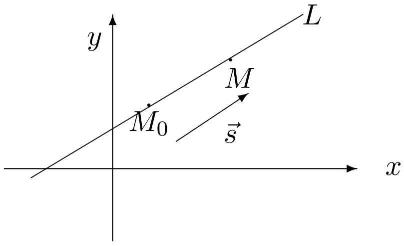



. ▶

## 3.3. Напрямний вектор прямої. Канонічне рівняння прямої.

Розглянемо на площині $Oxy$ довільну пряму

$L$. Її положення повністю визначається заданням будь-якої її точки $M_0(x_0; y_0)$ і ненульового вектора $\overrightarrow{s} = (m; n)$, який паралельний даній прямій або лежить на ній. Цей вектор називається **напрямним вектором прямої $L$.**




Нехай $M(x; y)$ – довільна точка прямої $L$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ і $\overrightarrow{s} = (m; n)$ колінеарні, то їхні координати пропорційні

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{34}$$

Одержане рівняння задовольняють координати довільної точки $M(x; y)$ прямої $L$ і не задовольняють координати точок $M_1(x_1; y_1)$, що не лежать на цій прямій. Воно називається **канонічним рівнянням прямої** $L$.

Якщо пряма $L$ проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно осі $Oy$, то її рівняння $x = x_0$. Напрямний вектор цієї прямої $\overrightarrow{s} = (0; n)$, а тому з (34) одержуємо рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Аналогічно, канонічне рівняння прямої, що паралельна осі $Ox$, має вигляд $y = y_0$ або

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ на площині. Складемо канонічне рівняння прямої, що проходить через ці точки. За її напрямний вектор $\overrightarrow{s}$ візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} =$

$(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Використовуючи формулу (34) при $m = x_2-x_1$, $n = y_2 - y_1$, одержуємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{35}$$

Рівняння (35) називається **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

**Приклад 5**. Скласти рівняння прямої $L$, що проходить через початок координат, перпендикулярно до прямої $L_1$, яка проходить через точки $M_1(4; -3)$ і $M_2(-1; 0)$.

◀ Знайдемо спочатку рівняння прямої $L_1$, що проходить через точки $M_1(4; -3)$ і $M_2(-1; 0)$:

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{3}$$

або

$$3x + 5y + 3 = 0.$$

Рівняння шуканої прямої $L$, яка проходить через точку $O(0; 0)$ має вигляд

$$Ax + By = 0.$$

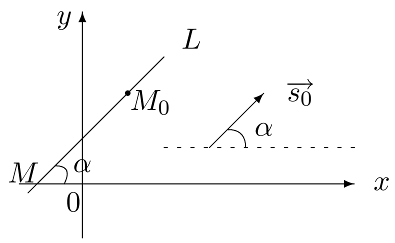
Щоб знайти $A$ і $B$, скористаємося тим, що $L \perp L_1$, отже, нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B)$ прямої $L$ колінеарний напрямному вектору $\overrightarrow{s} = (-5; 3)$ прямої $L_1$, тобто $\dfrac{A}{-5} = \dfrac{B}{3}$ або $A = -\dfrac{5}{3}B$.

Тому рівняння прямої $L$ таке: $-\frac{5}{3}Bx + By = 0$ або $5x - 3y = 0$. ▶

**3.4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих.** Нехай на площині $Oxy$ задано пряму $L$, яка перетинає вісь $Ox$ у точці $M$. Кутом $\alpha$ між прямою $Ox$ і прямою $L$ називається найменший кут, на який треба повернути навколо точки $M$ проти годинникової стрілки вісь $Ox$ до суміщення її з прямою. Якщо пряма збігається з віссю $Ox$ або паралельна до неї, то кут $\alpha$ дорівнює нулю.

Розглянемо на площині $Oxy$ пряму $L$, яка не паралельна осі $Oy$. Її положення повністю визначається кутом $\alpha$ між віссю $Ox$ та прямою $L$ і точкою $M_0(x_0; y_0)$, що належить цій прямій. За напрямний вектор даної прямої візьмемо одиничний вектор

$\overrightarrow{s}_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, який утворює з віссю $Ox$ той самий кут, що й пряма $L$.




Тому в рівнянні (34) треба взяти $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$, а це означає, що воно запишеться у вигляді

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

або

$$y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0).$$

Позначивши $\operatorname{tg}\alpha = k$, останнє рівняння запишемо у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{36}$$

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ називається **кутовим коефіцієнтом прямої**, а рівняння (36) – **рівнянням прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку**.

Запишемо рівняння (36) у вигляді

$$y = kx + b, \tag{37}$$

де $b = y_0 - kx_0$. Рівняння (37) називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**, а ордината $b$ – відрізком, що відтинає пряма на осі $Oy$.

Розглянемо деякі частинні випадки рівняння (37). Якщо $b = 0$, то рівняння (37) набуває вигляду

$$y = kx. \tag{38}$$

У цьому випадку пряма проходить через початок координат.

Інший частинний випадок рівняння (37) одержимо, коли $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$, тобто $\alpha = 0$:

$$y = b. \tag{39}$$

Це рівняння прямої, паралельної осі $Ox$.

Якщо пряма $L$, не перпендикулярна осі $Ox$, задана загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

причому $B \neq 0$, то, розв'язуючи його відносно $y$, дістаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

**Приклад 6**. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -1)$ й утворює з віссю $Ox$ кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

◄ Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Згідно з формулою (36) рівняння прямої має вигляд

$$y + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

або

$$x - \sqrt{3}y - 2 - \sqrt{3} = 0. \quad ►$$

**Приклад 7**. Дано загальне рівняння прямої $2x - 2y - 3 = 0$. Знайти відрізок, який відтинає ця пряма на осі $Oy$, а також кут між віссю $Ox$ і даною прямою.

◄ Розв'язавши дане рівняння відносно $y$, отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = x - \frac{3}{2}$, де $k = \operatorname{tg}\alpha = 1$, $b = -\frac{3}{2}$. Отже, відрізок, що його відтинає пряма на осі ординат, дорівнює $-\dfrac{3}{2}$, а кут $\alpha$ між віссю $Ox$ і даною прямою дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. ►

**3.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих.** Нехай дві прямі $L_1$ і $L_2$ перетинаються в точці $M$. У залежності від того, якими рівняннями визначаються ці прямі, ми одержимо відповідні формули для знаходження кута між ними.

Якщо прямі $L_1$ і $L_2$ задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $(L_1)$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $(L_2)$, то кут між ними

– це кут $\varphi$ між їхніми нормальними векторами $\overrightarrow{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n}_2 = (A_2; B_2)$, а тому

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n}_1 \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1||\overrightarrow{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{40}$$

Якщо прямі $L_1$ і $L_2$ задані своїми канонічними рівняннями $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$ $(L_1)$, $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$ $(L_2)$, то кут між ними – це кут $\varphi$ між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\overrightarrow{s}_2 = (m_2; n_2)$, тобто

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s}_1 \overrightarrow{s}_2}{|\overrightarrow{s}_1||\overrightarrow{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \tag{41}$$

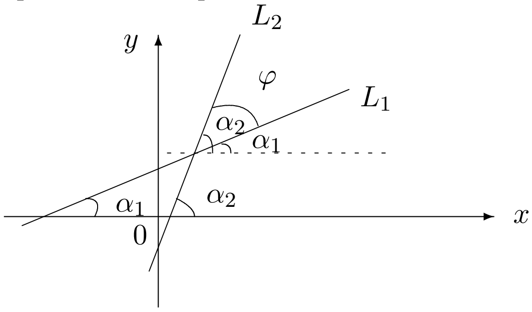
У випадку, коли рівняння прямих $L_1$ і $L_2$ мають вигляд $y = k_1x + b_1$ $(L_1)$ і $y = k_2x + b_2$ $(L_2)$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

або

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \tag{42}$$

оскільки $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. При цьому кут $\varphi$ відраховується у напрямку від прямої $L_1$ до прямої $L_2$.




Опишемо умови паралельності й перпендикулярності прямих $L_1$ і $L_2$. Якщо прямі $L_1$ і $L_2$ задані своїми загальними рівняннями, то

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_1 || \overrightarrow{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{43}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{44}$$

Якщо ж виконується умова $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі $L_1$ і $L_2$ збігаються.

У випадку, коли прямі $L_1$ і $L_2$ задані канонічними рівняннями, то

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 || \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{45}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \tag{46}$$

Якщо $L_1$ і $L_2$ визначаються рівняннями з кутовим коефіцієнтом, то

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \alpha_1 || \alpha_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \tag{47}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + k_1k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1. \tag{48}$$

**Приклад 8**. Знайти кут між прямими $3x+y-6 = 0$ і $x+2y+1 = 0$.

◀ Запишемо дані рівняння у вигляді $y = -3x + 6$ і $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ та скористаємося формулою (42), де $k_1 = -3$, $k_2 = -\frac{1}{2}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-1/2 + 3}{1 + (-3)(-1/2)} = 1,$$

тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. ▶

**Приклад 9**. Знайти рівняння прямої $L$, що проходить через точку $M_0(3; -5)$ паралельно прямій $L_1$, яка проходить через точки $M_1(0; -2)$ і $M_2(-1; 3)$.

◀ Рівняння прямої $L_1$, яка проходить через точки $M_1$ і $M_2$, має вигляд:

$$\frac{x - 0}{-1 - 0} = \frac{y + 2}{3 + 2}$$

або $y = -5x - 2$, де $k_1 = -5$.

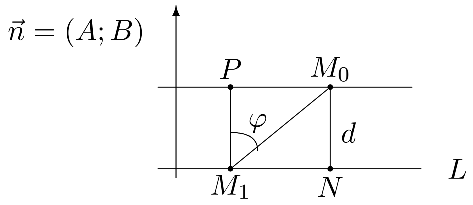
Знайдемо тепер рівняння прямої $L$, скориставшись (36):

$$y + 5 = -5(x - 3)$$

або

$$y = -5x + 10. \quad \blacktriangleright$$

### 3.6. Відстань від точки до прямої.




Нехай треба знайти відстань $d$ від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $L$, що задана рівнянням $Ax + By + C = 0$. Візьмемо на прямій $L$ довільну точку $M_1(x_1; y_1)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1)$. Через точку $M_0$ проведемо пряму паралельно до прямої $L$. Тоді

$$d = |\overrightarrow{M_0N}| = |\overrightarrow{PM_1}| = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = ||\overrightarrow{M_1M_0}| \cos \varphi|.$$

Знайдемо $\cos \varphi$, де $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{M_1M_0}, \overrightarrow{n}})$. Оскільки $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M_1M_0}|}$, то

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M_1 \in L$, тому $Ax_1 + By_1 = -C$, а отже,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{49}$$

**Приклад 10**. Знайти відстань від точки $C$, яка ділить відрізок із кінцями $A(-2; 1)$ і $B(3; 2)$ у відношенні 3:2, до прямої $2x-5y+1 = 0$.

◀ Знайдемо спочатку координати точки $C$:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda};$$

$$x_C = \frac{-2 + \frac{3}{2} \cdot 3}{1 + 3/2} = 1, \quad y_C = \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot 2}{1 + 3/2} = \frac{8}{5}.$$

Тоді відстань $d$ від точки $C(1;\frac{8}{5})$ до прямої $2x-5y+1=0$ знаходимо за формулою (49):

$$d=\frac{|2\cdot 1-5\cdot\frac{8}{5}+1|}{\sqrt{4+25}}=\frac{5}{\sqrt{29}}. \quad ▶$$

**Приклад 11**. Трикутник задано вершинами $A(1;2)$, $B(-2;1)$ і $C(2;3)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини $A$.

◀ Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки $B(-2;1)$ і $C(2;3)$:

$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-3}{1-3} \quad \text{або} \quad x-2y+4=0.$$

Шукану довжину висоти знайдемо за формулою (49), як відстань від точки $A(1;2)$ до прямої $BC$:

$$d=\frac{|1-2\cdot 2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad ▶$$

### Вправи

**1.** Дано пряму $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$: 1) паралельно до заданої прямої; 2) перпендикулярно до заданої прямої.

**2.** Відомі середини сторін трикутника: $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ і $M_3(3;-4)$. Знайти рівняння його сторін.

**3.** Знайти кут між прямими: 1) $5x-y+7=0$ та $2x-3y+1=0$; 2) $y=2x-3$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

**4.** Знайти відстань від точки $M_0(2;-1)$ до прямої, яка відтинає на осях координат відрізки величиною $a=8$ і $b=6$.

**5.** Знайти рівняння прямої, яка відображає зміну врожайності 1 га орної землі протягом сімнадцяти років, якщо в перший рік з 1 га було зібрано 21 ц зернових, а в останній – 37 ц.

**6.** При яких $\alpha$ і $\beta$ прямі $\alpha x-2y-1=0$ та $6x-4y-\beta=0$ 1) мають спільну точку; 2) паралельні; 3) збігаються?

**7.** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3)$ на однакових відстанях від точок $M_1(5;-1)$ і $M_2(3;7)$.

**8.** Задано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$ і $C(12;-1)$. Скласти рівняння висоти трикутника, яка проведена з вершини $C$.

**9.** Довести, що прямі $3x-5y+7=0$ і $10x+6y-3=0$ перпендикулярні.

**10.** Написати рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x - 3y - 1 = 0$ і $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = x + 1$.

**11.** Через точки перетину прямої $x - 2y + 6 = 0$ з осями координат провести прямі до неї перпендикулярні.

**12.** Задано вершини трикутника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$. Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині $A$.

**13.** Знайти координати точки, симетричної точці $M(-2; 9)$ відносно прямої $2x - 3y + 18 = 0$.

**14.** Записати рівняння прямих, на яких лежать бісектриси кутів між прямими $3x - 4y + 7 = 0$ і $5x + 12y - 1 = 0$.

**15.** Записати рівняння прямих, на яких лежать катети прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відомі координати вершини $C(5; -1)$ прямого кута й рівняння гіпотенузи $2x - 3y + 5 = 0$.

**16.** При яких значеннях параметра $a$ пряма

$$(a - 3)x + (a^2 - 4)y + a^2 - 7a + 1 = 0$$

1) паралельна осі $Ox$; 2) паралельна осі $Oy$; 3) проходить через початок координат.

## Відповіді

**1.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **2.** $7x - 2y - 12 = 0$; $5x + y - 28 = 0$; $2x - 3y - 18 = 0$. **3.** 1) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} \dfrac{3}{7}$. **4.** $d = 4{,}4$. **5.** $y = x + 20$. **6.** 1) $\alpha \neq 3$, $\beta$ – довільне; 2) $\alpha = 3$, $\beta$ – довільне; 3) $\alpha = 3$, $\beta = 2$. **7.** $4x + y + 5 = 0$ або $y - 3 = 0$. **8.** $3x + 2y - 34 = 0$. **10.** $7x + 7y - 6 = 0$. **11.** $2x + y + 12 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. **12.** $\dfrac{x - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \dfrac{y + 2}{\frac{4}{3} + 2}$ або $5x + y - 3 = 0$. **13.** $(2; 3)$. **14.** $7x - 56y + 48 = 0$, $32x + 4y + 43 = 0$. **15.** $y + 1 = 5(x - 5)$, $y + 1 = -\dfrac{1}{5}(x - 5)$. **16.** 1) $a = 3$; 2) $a = \pm 2$; 3) $a_1 = 2$, $a_2 = 5$.

## §4. Криві другого порядку

**4.1. Рівняння кривої другого порядку.** На площині, в деякій прямокутній системі координат $Oxy$ розглянемо рівняння другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (50)$$

де $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ – задані дійсні числа і, крім того, принаймні одне з чисел $A$, $B$ або $C$ відмінне від нуля. Сукупність точок площини, координати яких задовольняють рівняння (50), називається **кривою другого порядку**. Може трапитися, що немає точок із дійсними координатами, які задовольняють рівняння (50). У цьому випадку кажуть, що рівняння (50) визначає уявну криву другого порядку.

Раніше ми вивели рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом $R$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (51)$$

Якщо розкрити дужки в рівнянні (51), то дістанемо рівняння кола у такому вигляді:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Це рівняння є рівнянням вигляду (50), де коефіцієнт $B = 0$, а $A = C$. Легко бачити, що рівняння (50), у якому $A = C$, а $B = 0$ визначає коло, якщо воно взагалі визначає деякий реальний об'єкт.

**Приклад 1.** Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ визначає коло і знайти координати його центра й радіус.

◀ Оскільки $A = C$ і $B = 0$, то рівняння визначає коло. Щоб знайти центр і радіус даного кола, запишемо рівняння у вигляді

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 16$$

або

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2.$$

Отже, центр кола $M_0(1; -2)$, а радіус $R = 4$. ▶

**Приклад 2.** Довести, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ не визначає ніякої дійсної лінії.

◀ Виділимо у рівнянні повні квадрати:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) = -4,$$

або

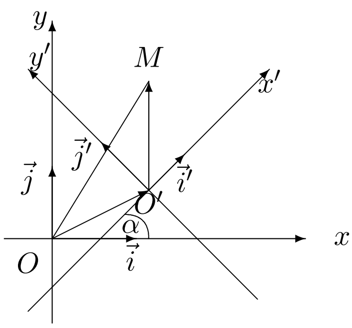
$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = -4.$$

Оскільки ліва частина не може бути від'ємною, а права частина є від'ємним числом, то дане рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Кажуть, що рівняння задає уявне коло. ▶

У наступних пунктах ми розглянемо інші криві другого порядку: еліпс, гіперболу й параболу.

Важливу роль при вивченні питання про те, яку лінію визначає рівняння (50), відіграє перетворення системи координат на площині.

**4.2. Перетворення систем координат на площині.** Нехай є дві декартові прямокутні системи координат $Oxy$ і $O'x'y'$.




Розглянемо деяку точку $M$, координатами якої в системі $Oxy$ є $(x; y)$, а в системі $Ox'y'$ – $(x'; y')$. Вважатимемо, що точка $O'$ має в системі координат $Oxy$ координати $(a; b)$. Знайдемо зв'язок між старими координатами $(x; y)$ точки $M$ і новими $(x'; y')$.

Маємо

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \tag{52}$$

де $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$, $\overrightarrow{OO'} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$.

Розкладемо вектори $\vec{i}'$ та $\vec{j}'$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$. Якщо позначити через $\alpha$ кут, який утворює вісь $O'x'$ із віссю $Ox$, то матимемо:

$$\vec{i}' = (\text{пр}_{Ox}\vec{i}')\,\vec{i} + (\text{пр}_{Oy}\vec{i}')\,\vec{j}, \quad \vec{j}' = (\text{пр}_{Ox}\vec{j}')\,\vec{i} + (\text{пр}_{Oy}\vec{j}')\,\vec{j}$$

або

$$\vec{i'} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}, \quad \vec{j'} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}. \tag{53}$$

Тоді рівність (52) можна подати у вигляді

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + x'(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) +$$

$$+ y'(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}).$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = b + x' sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{54}$$

Формули (54) називаються **формулами перетворення** декартової системи координат на площині.

Якщо $\alpha = 0$, то маємо **паралельне перенесення** системи координат в точку $O'(a; b)$:

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases}$$

У випадку, коли $O = O'$, одержуємо **формули повороту осей**:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x' sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{55}$$

**Приклад 3.** Виразити старі координати точки $x$ і $y$ через її нові координати $x'$, $y'$ при повороті осей на кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

◀ Оскільки $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то згідно з формулами (55) маємо

$$x = x'\frac{1}{2} - y'\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = x'\frac{\sqrt{3}}{2} + y'\frac{1}{2}$$

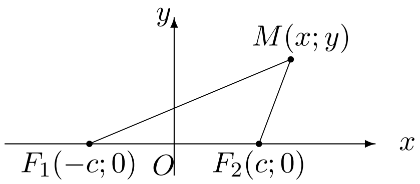
або

$$x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y'), \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'). \quad ▶$$

**4.3. Еліпс. Еліпсом** називається множина усіх точок площини, сума відстаней кожної з яких від двох даних точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Позначимо фокуси через $F_1$ і $F_2$, відстань між ними – через $2c$, а сталу величину, що дорівнює сумі відстаней кожної точки еліпса до фокусів, через $2a$. Згідно з умовою $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Побудуємо декартову систему координат так, щоб фокуси $F_1$ і $F_2$ лежали на осі абсцис, а початок координат збігався із серединою відрізка $F_1F_2$. У такій системі координат фокуси мають координати $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$.




Виведемо рівняння еліпса у вибраній системі координат. Візьмемо довільну точку $M(x;y)$ еліпса. Згідно з означенням еліпса

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Скориставшись формулою для відстані між двома точками, одержимо $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, а тому

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{56}$$

Для спрощення цього рівняння запишемо його у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

або після очевидних перетворень

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Тепер, після піднесення до квадрата і подальшого спрощення, матимемо

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2((x-c)^2+y^2)$$

або

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{57}$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2$ є додатним числом. Уведемо позначення
$$a^2 - c^2 = b^2. \tag{58}$$
Тоді рівняння (57) запишеться у вигляді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{59}$$

Згідно з означенням еліпса координати будь-якої його точки задовольняють рівняння (56). Оскільки рівняння (59) є наслідком рівняння (56), то його також задовольняють координати довільної точки еліпса.

Можна довести, що координати точок, які не лежать на еліпсі, не задовольняють рівняння (59). Отже, рівняння (59) є рівнянням еліпса. Воно називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Вивчимо форму еліпса, користуючись його канонічним рівнянням. Зауважимо, що дане рівняння містить тільки парні степені $x$ і $y$. Це означає, що будь-яка точка $M(x; y)$ належить еліпсу одночасно з точками $M_1(x; -y)$, $M_2(-x; y)$ і $M_3(-x; -y)$, які симетричні до точки $M$ відносно осей $Ox$ і $Oy$. Отже, еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, які у вибраній системі координат збігаються з осями координат. Осі симетрії еліпса надалі називатимемо **осями** еліпса, а точку їхнього перетину – **центром** еліпса. Вісь, на якій розміщені фокуси (у даному випадку вісь абсцис), називається **фокальною віссю**.

Визначимо форму еліпса у першій чверті. Для цього розв'яжемо рівняння (59) відносно $y$:
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, що тут $0 \le x \le a$, оскільки вираз під знаком кореня повинен бути невід'ємним. При зростанні $x$ від 0 до $a$ величина $y$ зменшується від $b$ до $a$. Частина еліпса, яка лежить у першій чверті, це дуга, обмежена точками $B(0; b)$ і $A(a; 0)$, які лежать на осях координат. Скориставшись тепер симетрією еліпса, одержуємо, що еліпс має форму, яка зображена на рис. 1.

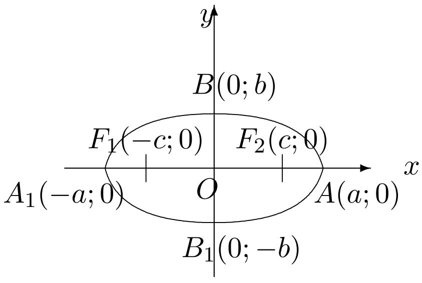



Рис. 1

Точки перетину еліпса з осями називається **вершинами** еліпса. Із симетрії еліпса випливає, що крім вершин $A(a;0)$ і $B(0;b)$ еліпс має ще дві вершини $A_1(-a;0)$ і $B_1(0;-b)$. Відрізки $AA_1$ і $BB_1$, які з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їхні довжини $2a$ і $2b$, називаються відповідно **великою** й **малою осями** еліпса. Числа $a$ і $b$ називаються відповідно **великою** й **малою півосями** еліпса.

Відношення $\dfrac{c}{a}$ половини відстані між фокусами до більшої півосі еліпса називається **ексцентриситетом** еліпса і позначається літерою $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{60}$$

Оскільки $c < a$, то ексцентриситет еліпса менший одиниці, тобто $\varepsilon < 1$. Ексцентриситет характеризує форму еліпса. Справді, із формули (58) випливає, що $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$. Звідси видно, що чим менший ексцентриситет еліпса, тим менше відрізняється його мала піввісь $b$ від великої півосі $a$, тобто тим менше витягнутий еліпс уздовж фокальної осі.

У граничному випадку при $b = a$ одержимо коло радіуса $a$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, або $x^2 + y^2 = a^2$. При цьому $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, і фокуси еліпса збігаються з центром кола. Ексцентриситет кола дорівнює нулю: $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$.

**Приклад 4.** Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь $a = 5$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

◄ Згідно з умовою $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0,6$, а тому половина відстані між фокусами $c = a \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Отже, шукане канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad \blacktriangleright$$

**Приклад 5.** Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь $a = 4$ і він проходить через точку $M_0(2; -3)$.

◀ Канонічне рівняння еліпса при $a = 4$ має вигляд

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Оскільки даний еліпс проходить через точку $M_0$, то її координати повинні задовольняти рівняння еліпса, тобто

$$\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1.$$

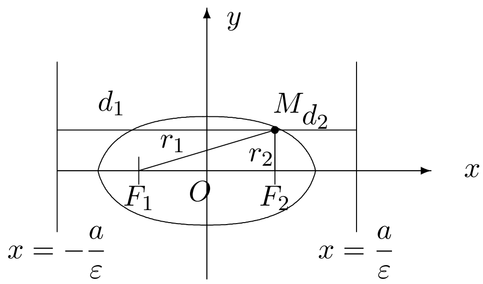
Звідси одержуємо,що $b^2 = 12$, а тому шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \quad \blacktriangleright$$

**Директрисами** еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі еліпса і симетрично розміщені відносно центра кривої на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Оскільки для еліпса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$, а це означає, що директриси розміщені зовні еліпса. Рівняння директрис еліпса

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$



Доведено [6], що відношення довжини фокального радіуса довільної точки еліпса до відстані цієї точки до відповідної директриси є сталою величиною, що дорівнює ексцентриситету, тобто $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ і $\dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ еліпса можна обчислювати за формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

**4.4. Гіпербола. Гіперболою** називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней кожної з яких від двох даних точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, що не дорівнює нулю і менша від відстані між фокусами.

Позначимо відстань між фокусами $F_1$ і $F_2$ через $2c$, а сталу величину, що дорівнює модулю різниці відстаней від кожної точки гіперболи до фокусів, через $2a$, причому $0 < 2a < 2c$ або $0 < a < c$.

Як й у випадку еліпса виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси $F_1$ і $F_2$, а за початок координат візьмемо середину відрізка $F_1F_2$. У даній системі координат фокуси мають координати $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Виведемо рівняння гіперболи у вибраній системі координат. Згідно з означенням гіперболи для довільної точки $M(x; y)$ гіперболи маємо

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

або

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Оскільки $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ і $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (61)$$

Після спрощень, подібних до тих, які проведено при виведенні рівняння еліпса, дістанемо рівняння

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \qquad (62)$$

яке є наслідком рівняння (61).

Очевидно, що це рівняння подібне до рівняння (57). Однак у рівнянні (62) різниця $a^2 - c^2 < 0$, оскільки $a < c$. Тому покладемо

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{63}$$

Тоді рівняння (62) набуде вигляду

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{64}$$

Воно називається **канонічним рівнянням гіперболи**. Рівняння (64), яке є наслідком рівняння (61), задовольняють координати будь-якої точки гіперболи і не задовольняють координати точки, що не лежить на гіперболі.

Вивчимо форму гіперболи, користуючись її канонічним рівнянням. Це рівняння містить лише парні степені, а тому гіпербола має дві осі симетрії, які збігаються з координатними осями. Надалі осі симетрії гіперболи називатимемо **осями** гіперболи, а точку їхнього перетину – **центром** гіперболи. Вісь гіперболи, на якій розміщені фокуси, називатимемо **фокальною віссю**. Дослідимо формулу гіперболи у першій чверті, де

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{65}$$

Тут $x \geq a$, оскільки під знаком кореня повинен бути невід'ємний вираз. При зростанні $x$ від $a$ до $= +\infty$ величина $y$ зростає від 0 до $+\infty$. Отже, частина гіперболи, яка лежить у першій чверті, є дуга $AM$, що зображена на рисунку.

Оскільки гіпербола розміщена симетрично відносно координатних осей, то ця крива має вигляд, який зображений на рис. 2. Точки перетину гіперболи з фокальною віссю називаються її **вершинами**. Покладаючи $y = 0$ у рівняння гіперболи, знайдемо абсциси її вершин $x = \pm a$. Отже, гіпербола має дві вершини $A(a; 0)$ і $A_1(-a; 0)$. З віссю ординат гіпербола не перетинається. Справді, поклавши в рівнянні гіперболи $x = 0$, дістанемо для $y$ уявні вирази: $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Тому фокальна вісь гіперболи називається **дійсною віссю**, а вісь симетрії, перпендикулярна до фокальної осі, – **уявною віссю** гіперболи.

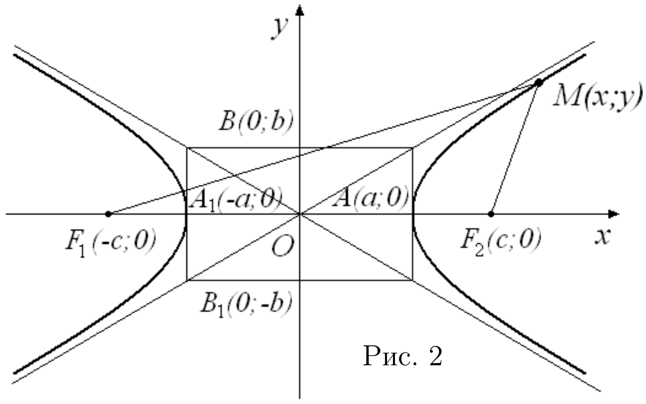



Рис. 2

**Дійсною віссю** називають також відрізок довжиною $2a$, який з'єднує вершини гіперболи. Відрізок, довжиною $2b$, який з'єднує точки $B(0;b)$ і $B_1(0;-b)$ називається **уявною віссю** гіперболи. Числа $a$ і $b$ називаються відповідно **дійсною** й **уявною півосями** гіперболи. Можна довести, що при досить великих за абсолютною величиною $x$ точки графіка гіперболи як завгодно близькі до прямих

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \tag{66}$$

які називаються **асимптотами** гіперболи.

Для побудови графіка гіперболи зручно спочатку побудувати прямокутник із центром у початку координат і зі сторонами, паралельними координатним осям $Ox$ і $Oy$, довжини яких дорівнюють відповідно $2a$ і $2b$. Цей прямокутник називають **основним**. Кожна з його діагоналей, необмежено продовжена в обидва боки, є асимптотою. Далі очевидно, як будувати графік гіперболи.

Відношення половини відстані між фокусами до дійсної півосі гіперболи називається **ексцентриситетом** гіперболи й позначається літерою $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{67}$$

Оскільки для гіперболи $c > a$, то ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Справді, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Звідси видно, що чим менший ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення $\frac{b}{a}$ її півосей. Відношення $\frac{b}{a}$ визначає форму основного прямокутника гіперболи, а отже, і форму самої гіперболи. Чим менший ексцентриситет гіперболи, тим витягнутіший у напрямку фокальної осі її основний прямокутник.

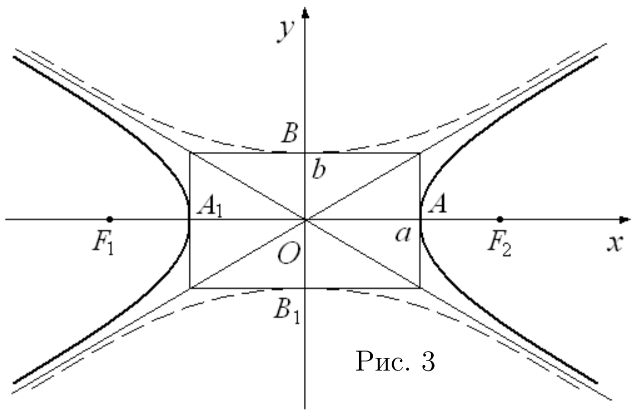



Рис. 3

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

також визначає гіперболу. Вона зображена на рис. 3 пунктирними лініями; її вершини лежать на осі $Oy$. Ця гіпербола називається **спряженою** до гіперболи (64). Обидві гіперболи мають одні й ті самі асимптоти.

Гіпербола називається рівнобічною, якщо її дійсна піввісь дорівнює уявній півосі, тобто $a = b$. Канонічне рівняння рівнобічної гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

або

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптотами рівнобічної гіперболи є прямі

$$y = x \quad \text{і} \quad y = -x,$$

тобто бісектриси першого й третього координатних кутів.

Ексцентриситет рівнобічної гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{a} = \sqrt{2}.$$

**Приклад 6.** Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її фокусами дорівнює 26, а ексцентриситет – $\dfrac{13}{12}$.

◀ Згідно з умовою $2c = 26$, тобто $c = 13$, а $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$, звідки випливає, що $a = 12$. Тоді $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1. \quad ▶$$

**Приклад 7.** Гіпербола, осі якої збігаються з осями координат, проходить через точки $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ і $M_2(4; -2)$. Знайти її канонічне рівняння.

◀ Шукане канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a$ і $b$ невідомі. Оскільки гіпербола проходить через точки $M_1$ і $M_2$, то їхні координати задовольняють рівняння гіперболи, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{(-3)^2}{a^2} - \dfrac{(\sqrt{2}/2)^2}{b^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{4^2}{a^2} - \dfrac{(-2)^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{1/2}{b^2} = 1, \\[2ex] \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1. \end{cases}$$

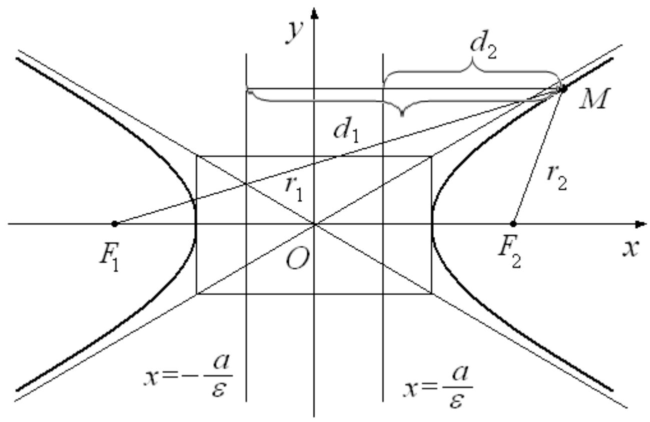
Звідси знаходимо $a^2 = 8$, $b^2 = 4$, а тому рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad \blacktriangleright$$

**Директрисами гіперболи** називаються дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі гіперболи і симетрично розміщені відносно її центра на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Звідси випливає, що директриси гіперболи розміщені всередині смуги, де немає жодної точки гіперболи.

Як і у випадку еліпса відношення довжини фокального радіуса кожної точки гіперболи до відстані цієї точки від відповідної директриси є сталою величиною, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи, тобто $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ і $\dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ [6].




**Приклад 8.** Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки $M$ гіперболи до директриси дорівнює 4. Знайти відстань від точки $M$ до фокуса, однобічного з цією директрисою.

$\blacktriangleleft$ Оскільки $\frac{r}{d} = \varepsilon$, то $\frac{r}{4} = 3$ або $r = 12$. $\blacktriangleright$

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ гіперболи обчислюються за формулами:

1)якщо точка $M$ лежить на правій вітці гіперболи, то

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a;$$

2) якщо ж точка $M$ лежить на лівій вітці гіперболи, то

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a.$$

**4.5. Парабола. Параболою** називається множина точок площини, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки $F$, яка називається **фокусом**, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої $L$, яка називається **директрисою**.

Для виведення рівняння параболи введемо на площині прямокутну систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус параболи перпендикулярно до директриси і була напрямлена від директриси до фокуса. За початок координат візьмемо середину відрізка між фокусом і директрисою.

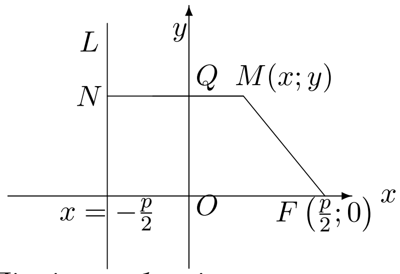
Нехай $M(x;y)$ – довільна точка параболи. Позначимо через $r$ відстань від точки $M$ до фокуса $F$, тобто $r = FM$, через $d$ – відстань від точки $M$ до директриси, а через $p$ – відстань від фокуса до директриси.

Величину $p$ називають **параметром** параболи. Точка $M$ лежатиме на параболі тоді й тільки тоді, коли

$$r = d,$$

тобто

$$MF = MN.$$




З рисунка випливає, що $MN = NQ + QM = \dfrac{p}{2} + x$, а $MF = \sqrt{(x - \dfrac{p}{2})^2 + (y-0)^2}$. Отже,

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Піднісши обидві частини до квадрата, дістанемо

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

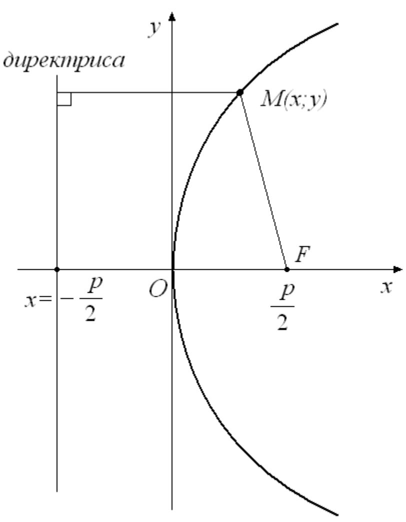
або

$$y^2 = 2px. \tag{68}$$

Рівняння (68) називається **канонічним рівнянням параболи**. Його задовольняють координати довільної точки параболи. Можна довести, що координати точок, що не лежать на параболі, не задовольняють рівняння (68).

Дослідимо форму параболи за її рівнянням (68). Оскільки це рівняння містить $y$ тільки в парному степені, то парабола симетрична відносно осі $Ox$. Отже, досить розглянути тільки ту її частину, що лежить у верхній півплощині. Для цієї частини $y > 0$, тому, розв'язавши рівняння (68) відносно $y$, одержимо

$$y = \sqrt{2px}. \tag{69}$$




З рівності (69) випливає: 1) якщо $x < 0$, то лівіше від осі $Oy$ немає жодної точки параболи; 2) якщо $x = 0$, то $y = 0$, а це означає, що початок координат належить параболі; 3) при необмеженому зростанні $x$ величина $y$ також необмежено зростає.

Отже, змінна точка $M(x; y)$, переміщуючись параболою зі зростанням $x$, виходить із початку координат і рухається вправо і вверх, причому при $x \to +\infty$ точка нескінченно віддаляється як від осі $Oy$, так і від осі $Ox$. Відобразивши симетрично розглянуту частину параболи відносно осі $Ox$, дістанемо всю параболу, що задана рівнянням (68).

Вісь симетрії параболи називається **фокальною віссю**. Точка $O$ перетину параболи з віссю симетрії називається її **вершиною**.

Парабола, рівняння якої $y^2 = -2px$, $p > 0$, розміщена зліва від осі ординат (рис. 4,а). Вершина цієї параболи збігається з початком координат, а віссю симетрії є вісь $Ox$.

Рівняння $x^2 = 2py$, $p > 0$ є рівнянням параболи, вершина якої збігається з початком координат,а віссю симетрії є вісь $Oy$ (рис. 4, б). Ця парабола лежить вище осі абсцис. Рівняння $x^2 = -2py$, $p > 0$ визначає параболу, що лежить нижче від осі $Ox$, з вершиною в початку координат (рис. 4,в).

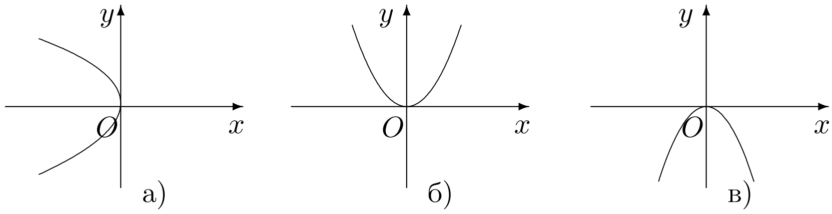



Рис. 4

**Приклад 9.** Для параболи $y^2 = 6x$ знайти рівняння директриси і координати фокуса.

◀ Порівнюючи рівняння $y^2 = 6x$ із канонічним рівнянням параболи (69), одержимо, що $2p = 6$, або $p = 3$. Оскільки директриса параболи має рівняння $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координати $(\frac{p}{2}; 0)$, то отримаємо, що рівняння директриси нашої параболи $x = -\frac{3}{2}$, а фокус $F(\frac{3}{2}; 0)$. ▶

**Зауваження.** Парабола має лише один фокус, а довжина її осі необмежена. Отже, означення ексцентриситету, яке аналогічне тому, що ми мали у випадку гіперболи та еліпса, не має змісту. Тому у випадку параболи домовляються, що $\varepsilon = 1$. Ця домовленість грунтується на тому, що для еліпса і гіперболи $\frac{r}{d} = \varepsilon$, а для параболи $\frac{r}{d} = 1$.

**4.6. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до найпростішого вигляду.** Вигляд рівняння кривої залежить від вибору системи координат. У різних системах координат для однієї й тієї самої кривої можна дістати рівняння різної складності. Тому виникає задача спрощення рівняння даної кривої за допомогою перетворення систем координат. Таке спрощення дозволяє одержати простіше рівняння і за його виглядом визначити тип кривої, тобто вияснити чи є крива еліпсом, гіперболою і т.п.

Розглянемо загальне рівняння лінії другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (70)$$

де коефіцієнти $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ і $F$ – довільні числа, і, крім того, $A$, $B$ і $C$ не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

**Теорема.** *Якщо $AC - B^2 \neq 0$, то за допомогою паралельного перенесення і наступного повороту осей координат рівняння (70) зводиться до вигляду*

$$\overline{A}\ \overline{x}^2 + \overline{C}\ \overline{y}^2 + \overline{F} = 0, \qquad (71)$$

*де $\overline{A}$, $\overline{C}$, $\overline{F}$ – деякі числа; $(\overline{x};\overline{y})$ – координати точки в новій системі координат.*

◀ Зробимо паралельне перенесення системи координат за формулами

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0. \qquad (72)$$

Підставивши (72) у (70), одержимо в нових координатах рівняння

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \qquad (73)$$

де

$$D' = Ax_0 + By_0 + D; \quad E' = Bx_0 + Cy_0 + E;$$

$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

У рівнянні (73) коефіцієнти $D'$ і $E'$ перетворюються в нуль, якщо підібрати координати точки $(x_0; y_0)$ так, щоб виконувались рівності

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \qquad (74)$$

Оскільки $AC - B^2 \neq 0$, то система (74) має єдиний розв'язок відносно $x_0$, $y_0$.

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи (74), то рівняння (73) запишеться у вигляді

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \tag{75}$$

Нехай тепер прямокутна система координат $O'\overline{x}\,\overline{y}$ одержана за допомогою повороту на кут $\alpha$ системи $O'x'y'$. Тоді координати $x'$, $y'$ зв'язані з координатами $\overline{x}$, $\overline{y}$ формулами

$$x' = \overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\sin\alpha, \quad y' = \overline{x}\sin\alpha + \overline{y}\cos\alpha. \tag{76}$$

Підставивши (76) у (75), одержимо рівняння

$$\overline{A}\overline{x}^2 + 2\overline{B}\overline{x}\ \overline{y} + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{F} = 0, \tag{77}$$

де

$$\overline{A} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha;$$

$$\overline{B} = -A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\overline{C} = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha, \quad \overline{F} = F'.$$

Виберемо $\alpha$ так, щоб коефіцієнт $\overline{B}$ у рівнянні (77) перетворився в нуль. Ця вимога приводить до знаходження $\alpha$ з рівняння

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

Якщо $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$, і можна взяти $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Якщо ж $A \neq C$, то беремо $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$, і рівняння (77) набуває вигляду

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{F} = 0,$$

що й доводить теорему. ►

**Класифікація ліній другого порядку.** Коефіцієнти $A$, $B$ і $C$ при старших членах рівняння (70) при паралельному перенесенні осей координат, як випливає з доведення теореми, не змінюються, але вони змінюються при повороті осей координат. У той же час вираз $AC - B^2$ залишається незмінним як при перенесенні, так і при повороті осей, тобто не залежить від перетворення координат. Цей факт є очевидним при паралельному перенесенні осей координат. Доведемо його для випадку повороту осей. Маємо

$$\overline{AC} - \overline{B}^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\times$$
$$\times(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha) - ((C-A)\sin\alpha\cos\alpha +$$
$$+B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha))^2$$

або

$$\overline{AC} - \overline{B}^2 = AC(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - B^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = AC - B^2,$$

що й треба було довести.

Величина $AC - B^2$ називається **інваріантом** загального рівняння лінії другого порядку.

У залежності від знаку величини $AC - B^2$ лінії другого порядку діляться на такі три типи: 1) еліптичний, якщо $AC - B^2 > 0$; 2) гіперболічний, якщо $AC - B^2 < 0$; 3) параболічний, якщо $AC - B^2 = 0$.

Розглянемо лінії різних типів.

1) **Еліптичний** тип. Оскільки $AC - B^2 > 0$, то згідно з теоремою загальне рівняння лінії другого порядку можна звести до вигляду

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \tag{78}$$

Можливі такі випадки: а) $A > 0$, $C > 0$ (випадок $A < 0$, $C < 0$ зводиться до випадку $A > 0$, $C > 0$ множенням рівняння на $(-1)$) і $F < 0$. Перенесемо $F$ у праву частину рівняння (78) і поділимо на нього. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a^2 = -\dfrac{F}{A}$, $b^2 = -\dfrac{F}{C}$. Порівнявши одержане рівняння з рівнянням еліпса (59), робимо висновок, що воно є канонічним рівнянням еліпса.

б) $A > 0$, $C > 0$ і $F > 0$. Тоді аналогічно як і вище рівняння (78) запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Це рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Воно називається **рівнянням уявного еліпса**.

в) $A > 0$, $C > 0$, $F = 0$. Рівняння (78) має вигляд

$$a^2x^2 + c^2y^2 = 0,$$

де $a^2 = A$, $c^2 = C$. Його задовольняють координати лише однієї точки. Таке рівняння називається рівнянням пари уявних прямих, що перетинаються.

2) **Гіперболічний** тип. Оскільки $AC - B^2 < 0$, то згідно з теоремою загальне рівняння лінії другого порядку зводиться до вигляду (78).

Можливі такі випадки:

а) $A > 0$, $C < 0$ (випадок $A < 0$, $C > 0$ зводиться до цього випадку множенням рівняння (78) на $(-1)$) і $F \neq 0$. Нехай, наприклад, $F < 0$. Перенесемо $F$ у праву частину рівняння і поділимо на нього. Рівняння (78) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a^2 = -\frac{F}{A}$, $b^2 = -\frac{F}{C}$. Одержане рівняння є канонічним рівнянням гіперболи.

б) $A > 0$, $C < 0$ і $F = 0$. Рівняння (78) набуває вигляду

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \quad \text{або} \quad (ax - cy)(ax + cy) = 0,$$

де $a^2 = A$, $c^2 = -C$. Останнє рівняння задовольняють тільки координати точок площини, що розміщені на прямих $ax - cy = 0$ і $ax + cy = 0$, які перетинаються у початку координат, і, отже, маємо пару **прямих, що перетинаються**.

3) **Параболічний** тип. Якщо $AC - B^2 = 0$, то поворотом осей координат на кут $\alpha$, як і в теоремі, загальне рівняння лінії другого порядку зводиться до вигляду

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0. \tag{79}$$

Тут $AC = 0$ і, отже, один із коефіцієнтів $A$ і $C$ дорівнює нулю.

Нехай $A = 0$, $C \neq 0$. Подамо рівняння (79) у вигляді

$$C(y^2 + \frac{2E}{C}y + (\frac{E}{C})^2) + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0,$$

або

$$C(y + \frac{E}{C})^2 + 2Dx + \overline{F} = 0,$$

де $\overline{F} = F - \frac{E^2}{C}$. Зробимо паралельне перенесення системи координат

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{E}{C}.$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$Cy'^2 + 2Dx' + \overline{F} = 0. \tag{80}$$

Можливі такі випадки;

а) $D \neq 0$. Запишемо рівняння (80) у вигляді

$$Cy'^2 + 2D(x + \frac{\overline{F}}{2D}) = 0.$$

Перейдемо до нових координат за формулами

$$\overline{x} = x' + \frac{\overline{F}}{2D}, \quad \overline{y} = y'.$$

Тоді дістанемо рівняння

$$C\overline{y}^2 + 2D\overline{x} = 0,$$

або

$$\overline{y}^2 = 2p\overline{x}, \tag{81}$$

де $p = -\dfrac{D}{C}$. Рівняння (81) є канонічним рівнянням параболи.

б) $D = 0$. Рівняння (80) у цьому випадку має вигляд

$$CY'^2 + \overline{F} = 0. \tag{82}$$

Якщо $C$ і $\overline{F}$ мають різні знаки, то, покладаючи $\left|\frac{\overline{F}}{C}\right| = a^2$, рівняння запишемо так:

$$(y' - a)(y' + a) = 0.$$

Воно визначає **пару паралельних прямих**.

Якщо $C$ і $\overline{F}$ мають однакові знаки, то рівняння (82) набуває вигляду

$$y'^2 + a^2 = 0.$$

Це рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Воно називається рівнянням **пари уявних паралельних прямих**.

Якщо ж $\overline{F} = 0$, то рівняння (82) буде таким

$$y'^2 = 0.$$

Воно визначає вісь $O'x'$. Його можна розглядати також як граничний випадок при $\overline{F} \to 0$, тобто як рівняння **пари прямих, що збігаються**.

**Приклад 10.** Яку лінію визначає рівняння

$$y = x^2 - 4x + 3?$$

◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$y + 1 = x^2 - 4x + 4,$$

або

$$y + 1 = (x - 2)^2.$$

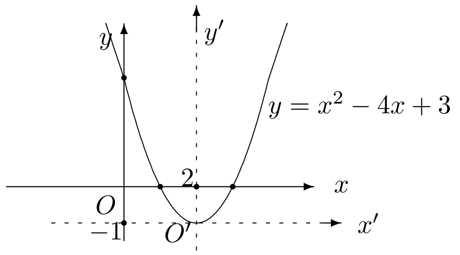
Зробимо паралельне перенесення системи координат

$$y' = y + 1, \quad x' = x - 2.$$

Тоді задана лінія запишеться у вигляді

$$y' = x'^2,$$

тобто є параболою




. ▶

**Приклад 11.** Яку лінію визначає рівняння

$$8x^2 - 16x + 3y^2 + 12y - 4 = 0?$$

◀ Утворимо повні квадрати

$$8(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) = 24,$$

або

$$8(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 24,$$
$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1.$$

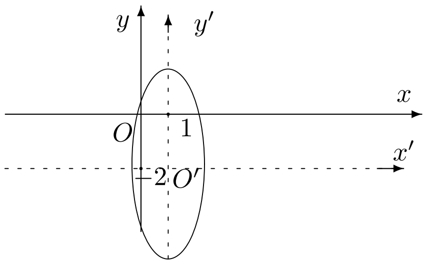
Якщо зробити паралельне перенесення системи координат

$$x' = x - 1, \quad y' = y + 2,$$

то дістанемо рівняння

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{8} = 1.$$

Це еліпс із півосями $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{8}$. Оскільки $a < b$, то фокуси еліпса лежать на осі $O'y'$




. ▶

**Приклад 12.** Яку лінію визначає рівняння

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 - 24x - 82y + 15 = 0?$$

◀ У рівнянні присутній доданок з добутком $xy$. Тому зробимо поворот осей координат, щоб позбутися цього добутку. Для цього знайдемо кут повороту $\alpha$ з рівняння

$$2B\cos 2\alpha = (A-C)\sin 2\alpha,$$

$$24\cos 2\alpha = -7\sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$$

З того, що $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ випливає, що $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$, або $12\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha - 12 = 0$. Звідси одержуємо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$. Досить взяти одне з цих значень, наприклад, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Тоді, скориставшись формулами

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha,$$

одержимо, що

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}, \ \ \sin\alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

Розглянемо випадок, коли

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

і зробимо поворот осей системи координат:

$$x = \frac{1}{5}(3\overline{x} - 4\overline{y}), \quad y = \frac{1}{5}(4\overline{x} + 3\overline{y}).$$

Підставивши ці вирази в рівняння лінії, отримаємо

$$4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 16\overline{x} - 6\overline{y} + 3 = 0.$$

Тепер утворимо повні квадрати

$$4(\overline{x}^2 - 4\overline{x} + 4) - (\overline{y}^2 + 6\overline{y} + 9) = 4,$$

або

$$\frac{(\overline{x}-2)^2}{1} - \frac{(\overline{y}+3)^2}{4} = 1.$$

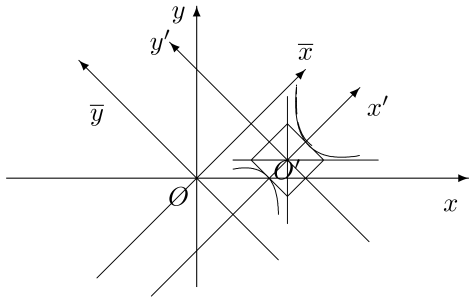
Зробимо паралельне перенесення системи координат

$$x' = \overline{x} - 2, \quad y' = \overline{y} + 3.$$

У новій системі координат рівняння матиме вигляд

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Це гіпербола з півосями $a = 1$, $b = 2$




. ▶

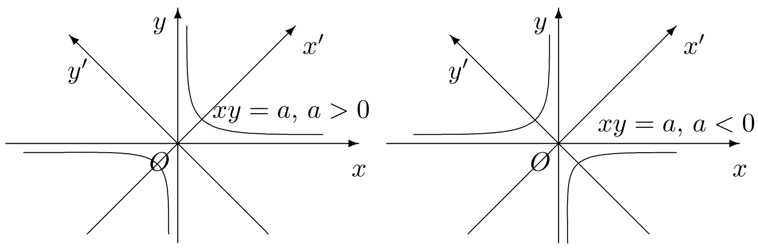
**Приклад 13.** Установити, яку лінію визначає рівняння $xy = a$.
◀ Тут $A = C$, а тому систему треба повернути на кут $\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Підставивши ці вирази в рівняння кривої, одержимо рівняння

$$x'^2 - y'^2 = 2a.$$

Це рівнобічна гіпербола. Для неї осями симетрії є нові осі координат, а асимптотами – старі осі координат. Вона розглядалася ще в шкільному курсі математики




. ▶

## Вправи

**1.** Точка $C(3;-1)$ є центром кола, яке відтинає на прямій $2x-5y+18=0$ хорду, довжина якої дорівнює 6. Написати рівняння цього кола.

**2.** Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(5;0)$, $B(1;4)$, якщо його центр знаходиться на прямій $x+y-3=0$.

**3.** Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$.

**4.** Дано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

**5.** Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=3/2$.

**6.** Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-3)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

**7.** Знайти рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4;3)$ і директрису $y+1=0$.

**8.** На параболі $y^2=32x$ знайти точки, відстань від яких до прямої $4x+3y+10=0$ дорівнює 2.

**9.** Які лінії визначає рівняння:
1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
2) $x^2-y^2-4x+2y-4=0$;
3) $2x^2-4x+2y-3=0$;
4) $5x^2-4xy+2y^2=24$;
5) $2x^2+4xy-y^2=12$;
6) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;
7) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$?

## Відповіді

**1.** $(x-3)^2+(y+1)^2=38$. **2.** $(x-2)^2+(y-1)^2=10$. **3.** $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$. **4.** а) 5 і 3; б) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; в) $\varepsilon=4/5$; г) $x=\pm\dfrac{25}{4}$. **5.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. **6.** $7x^2-y^2-6xy+26x-18y-17=0$. **7.** $y=\dfrac{1}{8}x^2-x+3$. **8.** $(0;0)$; $(18;-24)$. **9.** 1) $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$; 2) $x'^2-y'^2=7$; 3) $x'^2=-y'$; 4) $\dfrac{x'^2}{24}+\dfrac{y'^2}{4}=1$; 5) $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{6}=1$; 6) $y'^2=-2x'$; 7) $\dfrac{x'^2}{8}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

## §5. Поверхні другого порядку

**5.1. Сфера.** У §1 розділу 4 виведено рівняння сфери

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{83}$$

з центром в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і радіусом $R$.

Розкривши дужки і перенісши $R^2$ в ліву частину рівняння, одержимо

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0.$$

Це рівняння другого степеня відносно змінних $x$, $y$, $z$. У ньому відсутні доданки з добутками координат, а коефіцієнти при $x^2$, $y^2$ і $z^2$ однакові. Доведено, що будь-яке рівняння другого степеня відносно $x$, $y$ і $z$, у якому коефіцієнти при $x^2$, $y^2$ і $z^2$ однакові, а члени з добутками координат відсутні, є, взагалі кажучи, рівнянням сфери. Точнішне, таке рівняння за допомогою утворення повних квадратів завжди можна звести до вигляду

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=d. \tag{84}$$

Якщо при цьому $d>0$, то рівняння (84) є рівнянням сфери з центром в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і радіусом $R=\sqrt{d}$. При $d=0$ рівняння задовольняють координати лише однієї точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Якщо ж $d<0$, то рівняння (84) не визначає ніякої поверхні.

**Приклад 1.** Довести, що рівняння $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-2=0$ є рівнянням сфери, і знайти центр і радіус цієї сфери.

◀ Утворимо повні квадрати в лівій частині рівняння. Тоді одержимо, що рівняння набуде вигляду

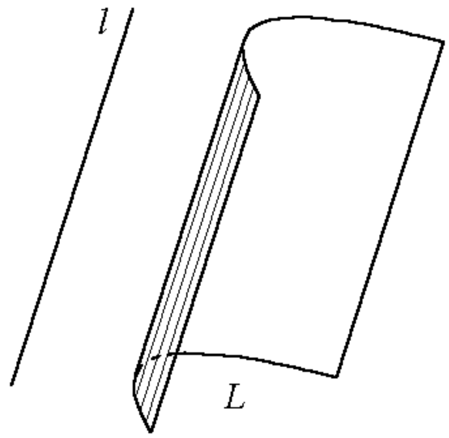
$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+6z+9)-1-4-9-2=0$$

або

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=16.$$

Отримали рівняння сфери з центром в точці $M_0(1;-2;-3)$ і радіусом $R=4$. ▶

**5.2. Циліндричні поверхні.** Поверхня, яка складається з усіх прямих простору $\mathbb{R}^3$, що перетинають задану лінію $L$ і паралельні заданій прямій $l$, називається **циліндричною поверхнею**. При цьому лінія $L$ називається **напрямною** циліндричної поверхні, а кожна з прямих, які утворюють цю поверхню і паралельні прямій $l$, – її **твірною**. Надалі розглядатимемо циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній із координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до цієї площини.



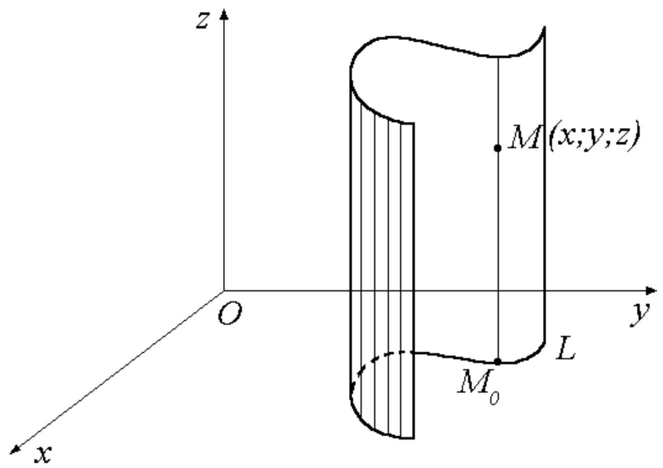

Розглянемо на площині $Oxy$ деяку лінію $L$, яка має в системі координат $Oxy$ рівняння

$$F(x, y) = 0. \tag{85}$$

Побудуємо циліндричну поверхню з твірними, які паралельні до осі $Oz$, і напрямною $L$. Доведемо, що рівняння цієї поверхні є рівняння (85), якщо його розглядати в системі координат $Oxyz$.

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна фіксована точка побудованої циліндричної поверхні. Позначимо через $M_0$ точку перетину напрямної $L$ і твірної, що проходить через точку $M$. Точка $M_0$ є проекцією точки $M$ на площину $Oxy$. Тому точки $M$ і $M_0$ мають одну й ту саму абсцису $x$ і одну й ту саму ординату $y$. Оскільки точка $M_0$ лежить на кривій $L$, то її координати $x$ і

$y$ задовольняють рівняння (85) цієї кривої. Тоді це рівняння задовольняють і координати точки $M(x; y; z)$, оскільки воно не містить $z$. Отже, координати довільної точки $M(x; y; z)$ заданої циліндричної поверхні задовольняють рівняння (85). Координати точок, які не лежать на цій поверхні, рівняння (85) не задовольняють, через те, що ці точки проектуються на площину $Oxy$ поза кривою $L$.




Звідси випливає, що *рівняння* $F(x, y) = 0$*, яке не містить* $z$*, в системі координат* $Oxyz$*, є рівнянням циліндричної поверхні з твірними, паралельними осі* $Oz$*, і напрямною* $L$*, яка в площині* $Oxy$ *визначаєтьcя тим самим рівнянням* $F(x, y) = 0$.

У просторі $Oxyz$ напрямна $L$ визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно можна довести, що рівняння $F(x, z) = 0$, яке не містить $y$, і рівняння $F(y, z) = 0$, яке не містить $x$, визначають в просторі $Oxyz$ циліндричні поверхні з твірними, що паралельні відповідно осям $Oy$ і $Ox$.

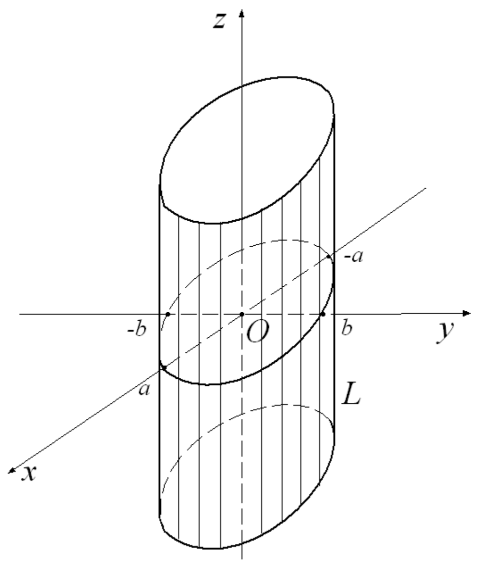
Наведемо приклади циліндричних поверхонь.

1). Поверхня, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

є циліндричною і називається **еліптичним циліндром**. Її твірні паралельні осі $Oz$, а напрямною є еліпс з напівосями $a$ і $b$, що лежить в площині $Oxy$. Зокрема, коли $a = b$, то напрямною є коло, а поверхня є **прямим круговим циліндром**. Його рівняння

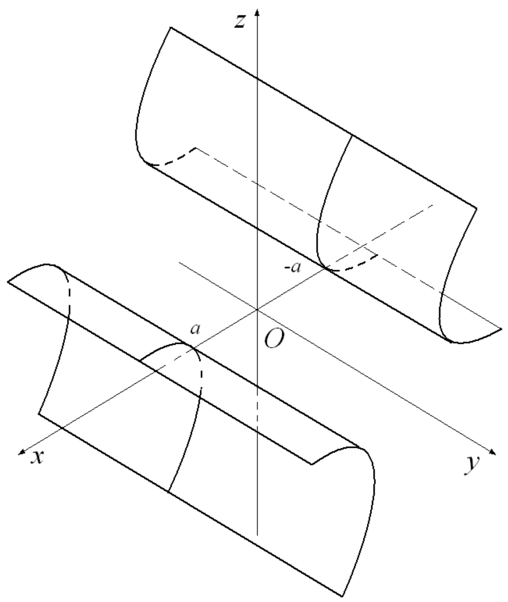
$$x^2 + y^2 = a^2.$$




2). Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

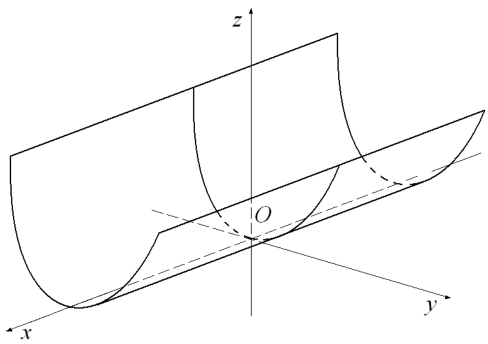
називається **гіперболічним циліндром**. Твірні цієї поверхні паралельні осі $Oy$, а напрямною є розміщена в площині $Oxz$ гіпербола з дійсною піввіссю $a$ і уявною піввіссю $b$.




3). Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням

$$y^2 = 2pz,$$

називається **параболічним циліндром**. Її напрямною є парабола, яка лежить в площині $Oyz$, а твірні паралельні осі $Ox$.




**Зауваження 1.** Криву в просторі можна задати за допомогою рівнянь різних поверхонь, які перетинаються по цій кривій.

Наприклад, коло, що одержується при перерізі площиною $z = 3$ сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

Це саме коло можна одержати як лінію перетину площини $z = 3$ і прямого кругового циліндра $x^2 + y^2 = 16$, тобто визначити системою рівнянь

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

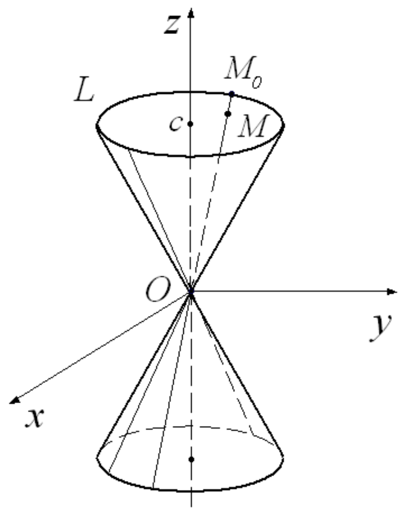
Надалі, досліджуючи форму тієї або іншої поверхні за допомогою перерізів, ми користуватимемося циліндричними поверхнями, які проектують ці перерізи на координатні площини. Це дозволяє робити певні висновки про розміри і форму цих перерізів, а отже, і про форму поверхні, що вивчається.

**5.3. Конічні поверхні.** Поверхня, яка складена з усіх прямих, що перетинають задану лінію $L$ і проходять через задану точку $P$, називається **конічною поверхнею**. При цьому лінія $L$ називається **напрямною** конічної поверхні, точка $P$ – її **вершиною**, а кожна з прямих, що утворюють конічну поверхню, – **твірною**.

Як приклад розглянемо конічну поверхню з вершиною у початку координат, для якої напрямною $L$ є еліпс

$$\begin{cases} Z = c, \\ \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

з півосями $a$ і $b$, що лежить в площині $Z = c$. Ця поверхня називається **конусом другого порядку**. Для зручності змінні координати точок еліпса позначатимемо великими літерами $X$, $Y$, $Z$, а змінні координати точок конічної поверхні – через $x$, $y$, $z$. Виведемо рівняння конуса другого порядку.




Розглянемо довільну точку $M(x;y;z)$ конічної поверхні і проведемо через неї твірну $OM$, що перетинається з напрямною в точці $M_0(X;Y;c)$. Рівняння прямої $OM$, що проходить через точки $O(0;0;0)$ і $M_0(X;Y;c)$ має вигляд

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{c-0}$$

або

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{c}.$$

Звідси одержуємо, що $X = \dfrac{cx}{z}$, $Y = \dfrac{cy}{z}$. Підставивши ці вирази в рівняння еліпса, дістанемо

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1$$

або після перетворень

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням конуса другого порядку. Зокрема, якщо $a = b$, то напрямною є коло

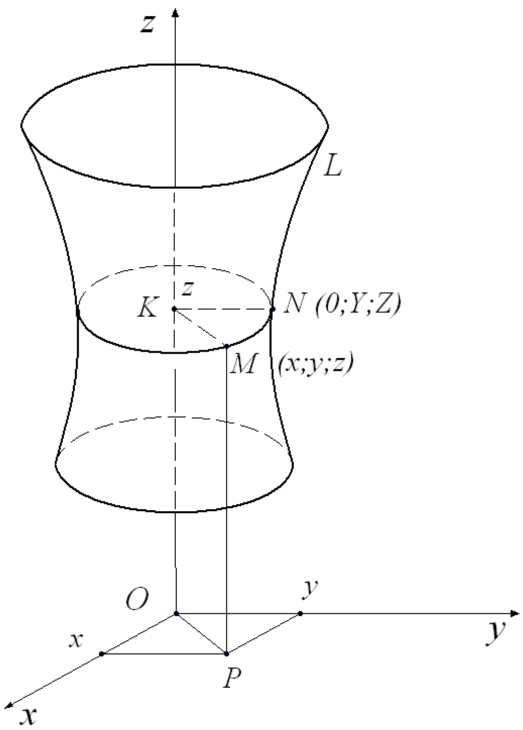
$$\begin{cases} Z = c, \\ X^2 + Y^2 = a^2, \end{cases}$$

а поверхня є прямим круговим конусом. Його рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

**5.4. Поверхня обертання.** Нехай лінія $L$, що лежить на площині $Oyz$, задана рівняннями

$$\begin{cases} X = 0, \\ F(Y, Z) = 0. \end{cases} \tag{86}$$




Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії відносно осі $Oz$. Ця поверхня називається **поверхнею обертання**. Знайдемо її рівняння. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка поверхні обертання. Проведемо через точку $M$ площину, перпендикулярну до осі $Oz$, і позначимо точки перетину цієї площини з віссю $Oz$ і кривою $L$ відповідно через $K$ і $N$. Відрізки $KM$ і $KN$ є радіусами одного й того самого кола, а тому $KM = KN$. Очевидно, що $KN = |Y|$, а $KM = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тому $|Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ або $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. При цьому координата $Z$ точки $N$ дорівнює координаті $z$ точки $M$.

Оскільки точка $N$ лежить на лінії $L$, яка визначена рівнянням (86), то координати $Y$ і $Z$ точки $N$ задовольняють друге з цих рівнянь. Підставляючи в нього замість $Y$ і $Z$ відповідно величини $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ і $z$ одержимо рівняння

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \tag{87}$$

яке задовольняє координати довільної точки $M(x; y; z)$ поверхні обертання. Отже, рівняння (87) є рівнянням поверхні обертання відносно осі $Oz$ лінії $L$, що визначається рівнянням (86). Очевидно, що *рівняння (87) одержується з другого рівняння системи (86) заміною координат $Y$ і $Z$ координатами $x$, $y$ і $z$ за формулами*

$$\begin{cases} Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \\ Z = z. \end{cases} \tag{88}$$

**Зауваження 2.** Вище розглянуто випадок, коли крива $L$ задана в площині $Oyz$ і обертається відносно осі $Oz$. Очевидно, що крива $L$ може лежати і в іншій координатній площині та обертатися відносно іншої координатної осі.

**Приклад 2.** Знайти рівняння поверхні обертання еліпса

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

відносно осі $Oz$.

◀ Записавши рівняння еліпса у вигляді $\dfrac{Y^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$ і замінюючи за формулами (88) $Y$ і $Z$ змінними координатами $x$, $y$ і $z$ поверхні обертання, дістанемо шукане рівняння

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

або

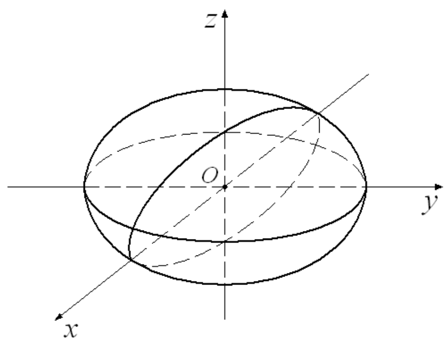
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Одержана поверхня називається **еліпсоїдом обертання**. ▶

**5.5. Еліпсоїд.** Поверхня, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

називається **еліпсоїдом**. Числа $a$, $b$ і $c$ називаються **півосями** еліпсоїда. Оскільки в рівняння змінні координати входять у парних степенях, то еліпсоїд симетричний відносно координатних площин. Для того щоб визначити форму еліпсоїда, переріжемо його площинами, паралельними координатним площинам.




Якщо перерізати еліпсоїд площиною $z = h$ ($|h| < c$), то одержимо еліпс $L$. Справді, виключаючи з рівнянь

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

змінну $z$, дістанемо рівняння циліндричної поверхні, яка проектує переріз $L$ на площину $Oxy$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

або
$$\frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})^2}=1.$$
Звідси одержуємо, що із зростанням $|h|$ півосі еліпса $a_1$ і $b_1$ зменшуються. При $|h| = c$ маємо, що $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ і переріз вироджується в точку. При $|h| > c$ еліпсоїд з площиною $z = h$ не має спільних точок. Аналогічно можна довести, що при перерізі еліпсоїда площинами $x = h$ ($|h| < a$) і $y = h$ ($|h| < b$) так само матимемо еліпси.

Із загального рівняння еліпсоїда при $a = b$ маємо еліпсоїд обертання
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Наприклад, в геодезії вважають, що поверхня Землі є еліпсоїдом обертання з півосями $a = b = 6377$ км і $c = 6356$ км.

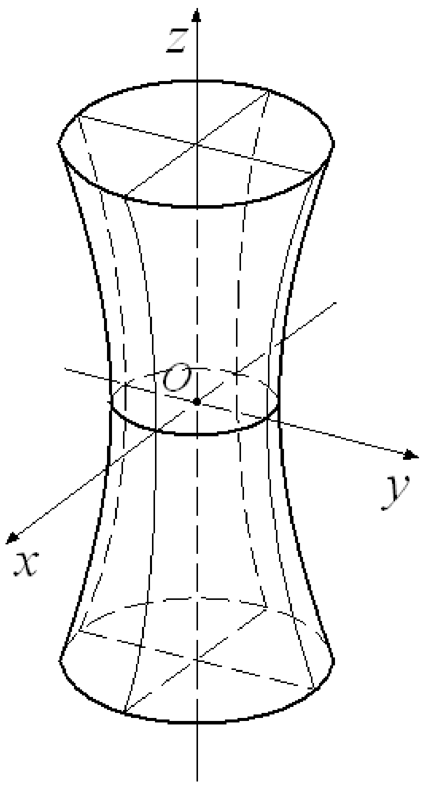
Якщо $a = b = c$, то еліпсоїд перетворюється в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**5.6. Гіперболоїди.** Поверхня, яка визначається рівнянням
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
називається **однопорожнинним гіперболоїдом**. Координатні площини є площинами симетрії цієї поверхні, оскільки змінні координати $x$, $y$ і $z$ входять в рівняння у парних степенях.

Переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $y = 0$ визначає гіперболу
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Аналогічно, в перерізі однопорожнинного гіперболоїда площиною $x = 0$ дістанемо гіперболу
$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases}$$

яка лежить в площині $Oyz$.




Якщо перерізати однопорожнинний гіперболоїд площиною $z = h$, то одержимо еліпс, рівняння якого має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Півосі цього еліпса $a_1 = a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ зростають із зростанням абсолютної величини $h$. При $h = 0$ дістанемо еліпс, який лежить в площині $Oxy$ і має найменші півосі $a$ і $b$.

При $a = b$ дістанемо **однопорожнинний гіперболоїд обертання**

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

При перерізі його площинами $z = h$ одержуємо еліпси.

У попередніх пунктах розглядалися циліндричні та конічні поверхні, кожна з яких складена з прямих. Виявляється, що однопорожнинний гіперболоїд можна розглядати як поверхню, що складена також з прямих ліній. Розглянемо пряму, яка визначається рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = k\Big(1+\dfrac{y}{b}\Big), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k}\Big(1-\dfrac{y}{b}\Big), \end{cases} \tag{90}$$

де $a$, $b$ і $c$ – півосі однопорожнинного гіперболоїда, а $k \neq 0$ – довільне число. Якщо перемножити почленно ці рівняння, то дістанемо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

тобто рівняння однопорожнинного гіперболоїда. Це означає, що координати будь-якої точки $M(x;y;z)$, які задовольняють рівняння прямої (90), задовольняють так само рівняння однопорожнинного гіперболоїда. Іншими словами, всі точки прямої (90) належать так само і гіперболоїду (89). Якщо змінювати $k$ у (90), то одержимо сім'ю прямих, які лежать на поверхні (89). Аналогічно можна довести, що однопорожнинному гіперболоїду належать всі прямі сім'ї

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = m\Big(1-\dfrac{y}{b}\Big), \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{m}\Big(1+\dfrac{y}{b}\Big), \end{cases}$$

де $m$ – довільний параметр, відмінний від нуля.

Можна довести, що через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходить по одній прямій з кожної із вказаних сімей. Отже, однопорожнинний гіперболоїд можна розглядати як поверхню, що складається з прямих. Ці прямі називають прямолінійними **твірними** однопорожнинного гіперболоїда.

Поверхня, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{91}$$

називається **двопорожнинним гіперболоїдом**. Оскільки змінні $x$, $y$ і $z$ входять в рівняння у парних степенях, то координатні площини є площинами симетрії для двопорожнинного гіперболоїда. Якщо розглянути переріз цієї поверхні координатними площинам $Oxz$ і $Oyz$, то одержимо гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Якщо двопорожнинний гіперболоїд перетнути площиною $z=h$ ($|h|>c$), то в перерізі одержимо еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases}$$

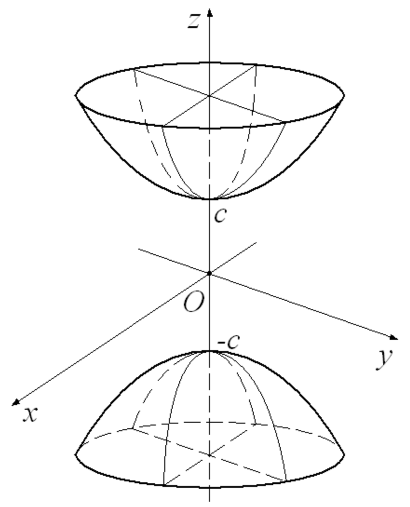
з півосями $a_1=a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$ і $b_1=b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, які зростають із зростанням $|h|$. При $|h|<c$ поверхня з площиною $z=h$ не перетинається. Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох окремих частин (порожнин), від цього й пішла його назва. При $a=b$ рівняння (91) має вигляд

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{або} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{b^2}=1$$

і є рівнянням двопорожнинного гіперболоїда обертання. У перерізі останнього площиною $z = h$ ($|h| > c$) одержимо коло

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2\Big(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\Big), \\ z = h \end{cases}$$

радіуса $R = b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}$.




**5.7. Параболоїди. Еліптичним параболоїдом** називається поверхня, яка визначається рівнянням

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \tag{92}$$

за умови, що $p$ і $q$ мають однакові знаки. Надалі для визначеності вважатимемо, що $p > 0$, $q > 0$.

При перерізі еліптичного параболоїда координатними площинами $Oxz$ і $Oyz$ матимемо відповідні параболи

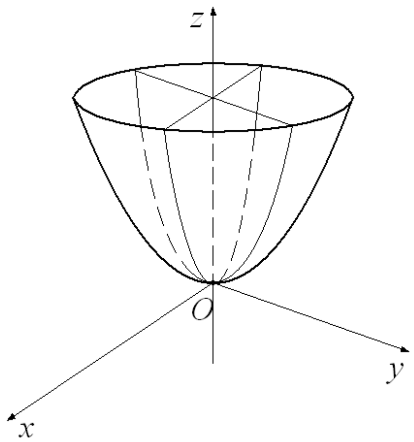
$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p}, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} z = \dfrac{y^2}{2q}, \\ x = 0, \end{cases}$$

а при перерізі площиною $z = h$ $(h > 0)$ – еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

з півосями $a = \sqrt{2ph}$, $b = \sqrt{2qh}$. У випадку $p = q$ дістанемо **параболоїд обертання**

$$2pz = x^2 + y^2.$$




Оскільки $x$ і $y$ входять в рівняння еліптичного параболоїда в парних степенях, то еліптичний параболоїд має дві площини симетрії $Oxz$ і $Oyz$.

**Гіперболічним параболоїдом** називається поверхня, яка визначається рівнянням

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \tag{93}$$

за умови, що $p$ і $q$ мають однакові знаки, наприклад, $p > 0$, $q > 0$.

Якщо перерізати цю поверхню координатними площинами $Oxz$ і $Oyz$, то ми дістанемо параболи

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0. \end{cases}$$

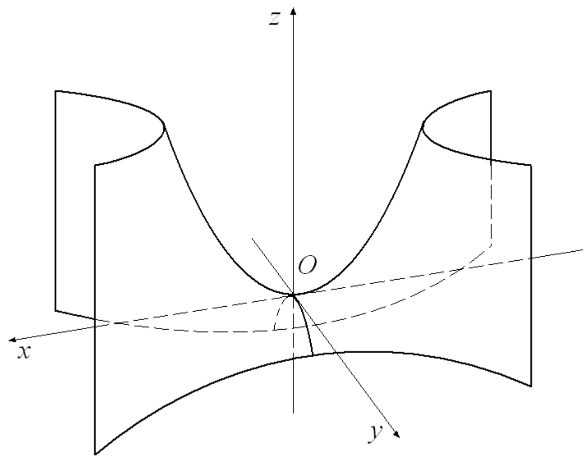
Якщо ж перерізати гіперболічний параболоїд площиною $z = h$, то дістанемо гіперболи

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \ h > 0 \end{cases}$$

і пару прямих

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Точка $O(0;0;0)$ називається вершиною гіперболічного параболоїда, а числа $p$ і $q$ – параметрами.




**Вправи**

**1.** Знайти півосі еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

**2.** Знайти півосі еліпса, утвореного перерізом еліпсоїда $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ площиною $x = 3$.

**3.** Знайти координати центра і радіус сфери, яка задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$.

**4.** Скласти рівняння сфери, яка проходить через точки $M_1(1;2;-4)$, $M_2(1;-3;1)$ і $M_3(2;2;3)$, якщо її центр знаходиться в площині $Oxy$.

**5.** Скласти рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка $M_0(0;0;1)$, а напрямною – еліпс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $z=3$.

**6.** Знайти рівняння поверхні, яка одержується при обертанні прямої $x+2y=4$, $z=0$ навколо осі $Ox$.

**7.** Знайти рівняння еліптичного параболоїда, який має вершину в початку координат, віссю якого є вісь $Oz$, якщо на його поверхні задано дві точки $M_1(-1;-2;2)$ і $M_2(1;1;1)$.

**8.** Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням: 1) еліпса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $z=0$ навколо осі $Ox$; 2) гіперболи $\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$, $x=0$ навколо осі $Oz$.

### Відповіді

**1.** $a=2$, $b=\sqrt{2}$, $c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **2.** $a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $b=\sqrt{3}$. **3.** $C\left(\dfrac{1}{2};-1;0\right)$, $R=\dfrac{1}{2}$. **4.** $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$. **5.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=0$. **6.** $4y^2+4z^2-(x-4)^2=0$. **7.** $3z=2x^2+y^2$. **8.** 1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$; 2) $-\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

# Розділ 5. Елементи лінійного програмування

У багатьох прикладних задачах виникають ситуації, коли досягнути певної мети можна не одним, а багатьма різними способами, і для прийняття обгрунтованого рішення необхідно опрацювати велику кількість інформації. Очевидно, що це рішення повинно бути найкращим. Математично задачі такого типу, а це в основному задачі управління і планування, зводяться до знаходження найбільшого або найменшого значення деякої функції $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка називається **цільовою функцією** або **функцією мети**:

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min). \qquad (1)$$

При цьому змінні $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ визначені в певній області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, яка описується нерівностями:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

де $g_1$, $g_2$, ..., $g_m$ – відомі функції, а $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$ – дійсні числа. Нерівності (2) називаються **обмеженнями задачі**. До числа обмежень задачі, як правило, входить також умова невід'ємності змінних:

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (3)$$

Нагадаємо, що функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має найбільше (найменше) значення в $\Omega$, якщо існує така точка $(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0) \in \Omega$, що $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ для всіх $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in \Omega$, при цьому найбільшим значенням $\max\limits_{\Omega} f$ в області $\Omega$ (найменшим $\min\limits_{\Omega} f$) є $\max\limits_{\Omega} f = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ $(\min\limits_{\Omega} f = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$.

Задачі типу (1), (2), (3) називають задачами **математичного програмування**.

Вигляд функцій $f$, $g_1$, $g_2$, $\ldots$, $g_m$ визначає тип задачі математичного програмування. Найпростішим і таким, що часто зустрічається є випадок, коли всі ці функції є лінійними. Таку задачу називають **лінійною задачею** математичного програмування. Для розв'язування цих задач розроблені ефективні методи, одним із яких є **симплексний метод**. Якщо ж принаймні одна з функцій $f$, $g_1$, $g_2$, $\ldots$, $g_m$ є нелінійною, то задача (1), (2), (3) називається **задачею нелінійного програмування**. На сьогодні відсутні загальні й достатньо ефективні методи розв'язування задач нелінійного програмування. Лише для певного класу нелінійних задач розроблені достатньо ефективні методи.

## §1. Постановка задачі лінійного програмування

**Лінійне програмування** – це наука про методи знаходження найбільшого або найменшого значення лінійної функції, незалежні змінні якої задовольняють певні лінійні обмеження. При цьому лінійна функція називається **цільовою**, а обмеження, які описуються у вигляді рівнянь або нерівностей, називаються **системою обмежень**.

Лінійне програмування широко використовується в економіці при розв'язуванні задач управління, раціонального планування, організації виробництва і т.п. Воно також застосовується при раціональному виборі параметрів технічних пристроїв і, зокрема, при створенні різних систем автоматизованого управління.

Задача лінійного програмування – це математична модель певної економічної або технічної задачі. При складанні математичної моделі задачі необхідно: 1) ввести незалежні (керовані) змінні; 2) виходячи з мети досліджень, визначити цільову функцію; 3) враховуючи обмеження на параметри задачі та їхні кількісні величини, записати систему обмежень.

### 1.1. Приклади задач лінійного програмування.

**Приклад 1 (задача про використання сировини або планування виробництва).** Для виготовлення двох видів продукції $P_1$ і $P_2$ використовують чотири типи сировини. Запаси сировини, кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, а також величина доходу, одержувана від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці

| Тип сировини | Кількість од. сир. $S_i$, що витрач. на вигот. од. прод. $P_j$ | | Запаси сировини |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 2 | 3 | 19 |
| $S_2$ | 2 | 1 | 13 |
| $S_3$ | 0 | 3 | 15 |
| $S_4$ | 3 | 0 | 18 |
| Доход від реалізації од. прод. | 7 | 5 | |

Треба скласти математичну модель задачі знаходження плану випуску продукції, щоб при її реалізації одержати максимальний доход.

◀ Позначимо через $x_j$, $j \in \{1, 2\}$, кількість одиниць продукції $P_j$, $j \in \{1, 2\}$. Тоді, враховуючи кількість одиниць сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції, а також запаси сировини, дістанемо систему обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + \ x_2 \le 13, \\ \qquad\ \ 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 \qquad\ \ \le 18, \end{cases}$$

яка стверджує, що кількість сировини, яка витрачається на виготовлення продукції, не повинна перевищувати запасів сировини. Якщо продукція $P_j$ не випускається, то $x_j = 0$, $j \in \{1, 2\}$, а якщо випускається, то $x_j > 0$, $j \in \{1, 2\}$. Отже, одержуємо знакові обмеження на невідомі $x_1$, $x_2$:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Реалізація $x_1$ одиниць продукції $P_1$ і $x_2$ одиниць продукції $P_2$ дає відповідно $7x_1$ і $5x_2$ грошових одиниць доходу, а тому сумарний доход

$$f = 7x_1 + 5x_2 \ \text{ (гр. од.)}.$$

Отже, ми одержали математичну модель задачі:

$$f = 7x_1 + 5x_2 \to \max; \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leq 13, \\ \qquad\ \ 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 \qquad\ \leq 18; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{3}$$

Оскільки цільова функція та обмеження задачі є лінійними відносно незалежних змінних $x_1$ і $x_2$, то це задача лінійного програмування.

Сукупність векторів $X = (x_1; x_2)$, координати яких задовольняють нерівності (2), (3), називається областю **допустимих планів (розв'язків)** задачі. Той з цих планів (розв'язків) $X^* = (x_1^*; x_2^*)$, який реалізує екстремум цільової функції $f$, називається **оптимальним планом (розв'язком)** задачі.▶

**Приклад 2 (задача про складання кормового раціону або задача про дієту).** При відгодівлі кожна тварина щоденно повинна отримувати не менше 9 одиниць поживної речовини $S_1$, не менше 8 одиниць речовини $S_2$ і не менше 12 одиниць речовини $S_3$. Для складання раціону використовують два види корму $P_1$ і $P_2$. Вміст кількості одиниць поживної речовини в одиниці кожного виду корму і вартість одиниці корму наведено в таблиці

| Поживні речовини | Кількість од. поживної речовини в од. корму | | Кількість поживної речовини |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 3 | 1 | 9 |
| $S_2$ | 1 | 2 | 8 |
| $S_3$ | 1 | 6 | 12 |
| Вартість од. корму | 4 | 6 | |

Треба скласти математичну модель формування добового раціону потрібної поживності при мінімальних витратах на нього.

◀ Нехай $x_j$ – кількість одиниць корму $P_j$, $j \in \{1,2\}$, яку треба придбати для організації добового раціону. Тоді з умови задачі випливає, що повинні виконуватись обмеження:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Якщо корм $P_1$ не використовується в раціоні, то $x_1 = 0$, а коли використовується, то $x_1 > 0$. Аналогічно маємо, що $x_2 \geq 0$. Отже, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Нашою метою є добитися мінімальних витрат при складанні добового раціону. Оскільки сумарна вартість раціону $f = 4x_1 + 6x_2$, то цю функцію треба дослідити на мінімум.

Отже, математична модель задачі така:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \min; \tag{4}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що подібний вигляд мають задачі визначення складу сплавів, сумішей пального, сумішей мінеральних добрив і т.п. ▶

**Приклад 3 (транспортна задача).** У пунктах $A_1$, $A_2$, $A_3$ розміщені кар'єри, які видобувають глину, а в пунктах $B_1$,

$B_2$, $B_3$ і $B_4$ цегельні заводи. Потреби заводів у глині не більші, ніж продуктивність кар'єрів. Відомо скільки глини потрібно кожному заводу і скільки її добувають у кожному з кар'єрів. Відома також вартість перевезення однієї тонни глини з кожного кар'єру до відповідного заводу. Треба спланувати постачання зводів глиною так, щоб витрати були найменшими. Всі необхідні дані наведено в таблиці

| Постачальники | Споживачі | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 5 | 8 | 24 | 30 | 49 |
| $A_2$ | 8 | 10 | 20 | 32 | 48 |
| $A_3$ | 17 | 28 | 35 | 40 | 42 |
| Потреби | 32 | 57 | 32 | 15 | |

◀ Нехай $x_{ij}$ – кількість глини, яку одержує з кар'єру $A_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, цегельний завод $B_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Тоді система нерівностей

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 49, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 48, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 42 \end{cases}$$

характеризує кількість глини, яку буде вивезено з кожного кар'єру, а система рівнянь

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 32, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 57, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 32, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15 \end{cases}$$

визначає кількість глини, яку одержує кожний з цегельних заводів.

Витрати на перевезення вантажу складають:

1) у пункт $B_1$ $f_1 = 5x_{11} + 8x_{21} + 17x_{31}$,
2) у пункт $B_2$ $f_2 = 8x_{12} + 10x_{22} + 28x_{32}$,
3) у пункт $B_3$ $f_3 = 24x_{13} + 20x_{23} + 35x_{33}$,
4) у пункт $B_4$ $f_4 = 30x_{14} + 32x_{24} + 40x_{34}$.

Сумарні витрати

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 5x_{11} + 8x_{21} + 17x_{31} + 8x_{12} + 10x_{22} +$$

$$+28x_{32} + 24x_{13} + 20x_{23} + 35x_{33} + 30x_{14} + 32x_{24} + 40x_{34}.$$

Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$f = 5x_{11} + 8x_{21} + 17x_{31} + 8x_{12} + 10x_{22} + 28x_{32} + 24x_{13} +$$

$$+20x_{23} + 35x_{33} + 30x_{14} + 32x_{24} + 40x_{34} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 49, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 48, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 42; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 32, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 57, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 32, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}. \blacktriangleright$$

**1.2. Форми запису задачі лінійного програмування.**При постановці задач лінійного програмування можливі різні випадки: цільова функція в одних задачах максимізується, а в інших – мінімізується, обмеження на змінні можуть задаватися рівностями або нерівностями. Крім того, умова невід'ємності поширюється не на всі змінні. Важливим є те, що ці відмінності носять формальний характер. Зокрема, немає необхідності розрізняти задачі максимізації і мінімізації цільової функції, оскільки

$$\max f(x) = -\min(-f(x)),$$

$$\min f(x) = -\max(-f(x)).$$

У залежності від вигляду системи обмежень задачі лінійного програмування поділяють на три типи: стандартну, канонічну і загальну.

**Стандартна задача лінійного програмування** має вигляд

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{7}$$

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{array}\right. \tag{8}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

Це задача з однотипними обмеженнями-нерівностями і невід'ємними змінними. Очевидно, що задача про використання сировини (1) – (3) і задача про складання кормового раціону (4) – (6) є стандартними.

У стандартній задачі співвідношення між кількістю невідомих $n$ і кількістю обмежень $m$ може бути довільним, тобто задача має зміст при $n > m$, $n = m$ і $n < m$.

**Канонічною задачею** називається задача лінійного програмування, де всі змінні невід'ємні, а обмеження є рівностями:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array}\right. \tag{11}$$

$$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

У канонічній задачі кількість невідомих завжди більша за кількість рівнянь, тобто $n > m$. Справді, якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і рівняння лінійно незалежні, то система має єдиний розв'язок. Якщо при цьому принаймні одне з $x_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ від'ємне, то це означає, що одержаний розв'язок не є допустимим, і, отже, задача не має розв'язку. Якщо ж всі $x_j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то знайдений розв'язок є допустимим, і він є оптимальним, бо інших розв'язків немає.

У випадку, коли рівнянь більше ніж невідомих, то вони або лінійно залежні, і тоді частину з них можна відкинути, або суперечливі, і тоді задача не має допустимих розв'язків.

Надалі вважатимемо, що серед рівнянь системи-обмежень канонічної задачі немає зайвих, тобто вони утворюють систему лінійних незалежних рівнянь, і матриця умов задачі має ранг $m$.

Частинним випадком канонічної задачі є задача в **базисній формі**, яка характерна тим, що всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, і в кожному рівнянні є змінна з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, яка не входить в жодне з решти рівнянь. Така змінна називається **базисною**. Наприклад,

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad +a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \quad\quad\quad +a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad x_m \quad +a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{14}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, n\}; \tag{15}$$

$$b_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{16}$$

Тут змінні $x_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, є базисними.

**Загальна задача** лінійного програмування – це задача, в якій є обмеження у вигляді як рівностей, так і не рівностей, а умова невід'ємності накладається не на всі змінні.

Стандартні і канонічні задачі можна записувати у різних формах

**Матрична форма.** Введемо позначення: $C = (c_1\, c_2\, \ldots\, c_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді стандартна задача (7) – (9) записується у вигляді

$$\begin{gathered} f = CX \to \max; \\ AX \leq A_0; \\ X \geq 0. \end{gathered} \tag{17}$$

а канонічна (10) – (12) – у вигляді

$$
\begin{aligned}
f = CX &\to \max; \\
AX &= A_0; \qquad (18) \\
X &\geq 0.
\end{aligned}
$$

**Зауваження.** Якщо $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\} \\ j\in\{1,\dots,n\}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\} \\ j\in\{1,\dots,n\}}}$, матриці однакового розміру, то нерівність $A \leq B$ рівносильна нерівностям $a_{ij} \leq b_{ij}$, $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

**Векторна форма.** Якщо позначити через $A_j$ $j$-й стовпчик матриці $A$, тобто

$$
A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j \in \{1,\dots,n\},
$$

то задачі (7) – (9) і (10) – (12) можна подати відповідно у вигляді:

$$
\begin{aligned}
f = CX &\to \max; \\
x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n &\leq A_0; \qquad (20) \\
X &\geq 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f = CX &\to \max; \\
x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n &= A_0; \qquad (21) \\
X &\geq 0,
\end{aligned}
$$

де $CX$ – Скалярний добуток векторів $C = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ і $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$.

**1.3. Еквівалентні перетворення задач лінійного програмування.** Очевидно, що стандартна і канонічна задачі є частинними випадками загальної. У той же час всі ці типи задач еквівалентні між собою : загальна задача за допомогою простих перетворень зводиться до стандартної або канонічної, а останні перетворюються одна в одну. Тому, розв'язавши одну з них, ми однозначно дістанемо розв'язок другої.

На конкретних прикладах опишемо перетворення, які дозволяють звести один тип задачі до іншого.

**Приклад 4**. Звести до канонічного вигляду задачу

$$f = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16, \\ 4x_1 - 2x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.$$

◀ У цій задачі обидва обмеження є нерівностями, а на змінну $x_2$ не накладено жодних обмежень. Для зведення задачі до канонічного вигляду введемо в обмеження-нерівності додаткові (балансуючі) змінні $x_3 \ge 0$ і $x_4 \ge 0$ так, щоб нерівності $x_1+x_2 \le 16$, $4x_1-2x_2 \le 20$ перетворилися на рівності $x_1 + x_2 + x_3 = 16$, $4x_1 - 2x_2 + x_4 = 20$. Змінні $x_3$ і $x_4$ ввійдуть в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. Оскільки змінна $x_2$ довільна, то подамо її у вигляді $x_2 = x_2' - x_2''$, де $x_2' \ge 0$, $x_2'' \ge 0$. Тоді дістанемо канонічну задачу

$$f = 8x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 = 16, \\ 4x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_4 = 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \quad ▶$$

**Приклад 5.** Звести до канонічного вигляду задачу:

$$f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \le 12, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

◀ На змінні $x_1$ і $x_2$ вже накладено умову невід'ємності, а тому їх залишаємо без змін. Змінну $x_3$ замінимо на $\bar{x}_3 = -x_3$ і тому отримаємо, що $\bar{x}_3 \ge 0$. Змінну $x_4$ заміняємо на різницю $x_4 = x_4' - x_4''$, де $x_4' \ge 0$, $x_4'' \ge 0$. Крім того, введемо дві додаткові (балансуючі) змінні $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$, які перетворюють перше і друге обмеження-нерівності в обмеження-рівності. Далі від цільової функції $f$ перейдемо до функції $\tilde{f} = -f$.

Отже, задача зведена до такого канонічного вигляду:

$$\tilde{f} = -(2x_1 - 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x_4' + 2x_4'') \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4\bar{x}_3 + x_4' - x_4'' + x_5 = 12, \\ -2x_1 + 3x_2 - \bar{x}_3 - 2x_4' + 2x_4'' - x_6 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + \bar{x}_3 + 3x_4' - 3x_4'' = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \bar{x}_3 \geq 0,\ x_4' \geq 0,\ x_4'' \geq 0,$$

$$x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \qquad \blacktriangleright$$

**Приклад 6.** Звести до стандартного вигляду канонічну задачу

$$f = 2 - x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Запишемо систему обмежень у вигляді нерівностей, зменшивши кількість незалежних змінних. Для цього спочатку зведемо цю систему до базисної форми, скориставшись методом Жордана-Гаусса:

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $\boxed{1}$ | −3 | 10 |
| 4 | 1 | −1 | 1 | 8 |
| 2 | 1 | 1 | −3 | 10 |
| 6 | $\boxed{2}$ | 0 | −2 | 18 |
| −1 | 0 | 1 | −2 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | −1 | 9 |

Отже, система обмежень набула базисного вигляду

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$$

Тут $x_2$ і $x_3$ базисні змінні, а $x_1$ і $x_4$ – вільні змінні. Запишемо задачу, виразивши цільову функцію і обмеження через вільні змінні.

Для цього з системи обмежень знайдемо $x_2$ і $x_3$ через вільні змінні

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \\ x_2 = 9 - 3x_1 + x_4 \end{cases}$$

і підставимо їх в цільову функцію. Тоді одержимо, що

$$f = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Оскільки $x_2 \geq 0$ і $x_3 \geq 0$, то систему обмежень можна записати у вигляді нерівностей

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ 3x_1 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

Отже, наша задача набуде такого вигляду:

$$f = 29 - 10x_1 + 3x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ 3x_1 - x_4 \leq 9. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_4 \geq 0. \quad \blacktriangleright$$

## Вправи

**1.** Для пропонованої задачі скласти математичну модель:

1) Треба утворити суміш з трьох хімічних речовин $A_1$, $A_2$, $A_3$. Відомо, що утворена суміш повинна містити: речовини $A_1$ не менше 6 одиниць, речовини $A_2$ не менше 8 одиниць, речовини $A_3$ не менше 12 одиниць. Речовини $A_1$, $A_2$, $A_3$ містяться у трьох видах продуктів $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ у концентраціях, що визначаються таблицею

| Продукти | Хімічні речовини | | |
|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ |
| $\Pi_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $\Pi_2$ | 1 | 2 | 4 |
| $\Pi_3$ | 3 | 1,5 | 2 |

.

Ціна одиниці продукту $\Pi_1$ становить 2 гр.од., продукту $\Pi_2$ – 3 гр.од., продукту $\Pi_3$ – 2,5 гр.од. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

2) Три нафтопереробних заводи $A_1$, $A_2$, $A_3$ із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20, 35 тис. тонн бензину забезпечують чотири бензосховища $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, потреби яких становлять 10, 20, 25, 20 тис. тонн бензину відповідно. Бензин транспортується до бензосховища за допомогою трубопроводів. Вартість перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ наведено в таблиці

| Заводи | Вартість перекачування 1000 т бензину до сховищу, гр.од. | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$ | 4 | 5 | 3 | 7 |
| $A_2$ | 7 | 6 | 2 | 5 |
| $A_3$ | 2 | 3 | 9 | 8 |

.

Необхідно спланувати переказування бензину так, щоб сумарна вартість була мінімальною.

3) З листового прокату необхідно вирізати заготовки двох типів $A$ і $B$ для виготовлення 60 штук виробів. Для одного виробу треба три заготовки типу $A$ і вісім заготовок типу $B$. Розміри листа, а також розміри і конфігурація заготовок дозволяють вибрати чотири раціональних варіанти, що відображено в таблиці

| Заготовки заготов. | Варіанти розкрою | | | | Потреби |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| $A$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 180 |
| $B$ | 0 | 4 | 6 | 10 | 480 |
| Відходи | 12 | 5 | 3 | 0 | |

Скласти такий план розкрою, щоб одержати необхідну кількість заготовок кожного типу при мінімальних сумарних відходах.

4) Магазин оптової торгівлі реалізує три види продукції $P_1$, $P_2$ і $P_3$. Для цього використовують два типи обмежених ресурсів: $S_1$ – корисна площа приміщень, яка складає 450 м$^2$; $S_2$ – робочий час працівників магазину, що дорівнює 600 людино/год. Товарообіг повинен бути не меншим 240 тис. грн. Необхідно скласти план товарообігу, який забезпечував би максимальний прибуток. Витрати ресурсів на реалізацію і отримуваний при цьому прибуток наведені в таблиці

| Ресурси | Витрати ресурсів на реалізацію, тис. грн. | | | Обсяг ресурсів |
|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | |
| $S_1$, м$^2$ | 1,5 | 2 | 3 | 450 |
| $S_2$, людино/год | 3 | 2 | 1,5 | 600 |
| Прибуток, тис. грн. | 50 | 65 | 70 | |

.

**2.** Сформульовану нижче задачу лінійного програмування звести до канонічного вигляду:

1) $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \end{cases}$$
$x_1 \le 0;$

2) $f = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_3 \le 0.$

**3.** Звести пропоновану задачу до симетричного (стандартного) вигляду

1) $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\};$

2) $f = x_1 - x_3 + 5x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 - x_3 + 3x_5 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\}.$

## Відповіді

**1**. 1) $f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 4x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 7x_{14} + 7x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 5x_{24} +$
$+ 2x_{31} + 3x_{32} + 9x_{33} + 8x_{34} \to \min;$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 20, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 35; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20; \end{cases}$$
$x_{ij} \ge 0,\ i \in \{1, 2, 3\},\ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$

3) $f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 180, \\ 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 \ge 480; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1,2,3,4\};$

4) $f = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 240; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1,2,3\}.$

**2**. 1) $\overline{f} = -f = 2\bar{x}_1 + x_2' - x_2'' - 3x_3' + 3x_3'' \to \max;$
$$\begin{cases} -\bar{x}_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3' + 2x_3'' + x_4 = 4, \\ 2\bar{x}_1 + x_2' - x_2'' + 4x_3' - 4x_3'' = 8; \end{cases}$$
$\bar{x}_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0, x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0, x_4 \ge 0;$

2) $\overline{f} = -f = 4x_1 - 3(x_2' - x_2'') - 5\bar{x}_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2(x_2' - x_2'') + 3\bar{x}_3 = -7, \\ 2x_1 - (x_2' - x_2'') - 2\bar{x}_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3(x_2' - x_2'') + \bar{x}_3 + x_5 = 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2' \ge 0, x_2'' \ge 0, \bar{x}_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0;$

**3**. 1) $\tilde{f} = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 \le 4, \\ x_1 + x_3 \le 8, \\ -5x_1 + x_3 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$

2) $\tilde{f} = -2x_1 - 2x_5 - 4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_5 \le 11, \\ -x_1 - x_5 \le -1, \\ x_1 - 3x_5 \le -4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$

## §2. Властивості задач лінійного програмування

Для кращого розуміння особливостей розв'язування задачі лінійного програмування зручно скористатися її геометричним тлумаченням.

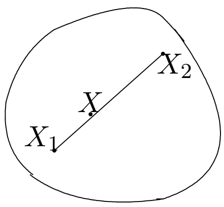
Тому спочатку розглянемо деякі додаткові поняття й означення лінійної алгебри.

**2.1. Опуклі множини.** Множина $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ називається **опуклою**, якщо вона разом з двома своїми довільними точками $X_1 \in \Omega$, $X_2 \in \Omega$ містить всі точки вигляду

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2, \quad 0 \le \lambda \le 1. \tag{1}$$

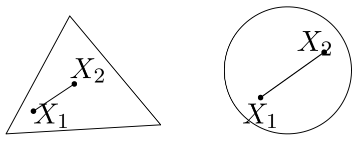
Тут і надалі під $\alpha X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, розумітимемо добуток вектора на число.

Очевидно, що коли $\lambda$ пробігає значення від 0 до 1, то точка $X$ описує відрізок $X_2X_1$. Точка $X$, для якої виконується умова (1), називається **опуклою лінійною комбінацією** точок $X_2$ і $X_1$. Точки $X_1$ і $X_2$ називаються **кутовими** або **крайніми** точками відрізка $X_1X_2$.

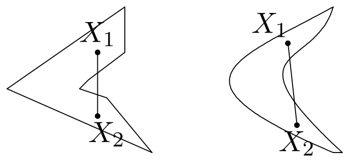



По-іншому можна сказати, що множина $\Omega$ називається опуклою, якщо вона разом зі своїми двома довільними точками $X_1$ і $X_2$ містить відрізок, який їх з'єднує.

Прикладами опуклих множин є прямолінійний відрізок, пряма, півплощина, круг, куля, куб, півпростір і т.д.




Опуклі множини




Неопуклі множини

Доводиться, що переріз довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною.

Точка $X$ називається **опуклою лінійною комбінацією** точок $X_1$, $X_2$, …, $X_n$, якщо виконується умова

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

де

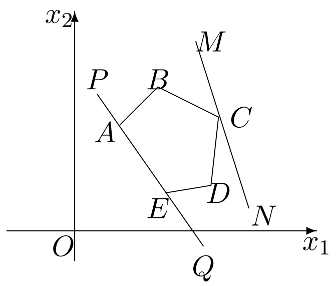
$$\alpha_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

У відповідності з означенням опуклої множини вона містить опуклу лінійну комбінацію будь-яких своїх точок.

Точка опуклої множини називається **крайньою**, якщо її не можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації будь-яких двох різних точок цієї множини. Наприклад, крайніми точками многокутника є його вершини.

Опукла замкнена множина точок простору (площини), яка має скінченне число кутових (крайніх) точок, називається **опуклим многогранником (многокутником)**, якщо вона обмежена, і **опуклою многогранною (многокутною) областю**, якщо вона необмежена.

Кутові точки многокутника називаються його **вершинами**, а відрізки, що з'єднують дві вершини і утворюють його межу – **сторонами**.




**Опорною прямою** опуклого многокутника називається пряма, яка має з многокутником, розміщеним по один бік від неї, принаймні одну спільну точку. Прямі $MN$ і $PQ$ є опорними до многокутника $ABCDE$.

**2.2. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування.** Розглянемо канонічну задачу, записану в матрично-векторній формі

$$f = CX \to \max; \tag{2}$$

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = A_0; \tag{3}$$

$$X \geq 0, \tag{4}$$

де $CX$ – скалярний добуток векторів $C = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$ і $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, а вектори

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

складаються відповідно з коефіцієнтів при змінних $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ і вільних членів.

З обмежень (3), (4) випливає, що $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є **планом** або **допустимим планом** задачі (2) – (4) тоді й тільки тоді, коли вектор-стовпчик $A_0$ є невід'ємною лінійною комбінацією векторів $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, де коефіцієнтами є координати вектора $X$.

План $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ задачі (2) – (4) називається **опорним**, якщо вектори-стовпчики $A_j$, які відповідають додатним $x_j$, є лінійно незалежними.

З цього означення випливає, що число додатних координат опорного плану не перевищує $m$, бо вектори $A_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є $m$-вимірними, а в $m$-вимірному просторі $\mathbb{R}^m$ максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює $m$.

Опорний план називається **невиродженим**, якщо число його додатних координат дорівнює $m$, і **виродженим**, якщо воно менше $m$.

**Базисом опорного плану** називається система з $m$ лінійних незалежних векторів-стовпчиків $A_j$ матриці $A$, що містить всі вектори, які відповідають додатним координатам опорного плану.

Доводиться [13], що множина планів задачі лінійного програмування є опуклим многогранником (многокутником) або опуклою многогранною (многокутною) областю. Надалі називатимемо цю множину многогранником (многокутником) розв'язків і позначатимемо символом $\Omega$.

Відповідь на питання, в якій точці многогранника (многокутника) досягається екстремум цільової функції дає така теорема.

**Теорема [14].** *Якщо цільова функція $f$ має максимум на опуклому многограннику допустимих планів (розв'язків), то він досягається у вершині (кутовій точці) цього многогранника.*

*Якщо цільова функція має максимум більше ніж в одній кутовій точці, то вона досягає його в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих точок.*

Згідно з цією теоремою, замість дослідження нескінченної множини допустимих планів (розв'язків) для знаходження серед них оптимального розв'язку, необхідно дослідити лише скінченне число кутових точок многогранника розв'язків.

Доводиться, що вектор $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ є опорним планом задачі (2) – (4) тоді й тільки тоді, коли $X$ є вершиною многогранника $\Omega$ допустимих планів.

Отже, якщо цільова функція задачі лінійного програмування (2) – (4) обмежена на опуклому многограннику розв'язків, заданому умовами задачі, то існує крайня точка (опорний план) цієї множини, у якій цільова функція досягає максимуму. Тому для розв'язування задачі лінійного програмування необхідно дослідити тільки вершини многогранника розв'язків – опорні плани задачі.

## §3. Графічний (градієнтний) метод розв'язування задач лінійного програмування

В основі графічного (градієнтного) методу розв'язування задачі лінійного програмування лежить її геометричний зміст. Застосовується цей метод в основному при розв'язуванні задач з двома незалежними змінними і тільки деяких задач, коли є три незалежні змінні, оскільки графічно складно побудувати многогранник розв'язків у $n$-вимірному просторі, де $n \geq 3$.

Розглянемо спочатку задачу лінійного програмування у випадку двох незалежних змінних:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min) \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Вважатимемо, що система умов-обмежень (2) при виконанні обмежень (3) сумісна і її многокутник розв'язків обмежений.

Кожна з нерівностей (2) за умов (3), як відомо [13], визначає півплощину з межею $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Переріз цих півплощин визначає опуклу множину – многокутник допустимих планів (розв'язків) $\Omega$.

З геометричної точки зору розв'язати задачу лінійного програмування (1) – (3) означає, що треба знайти таку кутову точку або набір точок з $\Omega$, де досягається екстремум цільової функції $f$. Для цього використовують вектор $\vec{n} = (c_1; c_2)$, який є нормальним вектором прямої $f = h$ або $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, $h \in \mathbb{R}$. Прямі $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, $h \in \mathbb{R}$, називають **лініями рівня** функції $f$. Вони зростають найшвидше у напрямку вектора $\vec{n}$.

Опишемо **алгоритм графічного методу** розв'язування задачі лінійного програмування.

1) Знаходимо область допустимих розв'язків $\Omega$. Якщо ця множина порожня, то задача розв'язку немає.

2) Будуємо вектор $\vec{n} = (c_1; c_2)$.

3) Проводимо лінію рівня $(f)$, яка перпендикулярна до $\vec{n}$ і проходить через початок координат. При збільшенні $h$ пряма $f = h$ зсувається паралельно у напрямку вектора $\vec{n}$. Якщо $A$ – перша точка зустрічі прямої рівня з многокутником розв'язків $\Omega$, $f(A) = h_0$, то пряма рівня $f(x) = h$ при $h < h_0$ не має спільних точок з $\Omega$. Звідси випливає, що $h_0 = \min f$ на $\Omega$. Аналогічно, якщо $B$ – остання точка перетину лінії рівня з $\Omega$, то $f(B) = \max f$ на $\Omega$.

Якщо першої точки перетину лінії рівня $(f)$ з $\Omega$ не існує, тобто при всіх $h$ з деякого проміжку $(-\infty; h_0)$ пряма рівня перетинає $\Omega$, то $f_{\min} = -\infty$, і задача на мінімум нерозв'язна. Якщо не існує останньої точки перетину, то $f_{\max} = +\infty$, і задача на максимум нерозв'язна.

Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна до однієї із сторін многокутника розв'язків, то в цьому випадку екстремум досягається в усіх точках відповідної сторони, а задача лінійного програмування матиме безліч розв'язків

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda) X_2^*,$$

де $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^*$ і $X_2^*$ – оптимальні розв'язки (кутові точки).

4) Знаходимо координати точки екстремуму і значення цільової функції в ній. Для знаходження координат точки $A$ екстремуму (вершини многокутника $\Omega$) треба розв'язати систему лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j, \end{cases}$$

де $i$ та $j$ – номера прямих, що обмежують область допустимих розв'язків $\Omega$, на перетині яких знаходиться вершина $A$.

**Приклад 1.** Продаючи товари двох типів $P_1$ і $P_2$ торговельне підприємство використовує чотири види ресурсів $S_1$, $S_2$, $S_3$ і $S_4$. Норми витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару та обсяг ресурсів наведено в таблиці

| Ресурси | Норма витрат ресурсів | | Запаси ресурсів |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 2 | 2 | 12 |
| $S_2$ | 1 | 2 | 8 |
| $S_3$ | 4 | 0 | 16 |
| $S_4$ | 0 | 4 | 12 |

Прибуток від реалізації одиниці товару $P_1$ становить 2 гр.од., а товару $P_2$ – 3 гр.од.

Знайти оптимальний план реалізації товарів, який забезпечує максимальний прибуток.

◀ Нехай $x_j$ – кількість одиниць товару $P_j$, $j \in \{1, 2\}$, яку треба реалізувати. Математична модель задачі має вигляд:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 \le 16, \\ 4x_2 \le 12; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Побудуємо область допустимих розв'язків. Спочатку проведемо прямі:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 12 \quad (1), \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \quad (2), \\ 4x_1 &= 16 \quad (3), \\ 4x_2 &= 12 \quad (4). \end{aligned}$$

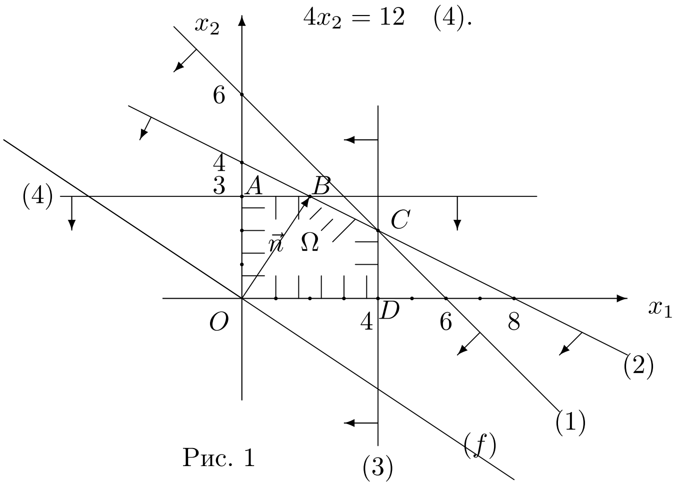



Рис. 1

Кожна з цих прямих ділить площину $Ox_1x_2$ на дві частини. З'ясуємо, яку півплощину утворюють точки, координати яких задовольняють обмеження-нерівність. Розглянемо це на прикладі першої нерівності. Для цього візьмемо точку $O(0;0)$ і підставимо її координати в перше обмеження:

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12 \quad \text{або} \quad 0 \leq 12.$$

Оскільки нерівність правильна, то нерівність $2x_1 + 2x_2 \leq 12$ задовольняють координати тих точок, які знаходяться у тій же півплощині, що й точка $O$. Цю півплощину відзначаємо стрілочками на прямій (1). Аналогічно знаходимо півплощини, які визначаються другим і третім обмеженнями-нерівностями. Переріз одержаних півплощин й визначає многокутник розв'язків $OABCD$.

Для побудови лінії рівня $2x_1 + 3x_2 = 0$ $(f)$ відкладемо нормальний вектор $\vec{n} = (2;3)$ і через точку $O$ проведемо пряму, перпендикулярну до цього вектора. Пряму $(f)$ пересуваємо паралельно самій собі у напрямку вектора $\vec{n}$. З рисунка 1 випливає, що опорною до многокутника розв'язків $\Omega$ ця пряма є в точці $C$, де функція $f$ набуває максимального значення. Очевидно, що точка $C$ лежить на перетині прямих (1), (2), (3). Знайдемо її координати, розв'язавши, наприклад, систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 12, \\ \qquad\ \ 4x_1 = 16, \end{cases}$$

звідки одержуємо, що $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

Отже, оптимальний розв'язок $X^* = (4;2)$, $f_{\max} = f(X^*) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$, а це означає, що для забезпечення максимального прибутку, що становить 14 гр.од., треба реалізувати чотири одиниці товару $P_1$ і дві одиниці товару $P_2$.▶

**Приклад 2.** Розв'язати задачу про складання кормового раціону (приклад 2 з §1), математична модель якої має вигляд:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \min;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◀ Побудуємо многокутник розв'язків. Для цього в системі координат $Ox_1x_2$ зобразимо межові прямі:

$$\begin{array}{lr} 3x_1 + x_2 = 9 & (1), \\ x_1 + 2x_2 = 8 & (2), \\ x_1 + 6x_2 = 12 & (3), \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0 & (4) \end{array}$$

і з'ясуємо, яку півплощину визначає кожне обмеження-нерівність відносно відповідної прямої (рис. 2).

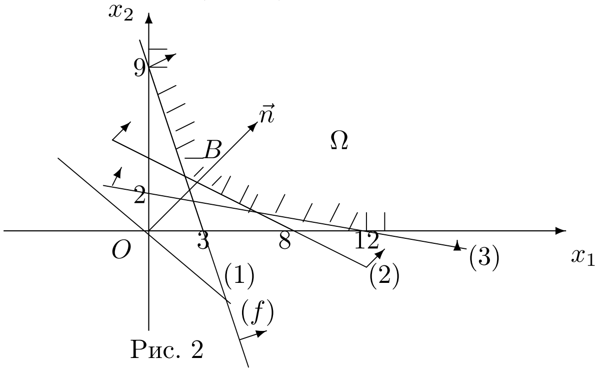



Рис. 2

Будуємо вектор $\vec{n} = (4; 6) = 2(2; 3)$ і пряму рівня $4x_1 + 6x_2 = 0$ $(f)$. Якщо рухати цю пряму у напрямку вектора $\vec{n}$, то вперше вона стає опорною до многокутника розв'язків $\Omega$ у точці $B$, а це означає, що в цій точці функція $f$ набуває мінімального значення. Точка $B$ лежить на перетині прямих (1) і (2), а тому для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \end{cases}$$

звідки випливає, що $x_1 = 2$, а $x_2 = 3$.

Отже, оптимальний розв'язок $X^* = (2; 3)$, а $f_{\min} = f(X^*) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$.

Це означає, що для забезпечення необхідного добового раціону при мінімальних витратах у 26 гр.од. треба скласти раціон з 2 од. корму $P_1$ і 3 од. корму $P_2$. ▶

**Зауваження.** За допомогою графічного методу можна розв'язувати задачі лінійного програмування, система обмежень яких містить $n$ невідомих і $m$ лінійно незалежних рівнянь, якщо $n - m = 2$.

**Приклад 3.** Розв'язати задачу

$$f = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \min;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 + x_5 = 5, \\ \qquad\quad x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 - x_5 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 \quad -x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

◀ Маємо $n = 5$, $m = 3$. Оскільки $n-m = 5-3 = 2$, то задачу можна розв'язати графічно. Для цього спочатку запишемо систему обмежень у базисній формі, скориставшись методом Жордана-Гаусса

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 0 | $\boxed{1}$ | 1 | 1 | $-1$ | 2 |
| 0 | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 2 |
| 0 | 0 | $\boxed{1}$ | $-1$ | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | $-2$ | 1 |
| 0 | 0 | 1 | $-1$ | 1 | 1 |

.

Отже, система обмежень набула вигляду

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad +2x_5 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad +2x_4 - 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 \quad -x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

де $x_1$, $x_2$, $x_3$ – базисні змінні, а $x_4$, $x_5$ – вільні змінні.

Запишемо задачу, виразивши цільову функцію та обмеження через вільні змінні $x_4$ і $x_5$. З системи обмежень випливає, що

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_5, \\ x_2 = 1 - 2x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5. \end{cases}$$

Підставивши ці вирази в цільову функцію, дістанемо

$$\tilde{f} = 3 - 2x_5 + 2(1 + x_4 - x_5) + x_5 = 2x_4 - 3x_5 + 5.$$

Якщо в системі обмежень відкинути базисні змінні $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ і $x_3 \geq 0$, то одержимо таку задачу лінійного програмування:

$$\tilde{f} = 2x_4 - 3x_5 + 5 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_5 \leq 3; \\ 2x_4 - 2x_5 \leq 1, \\ -x_4 + x_5 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Розв'яжемо цю задачу графічно (рис. 3), де $\vec{n} = (2; -3) = 2\left(1; -\dfrac{3}{2}\right)$.

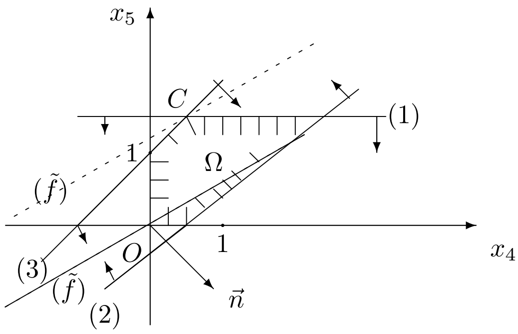



Рис. 3

Очевидно, що $\tilde{f}$ досягає мінімуму в точці $C$ перетину прямих (1) і (3):

$$\begin{cases} 2x_5 = 3, \\ -x_4 + x_5 = 1; \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_5^* = \dfrac{3}{2}, \\ x_4^* = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Тоді $\tilde{f}_{\min} = \tilde{f}\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 5 = \dfrac{3}{2}$.

Оскільки $x_1^* = 3 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 0$; $x_2^* = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} 2 \cdot 2 = 3$; $x_3^* = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$, то оптимальним розв'язком вихідної задачі є $X^* = \left(0; 3; 0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$, $f_{\min} = \dfrac{3}{2}$. ▶

## Вправи

**1.** Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

1) $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

2) $f = 2x_1 - 10x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

3) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

4) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

5) $f = 3x_1 + 5x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ -3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \ge 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

6) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 1,\ \ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

7) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$

8) $f = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

**2.** За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

1) $f = 4x_1 + 2x_2 + x_4 - 8 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 6\};$

2) $f = -x_1 + 4x_2 +$
$+2x_4 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\};$

3) $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\};$

4) $f = -x_1 + 5x_2 - 16x_3 +$
$+5x_4 + x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 10, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\};$

5) $f = 2x_4 + 3x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_4 + x_5 + 3x_6 = 9, \\ x_3 + x_4 + 2x_6 = 8, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 6\};$

6) $f = 7x_1 + 7x_2 + x_3 - x_5 - 50 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 55, \\ 11x_1 + 12x_2 + x_4 = 132, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\};$

7) $f = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 37, \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 7\}.$

## Відповіді

**1.** 1) $X^* = (2,25; 0,5)$, $f_{\max} = 7,25$; 2) $X^* = (0; 1)$, $f_{\min} = -10$; 3) $X^* = (2; 5)$, $f_{\max} = 17$; 4) $X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda) X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (6; 1)$, $X_2^* = (2; 5)$, $f_{\max} = 14$; 5) $f_{\max} = +\infty$; 6) $X^* = \lambda X_!^* + (1 - \lambda) X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $X_1^* = (3; 1)$, $X_2^*(4; 0)$, $f_{\min} = -4$; 7) $X^* = (3; 3)$, $f_{\max} = 12$; 8) $f_{\min} = -\infty$.

**2.** 1) $X^* = (6; 2; 0; 6; 4; 0)$, $f_{\max} = 26$; 2) $X^* = (2; 6; 33; 0; 0)$, $f_{\max} = 22$; 3) $X^* = (6; 0; 2; 0; 33)$, $f_{\max} = 29$; 4) $X^* = (4; 0; 3; 14; 0)$, $f_{\max} = 18$; 5) $X^* = (1; 0; 1; 3; 0; 2)$, $f_{\max} = 12$; 6) $X^* = (5; 5; 0; 17; 0)$, $f_{\max} = 20$; 7) а) $X^* = (8; 9; 9; 0; 0; 23; 41)$, $f_{\max} = 6$; б) $X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda) X_2^*$, $X_1^* = (1; 4; 0; 18; 40; 24; 0)$, $X_2^* = (5; 1; 11; 37; 23; 0; 0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\min} = 19$.

## §4. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Цей метод є універсальним, оскільки дозволяє розв'язувати практично будь-яку задачу лінійного програмування, записану в канонічному вигляді.

Ідея симплексного методу полягає в тому, що початковий опорний план послідовно покращується і за певну кількість етапів (ітерацій) доводиться до оптимального. Значення цільової функції при цьому переході для задач на максимум не спадає, а для задач на мінімум не зростає. Напрямок переходу від одного опорного розв'язку до іншого вибирається згідно з критерієм оптимальності цільової функції задачі. При цьому використовується той факт, що коли задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він відповідає принаймні одній кутовій точці многогранника розв'язків, тобто допустимому опорному плану.

**4.1. Алгоритм симплексного методу.** Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в базисній формі

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 & & & +a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & x_2 & & +a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & & x_m & +a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\};$$

$$b_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \qquad (1)$$

Умови такої задачі зручно записувати у вигляді симплексної таблиці

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | $c_1$ | $c_2$ | $\ldots$ | $c_m$ | $c_{m+1}$ | $\ldots$ | $c_s$ | $\ldots$ | $c_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $\ldots$ | $A_m$ | $A_{m+1}$ | $\ldots$ | $A_s$ | $\ldots$ | $A_n$ |
| 1 | $A_1$ | $c_1$ | $b_1$ | 1 | 0 | $\ldots$ | 0 | $a_{1m+1}$ | $\ldots$ | $a_{1s}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ |
| 2 | $A_2$ | $c_2$ | $b_2$ | 0 | 1 | $\ldots$ | 0 | $a_{2m+1}$ | $\ldots$ | $a_{2s}$ | $\ldots$ | $a_{2n}$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $r$ | $A_r$ | $c_r$ | $b_r$ | 0 | 0 | $\ldots$ | 0 | $a_{rm+1}$ | $\ldots$ | $a_{rs}$ | $\ldots$ | $a_{rn}$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $m$ | $A_m$ | $c_m$ | $b_m$ | 0 | 0 | $\ldots$ | 1 | $a_{mm+1}$ | $\ldots$ | $a_{ms}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ |
| $m+1$ | | | $f_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\ldots$ | $\Delta_m$ | $\Delta_{m+1}$ | $\ldots$ | $\Delta_s$ | $\ldots$ | $\Delta_n$ |

.

Над позначеннями векторів $A_1$, …, $A_n$ записуються коефіцієнти цільової функції. У стовпчику Б (базис) записуємо одиничні базисні вектори; у стовпчику $C_б$ – коефіцієнти цільової функції, які відповідають векторам базису; у стовпчику $A_0$ – значення базисних змінних; у стовпчиках $A_1$, …, $A_n$ – коефіцієнти $a_{ij}$ матриці умов.

При заповненні $(m+1)$-го рядка користуємося тим, що

$$f_0 = C_б A_0 = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m,$$

$$f_j = C_б A_j = c_1a_{1j} + c_2a_{2j} + \ldots + c_ma_{mj},$$

$$\Delta_j = f_j - c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Очевидно, що коли цільова функція містить лише вільні змінні, то елементи $(m+1)$-го рядка визначається так: $f_0 = 0$, $\Delta_j = 0$ для базисних змінних $x_1$, …, $x_m$ і $\Delta_j = -c_j$ для вільних змінних $x_{j+1}$, …, $x_n$.

Опишемо алгоритм симплексного методу по кроках.

**1.** Переглядаємо знаки всіх коефіцієнтів $\Delta_j$ оціночного $(m+1)$-го рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то задача розв'язана: допустимий базисний розв'язок $X_0 = (b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ оптимальний, $f_{\max} = f_0$. Якщо не всі $\Delta_j \geq 0$, то переходимо до кроку 2.

**2.** Серед значень $\Delta_j < 0$ вибираємо найбільше за абсолютною величиною, і стовпчик, який йому відповідає, беремо за провідний. Нехай це буде стовпчик $A_s$. Якщо в провідному стовпчику всі елементи $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то задача

(1) розв'язку не має, бо цільова функція необмежена, тобто $f_{\max} = +\infty$. Якщо ж серед $a_{is}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ є додатні, то переходимо до кроку 3.

**3.** Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо відношення $\dfrac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо серед них найменше, тобто знаходимо симплексне відношення $\theta_{0s} = \min\limits_{a_{is}>0} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{is}} \right\}$, і називаємо рядок, де воно досягається, провідним. Нехай це буде рядок з номером $r$. Елемент $a_{rs}$, який знаходиться на перетині провідного стовпчика і провідного рядка беремо за провідний (розв'язувальний).

**4.** Заповнюємо наступну симплексну таблицю. Для цього переписуємо провідний рядок, поділивши його на провідний елемент, у стовпчику Б (базис) замінюємо вектор $A_r$ на $A_s$, а в стовпчику $C_{\text{Б}}$ – $c_r$ на $c_s$. Решту коефіцієнтів таблиці знаходимо за методом Жордана-Гаусса (за правилом прямокутника). Одержаний новий опорний план перевіряємо на оптимальність, тобто переходимо до кроку 1.

**Зауваження 1.** Якщо на кроці 2 є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок $\Delta_j$, то в базис включають той вектор, якому відповідає $\max\limits_j c_j$. Точнішим є таке правило: *якщо не виконується умова оптимальності* $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$*, то в базис включають той вектор, якому відповідає* $\min\limits_j \theta_{0j}\Delta_j$*, де мінімум береться по тих* $j$*, для яких* $\Delta_j < 0$*; якщо ж мінімальних оцінок декілька, то в базис включають вектор, якому відповідає* $\max\limits_j c_j$.

**Зауваження 2.** Якщо в задачі (1) $f \to \min$, то умовою оптимальності плану є $\Delta_j \leq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо ж умова оптимальності не виконується, то в базис включають вектор, якому відповідає найбільше $\Delta_j$. У випадку, коли таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min\limits_j c_j$.

**Зауваження 3.** Якщо в останній симплексній таблиці виконується умова оптимальності плану, але число тих $\Delta_j$, які дорівнюють нулю, більше за число обмежень $m$, то це означає, що оптимальний план не єдиний. Для знаходження другого оптимального плану, треба перейти до наступної симплексної таблиці, взявши за провідний той з небазисних стовпчиків, якому відповідає $\Delta_j = 0$, а провідний рядок вибравши за симплексним відношенням.

**Приклад 1.** Підприємство на основі трьох типів ресурсів $S_1$, $S_2$ і $S_3$ може організувати виробництво певної продукції двома різними способами $P_1$ і $P_2$.

Запаси ресурсів і витрати кожного типу ресурсів при кожному способі виробництва визначено таблицею

| Типи ресурсів | Витрати ресурсів | | Запаси ресурсів |
|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | |
| $S_1$ | 1 | 2 | 4 |
| $S_2$ | 1 | 1 | 3 |
| $S_3$ | 2 | 1 | 8 |

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тис. виробів, при другому – 4 тис. виробів.

Скільки місяців повинне працювати підприємство кожним з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції?

◀ Складемо математичну модель задачі. Нехай $x_1$ – час (в місяцях) роботи підприємства способом $P_1$, а $x_2$ – час (в місяцях) роботи підприємства способом $P_2$. Тоді математична модель має вигляд:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Для того щоб розв'язати цю задачу симплексним методом, зведемо її до канонічного базисного вигляду, ввівши додаткові (балансуючі) змінні $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$ і $x_5 \ge 0$:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 = 8; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Розв'язуватимемо цю задачу за допомогою симплексних таблиць

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_3$ | 0 | 4 | 1 | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $A_5$ | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | $-3$ | $-4$ | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $A_2$ | 4 | 2 | $1/2$ | 1 | $1/2$ | 0 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 1 | $\boxed{1/2}$ | 0 | $-1/2$ | 1 | 0 |
| 3 | $A_5$ | 0 | 6 | $3/2$ | 0 | $-1/2$ | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 8 | $-1$ | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | $A_2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | $-1$ | 0 |
| 2 | $A_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | 2 | 0 |
| 3 | $A_5$ | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | $-3$ | 1 |
| $m+1$ | | | 10 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |

.

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -4 < 0$. Оскільки найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_2$, то до базису треба ввести вектор $A_2$ і вивести $A_3$, бо

$$\theta_{02} = \min\left\{\frac{4}{2}; \frac{3}{1}; \frac{8}{1};\right\} = \min\{2; 3; 8\} = 2, \quad i = 1.$$

Провідним елементом є $\boxed{2}$. Переходимо до наступної симплексної таблиці, зробивши перерахунок елементів таблиці за методом Жордана-Гаусса.

У другій симлексній таблиці є від'ємне $\Delta_1 = -1$. Стовпчик, який йому відповідає, беремо за провідний. Провідний рядок виберемо за симплексним відношенням

$$\theta_{01} = \min\left\{\frac{2}{1/2}; \frac{1}{1/2}; \frac{6}{3/2}\right\} = \min\{4; 2; 4\} = 2, \quad i = 2.$$

Переходимо до третьої симплексної таблиці, взявши за провідний елемент $\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

У третій симплексній таблиці умова оптимальності виконується, а це означає, що задача розв'язана. Оптимальним розв'язком є $X^* = (2;1;0)$, $f_{\max} = 10$.

Отже, за першим способом підприємство повинно працювати два місяці, а за другим – один місяць. При цьому максимальний випуск продукції становитиме 10 тис. од.▶

**Приклад 2.** Розв'язати задачу

$$f = 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

◀ Оскільки задача записана в канонічній базисній формі, то розв'язуватимемо її за допомогою симплексного методу

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 0 | 2 | $-4$ | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_1$ | 0 | 7 | 1 | 3 | $-1$ | 0 | 2 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 12 | 0 | $-2$ | $\boxed{4}$ | 1 | 0 |
| $m+1$ | | | 0 | 0 | $-2$ | 4 | 0 | $-2$ |
| 1 | $A_1$ | 0 | 10 | 1 | $\boxed{5/2}$ | 0 | $1/4$ | 2 |
| 2 | $A_3$ | $-4$ | 3 | 0 | $-1/2$ | 1 | $1/4$ | 0 |
| $m+1$ | | | $-12$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $-2$ |
| 1 | $A_2$ | 2 | 4 | $2/5$ | 1 | 0 | $1/10$ | $4/5$ |
| 2 | $A_3$ | $-4$ | 5 | $1/5$ | 0 | 1 | $3/10$ | $2/5$ |
| $m+1$ | | | $-12$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | $-2$ |

.

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо $\Delta_3 = 4 > 0$. Стовпчик $A_3$ беремо за провідний. Очевидно, що провідним елементом є $\boxed{4}$. Складемо другу симплексну таблицю, замінивши в базисі вектор $A_4$ на вектор $A_3$, і зробивши перерахунок елементів таблиці за методом Жордана-Гаусса. У другій симплексній таблиці умова оптимальності виконується, бо всі $\Delta_j \leq 0$, $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Це означає, що задача розв'язана і $X_1^* = (10;0;3;0;0)$, $f_{\min} = -12$. Оскільки нульових $\Delta_j$ більше ніж обмежень задачі, то задача має безліч розв'язків. Для того щоб знайти другий оптимальний план, перейдемо до третьої симплексної таблиці, взявши за провідний стовпчик $A_2$, бо йому відповідає $\Delta_2 = 0$, але він не є базисним. Провідний елемент $\boxed{5/2}$ виберемо за допомогою симплексного відношення. Тоді одержимо, що $X_2^* = (0;4;5;0;0)$. Тому сукупність розв'язків задачі має вигляд:

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*, \quad \text{де } 0 \le \lambda \le 1,$$

а $f_{\min} = -12$.▶

**4.2. Метод штучного базису (М-метод).** У попередньому пункті описано алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом. При цьому обов'язковою умовою є наявність в системі обмежень одиничного базису. В багатьох задачах ця умова виконується, а в загальному випадку такий базис треба шукати. Нижче ми розглянемо один із методів знаходження одиничного базису, який називають **методом штучного базису** або **М-методом**.

Нехай задано канонічну задачу лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{2}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{3}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4}$$

$$b_i \ge 0, \ \ i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{5}$$

де система обмежень не містить одиничного базису.

Для одержання одиничного базису додамо до лівої частини кожної з рівностей в системі обмежень (3) по одній змінній $x_{n+i} \ge 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, які назвемо **штучними** і розглянемо **розширену задачу (М-задачу)**:

$$\tilde{f} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max; \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j \in \{1, \ldots, m+n\}, \tag{8}$$

$$b_i \geq 0, \;\; i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{9}$$

При цьому вважаємо, що $M$ – як завгодно велике додатне число.

У задачі (6) – (9) одиничні вектори-стовпчики $A_{n+1}$, $A_{n+2}$, …, $A_{n+m}$ утворюють **штучний одиничний базис**. Йому відповідають початковий опорний план $X_0 = (0, 0, \ldots, 0; b_1, \ldots, b_m)$, де нульовими є перші $n$ координат, і значення цільової функції $\tilde{f}_0 = -Mb_1 - Mb_2 - \ldots - Mb_m$.

Наявність у цільовій функції $\tilde{f}$ коефіцієнтів $-M$ при штучних змінних $x_{n+i}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, еквівалентна штрафу за включення їх в опорний план. Вважають, що число $-M$ за абсолютною величиною значно перевищує решту коефіцієнтів цільової функції, що дозволяє виводити з базису штучні вектори і вводити в базис вектори вихідної задачі (2) – (5).

Оскільки задача (6) – (9) має початковий опорний план, то для її розв'язування можна застосувати симплексний метод.

Між розв'язками задачі (2) – (5) і (6) – (9) існує певний зв'язок.

**Теорема.** *Якщо в оптимальному плані* $\tilde{X}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*;$ $0, \ldots, 0)$ *М-задачі всі штучні змінні дорівнюють нулю, тобто* $x_{n+i}^* = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$*), то план* $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *є оптимальним планом вихідної задачі.*

◀ Очевидно, що плани $\tilde{X}^*$ і $X^*$ відрізняються $m$ останніми координатами, які дорівнюють нулю. Отже, якщо вектор $\tilde{X}^*$ задовольняє обмеження (7) – (9), то вектор $X^*$ задовольняє обмеження (3) – (5), тобто є планом вихідної задачі. При цьому, оскільки відмінні від нуля координати планів $\tilde{X}^*$ і $X^*$ збігаються, значення цільових функцій $\tilde{f}(\tilde{X}^*)$ і $f(X^*)$ також збігаються.

Доведемо, що $X^*$ – оптимальний план задачі (2) – (5). Нехай це не так. Тоді існує план $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ вихідної задачі такий, що $f(X_0) > f(X^*)$. Тоді для плану розширеної задачі $\tilde{X}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; 0, \ldots, 0)$, маємо $\tilde{f}(\tilde{X}_0) = f(X_0) > f(X^*) = \tilde{f}(\tilde{X}^*)$, тобто $\tilde{f}(\tilde{X}_0) > \tilde{f}(\tilde{X}^*)$. Останнє суперечить тому, що $X^*$ оптимальний план М-задачі. ▶

Отже, якщо, розв'язавши М-задачу, одержимо її оптимальний план, у якого всі штучні змінні $x^*_{n+i} = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то його перші $n$ координат дають оптимальний план задачі (2) – (5).

Можна довести, що коли:

1) *в оптимальному плані М-задачі принаймні одна з штучних змінних не дорівнює нулю, то вихідна задача не має допустимих планів, тобто її умови-обмеження несумісні*;

2) *М-задача не має розв'язків, то й вихідна задача нерозв'язна.*

Для відшукання оптимального плану розширеної задачі у випадку, коли не задано величину $M$, застосовують симплексний метод із складанням симплексних таблиць, які мають на один рядок більше, ніж звичайна таблиця. За $(m+2)$-им рядком визначають вектор, який треба включити в базис. Оскільки $\tilde{\Delta}_j = \tilde{f}_j - \tilde{c}_j = = f_j - c_j + \lambda_j M = \Delta_j + \lambda_j M$, то до $(m+1)$-го рядка включають $\Delta_j$, а до $(m+2)$-го рядка – $\lambda_j$. При переході від одного опорного плану до другого в базис вводять вектор, який відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу $\lambda_j$ $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виключений з базису в результаті деякої ітерації, надалі можна не вводити у жодний з наступних базисів, і, отже, перетворення стовпчика цього вектора зайве. Однак, якщо треба знайти розв'язок двоїстої задачі до заданої (про що мова буде пізніше), то таке перетворення слід проводити. Може трапитись так, що в результаті деякої ітерації жодний з штучних векторів з базису не буде виключено.

Перерахунок симплексних таблиць при переході від одного опорного плану до другого проводять за загальними правилами симплексного методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку проводимо до тих пір, поки або: 1) *всі штучні вектори виведені з базису*; 2) *не всі штучні вектори виведені з базису, але* $(m+2)$*-й рядок не містить більше від'ємних елементів у стовпчиках* $A_1, \ldots, A_{n+m}$.

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану вихідної задачі (2) – (5) й знаходження її оптимального плану продовжують за $(m+1)$-им рядком.

У другому випадку, якщо елемент, який стоїть в $(m+2)$-му рядку в стовпчику $A_0$ від'ємний, то вихідна задача розв'язку не має, а якщо він дорівнює нулю, то знайдений опорний план вихідної задачі є виродженим, бо базис містить принаймні один вектор штучного базису.

**Приклад 3.** Розв'язати задачу

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◀ Оскільки відсутній одиничний базис, то введемо штучні базисні змінні $x_5 \geq 0$ і $x_6 \geq 0$. Тоді одержимо таку розширену задачу:

$$\tilde{f} = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Розв'язування цієї розширеної задачі, проведемо за допомогою симплексних таблиць

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $-M$ | $-M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| 1 | $A_5$ | $-M$ | 5 | $-1$ | $-6$ | 1 | $-1$ | 1 | 0 |
| 2 | $A_6$ | $-M$ | 1 | 3 | $-2$ | $\boxed{1}$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 | 0 |
| $m+2$ | | | $-6$ | $-2$ | 8 | $-2$ | 2 | 0 | 0 |
| 1 | $A_5$ | $-M$ | 1 | $-4$ | $-4$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ |
| 2 | $A_3$ | 1 | 1 | 3 | $-2$ | 1 | $-1$ | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 1 | 4 | $-3$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $m+2$ | | | $-4$ | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 |

.

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, бо $\lambda_1 = -2 < 0$ і $\lambda_3 = -2 < 0$. За провідний беремо стовпчик $A_3$, оскільки йому відповідає $\max_j c_j$. Провідний рядок, а отже, й провідний елемент вибираємо за допомогою симплексного відношення: $\theta_{02} = \min\left\{\frac{5}{1}; \frac{1}{1}\right\} = 1$, $i = 2$. Перейдемо до другої симплексної таблиці, взявши за провідний елемент $\boxed{1}$. У другій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку всі $\lambda_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, 6\}$, а це означає, що умова оптимальності для М-задачі виконується. Оскільки в оптимальному розв'язку $\tilde{X}^* = (0; 0; 1; 0; 4; 0)$ цієї задачі $x_5^* = 4 > 0$, то вихідна задача розв'язку не має, бо відсутні допустимі плани. ►

**Зауваження.** Якщо в задачі (2) – (5) $f \to \min$, то в розширеній задачі (6) – (9) цільова функція $\tilde{f} = c_1x_1 + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m} \to \min$. При цьому як і раніше $M$ достатньо велике додатне число. Симплексні таблиці з $(m+2)$- рядками перетворюємо за тими самими правилами, що й звичайні симплексні таблиці. Однак вектор, що вводиться в базис, відповідає тепер найбільшому додатному елементу $\lambda_j$ $(m+2)$-го рядка.

**Приклад 4.** Розв'язати задачу лінійного програмування

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, 3\}.$$

◄ Запишемо спочатку задачу в канонічній формі, ввівши додаткові (балансуючі) змінні $x_4 \geq 0$ і $x_5 \geq 0$. Одержимо задачу

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Ця задача еквівалентна даній, але відсутній початковий опорний план. Оскільки в другому обмеженні є базисна змінна $x_4$, то її можна ввести в шуканий базис. У перше і третє рівняння-обмеження введемо штучні змінні $x_6 \geq 0$ і $x_7 \geq 0$. Тоді одержимо розширену або М-задачу:

$$\tilde{f} = -2x_1 + x_2 - x_3 + Mx_6 + Mx_7 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 7\},$$

| $i$ | Б | $C_{б}$ | $A_0$ | $-2$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $M$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
| 1 | $A_6$ | $M$ | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 5 | 1 | 0 | $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | $A_7$ | $M$ | 3 | $\boxed{2}$ | 2 | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | 2 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m+2$ | | | 7 | 4 | 3 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 0 |
| 1 | $A_6$ | $M$ | 1 | 0 | $-1$ | $\boxed{1}$ | 0 | 1 | 1 | |
| 2 | $A_4$ | 0 | $7/2$ | 0 | $-1$ | $-2$ | 1 | $1/2$ | 0 | |
| 3 | $A_1$ | $-2$ | $3/2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $-1/2$ | 0 | |
| $m+1$ | | | $-3$ | 0 | $-3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| $m+2$ | | | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | $A_3$ | $-1$ | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | $\boxed{1}$ | | |
| 2 | $A_4$ | 0 | $11/2$ | 0 | $-3$ | 0 | 1 | $5/2$ | | |
| 3 | $A_1$ | $-2$ | $3/2$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $-1/2$ | | |
| $m+1$ | | | $-4$ | 0 | $-2$ | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | $A_5$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | | |
| 2 | $A_4$ | 0 | 3 | 0 | $-1/2$ | $-5/2$ | 1 | 0 | | |
| 3 | $A_1$ | $-2$ | 2 | 1 | $1/2$ | $1/2$ | 0 | 0 | | |
| $m+1$ | | | $-4$ | 0 | $-2$ | 0 | 0 | 0 | | |

.

У першій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є декілька додатних $\lambda_j$, а це означає, що умова оптимальності не виконується. За провідний стовпчик беремо $A_1$, бо йому відповідає найбільше $\lambda_j$. За провідний елемент беремо $\boxed{2}$, оскільки $\theta_{01} = \min\left\{\frac{4}{2}; \frac{5}{1}; \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}$, $i = 3$.

У другій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є два однакових додатних $\lambda_3 = \lambda_5 = 1$. За провідний візьмемо стовпчик $A_3$, бо йому відповідає $\min\limits_j c_j$. Очевидно, що провідним елементом є $\boxed{1}$.

У третій симплексній таблиці умова оптимальності виконується і з базису виведено штучні вектори. Це означає, що вихідна задача розв'язана: $X_1^* = \left(\frac{3}{2}; 0; 1\right)$, $f_{\min} = -4$. Оскільки в $(m+1)$-му рядку цієї таблиці є чотири $\Delta_j = 0$, а не три, то задача має альтернативний оптимальний план. Для того щоб знайти його, перейдемо до четвертої симплексної таблиці, взявши за провідний стовпчик $A_5$, бо йому відповідає $\Delta_5 = 0$ і він не є базисним, а за провідний елемент $\boxed{1}$. Тоді з четвертої симплексної таблиці одержимо, що $X_2^* = (2; 0; 0)$.

Отже, сукупність розв'язків задачі має вигляд:

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*, \quad \text{де } 0 \le \lambda \le 1,$$

$X_1^* = \left(\dfrac{3}{2}; 0; 1\right)$, $X_2^* = (2; 0; 0)$, а $f_{\min} = -4$. ►

**Приклад 5.** Розв'язати задачу

$$f = -x_1 - x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

◄ Розглянемо розширену задачу, ввівши одну штучну змінну $x_5 \ge 0$:

$$\tilde{f} = -x_1 - x_2 + Mx_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Запишемо розв'язування задачі у вигляді симплексних таблиць

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_5$ | $M$ | 1 | $\boxed{1}$ | $-1$ | 1 | 0 | 1 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 3 | 2 | $-3$ | 1 | 1 | 0 |
| $m+1$ | | | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $m+2$ | | | 1 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | 0 |
| 1 | $A_1$ | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | 0 | |
| 2 | $A_4$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $-1$ | 1 | |
| $m+1$ | | | $-1$ | 0 | 2 | $-1$ | 0 | |

.

У першій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є два однакових додатних значення $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, а тому за провідний стовпчик виберемо той, у якому стоїть $\min\limits_j c_j$, тобто $A_1$. За провідний рядок візьмемо перший, оскільки $\theta_{01} = \min\left\{\frac{1}{1}; \frac{3}{2}\right\} = 1$, $i = 1$, а за провідний елемент $\boxed{1}$.

Перейшовши до другої симплексної таблиці, бачимо, що в $(m+1)$-му рядку в стовпчику $A_2$ стоїть додатний елемент. Оскільки в цьому стовпчику всі елементи від'ємні, то задача розв'язку не має, бо цільова функція необмежена знизу на множині допустимих планів.▶

Отже, алгоритм М-методу такий: 1) *складаємо розширену задачу (6) – (9)*; 2) *знаходимо опорний план розширеної задачі*; 3) *за допомогою симплексного методу виключаємо штучні вектори з базису і як результат або знаходимо опорний план вихідної задачі (2) – (5), або встановлюємо її нерозв'язність*; 4) *використовуючи знайдений опорний план задачі (2) – (5) або знаходимо симплексним методом її оптимальний план, або доводимо її нерозв'язність.*

### Вправи

**1.** За допомогою симплексного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

1) $f = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \dots, 4\};$

2) $f = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\};$

3) $f = -x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \dots, 5\};$

4) $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 + 6x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 6\};$

5) $f = 2x_1 + 2x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 6x_4 = 24, \\ x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 30; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \dots, 4\};$

6) $f = x_2 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\};$

7) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_2 \ge 0;$

8) $f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,2,3\};$

9) $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - {}$
$- x_5 + 6x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,\ldots,6\};$

10) $f = -5x_3 - 3x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 30, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,\ldots,4\}.$

**2.** Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини $A$, $B$, $C$. Відомо, що утворена суміш повинна містити речовини $A$ не менше 6 одиниць, речовини $B$ – не менше 8 одиниць, речовини $C$ – не менше 12 одиниць. Речовини $A$, $B$, $C$ містяться в трьох видах продуктів $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ в концентраціях, що задаються таблицею

| Продукти | Хімічні речовини | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| $\Pi_1$ | 2 | 1 | 3 |
| $\Pi_2$ | 1 | 2 | 4 |
| $\Pi_3$ | 3 | 1,5 | 2 |

Одиниця продукту $\Pi_1$ коштує 2 гр.од., одиниця $\Pi_2$ – 3 гр.од., одиниця $\Pi_3$ – 2,5 гр.од. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою. Скласти математичну модель задачі та розв'язати її.

**3.** Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання наведені в таблиці. В ній також вказано загальний фонд робочого часу для кожного типу обладнання і прибуток від реалізації одного виробу даного виду

| Тип обладнання | Затрати часу на од-цю продукції | | | | Фонд робочого часу |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ | |
| Токарне | 2 | 1 | 1 | 3 | 300 |
| Фрезерне | 1 | 0 | 2 | 1 | 70 |
| Шліфувальне | 1 | 2 | 1 | 0 | 340 |
| Прибуток | 8 | 3 | 2 | 1 | |

.

Скласти математичну модель задачі і знайти обсяг випуску кожного виду продукції, при якому загальний прибуток від її реалізації буде максимальним.

**4.** Методом штучного базису розв'язати задачу:

1) $f = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\};$

2) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 +$
$+x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\};$

3) $f = 2x_1 - 3x_2 +$
$+6x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\};$

4) $f = -x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

5) $f = x_1 + 2x_2 -$
$-x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\};$

6) $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,\ 2,\ 3\};$

7) $f = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \ge 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \ge 36; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots, 4\};$

8) $f = 10x_1 - 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge -1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

**5.** Для перевезення вантажів використовують автомобілі двох типів $A$ і $B$, кожний з яких за один раз може перевезти 5 т вантажу. За одну ходку автомобіль типу $A$ витрачає 1,5 кг мастила та 50 л пального, автомобіль типу $B$ – 2 кг мастила та 30 л пального. На базі є 35 кг мастила і 900 л пального. Витрати на експлуатацію одного автомобіля типу $A$ становлять 8 гр.од, автомобіля $B$ – 5 гр.од. Необхідно перевезти 100 т вантажів. Скільки потрібно використовувати автомобілів обох типів, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними? Скласти математичну модель задачі та розв'язати її.

## Відповіді

**1.** 1) $X^* = (2; 4; 0; 0)$, $f_{\max} = 20$; 2) немає розв'язку; 3) $X^* = (4; 1; 9; 0; 0)$, $f_{\min} = -3$; 4) $f_{\max} \to +\infty$; 5) $X^* = \lambda X_!^* + (1-\lambda) X_2^*$,

$X_1^* = (4;0;5;0)$, $X_2^* = (0;0;3;2)$, $f_{\max} = 10$; 6) $X^* = (9;4;0;0;1)$, $f_{\max} = 3$; 7) $X^* = (2;4)$, $f_{\max} = 10$; 8) $X^* = (4;5;0)$, $f_{\min} = -11$; 9) немає розв'язку; 10) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (0;0;3;5)$, $X_2^* = (0;2;6;0)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 30$;

**2**. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ \ j \in \{1,2,3\};$

$X^* = \left(0; \dfrac{10}{3}; \dfrac{8}{9}\right)$, $f_{\min} = \dfrac{110}{9}$.

**3**. $f = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ \ j \in \{1,\ldots,4\};$

$X^* = (70;135;0;0)$, $f_{\max} = 965$.

**4.** 1) $X^* = \left(0;0;\dfrac{11}{2};35\right)$, $f_{\min} = -68$; 2) $X^* = \left(0;\dfrac{4}{3};0;2\right)$, $f_{\max} = 14/3$; 3) $f_{\min} \to -\infty$; 4) система умов несумісна; 5) $X^* = \left(0;\dfrac{4}{3};0;2\right)$, $f_{\max} = 14/3$; 6) $X^* = \lambda X_!^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_!^* = (4;0;2)$, $X_2^* = (2;4;0)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\max} = 14$; 7) система умов несумісна; 8) $X^* = \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{1}{3}\right)$, $f_{\min} = 15$. **5.** Математична модель задачі:

$f = 8x_1 + 5x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 \le 35, \\ 50x_1 + 30x_2 \le 900, \\ 5x_1 + 5x_2 = 100; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0,$

де $x_1$ – кількість автомобілів типу $A$, $x_2$ – кількість автомобілів типу $B$, $X^* = (10;10)$, $f_{\min} = 130$ гр.од.

## §5. Двоїстість (спряженість) у лінійному програмуванні

З кожною задачею лінійного програмування тісно пов'язана інша цілком визначена задача лінійного програмування, яка називається **двоїстою** до заданої. Початкову задачу при цьому називають **прямою** або **вихідною**. Зв'язок між прямою та двоїстою задачами є взаємним, тобто якщо вихідною вважати двоїсту задачу, то двоїста до неї збігається з прямою задачею. Цей зв'язок такий, що розв'язавши одну з них, ми одночасно знаходимо розв'язок другої, а тому їх називають парою взаємно двоїстих задач лінійного програмування.

**5.1. Поняття двоїстості в економічних задачах.** Розглянемо приклад, який показує, як в реальній економічній ситуації з'являються взаємно двоїсті задачі лінійного програмування.

Нехай підприємство має $m$ типів сировини (ресурсів) $S_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, і випускає $n$ видів продукції $P_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. На виробництво одиниці продукції $P_j$ витрачається $a_{ij}$ одиниць сировини $S_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Запаси сировини $S_i$ становлять $b_i$ одиниць, $i \in \{1, \ldots, m\}$, а прибуток від реалізації одиниці продукції $P_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, дає $c_j$ грошових одиниць. Треба знайти такий план $X = (x_1; \ldots; x_n)$ випуску продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним. Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{array} \right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

або в матричній формі

$$f = CX \to \max;$$

$$AX \leq A_0;$$
$$X \geq 0. \tag{4}$$

Вважатимемо, що величини $b_i$, $a_{ij}$, $c_j$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, мають той самий зміст, що й в задачі (1) – (3). Нехай, крім того, сировину можна направити або на виготовлення продукції, або на продаж іншому підприємству. Запитується, яку мінімальну ціну треба встановити за одиницю сировини $S_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, щоб прибуток від реалізації усіх запасів сировини був не меншим, ніж прибуток від реалізації продукції, яку можна виробити з цієї сировини.

Якщо позначити через $y_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, шукану ціну одиниці сировини типу $S_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то прибуток, який ми одержимо від продажу сировини необхідної для виготовлення одиниці продукції $P_j$, дорівнюватиме

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

а прибуток від реалізації усіх запасів сировини становитиме

$$\sum_{i=1}^{n} b_i y_i.$$

Щоб продаж сировини був не менш вигідний, ніж реалізація готової продукції, виготовленої з неї, повинна виконуватися нерівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Будь-яка система цін $y_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, установлених із врахуванням цієї умови, задовольняє інтереси продавця сировини. Зрозуміло, що врахування інтересів покупця вимагає вибору такої системи цін, яка мінімізує сумарну вартість сировини, тобто

$$F = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min.$$

Отже, математичною моделлю двоїстої задачі є така:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min; \tag{5}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \tag{6}$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{7}$$

або в матричній формі

$$F = YA_0 \to \min;$$

$$YA \geq C;$$

$$Y \geq 0. \tag{8}$$

Змінні $y_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, називають **оцінками** або **обліковими (неявними) цінами.**

Якщо порівняти задачі (1) – (3) і (5) – (7), то побачимо правило, у відповідності з яким одна симетрична задача (пряма) перетворюється в іншу (двоїсту). Змінних $y_i$ в задачі (5) – (7) стільки, скільки обмежень в системі нерівностей (2). Матриця умов задачі (5) – (7) є транспонованою до матриці умов задачі (1) – (3). Задача максимізації переходить у задачу мінімізації, обмеження-нерівності вигляду "$\leq$" замінюються обмеженнями-нерівностями вигляду "$\geq$". Вектор коефіцієнтів цільової функції прямої задачі стає вектором обмежень двоїстої задачі, а вектор $A_0$ обмежень задачі (1) – (3) стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі (5) – (7). Зауважимо, що коли одна з пари взаємно двоїстих задач симетрична, то й друга симетрична.

Зв'язок між обмеженнями взаємно двоїстих симетричних задач зручно зображати у вигляді такої схеми :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \longleftrightarrow y_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_j \geq 0 \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Це означає, що кожному обмеженню однієї задачі відповідає змінна з тим самим номером іншої задачі, а кожній змінній однієї задачі відповідає обмеження з тим самим номером іншої задачі.

**5.2. Різні вигляди математичних моделей двоїстих задач.**

Розглянемо канонічну задачу

$$f = CX \to \max;$$

$$AX = A_0;$$

$$X \geq 0. \tag{9}$$

Описані в попередньому пункті правила побудови двоїстої задачі для випадку симетричної задачі можна застосувати і до задачі (9), записавши її у вигляді симетричної задачі. Доведено, що двоїста задача до задачі (9) має вигляд:

$$F = YA_0 \to \min;$$

$$YA \geq C, \tag{10}$$

де на вектор $Y$ не накладається умова невід'ємності. Взаємно двоїсті задачі (9), (10) називають **несиметричними**, оскільки в прямій задачі система обмежень задана рівностями, а в двоїстій – нерівностями, у прямій задачі всі змінні невід'ємні, а в двоїстій можуть бути й від'ємними.

Отже, взаємно двоїсті задачі бувають двох типів: симетричні й несиметричні.

*Симетричні задачі*

| | |
|---|---|
| 1) Пряма задача | Двоїста задача |
| $f = CX \to \max;$ | $F = YA_0 \to \min;$ |
| $AX \leq A_0;$ | $YA \geq C;$ |
| $X \geq 0.$ | $Y \geq 0.$ |

2) Пряма задача

$f = CX \to \min;$
$AX \geq A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача

$F = YA_0 \to \max;$
$YA \leq C;$
$Y \geq 0.$

*Несиметричні задачі*

3) Пряма задача

$f = CX \to \max;$
$AX = A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача

$F = YA_0 \to \min;$
$YA \geq C.$

4) Пряма задача

$f = CX \to \min;$
$AX = A_0;$
$X \geq 0.$

Двоїста задача

$F = YA_0 \to \max;$
$YA \leq C.$

Тому спершу ніж записати двоїсту задачу до заданої прямої задачі, систему обмежень прямої задачі слід звести до відповідного вигляду.

**Приклад 1.** Записати двоїсту задачу до заданої:

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◀ Запишемо цю задачу у вигляді 2), помноживши першу нерівність в обмеженнях на $(-1)$:

$$f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Тоді двоїста задача до одержаної має вигляд

$$F = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \ \ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Оскільки ми множили першу нерівність вихідної задачі на $(-1)$, то в отриманій двоїстій задачі треба знак в $y_1$ змінити на протилежний. Отже, двоїстою до вихідної буде така задача:

$$F = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ -y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ -y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5; \end{cases}$$

$$y_1 \le 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0. \ \blacktriangleright$$

**Приклад 2.** Пряма задача має вигляд

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 0; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \le 0.$$

Записати двоїсту до неї.

$\blacktriangleleft$ Перше і друге обмеження двоїстої задачі будуть зі знаками "$\ge$ бо $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$, третє обмеження двоїстої задачі – зі знаком "$\le$ бо $x_3 \le 0$, а четверте – зі знаком "$=$ бо для $x_4$ не накладено обмеження на знак. Отже,

$$F = 5y_1 + 6y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 2, \\ -4y_1 + y_2 - 4y_3 \ge -1, \\ 2y_1 - y_2 \le 1, \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 = 5; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ \ y_3 \le 0.$$

При цьому $y_1 \ge 0$, оскільки перше обмеження прямої задачі має знак "$\le$ $y_3 \le 0$, бо третє обмеження прямої задачі має знак "$\ge$ а обмеження на знак $y_2$ не накладається через те, що друге обмеження у прямій задачі має знак "=". ▶

**5.3. Основні теореми двоїстості.** Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють теореми двоїстості. Розглянемо задачі (1) – (3) і (5) – (7) з економічною інтерпретацією, наведеною в пункті 5.1.

**Теорема 1.** *Для довільних допустимих розв'язків $X$ і $Y$ відповідно прямої та двоїстої задач правильна нерівність*

$$f(X) \le F(Y). \tag{11}$$

◀ Оскільки $X$ є допустимим планом задачі (4), то $AX \le A_0$ і $X \ge 0$. З того, що $Y$ допустимий план задачі (8), випливають нерівності $YA \ge C$, $Y \ge 0$. Тому $YAX \le YA_0$, $YAX \ge CX$, а отже, $CX \le YAX \le YA_0$, тобто $f(X) \le F(Y)$. ▶

Нерівність (11) називається **основною нерівністю теорії двоїстості.** Економічний зміст її полягає в тому, що при довільному допустимому плані виробництва $X$ загальна вартість всієї продукції не перевищує оцінки всіх ресурсів, яка відповідає довільному допустимому плану оцінок $Y$.

**Теорема 2.** *Нехай $X^*$ і $Y^*$ допустимі плани прямої (4) і двоїстої (8) задач такі, що*

$$f(X^*) = F(Y^*). \tag{12}$$

*Тоді план $X^*$ є оптимальним планом прямої задачі, а план $Y^*$ – оптимальним планом двоїстої задачі.*

◀ Поряд з планом $X^*$ розглянемо довільний допустимий план $X$ прямої задачі (4). Згідно з теоремою 1 і рівністю (12) маємо $f(X) \le F(Y^*) = f(X^*)$, а це означає, що $X^*$ – оптимальний план прямої задачі.

Аналогічно, якщо розглянути поряд з $Y^*$ довільний допустимий план $Y$ двоїстої задачі (8), то матимемо $F(Y) \ge f(X^*) = F(Y^*)$, тобто $Y^*$ є оптимальним планом задачі (7). ▶

З цієї теореми випливає, що коли серед допустимих розв'язків задач (4) і (8) знайдуться вектори $X^*$ і $Y^*$, які задовольняють умову(12), то вони будуть оптимальними розв'язками відповідних задач. З економічної точки зору це означає, що плани виробництва і оцінки ресурсів є оптимальними, коли ціна всієї продукції і сумарна оцінка ресурсів однакові.

**Теорема 3 (перша теорема двоїстості).** *Якщо одна з пари взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то має оптимальний план й друга задача, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій обох задач збігаються.*

*Якщо цільова функція однієї з пари двоїстих задач необмежена (для прямої задачі – зверху, а для двоїстої – знизу), то друга задача не має допустимих планів.*

**Приклад 3.** Для задачі

$$f = -2x_1 - 3x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

записати двоїсту й розв'язати обидві задачі.

◄ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = 4y_1 + 6y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \leq -2, \\ 2y_1 + y_2 \leq -3; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо обидві задачі графічно.

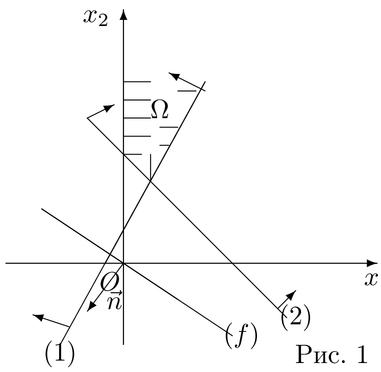



Рис. 1

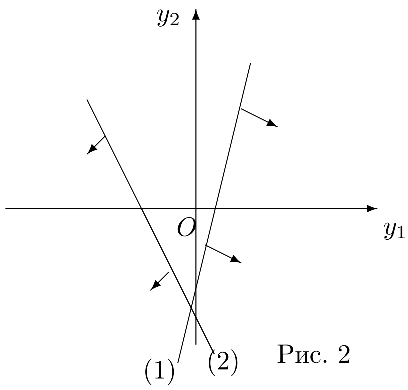



Рис. 2

З рис. 1 випливає, що пряма задача не має оптимального розв'язку, бо цільова функція $f$ необмежена знизу на множині допустимих планів $\Omega$.

Двоїста задача не має допустимих планів, як видно з рис. 2, бо многокутник розв'язків є порожньою множиною. ►

**Зауваження.** Твердження, обернене до другої частини теореми 3, взагалі кажучи, неправильне, тобто з того, що умови вихідної задачі суперечливі, не випливає, що цільова функція двоїстої задачі необмежена. Двоїста задача може так само не мати допустимих планів.

З'ясуємо **економічний зміст першої теореми двоїстості.** Максимальний прибуток $f_{\max}$ підприємство отримує, коли випуск продукції організовано за оптимальним планом $X^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$. Таку саму сума $F_{\min} = f_{\max}$ воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*; y_2^*; \ldots; y_m^*)$. Якщо ж використовуються інші допустимі плани $X \neq X^*$ і $Y \neq Y^*$, то згідно з основною нерівністю теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції менші, ніж витрати на її виробництво.

**Теорема 4 (друга теорема двоїстості).** *Допустимі розв'язки $X^*$ і $Y^*$ прямої та двоїстої задач є оптимальними планами відповідних задач тоді й тільки тоді, коли виконуються співвідношення:*

*1)* $(Y^*A - C)X^* = 0,$ *2)* $Y^*(A_0 - AX^*) = 0$

*або*

*1)* $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right)x_j^* = 0,$ *2)* $y_i^*\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right) = 0.$

*Умови 1) і 2) називають умовами* **доповнюючої нежорсткості**.

З цієї теореми випливає властивість ортогональності розв'язків пари взаємно двоїстих задач лінійного програмування: *якщо $j$-та компонента оптимального вектора $X^*$ додатна, то $j$-те обмеження двоїстої задачі повинно виконуватись як рівність. Аналогічно, якщо додатною є $i$-та компонента оптимального вектора $Y^*$, то повинно виконуватись як рівність $i$-те обмеження прямої задачі.*

**Приклад 4.** Знайти розв'язок прямої задачі

$$f = 15x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1,\, 2,\, 3\},$$

розв'язавши графічно двоїсту до неї.

◀ Двоїста задача до заданої має вигляд:

$$F = 9y_1 + 25y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 \geq 15, \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 6, \\ -y_1 + 4y_2 \geq 4. \end{cases}$$

Графічне розв'язування двоїстої задачі подамо на рис. 3

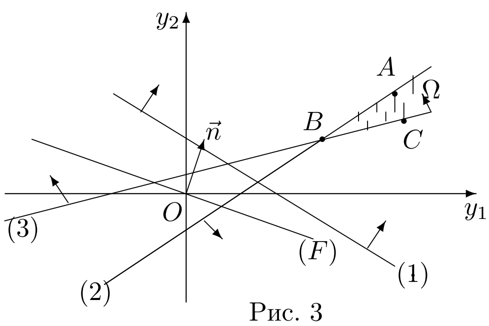



Рис. 3 .

Областю допустимих розв'язків є кут $ABC$. Очевидно, що лінія найнижчого рівня проходить через точку $B$, тобто в цій точці цільова функція $F$ досягає мінімуму. Координати точки $B$ знаходимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = 6, \\ -y_1 + 4y_2 = 4. \end{cases}$$

Маємо $y_1^* = 7,2$; $y_2^* = 2,8$, тобто $Y^* = (7,2; 2,8)$, $F_{\min} = 134,8$. Якщо підставити $Y^*$ в обмеження двоїстої задачі, то дістанемо

$$\begin{cases} 3 \cdot 7,2 + 2,8 \cdot 5 = 35,6 > 15, \\ 2 \cdot 7,2 - 3 \cdot 2,8 = 6, \\ -7,2 + 4 \cdot 2,8 = 4. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження задовольняється як строга нерівність, то згідно з другою теоремою двоїстості, змінна $x_1^* = 0$. Підставивши $x_1 = 0$ у систему обмежень вихідної задачі, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 9, \\ -3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

звідки випливає, що $x_2^* = 12,2$, а $x_3^* = 15,4$. Тому $X^* = (0; 12,2; 15,4)$, $f_{\max} = 134,8$. ►

Друга теорема двоїстості має певний **економічний зміст**. Згідно з умовою 1) теореми 4, якщо деяка продукція $P_j$ входить в оптимальний план виробництва, тобто $x_j^* > 0$, то при оптимальній системі цін двоїстої задачі витрати ресурсів на його виготовлення збігаються з вартістю цієї продукції.

З умови 2) випливає, що коли в оптимальній системі цін деякий ресурс $S_i$ має ціну $y_i^* > 0$, то у відповідності з оптимальним планом виробництва прямої задачі цей ресурс буде використаний повністю.

Скориставшись обмеженнями прямої та двоїстої задач, можна доповнити тлумачення умов 1) і 2) теореми 4.

З другого співвідношення теореми 4 випливає, що коли $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* > c_j$, то $x_j^* = 0$, а це означає, що при збитковості виробництва продукції $P_j$ вона не вироблятиметься на цьому підприємстві.

З першого співвідношення теореми 4, у свою чергу, одержуємо, що за умови $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$ оцінка $y_i^* = 0$, тобто, коли при оптимальному плані виробництва $i$-й ресурс використовуватиметься не повністю, то його оцінка $y_i^*$ повинна дорівнювати нулю. Отже, оптимальна двоїста оцінка ресурсу $y_i^*$ вказує, чи є відповідний ресурс дефіцитним, чи ні.

**5.4. Розв'язування пари двоїстих задач симплексним методом.** Нехай задача (1) – (3) розв'язана за допомогою симплексного методу і знайдено оптимальний план $X^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, який визначається базисом, утвореним векторами $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$. Позначимо через $C_{б} = (c_{i_1}; \ldots; c_{i_m})$

вектор-рядок, складений з коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції задачі (1) – (3), які відповідають цьому базису, а через $A^{-1}$ матрицю, обернену до матриці $A$, складеної з компонентів векторів $A_{i_1}, \ldots A_{i_m}$ базису. Доведено, що вектор $Y^* = C_{\text{б}} A^{-1}$ є оптимальним планом двоїстої задачі (5) – (7).

Отже, якщо знайдено за допомогою симплексного методу оптимальний план задачі (1) – (3), то з останньої симплексної таблиці визначають $C_{\text{б}}$ і $A^{-1}$, і, отже, за допомогою співвідношення $Y^* = C_{\text{б}} A^{-1}$ одержують оптимальний план двоїстої задачі (5) – (7).

Якщо ми маємо канонічну задачу лінійного програмування і двоїсту до неї, то у випадку, коли серед векторів $A_1, \ldots, A_n$, складених з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень прямої задачі, є $m$ одиничних, указану матрицю $A^{-1}$ утворюють числа перших $m$ рядків останньої симплексної таблиці, які стоять у стовпчиках цих векторів. Тоді відпадає необхідність визначати оптимальний план двоїстої задачі множенням $C_{\text{б}}$ на $A^{-1}$, оскільки компоненти цього плану збігаються з відповідними елементами $\Delta_j$ $(m+1)$-го рядка одиничних векторів, якщо коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елемента $\Delta_j$ цього рядка та $c_j$, якщо $c_j \neq 0$.

У випадку задачі (1) – (3) компоненти оптимального плану двоїстої задачі (5) – (7) збігаються з числами $\Delta_j$ $(m+1)$-го рядка останньої симплексної таблиці. Указані числа стоять у стовпчиках векторів, що відповідають додатковим змінним.

**Приклад 5.** Розв'язати задачу

$$f = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min;$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5; \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, 6\},$$

й двоїсту до неї.

◄ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 \le 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le 1, \\ y_2 \le 0, \\ -y_1 + 2y_2 \le -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \le -3, \\ y_3 \le 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо за допомогою симплексних таблиць пряму задачу

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 0 | 1 | 0 | $-1$ | $-3$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| 1 | $A_1$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | $-1$ | $\boxed{1}$ | 0 |
| 2 | $A_3$ | 0 | 2 | 0 | $-4$ | 1 | 2 | $-1$ | 0 |
| 3 | $A_6$ | 0 | 5 | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 3 | 0 |
| 1 | $A_5$ | $-3$ | 1 | 1 | 2 | 0 | $-1$ | 1 | 0 |
| 2 | $A_3$ | 0 | 3 | 1 | $-2$ | 1 | $\boxed{1}$ | 0 | 0 |
| 3 | $A_6$ | 0 | 4 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | $-3$ | $-3$ | $-7$ | 0 | 4 | 0 | 0 |
| 1 | $A_5$ | $-3$ | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $A_4$ | $-1$ | 3 | 1 | $-2$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | $A_6$ | 0 | 1 | $-2$ | $\boxed{3}$ | $-1$ | 0 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | $-15$ | $-7$ | 1 | $-4$ | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $A_5$ | $-3$ | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $A_4$ | $-1$ | $11/3$ | $-1/3$ | 0 | $1/3$ | 1 | 0 | $2/3$ |
| 3 | $A_2$ | 1 | $1/3$ | $-2/3$ | 1 | $-1/3$ | 0 | 0 | $1/3$ |
| $m+1$ | | | $-46/3$ | $-19/3$ | 0 | $-11/3$ | 0 | 0 | $-1/3$ |

.

Отже, оптимальний план прямої задачі $X^* = (0;\ 1/3;\ 0;\ 11/3;\ 4;\ 0)$, а $f_{\min} = -\dfrac{46}{3}$.

Знайдемо тепер оптимальний план двоїстої задачі. Його координати знаходяться в $(m+1)$-у рядку останньої симплексної таблиці, а саме, $i$-та координата стоїть навпроти відповідного вектора, який входив до початкового базису, якщо до неї додати відповідне значення коефіцієнта цільової функції:

$$y_1 = -\frac{19}{3} + 0 = -\frac{19}{3}, \quad y_2 = -\frac{11}{3} + 0 = -\frac{11}{3},$$

$$y_3 = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}.$$

При цьому $F_{\max} = -\dfrac{46}{3}$. ►

**Зауваження.** Якщо оптимальний план прямої задачі вироджений, то оптимальний план двоїстої задачі, взагалі кажучи, не єдиний. Перехід до нової симплексної таблиці здійснюють за правилом: *рядок, якому відповідає* $b_r = 0$*, беруть за провідний, а провідний стовпчик визначають з умови*

$$\theta_r = \min_{a_{rj}<0} \left\{ -\frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right\}.$$

При цьому досить перерахувати лише елементи $(m+1)$-го рядка, бо стовпчик $A_0$ не змінюється.

**Приклад 6.** Розв'язати задачу

$$f = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

й двоїсту до неї.

◄ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = y_1 + 2y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 4, \\ 2y_1 + y_2 \ge 4; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Розв'яжемо за допомогою симплексних таблиць пряму задачу

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 4 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
| 1 | $A_3$ | 0 | 1 | $\boxed{1}$ | 2 | 1 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | $-4$ | $-4$ | 0 | 0 |
| 1 | $A_1$ | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 0 | 0 | 0 | $\boxed{-3}$ | $-2$ | 1 |
| $m+1$ | | | 4 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 1 | $A_1$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 1/3 | 2/3 |
| 2 | $A_2$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 2/3 | $-1/3$ |
| $m+1$ | | | 4 | 0 | 0 | 4/3 | 4/3 |

.

У другій симплексній таблиці умова оптимальності виконується, а це означає, що пряма задача розв'язана: $X^* = (1; 0)$, $f_{\max} = 4$.

Оскільки оптимальний план вироджений, то двоїста задача має безліч розв'язків. Перший оптимальний план двоїстої задачі знаходимо з другої таблиці, а саме $Y_1^* = (4; 0)$. Для того щоб знайти другий оптимальний план, перейдемо до третьої симплексної таблиці. За провідний візьмемо другий рядок, бо йому відповідає $b_2 = 0$. Провідний стовпчик визначимо з умови

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{-4}{-3}; \frac{-4}{-2}\right\} = \min\left\{\frac{4}{3}; 2\right\} = \frac{4}{3}, \quad j = 2.$$

Отже, провідним є стовпчик $A_2$, а провідним елементом є $\boxed{-3}$. З третьої симплексної таблиці знаходимо, що $Y_2^* = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Отже, оптимальний план двоїстої задачі такий:

$$Y^* = \lambda Y_1^* + (1 - \lambda) Y_2^*, \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

$Y_1^* = (4; 0)$, $Y_2^* = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$, а $F_{\min} = f_{\max} = 4$. ►

**5.5. Двоїстий симплексний метод.** При застосуванні симплексного методу до розв'язування задачі лінійного програмування вимагалося, щоб компоненти вектора обмежень $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ були невід'ємними. При цьому оцінки $\Delta_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ могли бути довільними.

Часто зустрічаються випадки, коли є базис, що задовольняє ознаку оптимальності, тобто всі $\Delta_j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але умова допустимості не виконується, оскільки не всі $b_i \ge 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Варіант симплексного методу, що застосовується при розв'язуванні таких задач, називається **двоїстим симплексним методом** або **методом уточнення оцінок**.

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} f = CX &\to \max; \\ AX &= A_0; \\ X &\ge 0, \end{aligned} \tag{13}$$

де матриця $A$ містить одиничний базис і всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, але умова невід'ємності не накладається на компоненти $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, вектора $A$. Таку задачу називатимемо **задачею у двоїстій базисній формі**.

Симплексний метод, який застосовуємо до задачі в канонічній базисній формі, приводить до еквівалентних задач із зростаючим значенням цільової функції і невід'ємними $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, а це означає, що кожний базисний розв'язок є допустимим. Двоїстий симплексний метод, при застосуванні його до задачі у двоїстій базисній формі, приводить до послідовності задач зі спадним значенням цільової функції, невід'ємними оцінками $\Delta_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і значеннями $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, довільного знаку. Ітерації продовжуємо до тих пір, поки не буде встановлено, що вихідна задача не має допустимого плану або буде одержана задача з допустимим базисним розв'язком, де всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, який є одночасно й оптимальним.

Відносно задачі (13) у двоїстій базисній формі можливі три випадки.

**Випадок 1.** Усі координати вектора обмежень $A_0$ невід'ємні, $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тоді вони визначають не тільки допустимий, але й оптимальний план задачі, оскільки згідно з припущенням усі оцінки $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

**Випадок 2.** Існує рядок $i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, такий, що $b_i < 0$ і $a_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. У цьому випадку задача нерозв'язна, бо система обмежень несумісна. Справді, для довільного вектора $X = (x_1; \ldots; x_n)$, де $x_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, при $a_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, маємо $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq 0$, а тому $i$-те обмеження $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, де $b_i < 0$, не має змісту.

**Випадок 3.** Існує рядок $r \in \{1, \ldots, m\}$, такий, що $b_r < 0$ і $a_{rj} < 0$ принаймні для одного $j \in \{1, \ldots, n\}$. Нехай $s \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $a_{rs} < 0$ і

$$-\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj}<0} \left\{ \frac{-\Delta_j}{a_{rj}} \right\}.$$

Тоді жорданове перетворення з провідним елементом $\boxed{a_{rs}}$ приводить до еквівалентної задачі, в якій всі оцінки $\Delta_j \geq 0$,

$j \in \{1, \ldots, n\}$, і значення цільової функції $f' \leq f$, а при $\Delta_s \neq 0$ $f' < f$.

Опишемо **алгоритм двоїстого симплексного методу**.

Розглянемо задачу (13) у двоїстій базисній формі. Двоїстий симплексний метод, застосований до цієї задачі, складається з наступних кроків, які повторюються до тих пір, поки в ході жорданових перетворень не буде встановлено відповідність чергової еквівалентної задачі випадкам 1) або 2), які описані вище.

**1.** Перевіряємо знаки компонент вектора обмежень $A_0$. Якщо всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то має місце випадок 1. Базисний розв'язок і значення цільової функції, які записані в стовпчику $A_0$ симплексної таблиці, визначають оптимальний розв'язок вихідної задачі. Якщо ж серед $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, є від'ємні, то переходимо до кроку 2.

**2.** Серед від'ємних компонент $b_i$ вибираємо компоненту $b_r$, найбільшу за абсолютною величиною, і рядок $r$ називаємо провідним.

**3.** У провідному рядку перевіряємо знаки всіх $a_{rj}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Якщо всі $a_{rj} \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то маємо випадок 2. Розв'язування закінчено, оскільки доведено, що задача розв'язку не має. Якщо ж принаймні один із коефіцієнтів $a_{rj}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, від'ємний, то маємо випадок 3, і переходимо до наступного кроку 4.

**4.** Серед від'ємних коефіцієнтів $a_{rj}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, провідного рядка вибираємо елемент $a_{rs}$, для якого

$$-\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj}<0} \left\{ -\frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right\}$$

і назвемо його провідним.

**5.** Переходимо до наступної симплексної таблиці, виконавши жорданове перетворення попередньої таблиці з провідним (розв'язувальним) елементом $\boxed{a_{rs}}$, і повертаємося до кроку 1.

Оптимальний план прямої задачі визначається базисними змінними та їхніми значеннями в стовпчику $A_0$ останньої симплексної таблиці, а двоїстої задачі – змінними двоїстої задачі, які відповідають базисним стовпчикам вихідної задачі, та їхніми значеннями, що знаходяться в оціночному $(m+1)$-у рядку з урахуванням $c_j$.

Двоїстий симплексний метод зручно використовувати також для розв'язування задач, які мають одиничний базис, але не належать до задач у базисній формі, оскільки мають від'ємні компоненти серед елементів вектора-стовпчика $A_0$ і $(m+1)$-го рядка одночасно. Розв'язуються такі задачі в два етапи. Спочатку за допомогою двоїстого симплексного методу виключаються всі $b_i < 0$, а потім оптимальний план знаходиться звичайним симплексним методом. Треба лише на першому етапі замінити крок 4 на такий:

**4$'$.** Серед від'ємних коефіцієнтів $a_{rj}$ провідного рядка вибираємо елемент $a_{rs}$, для якого

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \max_{a_{rj}<0} \left\{ \frac{b_r}{a_{rj}} \right\}.$$

**Приклад 7.** За допомогою двоїстого симплексного методу розв'язати задачу

$$f = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\, 2,\, 3\},$$

і знайти розв'язок двоїстої до неї.

◄ Двоїста задача до заданої має вигляд

$$F = 4y_1 + 7y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \leq 3, \\ y_1 + y_2 \leq 2, \\ -2y_1 - 4y_2 \leq -4; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Зведемо пряму задачу до канонічної форми

$$f = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = -7; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Розв'язування цієї задачі проведемо за допомогою симплексних таблиць

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 3 | 2 | $-4$ | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_4$ | 0 | $-4$ | $-1$ | $-1$ | 2 | 1 | 0 |
| 2 | $A_5$ | 0 | $-7$ | $-3$ | $\boxed{-1}$ | 4 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | $-3$ | $-2$ | 4 | 0 | 0 |
| 1 | $A_4$ | 0 | 3 | $\boxed{2}$ | 0 | $-2$ | 1 | $-1$ |
| 2 | $A_2$ | 2 | 7 | 3 | 1 | $-4$ | 0 | $-1$ |
| $m+1$ | | | 14 | 3 | 0 | $-4$ | 0 | $-2$ |
| 1 | $A_1$ | 3 | $3/2$ | 1 | 0 | $-1$ | $1/2$ | $-1/2$ |
| 2 | $A_2$ | 2 | $5/2$ | 0 | 1 | $-1$ | $-3/2$ | $1/2$ |
| $m+1$ | | | $19/2$ | 0 | 0 | $-1$ | $-3/2$ | $-1/2$ |

.

У першій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується і в стовпчику $A_0$ є від'ємні елементи. За провідний рядок візьмемо другий, бо йому відповідає найбільше за абсолютною величиною $b_i < 0$, $i \in \{1, 2\}$. Провідний елемент виберемо, скориставшись відношенням

$$\max\left\{\frac{-7}{-3}; \frac{-7}{-1}\right\} = \max\left\{\frac{7}{3}; 7\right\} = 7.$$

Цим елементом є $\boxed{-1}$.

У другій симплексній таблиці умова оптимальності не виконується, а умова допустимості виконується, бо в стовпчику $A_0$ всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, 2\}$ . Тому цю задачу розв'язуємо за допомогою звичайного симплексного методу. За провідний стовпчик беремо $A_1$, за провідний елемент $\boxed{2}$, бо $\theta_{01} = \min\left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right\} = \frac{3}{2}$.

У третій симплексній таблиці умова оптимальності виконується, а це означає, що задача розв'язана. Отже, $X^* = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$, $f_{\min} = \frac{19}{2}$.

Розв'язок двоїстої задачі міститься в $(m + 1)$-у рядку останньої симплексної таблиці в стовпчиках $A_4$ і $A_5$, що відповідають початковому опорному плану. Оскільки при зведенні прямої задачі до канонічної базисної форми ми змінили знаки на протилежні в обмеженнях-нерівностях, то значення для $y_1^*$ і $y_2^*$ треба взяти з протилежними знаками. Тому $Y^* = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $F_{\max} = f_{\min} = \frac{19}{2}$. ►

**Приклад 8.** Розв'язати задачу

$$f = 5x_2 + 7x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} -10x_2 + x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = -12, \\ -6x_2 - 2x_4 + x_5 = -17; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j \in \{1, \ldots, 5\},$$

і двоїсту до неї.

◄ Двоїстою до заданої є задача

$$F = -16y_1 - 12y_2 - 17y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_2 \leq 0, \\ -10y_1 - 3y_2 - 6y_3 \leq 5, \\ y_1 \leq 0, \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 \leq 7, \\ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо пряму задачу за допомогою двоїстого симплексного методу

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 0 | 5 | 0 | 7 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_3$ | 0 | $-16$ | 0 | $-10$ | 1 | 1 | 0 |
| 2 | $A_1$ | 0 | $-12$ | 1 | $-3$ | 0 | $-3$ | 0 |
| 3 | $A_5$ | 0 | $-17$ | 0 | $\boxed{-6}$ | 0 | $-2$ | 1 |
| $m+1$ | | | 0 | 0 | $-5$ | 0 | $-7$ | 0 |
| 1 | $A_3$ | 0 | $37/3$ | 0 | 0 | 1 | $13/3$ | $-5/3$ |
| 2 | $A_1$ | 0 | $-7/2$ | 1 | 0 | 0 | $-2$ | $\boxed{-1/2}$ |
| 3 | $A_2$ | 5 | $17/6$ | 0 | 1 | 0 | $1/3$ | $-1/6$ |
| $m+1$ | | | $85/6$ | 0 | 0 | 0 | $-16/3$ | $-5/6$ |
| 1 | $A_3$ | 0 | 24 | $-10/3$ | 0 | 1 | 11 | 0 |
| 2 | $A_5$ | 0 | 7 | $-2$ | 0 | 0 | 4 | 1 |
| 3 | $A_2$ | 5 | 4 | $-1/3$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $m+1$ | | | 20 | $-5/3$ | 0 | 0 | $-2$ | 0 |

.

У першій симплексній таблиці всі $\Delta_j \le 0$, $j \in \{1, \ldots, 5\}$ тобто виконується умова оптимальності, але в стовпчику $A_0$ є від'ємні числа, найменше з яких дорівнює $-17$. Це означає, що третій рядок треба взяти за провідний. Провідний стовпчик виберемо за двоїстим симплексним відношенням

$$\min\left\{\frac{-5}{-6}; \frac{-7}{-2}\right\} = \frac{5}{6}, \quad j = 2.$$

Зробимо жорданове перетворення з провідним елементом $\boxed{-6}$.

У другій симплексній таблиці стовпчик $A_0$ містить від'ємне число $b_2 = -\dfrac{7}{2}$, тому за провідний рядок беремо другий. Провідний стовпчик, а отже, і розв'язувальний елемент знаходимо за допомогою двоїстого симплексного відношення

$$\min\left\{\frac{-16/3}{-2}; \frac{-5/6}{-1/2}\right\} = \frac{10}{6}, \quad j = 5.$$

Після жорданового перетворення з провідним елементом $\boxed{-1/2}$, дістанемо, що в стовпчику $A_0$ стоять додатні елементи, а в оціночному $(m+1)$-у рядку всі $\Delta_j$, як і раніше, недодатні. Це означає, що план $X^* = (0; 4; 24; 0; 7)$ є оптимальним, а $f_{\min} = 20$.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y^* = (0; -5/3; 0)$, а $F_{\max} = 20$. ►

**Приклад 9.** Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

◄ Помножимо перше і третє рівняння системи обмежень на $(-1)$. Тоді одержимо задачу вигляду

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = -18; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Розв'язуватимемо цю задачу за допомогою двоїстого симплексного методу

| $i$ | Б | $C_б$ | $A_0$ | 2 | 3 | 0 | 5 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
| 1 | $A_3$ | 0 | $-12$ | 2 | $-1$ | 1 | 0 | 0 |
| 2 | $A_4$ | 5 | 10 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $A_5$ | 0 | $-18$ | $\boxed{-3}$ | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $m+1$ | | | 50 | 3 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $A_3$ | 0 | $-24$ | 0 | $1/3$ | 1 | 0 | $2/3$ |
| 2 | $A_4$ | 5 | 4 | 0 | $8/3$ | 0 | 1 | $1/3$ |
| 3 | $A_1$ | 2 | 6 | 1 | $-2/3$ | 0 | 0 | $-1/3$ |
| $m+1$ | | | 32 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 |

.

У першій симплексній таблиці умова оптимальності виконується, але в стовпчику $A_0$ є від'ємні елементи, тобто маємо задачу в двоїстій базисній формі. Перейдемо до наступної симплексної таблиці, взявши за провідний третій рядок, бо йому відповідає найбільше за абсолютною величиною від'ємне $b_i$. Провідний елементо виберемо за двоїстим симплексним відношенням. Цим елементом буде $\boxed{-3}$, бо інших від'ємних елементів у провідному рядку немає.

У другій симплексній таблиці умова оптимальності, як і повинно бути, виконується, але в стовпчику $A_0$ є елемент $b_1 = -24 < 0$. Перший рядок, який відповідає цьому від'ємному елементу, візьмемо за провідний. Оскільки в цьому рядку відсутні від'ємні елементи, то задача не має розв'язку, через те, що система умов несумісна. ▶

### Вправи

**1.** Скласти двоїсту задачу до заданої, і, розв'язавши графічно одну з них, знайти розв'язок другої:

1) $f = 2x_1 + 7x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1,\, 2\};$

2) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ j \in \{1, \ldots,\, 5\};$

3) $f = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

4) $f = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \le 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots,\, 4\};$

5) $f = -3x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + 4x_2 \geq -18, \\ -4x_1 + x_2 \geq -30, \\ -x_1 + x_2 \geq -5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

6) $f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 11; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$

**2.** Скласти двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування, і, розв'язавши за допомогою симплексного методу одну з них, знайти розв'язок другої:

1) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

2) $f = x_1 - 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;$

3) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

4) $f = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\};$

5) $f = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 27, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1,\ 2,\ 3\};$

6) $f = 5x_1 + 3x_2 +$
$+6x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

**3.** За допомогою двоїстого симплексного методу знайти розв'язки заданої та двоїстої до неї задач:

1) $f = 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 3, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\};$

2) $f = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\};$

3) $f = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8, \\ -x_2 - 3x_3 + 6x_4 \geq 6, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 \geq 0; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq -2, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

5) $f = 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1,\, 2,\, 3\};$

6) $f = 5x_1 + 18x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 = -5, \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = -8, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -13; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}.$

## Відповіді

**1.** 1) $X^* = (2;\, 6)$, $Y^* = (1;\, 4)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$; 2) $X^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0; 2; 0\right)$, $Y^* = (1; 0; 2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 5$; 3) $X^* = \left(0; \frac{5}{3}\right)$, $Y^* = \left(0; \frac{2}{3}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = \frac{10}{3}$; 4) $X^* = (14;\, 0;\, 2; 0)$, $Y^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{14}{5}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = 74$; 5) $X^* = (6; 6)$, $Y^* = \left(0; \frac{15}{17}; \frac{9}{17}; 0\right)$, $f_{\min} = F_{\max} = -36$; 6) $X^* = \left(0; 0; \frac{23}{6}; \frac{11}{2}; 0\right)$, $Y^* = \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = \frac{46}{3}$. **2.** 1) $X^* = (6;\, 3)$, $Y^* = \left(0;\, \frac{5}{2};\, \frac{1}{2}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = 30$; 2) $X^* = (6;\, 1)$, $Y^* = \left(0;\, \frac{1}{3};\, \frac{2}{3}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = 4$; 3) пряма задача розв'язку не має, бо цільова функція необмежена зверху; двоїста задача роз'язку не має, оскільки система умов несумісна; 4) $X^* = (18;\, 6;\, 0)$, $Y^* = \left(\frac{7}{9};\, 0;\, \frac{13}{9}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = 66$; 5) $X^* = \left(\frac{3}{2};\, 0;\, \frac{3}{2}\right)$, $Y^* = (2;\, 0;\, 5)$, $f_{\max} = F_{\min} = 54$; 6) $X^* = (14;\, 0;\, -4)$, $Y^* = (0;\, 1;\, 3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$. **3.** 1) $X^* = \left(\frac{23}{7};\, \frac{2}{7};\, 0\right)$, $Y^* = \left(0;\, \frac{44}{7};\, 0;\, \frac{12}{7}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = \frac{192}{7}$; 2) $X^* = \left(\frac{14}{3};\, \frac{2}{3};\, \frac{8}{3}\right)$, $Y^* = \left(2;\, \frac{1}{3};\, \frac{2}{3}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = 32/3$; 3) $X^* = \left(\frac{8}{7}; 0; 0; \frac{32}{35}\right)$, $Y^* = \left(\frac{8}{7}; 0; \frac{5}{7}\right)$, $f_{\min} = F_{\max} = \frac{64}{7}$; 4) $X^* = \left(\frac{20}{3};\, \frac{1}{3}\right)$, $Y^* = \left(\frac{1}{6};\, \frac{5}{6};\, 0;\, 0\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = \frac{19}{3}$; 5) $X^* = \left(\frac{7}{5};\, \frac{11}{5}; 3\right)$, $Y^* = \left(1; \frac{1}{5}; \frac{18}{5}\right)$, $f_{\max} = F_{\min} = \frac{3}{5}$; 6) $X^* = (4; 3; 4; 0; 0)$, $Y^* = \left(-\frac{38}{7}; -\frac{41}{7}; 0\right)$, $f_{\min} = F_{\max} = 74$.

## §6. Задачі транспортного типу

Транспортна задача є однією з основних спеціальних моделей лінійного програмування. Її мета — розробка раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надто довгих, зустрічних, повторних перевезень, що зменшує витрати підприємств, фірм, які пов'язані з процесами постачання сировини, матеріалів, пального і т.п. До транспортних зводяться також задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення на посади і т.п.

**6.1. Математична постановка транспортної задачі.** Розглянемо класичний випадок транспортної задачі. Вона полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з $m$ пунктів відправлення (постачальники) $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ у $n$ пунктів призначення (споживачі) $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$. При цьому за критерій оптимальності беруть або мінімальну вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його перевезення. Ми розглядатимемо задачу, де за критерій оптимальності взято мінімальну вартість перевезень всього вантажу.

Припустимо, що в пункті $A_i$ зосереджено $a_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, одиниць товару, а споживачу $B_j$ потрібно $b_j$, $j = \{1, \ldots, n\}$, одиниць товару і відома вартість $c_{ij}$ перевезення одиниці вантажу з пункту $A_i$ в пункт $B_j$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$. Треба знайти такий план перевезень продукції від постачальників до споживачів, щоб сумарні витрати $f$ на транспортування вантажів були мінімальними.

Для побудови математичної моделі розглядуваної задачі введемо змінні $x_{ij}$, які визначають обсяг перевезень продукції з пункту $A_i$ в пункт $B_j$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$. Матрицю

$$X = (x_{ij})_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}},$$

складену з цих змінних, називають **планом перевезень**.

Транспортну задачу та її розв'язування зручно подавати у вигляді транспортної таблиці (матриці) вигляду

| Постачальники | Споживачі | | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $\dots$ | $B_j$ | $\dots$ | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $\dots$ | $c_{1j}$<br>$x_{1j}$ | $\dots$ | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $A_i$ | $c_{i1}$<br>$x_{i1}$ | $\dots$ | $c_{ij}$<br>$x_{ij}$ | $\dots$ | $c_{in}$<br>$x_{in}$ | $a_i$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $A_m$ | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $\dots$ | $c_{mj}$<br>$x_{mj}$ | $\dots$ | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$ |
| Потреби | $b_1$ | $\dots$ | $b_j$ | $\dots$ | $b_n$ | |

Якщо вважати, що весь вантаж треба вивезти з пунктів відправлення $A_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, і задовольнити потреби всіх пунктів призначення $B_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, то математична модель транспортної задачі має вигляд

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min; \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}; \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{4}$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5}$$

Транспортну задачу називають **збалансованою** або **закритою**, якщо виконується умова (5). Якщо ж ця умова не виконується, то транспортну задачу називають **незбалансованою** або **відкритою**.

Доведено [14], що збалансованість, тобто умова (5) є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (1) – (4).

Якщо умова (5) не виконується, тобто транспортна задача є відкритою, то її треба спочатку закрити, збалансувавши поставки й потреби. Робиться це за допомогою введення фіктивного постачальника або фіктивного споживача, в залежності від співвідношення між сумами $\sum_{i=1}^{m} a_i$ і $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

У випадку, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт призначення (споживач) з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, відповідні тарифи якого вважаються нульовими, тобто $c_{i\,n+1} = 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Якщо ж $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто загальні потреби перевищують запаси, то вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення (постачальник) із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і тарифами $c_{m+1\,j} = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Очевидно, що транспортна задача (1) – (4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана симплексним методом. Однак особливості будови математичної моделі транспортної задачі дозволяють розв'язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (2) і (3) дорівнюють одиниці, а самі системи задані в канонічній формі. Крім того, система обмежень (2), (3) складається з $mn$ невідомих та $m + n$ рівнянь, які зв'язані маж собою співвідношенням (5). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (2) і (3), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень міститиме $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь, а тому її можна розв'язати відносно $m+n-1$ базисних змінних. Назвемо **опорним планом** транспортної задачі такий її допустимий план $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$, який містить не більше ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Якщо кількість відмінних від нуля компонент дорівнює $m + n - 1$, то план називається **невиродженим**, а якщо менше, то – **виродженим**.

Опорний план $X^* = (x^*_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$, при якому цільова функція $f$ набуває свого найменшого значення, називається **оптимальним планом** транспортної задачі.

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді таблиці, то клітинки, в яких $x_{ij} > 0$, називаються **заповненими**, всі інше – **порожніми**.

Заповнені клітинки відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їхня кількість дорівнює $m + n - 1$.

З опорним планом тісно пов'язане поняття циклу. **Циклом** у таблиці умов транспортної задачі називається ламана, вершини якої розміщені в клітинках таблиці, а ланки – вздовж рядків та стовпчиків, причому в кожній вершині циклу зустрічаються тільки дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а друга – в стовпчику. Точки самоперетину циклу не є його вершинами.

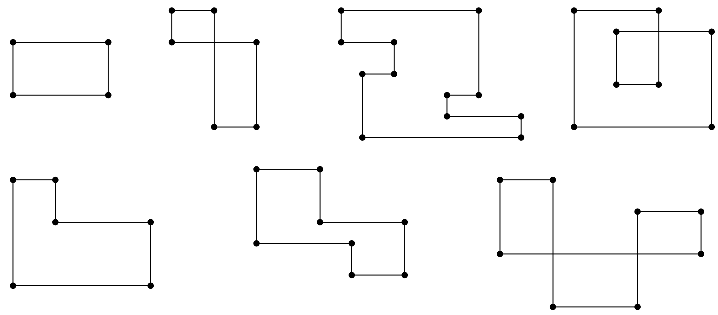
Відносно розташування вершин циклу повинні виконуватися такі умови:

1) в одному рядку (або стовпчику) містяться тільки дві вершини циклу;

2) остання (завершальна) вершина циклу знаходиться в тому самому рядку, що й перша (вихідна);

3) якщо умовно з'єднати вершини циклу відрізками, то в кожній наступній вершині здійснюється поворот на $90^0$.

При такому тлумаченні взаємозв'язку між вершинами циклу не важливо через скільки зайнятих або вільних клітинок проходять умовні відрізки.



Доведено [14], що кількість вершин (клітинок), які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Якщо для певного набору заповнених клітинок неможливо побудувати цикл, то така сукупність клітинок є **ациклічною**.

Для того щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності. Звідси випливає, що будь-яка сукупність з $m+n$ клітинок таблиці транспортної задачі утворює цикл.

Вироджений опорний план може виникати не лише при його побудові, але й при його перетвореннях у процесі знаходження оптимального плану. Для того щоб позбутися виродженості у деякі порожні клітинки транспортної задачі в необхідній кількості вводять нульові постачання. Обсяги запасів постачальників і потреб споживачів при цьому не змінюються, проте ці клітинки з нульовим вантажем вважаються заповненими. Головною умовою при введенні нульових постачань є збереження необхідної і достатньої умови опорності плану транспортної задачі – неможливості побудови циклу для заповнених клітинок.

Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує декілька методів, які опишемо в наступному пункті.

**6.2. Побудова опорних планів транспортної задачі.** Розглянемо три методи побудови початкового опорного плану: північно-західного кута; мінімальної вартості та подвійної переваги. Суть цих методів полягає в тому, що опорний план знаходять послідовно за $n + m - 1$ кроків, на кожному з яких у таблиці умов заповнюють одну клітинку. Заповнення одної з клітинок забезпечує повністю або задоволення потреб у вантажі пункту призначення (того, в стовпчику якого знаходиться заповнена клітинка), або вивезення вантажу із пункту відправлення (того, в рядку якого знаходиться заповнювана клітинка).

У першому випадку тимчасово виключають з розгляду стовпчик, який містить заповнену на цьому кроці клітинку, і розглядають задачу, таблиця умов якої містить на один стовпчик менше, ніж було перед цим кроком, але те саме число рядків і відповідно змінені запаси вантажу в одному із пунктів відправлення (у тому, за рахунок запасів якого було задоволено потреби у вантажі пункту призначення на цьому кроці). У другому випадку тимчасово виключають з розгляду рядок, який містить заповнену клітинку, і вважають, що таблиця умов має на один рядок менше при незмінній кількості стовпчиків і при відповідній зміні потреб у стовпчику якого знаходиться заповнювана клітинка.

Після того, як пророблено $n+m-2$, описаних вище кроків, дістанемо задачу з одним пунктом призначення і одним пунктом відправлення. При цьому залишається вільною тільки одна клітинка, а запаси останнього пункту відправлення дорівнюють потребам пункту призначення. Заповнивши клітинку, ми зробимо тим самим $(n + m - 1)$-й крок, і, отже, одержимо шуканий опорний план. Якщо на деякому кроці, але не на останньому, виявиться, що потреби чергового пункту призначення збігаються із запасами чергового пункту відправлення, то в цьому випадку виключають з розгляду або стовпчик, або рядок (щось одне). Цим самим або запаси відповідного пункту відправлення, або потреби вказаного пункту призначення вважаємо нульовими, що гарантує одержання $n+m-1$ зайнятих клітинок, у яких стоять компоненти опорного плану. Відмінність від нуля $n+m-1$ компонент опорного плану, тобто заповненість $n+m-1$ клітинок транспортної таблиці, є обов'язковою умовою для дослідження цього плану на оптимальність.

**6.2.1. Метод північно-західного кута.** Будуватимемо допустимий план в таблиці умов транспортної задачі, де кожній змінній $x_{ij}$ відповідає клітинка $(i, j)$.

При користуванні методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший, з тих, що залишилися, пункт відправлення, і перший же, з тих, що залишилися, пункт призначення. Заповнення клітинок таблиці транспортної задачі починають з лівої верхньої клітинки (1, 1) (північно-західний кут) і закінчують клітинкою $(m, n)$, тобто йдуть немовби по діагоналі.

Розглянемо процедуру цього методу на прикладі.

**Приклад 1.** Побудувати опорний план транспортної задачі, яка визначена таблицею

| Постачальники | Споживачі | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 7<br>120 | 8<br>40 | 1<br>– | 2<br>– | 160 |
| $A_2$ | 4<br>– | 5<br>10 | 9<br>130 | 8<br>– | 140 |
| $A_3$ | 9<br>– | 2<br>– | 3<br>60 | 6<br>110 | 170 |
| Потреби | 120 | 50 | 190 | 110 | 470 |

◀ Оскільки задача закрита, то можна будувати опорний план. У клітинку (1, 1) помістимо 120 од., бо споживачеві $B_1$ більше не треба. При цьому перший стовпчик виключаємо з розгляду. Далі у клітинку (1, 2) поміщаємо 40 од. і оскільки запаси в пункті $A_1$ вичерпано, то перший рядок виключаємо з розгляду. Споживачеві $B_2$ додаємо 10 од. з пункту $A_2$ і другий стовпчик більше не розглядаємо. Продовжуючи аналогічно далі, у клітинку (3, 3) помістимо 60 од. вантажу. Залишилася клітинка (3, 4), а запаси постачальника і потреби споживача однакові. Тоді у цю клітинку поміщаємо 110 од. вантажу. Одержаний план є опорним, бо, починаючи рух з клітинки (1, 1), повернутися до неї або будь-якої іншої заповненої клітинки, рухаючись лише по заповнених клітинках, неможливо. Цей план невироджений, бо $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ і стільки ж заповнених клітинок.

При побудові опорного плану цим методом ми не враховували вартість перевезень, а тому одержаний план є, взагалі кажучи, далеким від оптимального.

Очевидно, що вартість перевезень при одержаному опорному плані

$$X_0 = \begin{pmatrix} 120 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{pmatrix}$$

дорівнює

$$f = 7 \cdot 120 + 8 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 130 + 3 \cdot 60+$$
$$+6 \cdot 110 = 3520 \text{ гр. од.} \quad \blacktriangleright$$

**6.2.2. Метод мінімальної вартості (метод мінімального елемента).** Суть методу полягає в тому, що з усієї таблиці умов транспортної задачі вибирають клітинку, в якій стоїть найменша вартість і туди записують найменше з чисел $a_i$ або $b_j$. Потім з розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю вичерпані, або стовпчик, який відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволені, або і рядок і стовпчик, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволені потреби споживача. Далі з клітинок, які залишилися, знову вибираємо ту, де знаходиться найменша вартість перевезення і процес розподілу запасів продовжуємо до тих пір, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

**Приклад 2.** Методом мінімальної вартості знайти опорний план транспортної задачі з прикладу 1

| Постачальники | Споживачі | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 7<br>– | 8<br>– | 1<br>160 | 2<br>– | 160 |
| $A_2$ | 4<br>120 | 5<br>– | 9<br>– | 8<br>20 | 140 |
| $A_3$ | 9<br>– | 2<br>50 | 3<br>30 | 6<br>90 | 170 |
| Потреби | 120 | 50 | 190 | 110 | 470 |

.

◀ Мінімальний тариф, що дорівнює 1, знаходиться в клітинці (1, 3). Помістимо у цю клітинку 160 од. і виключимо з розгляду перший рядок, бо запаси постачальника $A_1$ вичерпані. Вважаємо, що потреби пункту призначення $B_3$ вже дорівнюють 30 од.

У частині таблиці, яка залишилася з двома рядками $A_2$ і $A_3$ і чотирма стовпчиками $B_1$, $B_2$, $B_3$ і $B_4$, клітинкою з найменшою вартістю є (3, 2), куди поміщаємо 50 од. вантажу і стовпчик $B_2$ виключаємо з розгляду. Далі в таблиці умов знову вибираємо клітинку з найменшою вартістю і продовжуємо процес до тих пір, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені. Як результат одержимо опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

При цьому плані перевезень загальна вартість перевезень становить

$$f = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530 \text{ гр. од.}$$

Одержали, що вартість перевезень нижча, ніж у випадку опорного плану, який побудовано в прикладі 1 методом північно-західного кута. ▶

**6.2.3. Метод подвійної переваги.** Якщо транспортна таблиця велика, то перебрати всі клітинки важко. У цьому випадку використовують метод подвійної переваги, зміст якого полягає в такому.

У кожному стовпчику помічаємо значком $\vee$ клітинку з найменшою вартістю. Потім це саме зробимо в кожному рядку. Як результат матимемо у деяких клітинках помітки $\vee\vee$. Цим клітинкам відповідає мінімальна вартість як у стовпчику, так і в рядку. В зазначені клітинки записуємо максимально можливі обсяги, кожного разу виключаючи з розгляду відповідні стовпчики або рядки. Потім розподіляємо обсяги перевезень по клітинках, які помічені значком $\vee$. У тій частині таблиці, що залишилася, вантаж розподіляємо за найменшою вартістю.

**Приклад 3.** Знайти опорний план транспортної задачі з прикладу 1, використовуючи метод подвійної переваги.

◀ Заповнюємо спочатку клітинки (1, 3), (2, 1) і (3, 2), які мають дві помітки $\vee\vee$. Далі заповнюємо клітинки (3, 3), (3, 4) і (2, 4) у порядку зростання вартостей

| Постачальники | Споживачі | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 7 <br> – | 8 <br> – | 1 $\vee\vee$ <br> 160 | 2 $\vee$ <br> – | 160 |
| $A_2$ | 4 $\vee\vee$ <br> 120 | 5 <br> – | 9 <br> – | 8 <br> 20 | 140 |
| $A_3$ | 9 <br> – | 2 $\vee\vee$ <br> 50 | 3 <br> 30 | 6 <br> 90 | 170 |
| Потреби | 120 | 50 | 190 | 110 | 470 |

.

Одержаний опорний план є невиродженим і він збігається з тим, який одержано методом мінімальної вартості, тобто

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix},$$

$f = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530$ гр. од. ▶

**Зауваження.** Можна було б очікувати, що ближчими до оптимального є опорні плани, які побудовані з врахуванням вартості перевезень, тобто за методом мінімальної вартості або подвійної переваги. Оскільки на практиці це не завжди так, то користуються тим методом, який простіший за процедурою – методом північно-західного кута.

**6.3. Знаходження оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів.** Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів.

Ми розглянемо один з них, який називають **методом потенціалів**. Принцип знаходження оптимального плану транспортної задачі цим методом аналогічний симплексному методу, тобто спочатку знаходимо початковий опорний план, а потім його покращуємо до оптимального.

Для одержання початкового опорного плану транспортної задачі скористаємося одним із методів, які розглянуті в попередньому пункті. Ці методи дають можливість побудувати невироджений план, у якому є $n+m-1$ заповнена клітинка, при цьому в деяких клітинках можуть знаходитися нулі. Для перевірки на оптимальність **невиродженого** опорного плану скористаємось теоремою.

**Теорема.** *Якщо для деякого невиродженого опорного плану* $X = (x_{ij})_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ *транспортної задачі існують такі числа* $\alpha_i$, $i \in \{1,\dots,m\}$ *та* $\beta_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *що*

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad \textit{при} \quad x_{ij} > 0,$$

$$\beta_j - \alpha_i \le c_{ij} \quad \textit{при} \quad x_{ij} = 0,$$

*для всіх* $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *то цей план є оптимальним.*

Числа $\alpha_i$ та $\beta_j$ називаються **потенціалами** відповідно пунктів відправлення $A_i$ і пунктів призначення $B_j$, $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Сформульована теорема дозволяє побудувати алгоритм знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі.

Якщо є деякий опорний план, то спочатку знаходимо потенціали $\alpha_i$, $i \in \{1,\dots,m\}$, і $\beta_j$, $j \in \{1,\dots,n\}$, з системи рівнянь

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \tag{6}$$

де $c_{ij}$ – тарифи перевезень, які стоять у заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок дорівнює $n+m-1$, то система (6) з $m+n$ невідомими містить $m+n-1$ рівнянь. Це означає, що число невідомих на одиницю більше, ніж число рівнянь. Тому одне з невідомих можна взяти нульовим, наприклад, $\alpha_1 = 0$. Решту $\alpha_i$ та $\beta_j$ знаходимо з системи (6).

Після того, як усі потенціали знайдено, для кожної з вільних клітинок знаходимо числа

$$d_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}. \tag{7}$$

Якщо серед чисел $d_{ij}$ немає додатних, то вказаний опорний план є оптимальним. Якщо ж серед чисел $d_{ij}$ є додатні, то вихідний опорний план не є оптимальним і треба перейти до нового опорного плану. Для цього серед $d_{ij}$ вибираємо найбільше. Клітинку, якій воно відповідає, треба заповнити. Заповнюючи вибрану клітинку, необхідно змінити обсяги поставок, перерозподіливши їх між заповненими клітинками, які зв'язані з нею циклом. Відомо, що при правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітинки можна побудувати тільки один цикл.

Переміщення вантажу в межах клітинок, які зв'язані з цією вільною клітинкою циклом здійснюємо за таким правилом: 1) кожній з клітинок, які зв'язані циклом із зазначеною вільною клітинкою присвоюємо певний знак, вільній клітинці знак плюс, а всім іншим – почергово знаки мінус і плюс; 2) у цю вільну клітинку переносимо менше з чисел $x_{ij}$, які знаходяться в мінусових клітинках. Одночасно це число додаємо до відповідних чисел, які стоять у плюсових клітинках і віднімаємо від чисел, які стоять у мінусових клітинках. Вільна клітинка стає заповненою, а мінусова клітинка, в якій стояло мінімальне число $x_{ij}$, – вільною.

У результаті таких переміщень одержимо новий опорний план. Описаний вище метод переходу до нового опорного плану називається **зсувом за циклом перерахунку**. При цьому число заповнених клітинок залишається рівним $n+m-1$. Якщо в мінусових клітинках є два або більше однакових найменших числа $x_{ij}$, то звільняємо лише одну з них, а інші залишаємо заповненими з нульовим вантажем. Одержаний новий опорний план перевіряємо знову на оптимальність і т.д.

З описаного вище випливає, що алгоритм методу потенціалів такий:

1) *знаходять за допомогою одного із описаних вище методів початковий опорний план. При цьому число заповнених клітинок повинно дорівнювати* $n+m-1$, *тобто план повинен бути невиродженим*;

2) *для заповнених клітинок таблиці транспортної задачі записують систему рівнянь (6) і знаходять потенціали* $\alpha_i$ *і* $\beta_j$;

3) *для кожної вільної клітинки визначають числа* $d_{ij}$ *(7). Якщо серед чисел* $d_{ij}$ *немає додатних, то одержано оптимальний план транспортної задачі; якщо ж вони є, то переходять до нового опорного плану*;

4) *серед додатних чисел* $d_{ij}$ *вибирають найбільше, і для вільної клітинки, якій воно відповідає, будують цикл перерахунку і роблять зсув за циклом*;

5) *одержаний опорний план перевіряють на оптимальність, тобто знову повторюють всі дії, починаючи з кроку* 2).

**Зауваження.** Якщо при дослідженні на оптимальність опорного плану виявиться, що $d_{ij} \leq 0$, і серед них є нульові, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Одержати інший оптимальний план можна, якщо побудувати цикл перерозподілу обсягів перевезень для клітинки, у якій $d_{ij} = 0$.

**Приклад 4.** За допомогою методу потенціалів розв'язати задачу, яка задана таблицею

| Постачальники | Споживачі | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| $A_1$ | 5 | 2 | 3 | 15 |
| $A_2$ | 2 | 4 | 6 | 25 |
| $A_3$ | 5 | 3 | 3 | 35 |
| Потреби | 20 | 20 | 45 | 75<br>85 |

.

◀ Оскільки потреби більші за запаси, то введемо фіктивний пункт постачання $A_4$ із запасами $a_4 = 85 - 75$ і нульовими тарифами перевезень. Тоді одержимо збалансовану (закриту) транспортну задачу

| Постачальники | Споживачі | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | |
| $A_1$ | 5 <br> 15 | 2 <br> – | 3 <br> – | 15 |
| $A_2$ | 2 <br> 5 | 4 <br> 20 | 6 <br> – | 25 |
| $A_3$ | 5 <br> – | 3 <br> 0 | 3 <br> 35 | 35 |
| $A_4$ | 0 <br> – | 0 <br> – | 0 <br> 10 | 10 |
| Потреби | 20 | 20 | 45 | 85 |

.

Побудуємо початковий опорний план методом північно-західного кута. Число заповнених клітинок повинно дорівнювати $n+m-1 = 3+4-1=6$, а є 5. Це означає, що опорний план є виродженим, а тому треба вважати одну із порожніх клітинок заповненою. За цю клітинку можна взяти (2, 3) або (3, 2), бо при заповнені клітинки (2, 2) ми одночасно вичерпали запаси постачальника $A_2$ і задовольнили потреби споживача $B_2$ і виключили з розгляду одночасно рядок і стовпчик, а треба було щось одне. Вважатимемо заповненою клітинку (3, 2). Одержаний невироджений опорний план дослідимо на оптимальність. Розглянемо заповнені клітинки і складемо для них систему рівнянь (6):

$$\beta_1-\alpha_1=5, \quad \beta_1-\alpha_2=2, \quad \beta_2-\alpha_2=4,$$

$$\beta_2-\alpha_3=3, \quad \beta_3-\alpha_3=3, \quad \beta_3-\alpha_4=0.$$

Взявши $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=5$, $\alpha_2=3$, $\beta_2=7$, $\alpha_3=4$, $\beta_3=7$, $\alpha_4=7$.

Для кожної вільної клітинки знаходимо числа $d_{ij}$ (7):

$$d_{12}=7-0-2=5, \quad d_{13}=7-0-3=4, \quad d_{23}=7-3-6=2,$$

$$d_{31}=5-4-5=-4, \quad d_{41}=5-7-0=2, \quad d_{42}=7-7-0=0.$$

Оскільки серед $d_{ij}$ є додатні, то умова оптимальності не виконується. Серед додатних $d_{ij}$ виберемо найбільше. Ним є $d_{12}$, а тому клітинку (1, 2) треба заповнити, зробивши перерозподіл вантажу між клітинками, які зв'язані з нею циклом. Для цього клітинку (1, 1), у якій стоїть найменше число з тих, що містяться у мінусових клітинках, звільняємо, а її вантаж додаємо до наявного в плюсових клітинках і віднімаємо від наявного у мінусових клітинках. Отже, маємо новий опорний план

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 2<br>15 | 3 |
| 2<br>20 | 4<br>5 | 6 |
| 5 | 3<br>0 | 3<br>35 |
| 0 | 0 | 0<br>10 |

.

Перевіряємо цей опорний план на оптимальність. Для заповнених клітинок складемо систему рівнянь (6):

$$\beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_1 - \alpha_2 = 2, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 4,$$

$$\beta_2 - \alpha_3 = 3, \quad \beta_3 - \alpha_3 = 3, \quad \beta_3 - \alpha_4 = 0,$$

звідки одержуємо, що $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = 2$, $\alpha_4 = 2$.

Для кожної з порожніх клітинок маємо відповідно: $d_{11} = 0 - 0 - 5 = -5$, $d_{13} = 2 - 0 - 3 = -1$, $d_{23} = 2 + 2 - 6 = -2$, $d_{31} = 0 + 1 - 5 = -4$, $d_{41} = 0 - 2 - 0 = -2$, $d_{42} = 2 - 2 - 0 = 0$. Оскільки всі $d_{ij} \leq 0$, то план оптимальний:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix},$$

$f_{\min} = 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 35 = 30 + 40 + 20 + 105 = 195$ гр. од. ▶

**Приклад 5.** Розв'язати транспортну задачу, яка визначена таблицею

| Постачальники | Споживачі | | | | Запаси |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 3<br>25 | 2<br>5 | 4<br>– | 1<br>20 | 50 |
| $A_2$ | 2<br>5 | 3<br>– | 1<br>35 | 5<br>– | 40 |
| $A_3$ | 3<br>– | 2<br>20 | 4<br>– | 4<br>– | 20 |
| Потреби | 30 | 25 | 35 | 20 | 110<br>110 |

.

◀ Маємо закриту (збалансовану) транспортну задачу, а тому можна будувати початковий опорний план. Побудуємо його за допомогою методу мінімальної вартості. У клітинку (2, 3) з найменшою вартістю перевезень поміщаємо вантаж 35 од. і виключаємо з розгляду стовпчик $B_3$. Далі у клітинку $(1, 4)$ поміщаємо 20 од. вантажу – і виключаємо з розгляду стовпчик $B_4$. Наступною заповнюємо клітинку $(3, 2)$ і виключаємо з розгляду рядок $A_3$. Продовжуючи заповнення клітинок за зростанням вартості перевезень, одержимо початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $n + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ і заповнених клітинок шість, то план невироджений.

Знайдемо потенціали $\alpha_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\beta_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, склавши для заповнених клітинок систему рівнянь

$$\beta_1 - \alpha_1 = 3, \quad \beta_2 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_4 - \alpha_1 = 1,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 2, \quad \beta_3 - \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 2.$$

Якщо взяти $\alpha_1 = 0$, то матимемо $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $\beta_4 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = 2$, $\alpha_3 = 0$.

Для порожніх клітинок обчислюємо оцінки $d_{ij}$:

$$d_{13} = 2 - 0 - 4 = -2, \quad d_{22} = 2 - 1 - 3 = -2, \quad d_{24} = 1 - 1 - 5 = -5,$$

$$d_{31} = 3 - 0 - 3 = 0, \quad d_{33} = 2 - 0 - 4 = -2, \quad d_{34} = 1 - 0 - 4 = -3.$$

Маємо, що всі $d_{ij} \leq 0$, а це означає, що план оптимальний:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{\min} = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 190 \text{ гр. од.}$$

Оскільки $d_{31} = 0$, то оптимальний план не єдиний. Для знаходження другого оптимального плану в клітинку $(3, 1)$ треба помістити певний вантаж, зробивши перерозподіл вантажу серед клітинок, які зв'язані з нею циклом

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3<br>5 | 2<br>25 | 4 | 1<br>20 |
| 2<br>5 | 3 | 1<br>35 | 5 |
| 3<br>20 | 2 | 4 | 4 |

.

Отже, другий оптимальний план має вигляд

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що сукупність усіх розв'язків заданої задачі знаходиться за формулою

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda) X_2^*, \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

а

$$f_{\min} = 190 \text{ гр. од.} \blacktriangleright$$

## Вправи

**1.** Знайти опорні плани пропонованих транспортних задач методом північно-західного кута, мінімальної вартості та подвійної переваги

1)

| $a_i$ \ $b_j$ | 25 | 10 | 13 |
|---|---|---|---|
| 18 | 4 | 1 | 5 |
| 10 | 2 | 3 | 6 |
| 20 | 5 | 7 | 4 |

;

2)

| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 25 | 30 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 4 | 2 | 5 | 7 |
| 30 | 6 | 0 | 3 | 1 |
| 30 | 5 | 4 | 2 | 6 |

;

3)

| $a_i$ \ $b_j$ | 60 | 40 | 40 | 30 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 5 | 2 | 0 | 7 | 3 |
| 40 | 6 | 1 | 4 | 2 | 8 |
| 70 | 7 | 4 | 3 | 6 | 1 |
| 30 | 3 | 5 | 6 | 4 | 2 |

;

4)

| $a_i$ \ $b_j$ | 50 | 40 | 10 | 15 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 4 |
| 50 | 8 | 4 | 2 | 4 | 3 | 6 |
| 20 | 3 | 5 | 5 | 6 | 2 | 4 |
| 30 | 5 | 1 | 1 | 3 | 6 | 2 |

.

**2.** У пунктах постачання $A_1$, $A_2$, $A_3$ є однорідний вантаж в обсязі 250, 350, 300 одиниць відповідно: цей вантаж треба перевезти у пункти $B_1$, $B_2$, $B_3$ і $B_4$ в обсязі відповідно 180, 220, 230 і 270 од. Матриця перевезень одиниці вантажу має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 \\ 20 & 9 & 7 & 14 \\ 18 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальний план перевезень, тобто такий план, для якого сума транспортних витрат є мінімальною.

**3.** Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі:

1)

| $a_i \backslash b_j$ | 80 | 80 | 60 | 80 |
|---|---|---|---|---|
| 160 | 5 | 4 | 3 | 4 |
| 140 | 3 | 2 | 5 | 5 |
| 60 | 1 | 6 | 3 | 2 |

;

2)

| $a_i \backslash b_j$ | 80 | 50 | 50 | 70 |
|---|---|---|---|---|
| 80 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 140 | 6 | 3 | 5 | 6 |
| 70 | 3 | 2 | 6 | 3 |

;

3)

| $a_i \backslash b_j$ | 85 | 60 | 80 | 75 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 1 | 20 | 10 | 8 |
| 150 | 6 | 5 | 2 | 1 |
| 100 | 5 | 3 | 7 | 6 |

;

4)

| $a_i \backslash b_j$ | 40 | 20 | 10 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 5 | 6 | 4 | 2 |
| 30 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 20 | 2 | 3 | 6 | 5 |

;

5)

| $a_i \backslash b_j$ | 30 | 100 | 40 | 110 |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 100 | 1 | 3 | 6 | 2 |
| 120 | 6 | 2 | 7 | 4 |

;

6)

| $a_i \backslash b_j$ | 70 | 30 | 20 |
|---|---|---|---|
| 40 | 0 | 0 | 8 |
| 60 | 3 | 5 | 1 |
| 50 | 1 | 2 | 4 |

;

7)

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 30 | 20 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 4 | 1 | 5 | 3 |
| 30 | 2 | 6 | 4 | 7 |
| 40 | 5 | 3 | 6 | 4 |

;

8)

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 30 | 10 |
|---|---|---|---|
| 25 | 4 | 2 | 3 |
| 35 | 1 | 2 | 4 |

;

9)

| $a_i \backslash b_j$ | 150 | 120 | 80 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| 130 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| 170 | 5 | 8 | 12 | 7 |

.

## Відповіді

**2.** $X^* = \begin{pmatrix} 180 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 270 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 7260.$

**3.** 1) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 780;$

2) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 720;$

3) $X^* = \begin{pmatrix} 5-5\lambda & 5\lambda & 60 & 35 \\ 70+5\lambda & 80-5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $0 \le \lambda \le 1,\ f_{\min} = 665;$

4) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 260;$

5) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 100 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 590;$

6) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \\ 50 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 100;$

7) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 270.$

8) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 110;$

9) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda) X_2^*$, де $0 \le \lambda \le 1$,

$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 80 & 0 \\ 100 & 20 & 0 & 50 \end{pmatrix}$,

$f_{\min} = 2040.$

## Література


1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984. – 192 с.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Задачник. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

3. *Баврин И.И.* Высшая математика. – М.: Просвещение, 1980. – 384 с.

4. *Гроссман С., Тернер Дж.* Математика для биологов: Пер. с англ. – М.: Высшая школа, 1983. – 383 с.

5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с., Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 365 с.

6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968. – 232 с.

7. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – М.: Дело, 2000. – 688 с.

8. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

9. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1992. – 228 с.

10. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Вища математика. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – 3-є вид., виправлене. – Чернівці: Рута, 2007. – 224 с.

11. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Вища математика. Частина 3. Математичне програмування: Навчальний посібник. – 3-є вид., виправлене. – Чернівці: Рута, 2007. – 176 с.

12. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.

13. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 3. Математичні методи дослідження операцій: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 296 с.

14. *Наконечний С.І., Савіна С.С.* Математичне програмування: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.

15. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 471 с.

16. *Шнейдер В.Е. и др.* Краткий курс высшей математики (в двух томах). Т. 1. – М.: Высшая школа, 1978. – 384 с., Т.2. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.

# Предметний покажчик

# Зміст

Навчальне видання

**Лавренчук Володимир Петрович**
**Настасієв Павло Павлович**
**Мартинюк Ольга Василівна**
**Кондур Оксана Созонтівна**

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
*як навчальний посібник для студентів*
*вищих навчальних закладів*

Підписано до друку 9.12.2009. Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум.друк.арк. 17,7.
Обл.-вид. арк. 19. Зам. 50-п. Тираж 300.

Видавництво "Книги – XXI"
Україна, 59000, м. Сторожинець, Чернівецької обл.
вул. О. Кобилянської, 7
Свідоцтво про державну реєстрацію
ДК № 1839 від 10.06.2004 р.

Друк ПП Валь Л. О.