

ІВАН ФЕДАК

**ОБЛАСНІ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ
1987–2005 рр.**

Івано-Франківськ
– 2005 –

ББК: 22.1

УДК: 51(031)

Ф 32

Федак І. В. Обласні олімпіади з математики 1987–2005 рр. – Івано-Франківськ: ОППО, 2005. – 164 с.

Рецензенти:

*кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника **Казмерчук А. І.**, завідувач відділом Івано-Франківського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників **Скальська Л. С.***

Зібрані задачі Івано-Франківських обласних олімпіад юних математиків за 1987–2005 роки. Наведені відповіді та вказівки до розв'язування задач, критерії оцінювання, список літератури, рекомендованої для підготовки до олімпіади.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

© Федак І. В., 2005

ПЕРЕДМОВА

Одним із важливих засобів розвитку математичних здібностей учнів є розв'язування нестандартних задач. Ці здібності необхідно систематично і вміло розвивати. Адже формування в учнів навиків самостійної пізнавальної діяльності є одним із найважливіших завдань сучасної школи.

Але математична підготовка в загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями основних алгоритмів розв'язування задач стандартних типів. Тому значна роль у вирішенні поставленого завдання належить різним формам позакласних занять. Своєрідним підсумком таких занять служать математичні олімпіади.

Конкурси із розв'язування учнями математичних задач беруть свій початок із кінця позаминулого століття. В Україні такі олімпіади систематично проводяться з 1961 року і проходять у чотири етапи. Пропонуємо до уваги читачів задачі третього етапу – обласних олімпіад юних математиків Прикарпаття за 1987–2005 роки, до проведення яких автор мав безпосереднє відношення.

До всіх задач наведені відповіді та вказівки щодо їх розв'язування, до складніших – практично повні розв'язання. Це дасть змогу вчителям математики успішно використати матеріали посібника в позакласній роботі з учнями, при підготовці учнів до математичних олімпіад.

Пропонуються також критерії оцінювання, які використовувало журі олімпіади на протязі кількох останніх років, та завдання обласного турніру юних математиків 2005 року.

На жаль, не збереглися умови задач обласних олімпіад за попередні роки їх проведення. Автор буде вдячний кожному, хто надасть допомогу у відновленні втрачених матеріалів.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

7 – задача розв’язана повністю;

6 – задача розв’язана, але є незначні недоліки чи відсутні необхідні для повноти розв’язання зауваження;

5 – задача в основному розв’язана, але допущена механічна помилка, яка не вплинула корінним чином на відповідь, чи наявний інший легко усувний недолік;

4 – чітко виражена не менше як половина розв’язання задачі, або наявний рівносильний їй частковий випадок, або із двох складових задачі розв’язана складніша;

3 – розв’язано близько половини задачі, можливо з незначними недоліками, або із двох складових задачі розв’язана простіша;

2 – запропонована ідея розв’язання і зроблено деякий поступ в її реалізації, або розглянуто деякий нетривіальний частковий випадок;

1 – виражена ідея розв’язання чи записана правильна відповідь при обов’язковій наявності спроб, можливо і невдалих, їх реалізації, або розглянуто тривіальний частковий випадок;

0 – задача розв’язувалася цілком невірно, або записана лише готова відповідь, одержання якої не є очевидним;

∅ (прирівнюється до 0 балів) – задача не розв’язувалася взагалі.

Примітка: при рівній кількості балів перевага надається учням, в яких кращою є сума балів за задачі, оцінені у 5–7 балів.

УМОВИ ЗАДАЧ

1987 рік

6 клас

1. Для нумерації сторінок підручника використали 6869 цифр. Скільки сторінок має підручник?

2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см. Медіана, проведена до бічної сторони, ділить його на два трикутники з периметрами 30 см і 24 см. Визначте довжину медіани і сторін заданого трикутника.

3. Потрібно упакувати самовари у ящики, з яких одні вміщають 4 самовари, а інші – 5. Скільки потрібно взяти тих та інших ящиків, щоби упакувати 41 самовар?

4. Задано ряд цілих чисел, складений за законом: 4, 7, 12, 21, 38, ... Продовжіть цей ряд до отримання восьмого числа.

7 клас

1. Встановіть, при яких натуральних n вираз $\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n - 2}$ є цілим числом.

2. Побудуйте трикутник ABC , в якому вершина кута знаходиться у заданій точці, а бісектриси двох інших кутів лежать на двох заданих прямих, які перетинаються.

3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\frac{xy}{x+y} = c, \quad \frac{yz}{y+z} = a, \quad \frac{zx}{z+x} = b.$$

4. На площині розташовано k зубчатих коліс так, що перше зчеплене з другим, друге – з третім і так далі, а останнє – з першим. У яких випадках колеса такої системи можуть рухатися?

8 клас

1. Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін.

2. Із кожної вершини п'ятикутника провели вектори до середин трьох не суміжних з даною вершиною сторін. Доведіть, що сума всіх 15 побудованих таким чином векторів дорівнює нулю.

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{y^2}{3} + \frac{48}{y^2} = 10 \left(\frac{y}{3} - \frac{4}{y} \right)$.

4. На дошці записані 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали такі 10 сум: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа були записані на дошці?

9 клас

1. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 5|x| + 4}{x - 3} < 0$.

2. У змаганнях взяли участь три бігуни: Андрейчук, Петренко і Сидоренко, зайнявши три різні місця. Перед забігом перший глядач сказав, що першим буде Андрейчук. Другий глядач сказав, що Сидоренко не буде останнім. Третій глядач сказав, що Петренко не прибіжить першим. Після забігу виявилось, що лише один з глядачів вгадав, а два інші помилилися. У якому порядку фінішували бігуни?

3. Задані рівняння $ax^2 + x + 1 = 0$ та $x^2 + ax + 1 = 0$. знайдіть всі a , при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

4. Чи існує 1987-кутник, сторони якого послідовно дорівнюють 1, 2, 3, ..., 1987, і в який можна вписати коло?

10 клас

1. Знайдіть найбільше та найменше значення
 $\int_a^b \cos^2 x dx$, ($a, b \in R$).

2. Розв'яжіть рівняння

$$11\sin^2 7x - 3\sin 7x \cdot \cos 7x + 5\cos^2 7x = a - b.$$

3. Доведіть, що у кожній трикутній піраміді є вершина, що з ребер, які виходять з неї, можна побудувати трикутник.

4. У квадраті зі стороною 1 довільно розташовані 126 точок. Доведіть, що деякі 6 із них обов'язково лежать всередині круга з радіусом $\frac{1}{7}$.

1 9 8 8 р і к

6 клас

1. Івась їхав в автобусі і побачив на кілометровому стовпі двоцифрове число. Через годину він побачив на кілометровому стовпі трицифрове число, перша цифра якого така, як друга цифра години тому, друга цифра нуль, а третя – та сама, що й перша годину тому. Ще через дві години він побачив трицифрове число, яке відрізнялося від попереднього тільки другою цифрою. Яка швидкість автобуса?

2. Після зниження ціни на іграшку, яка коштувала 50 коп., магазин виручив за продані іграшки 31 крб. 93 коп. На скільки процентів знижено ціну?

3. Знайдіть x із рівняння

$$10101 \cdot \left(\frac{5}{111111} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} + \frac{5}{2002x} \right) = \frac{7}{22}.$$

4. Через точку M проведено чотири прямі так, що $AM \perp MD$, $ME \perp MC$, і проведена пряма AC , причому $AM = MC$. AC перетинає MD в точці D , ME – в точці E . Довести, що $\triangle AME = \triangle CMD$.

7 клас

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB в точці K . Через точку K проведено дотичну до кола, яка перетинає катет BC в точці D . Доведіть, що трикутник BDK рівнобедрений.

2. Знайдіть всі пари цілих невід'ємних чисел x, y , які задовольняють рівняння $xy - 3x + 5y = 25$.

3. Доведіть, що для натуральних a число $\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$ також натуральне.

4. Доведіть, що різниця основ трапеції менша суми бічних сторін, а сума основ – менша суми діагоналей.

8 клас

1. Не розв'язуючи рівняння $ax^2 + x - 2 = 0$, визначити, при яких a різниця коренів дорівнює 3.

2. У гострокутному трикутнику ABC висота CK ділить сторону AB у відношенні 2:1, рахуючи від точки A , а висота BD – сторону AC у відношенні 3:1, рахуючи також від точки A . Визначити сторону BC , якщо $AB = a$.

3. a, b, c – цілі числа, $a + b + c$ ділиться на 6. Довести, що й $a^5 + b^3 + c$ ділиться на 6.

4. Побудувати графік функції $y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|$.

9 клас

1. У рівнобедреному трикутнику ABC довжина основи AB дорівнює 2 см, висота – 2 см. Пряма, перпендикулярна до AB і віддалена від точки A на x см, відтинає від трикутника ABC деяку фігуру. Знайти площу цієї фігури як функцію від x . Намалювати графік цієї функції.

2. Розв'язати рівняння $\frac{4 \sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0$.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB та CD паралельні, $AB + BC = CD + DA$. Довести, що $BC = AD$.

4. Розв'язати нерівність

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{ctg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \operatorname{ctg}^2 x_2 + \dots + \operatorname{tg}^2 x_{994} + \operatorname{ctg}^2 x_{994} \leq 1988.$$

10 клас

1. Знайдіть найбільше та найменше значення $\int_a^b \cos^2 x dx$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

2. Три учні склали по 2 екзамени. A заявив, що він одержав дві четвірки, B – що п'ятірку і трійку, B – що трійку і четвірку. Але кожен з них повідомив не свої оцінки, а одного з двох інших. Визначити оцінки кожного, якщо один з учнів назве правильно одну зі своїх оцінок. Котрий з них повинен це зробити?

3. Чи може сума відстаней від певної точки в трикутнику до його вершин бути меншою від півпериметра цього трикутника?

4. При яких дійсних значеннях параметра a рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$ має розв'язок?

1 9 8 9 р і к

6 клас

1. Два учні, високий і низенький, вийшли одночасно з одного і того ж дому в одну школу. В одного крок був на 20% коротший, ніж у другого, але він встигав за цей час зробити на 20% кроків більше, ніж другий. Хто з них раніше прийшов до школи?

2. Чи може $5^n + 1$ ділитись на $5^k - 1$, якщо n, k – натуральні числа?

3. Знайти значення виразу

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1988 \cdot 1989}.$$

4. В чемпіонаті країни з футболу беруть участь 16 команд, кожна з яких має свій стадіон. Усі команди повинні зіграти між собою, причому в кожному турі відбуваються всі 8 ігор. Чи можна скласти розклад турів так, щоб кожна команда чергувала ігри вдома та на виїзді?

7 клас

1. Дано коло, точка A на колі і точка K всередині кола. Знайти на колі такі точки B та C , щоб точка K була точкою перетину бісектрис трикутника ABC .

2. Довести, що коли дві останні цифри цілого числа непарні, то це число не може бути точним квадратом.

3. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - xy + y^2 = x^3. \end{cases}$$

4. Довести, що для довільних дійсних чисел виконується нерівність $x^2 - 2xy + 1989y^2 \geq 0$.

8 клас

1. Довести, що коли чотирикутники $АСРН$, $АМВЕ$, $АНВТ$, $ВКХМ$, $СКХР$ – паралелограми, вершини яких перелічені в одному напрямку, то ламана $АВТЕА$ не має самоперетинів і обмежує паралелограм.

2. Нехай a, b, c – додатні числа. Довести, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

3. Довжини a та b двох сторін трикутника задовольняють умову $a \geq b$, а довжини відповідних висот дорівнюють H_a та H_b . Довести, що $a + H_a \geq b + H_b$. При якій умові досягається рівність?

4. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}.$$

9 клас

1. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}.$$

2. Серед чотирикутників із довжинами діагоналей 2 та 4 і кутом 45° між ними знайти чотирикутник із найменшим периметром (досить вказати, в якому

відношенні його діагоналі діляться точкою перетину).

3. На сторонах AB та AC довільного трикутника ABC для кожного натурального n вибираються точки K_n та M_n так, що $AK_n = \frac{AB}{n}$, $AM_n = \frac{AC}{n+1}$. Довести, що всі прямі K_nM_n перетинаються в одній точці.

4. Довести, що коли x, y – додатні числа, які задовольняють рівняння $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$.

10 клас

1. Нехай a, b, c – додатні числа. Довести, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

2. Довести, що коли діагоналі вписаного опуклого чотирикутника перпендикулярні, то середини його сторін і основи перпендикулярів, опущених з точки перетину діагоналей на сторони, лежать на одному колі.

3. Числа a, b лежать на інтервалі $(0; \frac{\pi}{2})$ і задовольняють рівності $\cos a = a, \sin \cos b = b, \cos \sin c = c$. Розташувати ці числа у порядку зростання.

4. На території країни, яка має форму квадрата зі стороною 1 000 км, знаходиться 51 місто. Країна має можливість для прокладання 11 000 км шосейних доріг. Чи зможе вона з'єднати сіткою шосейних доріг всі свої міста?

1990 рік

7 клас

1. Як двома відрами місткістю 9 л та 4 л набрати з річки 6 л води?

2. Дві вантажівки одночасно виїхали із пункту *A* в пункт *B*. Перша з них половину затраченого часу їхала зі швидкістю 50 км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Друга – половину шляху зі швидкістю 50 км/год, а половину – зі швидкістю 40 км/год. Котра з них швидше прибула у пункт *B*?

3. Доведіть, що серед довільних 1990 цілих чисел знайдуться два, різниця яких ділиться на 1989.

4. На столі стоять три однакові ящики. В одному з них 2 чорні кульки, в другому – 2 білі, в третьому – 1 чорна та 1 біла. На ящиках про це зроблено відповідні надписи, але відомо, що жоден з них не відповідає істині. Як, вийнявши лише одну кульку, встановити, де які кульки знаходяться?

5. Доведіть, що для простих чисел $p > 3$ число $p^2 - 1$ ділиться на 24.

8 клас

1. Всередині опуклого чотирикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин чотирикутника є найменшою.

2. Дев'ять грибників зібрали 220 грибів, причому кожен два з них зібрали різну кількість грибів. Довести, що знайдуться п'ятеро грибників, які зібрали разом грибів не більше, ніж четверо інших.

3. Доведіть, що відрізок, який з'єднує вершину прямого кута з центром квадрата, побудованого зовні на гіпотенузі, ділить прямий кут пополам. Виразіть довжину цього відрізка через катети трикутника.

4. Знайдіть суму

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1989} + \sqrt{1990}}.$$

5. Розв'яжіть у цілих числах рівняння
 $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

9 клас

1. 48 ковалів повинні підкувати 60 коней. Який найменший час вони затратять на роботу, якщо кожен коваль витрачає на одну підкову 5 хвилин. (Врахуйте, що кінь стояти на двох ногах не може).

2. Розв'яжіть рівняння $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 32$.

3. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, в якого центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно основи трикутника.

4. Дано 1990 додатних чисел. Відомо, що добуток довільних 19 із них більший за одиницю. Доведіть, що і добуток довільних 90 із них теж більший за одиницю.

5. Доведіть, що якщо a , b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника, то $c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

10 клас

1. Вся площина розмальована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.

2. Доведіть, що якщо p та n – прості числа, більші трьох, то $p^2 - n^2$ ділиться на 24.

3. У трикутнику дві медіани m_a та m_b перпендикулярні. Обчислити площу цього трикутника.

4. Розкладіть на множники вираз

$$x^4 + 1990x^2 + 1989x + 1990.$$

5. Чи існує трикутник із висотами 24, 40 та 60 см?

11 клас

1. Вся площина розмальована у два кольори. Доведіть, що знайдуться дві точки різного кольору, розташовані на відстані 1м одна від одної.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

3. Середини сторін двох опуклих чотирикутників попарно співпадають. Доведіть, що площі цих чотирикутників рівні.

4. Розв'яжіть рівняння
$$\sin^2 x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \cos^2 3x.$$

5. На площині дано 1990 точок і коло радіуса 1. Доведіть, що на колі знайдеться точка, сума відстаней від якої до заданих точок не менша 1990.

1 9 9 1 р і к

8 клас

1. Бактерії розмножуються поділом. За одну секунду із однієї утворюються дві. Одна бактерія разом зі своїм потомством заповнює пробірку за одну годину. За який час заповнять цю пробірку дві бактерії?

2. Числа 1,2,3,... записані підряд. Яка цифра стоїть на 1991-му місці?

3. Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума їх кубів ділиться на 6.

4. У квадраті $ABCD$ точки M та K лежать відповідно на сторонах AB та BC , причому

$$AM : MB = 1 : 11, BK : KC = 181 : 1991.$$

Доведіть, що $AK \perp MD$.

5. У трикутнику центри вписаного та описаного кіл співпадають. Доведіть, що такий трикутник правильний.

9 клас

1. Їхав дід на ярмарку і віз гирю вагою 40 кг. По дорозі гиря впала і розбилася на 4 частини. Визначте вагу цих частин, якщо відомо, що ними можна зважити будь-яке ціле число кілограмів від одного до сорока.

2. Чи є число $1988 \cdot 1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1$ точним квадратом?

3. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 7x^2 - 12x + 5 = 0$.

4. Дано коло і точка M поза ним. Провести через M пряму, на якій би колом відтиналась хорда довжини a .

5. Чи можуть середини висот трикутника лежати на одній прямій?

10 клас

1. На шкільному математичному вечорі Незнайко заявив, що довів нову теорему: „Якщо в шестикутнику, вписаному в коло, всі кути рівні, то такий шестикутник правильний”. „Подумаєш, у шестикутнику, – втрутився Невмійко. – Я можу довести аналогічну теорему навіть для 1991-кутника”. Доведіть або спростуйте їхні твердження.

2. У трикутнику дві сторони дорівнюють a та b . Бісектриси, проведені до цих сторін, перетинаються під кутом 15° . Обчислити площу трикутника.

3. Яку найбільшу кількість прямих кутів може мати опуклий 1991-кутник?

4. Розв'яжіть рівняння $3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 - 15x$.

5. Доведіть, що при $a = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}$ значення виразу $A = a^2 + \sqrt{a^4 + a + 1}$ дорівнює $\sqrt{2}$.

11 клас

1. При яких x із чисел $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 1)$ можна утворити арифметичну прогресію?

2. Знайдіть дві останні цифри числа 2^{1991} .

3. Обчисліть $\int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

4. Чи може квадрат бути розгорткою деякої піраміди?

5. Сказав Кашей Безсмертний богатиреві: “Завтра я задумаю вектор (x, y, z) , всі координати якого є цифрами. Ти маєш право назвати довільний вектор (a, b, c) . Але, коли я оголошу їх скалярний добуток, ти повинен одразу сказати, який вектор я задумав. Інакше – смерть!” Допоможіть богатиреві врятуватися.

1 9 9 2 р і к

8 клас

1. Знайдіть закономірність у побудові послідовності: 111, 213, 141, 516, 171,...

2. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння $xy \cdot \overline{xy} = 1992$.

3. Обчисліть суму всіх натуральних чисел від 1 до 1992.

4. Всередині квадрата зі стороною 44 розміщено 1992 точки. Доведіть, що знайдуться дві точки, відстань між якими не перевищує $\sqrt{2}$.

5. З якого найменшого числа прямокутних трикутників можна скласти трапецію?

9 клас

1. По великому колесі радіуса 20 котиться мале колесо радіуса 6. У велике колесо вбито цвях. Скільки отворів зробить він у малому колесі?

2. На сторонах AB та BC гострокутного трикутника ABC як на діаметрах побудовані кола. Доведіть, що вони перетинаються на стороні AC .

3. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $1992 - xy^2 = 10x^2y$.

4. Обчисліть

$$19911991 \cdot 199219921992 - 19921992 \cdot 199119911991.$$

5. Мишка гризе куб, складений із 27-и одиничних кубиків. З'ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка з'їсти весь куб, крім центрального кубика?

10 клас

1. Чи існує замкнена крива, всі точки якої віддалені від заданої точки на 1992, яка не є колом?

2. Всередині трикутника є дві точки, віддалені від сторін трикутника відповідно на 1, 3, 15 та 4, 5, 11. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

3. Доведіть, що якщо a, b, c – сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має дійсних коренів.

4. Обчисліть без таблиць і обчислювальної техніки $4\sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

5. Перевірте, чи є число, записане 1992-ма одиницями, точним квадратом.

11 клас

1. Чи існує чотирикутна піраміда, в якій дві протилежні грані перпендикулярні до площини основи?

2. Нехай M – центр кола, описаного навколо трикутника ABC . На відрізках AM, BM, CM як на діаметрах побудовані кола, які попарно перетинаються в точках A_1, B_1, C_1 , відмінних від M . Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1992.

3. Доведіть, що на колі $x^2 + y^2 = 1$ є нескінченне число точок, обидві координати яких раціональні.

4. У записі числа використано 1992 одиниці, а решта цифр – нулі. Чи може таке число бути точним квадратом?

5. Спростіть вираз $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.

1 9 9 3 р і к

8 клас

1. Розв'язати у цілих числах рівняння

$$x^2 + 2x = y^2 - 2y + 1993.$$

2. Довести нерівність $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$.

3. Через точку M всередині кута провести пряму так, щоб відрізок, який відтинається на ній сторонами кута, ділився точкою M пополам.

4. Стальну плитку розмірами 19×93 обвели олівцем на листку паперу. Знайти центр одержаного прямокутника, користуючись лише олівцем і даною плиткою.

5. Одна людина кожного місяця записувала свої прибутки і видатки. Чи може бути так, що за кожні 5 місяців підряд сума видатків перевищувала суму прибутків, а за рік в цілому сума прибутків перевищила суму видатків?

9 клас

1. Знайдіть многочлен $p(x)$ найменшого степеня з цілими коефіцієнтами, для якого $p(0) = 19$, $p(1) = 93$, $p(2) = 1993$.

2. Доведіть нерівність $a + 2\sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{ab}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

3. Всередині трикутника ABC знайдіть точку, з якої всі сторони трикутника видно під кутами 120° .

4. Доведіть, що пряма, яка з'єднує основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає подібний до нього трикутник.

5. Чи можна на площині розмістити 1993 кола однакового радіуса так, щоб кожне з них дотикалося трьох інших кіл?

10 клас

1. Знайдіть найменше натуральне число, яке після закреслювання однієї чи кількох перших цифр зменшується в 1993 рази.

2. Сума кількох чисел дорівнює 1. Чи може сума їх кубів бути більшою за 1, якщо кожне з чисел менше 1?

3. У колі проведено два радіуси. Побудувати хорду, яка ділиться ними на три рівні частини.

4. Три кола радіуса R попарно дотикаються одне одного. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до трьох заданих кіл.

5. Доведіть, що шашкову дошку 10×10 не можна заповнити 25-ма плитками 4×1 .

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2. Визначте, при яких a рівняння $x^4 + ax^2 = 1993$ та $x^3 + ax = 1993$ мають спільний корінь.

3. Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що середини найбільшої та найменшої сторін, вершина кута між ними і центр кола, вписаного в трикутник, лежать на одному колі.

4. Кожна з чотирьох куль радіуса R дотикається до трьох інших. Знайдіть радіус кулі, яка дотикається до всіх чотирьох заданих куль.

5. На площині лежать три шайби: A , B , C . Хокеїст б'є по одній з них так, щоб вона пройшла між двома іншими. Чи можуть після 1993 ударів, виконаних по шайбах у довільному порядку, всі шайби опинитися на своїх початкових місцях?

1 9 9 4 р і к

7 клас

1. Відрізки AB та CD , які не лежать на одній прямій, перетинаються в точці E . Доведіть, що відрізок AC не перетинає пряму BD .

2. У записі натурального числа K використовуються лише одиниці та двійки, причому одиниць на одну більше, ніж двійок. Доведіть, що число $K + 1994$ складене.

3. У виразі $\frac{6*5*4*3*2*1}{8*7} = 9$ розставте замість

зірочок знаки “+” та “-” так, щоб одержати правильну рівність. Скільки розв’язків має дана задача?

4. Знайдіть всі пари x та y , для яких $19x + 94y = 1994$.

5. Є чотири пакети різної маси і терези з двома шальками без гир. За допомогою п’яти зважувань розмістити пакети в порядку зростання їх мас.

8 клас

1. У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 та BB_1 які перетинаються в точці M . У трикутнику AMB проведено середню лінію PK . Чи вірно, що чотирикутник A_1B_1PK – паралелограм?

2. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AC=BC$). Коло K з центром у точці O дотикається до прямої BC в точці B і до продовження сторони AC за точку C в точці D . Довести, що точка перетину прямих AB і DO лежить на колі K .

3. 1994 карбованці необхідно виплатити купюрами по 3 та 5 карбованців. Скількома способами це можна зробити?

4. Чи можна квадрат розрізати: а) на 1993, б) на 1994 менші квадрати?

5. Довести нерівність $(a+b) \cdot (a^3 + b^3) \leq 2(a^4 + b^4)$.

9 клас

1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} xy + x + y = 80, \\ yz + y + z = 80, \\ zx + z + x = 80. \end{cases}$$

2. Чи можна занумерувати ребра куба натуральними числами від 1 до 12, використовуючи кожне число лише один раз, так, щоб суми номерів ребер, які сходяться в кожній вершині, були однаковими?

3. Доведіть, що не існує натуральних чисел m та n , які задовольняють рівність $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{1994}$.

4. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, для яких при будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

5. Нехай коло Γ описане навколо трикутника ABC , пряма l дотикається Γ в точці A . На стороні AB позначено точку D , на стороні AC – точку E так, що $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см, і пряма DE паралельна до прямої l . Знайти довжину відрізка BD .

10 клас

1. Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 буде або простим числом, або одиницею.

2. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, для яких при будь-яких дійсних x виконується рівність $x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$.

3. Відомо, що

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e, \quad a + b + c + d + e = 100.$$

Яке найменше можливе значення виразу $a + c + e$?

4. В країні M міст ($M \geq 3$). Деякі із міст сполучені шляхом, кожен з яких з'єднує рівно два міста. Відомо, що коли два міста не сполучені шляхом, то знайдеться третє місто, сполучене шляхом із кожним із цих двох. Якою може бути найменша кількість шляхів у цій країні?

5. Точки M, N, K позначено відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Точку перетину відрізків AN та BK позначено через L . Доведіть, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

11 клас

1. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата як на діаметрах всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру „квітка”. Доведіть, що загальна площа „квітки” дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

2. Переставивши в деякому порядку числа $1, 2, \dots, 1994$, одержали послідовність $a_1, a_2, \dots, a_{1994}$. Доведіть, що найбільше з чисел $(n-1) \cdot a_n, 1 \leq n \leq 1994$, не менше 997^2 .

3. Знайдіть всі функції $f: R \rightarrow R$, які при будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$.

4. Трикутник $A_1B_1C_1$, є у просторі ортогональною проекцією правильного трикутника ABC із довжиною сторони 1. Відомо, що $A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Доведіть, що кут між площинами ABC та $A_1B_1C_1$, більший за 60° .

5. Для всіх дійсних x доведіть нерівність

$$x^2 \sin x + x \cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0.$$

1995 рік

7 клас

1. Із 24 бочок однакового об'єму 5 заповнені водою повністю, 11 – наполовину, 8 – порожні. Розділити їх між трьома особами так, щоб кожній з них дісталось по 8 бочок і однакова кількість води (переливання води не допускається).

2. Білка за 20 хв. приносить горіх у гніздо. Яку відстань вона при цьому пробігає, якщо без горіха білка біжить зі швидкістю 5 м/с, а з горіхом – 3 м/с?

3. Два села розташовані з однієї сторони від річки. Де потрібно встановити міст, щоб сума відстаней від центрів обох сіл до моста була найменшою?

4. Визначте, якою цифрою закінчується число 2^{1995} .

5. Обчисліть суму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1994 \cdot 1995} + \frac{1}{1995 \cdot 1}.$$

8 клас

1. У трикутнику ABC проведена висота AH . O – центр описаного навколо трикутника кола. Довести, що $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

2. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ ціле.

3. Довести, що для довільних дійсних a та b виконується нерівність $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$.

4. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999999. Квиток $abcdef$ вважається щасливим, якщо $af + be + cd = 100$. Довести, що сума номерів усіх щасливих квитків ділиться на 1001.

9 клас

1. Довести, що не існує чотирьох різних додатних чисел a, b, c, d , що $a + b = c + d$, $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

2. Деяка комісія проводила свої засідання 40 разів. Кожного разу в засіданнях брали участь 10 чоловік, причому будь-які двоє членів комісії засідали спільно не більше одного разу. Довести, що до комісії входить не менше 60 осіб.

3. Знайти всі трійки цілих чисел, для яких

$$k^2 + m^2 + n^2 - 2k + 4m - 6n = -11.$$

4. У трикутнику ABC кут ABC дорівнює 120° . H – точка перетину висот трикутника, O – центр описаного кола, M – середина дуги ACB цього кола. Довести, що $HM = MO$.

5. a, b, c, A, B, C – такі додатні числа, що рівняння $ax^2 - bx + c = 0$ та $Ax^2 - Bx + C = 0$ мають різні корені. Довести, що для всіх t , які лежать між коренями першого рівняння, і T , які лежать між коренями другого рівняння,

виконується нерівність $(at + AT) \cdot \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right) < \left(\frac{b+B}{2} \right)^2$.

10 клас

1. Довести, що для всіх натуральних $n > 3$ десятковий запис числа n^2 містить принаймні одну парну цифру.

2. Довести, що рівняння $x^2 - 5x - 4\sqrt{x+13} = 0$ не має розв'язків у дійсних числах.

3. Точку O , яка лежить всередині правильного $2n$ -кутника з'єднано з його вершинами. Одержані трикутники розфарбовано через один червоним і синім кольором. Довести, що сума площ червоних трикутників дорівнює сумі площ синіх трикутників.

4. На площині задано 1995 точок: $A_1, A_2, \dots, A_{1995}$. Перетворення S будується в такий спосіб: спочатку робиться симетрія відносно A_1 далі одержана точка

симетризується відносно A_2 і так далі аж до симетрії відносно A_{1995} . Доведіть, що існує рівно одна точка, яка не змінюється цим перетворенням.

5. Таблиця розмірами 1995×1995 заповнена різними натуральними числами так, що в кожному рядку числа зліва направо монотонно зростають. Одного разу в кожному стовпчику числа переставили так, що вони згори вниз монотонно спадають. Довести, що при цьому в кожному рядку числа зліва направо, як і раніше, зростають.

11 клас

1. Переріз правильної трикутної піраміди зі стороною основи a деякою площиною є квадратом зі стороною b . Знайти об'єм піраміди.

2. Про дійсне число K та послідовність дійсних чисел a_0, a_1, a_2, \dots відомо, що $a_0 = 1$, $a_{1995} = 100$, $a_1 \cdot a_2 > 0$, $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = K \cdot a_n$ для кожного n . Знайти K .

3. Чи існує многочлен $p(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що для всіх дійсних x виконується нерівність $p(x) \geq 1995 \cdot p'(x)$?

4. Функція $f(x)$ визначена на $N \cup \{0\}$ і набуває значень на цій же множині. Для всіх n виконується рівність $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Обчислити $f(1995)$.

5. В деякому місті є кілька (більше 1) автобусних маршрутів. Кожні два з них мають рівно одну спільну зупинку. Кожні дві зупинки з'єднує рівно один маршрут. Знайти: а) кількість маршрутів, якщо на кожному з них рівно 3 зупинки; б) кількість зупинок на кожному з них, якщо маршрутів 13 і на кожному з них не менше трьох зупинок.

1996 рік

7 клас

1. Намалуйте на площині три прямокутники таким чином, щоб їх контури розділили площину на $n > 20$ частин. Вкажіть, якого максимального значення n вам вдалося досягнути.

2. Сторони прямокутника дорівнюють a та b ($a \neq b$). Його розрізали на квадрат і ще один прямокутник. Якщо останній не є квадратом, то його теж розрізують вказаним способом, і так далі. Доведіть, що, якими б не були натуральні числа a та b , процес розрізування закінчиться через скінченне число кроків.

3. Визначте, яке число стоїть у послідовності 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... на 1996-му місці.

4. Намалуйте графік функції $y = \max\{|x|, 1 - |x|\}$, де $\max\{a, b\}$ означає найбільше з чисел a та b .

5. Яких семицифрових чисел більше: тих, в десятковому записі яких використовується цифра 7, чи тих, в записі яких вона відсутня?

8 клас

1. Дано трикутник зі сторонами a , b , c , які задовольняють співвідношення $\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c}$. Визначити кути цього трикутника, якщо один з них дорівнює 80° .

2. Доведіть, що таблицю розмірами 3×3 не можна заповнити числами -1996 , 0 , 1996 так, щоб усі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці були різними.

3. Визначити знак числа

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}.$$

4. Перевірте, чи є число $1995^2 + 1996^2 + (1995 \cdot 1996)^2$ точним квадратом.

5. Доведіть, що центри квадратів, побудованих зовні на сторонах довільного паралелограма, є вершинами квадрата.

9 клас

1. Знайдіть всі прості числа p , для яких $2^p + p^2$ теж є простим.

2. Відомо, що $(a+b+c) \cdot c < 0$. Довести, що $b^2 > 4ac$.

3. Гра починається із числа 9. За один хід дозволяється додати до наявного числа довільне менше від нього натуральне число. Виграє той, хто одержить 1996. Два учні роблять ходи по чергово. У котрого з них є виграшна стратегія?

4. CM – медіана трикутника ABC , R – радіус описаного навколо нього кола. Доведіть, або спростуйте таке твердження: трикутник ABC прямокутний тоді і тільки тоді, коли $CM=R$.

5. Пряма розмальована у два кольори. Доведіть, що існує відрізок цієї прямої, середина і кінці якого мають один колір.

10 клас

1. На дошці записане число 10. Двоє роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється приписати справа від наявного числа або 10 або 1010. Виграє той, хто першим запише число, яке ділиться на 1996, У котрого із гравців є виграшна стратегія?

2. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x + y = 1996$.

3. Сторони прямокутника дорівнюють a та b ($a \neq b$). Його розізували на квадрат і ще один прямокутник. Якщо останній не є квадратом, то його теж розрізують вказаним способом, і так далі. Доведіть, що, якими б не були раціональні додатні числа a та b , процес розрізування закінчиться через скінченне число кроків.

4. Знайдіть всі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких при довільних дійсних x, y виконується рівність

$$f(x+y) = f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - f\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \sin x.$$

5. На стороні BC трикутника ABC довільним чином вибрано точку M . Проведіть через M пряму, яка ділить площу трикутника ABC пополам.

11 клас

1. Задано шестицифрове число $A = \overline{abcdef}$, причому $\overline{abc} - \overline{def}$ ділиться на 11. Доведіть, що A ділиться на 11.

2. Прямокутник із сторонами a та b довільним чином розізували на менші прямокутники, сторони яких паралельні до сторін даного прямокутника. Довжини сторін одержаних прямокутників цілочислові, і в кожного з них хоча б один із вимірів виражається парним числом. Доведіть, що серед чисел a та b принаймні одне парне.

3. Обчисліть

$$\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}.$$

4. На дошці спочатку було написано число 1996. Два учні роблять ходи по чергову. За один хід дозволяється замінити написане число a на $a - t$, де t – один із

дільників числа a . Програє той, хто одержить 0. У кого з них є виграшна стратегія?

5. Задано дві послідовності: $x_n = [n\sqrt{2}]$, та $y_n = [n(2 + \sqrt{2})]$, де $[a]$ – ціла частина a , тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a . Доведіть, що кожне натуральне число є елементом однієї і тільки однієї із даних послідовностей.

1997 рік

7 клас

1. Учень Забудько хвалиться, що йому вдалося розмалювати клітинки таблиці 1996×1997 таким чином, що у кожному рядку чорних клітин було більше, ніж білих, а в кожному стовпчику – білих більше, ніж чорних. Але він забув, як це зробити. Допоможіть Забудькові.

2. На листку паперу намалювали правильний трикутник і покрили його двома вирізаними правильними трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б і одного з цих трикутників.

3. Два комбайни скошили деяку площу за 8 годин. Наступного дня половину такої ж площі косив перший комбайн, а другу половину – обидва разом, на що пішло 10 годин. За який час перший комбайн скошив би дану площу сам?

4. Автобусні квитки мають номери від 000000 до 999999. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр дорівнює сумі останніх трьох цифр. Доведіть, що кількість щасливих квитків парна.

8 клас

1. Знайдіть всі прості числа a , b , c , для яких $abc < ab + bc + ca$.

2. Обчислити $\frac{a^4 + a^3 + a^2 + 9}{a^5 - a^2 - a + 6}$, якщо $a^3 + a - 1 = 0$.

3. Таблицю 3×3 заповнили натуральними числами так, що всі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці дорівнюють M . Доведіть, що M ділиться на 3.

4. Точку M всередині квадрата з'єднали з його вершинами. Одержали 4 трикутники, один з яких рівнобедрений із кутом 150° . Визначити кути трьох інших трикутників.

5. На прямій відзначено 1997 різних точок. Доведіть, що не існує двох сусідніх відзначених точок, для яких суми відстаней від них до решти точок були б однаковими.

9 клас

1. Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt[6]{27-x^2}.$$

2. Числа 1, 2, ..., 1997 переставили у довільному порядку і записали у вигляді послідовності $a_1, a_2, \dots, a_{1997}$. Доведіть, що число $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \dots \cdot (a_{1997} - 1997)$ парне.

3. В ліс пішли 9 дівчаток та n хлопчиків. Разом вони зібрали $n^2 + 8n + 9$ грибів, причому всі зібрали грибів порівну. Скільки хлопчиків ішло до лісу?

4. Учень Незнайко вирішив намалювати опуклий 1997-кутник, всі кути якого виражаються цілим числом градусів. Допоможіть йому.

5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) провели бісектрису CM . Відрізки ME та MN є відповідно бісектрисами трикутників BMC та AMC . Доведіть, що трикутник EMN рівнобедрений.

10 клас

1. Для додатних x, y доведіть нерівність

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

2. Чи можна таблицю 3×3 заповнити натуральними числами так, щоб усі 8 сум по горизонталях, вертикалях та діагоналях таблиці дорівнювали 1997?

3. На листку паперу намалювали квадрат зі стороною 19. Учень Недбайло примудрився зробити у ньому 97 плям. Доведіть, що всередині квадрата можна розмістити відрізок довжиною $10\sqrt{3}$ таким чином, щоб або обидва його кінці знаходилися на плямах, або обидва були поза ними.

4. Гра починається із числа 10. Два учні роблять ходи по чергово. За один хід дозволяється помножити наявне число на будь-яку цифру від 2 до 9 включно. Виграє той, хто першим запише число, більше 1997. Хто з них має виграшну стратегію?

5. Визначте кути прямокутного трикутника, в якому медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює середньому геометричному катетів.

11 клас

1. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{1}{2} \left(\left| 1 + \sqrt{4 - x^2} \right| + \left| 1 - \sqrt{4 - x^2} \right| \right).$$

2. Знайдіть всі такі прості числа p , для яких число $p^2 + 11$ має рівно 6 дільників, включаючи і саме число.

3. В кубі з ребром 11 см розмістили 19 синіх та 97 жовтих кульок різних радіусів. Доведіть, що всередині цього куба знайдуться дві точки на відстані 11 см одна від одної, що або обидві вони одного кольору, або обидві не належать жодній із кульок.

4. Гра починається із числа 1997. Два учні роблять ходи по чергово. За один хід дозволяється зменшити наявне число на ціле число, яке є степенем двійки і не перевищує записаного ($1 = 2^0$). Виграє той, хто одержить нуль. У котрого із гравців є виграшна стратегія?

5. Визначте кути прямокутного трикутника, в якому медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює середньому геометричному катетів.

1998 рік

7 клас

1. Дано два баки ємністю по 10 літрів із сольовим розчином 10%-ої і 15%-ої концентрації та посудини ємністю 3, 4 та 5 літрів. Як за допомогою переливань отримати 1 літр 12%-го сольового розчину?

2. Чи можна розмістити в таблиці розмірами 3×4 числа -1 та 1 таким чином, щоб усі суми чисел, що стоять в одному рядку або в одному стовпчику, були різними?

3. Скільки існує нескоротних дробів із чисельником 1997, які менші за $\frac{1}{1997}$ і більші за $\frac{1}{1998}$?

4. Дано смужку розмірами 1×17 , клітинки якої зліва направо пронумеровано послідовними натуральними числами від 1 до 17. двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, серед яких ліва має парний номер. Переможеним вважається той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш: той, хто починає, чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію для такого гравця.

8 клас

1. Сума трьох трицифрових натуральних чисел aab, aba, baa (йдеться про десятковий запис) дорівнює 1998. Знайдіть всі трійки таких чисел (різним літерам не обов'язково відповідають різні цифри).

2. Чи буде число $11\dots155\dots56$ (у десятковому записі 1998 одиниць, 1997 п'ятірок та одна шістка) точним квадратом?

3. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні до бісектрис протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

4. На дошці розмірами 4×4 з клітинками двоє учнів грають у гру. Вони ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку, яку можна зафарбувати лише один раз. Переможеним вважатиметься той гравець, після ходу якого утвориться квадрат розмірами 2×2 , що складатиметься із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

9 клас

1. Доведіть, що число $11\dots 1$ (десятковий запис складається з 1998 одиниць) ділиться на 37.

2. Через точки дотику вписаного у трикутник кола зі сторонами цього трикутника провели прямі, що відповідно паралельні до бісектрис протилежних кутів трикутника. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

3. Дано смужку розмірами 1×99 . Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або ж деякі дві сусідні. Переможеним вважається той гравець, котрий не зможе зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі вигравш: той, хто ходить першим, чи його суперник?

4. На координатній площині xOy позначили п'ять точок: $(-2, 8), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша

кількість зі цих точок може належати графіку рівняння

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1?$$

5. З тричленом $ax^2 + bx + c$ дозволяється робити такі дії: 1) замінити в ньому x на $x - \lambda$, де λ – довільне дійсне число; 2) замінити його на тричлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$. Чи можна за допомогою таких дій із тричлена $x^2 - 3x - 4$ одержати тричлен $x^2 - 2x - 5$?

10 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $\frac{n^2}{m+n}$ є цілим числом. Доведіть, що число $\frac{m^3}{m+n}$ також ціле.

2. Доведіть, що якщо в опуклому чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою, то цей чотирикутник – трапеція або паралелограм.

3. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z , які задовольняють рівності

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}, \quad y = \sqrt{\frac{z+1}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

4. У новосформованому десятому класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, деякі – ще ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожену з незнайомих дівчат. Усього було кинута 117 замріяних поглядів. Скільки у класі хлопців і дівчат, якщо всього не більше за 40 учнів?

5. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну і ту ж саму площину є паралелограмами. Чи можна стверджувати, що $ABCD$ є паралелограмом?

11 клас

1. Дано невід'ємні дійсні числа x та y , які задовольняють умову $x - \sqrt{x} \leq y - \frac{1}{4} \leq x + \sqrt{x}$. Доведіть, що для цих чисел виконуються також і нерівності $y - \sqrt{y} \leq x - \frac{1}{4} \leq y + \sqrt{y}$.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x.$$

3. Відомо, що на сторонах опуклого чотирикутника $ABCD$ відповідно існують точки K і M такі, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P – точка перетину прямих KM і BD . Знайдіть відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

4. Про функцію f , яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ має принаймні один дійсний корінь, та

$$f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

для всіх $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Знайдіть $f(-1)$.

5. Прямокутник розмірами $2^{1998} \times 1998^2$ поділено на одиничні квадратики. Доведіть, що кількість способів, за допомогою яких прямокутник можна розбити на фігурки, кожна з яких або є прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок, одна з яких має спільні сторони з трьома іншими, є непарним числом (способи, що відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними).

1 9 9 9 р і к

7 клас

1. Дана смужка розмірами 1×16 , в першій клітинці якої записане число 34, а у восьмій клітинці – число 32. Розставте у решті клітинок цієї смужки цілі числа так,

щоб їх сума в будь-яких трьох клітинках, що розташовані поспіль, дорівнювала 99.

2. Чи можна розділити 13 аркушів паперу між шістьма учнями так, щоб при цьому кожний аркуш виявився розрізаним не більше, ніж на три частини (або взагалі не розрізався), та кожний учень отримав однакову кількість шматочків паперу?

3. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок (x, y) , координати яких одночасно задовольняють дві рівності: $|x - y| = x + y$, $|x + y| = x - y$.

4. Чи завжди вдасться одинадцятьма вантажівками вантажопідйомністю 1,5 тони перевезти 13,5 тон вантажу, упакованого в ящики, якщо маса кожного ящика не перевищує 300 кілограмів?

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 1999$.

2. Чи існують такі цілі числа m і n , що

$$(m+1998)(m+1999) + (m+1999)(m+2000) + (m+1998)(m+2000) = n^2?$$

3. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію цієї трапеції в точці P , а основу AD – у точці Q . Знайдіть величину кута APQ .

4. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яносто дев'яти з цих чисел є додатною. Доведіть, що додатною є сума всіх даних чисел.

9 клас

1. Доведіть, що десятковий запис числа 1999⁶ містить принаймні три однакових цифри.

2. Розв'яжіть рівняння

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4) = (1+x+x^2+x^3)^2.$$

3. Всередині гострокутного трикутника ABC позначили точку H так, що

$$AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2 = CA^2 + BH^2.$$

Доведіть, що H – ортоцентр трикутника ABC .

4. Нехай α – відмінне від нуля дійсне число.

Відомо, що x_1 та x_2 є дійсними коренями рівняння

$$x^2 + \alpha x - \frac{1}{2\alpha^2} = 0. \text{ Доведіть, що } x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$$

5. Три цілі числа a, b, c записали у рядок. Під цими числами записали нову трійку чисел $a-b, b-c, c-a$. Числа третього рядка утворюються з чисел другого рядка за таким самим правилом і т.д. Доведіть, що незалежно від вихідної трійки чисел першого рядка, серед чисел рядків, що розташовані нижче сьомого, не може зустрітися ані число 1999, ані число 2000.

10 клас

1. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z , які задовольняють рівності $x + yz = y + zx = z + xy = 6$.

2. Дано довільний трикутник. Нехай O – центр кола, вписаного в цей трикутник, S – центр, кола описаного навколо трикутника AOC . Доведіть, що точки B, O, S лежать на одній прямій.

3. Зобразіть на координатній площині xOy множину всіх точок (x, y) , координати яких задовольняють умову

$$x^2 = y + \sqrt{y+x}.$$

4. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3, \dots така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k послідовність $k + a_1, k + a_2, k + a_3, \dots$ містить лише скінченну кількість простих чисел (можливо, не містить жодного)?

5. У країні n^2 міст, які розташовані у вигляді квадрата розмірами $n \times n$. Відстань між сусідніми містами – центрами відповідних квадратиків – становить 10 км. Міста сполучаються системою доріг, що складаються із прямолінійних ділянок, які паралельні до сторін квадрата. Якою найменшою можливою може бути довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста країни можна дістатися до будь-якого іншого?

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

2. Нехай α та β – гострі кути, для яких виконується рівність $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$. Доведіть, що

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

3. Чи існує функція f , яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну в усіх точках та задовольняє наступні умови: а) при всіх дійсних x виконується рівність $f(x) \geq f(x + \sin x)$; б) рівняння $f'(x) = 0$ має скінченну кількість коренів?

4. Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC . На сторонах AC і BC цього трикутника відзначили такі точки M і K , що $\angle PMC = \angle PKC = 90^\circ$. Доведіть, що коли точки M і K рівновіддалені від середини сторони AB , то $\angle PBC = \angle PAC$.

5. Чи можна шахівницю розмірами 7×7 , із якої вилучено чотири кутові клітинки, так заповнити цілими числами (до кожної клітинки записується одне ціле число), щоб сума всіх чисел дорівнювала 199919991999 , і в кожній п'ятиклітинковій фігурці, яка має вигляд хрестика, в якому центральна клітинка оточена чотирма іншими, сума чисел була від'ємною?

2 0 0 0 р і к

7 клас

1. Нехай $S(n)$ – сума цифр натурального числа n , а $S(S(n))$ – сума цифр суми цифр натурального числа n .

а) Чи існує натуральне n , для якого $n + S(n) = 2000$?

б) Чи існує натуральне n , для якого $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$?

2. Кожну точку прямої пофарбовано синім або червоним кольором. Доведіть, що на цій прямій знайдуться три різні точки A, B, C , пофарбовані одним кольором, і такі, що точка C є серединою відрізка AB .

3. На дошці в рядок записано 1999 натуральних чисел. Доведіть, що серед них завжди можна витерти одне число так, що сума чисел, які залишилися, буде парною. Чи правильно це буде для 2000 чисел?

4. Запишемо рівність $m - n = k$, в якій m, n, k – натуральні числа, причому m – п'ятицифрове число. Доведіть, що у такому записі принаймні одна цифра повториться (наприклад, у записі $54321 - 608 = 53713$ повторюється цифра 5).

5. Знайдіть принаймні дві пари натуральних чисел (a, b) , що задовольняють рівняння $1999a^{1999} = b^{2000}$.

8 клас

1. Доведіть, що число $19991999 + 19991998 \cdot 19991999 \cdot 19992000$ є кубом цілого числа.
2. На дні озера з постійною потужністю б'ють джерела. Стадо з 12 слонів випиває озеро за 4 хвилини, а стадо з 9 слонів – за 6 хвилин. Певного дня до озера підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють усю воду з цього озера? (Об'єм води перед водопоєм є завжди однаковий).
3. Дано трапецію $ABCD$, у якій $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Відомо, що в цій трапеції відстань між серединами основ дорівнює відстані між серединами діагоналей. Доведіть, що кут ADB тупий.
4. Чи існують цілі числа m та n такі, що $7m^2 - 5n^2 = 2000$?
5. Миколка та Сергійко грають у гру, по черзі записуючи цілі числа у клітинки таблиці розмірами 7×9 (7 рядків та 9 стовпчиків). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку. Гра продовжується, поки вони не заповнять числами всю таблицю. Потім підраховуються значення S_1, S_2, \dots, S_7 – суми чисел у рядках таблиці. Якщо серед чисел S_1, S_2, \dots, S_7 парних більше, ніж непарних, то виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

9 клас

1. Доведіть, що всі корені рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0$ є також коренями рівняння

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2 = 0.$$

2. Про ціле число n та просте число p відомо, що числа $5n-1$ та $n-10$ діляться на p . Доведіть, що число $2000n+13$ також ділиться на p .

3. Доведіть, що для додатних чисел a, b, c виконується нерівність $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geq a^2 + b^2 + c^2$.

4. У сегмент кола ω , що обмежений його хордою MN , вписано два кола. Ці кола дотикаються до дуги кола ω у точках A і B та дотикаються до хорди MN у точках C і D . Доведіть, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

5. У ряд вписані послідовні натуральні числа від 1 до 2000. Двоє по черзі вписують між цими числами знак додавання „+” або множення „ \times ” (усього вписано 1999 знаків). Якщо кінцеве значення одержаного виразу ділитиметься на 3, то виграє той, хто ходив першим. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Знайдіть для нього виграшну стратегію.

10 клас

1. Знайдіть всі трійки дійсних чисел x, y, z , для яких виконується рівність

$$\sqrt{3z^2 - 2y - 6z - 5} = \sqrt{2x - y^2 + z^2 - 7} - \sqrt{2y - x^2 + z^2 - 12}.$$

2. Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків та курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони – кури, а десята частина курей, що вони – індики. Якщо брати загалом, то п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індіками. А якою є частка індиків у його господарстві насправді?

3. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято відповідно точки P, Q, R , а на відрізках RP, PQ, QR – відповідно точки A_1, B_1, C_1 таким чином, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Знайдіть площу трикутника PQR , якщо площа трикутника ABC дорівнює a , а площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює b .

4. На дошці записано рядок цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} , кожне з яких не перевищує 10. Відомо, що кожне ціле число i ($1 \leq i \leq 10$) зустрічається серед записаних на дошці рівно a_i разів. Які саме числа записані на дошці?

5. Задано таку функцію $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що для кожного $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ виконується рівність $f(tg\ 2x) = tg^4x + ctg^4x$. Доведіть, що для кожного $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ справджується нерівність $f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196$.

11 клас

1. Чи існує натуральне число, десятковий запис якого складається тільки з двійок, та яке можна подати у вигляді суми кубів деяких трьох послідовних цілих чисел?

2. Дано коло ω та попарно різні точки B, C, D на цьому колі. Дотична до кола ω , яку проведено через точку D , перетинає промінь CB у точці A . На

продовженні відрізка BD за точкою D довільно обрано точку E . Коло, яке описане навколо трикутника CDE , перетинає пряму AD у відмінній від D точці K , а пряму AC – у відмінній від C точці F . Доведіть, що $KF \parallel BD$.

3. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел a, b , що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\sin 2000x + \sin ax + \sin bx = 0.$$

4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12, \\ xyz = 2 + x + y + z, \end{cases}$$

якщо відомо, що $x, y, z \geq 0$.

5. Множина X складається з шести елементів. Нехай A_1, A_2, \dots, A_9 – такі її підмножини, що кожна з них містить по три елементи. Доведіть, що існує таке “пофарбування” елементів X у два кольори (тобто кожному елементу ставиться у відповідність один з двох кольорів), що кожна множина A_i ($1 \leq i \leq 9$) буде містити принаймні два різнокольорових елементи.

2 0 0 1 р і к

7 клас

1. Відстань між пунктами A та B – 80 км, B та C – 300 км, C та D – 120 км, D та A – 100 км. Яка відстань між пунктами A та C ?

2. За допомогою якої мінімальної кількості доданків, що містять у своєму записі лише цифри 3, можна отримати у сумі число 111111?

3. У таблиці $n \times n$ розміщено n чорних шашок по діагоналі знизу вверху та n білих шашок по діагоналі зверху вниз. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або протилежному напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінченну кількість ходів добитися, щоб всі чорні шашки опинилися в першому стовпчику, а всі білі – в останньому стовпчику, якщо: а) $n = 4$, б) $n = 6$?

4. а) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?

б) Чи можна здійснити цю процедуру для чисел 1, 2, 3, ..., 999 ?

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $||x| - 2| = x$.

2. Турист пройшов половину шляху між пунктами A та B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A він дві третини цього шляху пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від A до B , а решту шляху – зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A та B , якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на дві хвилини більше, ніж на весь шлях від A до B .

3. Чи існують такі цілі числа k, l , що $k^3 + l^3 = 2001$?

4. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрали точки M, P, N, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Нехай O – точка їх перетину. Доведіть, що для периметрів утворених при цьому чотирикутників виконується рівність

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMP} + P_{DNOQ}.$$

5. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають у гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника, і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток чисел сірників в отриманих двох менших купках. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

9 клас

1. Доведіть нерівність $\frac{|a|}{\sqrt{b}} + \frac{|b|}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} |x|x| + |y|y| = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$$
.

(Тут $[t]$ позначає найбільше ціле число, яке не перевищує t).

3. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у цих точках.

4. Два рівних квадрати утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поділяють його на чотири чотирикутники. Доведіть, що ці діагоналі перпендикулярні одна до одної.

5. Із паперу в клітинку вирізали квадрат 8×8 . Яку найбільшу кількість фігурок у вигляді хрестика, складеного з п'яти клітинок, можна вирізати з цього квадрата?

10 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin 9x + \dots + \sin nx \cdot \sin n^2 x = 1$.

2. Для кожного натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$. Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n \geq 1$.

а) Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)a(n+1)$ належить до S .

б) Доведіть, що існують n, k більші за 2001 такі, що $a(n)a(k)$ не належить до S .

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b, c, d, e виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq (a + b + c + d)e.$$

4. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло. Промені AE і CD перетинаються в точці P , а промені ED і BC – у точці Q так, що $PQ \parallel AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

11 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin 9x + \dots + \sin nx \cdot \sin n^2 x = 1$.

2. Числова послідовність a_1, a_2, a_3, \dots , в якій $a_1 = 2$, $a_2 = 500$, $a_3 = 2000$, при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову $\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001} .

3. Знайдіть всі функції f , які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

4. Поза площиною α дано точку A . Доведіть, що для будь-якої прямої l , яка належить α , у цій же площині існує така відмінна від l пряма $m \parallel l$, що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходить через середину відрізка AM .

5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

2 0 0 2 р і к

7 клас

1. Правильний дріб $\frac{m}{n}$ та неправильний дріб $\frac{n}{m}$ посперечалися, котрий з них знаходиться ближче до одиниці.

а) Розсудить їх;

б) Знайдіть хоч одну пару дробів указанного вигляду, один із яких у 2002 рази ближчий до одиниці, ніж інший.

2. На площині відзначили 6 різних точок. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві з цих точок, містить принаймні ще одну відзначену точку. Доведіть, що всі ці 6 точок лежать на одній прямій.

3. Семикласник Петрусь одержав у подарунок на свій день народження лінійку довжиною 13 см без поділок. Він хвалиться, що зумів нанести на ній 4 поділки таким чином, що з їх допомогою можна відкласти відрізки будь-якої цілочислової довжини від 1 см до 13 см включно, прикладаючи лінійку у кожному з цих випадків лише один раз. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

4. Множину чисел 1, 2, 3, ..., 2002 розбили на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої – з парною. Що більше: сума всіх чисел першої групи, чи сума всіх чисел другої групи?

8 клас

1. Торговець мав кілька штук однакових годинників. Якщо він їх усіх продасть по 13 гривень, то матиме 54 гривні збитку, а якщо продасть по 18 гривень, то набере 81 гривню. Скільки було годинників і якої вартості?

2. Учень задумав деяке натуральне число n .

Доведіть, що:

а) існує натуральне число k , що $nk + 1$ є складеним;

б) існує безліч натуральних чисел k з такою властивістю.

3. У гострокутному трикутнику з однієї вершини проведено медіану, з другої – бісектрису, а з третьої – висоту. При їхньому перетині утворився новий трикутник. Доведіть, що він не може бути рівностороннім.

4. Доведіть, що

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2002}.$$

5. П'ятдесят каменів розташовані у порядку спадання їхньої маси. Перший важить 468 кг, а кожен наступний на 2 кг легший від сусіднього з ним. Якою мінімальною кількістю вантажівок можна перевезти ці камені, якщо вантажити їх дозволяється у довільному порядку, але не більше трьох тон на одну автомашину?

9 клас

1. Дорога Петруся до школи проходить мимо п'яти садків. Петрусь стверджує, що у першому і другому садках разом є 9, другому і третьому – 13, третьому і четвертому – 19, четвертому і п'ятому – 11, п'ятому і першому – 16 дерев. Чи можна на основі його даних встановити загальну кількість дерев у всіх п'яти садках? Якщо так, то знайдіть цю кількість.

2. Число x замінили на $x^2 - 2001$. Із одержаним числом поступили таким же чином, продовживши процедуру описаних замін 2002 рази. Чи могли у кінцевому результаті одержати початкове число?

3. a , b , c - довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

4. На двох сторонах трикутника ABC побудовані квадрати $ABMK$ та $BCTP$, які лежать зовні цього трикутника. Точка O – середина сторони AC . Доведіть, що $\angle BPM = \angle CPO$.

5. Доріжки у зоопарку утворюють правильний трикутник, в якому проведені середні лінії. Із клітки втекла мавпа. Її ловлять два сторожі. Чи зможуть вони спіймати мавпу, якщо всі троє будуть бігати лише по доріжках, бачитимуть одне одного і матимуть однакові максимальні швидкості руху?

10 клас

1. Таблицю розмірами 5×5 заповнили натуральними числами $1, 2, \dots, 25$, причому будь-які два сусідні натуральні числа знаходяться у сусідніх зі спільною стороною клітинках. Дослідіть, яка максимальна кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпчику такої таблиці.

2. Доведіть, що $\cos 20^\circ \cos 30^\circ \sin 50^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ є раціональним числом.

3. Знайдіть довжину відрізка, паралельного до основ трапеції, довжини яких відповідно дорівнюють a та b , якщо відомо, що цей відрізок ділить площу трапеції пополам, а його кінці знаходяться на бічних сторонах цієї трапеції.

4. Знайдіть всі функції $f: N \rightarrow N$, для яких при кожному натуральному n виконується рівність

$$f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3.$$

5. Після введення у шкільну програму замість одного уроку математики уроку футболу вирішили провести Всеукраїнські змагання школярів із цього виду спорту. В Івано-Франківській області заявки для участі у цих змаганнях подали 202 команди замість очікуваних

2002-ох. Їх певним чином розбили на групи. У кожній групі провели турніри в одне коло. При цьому кожна зустріч закінчувалася перемогою однієї з команд. Після статистичної обробки результатів змагань виявилось, що сума квадратів перемог, здобутих усіма учасниками змагань, дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Чи могло таке статися, якщо б у змаганнях взяли участь 2002 команди і в усіх групах кількості команд були різними?

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$.
2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ yz + y + z = 1000, \\ zx + z + x = 2001. \end{cases}$$

3. Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника $ABCE$, вписаного у коло з центром O , перпендикулярні, то ламана AOC ділить площу цього чотирикутника пополам.

4. Доведіть або спростуйте наступне твердження: у довільній трикутній піраміді знайдеться вершина, що із ребер, які виходять з неї, можна утворити трикутник.

5. Учень виписав на дошці чотири множини натуральних чисел, які склалися відповідно зі всіх натуральних дільників наступних чисел: $a = 2^{2001} - 11$, $b = 2001^2 - 11$, $c = 2^{2002} + 11$, $d = 2002^2 + 11$. Встановіть, які числа йому довелося виписувати рівно три рази.

2 0 0 3 р і к

7 клас

1. Діти, вишикувавшись парами, виходять з лісу. У кожній парі йдуть хлопчик і дівчинка, причому у хлопчика або вдвічі більше горіхів, ніж у дівчинки, або вдвічі менше. Чи могло так статися, що у всіх разом 2003 горіхи ?

2. Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор ліспромгоспу всіх заспокоїв, сказавши: „У вашому лісі 99% сосен. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки сосен залишиться 98% від всіх дерев.” Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп ?

3. На дорозі між двома гірськими селами горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде завжди зі швидкістю 15 км/год, а вниз – 30 км/год. Яка відстань між селами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години ?

4. Незнайко вважає, що тільки правильний трикутник можна розрізати на три рівні трикутники. Чи не помиляється він?

8 клас

1. Жорстокий цар Шагріяр зажадав від чарівної Шахразادی, щоб вона протягом наступних 1001-єї ночей називала йому по одному розв'язкові в натуральних числах рівняння $x^2 - y^2 = p^{2003}$, де p – деяке просте число. Скориставшись килимом-літаком, Шахразада прилетіла до Івано-Франківська і просить вашої допомоги. Не забувайте тільки, що у її розпорядженні всього 3 години, а самого числа p вона поки що не знає.

2. На базарі продаються рибки – великі і малі. Сьогодні 3 великі і 1 мала коштують разом стільки, як 5 великих вчора. А 2 великі і 1 мала коштують сьогодні стільки ж, як 3 великі і 1 мала вчора. Чи можна за цими даними визначити, що дорожче: 1 велика і 2 малі сьогодні, чи 5 малих вчора ?

3. Петрусь та Миколка по черзі розставляють у виразі $n * n^2 * n^3 * n^4 * n^5 * n^6 * n^7 * n^8$ замість зірочок знаки „ + ”, або „ - ”. Доведіть, що Петрусь, який розпочинає розставляти знаки, може добитися, щоб одержаний вкінці вираз ділився на 6 при всіх натуральних n , незалежно від ходів Миколки.

4. Медіани AD та BE трикутника ABC перетинаються у точці M . Знайдіть довжину медіани CF трикутника BCM , якщо $AB=5$, $AD=6$, $AC=8$.

9 клас

1. Петрусь виписав на дошці 2003 зведені квадратні рівняння і перевірів, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і одержане в результаті рівняння також не має дійсних коренів.

2. Трава на лузі росте рівномірно. 30 корів можуть спасти її за 4 дні, а 25 – за 6 днів. Скільки корів можуть пастися на такому лузі безперервно, поки на ньому буде рости трава ?

3. Із 40 одиниць, 30 двійок, 20 трійок і 10 четвірок склали два різні стоцифрові числа. Доведіть, що вони не діляться одне на одне.

4. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60° . Бісектриси AD та CE перетинаються у точці O . Доведіть, що $OE = OD$.

10 клас

1. У вершинах десятикутника у довільному порядку розмістили всі натуральні числа від 1 до 10, а потім на кожній стороні виписали суму чисел, які знаходяться на її кінцях. Доведіть, що принаймні дві зі цих сум закінчуються на одну і ту ж цифру.

2. Доведіть, що число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot 1004 \cdot \dots \cdot 2002$$

ділиться на 2003.

3. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\frac{y+z-x}{1} = \frac{z+x-y}{3} = \frac{x+y-z}{5} = \frac{xyz}{6}.$$

4. На стороні AB гострокутного трикутника ABC довільно вибрали точку M , з якої опустили перпендикуляри MK та MP на дві інші сторони трикутника. При якому розташуванні точки M довжина відрізка PK буде найменшою?

11 клас

1. Діагоналями, які не перетинаються між собою, опуклий n -кутник поділено на трикутники так, що з кожної вершини виходить парне число проведених діагоналей. Доведіть, що n ділиться на 3.

2. Тангенси кутів трикутника є натуральними числами. Знайдіть ці числа.

3. Дослідіть, якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$.

4. Місто розташоване на 2003-ьох островах, причому деякі з них з'єднані між собою так, що з будь-якого острова можна проїхати на будь-який інший. При

поїздках містом його жителі виражають довжину свого шляху числом мостів, які їм доводиться проїздити. Після закриття одного з мостів кожен житель міста заявив: „ У мене є друг, найкоротший шлях до якого став на 1 міст довшим, ніж був досі.” Чи не помилився хтось із них у своїх підрахунках?

5. Всередині трикутника ABC довільно вибрали точку M . Прямі AM , BM , CM перетинають сторони трикутника відповідно у точках A_1 , B_1 , C_1 . Доведіть, що $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1$.

2 0 0 4 р і к

7 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left| |4|x| - 3| - 2 \right| = 3$.

2. Із селища A до селища B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин вслід за ним виїхав автомобіль (обидва рухаються з постійними швидкостями). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища B , велосипедистові залишалось проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист проїхав шлях від A до B ?

3. Дано трикутник ABC ($\angle A < 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$), на сторонах AC та AB якого обрано такі точки D та E відповідно, що $BD = AD$, $BC = CE$. Відрізки BD та CE перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle DOE = 90^\circ$.

4. Троє учнів, котрі відвідують заняття математичного гуртка, на перерві вирішили пограти у „слова”. Кожен з них написав по 50 різних слів. А потім

слова, які зустрілися принаймні у двох зі цих учнів, було викреслено. Після цього у першого виявилось 23 слова, у другого – 32 слова, у третього – 26 слів. Коли вчитель математики дізнався про це, то він сказав дітям, що принаймні одне слово було записане у всіх трьох учнів. На основі чого учитель міг зробити такий висновок ?

5. Як у виразі $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \dots * \frac{97}{98} * \frac{98}{99} * \frac{99}{100}$, який містить 99 дробів, замінити всі зірочки знаками арифметичних дій таким чином, щоб значення одержаного арифметичного виразу дорівнювало нулю ?

6. Петрик вибрав три різні цифри і записав усі можливі різні трицифрові натуральні числа десятковий запис кожного з котрих містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. Виявилось, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані, і доведіть, що інших варіантів немає.

7. Дано горизонтальну клітчасту смугу розмірами 1×2004 . У кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє по черзі беруть одну з фішок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через фішки і ставити фішки у клітинки, у яких уже знаходиться інша фішка не дозволяється). Переможеним вважається той зі гравців, який не може зробити свій черговий хід. Доведіть, що той гравець, який розпочинає гру, може забезпечити собі перемогу.

8 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \frac{5x^2 - |x|}{x + |x|}$.

2. Сума тангенса гострого кута та котангенса другого гострого кута прямокутного трикутника

дорівнює 1. Обчисліть значення тангенса більшого гострого кута цього трикутника.

3. Для яких натуральних n число $n^4 - 22n^2 - 46$ ділиться без остачі на $n + 5$?

4. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p$, де p – середнє

арифметичне чисел

$$A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{158 + 185} \text{ та } B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}.$$

5. Знайдіть натуральне число B за умови, що з трьох наступних тверджень два істинних, а одне хибне:

а) $B + 41$ є квадратом натурального числа; б) $B - 21$ ділиться на 10; в) $B - 48$ є квадратом натурального числа.

6. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут 35° на 7 рівних частин.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC вибрано точку K так, що $\angle BAK = 24^\circ$. На відрізку AK вибрана точка M так, що $\angle ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$. Знайдіть кути трикутника ABC .

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^5 + x^3 + x - 42} = x\sqrt{2 - x}.$$

2. На декартовій координатній площині задані чотири точки: $A_1(0,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(-2,-2)$, $A_4(4,0)$. Для кожної зі цих точок вказати множину точок площини, до яких ця точка є найближчою у порівнянні з трьома іншими.

3. Знайти усі $x_0 < 3$ такі, що для деяких натуральних чисел a, b, c число x_0 є найбільшим коренем рівняння $(a - x)(b - x) = c$.

4. Знайти всі натуральні n такі, що для десяткового запису чисел $6n, 9n, 13n$ необхідно використати у сукупності всі цифри від 0 до 9 по одному разові.

5. Деякі сторони клітинок шахівниці пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки і перефарбовувати всі її сторони одночасно у протилежний колір. Чи завжди можна зробити декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше ніж $\frac{1}{4}$ від усієї кількості сторін клітинок ?

6. Нехай додатні числа a, b, c та дійсні числа x, y, z такі, що $ax + by + cz = 0$. Доведіть нерівність

$$(a + \sqrt{ab} + b)xy + (b + \sqrt{bc} + c)yz + (c + \sqrt{ca} + a)zx \leq 0.$$

7. На дошці намальовано трикутник ABC . Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане у трикутник коло у різних точках M та N , P та Q відповідно. Після цього малюнок витерли, залишивши лише точки H, M та Q . Відновити трикутник ABC .

10 клас

1. Нехай α, β, γ - такі гострі кути, що $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$, $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$. Доведіть, що

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

2. Нехай a – таке дійсне число, що числа $a^2 + a$ та $a^3 + 2a$ є раціональними. Доведіть, що a також є раціональним.

3. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел a, b, c , що $ab^3 - 2003$, $bc^3 + 2005$, $ca^3 - 2007$ є квадратами натуральних чисел.

4. Знайдіть усі такі дійсні числа x , які не є цілими і при цьому задовольняють рівність $x + \frac{2004}{x} = [x] + \frac{2004}{[x]}$, де $[x]$ - найбільше ціле число, котре не перевищує x .

5. У трикутнику ABC точки M та N є серединами сторін BC та AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC співпадає з точкою перетину медіан трикутника AMN . Знайдіть величину кута ABC .

6. Доведіть, що якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = 1$, то виконується нерівність

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2}.$$

7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

11 клас

1. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\sqrt{2-ax} + 2 = x$ має тільки один дійсний корінь.

2. Дано трикутник ABC , в якому $\angle B > 90^\circ$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC у точці M , а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB поза вершину B у точці N . Відомо, що відрізки MN і BC є рівними та перетинаються під прямим кутом. Знайдіть величини всіх кутів трикутника ABC у градусах.

3. Відомо, що

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x + y + z)} = a.$$

Доведіть, що $\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x) = a$.

4. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Нехай точки E та F є основами перпендикулярів, проведених із точки A до прямих $A_1 D$ та $A_1 C$ відповідно, а точки P та Q є основами перпендикулярів, проведених із точки B_1 до прямих $A_1 C_1$ та $A_1 C$ відповідно. Доведіть, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

5. Доведіть, що якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = 1$, то виконується нерівність

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2}.$$

6. Знайдіть усі такі визначені на множині $(0, +\infty)$ функції f , що для будь-яких $x > 0$ виконується нерівність $f(x) > 0$ і при всіх $x > 0, y > 0$ справджується рівність

$$f(xf(y)) + f(x) + f(y) = f(x + y).$$

7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є

числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

2 0 0 5 р і к

7 клас

1. В озері водяться карасі, окуні та щуки. Два рибаки спіймали разом 70 риб, причому $\frac{5}{9}$ улову першого рибака склали карасі, а $\frac{7}{17}$ улову другого – окуні. Скільки щук спіймав кожен із рибаків, якщо обидва спіймали порівну карасів та обидва спіймали порівну окунів?

2. На острові живуть лицарі, які завжди говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть. Подорожуючий зустрів трьох жителів острова і спитав: “Скільки лицарів серед твоїх супутників?” Перший відповів: “Жодного.” Другий сказав: “Один.” Що сказав третій? Відповідь обґрунтуйте.

3. На дошці спочатку було записане число 1. Щохвилини до наявного у даний момент числа додають суму його цифр. Чи може через деякий час на дошці з'явитися число 200520052005?

4. Чи можна квадрат зі стороною 1 м розрізати на 7 прямокутників, не обов'язково однакових, кожен з яких має периметр 2 м?

8 клас

1. Є 8 відрізків, причому відомо, що довжина кожного з них – ціле число сантиметрів, а довжина найбільшого – 20 см. Доведіть, що серед цих відрізків знайдуться три, з яких можна скласти трикутник.

2. У корзині лежать 16 яблук. За одне зважування можна взяти сумарну масу довільних трьох яблук. Запропонуйте спосіб, як за 8 зважувань знайти загальну масу всіх яблук.

3. На площині розташовані точки A, B, C, D, E, F так, що жодні три з них не лежать на одній прямій, причому $AB=AF, BC=CD, DE=EF$. Доведіть, що прямі, на яких лежать бісектриси кутів BAF, BCD та DEF , перетинаються в одній точці.

4. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел $a = 2^{2004} - 1$ та $b = 2^{2005} + 1$.

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння $(x-15)(x^2+1)=2005$.

2. Доведіть, що для довжин сторін довільного трикутника виконується нерівність $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

3. У кожній клітинці таблиці 9×9 записані знаки “+” або “-”. Можна одночасно змінювати всі знаки на протилежні у будь-якому рядку чи у будь-якому стовпчику таблиці. Чи обов'язково вдасться добитися, щоб за декілька кроків у всіх рядках та у всіх стовпчиках таблиці плюсів було більше, ніж мінусів.?

4. У прямокутному трикутнику ABC точка O – середина гіпотенузи AB . На відріжку AC вибрали точку M , а на відріжку BC – точку K так, що кут $МОК$ прямий. Доведіть, що $AM^2 + BK^2 = MK^2$.

10 клас

1. Від відрізка $[2004, 2005]$ відрізали зліва четверту його частину. Потім від залишку справа знову відрізали четверту частину. Від нового залишку ще раз відрізали

четверту частину зліва, а потім (від залишку) – четверту частину справа, і так далі. Вкажіть точку цього відрізка, яка ніколи не буде відрізна.

2. У підприємця працюють 10 робітників. Кожного місяця він підвищує зарплату дев'ятьом із них (на свій вибір) на одну гривню. Чи зможе підприємець у такий спосіб вирівняти їхні зарплати, якщо спочатку у всіх зарплати були різними і виражалися цілими числами гривень?

3. Хорди AC та BD кола з центром O перетинаються в точці K . Нехай M і N – центри кіл, описаних навколо трикутників ABK та CDK відповідно. Доведіть, що $OM=KN$.

4. Для $a > b > c$ доведіть нерівність

$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq c + 4.$$

11 клас

1. У трикутнику ABC проведені бісектриса AK , медіана BL і висота CM . Трикутник KML рівносторонній. Доведіть, що і трикутник ABC рівносторонній.

2. Розв'яжіть рівняння $\left(x^2 + x - \frac{2005}{2}\right)^2 + x^2 = 2005$.

3. Доведіть, що якщо жодне з одинадцяти цілих чисел не ділиться на 11, то сума їх десятих степенів ділиться на 11.

4. Перший, десятий та тридцятий члени геометричної прогресії є натуральними числами. Чи вірно, що і двадцятий її член є натуральним числом?

5. Сума плоских кутів при вершині піраміди більша 180° . Доведіть, що кожне з бічних ребер цієї піраміди менше півпериметра основи.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ*

1 9 8 7 р і к

6.1. Оскільки $6869 = 9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 995 \cdot 4$, то у підручнику $9 + 90 + 900 + 995 = 1994$ сторінки.

6.2. Оскільки $30 + 24 = 36 + 2m$, то $m = 9\text{см}$. Оскільки $a + 2b = 36$, $|a - b| = 30 - 24$, де a – довжина основи, а b – довжина бічної сторони, то $a = 8\text{см}$, $b = 14\text{см}$. Випадок $a = 16\text{см}$, $b = 10\text{см}$ неможливий, бо тоді $m + \frac{b}{2} < a$.

6.3. Із рівності $4x + 5y = 41$ знаходимо $x = 4$ ящики першого типу та $y = 5$ ящиків другого типу, або $x = 9$ ящиків першого типу та $y = 1$ ящик другого типу.

6.4. Підходить, наприклад, $a_{n+1} = 2a_n - n$. Тоді $a_6 = 71$, $a_7 = 136$, $a_8 = 265$. Можливі також інші закономірності.

7.1. Оскільки $\frac{n^3 - 2n^2 + 3}{n - 2} = n^2 + \frac{3}{n - 2}$, то $n - 2 = \pm 1$ та $n - 2 = \pm 3$. Отже, $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$. Не задовольняє $n = -1$.

7.2. Нехай точки M та K симетричні до точки B відносно заданих прямих. Тоді на перетині прямої MK з цими прямими отримаємо дві інші вершини трикутника.

* У номерах вказівок перша цифра означає клас, а друга – номер умови задачі.

7.3. Якщо всі три, або лише одна з правих частин заданих рівнянь дорівнюють нулю, то система розв'язків не має. Якщо, наприклад, $a = b = 0, c \neq 0$, то $z = 0$, а x, y

знаходимо з рівняння $\frac{xy}{x+y} = c$. Аналогічно розглядаються

два інші випадки, коли лише $a \neq 0$ чи $b \neq 0$. Якщо ж всі праві частини відмінні від нуля, то систему запишемо у

вигляді $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$. Тоді $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = A$.

Отже, $\frac{1}{x} = A - \frac{1}{a}, \frac{1}{y} = A - \frac{1}{b}, \frac{1}{z} = A - \frac{1}{c}$. Якщо тут хоч

одна з правих частин дорівнює нулю, то система розв'язків не має. В іншому разі легко знаходимо x, y, z .

7.4. Якщо така система коліс буде рухатися, то кожна пара сусідніх коліс повертатиметься у протилежних напрямках. Отже, рух можливий тоді і тільки тоді, коли k є парним.

8.1. Доповнимо цей трикутник до паралелограма з четвертою вершиною, протилежною до A . Тоді $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Аналогічно $(2m_b)^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2)$ та $(2m_c)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$. Додавши ці рівності, легко отримати потрібний результат.

8.2. Виразимо кожен з цих векторів як суму векторів-сторін заданого п'ятикутника чи їх половин. Тоді сума всіх п'ятнадцяти векторів дорівнюватиме

$$7 \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

8.3. Поділимо обидві частини рівняння на 3 і проведемо заміну $t = \frac{y}{3} - \frac{4}{y}$. Тоді $t^2 = \frac{y^2}{9} + \frac{16}{y^2} - \frac{8}{3}$, і рівняння набуває вигляду $t^2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}t$. З нього маємо $t_1 = \frac{4}{3}, t_2 = 2$. Враховуючи зроблену заміну, знайдемо $y_1 = 6, y_2 = -2, y_{3,4} = 3 \pm \sqrt{21}$.

8.4. Нехай були записані числа $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Тоді $a+b=0, a+c=2, d+e=15, c+e=13, 4(a+b+c+d+e) = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 = 72$. Отже, отримуємо $a+b+c+d+e=18, c=3, a=-1, b=1, d=5, e=10$.

9.1. Запишемо нерівність у вигляді $\frac{(|x|-1)(|x|-4)}{x-3} < 0$ і знайдемо знаки лівої частини на інтервалах $(-\infty, -4), (-4, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, 4), (4, +\infty)$. Тоді $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 1) \cup (3, 4)$.

9.2. Якщо би єдиний правильний прогноз був лише у третього глядача, то жоден з бігунів не зміг би фінішувати першим. Отже, третій глядач помилився, і Петренко став переможцем. Оскільки при цьому перший глядач також мусів помилитися, то правильний прогноз був у другого глядача. Тому Сидоренко прибіг другим, а Андрейчук – третім.

9.3. Спільний корінь цих рівнянь буде також коренем їхньої різниці, тобто коренем рівняння $(a-1)(x^2-x)=0$. $a=1$ та $x=0$ не задовольняють. А для $x=1$ знайдемо $a=-2$.

9.4. Ні. Припустимо, що такий многокутник існує, і A, B, C є відповідно точками дотику вписаного в нього кола до сторін $A_{1986}A_{1987} = 1986$, $A_{1987}A_1 = 1987$ та $A_1A_2 = 1$. Тоді $BA_{1987} = AA_{1987} < 1986$, $BA_1 = CA_1 < 1$, $A_{1987}A_1 = BA_{1987} + BA_1 < 1987$. Отримане протиріччя доводить неможливість існування вказаного многокутника.

10.1. Як функція довільних дійсних параметрів a, b цей інтеграл може набувати будь-яких дійсних значень.

10.2. Позначимо $a - b = c$ і запишемо рівняння у вигляді $(11 - c)\sin^2 7x - 3\sin 7x \cdot \cos 7x + (5 - c)\cos^2 7x = 0$. Якщо $c = 11$, то $\cos 7x = 0$, звідки знаходимо

$$x = \frac{1}{7} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \text{ або ж } \sin 7x + 2\cos 7x = 0, \text{ звідки } \operatorname{tg} 7x = -2,$$

$$x = \frac{1}{7} (\pi n - \operatorname{arctg} 2), n \in \mathbb{Z}. \text{ Якщо ж } c \neq 11, \text{ то, позначивши}$$

$y = \operatorname{tg} 7x$, одержимо рівняння $(11 - c)y^2 - 3y + 5 - c = 0$. Звідси

$$x = \frac{1}{7} \left(\operatorname{arctg} \frac{3 \pm \sqrt{-4c^2 + 64c - 211}}{22 - 2c} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}, \text{ при } c \in \left(8 - \frac{3}{2}\sqrt{5}, 8 + \frac{3}{2}\sqrt{5} \right).$$

10.3. Нехай AB – найбільше ребро цієї піраміди. Тоді $(AC + AE - AB) + (BC + BE - AB) = (AC + BC - AB) + (AE + BE - AB) > 0$. А отже, вірною є хоч одна з нерівностей $AC + AE > AB$ чи $BC + BE > BA$. Тобто або A , або B задовольняють сформульоване твердження.

10.4. Розіб'ємо даний квадрат на 25 квадратиків зі стороною 0,2. Оскільки $126 > 25 \cdot 5$, то принаймні в одному з них не менше шести зі цих точок. Побудуємо круг радіуса

$r = \frac{1}{7}$ з центром у центрі такого квадратика. Оскільки

$\frac{2}{7} > 0,2 \cdot \sqrt{2}$, то всі ці 6 точок опиняться всередині цього круга.

1988 рік

6.1. $v = 45$ км/год. Справді, якщо Івась бачив числа $A = 10x + y$, $B = 100y + x$, $C = 100y + 10z + x$, то $2v = C - B = 10z$, $v = B - A = 99y - 9x$. Отже, z ділиться на 9, тобто $z = 9$.

6.2. Оскільки $3\ 193 = 31 \cdot 103$, причому обидва множники – прості числа, то нова ціна – 31 коп. Зниження ціни на 38%.

6.3. $x = 111$. Врахуйте, що $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, і помножте обидві частини рівняння на 22.

6.4. $AM = CM$, то $\angle MAC = \angle MCA$. $\angle EMC = \angle AMD = 90^\circ$, то $\angle MEA = \angle MDC$. Оскільки також $\angle MAE = \angle MCD$ та $AM = MC$, то $\triangle MAE = \triangle MCD$.

7.1. Нехай O – центр даного кола. Тоді $OK = OA$, отже, $\angle OKA = \angle OAK$. Але $\angle OKD = 90^\circ$, то $\angle BKD = 90^\circ - \angle KAO = \angle ABC$.

7.2. Маємо $x(y - 3) = 5(5 - y)$. Отже $(y - 3)(5 - y) \geq 0$, а тому $3 \leq y \leq 5$. Перебором знаходимо $y = 4$, $x = 5$; $y = 5$, $x = 0$.

7.3. Після зведення до найменшого спільного знаменника 120 в чисельнику заданого виразу одержимо

$$a^5 + 10a^4 + 35a^3 + 50a^2 + 24a = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot (a+3) \cdot (a+4).$$

Але серед п'яти послідовних натуральних чисел є такі, що діляться на 3, 5, та два різні, які діляться на 2 та 4. Оскільки числа 3, 5, 8 є попарно взаємно простими, то при всіх $a \in N$ такий чисельник ділитиметься на 120.

7.4. На прямій AD основи трапеції $ABCD$ виберемо точки E та H так, щоб $BH \parallel CD$, $CE \parallel BD$. Тоді $|AD - BC| = AH < AB + BH = AB + CD$, $AD + BC = AE < AC + CE = AC + BD$.

8.1. $a = 1$, або $a = -\frac{1}{9}$. Скористайтесь формулами Вієта

та рівністю $9 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a}$,

і розв'яжіть отримане квадратне рівняння.

8.2. На основі теореми Піфагора одержимо $BC^2 - CD^2 = AB^2 - AD^2$, $BC^2 - BK^2 = AC^2 - AK^2$. Підставимо у ці рівності $AD = \frac{3}{4}AC$, $CD = \frac{1}{4}AC$, $AK = \frac{2}{3}AB$, $BK = \frac{1}{3}AB$. Виключивши із

одержаної системи AC , знаходимо $BC = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

8.3. $a^5 + b^3 + c = (a+b+c) + a(a-1)(a+1)(a^2+1) + b(b-1)(b+1)$. Кожен з доданків справа ділиться на 6: перший – за умовою задачі, а два інші – як такі, що містять добуток трьох послідовних цілих чисел.

8.4. Оскільки $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = (x-2)(x-1)x(x+1)$, то графік цієї функції схематично може бути побудований за відомими точками його перетину з віссю абсцис з врахуванням знаків, які вона набуває на кожному з проміжків. Залишається тільки симетризувати ту його частину, яка знаходиться нижче осі абсцис, відносно цієї осі.

9.1. Нехай CD – висота трикутника ABC . Якщо $0 \leq x \leq 1$, то $S(x) : S_{ACD} = (x : AD)^2$. Звідси $S(x) = x^2$. Якщо $1 \leq x \leq 2$, то, враховуючи симетрію відносно CD , знайдемо $S(x) = S_{ABC} - (2-x)^2 = -x^2 + 4x - 2$. Графік побудуйте самостійно.

9.2. Якщо $\sin x \geq 0$, то $\sin x = 0$, $x = \pi k$, де $k \in Z$.
 Якщо $\sin x < 0$, то $\frac{4}{(x-3)^2} - 1 = 0$. Звідси $x = 5$. ($x = 1$ не задовольняє, бо $\sin 1 > 0$).

9.3. Нехай для конкретності $CD \geq AB$. Візьмемо на відріжку CD таку точку M , що $AM \parallel BC$. Тоді отримаємо $AM + MC = AB + BC = AD + DC = AD + DM + MC$. Отже, $AM = AD + DM$, а тому M співпадає із D . Значить, $ABCD$ – паралелограм, і в ньому $AD = BC$.

9.4. Зауважимо, що всі доданки зліва додатні. Але для $a > 0$ маємо $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причому рівність досягається лише при $a = 1$. Отже, нерівність рівносильна системі $\operatorname{tg}^2 x_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, 994$. Тому $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n_k$, де $n_k \in Z$.

10.1. Як функція від довільних дійсних параметрів a та b даний інтеграл може набувати довільних дійсних значень.

10.2. Якщо A назве 3, чи $B - 4$, то їхні оцінки не вдасться визначити однозначно. Якщо ж оцінку назве B , то одержуємо:

- а) 3, то $B - 5, 3; A - 3, 4; B - 4, 4$;
- б) 4, то $B - 4, 4; A - 5, 3; B - 3, 4$;
- в) 5, то $B - 5, 3; A - 3, 4; B - 4, 4$.

10.3. Нехай M – довільна точка в трикутнику ABC . Тоді $AM + BM \geq AB$, $AM + CM \geq AC$, $BM + CM \geq BC$. Додавши ці нерівності і розділивши на 2, одержимо негативну відповідь.

10.4. Областю допустимих значень лівої частини рівняння є $[2; 4]$. Позначимо вираз у цій частині через $f(x)$. Із рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо $x = \frac{8}{3}$. Маємо $f(2) = 2, f(4) = \sqrt{2}, f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{6}$. Отже, дане рівняння має розв'язки при $\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{6}$.

1 9 8 9 р і к

6.1. Нехай l – довжина кроку високого учня, n – кількість кроків, зроблених ним за одиницю часу. Тоді пройдений ним за цей час шлях дорівнює ln . Відповідно низенький учень пройде лише шлях $0,8l \cdot 1,2n = 0,96ln$. Отже, високий прийде швидше.

6.2. Не може, бо $5^k - 1$ ділиться на 4, а $5^n + 1$ або дорівнює 6, або закінчується на 26, а отже, на 4 не ділиться.

6.3. $\frac{1988}{1989}$. Скористайтеся рівністю $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

для кожного з доданків.

6.4 Виділимо дві команди, які розпочали чемпіонат іграми вдома. У випадку чергування ними ігор вдома і на виїзді, вони не змогли б зустрітися між собою.

7.1. Нехай M та P – такі точки на колі, що MP – серединний перпендикуляр до AK . Тоді прямі PK та MK перетинають коло в шуканих точках B та C . Справді, MP ділить пополам кути AMK та APK . То ж залишається лише врахувати, що на рівні дуги спираються рівні вписані кути.

7.2. Ясно, що дане число не є квадратом парного числа. А квадрати непарних чисел, тобто числа вигляду $(10a \pm 1)^2$, $(10a \pm 3)^2$, $(10a \pm 5)^2$, мають парне число десятків.

7.3. Перемноживши рівняння, одержимо $x^3 + y^3 = x^3$. Отже, знаходимо $y = 0$, $x = 1$.

$$7.4. x^2 - 2xy + 1989y^2 = (x - y)^2 + 1988y^2 \geq 0.$$

8.1. З умови задачі послідовно встановлюємо, що вектори \overrightarrow{BT} , \overrightarrow{HA} , \overrightarrow{PC} , \overrightarrow{XK} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{AE} однаково напрямлені та рівні за довжиною. Оскільки A не лежить на прямій BT , то $ABTE$ – паралелограм.

$$8.2. \frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \text{ бо } a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Аналогічно оцініть два інші доданки і додайте одержані нерівності.

$$8.3. (a + H_a) - (b + H_b) = (a + b \sin C) - (b + a \sin C) = (a - b) \cdot (1 - \sin C) \geq 0. \text{ Рівність при } a = b, \text{ або якщо } \angle C = 90^\circ.$$

8.4. Розглянемо точки $M(x; y)$, $A(0; 1)$, $B(1; 0)$. Тоді значення виразу буде $MA + MB \geq AB = \sqrt{2}$. Рівність досягається для точок M із відрізка AB .

9.1. Див. розв'язання задачі 8.4.

9.2. Нехай $ABCD$ – паралелограм із діагоналями 2 та 4 і кутом між ними 45° . Розглянемо тепер довільний чотирикутник AB_1CD_1 , $B_1D_1 \parallel BD$, $BD = B_1D_1$. Перенесемо $\triangle DCD_1$ на вектор \overrightarrow{DB} . В результаті одержимо $AB + DC \leq AB_1 + D_1C$. Аналогічно доводиться, що $BC + DA \leq B_1C + D_1A$. Отже, найменший периметр, якщо діагоналі діляться точкою перетину пополам.

9.3. Нехай $ABCD$ – паралелограм, P_n – точки перетину прямих DK_n та AC . З подібності трикутників AK_nP_n та CDP_n випливає, що $AP_n : P_nC = AK_n : DC = AK_n : AB = 1 : n$, тобто $AP_n : AC = 1 : (n+1)$. Отже, точки P_n та M_n співпадають. Тому всі прямі K_nM_n проходять через точку D .

9.4. З умови випливає, що $x - y > 0$. Помножимо ліву частину рівності на 1, а праву – на $x^2 + y^2$ і розглянемо їх різницю $x^3 + y^3 - (x - y)(x^2 + y^2) = 2y^3 + xy(x - y) > 0$. Отже, $x^2 + y^2 < 1$.

10.1. Див. розв'язання задачі 8.2.

10.2. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, P – точка перетину його діагоналей, O – центр описаного кола. На основі властивостей середніх ліній трикутників одержимо, що середини сторін $ABCD$ є вершинами прямокутника, центр якого – точка K – середина відрізка OP . Оскільки проєкції точки K на кожну зі сторін чотирикутника є серединами проєкцій точок P та O на ці ж сторони, то точка K однаково віддалена від основ перпендикулярів, опущених з точок O та P на сторони чотирикутника $ABCD$. (Трикутник рівнобедрений, якщо його висота є одночасно і медіаною).

10.3. Оскільки $b = \sin \cos b < \cos b$, $c = \cos \sin c > \cos c$, $a = \cos a$, то $b < a < c$. Справді, у протилежному разі $b \geq a \Rightarrow \cos b \leq \cos a \Rightarrow \cos b \leq a \Rightarrow \cos b \leq b$. Аналогічно доводимо, що не може бути $a \geq c$.

10.4. Так, зможе. Побудуємо дорогу, паралельну до однієї із границь, на відстані 100 км від цієї границі, а потім ще 4 паралельні їй дороги на відстанях 200 км між сусідніми з них. Крайні із доріг з'єднаємо в довільному місці перпендикулярною до них дорогою. Всі такі дороги назвемо головними. Їх загальна довжина 5800 км. Кожне місто країни при цьому віддалене від головної дороги не

більше, як на 100 км. Тому для сполучення буде достатньо додати 5100 місцевих доріг, побудованих перпендикулярно до найближчої головної дороги.

1990 рік

7.1. Оскільки $6 = 9 \cdot 2 - 4 \cdot 3$, то досить буде двічі наповнити дев'ятилітрові відра, виливаючи з них воду у чотирилітрові, а з останніх тричі після їх наповнення – у річку.

7.2. Оскільки перший за половину часу зі швидкістю 50 км/год проїхав більше, ніж половину відстані, то в пункт B він прибув швидше.

7.3. При діленні на 1989 можливі лише 1989 різних остач. Отже, для 1990 чисел принаймні дві остачі співпадуть, але тоді різниця цих чисел ділитиметься на 1989.

7.4. Треба взяти кульку із ящика, на якому написано „1 чорна, 1 біла”. Яку б кульку з нього ми не вийняли, друга буде того ж кольору. Тоді у ящику, на якому написано, що обидві кульки мають колір вийнятої нами, насправді обидві кульки будуть протилежного кольору. Відповідно у третьому ящику опиняться кульки різного кольору.

7.5. $p^2 - 1 = (p - 1) \cdot (p + 1)$. Оскільки $p > 3$ просте, то p – непарне число, яке не ділиться на 3. А тому з даних множників один ділиться на 2, а один – на 4, а також один – на 3. Числа 8 та 3 є взаємно простими, то $p^2 - 1$ ділиться на 24.

8.1. Шуканою є точка перетину діагоналей. Для довільної іншої точки за нерівністю трикутника сума відстаней до протилежних вершин не менша довжини діагоналі.

8.2. Оскільки $25 + 26 + 27 + 28 = 110$, то, якщо б четверо найбільш везучих грибників зібрали разом менше половини грибів, то хоч один з них зібрав би не більше 24 грибів. Але тоді п'ятеро інших зібрали б не більше, як $23 + 22 + 21 + 20 + 19 = 105$ грибів, що не давало б в сумі 220 грибів.

8.3. Нехай a та b – довжини катетів даного трикутника. Побудуємо квадрат із стороною $a + b$, один з кутів якого співпадає із прямим кутом трикутника. Очевидно, центри обох квадратів співпадутъ, а шукана відстань буде дорівнювати $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

8.4. Помножимо і поділимо кожен із доданків на вираз, спряжений до його знаменника. Після очевидних спрощень одержимо значення $\sqrt{1990} - 1$.

8.5. Ясно, що x ділиться на 3, тобто $x = 3n$. Підставляючи його в рівняння, одержимо $3(9n^2 - y^3 - 3z^3) = 0$. Звідси маємо, що y ділиться на 3, і так до нескінченості. Отже, x, y, z діляться на 3 в будь-якому степені, а тому $x = y = z = 0$.

9.1. Розіб'ємо коней на 5 рівних груп. Кожні 5 хвилин по черзі одна з груп коней відпочиває, а з іншими працюють ковалі. Таким чином всі коні будуть підковані за 25 хвилин. Цей час є найменшим можливим, оскільки жоден з ковалів не простоював.

9.2. Нехай $y = x - 1$. Тоді одержимо $(y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 32$, чи $2y^4 + 48y^2 + 32 = 32$. Отже, $y = 0, x = 1$.

9.3. Нехай у трикутнику ABC маємо $AB = BC$, O_1 – центр вписаного, а O_2 , – центр описаного кола, $\angle CAO_2 = \alpha$. Тоді також $\angle CAO_1 = \alpha$, а отже, $\angle BAC = 2\alpha$,

$\angle BAO_2 = 3\alpha$. Але $AO_2 = BO_2$, то $\angle ABO_2 = 3\alpha$. Оскільки $\angle BAC + \angle ABO_2 = 90^\circ$, то $\alpha = 18^\circ$. Отже, кути трикутника ABC дорівнюють $36^\circ, 108^\circ$ та 36° .

9.4. Розглянемо довільні 90 чисел і розташуємо їх по колу. Виберемо 19 з них підряд, потім наступні 19, і так далі по колу 90 разів. Тоді добуток всіх цих чисел буде більшим за 1. Але при цьому кожне число враховане 19 разів, то й добуток 90 чисел теж більший за 1.

$$9.5. \quad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{2}. \quad \text{Тому}$$

$$c \geq \frac{a+b}{2}. \quad \text{Рівність лише при } a = b.$$

10.1. Розглянемо правильний трикутник зі стороною 1м. Оскільки кольорів всього 2, то принаймні дві його вершини шукані.

10.2 $p^2 - n^2 = (p^2 - 1) - (n^2 - 1)$. Далі див. розв'язання задачі 7.5.

10.3. Нехай у трикутнику ABC медіани AM та BK перпендикулярні і перетинаються в точці O . Тоді

$$S_{ABC} = 2S_{AMB} = 2 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot BO = 2 \cdot \frac{1}{2} m_a \cdot \frac{2}{3} m_b = \frac{2}{3} m_a m_b.$$

$$10.4. \quad x^4 + 1990x^2 + 1989x + 1990 = (x^4 + x^3 + x^2) - (x^3 + x^2 + x) + 1990(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1990).$$

10.5. Нехай S – площа такого трикутника. Тоді довжини його сторін $\frac{2S}{24}, \frac{2S}{40}, \frac{2S}{60}$. Оскільки сума двох останніх чисел дорівнює першому числу, то вказаний трикутник не існує.

11.1. Розглянемо 2 точки різних кольорів на відстані, меншій за 2м і побудуємо рівнобедрений

трикутник із бічною стороною 1м. Одна з цих точок і вершина побудованого трикутника матимуть різний колір.

11.2. Віднімемо від першого рівняння друге. Тоді $y^3 - 2y^2 + 2y = x^3 - 2x^2 + 2x$. Позначимо $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Оскільки $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 > 0$, то з $f(y) = f(x)$ випливає $y = x$. Отже, розв'язки: $(0,0)$, $(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

11.3. Площа кожного із таких чотирикутників дорівнює подвоєній площі паралелограма із вершинами в середині його сторін.

11.4. $\left| \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{2} \left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 1$, $|\cos^2 3x - \sin^2 x| \leq 1$. Тому рівняння зводиться до сукупності таких систем:

$$x = 1, \sin^2 x = 0, \cos^2 3x = 1$$

та

$$x = -1, \sin^2 x = 1, \cos^2 3x = 0,$$

кожна з яких несумісна.

11.5. Візьмемо дві діаметрально протилежні точки на колі. Відстань між ними дорівнює 2. Тому сума відстаней від 1990 точок до вибраних нами не менша за $2 \cdot 1990$. Отже, принаймні до однієї з них сума відстаней не менша за 1990.

1 9 9 1 р і к

8.1. 59 хв. 59 сек. Після першої секунди процес у пробірці з однією бактерією йде так само, як у пробірці з двома бактеріями.

8.2. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 600 \cdot 3 = 1989$. Отже, на 1991-му місці друга цифра числа 700, тобто нуль.

8.3. Скористайтеся рівністю $x^3 = x + (x-1)x(x+1)$, і врахуйте, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 6.

8.4. Нехай AK та DM перетинаються в точці P . Оскільки $181:1991=1:11$, то $\triangle MAD = \triangle KBA$. Але тоді $\angle AMP + \angle MAP = \angle AMP + \angle ADK = 90^\circ$. Отже, також $\angle MPA = 90^\circ$.

8.5. Сторони такого трикутника рівні як рівновіддалені від центра на радіус вписаного кола хорди описаного кола.

9.1. 1, 3, 9 та 27 кг. При зважуванні гирі, можливо, доведеться ставити на обидві шальки.

9.2. Є. Скористайтеся рівністю

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+3n) \times (n^2+3n+2)+1 = \\ &= (n^2+3n)^2 + 2 \cdot (n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2 \text{ при } n = 1988. \end{aligned}$$

9.3. $x^4 + 7x^3 - 12x + 5 = (x^2 - 1)^2 + (3x - 2)^2 > 0$. Отже, рівняння не має дійсних коренів.

9.4. Нехай O – центр даного кола. При $a < 2R$ проведемо в колі хорду довжиною a та побудуємо коло з центром у точці O , яке дотикається до цієї хорди. Дотичні до останнього, проведені через точку M , є шуканими. Якщо $a = 2R$, то шуканою є пряма MO , а якщо $a > 2R$, то задача не має розв'язку.

9.5. Можуть. Наприклад, у прямокутному трикутнику середини висот лежать на середній лінії, паралельній до гіпотенузи. Обґрунтуйте самостійно.

10.1. Для шестикутника дане твердження невірне. Наприклад, якщо A, C, E та B, D, H – вершини правильних трикутників, $AB \neq BC$, то $ABCDEFH$, у якого всі кути рівні, не є правильним. Для 1991-кутника твердження вірне. Нехай A, B, C, D – чотири послідовних його вершини. Тоді $\triangle ABC = \triangle DCB$ за рівними двома

відповідними кутами та спільною стороною BC . Отже, також $AB = CD$. А тому всі сторони, взяті через одну, теж рівні. Але, обійшовши таким чином по колу, одержимо, що й сусідні сторони рівні.

10.2. Нехай O - точка перетину бісектрис AK та BM . Тоді $\angle AOB = 165^\circ$. Отже, $\angle OBA + \angle OAB = 15^\circ$, $\angle CBA + \angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = 150^\circ$. Тому $S = \frac{1}{2}ab\sin 150^\circ = \frac{ab}{4}$.

Випадок, коли $\angle AOB = 15^\circ$, неможливий.

10.3. Сума зовнішніх кутів дорівнює 360° , тому прямих кутів не більше чотирьох. Але жоден із зовнішніх кутів не дорівнює нулю, то прямих не більше трьох. Приклад із трьома прямими кутами наведіть самостійно.

10.4. Покладемо $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$. Тоді $3y^2 + 2y - 5 = 0$. Звідси $y = 1$, а отже, $x = 0$ або $x = -5$. ($y = -\frac{5}{3}$ не задовольняє).

10.5. Перевірте, що $a^2 < \sqrt{2}$, і покажіть, що $(\sqrt{2} - a^2)^2 - a^4 - a - 1 = 0$.

11.1. $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$, або $x = \log_2 \sqrt{5}$. Зрозуміло, що аргументи логарифмів повинні утворювати геометричну прогресію. Розглянувши всі випадки розташування даних чисел, залишається розв'язати таку сукупність рівнянь:

$$\begin{aligned}2(2^x - 1) &= (2^x + 1)^2, & 2(2^x + 1) &= (2^x - 1)^2, \\ & & (2^x - 1)(2^x + 1) &= 2^2.\end{aligned}$$

Оскільки кожне з них заміною $y = 2^x$ зводиться до квадратного, то пропонуємо читачам розв'язати їх самостійно. Не забувайте тільки, що $y > 0$.

11.2. Прослідкуємо за останніми двома цифрами чисел 2^n : 02, [04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52,] 04, Починаючи з $n = 2$, вони повторюються з періодом 20. Оскільки 1991 при діленні на 20 дає остачу 11, то 2^{1991} закінчується тими ж двома цифрами, що й 2^{11} , тобто на 48.

11.3. Нехай $x^2 + y^2 = 16$ – коло з центром у точці O . Розглянемо точки $B(2;0)$, $C(4;0)$ та точку $A(2;\sqrt{2})$ на цьому колі. Тоді значення інтеграла дорівнює площі фігури, обмеженої прямими AB , BC та дугою AC . $OA = 4$, $OB = 2$, то $\angle AOB = 60^\circ$. Отже,

$$S_{ABC} = S_{AOC} - S_{AOB} = \frac{1}{6}\pi \cdot OC^2 - \frac{1}{2}OB \cdot OA \cdot \sin 60^\circ = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}.$$

11.4. Може. Нехай B та C – середини двох суміжних сторін квадрата, A – точка перетину двох інших сторін. Тоді даний квадрат – розгортка піраміди з основою ABC . Обґрунтуйте.

11.5. Якщо назвати $(a, b, c) = (100, 10, 1)$, то скалярний добуток $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = 100x + 10y + z =$
 $= \text{-----}$
 $= xuz$.

1 9 9 2 р і к

8.1. Найпростішу закономірність отримаємо, якщо розставити коми через дві цифри і записати послідовність у вигляді: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

82. Оскільки $1992 = 8 \cdot 3 \cdot 83$ і число 83 просте, то $x = 8, y = 3$.

8.3. $S = (1 + 1992) + (2 + 1991) + \dots + (996 + 997) =$
 $= 1993 \cdot 996$.

8.4. Розіб'ємо даний квадрат на одиничні квадратики. Оскільки $44^2 = 1936 < 1992$, то принаймні в одному одиничному квадраті знаходиться не менше двох точок, і відстань між ними не перевищує $\sqrt{2}$.

8.5. Прямокутну трапецію можна скласти з двох прямокутних трикутників, якщо її менша діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Зрозуміло, що одного трикутника замало.

9.1. Зробивши 10 обертів, мале колесо тричі пройде велике колесо. Далі все періодично повторюється. Отже, в залежності від пройденого шляху, можливі 0, 1, 2 чи 3 отвори.

9.2. Нехай кола, побудовані на AB та на BC як на діаметрах, перетинають AC відповідно у точках H_1 та H_2 . Тоді $\angle AH_1B = \angle CH_2B = 90^\circ$. Але перпендикуляр, проведений із B до AC , єдиний, то $H_1 = H_2$.

9.3. Запишемо рівняння у вигляді $xy(10x + y) = 1992$. Але $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, і 83 – просте число, то $83 = 10x + y$, $24 = xy$. Отже, $x = 8$, $y = 3$.

9.4. Розклавши числа на множники, одержимо

$$1991 \cdot 10001 \cdot 1992 \cdot 100010001 - \\ - 1992 \cdot 10001 \cdot 1991 \cdot 100010001 = 0.$$

9.5. Розмалюємо кубики в два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики були різного кольору. У колір центрального кубика будуть замальовані 13 із них, а в інший колір – 14. Мишка може з'їсти по 13 кубиків кожного кольору. Отже, центральний кубик не залишиться.

10.1. Такою буде будь-яка замкнена крива, яка не є колом, на сфері радіуса 1992.

10.2. Позначимо дані точки відповідно через M та K . На прямій MK візьмемо точку O так, що $MK = KO$. Нехай M_1 , K_1 , O_1 – їх проєкції на одну зі сторін трикутника. Тоді

MOO_1M_1 – трапеція із середньою лінією KK_1 . За величинами MM_1, KK_1 знаходимо $OO_1 = 7$. Аналогічно міркуємо для проєкцій на інші сторони. Отже, O – центр вписаного кола радіуса 7.

10.3. $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$. Тому

$$\frac{D}{4} = b^2 c^2 (\cos 2A - 1) < 0, \text{ бо } 0^\circ < A < 180^\circ.$$

10.4.

$$4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = 1.$$

10.5. Ні, бо дане число ділитиметься на 3, але не буде ділитися на 9.

11.1. Існує. Розглянемо трикутну піраміду із двома перпендикулярними до основи гранями. На основах цих перпендикулярних граней виберемо по одній точці і проведемо площину, яка проходить через вибрані точки і вершину піраміди. Ця площина відсікає потрібну чотирикутну піраміду.

11.2. Як і в задачі 9.2, одержуємо: A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів, опущених із M на сторони трикутника. А оскільки M – центр описаного кола, то вони будуть серединами відповідних сторін. Отже,

$$S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{1992}{4} = 498.$$

11.3. Такими є, наприклад, точки

$$\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \frac{2n}{n^2 + 1} \right), n \in \mathbb{N}.$$

11.4. Ні, бо дане число ділитиметься на 3, але не буде ділитися на 9.

11.5. Оскільки $29 - 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5} - 3)^2$,

$6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$, то, послідовно скориставшись даними рівностями, отримаємо, що значення даного виразу дорівнює 1.

1 9 9 3 р і к

8.1. Запишемо рівняння у вигляді $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 1993$, чи $(x+y) \cdot (x-y+2) = 1993$. Але 1993 – просте число, то дані множники набувають лише значень 1, -1, 1993, -1993. Отже, розв'язки: (996, -995), (996, 997), (-998, 997), (-988, -995).

8.2. $a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geq 3abb = 3ab^2$. Можна й так: $a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = a(a^2 - b^2) + 2b^2(b - a) = (a - b)^2 \cdot (a + 2b) \geq 0$

8.3. Нехай A – вершина кута, меншого за 180° . На прямій AM відкладемо точку C так, що $AM = MC$. Через C проведемо прямі, паралельні до сторін кута, до перетину з іншими сторонами цього кута в точках B та D відповідно. Тоді $ABCD$ – паралелограм, а отже, пряма BD – шукана.

8.4. З допомогою плитки побудуємо від обох країв намальованого прямокутника квадрати зі стороною 19. Всередині одержимо прямокутник із сторонами 19 та 55. Але $19 + 55 < 93$, то його діагоналі можна провести з допомогою плитки. Їх перетин і є шуканим центром.

8.5. Так, якщо, наприклад, різниця між прибутками і видатками по місяцях є такою: 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2.

9.1. Легко переконатися, що $p(x) \neq ax + b$. Визначивши коефіцієнти тричлена $ax^2 + bx + c$ із системи

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 19, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 93, \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 1993. \end{cases} \quad \text{знайдемо } p(x) = 913x^2 - 839x + 19.$$

9.2. При $a = a_0^3, b = b_0^6$ маємо нерівність задачі 8.2.

9.3. Якщо у трикутнику є кут $A \geq 120^\circ$, то найбільшу сторону з усіх внутрішніх точок буде видно під кутами, більшими за 120° . В іншому випадку побудуємо три кола, з яких відповідно по одній стороні трикутника видно під кутом 120° . Оскільки $3 \cdot 120 = 360$, то ці кола перетнуться в шуканій внутрішній точці.

9.4. Нехай AK та CM – висоти трикутника ABC . Трикутники AKB та CMB подібні як прямокутні зі спільним кутом B . Отже, $BK : AB = BM : BC$, що рівносильне подібності трикутників MBK та CBA .

9.5. Якщо би це було можливим, то кількість всіх точок дотику дорівнювала би $\frac{1993 \cdot 3}{2}$, чого не може бути.

10.1. Нехай $A = 1993a$, причому останні, одна чи декілька, цифри числа A відповідно співпадають із цифрами числа a . Ясно, що $a = 5$ є найменшим можливим. Тому $A = 1993 \cdot 5 = 9965$ – шукане число.

10.2. Може. Наприклад, $0,9 + 0,9 + (-0,4) + (-0,4) = 1$. Всі ці числа менші від 1, але сума їх кубів більша за 1.

10.3. Нехай OA та OB – задані радіуси, які не лежать на одній прямій. На прямій AB відкладемо точки C та D , відмінні від B та A , так, що $AC = AB = BD$. Якщо M та K – точки перетину відрізків OC та OD з колом, то хорда MK – шукана.

10.4. Нехай O_1, O_2, O_3 – центри заданих кіл. Центр O шуканого кола співпадає з центром кола, описаного навколо трикутника $O_1O_2O_3$, сторони якого дорівнюють

2R. Легко обчислити, що $OO_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Шукані радіуси

будуть $\frac{2R}{\sqrt{3}} \pm R$.

10.5. Розмалюємо дану дошку в чотири кольори так, щоб кольори рядків зліва направо чергувалися таким чином: 1-ий, 5-ий, 9-ий рядки – 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2; 2-ий, 6-ий та 10-ий рядки – 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3; 3-ій та 7-ий рядки – 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4; 4-ий та 8-ий рядки – 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1. Тоді всякий прямокутник 4×1 покриває по одному разові кожен із кольорів. Отже, для покриття всієї дошки вказаним способом необхідно, щоб клітинок кожного кольору було по 25. Але легко поррахувати, що для даної дошки це не виконується.

11.1 Покладемо $y = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$. Тоді $y + \frac{1}{y} = 4$,

звідки $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Отже, $x = 2$, або $x = -2$.

11.2. Помножимо друге рівняння на x і віднімемо його від першого. Тоді $1993 - 1993x = 0$. Отже, $x = 1$ – єдиний можливий спільний корінь. Звідси маємо, що $a = 1992$.

11.3. Нехай AB – найбільша, BC – найменша сторони такого трикутника, O – центр вписаного кола, K, T, P – основи перпендикулярів, опущених із точки O відповідно на сторони BC, AC, AB ; M та E – середини сторін BC та AB . Тоді $MK - PE = (MC - KC) - (PA - EA) = (MC + EA) - (KC + PA) = \frac{1}{2}(BC + AB) - (CT + TA) = AC - AC = 0$.

Оскільки також $OK = OP$, то $\triangle KOM = \triangle POE$. Але тоді $\angle BMO + \angle BEO = \angle BKO + \angle BPO = 180^\circ$, і точки B, M, O, E лежать на одному колі.

11.4. Розглянемо тетраедр з вершинами у центрах заданих чотирьох куль. Довжини всіх його ребер дорівнюють $2R$. Радіус описаної навколо нього сфери дорівнює $\frac{R\sqrt{6}}{2}$, в чому пропонуємо читачам переконатись самостійно. Тоді радіус шуканої кулі буде $\frac{R\sqrt{6}}{2} - R$.

11.5. Якщо спочатку шайби лежали на одній прямій, то після жодного удару вони більше не зможуть опинитися на одній прямій. Якщо ж вони утворювали трикутник, то при кожному ударі його орієнтація змінюється на протилежну. Отже, після непарного числа ударів положення всіх шайб одночасно зі своїми початковими положеннями співпадати не можуть.

1 9 9 4 р і к

7.1. Нехай точка E знаходиться у півплощині α відносно прямої BD . Тоді точки A та C теж будуть в α . А отже, і всі точки відрізка AC також належать α .

7.2. Якщо остання цифра даного числа 2, то $K + 1994$ парне; якщо 1 – то воно ділиться на 5.

7.3. Оскільки $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 < 9 \cdot 15$, то у знаменнику має бути мінус. Тоді, щоб отримати у чисельнику 9, знаки „-“ слід розставити перед числами, сума яких дорівнює 6. Пропонуємо самостійно знайти 3 розв'язки.

7.4. Запишемо рівняння у вигляді $94(y - 1) = 19(100 - x)$. Отже, $(y - 1) \div 19$, $(100 - x) \div 94$. Звідси знаходимо $x = 100$, $y = 1$, та $x = 6$, $y = 20$.

7.5. Розіб'ємо пакети на дві пари і, здійснивши порівняння ваги пакетів у кожній парі, позначимо важчі через A та C , а легші – через B та D . Тоді серед пакетів A та C визначимо найважчий, а серед B та D – найлегший. П'яте зважування використаємо для порівняння ваги двох інших пакетів.

8.1. A_1B_1PK буде паралелограмом лише тоді, коли P – середина AM , K – середина BM . В інших випадках твердження невірне.

8.2. Оскільки $DC = BC$, то $DC = AC$. Отже, C – центр кола, описаного навколо трикутника ABD , з діаметром DA . Тому $\angle ABD = 90^\circ$. Якщо ж тепер M – друга точка перетину прямої AB з колом, то DM – діаметр цього кола, бо $\angle DBM = 90^\circ$. Отже, AB та DO перетинаються на колі.

8.3. Якщо видано x купюр по 5 карбованців та y купюр по 3 карбованці, то $5x + 3y = 1994$. Нехай $y = 5n + k$, де $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Звідси маємо $5(x + 3n) + 3k = 1994$. Цілочислові розв'язки отримаємо лише при $k = 3$. Отже, $x + 3n = 397$. Оскільки тут n може набувати значень від 0 до 132, то всього є 133 способи.

8.4. а) Поділимо сторони квадрата на 995 рівних частин. Виділимо центральні вертикальну та горизонтальну смуги шириною в одну з цих частин. Кожну смугу розділимо на 995 квадратів. В результаті одержимо розбиття на 1993 квадрати,

б) Поділимо сторони квадрата на 997 рівних частин і виділимо смуги, які прилягають до однієї його вершини. Розділивши кожну із них на 997 квадратів, одержимо розбиття на 1994 квадрати.

8.5. Твердження впливає із нерівності

$$(a+b)(a^3+b^3) - 2(a^4+b^4) = (a-b)(b^3-a^3) \leq 0.$$

9.1. Із перших двох рівнянь одержуємо $x(y+1) = z(y+1)$. $y = -1$ не задовольняє, то $x = z$. Тоді з третього рівняння знаходимо $x = -10$, або $x = 8$. Аналогічно встановлюємо, що $y = x$. Отже, маємо два розв'язки: $(-10, -10, -10)$ та $(8, 8, 8)$.

Можна поступити також так: до обох частин кожного з рівнянь додати по одиниці, розкласти ліві частини на множники і перемножити одержані рівняння, а потім добути з цього добутку квадратний корінь і поділити його на кожне з одержаних рівнянь.

9.2. Припустимо, що можна, і сума номерів при кожній вершині дорівнює n . Тоді повинна виконуватися рівність $8n = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 12)$. Одержали протиріччя, бо права частина цієї рівності не ділиться на 8.

9.3. Якщо $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{1994}$, то $m - n = \sqrt{1994}(\sqrt{m} - \sqrt{n})$. Виключивши з даних рівностей \sqrt{n} , одержимо $2\sqrt{m \cdot 1994} = 1994 + m - n$. Отже, $1994m$ — точний квадрат. Але 1994 не має кратних дільників, то $m \geq 1994$. Тоді $n \leq 0$, що неможливо.

9.4. Нехай $x = f(y)$. Тоді $f(0) = 1 - f(y) - y$. При $y = 0$ звідси отримаємо, що $f(0) = 0,5$. Отже, $f(y) = 0,5 - y$. Перевірка показує, що при цьому задана в умові рівність виконується для довільних x, y .

9.5. Позначимо на прямій l точку P , яка лежить відносно прямої AB в тій самій півплощині, що й точка C . Тоді $\angle AED = \angle PAE$, $\angle ABC = \angle PAE$. Отже, $\angle AED = \angle ABC$. Тому трикутники ABC та AED подібні. Звідси $AD:AC = AE:AB$. Але $AB = AD + BD$, $AC = 12$ см, то знаходимо, що $BD = 4$ см.

10.1. Для простих чисел 2, 3, 5 твердження очевидне. Для всіх інших простих чисел остачі від ділення на 30 будуть взаємно простими із числом 30.

Залишилось зробити перебір таких остач від 1 до 29 і переконатися, що вони задовольняють твердження задачі.

10.2. Замінімо у заданій рівності x на $-x$. Тоді отримаємо рівняння $-x(f(-x) + f(x) + 2) + 2f(x) = 0$.

Виключивши з одержаної системи рівнянь $f(-x)$, знайдемо $f(x) = x$.

$$10.3. \quad a + c + e \geq \frac{a}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{d+e}{2} = 50. \quad \text{Рівність}$$

досягається, наприклад, при $a = 0, b = c = d = e = 25$.

10.4. Із міста A в будь-яке інше місто можна потрапити або прямою дорогою, або через проміжне місто. Тому кількість доріг не менша, ніж $M - 1$. Саме стільки буде доріг, якщо, наприклад, всі міста зв'язані дорогами з одним містом, а інших доріг немає.

10.5. З умов задачі випливає, що $\angle AMN + \angle CAN = 180^\circ$ та $\angle BMK + \angle BCK = 180^\circ$. Отже, навколо $AMNC$ та $BMKC$ можна описати кола. Тому $\angle ANC = \angle AMC, \angle BKC = \angle KMC$. Отже, $\angle ANC + \angle BKC = \angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$, і точки C, K, L, N лежать на одному колі.

11.1. Якщо сторона квадрата – 2 лінійні одиниці, то, врахувавши, що кожна пелюстка належатиме двом півкругам, безпосередньо підраховуємо, що площа „квітки” дорівнює $0,5 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 1^2 - 4 = 2\pi - 4$, а площа частини круга зовні квадрата – $\pi(\sqrt{2})^2 - 4 = 2\pi - 4$.

11.2. Серед чисел $a_1, a_2, \dots, a_{1994}$ рівно 998 чисел, не менших за 997. Хоч одне з них має номер, не менший 998. Для нього $(n-1) \cdot a_n \geq 997^2$. Зрозуміло, що й найбільший з таких добутків також буде не меншим, ніж 997^2 .

11.3. Якщо $x = y = 0$, то $f(0) = 2f(0)$. Отже, $f(0) = 0$.
 Якщо тепер $y = 0$, то $f(x^2) = f(x)$. Отже, $f(x^4) = f(x^2) = f(x)$.
 Якщо ж $y = -x^2$, то $f(x^4) + f(x) = 0$. Звідси знаходимо $f(x) \equiv 0$.
 Перевірка показує, що ця функція задовольняє задану рівність.

$$11.4 \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cdot \sin A_1 < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Отже, } \cos \alpha = S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC} < 0,5. \text{ Тому } \alpha > 60^\circ.$$

11.5. Якщо $\sin x + 1 = 0$, то $\cos x = 0$, і нерівність очевидна. Якщо $\sin x + 1 \neq 0$, то покладемо $a = \sin x + 1$,
 $b = \cos x$, $c = 0,5$. Тоді дискримінант
 $D = (\cos x)^2 - 4(\sin x + 1) \cdot 0,5 = -(\sin x + 1)^2 < 0$. Але $a > 0$,
 то $ax^2 + bx + c > 0$.

1 9 9 5 р і к

7.1. Розподіл повних, наповнених наполовину та порожніх бочок міг бути таким: (3,1,4), (1,5,2) та (1,5,2).

7.2. Якщо x – відстань у метрах, яку пробігла білка,
 то $\frac{0,5x}{5} + \frac{0,5x}{3} = 20 \cdot 60$. Звідси $x = 4500$ м.

7.3. Нехай A та B – центри даних сіл. A_1 – симетрична до A точка відносно річки, M – перетин річки з прямою BA_1 . Тоді $AM + BM = A_1M + BM = A_1B$. Точка M – шукана, оскільки для будь-якої іншої точки K , яка знаходиться на березі річки, отримаємо $KA + KB = KA_1 + KB > A_1B$.

7.4. Розглянемо останні цифри чисел 2^n . Це 2, 4, 8, 6, 2, 4, ... Вони повторюються з періодом 4. Оскільки $1995 = 4 \cdot 498 + 3$, то шуканою є цифра 8.

7.5. Значення суми дорівнює 1. Скористайтесь рівністю $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ для перших 1994-ох доданків.

8.1. Нехай прями AH та AO перетинаються з описаним колом відповідно в точках P та D ; H – така точка на колі, що $AH \parallel BC$. Оскільки AD – діаметр, $AH \perp BC$, то $AH \parallel PD$. Отже, $\angle OAH = 0,5 \cdot \overset{\frown}{PD} = 0,5 \cdot \overset{\frown}{AH} = |0,5 \cdot (\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB})| = |\angle ABC - \angle BCA|$.

8.2. Дане число дорівнює 2. Для доведення двічі скористайтесь рівністю $35 - 8\sqrt{19} = (\sqrt{19} - 4)^2$.

8.3.

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} - \frac{ab^3 + a^3b}{2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{3} - \frac{ab(a-b)^2}{2} =$$

$$= (a-b)^2 \left(\frac{(a+b)^2}{3} - \frac{ab}{2} \right) = \frac{(a-b)^2}{12} \cdot ((a+b)^2 + 3(a^2 + b^2)) \geq 0,$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

8.4. Якщо $\overline{abc} = \overline{def}$, то $\overline{abcdef} = 1001 \cdot \overline{abc}$, і такий номер ділиться на 1001. Якщо $\overline{abc} \neq \overline{def}$, то поряд із щасливим квитком \overline{abcdef} щасливим буде також \overline{defabc} . Але їхня сума дорівнює $1001 \cdot (\overline{abc} + \overline{def})$, тому сума всіх щасливих номерів ділиться на 1001.

9.1. Очевидно, що $(a+b)^3 = (c+d)^3$. Віднявши від одержаної рівності другу із заданих нам, будемо мати $3ab(a+b) = 3cd(c+d)$, звідки $ab = cd$. Оскільки також $(a+b)^2 = (c+d)^2$, то з врахуванням попередньої рівності одержимо, що й $(a-b)^2 = (c-d)^2$, тобто $a-b = \pm(c-d)$.

Але разом з першою заданою рівністю це можливо лише при $a = c$, $b = d$, або $a = d$, $b = c$.

9.2. Якщо в комісії менше 60 членів, то ніхто з них не взяв участі більш, ніж у шести засіданнях, бо вже $7 \cdot 9 > 60$. Оскільки учасників всіх засідань $40 \cdot 10 = 400$ і на кожного члена комісії припадає не більше шести засідань, то членів цієї комісії не менше $400 : 6 > 60$. Одержали протиріччя. Тому до комісії входить не менше 60 осіб.

9.3. Дане рівняння запишемо у вигляді $(k-1)^2 + (m+2)^2 + (n-3)^2 = 3$. Оскільки 2 та 3 не є точними квадратами, то одержимо $k-1 = \pm 1$, $m+2 = \pm 1$, $n-3 = \pm 1$. Пропонуємо читачам самостійно визначити всі 8 розв'язків.

9.4. Нехай P та K – основи висот, опущених на продовження сторін BC та AC відповідно. Тоді $\angle PCK = \angle ACB = 120^\circ$, $\angle AOB = 360^\circ - 2\angle ACB = 120^\circ$. Отже, $\angle ANB = 360^\circ - \angle PCK - \angle HPC - \angle HKC = 60^\circ$. Тому навколо чотирикутника $AHBO$ можна описати коло. Але $\angle AOM = \angle BOM = 60^\circ$, то $MA = MO = MB$, тобто M – центр цього кола. Отже, $OM = MH$.

9.5. Із формул Вієта легко одержати, що корені обох рівнянь додатні. Тому $t > 0$, $T > 0$, причому $at^2 - bt + c < 0$, $AT^2 - BT + C < 0$, бо $a > 0$, $A > 0$. Звідси випливає, що $at + \frac{c}{t} < b$, $AT + \frac{C}{T} < B$. Отже,

$$\begin{aligned} (b+B)^2 &> \left(at + \frac{c}{t} + AT + \frac{C}{T} \right)^2 = \\ &= \left((at + AT) + \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right) \right)^2 \geq 4(at + AT) \left(\frac{c}{t} + \frac{C}{T} \right). \end{aligned}$$

10.1. Якщо n – парне, то остання цифра парна, якщо n – непарне, то передостання (див. розв’язання задачі 7.2 за 1989 рік).

$$10.2. \text{ Запишемо рівняння так: } (x-3)^2 + (\sqrt{x}-2)^2 = 0.$$

Звідси одночасно $x = 3$ та $\sqrt{x} = 2$, що неможливо.

10.3. Оскільки сторони $2n$ - кутника рівні, то досить довести, що рівні суми відстаней до червоних та до синіх сторін. Для квадрата це очевидно. При $n > 3$ продовжимо червоні сторони $2n$ - кутника до їх взаємних перетинів. У результаті одержимо правильний n -кутник. Якщо S – його площа, b – довжина сторони, то сума відстаней від точки O до його сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$. Аналогічно встановлюємо, що й сума відстаней від точки O до синіх сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$.

10.4. Розглянемо довільну точку A площини і застосуємо до неї дане перетворення. В результаті одержимо точку B . Нехай M – середина AB , чи точка A , якщо B співпадає з A . Із рівності відповідних пар трикутників з вершинами в точках a_n легко встановити, що при кожній наступній симетрії відносно точок a_n довжина відображуваного вектора \overrightarrow{MA} не змінюється, а напрям міняється на протилежний. Оскільки S переводить A в B , то вектор \overrightarrow{MA} переведе в \overrightarrow{MB} , тобто точку M – саму в себе. Якщо тепер P – довільна точка площини, то аналогічними міркуваннями встановлюємо, що вона перейде в точку, симетричну до P відносно M . Отже, M – єдина нерухома точка цього відображення.

10.5. Нехай a_{ij} – число, яке знаходиться в i -тому рядку та j -тому стовпчику новоутвореної таблиці, і при

деякому $k > j$ $a_{ij} > a_{ik}$. Тоді для всіх $l \leq i$, $m \leq i$ буде $a_{mj} \geq a_{ij} > a_{ik} > a_{lk}$. Але тоді в k -тому стовпчику є не більше, як $(i - 1)$ число, яке не могло би бути більшим чисел a_{1j} , a_{2j} , ..., a_{ij} j -того стовпчика. А це суперечить тому, що в початковій таблиці числа кожного рядка монотонно зростали.

11.1. Нехай задана піраміда $SABC$; $KPMT$ – її переріз площиною, причому точки K, P, M, T лежать відповідно на ребрах SA, FD, CB, SC . Оскільки KT і PM паралельні і лежать у різних гранях піраміди, то $KT \parallel AC$, $PM \parallel AC$. Аналогічно $KP \parallel BS$, $MT \parallel BS$. Із подібності відповідних трикутників одержуємо $KP : BS = AP : AB = 1 - PB : AB = 1 - PM : AC$, тобто $b : BS = 1 - b : a$. Звідси $BS = \frac{ab}{a-b}$.

Маючи висоту $H = \sqrt{BS^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$ та площу основи

$$S_0 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ обчислюємо об'єм } V = \frac{1}{3} S_0 H, \text{ що пропонуємо}$$

читачам зробити самостійно.

11.2. $a_0 a_2 = K a_1$, то $K = \frac{a_2}{a_1} > 0$, бо $a_1 a_2 > 0$. Далі із

рівності $a_{n+1} = K a_n : a_{n-1}$ послідовно знаходимо $a_0 = 1$, $a_1 = a_1$, $a_2 = K a_1$, $a_3 = K \cdot K$, $a_4 = K^2 : a_1$, $a_5 = K : a_1$, $a_6 = 1$. Отже, члени цієї послідовності повторюються з періодом 6. Тому $a_{1995} = a_3$, тобто $K^2 = 100$, $K = 10$.

11.3. Наприклад, $p(x) = x^2 + 1995^2 \geq 1995 \cdot 2x = 1995 \cdot p'(x)$.

11.4. $f(f(0)) + f(0) = 3$. Тому $f(0) \leq 3$. Отже, можливі випадки:

а) $f(0) = 0$. Не підходить, бо тоді $f(f(0)) + f(0) = 0 \neq 3$;

б) $f(0) = 1$. Тоді за індукцією доводиться, що $f(n) = n + 1$;

в) $f(0) = 2$. Тоді $f(f(0)) + f(0) = f(2) + 2 = 3$, тобто $f(2) = 1$. Звідси $f(f(2)) + f(2) = f(1) + 1 = 7$, тобто $f(1) = 6$. Отже, маємо $f(f(1)) + f(1) = f(6) + 6 = 5$, тобто $f(6) = -1$. Протиріччя;

г) $f(0) = 3$. Тоді $f(f(0)) + f(0) = f(3) + 3 = 3$, тобто $f(3) = 0$. Звідси $f(f(3)) + f(3) = f(0) + 0 = 3 \neq 2 \cdot 3 + 3$. Знову протиріччя. Отже, остаточно $f(1995) = 1996$.

11.5. Якщо на всіх маршрутах n зупинок, то, яким би не був фіксований маршрут $A = A_1A_2\dots A_n$ і зупинка T поза ним, з умов задачі випливає, що всі маршрути, які проходять через T , перетинаються з A , причому таких маршрутів є рівно n , кожен з яких проходить через різні зупинки A . Тоді через кожну зупинку міста пройде n маршрутів. Всі вони перетинаються з A , то їх загальна кількість $m = n \cdot (n - 1) + 1$ (крім виділеного маршруту A через кожну з n його зупинок проходить ще по $n-1$ маршрутів). Оскільки через T не може проходити різної кількості маршрутів, то на всіх маршрутах кількість зупинок є необхідно однаковою. Отже: а) $m = 7$; б) $n = 4$.

1 9 9 6 р і к

7.1. $n = 26$. Намалюйте три квадрати з вершинами у всіх вершинах правильного дванадцятикутника.

7.2. Якщо a – довжина більшої сторони початкового прямокутника, то потрібно не більше, як $a - 1$ розрізування, бо при кожному з них довжина більшої сторони зменшується не менше, як на 1, залишаючись натуральним числом.

7.3. Досить знайти найменше K , для якого $1 + 2 + \dots + K \geq 1996$. Як і в задачі 8.3 за 1992 рік, знайдемо $1 + 2 + \dots + 60 = 1830$. Додаючи послідовно 61, 62, 63, будемо мати суми 1891, 1953, 2016. Отже, число 63 – шукане.

7.4. Намалюємо окремо графіки функцій $y = |x|$ та $y = 1 - |x|$ на одному малюнку. Залишилося тільки вибрати верхні вітки одержаної сукупності ліній.

7.5. Всього семицифрових чисел буде $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^6$. З них без цифри 7 є $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^6$, а отже, із сімкою $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$. Легко поррахувати, що останніх більше.

8.1. Нехай $P = a + b + c$. Тоді $\frac{b}{P-b} = \frac{a}{P-a}$, звідки

$a = b$. Отже, трикутник ABC рівнобедрений. Можливі варіанти кутів $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$ та $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$.

8.2. Із заданих чисел можна скласти лише такі 7 різних сум: $-3 \cdot 1996, -2 \cdot 1996, -1996, 0, 1996, 2 \cdot 1996, 3 \cdot 1996$. Тому серед восьми сум принаймні дві співпадуть.

$$8.3. A = \sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2} - \sqrt{2} = \\ = \sqrt{4+\sqrt{7} - 2\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right) + 4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} = 0.$$

8.4. Позначимо $a = 1995$. Тоді $a^2 + (a+1)^2 + (a \cdot (a+1))^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2$.

8.5. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 – центри цих квадратів, побудованих відповідно на сторонах AB, BC, CD, DA ; α – гострий кут паралелограма. Тоді $BO_1 = CO_3, BO_2 = CO_2, \angle O_1BO_2 = 90^\circ + \alpha, \angle O_2CO_3 = 90^\circ + \alpha$. Отже, трикутники O_1BO_2 та O_3CO_2 , рівні. Тому $O_1O_2 = O_2O_3, \angle BO_2O_1 = \angle CO_2O_3$. Але $\angle BO_2C = 90^\circ$, то й кут між O_1O_2

та O_2O_3 теж 90° . Аналогічно доводимо для інших двох суміжних сторін чотирикутника $O_1O_2O_3O_4$, та кутів між ними.

9.1. $p = 2$ не задовольняє. $p = 3$ підходить. Для простих $p > 3$ маємо $2^p = 3a + 2$, $p^2 = 3b + 1$, де a та b – натуральні числа. Тому $2^p + p^2$ ділиться на 3 і не є простим.

9.2. При $a \neq 0$ розглянемо $f(x) = ax^2 + bx + c$. Згідно з умовою задачі маємо $f(0) \cdot f(1) < 0$. Оскільки квадратична функція $y = f(x)$ набуває значень різних знаків, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні корені, а його дискримінант $D = b^2 - 4ac > 0$. Якщо ж $a = 0$, то досить довести, що $b \neq 0$. Але ж в протилежному випадку із умови задачі випливає, що $c^2 < 0$.

9.3. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для цього він, незалежно від гри суперника, повинен послідовно записувати такі числі; 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1996.

9.4. Якщо $\angle C = 90^\circ$, то $CM = R$. Якщо $\angle A = 90^\circ$, чи $\angle B = 90^\circ$, то $CM \neq R$. Навпаки, якщо M – середина AB то $OM \perp AB$. Нехай H – середина OM , де O – центр описаного навколо ABC кола. Якщо $CM \perp OM$, то $CM = OC = R$, але трикутник ABC є тупокутним.

9.5. Розглянемо дану пряму як числову вісь і виділимо на ній цілочислові точки. Якщо кольори в них чергуються, то серед п'яти послідовних точок є кінці та середина потрібного відрізка. Якщо ні, то є дві сусідні точки, наприклад, $n + 1$ та $n + 2$ кольору A . Припустимо, що вказаного відрізка не існує. Тоді послідовно встановимо кольори таких точок: n , $n + 3$ – колір B , $n + 6$ – колір A , $n + 4$ – колір B , $n + 5$ – колір A . Але, яким би не був колір точки $n + 8$, вказаний відрізок все одно існує.

10.1. У жодного з гравців. Кожне із записаних чисел закінчується на 10. Тому не ділиться на 4, а отже, й на 1996.

10.2. Запишемо рівняння у вигляді $(x - 1)(y - 1) = 1997$. Оскільки 1997 – просте число, то множники в лівій частині можуть набувати лише значень ± 1 та ± 1997 . Звідси знаходимо такі пари розв'язків: $(2, 1998)$, $(1998, 2)$, $(0, -1996)$, $(-1996, 0)$.

10.3. Зведіть числа a та b до спільного знаменника і скористайтеся методом задачі 7.2 для чисельників одержаних дробів.

10.4. Покладемо $y = \frac{\pi}{2}$. Тоді $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(0)\sin x$.

Якщо $f(0) = A$, то $f(x) = A \cos x$. Підстановкою у початкове рівняння переконаємося, що A може бути довільним дійсним числом.

10.5. Якщо M – середина, чи один із кінців відрізка BC , то шуканою є відповідна медіана трикутника. Для інших положень M розглянемо точку K – середину BC . Нехай $KP \parallel AM$, P лежить на контурі трикутника ABC , O – точка перетину MP та AK . Тоді $APKM$ – трапеція, а отже, $S_{AOP} = S_{MOK}$. Але $S_{AKC} = S_{AKB}$, то MP – шукана пряма.

11.1. $A = 1001\overline{abc} + (\overline{def} - \overline{abc})$, де кожен із двох доданків ділиться на 11.

11.2. Легко бачити, що числа a та b цілі, а площі всіх одержаних після розрізання прямокутників виражаються парними числами. Тому ab , як площа початкового прямокутника, – парне число, причому, оскільки числа a та b є цілими, то принаймні одне з них є парним.

$$\begin{aligned}
 11.3. \quad A &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot A = \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{11}} \left[\left(\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{\pi}{11} \right) + \dots + \left(\sin \frac{11\pi}{11} - \sin \frac{9\pi}{11} \right) \right] = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Врахуйте, що у квадратних дужках всі доданки, крім двох, взаємно знищуються.

11.4. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для цього він повинен після кожного свого ходу залишати суперникові непарне число. Цього можна добитися, наприклад, весь час віднімаючи 1.

11.5. Числа $\sqrt{2}$ та $2 + \sqrt{2}$ ірраціональні, тому $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$ теж ірраціональні, $n\sqrt{2} \neq m(2 + \sqrt{2})$, бо $\sqrt{2} \neq \frac{2m}{n-m}$. При кожному натуральному $k \geq 2$ на

інтервалі $(1, k)$ знаходиться $P_k = \left[\frac{k}{\sqrt{2}} \right] + \left[\frac{k}{2 + \sqrt{2}} \right]$ членів

із об'єднання елементів послідовностей $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$. Але $\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2 + \sqrt{2}} = k$ і числа $\frac{k}{\sqrt{2}}$, $\frac{k}{2 + \sqrt{2}}$

іраціональні, то сума їх дробових частин дорівнює 1. Отже, $P_k = k - 1$. Тому між будь-якими сусідніми натуральними числами знаходиться рівно один елемент із сукупності $n\sqrt{2}$ та $n(2 + \sqrt{2})$, а для їх цілих частин

справедливе твердження задачі. Зауважимо, що числа $\sqrt{2}$ та $2 + \sqrt{2}$ можна замінити довільними додатними ірраціональними числами a та b , для яких $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

1997 рік

7.1. Такого не може бути, бо за підрахунком по рядках у таблиці виходить більше чорних клітинок, ніж білих, а за підрахунком по стовпчиках – білих більше, ніж чорних.

7.2. Одним трикутником із меншими розмірами не вдасться покрити одночасно двох вершин намальованого трикутника. Отже, з двох трикутників, які його покривають, принаймні один більший, або рівний йому за розмірами.

7.3. Ясно, що половину площі вони разом косили $8 : 2 = 4$ години. Тому перший косив сам 6 годин. Отже, на всю площу йому треба 12 годин.

7.4. Якщо $\overline{abc} = \overline{def}$, то таких квитків стільки ж, як і квитків \overline{abc} , тобто 1000. Якщо $\overline{abc} \neq \overline{def}$, то такі щасливі квитки можна розбити на пари \overline{abcdef} та \overline{defabc} .

8.1. Запишемо нерівність у вигляді $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Звідси випливає, що принаймні одне з чисел менше, ніж 3, а отже, дорівнює 2. Якщо є ще одна двійка, то третє може бути довільним простим. Якщо ні – то підходять лише набори 2, 3, 3 та 2, 3, 5 зі всіма перестановками чисел у них.

8.2. $a^4 + a^3 + a^2 + 9 = a(a^3 + a - 1) + (a^3 + a - 1) + 10 = 10, a^5 - a^2 - a + 6 = a^2(a^3 + a - 1) - (a^3 + a - 1) + 5 = 5$.
Отже, значення записаного дробу дорівнює 2.

8.3. Зрозуміло, що сума всіх чисел таблиці дорівнює $3M$. Нехай a – її центральний елемент. Додамо до вказаних в умові восьми сум ще суми вертикального та горизонтального рядків таблиці, які містять елемент a .

При цьому елемент a в одержані 10 сум ввійде 6 разів, а всі інші елементи таблиці – по 3 рази. Отже, $10M = 3 \cdot 3M + 3a$, тобто $M = 3a$.

8.4. Нехай задано квадрат $ABCD$, і $\angle DMC = 150^\circ$. Тоді $\angle MDC = \angle MCD = 15^\circ$. Побудуємо на стороні AB всередині квадрата правильний трикутник AKB . Отримаємо два рівнобедрені трикутники KAD та KBC з кутами 75° при основах. Тому $\angle KDC = \angle KCD = 15^\circ$. Отже, точки K та M співпадають. Далше очевидно.

8.5. Нехай A та B – дві довільні сусідні точки, $AB = a$. Тоді для довільної точки X прямої $|AX - BX| = a$, якщо X знаходиться поза AB . Тому модуль різниці між сумами відстаней від точки A та від точки B до решти 1995 точок буде мати вигляд $(2n+1) \cdot a \neq 0$.

9.1. Область допустимих значень є такою $[-3, 3\sqrt{3}]$. При $x = 0$ нерівність очевидна, при $x > 0$ перший доданок більший від правої частини, а при $x < 0$ – другий. Отже, розв'язок: $[-3, 3\sqrt{3}]$.

9.2. Оскільки сума всіх множників дорівнює нулю, а їх кількість непарна, то хоч один з них є парним числом.

9.3. Число $n^2 + 8n + 9$ повинно ділитися на $n + 9$. Але воно дорівнює $(n - 1)(n + 9) + 18$, то 18 має ділитися на $n + 9$. Отже, $n = 9$, або, якщо допускати і таку можливість, $n = 0$.

9.4. Сума зовнішніх кутів довільного опуклого багатокутника дорівнює 360° . Якщо вони виражаються цілим числом градусів, то багатокутник не може мати більше, як 360 кутів.

9.5. Зауважимо, що $\angle EMH = 90^\circ$. Тому навколо чотирикутника $MECH$ можна описати коло. Тоді $\angle MNE = \angle MCE = 45^\circ$, $\angle MEN = \angle MCH = 45^\circ$. Отже, $\angle MEN = \angle MNE$.

$$10.1. \quad \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2x^2 y} + \frac{y}{2xy^2} = \frac{1}{xy}.$$

10.2. Не можна. На основі розв'язання задачі 8.3 такі суми повинні ділитися на 3, а число 1997 на 3 не ділиться.

10.3. Легко довести, що всередині такого квадрата можна помістити правильний трикутник зі стороною $10\sqrt{3}$. Оскільки кожна його вершина може знаходитися або на кляксі, або поза нею, то знайдуться такі дві вершини, що або обидві будуть на кляксах, або обидві поза ними. Вони і є кінцями шуканого відрізка.

10.4. На яку би цифру не помножив 10 перший гравець, він може отримати число від 20 до 90 включно. У кожному з цих випадків другий гравець матиме змогу записати число з відрізка $[111, 221]$. Тоді число, записане на другому кроці першим гравцем, попаде на відрізок $[222, 1989]$. Помноживши це число, наприклад, на 9, другий переможе.

10.5. Нехай у трикутнику ABC кут C прямий, O – центр описаного кола, R – радіус цього кола, CD – висота трикутника, S – його площа. Ясно, що CO – медіана, $AB = 2 \cdot CO$, $CO = R$. Тоді $S = 0,5 \cdot AC \cdot BC = 0,5 \cdot CO^2$ та $S = 0,5 \cdot AB \cdot CD$. Отже, $CD = 0,5 \cdot CO$. Тому $\angle COD = 30^\circ$. Звідси маємо, що $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$.

11.1. Зауважимо, що областю визначення функції є відрізок $[-2 : 2]$. Розкриваючи знак модуля, одержимо, що $y = 1$ при $\sqrt{3} \leq |x| \leq 2$ та $y = \sqrt{4 - x^2}$ при $|x| < \sqrt{3}$. Відзначимо, що остання лінія буде дугою кола $x^2 + y^2 = 4$. Графік пропонуємо побудувати самостійно.

11.2. При $p = 3$ число 20 має 6 дільників: 1, 2, 4, 5, 10, 20. При $p > 3$ маємо $p^2 + 11 = (p^2 - 1) + 12$. Як і в задачі

7.5 за 1990 рік, доводимо, що воно ділиться на 12. Але 12 теж має 6 дільників, а $p^2 + 11 > 12$, то $p > 3$ не підійдуть. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що не підходить також $p = 2$.

11.3. Легко показати, що всередині заданого куба можна помістити правильний тетраедр із ребром 11 см. Якщо би більше, ніж дві із чотирьох вершин тетраедра належали поміщеним всередині кулькам, то принаймні дві з них були б одного кольору. В іншому випадку принаймні дві вершини тетраедра не належатимуть жодній кульці.

11.4. Зауважимо, що парні степені двійки при діленні на 3 дають остачу 1, а непарні – остачу 2. Тому виграшна стратегія є у гравця, який розпочав гру. Для цього на першому кроці він повинен відняти 2, одержавши, число 1995, яке ділиться на 3, а потім віднімати двійки в степенях, протилежних за парністю до степенів двійок у ході суперника. Тоді кожним своїм ходом він отримуватиме невід'ємні цілі числа, кратні 3, які щоразу зменшуються. Відповідно, другий гравець жодного разу отримати число, кратне трьом не зможе. А отже, за скінченну кількість кроків починаючий гру отримає 0.

11.5. Див. розв'язання задачі 10.5.

1 9 9 8 р і к

7.1. Для отримання 12%-го розчину потрібно змішати дві частини 15%-го та три частини 10%-го розчинів. Це можна зробити, наприклад, так: наливаємо 5 літрів 15%-го розчину у п'ятилітрову посудину, а звідти переливаємо 3 літри у трілітрову посудину. Спорожнивши останню, наливаємо в неї 3 літри 10%-го

розчину, а потім переливаємо весь вміст у п'ятилітрову посудину. І, нарешті, відливаємо зайвих 4 літри отриманого 12%-го розчину у чотирилітрову посудину.

7.2. Це можна зробити, наприклад, так:

| | | | |
|---|----|----|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 |

7.3.

$$\frac{1}{1998} < \frac{1997}{n} < \frac{1}{1997} \Leftrightarrow \frac{1997}{1997 \cdot 1998} < \frac{1997}{n} < \frac{1997}{1997 \cdot 1997}.$$

Отже, $1997^2 < n < 1997 \cdot 1998$. Оскільки 1997 є простим числом, то всі такі n задовольняють умову задачі. Тому шуканих дробів є 1996.

7.4. Перший. Спочатку він повинен закреслити клітинку з числом 1. Решту клітинок розіб'ємо на дві групи: 2 – 9 та 10 – 17. За умовою задачі тепер жоден гравець не зможе закреслити одночасно числа з різних груп. Отже, для перемоги першому достатньо на кожен хід другого гравця відповідати так, щоб модулі різниць між числами, закресленими ним і його суперником, весь час дорівнювали 8.

$$8.1. \quad \text{Маємо } 1998 = \overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 111(2a + b).$$

Отже, $2a + b = 18$. Звідси знаходимо такі чотири трійки розв'язків: (558, 585, 855), (666, 666, 666), (774, 747, 477), (882, 828, 288).

$$8.2. \quad \text{Буде. } \underset{1998}{11\dots155\dots5} \underset{1997}{6} = \underset{1998}{11\dots100\dots0} \underset{1998}{+} \underset{1998}{55\dots5} \underset{1998}{+} \underset{1998}{1} =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{1998} - 1)10^{1998} + \frac{5}{9}(10^{1998} - 1) + 1 = \left(\frac{10^{1998} + 2}{3} \right)^2.$$

При цьому останній дріб є цілим числом, оскільки сума цифр чисельника дорівнює 3.

8.3. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола до сторін BC, CA, AB відповідно. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1 , бо $AB_1 = AC_1$. Тому й пряма, проведена через A_1 , також перпендикулярна до B_1C_1 . Аналогічні міркування для інших проведених прямих доводять, що всі вони співпадають з прямими, на яких лежать висоти трикутника $A_1 B_1 C_1$, а отже, перетинаються в одній точці.

8.4. Розіб'ємо таблицю вертикальною рисою на дві рівні частини. Для перемоги другому гравцеві достатньо на кожен хід суперника в одній з частин таблиці відповідати зафарбовуванням клітинки з того ж рядка, яка знаходиться в іншій частині таблиці через клітинку від клітинки, зафарбованої перед цим першим гравцем. Таким чином, його не програшні ходи вичерпаються не раніше, ніж аналогічні ходи першого гравця.

9.1. Оскільки 1998 ділиться на 3, то число $11\dots 1$
1998

ділиться на 111, а отже, і на 37.

9.2. Див. розв'язання задачі 8.3.

9.3. Першому гравцеві для перемоги спочатку потрібно закреслити центральну клітинку, а потім робити симетричні відносно неї ходи до ходів суперника.

9.4. Нехай $x_1 = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{1}{y}$. Тоді у системі координат

$x_1 O y_1$ отримаємо точки $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), (2, 4), (1, 2), (3, 1), \left(4, \frac{5}{4}\right)$

та рівняння прямої $ax_1 + by_1 = 1$. Неважко перекоонатися, що серед цих точок максимальна кількість таких, які лежать на одній прямій, дорівнює 3. Стільки ж заданих точок може лежати і на лінії, заданій в умові задачі.

9.5. Не можна. Справді, при вказаних перетвореннях дискримінант тричлена не змінюється, а дискримінанти тричленів $x^2 - 3x - 4$ та $x^2 - 2x - 5$ є різними. Зауважимо тільки, що при вказаних перетвореннях можуть появлятися також вирази, які не є квадратними членами. У такому разі обчислювати для них дискримінант будемо чисто формально, вважаючи відсутні коефіцієнти нулями.

$$10.1. \quad \frac{m^3}{m+n} = \frac{(m^3 + n^3) - n^3}{m+n} = m^2 - mn + n^2 - n \cdot \frac{n^2}{m+n},$$

а отже, є цілим числом.

10.2. Оскільки $\sin A + \sin C = \sin B + \sin D$, то отримаємо таку рівність

$$2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B+D}{2} \cos \frac{B-D}{2}.$$

Але $A+B+C+D = \pi$, то $\sin \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B+D}{2} \neq 0$.

Отже, $\cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B-D}{2}$. Звідси випливає, що

також $\sin \frac{A-C-B+D}{4} \cdot \sin \frac{A-C+B-D}{4} = 0$. Тому

$A+D = B+C = \pi$ або $A+B = C+D = \pi$, що й досить було довести.

10.3. Із заданих рівнянь послідовно знаходимо:

$$x \geq 0, \quad 0 < z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \left| \frac{1-y}{1+y} \right| = \frac{1-y}{1+y}, \quad y^2 = \frac{z+1}{2},$$

$$z^2 = \frac{1}{1 + \frac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y}{2}. \quad \text{Отже,} \quad y^2 - z^2 = \frac{z-y}{2}, \quad \text{тобто}$$

$$(y-z)(y+z+1) = 0. \quad \text{Звідси маємо } y = z. \quad \text{Тоді } y^2 = \frac{y+1}{2},$$

$y_1 = -\frac{1}{2}$ (не задовольняє), $y_2 = 1$. Остаточно отримуємо $y = z = 1, x = 0$.

10.4. У кожній парі „дівчина-хлопець” буде один заміряний погляд. Тому отримуємо рівняння $mn = 117$, де m – кількість хлопців, а n – кількість дівчат у класі. Оскільки $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$, то умову задачі задовольняють лише такі два випадки: $m = 9, n = 13$ та $m = 13, n = 9$.

10.5. Нехай M та N є відповідно серединами відрізків AC та BD . Припустимо, що ці точки не співпадають. Тоді при кожному проектуванні вони обидві будуть проектуватися в центри паралелограмів. Отже, пряма MN повинна бути паралельною до кожного з напрямів проектування. Але це неможливо, бо в задачі мова йде про дві різні паралельні проекції. Отримане протиріччя доводить, що діагоналі $ABCD$ перетинаються в одній точці і діляться точкою перетину пополам. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

11.1.

$$x - \sqrt{x} \leq y - \frac{1}{4} \leq x + \sqrt{x} \Leftrightarrow \left| y - x - \frac{1}{4} \right| \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(x - y + \frac{1}{4} \right)^2 \leq x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x - y - \frac{1}{4} \right)^2 \leq y \Leftrightarrow \left| x - y - \frac{1}{4} \right| \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow y - \sqrt{y} \leq x - \frac{1}{4} \leq y + \sqrt{y}.$$

11.2. Оскільки $\cos 12x - 5 \sin 3x \leq 1 - (-5) = 6$, $9tg^2x + ctg^2x = (3tgx - ctgx)^2 + 6 \geq 6$, то рівність можлива лише при умові, що одночасно $\cos 12x = 1$, $\sin 3x = -1$, $3tgx = ctgx$. З останнього рівняння знаходимо

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$, або $x = \frac{\pi}{6} + \pi l, l \in Z$. Підставивши їх в перші два рівняння, переконуємося, що задовольняють тільки $m = 2n, n \in Z$, та $l = 2k - 1, k \in Z$. Отже, остаточно $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, або $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

11.3. Оскільки $S(CMD) = S(AKD)$, то $S(CAK) = S(CAM)$. Отже, $AC \parallel MK$. Тоді $S(CPA) = S(CKA)$. Тому отримаємо, що $S(ABCP) = S(ABCK) = \frac{1}{2}S(ABCD)$.

11.4. Позначимо $f(-1) = a$. Тоді для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f(x) - a = af(x) - af\left(\frac{1}{x}\right)$.

Замінивши в ній x на $\frac{1}{x}$, отримаємо

$f\left(\frac{1}{x}\right) - a = af\left(\frac{1}{x}\right) - af(x)$. Додавши дві останні

рівності, одержимо рівняння $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - 2a = 0$.

Отже, $f(x) - a = af(x) - a(2a - f(x))$, тобто маємо

$f(x)(1 - 2a) = a(1 - 2a)$. Звідси знаходимо $a = \frac{1}{2}$, бо при

інших a ми отримали би, що $f(x) \equiv a \neq \frac{1}{2}$, а отже,

рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ не мало би жодного кореня, що

суперечить умові задачі. Зауважимо, що принаймні одна

така функція, яка задовольняє умови задачі, існує.

Наприклад, $f(x) \equiv \frac{1}{2}, x \neq 0$.

11.5. Доведемо справедливість даного твердження для прямокутників розмірами $2^n \times 1998^2, n \geq 0$, застосувавши метод математичної індукції по n . Для $n = 0$ твердження очевидне. Припустимо його справедливості для $n = k$. При цьому будемо вважати, що таких способів розбиття є K . Нехай тепер $n = k + 1$. Проведемо уявно пряму l , яка розбиває прямокутник розмірами $2^{k+1} \times 1998^2$ на два прямокутники розмірами $2^k \times 1998^2$. Розглянемо окремо розбиття, в яких жодна фігурка не перетинає пряму l , та розбиття, в яких хоч одна фігурка перетинає цю пряму. Перших, згідно припущення, отримаємо K^2 способів, тобто непарну кількість. А розбиття другого виду розпадуться на пари симетричних відносно l розбивань, оскільки ця пряма не буде віссю симетрії для жодної з фігурок. Отже, їх буде парна кількість. Таким чином отримаємо, що загальна кількість способів розбиття прямокутника розмірами $2^{k+1} \times 1998^2$ є непарною.

1 9 9 9 р і к

7.1. Позначимо число у другій клітинці через x , а число у третій клітинці – через y . Тоді трійки чисел $34, x, y$ будуть повторюватися. Оскільки у восьмій клітинці має стояти x , то $x = 32, y = 33$. Решту клітинок заповніть самостійно.

7.2. Можна. Достатньо кожному дати по одному цілому листку, одній половинці та по дві треті частинки

цілого листка. Для цього доведеться три листки розрізати пополам, а чотири – на три частини.

7.3. З умови задачі випливає, що $x + y \geq 0$, $x - y \geq 0$, $x + y = x - y$. Звідси знаходимо $y = 0$ при умові, що $x \geq 0$.

7.4. На перші 10 вантажівок будемо вантажити ящики до того часу, поки загальна маса вантажу на кожній з них не перевищить 1,2 тони. Цього завжди можна добитися, бо в іншому разі вдасться доставити ще принаймні один ящик. Тоді для одинадцятої вантажівки залишиться не більше 1,5 тони. Отже, якщо за об'ємом ящики помістяться, то перевезти такий вантаж завжди вдасться.

8.1. З умови випливає, що $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Тоді $\frac{-2x}{2x^2} = 1999$, $x = -\frac{1}{1999}$.

8.2. Не існують. Позначимо $m + 1999 = k$. Тоді в лівій частині рівності отримаємо $3k^2 - 1$. Але остача правої частини при діленні на 3 дорівнювати двом не може.

8.3. Оскільки $\angle ABQ = \angle CBQ = \angle AQB$, то трикутник ABQ рівнобедрений. Оскільки P лежить на середній лінії, то $BP = PQ$. Отже, $\angle APQ = 90^\circ$.

8.4. Запишемо всі ці числа по колу. Послідовно виберемо по колу 1999 разів по 99 чисел підряд і додамо всі отримані при цьому суми. Зрозуміло, що таким чином ми отримаємо додатне число, яке в 99 разів перевищує суму всіх 1999-и заданих чисел. А отже, їх сума також додатна.

9.1. Оскільки $1900^6 < 1999^6 < 2000^6$, і кожне з крайніх чисел є двадцятицифровим, то і число 1999^6 також двадцятицифрове. Якщо би в ньому жодна цифра

не повторювалася принаймні тричі, то кожна цифра від 0 до 9 використовувалася би по два рази. А отже, їх сума дорівнювала би 90. Але це неможливо, бо 1999^6 не ділиться на 3.

9.2. Зауважимо, що $x=1$ не є коренем цього рівняння, і помножимо обидві його частини на $(1-x)^2$. Тоді з отриманого при цьому рівняння $(1-x^3)(1-x^5) = (1-x^4)^2$ знайдемо $x=0$.

9.3. Опустимо перпендикуляри CC_1 та HH_1 до сторони AB . Тоді

$$\begin{aligned} AC_1^2 - BC_1^2 &= (AC^2 - CC_1^2) - (BC^2 - CC_1^2) = AC^2 - BC^2 = \\ &= AH^2 - BH^2 = (AH_1^2 + HH_1^2) - (BH_1^2 + HH_1^2) = AH_1^2 - BH_1^2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $AC_1 = AH_1$ і точки H_1 та C_1 співпадають. Отже, точка H належить прямій CC_1 . Аналогічно доводиться, що вона лежить і на двох інших прямих, які містять висоти трикутника.

9.4. Використовуючи теорему Вієта, отримаємо

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 - \frac{1}{2\alpha^4} = \\ &= 2 + \left(\alpha^4 + \frac{1}{2\alpha^4} \right) \geq 2 + 2\sqrt{\alpha^4 \cdot \frac{1}{2\alpha^4}} = 2 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

9.5. Неважко переконатися, що у четвертому рядку будуть записані числа $3(c-b)$, $3(a-c)$, $3(b-a)$. Тому всі числа, починаючи з четвертого рядка, мають ділитися на 3. А отже, серед них не зустрінеться ні число 1999, ні число 2000.

10.1. З даних рівностей випливає, що $(x-y)(1-z)=0$. Якщо $x=y$, то отримуємо $x+xz=6$ та $z+x^2=6$. Віднімаючи від першого рівняння друге, знайдемо $(z-x)(1-x)=0$. Отже, $x=y=z$ або $x=y=1$. У першому випадку знаходимо $x=y=z=-3$ або $x=y=z=2$. А у другому – отримаємо $x=y=1, z=5$. Якщо ж $z=1$, то приходимо до системи рівнянь $x+y=6, xy=5$. З неї знаходимо $x=5, y=1$ та $x=1, y=5$.

10.2. Нехай M – відмінна від O точка перетину прямої BO з колом, описаним навколо трикутника AOC . Тоді

$$\begin{aligned} \angle OCM &= \angle OCA + \angle ACM = \frac{1}{2} \angle ACB + \angle AOM = \\ &= \frac{1}{2} \angle ACB + \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2} (\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ. \end{aligned}$$

Отже, OM є діаметром кола і точка S лежить на цьому діаметрі.

10.3. Очевидно, що $x+y \geq 0$. Запишемо рівняння у вигляді $x^2 = (\sqrt{x+y})^2 - x + \sqrt{x+y}$. Звідси розкладом на множники легко одержати рівняння $(x - \sqrt{x+y})(x + \sqrt{x+y} + 1) = 0$. Отже, при $x \geq 0$ маємо $x = \sqrt{x+y}$, тобто $y = x^2 - x$. А при $x \leq -1$ знаходимо $x = -\sqrt{x+y} - 1$, звідки отримуємо $y = x^2 + x + 1$. Відповідні графіки пропонуємо читачам намалювати самостійно.

10.4. Такою є, наприклад, послідовність $a_n = (n!)^3$.

10.5. Зрозуміло, що менше, ніж $n^2 - 1$ дільниць доріг бути не може. Вказану ж кількість дільниць легко одержати, провівши одну вертикальну дорогу довжиною $10(n-1)$ км вздовж сторони квадрата та n горизонтальних доріг такої ж довжини. Отже, мінімальна довжина такої системи доріг буде $10(n^2 - 1)$ км.

11.1. Зауважимо, що $x=1$ не є коренем цього рівняння, і помножимо обидві його частини на $(1-x)^2$. Тоді з отриманого при цьому рівняння $(1-x^3)(1-x^{11}) = (1-x^7)^2$, рівносильного рівнянню $x^3(x^4-1)^2 = 0$, знайдемо $x = -1$ та $x = 0$.

11.2. Задану в умові рівність можна переписати у вигляді $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) + \sin \beta (\sin \beta - \cos \alpha) = 0$. Якщо $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}$. А отже, рівність буде неможливою, бо $\sin \alpha - \cos \beta < \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - \cos \beta = 0$, $\sin \alpha > 0$ та $\sin \beta - \cos \alpha < \sin \beta - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 0$, $\sin \beta > 0$. Аналогічно доводимо, що не може бути $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. Якщо ж $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то рівність очевидна.

11.3. Розглянемо функцію $F(x) = f(x) - f(x + \sin x)$. За умовою задачі $F(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, що $F(\pi n) = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $F(x)$, як і $f(x)$, має похідні у всіх точках, то за теоремою Ферма отримаємо

також $F'(\pi n) = 0$ при всіх $n \in \mathbb{Z}$. А отже, $f'(\pi n) - (1 + \cos \pi n) f'(\pi n + \sin \pi n) = 0, n \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що $f'(\pi n) = 0, n \in \mathbb{Z}$. А це суперечить умові задачі.

11.4. Позначимо через D, E, F середини відрізків AB, AP, BP відповідно. Тоді $AE = PE = ME, BF = PF = KF$ за властивістю медіан прямокутного трикутника. Крім того, за властивістю середніх ліній трикутників $DE = PF, DF = PE$. З отриманих рівностей випливає, що $\triangle DEM = \triangle KFD$ (за трьома сторонами) та $\angle DEM = \angle KFD$. Але $DFPE$ є паралелограмом, то $\angle DEP = \angle DFP$. Отже, $\angle PEM = \angle PFK$. Тоді і вдвічі менші від них кути PAC та PBC також будуть рівними.

11.5. Нехай $a = \frac{199919991999}{3}, a \in \mathbb{Z}$. Заповнимо

таблицю таким чином:

| | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| - | a | a | a | a | a | - |
| a | a | -5a | a | -5a | a | a |
| a | a | a | a | a | a | a |
| a | -5a | a | -5a | a | -5a | a |
| a | a | a | a | a | a | a |
| a | a | -5a | a | -5a | a | a |
| - | a | a | a | a | a | - |

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що вона задовольняє вказаним у задачі умовам.

2 0 0 0 р і к

7.1. а). Зрозуміло, що $n \leq 1999$. Звідси випливає, що $S(n) \leq 28$, $n \geq 2000 - 28 = 1972$. Але числа n та $S(n)$ при діленні на 9 дають однакові остачі. Щоб у сумі отримати число 2000 з остачею 2, такі остачі мають дорівнювати 1. Із отриманого діапазону цю умову задовольняють лише числа 1972, 1981, 1990 та 1999. Легко переконатися, що умову задачі задовольняє тільки $n = 1981$.

б). Таких n не існує. Справді, перший і другий, другий і третій, а отже, і всі три доданки в лівій частині рівності при діленні на 3 дають однакові остачі. Отже, їх сума має ділитися на 3. Але число 2000 на 3 не ділиться.

7.2. Див. розв'язання задачі 9.5 за 1996 рік.

7.3. Якщо спочатку сума всіх 1999 чисел була парною, то принаймні одне з них було парним. Витерши його, знову отримаємо парну суму. Якщо ж початкова сума була непарною, то принаймні одне з 1999 чисел також непарне. Сума, яка залишиться після його витирання, буде парною. Для 2000 чисел твердження не завжди вірне. Наприклад, якщо спочатку всі числа були непарними.

7.4. Якщо число n п'ятицифрове, то число k має не менше однієї цифри. Якщо число n трицифрове чи двоцифрове, то число k має не менше чотирьох цифр. У кожному з цих випадків разом маємо не менше 11 цифр. Тому принаймні одна з них повторюється. Якщо число n чотирицифрове чи одноцифрове, то менше 11 цифр отримаємо лише у випадках, коли відповідно число k буде одноцифровим чи чотирицифровим. Але, оскільки

при цьому $10000 \leq m = n + k \leq 1999 + 9 = 10008$, то повториться цифра 0.

7.5. Покладемо $a = 1999n$, $n \in N$, $b = 1999m$, $m \in N$. Підставивши їх у задану рівність, отримаємо $n^{1999} = m^{2000}$. Якщо тепер $n = k^{2000}$, $m = k^{1999}$, $k \in Z$, то знайдемо такі пари розв'язків: $a = 1999 \cdot k^{2000}$, $b = 1999 \cdot k^{1999}$, де k – довільне натуральне число.

8.1. Позначимо $19991999 = a$. Тоді значення заданого виразу дорівнюватиме

$$a + (a-1)a(a+1) = a^3 = 19991999^3.$$

8.2. . Нехай a – початковий об'єм води в озері, x – об'єм води, яку випиває один слон за хвилину, y – продуктивність джерел за хвилину, t – шуканий час у хвилинах. З умов задачі отримуємо такі три рівняння: $48x = a + 4y$, $54x = a + 6y$, $6tx = a + ty$. З перших двох випливає, що $y = 3x$. Підставивши цей вираз у третє рівняння, одержимо, що $a = 3tx$. Отже, на основі першої рівності, $48x = 3tx + 12x$, звідки знаходимо $t = 12$ хв.

8.3. Нехай M, K, N, L є відповідно серединами відрізків AC, DC, BD, AB . За властивістю середніх ліній відповідних трикутників $MK \parallel AD$, $NL \parallel AD$, $ML \parallel BC$, $KN \parallel BC$. Отже, $MKNL$ – паралелограм. Оскільки $MN = KL$, то він є прямокутником. Тоді $\angle ADB = \angle LNB = 180^\circ - \angle DNL > 180^\circ - \angle KNL = 90^\circ$.

8.4. Запишемо задане рівняння у вигляді $2(n^2 + 1) = 7n^2 - 7m^2 + 2002$. Оскільки тут права частина ділиться на 7 при $m, n \in Z$, а $n^2 + 1$ при діленні на 7 дає лише остачі 1, 2, 3, 5, то рівняння не має розв'язків у цілих числах.

8.5. Розіб'ємо рядки на пари: перший і другий, третій і четвертий, п'ятий і шостий. Спочатку Миколка запише число у сьомому рядку, який залишився без пари. Далі на кожен запис Сергійка у сьомому рядку відповідає записом у цьому ж рядку. Якщо ж Сергійко запише своє число в іншому рядку, то Миколка робить свій запис у спареному з ним рядку, але лише до тих пір, поки Сергійко не записав у цьому рядку восьме число. Якщо ж Сергійко запише у рядку восьме число, то Миколка у цьому ж рядку запише останнє дев'яте число так, щоб сума всіх чисел рядка стала парною. Зрозуміло, що при такій стратегії Миколка завершуватиме кожен рядок, а отже, зможе добитися, щоб усі суми були парними.

9.1. Якщо x – корінь рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0$, то $x^2 - 3x - 2 = x$. Отже, отримуємо, що також $(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - x - 2 = x^2 - 3x - 2 - x = 0$.

Тобто x – корінь другого рівняння.

9.2. З умови задачі випливає, що число $5n - 1 - 5(n - 10) = 49$ ділиться на p . Отже, $p = 7$. Тоді число $2000n + 13 = 7(285n + 2) + 5n - 1$ теж ділиться на $p = 7$.

9.3. Оскільки

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2xy - y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} \geq 2x - y$$

при $y > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geq (2a - b)(2a - c) + (2b - c)(2b - a) + (2c - a)(2c - b) = 4(a^2 + b^2 + c^2) - 3(ab + bc + ca) =$$

$$= \frac{3}{2} \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] + a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

9.4. Нехай O , O_1 , O_2 – центри цих кіл, і точки A , D лежать на колі з центром O_1 , а точки B , C – на колі з центром O_2 . Зауважимо, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA$, $\angle O_2BC = \angle O_2CB$, $\angle O_1DC = \angle O_1CD = 90^\circ$. Тому досить довести, що $\angle O_1AB = \angle O_2BA$. Але оскільки у точці A дотична є спільною, то радіуси O_1A та OA перпендикулярні до цієї дотичної. Аналогічно O_2B та OB перпендикулярні до дотичної у точці B . Отже, $\angle O_1AB = \angle OAB = \angle OBA = \angle O_2BA$. Звідси одержуємо, що $\angle ABC + \angle ADC = \angle DAB + \angle DCB$, а тому точки A , B , C , D лежать на одному колі. Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати це розв'язання щодо різних можливих взаємних розташувань заданих кіл.

9.5. Замінімо спочатку всі числа їхніми остачами від ділення на 3. Виділимо в отриманій послідовності наступні фрагменти для розстановки знаків замість зірочок: $1*2*0$ на початку, $0*1*2$ в кінці та 665 фрагментів вигляду $0*1*2*0$ між ними. При цьому крайні нулі виявляться спільними кінцями для сусідніх фрагментів. Покажемо, що гравець, який починає гру, може добитися перемоги. Розіб'ємо останні 665 фрагментів на пари: перший і другий, третій і четвертий, ..., 663-ій і 664-ий. Спочатку перший гравець ставить знак у 665-му фрагменті, який залишився без пари. Далі, якщо його суперник ставить знак у вільному з цих 665-и фрагментів, то перший гравець ставить свій знак у спареному фрагменті. Якщо ж суперник ставить знак у тому фрагменті, де один знак уже був поставлений, то перший ставить третій знак у цьому ж фрагменті так,

щоб серед трьох поставлених знаків у жодному разі не виявилось двох плюсів та одного знака множення. Зрозуміло, що при цьому будуть можливими лише наступні комбінації знаків у даних фрагментах: $0 \times 1 \times 2 \times 0$, $0 \times 1 \times 2 + 0$, $0 \times 1 + 2 \times 0$, $0 + 1 \times 2 \times 0$, $0 + 1 + 2 + 0$. Тому, якщо, крім того, на хід другого гравця у ті фрагменти, де були лише дві зірочки, перший гравець відповідатиме тим самим знаком у тому ж фрагменті, то значення отриманого вкінці виразу ділитиметься на 3.

10.1. Після піднесення обох частин рівності до квадрату дане рівняння може бути записане у вигляді

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + 2\sqrt{2x - y^2 + z^2 - 7} \cdot \sqrt{2y - x^2 + z^2 - 12} = 0.$$

Оскільки всі доданки у лівій частині рівності невід'ємні, то $x=1$, $y=2$, $z=3$. Перевірка показує, що знайдені x, y, z задовольняють початкове рівняння.

10.2. Нехай у Івана Карповича x курей та y індиків. З умови задачі випливає, що $0,1x + 0,9y = 0,2(x + y)$. Звідси знаходимо, що $x=7y$. Отже, індики складають восьму частину господарства.

10.3. З паралельності відповідних відрізків випливає, що прями AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці – центрі гомотетії трикутників ABC та $A_1B_1C_1$. Позначимо цей центр через O . З властивостей площ подібних трикутників випливає, що коефіцієнт гомотетії дорівнює $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Нехай P_1 – точка перетину прямих A_1B_1 та

PO . Тоді $\frac{PO}{P_1O} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, а отже, також $\frac{S(PB_1O)}{S(P_1B_1O)} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Провівши аналогічні міркування для площ трикутників $PA_1O, RA_1O, RC_1O, QC_1O, QB_1O$, отримаємо, що і

$$\frac{S(PQR)}{S(A_1B_1C_1)} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \text{ Тому } S(PQR) = b \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}.$$

10.4. З умови задачі випливає, що з одного боку $a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 11$, тобто дорівнює кількості всіх записаних чисел, з іншого боку $a_0 + a_1 + \dots + a_{10} = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + 10 \cdot a_{10}$. Отже,

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + \dots + 9a_{10} \quad \text{та} \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10} = 11.$$

З останньої рівності випливає, що відмінними від нуля можуть бути не більше чотирьох доданків. Отже, $a_0 = k \geq 7$. Тоді обов'язково $a_k = 1, a_1 \geq 1$. Але у такому разі ми отримаємо з останнього рівняння, що $a_2 \leq 1$, а всі інші елементи, крім перерахованих вище, можуть бути лише нулями. Якщо $a_2 = 0$, то $a_0 = 8$. При цьому жодне значення a_1 умову задачі задовольняти не буде. Отже, $a_2 = 1$. Тоді $a_1 = 2$, і ми отримуємо такий набір шуканих чисел: 7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0.

10.5. Позначимо $y = tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$. Тоді

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{tgx} - tgx, \quad \frac{4}{y^2} = \frac{1}{tg^2x} + tg^2x - 2.$$

$$\text{Отже,} \quad f(y) = tg^4x + ctg^4x =$$

$$= \left(\frac{1}{tg^2x} + tg^2x \right)^2 - 2 = \left(\frac{4}{y^2} + 2 \right)^2 - 2 = \frac{16}{y^4} + \frac{16}{y^2} + 2.$$

Позначимо тепер $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = b$. Тоді, враховуючи, що $a + b = 1$, після елементарних перетворень одержимо

$$f(\sin x) + f(\cos x) = 4 \left(\frac{2}{ab} - 1 \right)^2.$$

Оскільки $ab = \frac{1}{4} \sin^2 2x \leq \frac{1}{4}$, то

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 4 \left(\frac{2}{0,25} - 1 \right)^2 = 196.$$

11.1. Сума кубів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. При непарних n ця сума є непарною, а при парних – ділиться на 4. А отже, вона не може дорівнювати числу, записаному лише двійками, яке є парним і на 4 не ділиться.

11.2. За властивістю кута між хордою і дотичною $\angle BDA = \angle BCD$. Оскільки чотирикутник $CFKD$ вписаний, то $\angle BCD = \angle FKD$. Отже, $\angle BDA = \angle FKD$, а значить, $BD \parallel FK$.

11.3. Нехай $f(x) = \sin 1999x + \sin ax + \sin bx \equiv 0$.

Тоді також $f'(x) = 1999 \cos 1999x + a \cos ax + b \cos bx \equiv 0$

та $f''(x) = -1999^3 \cos 1999x - a^3 \cos ax - b^3 \cos bx \equiv 0$.

Поклавши в двох останніх тотожностях $x = 0$, одержимо систему рівнянь $1999 + a + b = 0$ та $1999^3 + a^3 + b^3 = 0$.

З першого рівняння знаходимо $(a+b)^3 = -1999^3$.

Віднявши тепер друге рівняння, отримуємо, що $ab = 0$. Отже, маємо два розв'язки: $a = 0, b = -1999$ та $a = -1999, b = 0$. Перевірка показує, що вони обидва задовольняють умову задачі.

11.4. Із нерівності Коші та рівнянь системи випливає, що $12 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot zx}$, тобто $xyz \leq 8$, і $xyz = 2 + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{2xyz}$, тобто $xyz \geq 8$. Отже, $xyz = 8$, причому рівність досягається тільки при $x = y = z = 2$, які і є розв'язками заданої системи.

11.5. Всього можна утворити $C_6^3 = 20$ різних трьохелементних множин. Розглянемо разом із вибраними множинами A_i їх доповнення. Разом отримаємо 18 множин. Отже, знайдеться така множина C , яка не співпадатиме з жодною множиною A_i та з жодним доповненням до A_i . Зрозуміло, що таку ж властивість матиме і множина $X \setminus C$. Тоді до кожної з множин A_i входять як елементи множини C , так і елементи $X \setminus C$. Залишається тільки пофарбувати всі елементи множини C в один колір, а елементи її доповнення – в інший.

2 0 0 1 р і к

7.1. Оскільки сума трьох відстаней від B до A , від A до D , від D до C дорівнює відстані від B до C , то ці пункти лежать на одній прямій у наступному порядку: B, A, D, C . Отже, $AC = AD + DC = 220$ км.

7.2 . Легко побачити таке очевидне представлення: $111111 = 3 \times 33333 + 3 \times 3333 + 3 \times 333 + 3 \times 33 + 5 \times 3$. Звідси маємо 17 доданків. Якщо би кількість доданків якогось з перших чотирьох типів була меншою за 3, то від цього загальна кількість доданків лише збільшилась би. Зрозуміло також, що їх не може бути і більше за 3.

7.3. а) Так. Змістимо спочатку білі шашки з другого рядка у перший, а з третього у четвертий. Потім чорні шашки – з першого рядка у другий, а з четвертого – у третій. Наступні 8 ходів витратимо для пересування білих шашок вдовж рядків вправо, а чорних шашок – вліво. Ще два ходи будуть потрібні, щоб у кожному рядку стало по одній білій та по одній чорній шашці. І, нарешті, два останні ходи білими шашками вправо, а чорними вліво приведуть до потрібної конфігурації.

б) Ні. Поставимо у відповідність кожній шашці номер стовпчика, у якому вона знаходиться. Спочатку сума таких номерів дорівнювала 21. При вказаних переміщеннях така сума або не змінюється, або змінюється на 2, а отже, весь час залишається непарною. Тому вона не зможе стати рівною 6, що відповідає всім чорним шашкам у першому стовпчику.

7.4. В обох випадках – так. Додаємо до наявних чисел число 0, квадрат якого не вплине на вказані суми. Легко бачити, що $0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2$. Крім того, при кожному натуральному n справедлива рівність

$$\begin{aligned} & (8n)^2 + (8n+3)^2 + (8n+5)^2 + (8n+6)^2 = \\ & = (8n+1)^2 + (8n+2)^2 + (8n+4)^2 + (8n+7)^2. \end{aligned}$$

Отже, для досягнення потрібної рівності для суми квадратів достатньо буде включати у першу групу числа вигляду $8n, 8n+3, 8n+5, 8n+6$, а другу – числа $8n+1, 8n+2, 8n+4, 8n+7$, де $n \in \mathbb{Z}_+$. Зайвий уже тепер нуль можна відкинути. Залишилось лише врахувати, що і 15, і 999 при діленні на 8 дають остачу 7.

8.1. З умови випливає, що $x \geq 0$. Тому рівняння зводиться до такого $|x-2| = x$. З нього знаходимо $x = 1$.

8.2. Нехай x – довжина половини шляху між заданими пунктами у кілометрах. Тоді середня швидкість на всьому шляху дорівнюватиме $\frac{2x}{x/4 + x/6} = 4,8$ (км/год). Оскільки у зворотному напрямі

турист частину шляху рухався зі швидкістю, більшою за середню швидкість у напрямі від A до B , то затратити на зворотний шлях більше часу, ніж на шлях від A до B , він не міг. Таким чином дана задача, запропонована Міністерством освіти України, виявилася некоректною.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати аналогічну задачу при умові, що на зворотний шлях турист затратив на дві хвилини менше, ніж на шлях від A до B . (Відповідь: 12 км).

8.3. Якщо число n при діленні на 3 дає остачі 0, 1, 2, то число n^3 при діленні на 9 матиме відповідно остачі 0, 1, 8. Отже, ліва частина рівності при діленні на 9 може мати лише остачі 0, 1, 2, 7, 8. Тому вона не може дорівнювати числу 2001 з остачею 3 від ділення на 9.

8.4. Проведемо через центр O_1 даного квадрата відрізки $M_1N_1 \parallel MN$ та $P_1Q_1 \parallel PQ$ з кінцями на сторонах квадрата. Тоді

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{AM_1O_1Q_1} + P_{CP_1O_1N_1} = P_{BM_1O_1P_1} + P_{DQ_1O_1N_1} = P_{BMO_1P} + P_{DQO_1N}.$$

8.5. Не зможе. Купі із n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n . Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k відповідно, і два прямокутники зі сторонами m та k . Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk , яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі

початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою виявиться площа $\frac{1}{2} \cdot 2001^2 - \frac{1}{2} \cdot 2001 = 1000 \cdot 2001$ і вона не залежить від порядку зроблених ходів.

9.1. Зрозуміло, що $a > 0, b > 0$. Тому знаки модуля можна опустити і, після зведення лівої частини до спільного знаменника, скоротити на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. У результаті отримаємо нерівність $\frac{a - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \geq 1$, яка рівносильна очевидній нерівності $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

9.2. Якщо $y < 0$, то $[y] \leq -1$. Тоді $[x] = 1 - [y] \geq 2$. Отже, $x \geq 2$, звідки випливає нерівність $x|x| + y|y| = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \geq 2([x] + [y]) = 2$, яка суперечить першому рівнянню. Аналогічно доводимо, що не може бути $x < 0$. Але тоді $0 \leq x \leq 1$ та $0 \leq y \leq 1$, причому на основі другого рівняння хоч одне з цих чисел не менше одиниці. Звідси знаходимо $x = 1, y = 0$ та $x = 0, y = 1$.

9.3. Нехай фіксованими є точки A та B , а точка C рухається по колу. Тоді точка перетину медіан трикутників ABC утворюється за допомогою гомотетії з центром у середині відрізка AB та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Отже шуканим геометричним місцем точок є образ кола з виколотими точками A та B при вказаній гомотетії, тобто також коло з двома виколотими точками.

9.4. Якщо рухати один з квадратів паралельно до сторін іншого квадрата, то кут між вказаними

діагоналями восьмикутника змінюватися не буде. За допомогою двох таких взаємно перпендикулярних переміщень можна добитися, щоб центри обох квадратів співпали між собою. Оскільки при повороті на 90^0 навколо спільного центра кожен квадрат переходить сам у себе, то при такому повороті діагональ BD перейде у діагональ B_1D_1 . А отже, ці діагоналі перпендикулярні.

9.5. До сторін квадрата прилягають 28 його клітинок. Легко переконатися, що вказані фігурки зможуть покрити не більше восьми з них. Отже, принаймні 20 прилягаючих до границі клітинок вирізаними не будуть. Решти 44-ьох клітинок дошки вистачить не більше, як на 8 фігурок. Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що 8 фігурок вирізати вдасться.

$$10.1. \text{ Оскільки } \sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

та $(k+1)^2 - (k+1) = k^2 + k$, то після очевидних спрощень рівняння запишеться у вигляді $\cos(n^2 + n)x = -1$. Звідси

$$\text{знаходимо } x = \frac{(2m+1)\pi}{n^2 + n}, m \in Z.$$

10.2. а). Безпосереднім обчисленням переконуємося, що $a(k-1)a(k) = a(k^2) \in S$.

б). Твердження задачі випливає з нерівності

$$a(m^2 - 2) = m^4 - 3m^2 + 3 < m^4 - 3m^2 + 9 = a(m-2)a(m+1) < < m^4 - m^2 + 1 = a(m^2 - 1) \quad \text{при} \quad n = m - 2 > 2001, \\ k = m + 1 > 2001.$$

10.3. Дана нерівність рівносильна такій очевидній нерівності $\left(a - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{e}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{e}{2}\right)^2 \geq 0$.

10.4. Проведемо діагональ CE . Оскільки чотирикутник $ABCE$ вписаний, то $\angle BAE = \angle QCE$. Оскільки прями AB та PQ паралельні, то $\angle BAE + \angle QPE = 180^\circ$. Отже, також $\angle QCE + \angle QPE = 180^\circ$. Тому навколо чотирикутника $CQPE$ можна описати коло. Звідси випливає, що $\angle PCQ = \angle PEQ$, а отже, $\angle BCD = \angle AED$. Тоді $AD = BD$.

10.4. Припустимо, що таке перефарбування можливе. Для конкретності будемо вважати, що спочатку чорною була вершина A_1 правильного 2001-кутника $A_1A_2\dots A_{2001}$. Позначимо через a_k кількість разів, при яких відповідна вершина A_k вибиралася центральною у вказаних перефарбуваннях. Нехай

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}).$$

Оскільки колір вершини змінювався тоді і тільки тоді, коли центральною обиралася дана вершина або сусідня з нею, то суми, записані у круглих дужках, чисельно дорівнюють загальній кількості змін кольору у вершинах $A_2, A_5, \dots, A_{2000}$ відповідно, а отже, будуть парними числами. Адже колір у всіх цих вершинах має залишитися білим, як і на початку, а кожне перефарбування змінює колір на протилежний. Тому і сума S має бути парною. З іншого боку, дана сума записується у вигляді

$$S = (a_{2001} + a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots + (a_{1998} + a_{1999} + a_{2000}).$$

Оскільки колір у вершині A_1 має змінитися з чорного на білий, то отримаємо, що тут у перших дужках сума буде непарною, а в усіх інших дужках – парною. Адже колір у вершинах A_4, \dots, A_{1999} має залишитися білим. А отже, S повинна бути непарною. Отримане протиріччя доводить, що вказане перефарбування неможливе.

11.1. Див. розв'язання задачі 10.1.

11.2. Із заданої рівності випливає, що
$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}}$$

при всіх $n \geq 2$. Звідси отримуємо, що
$$\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{a_3}{a_2 a_1} = 2,$$

$a_{n+1} = 2a_n a_{n-1}$ при всіх $n \geq 2$. Тому всі члени цієї послідовності є натуральними числами. Крім того, числа

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2a_{n-1}$ є парними. Отже,
$$a_{2001} = \frac{a_{2001}}{a_{2000}} \cdot \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

ділиться на 2^{2001} .

11.3. Покладемо у даному функціональному рівнянні послідовно $y = -f(x)$ та $y = x^2$. Тоді

при всіх $x \in R$ виконуватимуться рівності:
 $f(x^2 + f(x)) = 4(f(x))^2$ та $f(x^2 + f(x)) = 4x^2 f(x)$.

Прирівнявши при $x=0$ праві частини цих рівностей, одержимо $f(0) = 0$. Оскільки $f(x)$ не може дорівнювати нулю при інших x , то із рівності правих частин випливатиме, що $f(x) = x^2$ при $x \neq 0$. Перевірка показує, що функція $f(x) = x^2$, $x \in R$, задовольняє дане рівняння.

11.4. Нехай B – проекція точки A на пряму l . Проведемо пряму m на відстані AB від прямої l . Якщо $N \in m$, і площа ABN перпендикулярна до прямої l , то

спільний перпендикуляр до прямих l та AN є одночасно висотою і медіаною рівнобедреного трикутника ABN . Якщо ж $M \in m$ і не співпадає з точкою N , то проведемо площину, перпендикулярну до l , через точку L – середину відрізка MN . Нехай O та P є відповідно точками перетину цієї площини з прямими l та AM . Тоді $OP \perp l$. Крім того, оскільки $AN \parallel PL$, то P – середина відрізка AM . Але $OA = ON = OM$, то OP є не лише медіаною, а й висотою рівнобедреного трикутника AOM . Таким чином, пряма m є шуканою.

11.5. Див. розв'язання задачі 10.5.

2 0 0 2 р і к

7.1. а). Оскільки $m < n$, то $1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n} < \frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1$. Отже, правильний дріб $\frac{m}{n}$ ближчий до одиниці, ніж неправильний дріб $\frac{n}{m}$.

б). $2002 = \left(\frac{n}{m} - 1\right) : \left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{n}{m}$. Отже, шуканою є, наприклад, пара дробів $\frac{1}{2002}$ та $\frac{2002}{1}$.

7.2. Принаймні три відзначені точки, наприклад, A, B, C , лежать на одній прямій. Якщо би відзначена точка D цій прямій не належала, то на прямих AD, BD, CD існувало би ще по одній з відзначених точок, відмінних від A, B, C, D . Але у такому разі всіх відзначених точок повинно бути не менше 7.

7.3. Можуть. Наприклад, якщо нанести поділки на відстанях 1 см, 2 см, 6 см та 10 см від одного з кінців лінійки.

7.4. Додавимо до заданих чисел ще одне число нуль. Зауважимо, що у кожній двадцятці чисел $20n, 20n+1, \dots, 20n+19$ пари $(20n, 20n+19)$, $(20n+2, 20n+17)$, $(20n+4, 20n+15)$, $(20n+6, 20n+13)$, $(20n+8, 20n+11)$ попадають до однієї групи, а пари $(20n+1, 20n+18)$, $(20n+3, 20n+16)$, $(20n+5, 20n+14)$, $(20n+7, 20n+12)$, $(20n+9, 20n+10)$ – до іншої. Оскільки у кожній зі цих пар суми чисел однакові, то для кожної двадцятки суми чисел, які попали у різні групи, також будуть однаковими. Отже, достатньо розглянути лише числа 2000, 2001 та 2002. Зрозуміло, що у такому разі сума всіх чисел другої групи буде на $2000 + 2002 - 2001 = 2001$ більшою, ніж сума всіх чисел першої групи. Додавлене нами число нуль на цю різницю не впливає.

8.1. Нехай було n годинників вартістю x . Тоді $nx - 13n = 54$, $18n - nx = 81$. Додавши ці рівняння, одержимо $5n = 135$, $n = 27$. Тоді $x = 15$.

8.2. Справді, такими є, наприклад, всі числа $k = m^3 n^2$, де $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Для них одержимо, що $nk + 1 = (mn)^3 + 1 = (mn + 1)(m^2 n^2 - mn + 1)$ – складене число. Зауважимо, що $m = 1$ не підійде для $n = 1$.

8.3. Нехай AM – медіана, BH – висота, CK – бісектриса, S, Q, P є відповідно точками перетину відрізків AM та BH , CK та BH , CK та AM . Якщо $\angle SQP = 60^\circ$, то $\angle QCH = 30^\circ$, $\angle A C B \neq \emptyset$ Якщо

$\angle QSP = 60^\circ$, то $\angle ASH = 60^\circ$, $\angle SAH = 30^\circ$, $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle AMC = 90^\circ$. Отже, AM є також висотою. А тому $AB = BC$ і, оскільки $\angle ACB = 60^\circ$, то трикутник ABC рівносторонній. Але у такому разі точки P, Q, S співпадають. Отримали протиріччя. Отже, трикутник PQS не може бути рівностороннім.

$$\begin{aligned}
 8.4. \text{ Справді, } & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2002} \right) = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1001} \right) = \\
 & = \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2002}.
 \end{aligned}$$

8.5. Найлегший камінь важить $468 - 49 \times 2 = 370$ (кг). Але $370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016 > 3000$, то на одну автомашину можна завантажити не більше 7 каменів. У такому разі необхідно буде не менше 8 вантажівок. Їх вистачить, якщо на перші 6 із них вантажити по 6 каменів у порядку спадання їхньої ваги, а на дві останні – по 7 каменів. Справді, $6 \times 468 < 3000$, $7 \times 396 < 3000$. Тут враховано, що перші 36 каменів не важчі за 468 кг, а 14 останніх – не важчі за 396 кг.

9.1. Нехай у цих садках було відповідно x_1, x_2, x_3, x_4 та x_5 дерев. Тоді $x_1 + x_2 = 9$, $x_2 + x_3 = 13$, $x_3 + x_4 = 19$, $x_4 + x_5 = 11$, $x_5 + x_1 = 16$. Додавши ці рівності, знайдемо $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34$. Але, віднімаючи тепер третє та п'яте рівняння, будемо мати, що $x_2 = -1$. Отже, Петрусь помилився у своїх підрахунках.

9.2. Могли. Наприклад, якщо x – корінь рівняння $x^2 - 2001 = x$. Тоді на кожному кроці отримуватимемо початкове число.

9.3. Оскільки $0 < a < b + c$, $0 < b < c + a$, $0 < c < a + b$, то $a^2 < (b + c)a$, $b^2 < (c + a)b$, $c^2 < (a + b)c$. Залишилось додати три останні нерівності.

9.4. Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABCH$. Тоді $\angle MBP = 180^\circ - \angle ABC = \angle BCH$, $MB = AB = HC$, $PB = BC$. Отже, $\triangle MBP = \triangle HCB$. А оскільки точка O лежить на перетині діагоналей паралелограма $ABCH$, то $\angle BPM = \angle CBH = \angle CBO$.

9.5. Зможуть. Нехай доріжки утворюють трикутник ABC із середніми лініями MP , MK , PK , причому точка M лежить на AB , P – на BC , K – на AC . Розмістимо спочатку сторожів у точках M та P . Якщо мавпа на трикутнику MBP , то ловля очевидна. В іншому разі сторож із P рухається по PC , поки не опиниться із мавпою на одній прямій, паралельній до AC , а далі зберігає умову такої паралельності. Зрозуміло, що при цьому він не дасть мавпі втекти через точку P . Тепер сторож із M рухається по MK , поки не опиниться з мавпою на одній прямій, паралельній до AC , чи, якщо мавпа знаходиться на відрізку AK , - паралельній до AB . Зрозуміло, що він заблокує мавпі втечу через точки M та K . Якщо тепер мавпа знаходиться на трикутнику AMK то сторожі мають змогу зібратись у точках M та K , а якщо мавпа на трикутнику PKC , то вони зосередяться у точках K та P . У кожному зі цих випадків мавпу легко ввіймати.

10.1. Розмалюємо таблицю у шаховому порядку. Тоді всі непарні числа опиняться у клітинках одного кольору, а всі парні – у клітинках іншого кольору. Відповідно у кожному стовпчику виявиться не більше

трьох непарних чисел. Оскільки 2 – єдине парне просте число, то більше чотирьох простих чисел в одному стовпчику опинитись не може. Такою є, наприклад, таблиця, в якій у третьому стовпчику зверху вниз записані числа 19, 2, 5, 8, 11.

$$\begin{aligned}
 10.2. \quad & \cos 20^\circ \cos 30^\circ \sin 50^\circ - \cos 10^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \\
 & = \frac{1}{2} ((\cos 50^\circ + \cos 10^\circ) \sin 50^\circ - \cos 10^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ)) = \\
 & = \frac{1}{2} (\cos 50^\circ \sin 50^\circ + \cos 10^\circ \cos 120^\circ) = \frac{1}{4} (\sin 100^\circ - \cos 10^\circ) = 0.
 \end{aligned}$$

10.3. Нехай у трапеції $ABCH$ більша основа $AH = a$, менша основа $BC = b$, відрізок $MK = x$ ділить площу трапеції пополам. Продовжимо сторони AB та CH до їх перетину у точці P . Трикутники APH , MPK та BPC гомотетичні. Тому $S_{\triangle APH} = ka^2$, $S_{\triangle MPK} = kx^2$, $S_{\triangle BPC} = kb^2$ при деякому k . Оскільки площі трапецій $AMKH$ та $MBCK$ рівні між собою, то $ka^2 - kx^2 = kx^2 - kb^2$. Звідси отримуємо $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

10.4. $f(f(1)) + (f(1))^2 = 7$. Отже, $1 \leq f(1) \leq 2$. Якщо $f(1) = 1$, то $f(1) + 1^2 = 7$, $f(1) = 6$. Протиріччя. Отже, $f(1) = 2$. Тоді $f(2) + 2^2 = 7$, $f(2) = 3$. Припустимо, що $f(n) = n + 1$. Для $n = 1$ та $n = 2$ це вірно. Якщо вірно для $n = k$, то $f(k+1) + (k+1)^2 = k^2 + 3k + 3$, $f(k+1) = k + 2$. Отже, $f(n) = n + 1$ для всіх $n \in N$.

10.5. Досить довести, що у кожній групі сума квадратів перемог усіх команд групи дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Справді, якщо у групі була $n+1$ команда, то одержимо, що $V_1^2 + \dots + V_{n+1}^2$ - сума квадратів їхніх перемог, а $(n - V_1)^2 + \dots + (n - V_{n+1})^2$ -

сума квадратів їхніх поразок. Різниця між такими сумами $2n(V_1 + \dots + V_{n+1}) - (n+1)n^2 = 2n \frac{(n+1)n}{2} - (n+1)n^2 = 0$,

оскільки сума всіх перемог дорівнює сумі всіх зіграних у групі ігор. Таким чином, виділена статистична характеристика не залежить від кількості команд, які беруть участь у змаганнях.

$$11.1. \text{ Попередньо спрощуємо вираз } \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \\ = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1| = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1}, & 1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x-1} - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Тепер побудова графіка очевидна.

11.2. Задана система рівнянь рівносильна наступній: $(x+1)(y+1)=2$, $(y+1)(z+1)=1001$, $(z+1)(x+1)=2002$. Перемножуючи ці рівняння, одержимо $(x+1)(y+1)(z+1) = \pm 2002$. Отже, $x+1 = 2$, $y+1 = 1$, $z+1 = 1001$ або $x+1 = -2$, $y+1 = -1$, $z+1 = -1001$. Звідси знаходимо два розв'язки: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1000$ та $x = -3$, $y = -2$, $z = -1002$.

11.3. Зауважимо, що вписані кути, які спираються на дуги AB , BC , CE , EA є гострими. Тому центр кола знаходиться всередині чотирикутника $ABCE$. Оскільки

$$\angle BAC + \angle ABE = 90^\circ, \quad \text{то} \quad S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} R^2 \sin \angle BOC = \\ = \frac{1}{2} R^2 \sin 2 \angle BA = \frac{1}{2} R^2 \sin 2 \angle ABE = \frac{1}{2} R^2 \sin \angle AOE = S_{\triangle AOE}.$$

Так само доводимо рівність площ трикутників AOB та COE .

11.4. Нехай AB – найбільше ребро цієї піраміди. Тоді $(AC + AE - AB) + (BC + BE - AB) = (AC + BC - AB) + (AE + BE - AB) > 0$. А отже, вірною є хоч одна з нерівностей $AC + AE > AB$ чи $BC + BE > BA$. Тобто або A , або B задовольняють сформульоване твердження.

11.5. Число, виписане тричі, є спільним дільником або лише пари (a, c) , або лише пари (b, d) . У першому випадку воно є також дільником числа $a + c = 3 \cdot 2^{2001}$. Оскільки a та c непарні, то таким дільником може бути лише число 3, бо число 1 виписувалось 4 рази. Аналізуючи остачі степенів двійки від ділення на 3, легко перевірити, що a, c, d на 3 діляться, а b - ні. У другому випадку це число має бути також дільником числа $d - b = 4025 = 25 \cdot 7 \cdot 23$. Але b та d не діляться ні на 25, ні на 7, ні на 23. Проте a, b, d діляться на 5, а c на 5 не ділиться. Отже, 3 та 5 – два числа, які були виписані учнем на дошці рівно 3 рази.

2 0 0 3 р і к

7.1. Не могло, бо у кожній парі кількість горіхів ділиться на 3, а число 2003 на 3 не ділиться.

7.2. Оскільки спочатку інших дерев був 1%, а після рубки сосен їх мало стати 2%, то загальна кількість дерев зменшиться вдвічі. Отже, ліспромгосп має намір вирубати половину лісу.

7.3. Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через x (км). Тоді

$$\frac{x}{15} + \frac{x}{30} = 4, \quad x = 40 \text{ км.}$$

7.4. Помиляється. Розглянемо трикутник ABC , в якому $\angle A = 30^\circ, \angle C = 90^\circ$. Нехай M – середина AB , $MK \perp AB, K \in AC$. Тоді трикутники AMK, BMK, BCK рівні між собою. Обґрунтування очевидні.

8.1. Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y) = p^{2003}$ і покладемо $x - y = p^k, x + y = p^{2003-k}$, де $k = 1, 2, \dots, 1001$.

Тоді $x = \frac{p^{2003-k} + p^k}{2}$, $y = \frac{p^{2003-k} - p^k}{2}$ - шукані розв'язки у натуральних числах. Зауважимо, що для $p \neq 2$ існує ще один такий розв'язок при $k = 0$.

8.2. З умови задачі випливає, що 9 великих і 3 малі рибки сьогодні коштують стільки ж, як 15 великих вчора, а 10 великих і 5 малих сьогодні – стільки ж, як 15 великих і 5 малих вчора. Отже, 1 велика і 2 малих сьогодні коштують стільки ж, як 5 малих вчора.

8.3. Спочатку Петрусь повинен поставити знак „-” перед n^3 , а потім у кожній парі (n^2, n^4) , (n^5, n^7) , (n^6, n^8) ставити знак, протилежний до того, який поставив Миколка. Справді, $n^{k+2} - n^k = n^{k-1} \cdot (n-1)n(n+1) : 6$ при всіх натуральних n . Обґрунтування очевидні.

8.4. $AM = \frac{2}{3} AD = 4$, $AE = EC = 4$. Отже, $AM = AE = EC$. Тому $\angle AME = \angle AEM$, $\angle AMB = \angle CEF$. Також $BF = MF = ME$, а значить, $BM = FE$. Отже, $\triangle AMB = \triangle CEF$, $CF = AB = 5$.

9.1. Оскільки рівняння не мають дійсних коренів, а коефіцієнти при x^2 додатні, то для всіх дійсних x їх ліві частини набувають лише додатних значень. Зрозуміло, що аналогічну властивість матиме і ліва частина рівняння, одержаного в результаті додавання. А отже, воно також не матиме дійсних коренів.

9.2. Нехай a – об'єм трави на лузі до випасання, x – об'єм трави, яку спасає за 1 день одна корова, y – об'єм трави, яка виростає на лузі за 1 день. Тоді $30x \cdot 4 = a + 4y$, $25x \cdot 6 = a + 6y$. Віднімаючи ці рівності, знаходимо $y = 15x$. Отже, безперервно на лузі може пастися не більше, як 15 корів.

9.3. Зауважимо, що відношення найбільшого з чисел, які можна утворити таким чином, до найменшого менше за 4. Крім того, сума цифр кожного з таких чисел при діленні на 3 дає остачу 2. Тому такі ж остачі даватимуть і самі числа. Оскільки рівності $3n + 2 = 3(3k + 2)$ та $3n + 2 = 2(3k + 2)$ при натуральних n та k виконуватися не можуть, то і утворені таким чином два різні числа не можуть ділитися одне на одне.

9.4. Оскільки $\angle ABC = 60^\circ$, то $\angle BAC + \angle ACB = 120^\circ$, $\angle OAC + \angle OCA = 60^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$.

Отже, отримуємо $\angle DBE + \angle DOE = 180^\circ$, і навколо чотирикутника $BEOD$ можна описати коло. Але $\angle OBE = \angle OBD$, то і хорди OE та OD цього кола рівні.

10.1. Сума всіх записаних на сторонах десятикутника чисел дорівнює подвоєній сумі чисел, записаних у його вершинах, тобто дорівнює 110. Але, якщо би всі такі суми закінчувалися різними цифрами від 0 до 9 включно, то остання цифра вказаної суми була би 5, а не 0.

10.2. Справді, $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot \dots \cdot 2002 =$
 $= 1001! + (2003 - 1001)(2003 - 1000) \cdot \dots \cdot (2003 - 1) =$
 $= 1001! + 2003 \cdot n - 1001! = 2003 \cdot n$, де n – деяке ціле число.

10.3. Нехай $y + z - x = t$. Тоді $z + x - y = 3t$,
 $x + y - z = 5t$, $xuz = 6t$. Додавши перші три рівності,
знайдемо $x + y + z = 9t$. Віднімаючи тепер по черзі
перші три рівняння, одержимо $x = 4t$, $y = 3t$, $z = 2t$. Отже,

$4t \cdot 3t \cdot 2t = 6t$. Тому $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = -\frac{1}{2}$. Звідси

відповідно маємо розв'язки: $(0, 0, 0)$, $(2, \frac{3}{2}, 1)$, $(-2, -\frac{3}{2}, -1)$.

10.4. Оскільки $\angle CKM = \angle CPM = 90^\circ$, то навколо чотирикутника $CKMP$ можна описати коло з діаметром

CM. Тоді для будь-якого розташування точки *M* на *AB* маємо $\angle KCP + \angle KMP = 180^\circ$. Отже, $\angle KMP = const$. Зрозуміло, що довжина хорди *KP* вказаного кола буде найменшою, якщо найменшим буде діаметр такого кола, тобто, якщо точка *M* є основою висоти *CM* трикутника *ABC*. Оскільки трикутник гострокутний, то $M \in AB$.

11.1. Розмалюємо трикутники, з яких складається багатокутник, у два кольори так, щоб будь-які два трикутники зі спільною стороною були різного кольору. Оскільки з кожної вершини виходить парне число діагоналей, то всі трикутники, які прилягають до сторін багатокутника, будуть одного кольору. Отже, різниця між кількістю всіх сторін трикутників цього кольору і кількістю всіх сторін трикутників іншого кольору буде дорівнювати *n*. Оскільки така різниця ділиться на 3, то і *n* ділиться на 3.

11.2.

$$\begin{aligned} \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) &\Rightarrow \operatorname{tg} \angle C = -\frac{\operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B}{1 - \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \angle A + \operatorname{tg} \angle B + \operatorname{tg} \angle C = \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C. \end{aligned}$$

Нехай для конкретності $\operatorname{tg} \angle A \leq \operatorname{tg} \angle B \leq \operatorname{tg} \angle C$. Тоді $\operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \cdot \operatorname{tg} \angle C \leq 3 \operatorname{tg} \angle C$, $1 < \operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B \leq 3$. Оскільки тангенси кутів є натуральними числами, то звідси простим перебором знаходимо $\operatorname{tg} \angle A = 1, \operatorname{tg} \angle B = 2, \operatorname{tg} \angle C = 3$.

11.3. Зрозуміло, що найменше значення досягається при $x \geq 0$. Побудуємо прямокутний трикутник *ABC*, в якому $AC = BC = 1$, і з вершини *C* проведемо відрізок *AH* = *x* під кутами 60° та 30° до катетів. За теоремою косинусів знайдемо, що $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} = AH + BH \geq AB = \sqrt{2}$, причому

рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $X \in AB$.
Отже, $\sqrt{2}$ - найменше значення цього виразу.

11.4. Не обов'язково. Припустимо, що острови $A_1, A_2, \dots, A_{2003}$ послідовно сполучені між собою мостами і, крім того, ще один міст з'єднує острови A_1 та A_3 . Якщо острів A_2 не заселений, на острові A_1 проживає одна особа, і з нею дружать всі інші жителі міста, закритим виявився міст між островами A_1 та A_3 , то слова кожного із жителів міста можуть бути правдою. Відзначимо, що якщо вважати всі острови заселеними, то можна довести, що справді хтось помилився у своїх підрахунках.

$$11.5. \text{ Справді, } \frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{h_a}{H_a} + \frac{h_b}{H_b} + \frac{h_c}{H_c} = \\ = \frac{S(BCM)}{S(ABC)} + \frac{S(CAM)}{S(ABC)} + \frac{S(ABM)}{S(ABC)} = 1,$$

де $h_a, h_b, h_c, H_a, H_b, H_c$ - висоти, а $S(***)$ - площі відповідних трикутників.

2 0 0 4 р і к

7.1. Послідовно отримуємо $|4|x| - 3| = 5$
($|4|x| - 3| = -1$ не задовольняє), $4|x| = 8$ ($4|x| = -2$
не задовольняє), $x = \pm 2$.

7.2. Оскільки автомобіль наздогнав велосипедиста рівно посередині шляху, то у селище B він прибув на 15 хвилин раніше, ніж велосипедист. Отже, останньому на третину шляху потрібно 15 хвилин, а на весь шлях від A до B - 45 хвилин.

7.3. З умови задачі випливає, що $\angle CBE = \angle CEB, \angle DEA = \angle DAE$. Отже, отримуємо, що $\angle OEB + \angle OBE = \angle CBA + \angle CAB = 90^\circ$. Тому $\angle BOE = 90^\circ$, а значить, і $\angle DOE = 90^\circ$.

7.4. Учитель міг міркувати, наприклад, так: якщо би кожне викреслене слово записали рівно два учні, то, оскільки обидва вони викреслюють дане слово, загальна кількість викреслених слів у трьох списках мала бути парною, а отже, зі 150 записаних слів мала залишитися парна їх кількість. Але, згідно з умовою, їх залишилося $23+32+26=81$.

7.5. Наприклад,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.$$

7.6. При перестановці цифр місцями їх сума не змінюється. Тому при діленні на 3 всі записані числа дають однакові остачі. Отже, якщо серед вибраних цифр немає нуля, то сума шести чисел, які можна утворити перестановками даних цифр, повинна ділитися на 3, а значить, не може дорівнювати 3376. Якщо ж одна з вибраних цифр є нулем, то приходимо до рівності $\overline{ab0} + \overline{a0b} + \overline{ba0} + \overline{b0a} = 211(a+b) = 3376$. Отже, $a+b=16$, і, оскільки всі вибрані цифри є різними, то дві інші цифри – це 7 та 9.

7.7. Занумеруємо фішки зліва направо цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Для забезпечення перемоги першому гравцеві достатньо спочатку пересунути фішку №5 у крайнє праве положення, а потім весь час пересувати фішку з непарним номером впритул до тієї фішки з парним номером, яку перед цим пересунув його суперник. Зрозуміло, що при цьому раніше вичерпаються ходи у другого гравця.

8.1. Після розкриття модуля отримаємо $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, $x > 0$. Побудова графіка очевидна.

Пропонуємо читачам намалювати його самостійно.

8.2. Нехай A та B – гострі кути трикутника ABC , $BC = a$, $AC = b$. Тоді $tgA = ctgB = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\angle A < \angle B$, $tg \angle B = \frac{b}{a} = 2$.

8.3. $n^4 - 22n^2 - 46 = (n^2 - 25)(n^2 + 3) + 29$. Це число ділиться на $n + 5$, якщо $n + 5$ є дільником числа 29. Отже, $n = 24$.

8.4. Скориставшись формулами для суми та різниці кубів, отримаємо

$$A + B = \frac{(185 - 158)(158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2)}{343 \cdot 27} + \frac{(185 + 158)(158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2)}{343 \cdot 27} = \frac{2 \cdot 185^3}{21^3}.$$

Тоді $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = \left(\frac{185}{21}\right)^3$, звідки знаходимо $x = 5$.

8.5. Друге твердження не може бути вірним, бо у такому разі число B мало би закінчуватися на 1, $B + 41$ – на 2, $B - 48$ – на 3, а отже, жодне з двох інших тверджень не було би вірним. Тому $B + 41 = x^2$ та $B - 48 = y^2$ – квадрати натуральних чисел. Тоді $x^2 - y^2 = 89$, $(x - y)(x + y) = 89$, $x - y = 1$, $x + y = 89$, $x = 45$, $y = 44$.
Отже, $B = 44^2 + 48 = 1984$.

8.6. Продовжіть одну зі сторін заданого кута і скористайтесь рівностями $35^\circ : 7 = 5^\circ = 180^\circ - 5 \cdot 35^\circ$.

Можна також від однієї сторони кута відкласти кут 30° . Побудови очевидні.

8.7. Нехай P – середина AM . Оскільки $\angle ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$, то $BK = AP = PM = PB$. Отже, $\angle ABP = \angle BAP = 24^\circ$, $\angle B K P = \angle B A P$. Звідси послідовно знаходимо $\angle PBK = 84^\circ$, $\angle ABK = 108^\circ$, $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$.

9.1. Враховуючи область визначення для функції $y = \sqrt{2-x}$, отримаємо, що $x \leq 2$. Оскільки $x^5 + x^3 + x - 42 < 2^5 + 2^3 + 2 - 42 = 0$ для $x < 2$, то залишається безпосередньою перевіркою переконатися, що $x = 2$ – єдиний корінь даного рівняння.

9.2. Зафіксуємо довільну з цих точок і проведемо серединні перпендикуляри до відрізків, які сполучають дану точку з трьома іншими. Область, обмежена цими перпендикулярами, яка містить фіксовану точку, і є шуканою для даної точки. Аналогічно поступаємо для інших трьох точок.

9.3. Розглянемо функцію $y = (x-a)(x-b)$. З умов задачі випливає, що $x_0 > \max\{a, b\}$ та $y(3) > c$. Отже, залишається проаналізувати наступні варіанти:

а) $a = b = 1$. Тоді $y(3) = 4, c < 4$. Звідси знаходимо $c = 1 \Rightarrow x_0 = 2, c = 2 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2}, c = 3 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{3}$;

б) $a = 1, b = 2$ чи $a = 2, b = 1$. Тоді $y(3) = 2, c = 1, x_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$;

в) $a = b = 2$. Тоді $y(3) = 1$, а отже, рівняння потрібного кореня не має.

9.4. Зрозуміло, що числа $6n$ та $9n$ мають бути трицифровими, а число $13n$ – чотирицифровим. Отже, $77 \leq n \leq 111$. Оскільки $6n + 9n + 13n = 28n$, а сума всіх десяти цифр ділиться на 9, то і число n має ділитися на 9. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що із чисел 81, 90, 99, 108 підходить тільки $n = 81$. Для нього $6n = 486, 9n = 729, 13n = 1053$.

9.5. Не завжди. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п'ятого та сьомого стовпців шахівниці у синій колір. При цьому отримаємо 72 вершини клітинок, з яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбовуваннях вона залишатиметься непарною, а отже, кількість вершин, з яких виходять сині відрізки, зменшитися не може. Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за $72:2=36=144:4$.

9.6. Оскільки з умови задачі випливає, що $0 = (ax + by + cz)(x + y + z)$, то досить довести нерівність $\sqrt{ab}xy + \sqrt{bc}yz + \sqrt{ca}zx \leq ax^2 + by^2 + cz^2$. А вона рівносильна нерівності

$$(\sqrt{ax} - \sqrt{by})^2 + (\sqrt{by} - \sqrt{cz})^2 + (\sqrt{cz} - \sqrt{ax})^2 \geq 0,$$

яка є очевидною.

9.7. З властивостей вписаного кола впливає такий процес відновлення трикутника ABC :

а) будуємо промінь HM , на якому лежить висота AN трикутника ABC ;

б) через точку H проводимо пряму $a = BC$, перпендикулярну до HM , на якій лежить сторона BC ;

в) будуємо коло, яке проходить через точки M , Q та дотикається до прямої a . Це можна зробити, скориставшись, наприклад, інверсією відносно кола з центром M і радіусом MQ , або враховуючи рівність добутку відрізків січної квадратові дотичної. В останньому випадку доцільно врахувати також, що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить останню на відрізки, добуток яких дорівнює квадратові висоти. Крім того, прямий кут, вписаний в коло, спирається на діаметр. Зауважимо, що таких кіл є два;

г) через центри O цих кіл проводимо прямі OQ . Те коло, для якого така пряма перетинає промінь HM , і буде колом, вписаним у трикутник ABC , а сама точка перетину – вершиною A цього трикутника;

д) з точки A проводимо дотичні до вписаного кола і на перетині їх з прямою a знаходимо вершини B та C .

10.1. Якщо припустити, що $\alpha > \beta$, то, враховуючи задані рівності та монотонність функцій косинус і тангенс для гострих кутів, послідовно отримаємо $\cos \alpha < \cos \beta$, $tg \beta < tg \gamma$, $\beta < \gamma$, $\cos \beta > \cos \gamma$, $tg \gamma > tg \alpha$, $\gamma > \alpha$, $\cos \gamma < \cos \alpha$, $tg \alpha < tg \beta$, $\alpha < \beta$, що суперечить зробленому припущенню. Аналогічно доводимо, що не може бути $\alpha < \beta$. Звідси, з врахуванням заданих рівностей, випливає, що $\alpha = \beta = \gamma$. Тоді

$$\cos \alpha = tg \alpha, \quad 1 - \sin^2 \alpha = \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Зрозуміло,

$$\text{що також } \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

10.2. Нехай $A = a^2 + a$, $B = a^3 + 2a$ - раціональні числа. Тоді $B = a(A + 3) - A$. Оскільки рівняння

$a^2 + a + 3 = 0$ не має дійсних коренів, то $A \neq -3$. Отже,
 $a = \frac{A+B}{A+3}$ - раціональне число.

10.3. Оскільки при непарних a, b, c значення всіх трьох виразів є парними числами, то вони, будучи квадратами парних чисел, мали би ділитися на 4. У такому разі кожне з чисел ab^3, bc^3, ca^3 при діленні на 4 повинно давати остачу 3. Але тоді їхній добуток, який дорівнює $(a^2b^2c^2)^2$ і є точним квадратом, також мав би давати остачу 3, що неможливо. Отже, всі три вказані числа одночасно точними квадратами бути не можуть.

10.4. З умови випливає, що $x[x] = 2004$. Нехай $[x] = n$. Якщо $n \geq 0$, то $n^2 < 2004 < (n+1)^2$, $n = 44$. Звідси $x = \frac{2004}{44} > 45$, що не задовольняє умову $x - [x] < 1$. Якщо ж $n < 0$, то $(n+1)^2 < 2004 < n^2$, $n = -45$,
 $x = -\frac{2004}{45} = -44\frac{8}{15}$.

10.5. Нехай висоти AA_1, BB_1 трикутника ABC перетинаються у точці H , точки K, P, Q – середини відрізків MN, AM, AN відповідно. Тоді $NP \parallel MC$, $BK = KM$, звідки випливає, що $\triangle HKN = \triangle A_1KM$, а тому HMA_1N – паралелограм. Отже, $A_1H = AH = \frac{1}{2}AA_1$,

$\frac{A_1C}{MC} = \frac{NC}{QC} = \frac{2}{3}$, а значить, $A_1C = \frac{1}{2}BB_1$. Тоді, враховуючи, що у прямокутних трикутників AA_1C та BB_1C кут C

спільний, отримаємо $\frac{A_1H}{BA_1} = \frac{A_1C}{AA_1}$, звідки випливає, що

$$\frac{1}{2}AA_1^2 = \frac{1}{2}BA_1^2, \text{ тобто } AA_1 = BB_1. \text{ Оскільки } \angle AA_1B = 90^\circ,$$

то $\angle ABC = 45^\circ$.

10.6. Оскільки при $v > 0$ виконується нерівність $\frac{u^2}{v} \geq 2u - v$, яка випливає з очевидної нерівності $(u - v)^2 \geq 0$, то різниця між лівою і правою частинами заданої в умові нерівності не менша за

$$\begin{aligned} & x(2x - y) + y(2y - z) + z(2z - x) + \\ & + x(2x - z) + y(2y - x) + z(2z - y) - \frac{x^2 + y^2 + z^2 + (x + y + z)^2}{2} = \\ & = \frac{3}{2} \left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

10.7. Доведемо, що всі непарні числа одного кольору, а всі парні – іншого. Припустимо, що є, наприклад, два числа n та $n + 2$ різних кольорів. Не зменшуючи загальності можна вважати, що n – синього, а $n + 2$ – жовтого кольору. Позначимо $n = s_1, n + 2 = g_1$. Оскільки чисел кожного з кольорів є безліч, то знайдеться пара сусідніх чисел $g_2 > g_1$ та $s_2 = g_2 + 1$ відповідно жовтого та синього кольорів, і аналогічна пара $g_3 > g_2$ та $s_3 = g_3 + 1$. Зауважимо, що $s_1 + s_2 + s_3 = g_1 + g_2 + g_3$. Наступні 2000 пар, кожна з яких знаходиться строго правіше від попередньої, утворимо за таким принципом: $g_4 = s_4 + 1, s_5 = g_5 + 1, g_6 = s_6 + 1,$

$s_7 = g_7 + 1, \dots, g_{2002} = s_{2002} + 1, s_{2003} = g_{2003} + 1$, де s_i - синього, а g_i - жовтого кольору. Позначимо тепер їх спільну суму

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{2003} = g_1 + g_2 + \dots + g_{2003} = M.$$

Тоді, згідно з умовою задачі, число M повинно бути зафарбоване як у синій, так і у жовтий кольори, що, зрозуміло, одночасно не можливо. Отримане протиріччя доводить, що кольори всіх чисел однієї парності співпадають. Оскільки число 1 – синього кольору, то 2004 – жовтого кольору.

11.1. Задане рівняння рівносильне такій системі

$$\begin{cases} x^2 + (a-4)x + 2 = 0, \\ x \geq 2. \end{cases} \quad \text{Якщо дискримінант квадратного}$$

рівняння $D < 0$, то дійсних коренів немає. Якщо $D = 0$, то $a = 4 \pm 2\sqrt{2}, x = \pm\sqrt{2}$ не задовольняють умову задачі. Якщо ж $D > 0$, то, враховуючи особливість графіка функції $f(x) = x^2 + (a-4)x + 2$, одержимо, що єдиність кореня $x > 2$ забезпечить умова $f(2) < 0$, з якої знайдемо $a < 1$. Крім того, єдиний корінь $x=2$ отримуємо при $a=1$. Отже, $a \in (-\infty, 1]$.

11.2. Нехай K, L, O – середини відрізків AB, AC, MN відповідно. Тоді $KL \parallel BC, KL = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}MN$,

$KL \perp MN$. Оскільки $\angle FDC > 90^\circ$, то M лежить на відрізку AL . Крім того, чотирикутник $KNLM$ вписаний у коло з діаметром MN . Отже, $OL = ON = OM = KL$. Оскільки діаметр MN ділить перпендикулярну до нього

хорду пополам, то $\sin \angle MOL = \frac{1}{2}$. Отже, $\angle MOL = 30^\circ$.

Далі послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} \angle OML = \angle OLM = 75^\circ, \quad \angle BCA = \angle KLM = 15^\circ, \\ \angle AMK = 30^\circ, \quad \angle BAC = \angle KAM = 60^\circ, \quad \angle ABC = 105^\circ. \end{aligned}$$

11.3. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} & \cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = \\ = & \cos((x+y+z)-z) + \cos((x+y+z)-x) + \cos((x+y+z)-y) = \\ & = \cos(x+y+z)(\cos x + \cos y + \cos z) + \\ & + \sin(x+y+z)(\sin x + \sin y + \sin z) = \\ = & a \cos^2(x+y+z) + a \sin^2(x+y+z) = a. \end{aligned}$$

11.4. Оскільки $AE \perp A_1D$ за умовою задачі і $AE \perp CD$, бо $CD \perp (AA_1D)$, то $AE \perp (A_1CD)$, а отже, $AE \perp A_1C$. Але за умовою задачі також $AF \perp A_1C$, тому $A_1C \perp (AEF)$, а значить, $EF \perp A_1C$. Крім того, за умовою задачі $B_1Q \perp A_1C$, і, оскільки EF та B_1Q належать одній площині A_1B_1CD , то $EF \parallel B_1Q$. Аналогічно доводиться паралельність прямих AF та PQ . Звідси випливає, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

11.5. Див. розв'язання задачі 10.6.

11.6. Таких функцій не існує. Справді, з умови задачі випливає, що для всіх додатних x, y виконується нерівність $f(x+y) > f(x)$, а тому функція f строго монотонно зростає на проміжку $(0, +\infty)$. Із вихідної тотожності, якщо в ній аргументи поміняти місцями, також випливає, що $f(xf(y)) = f(yf(x))$. І, оскільки

шукана функція є строго монотонною, то $xf(y) = yf(x)$, тобто $f(x) = \frac{f(y)}{y}x$. А отже, $f(x) = kx$, де $k > 0$. Але безпосередня підстановка у вихідне рівняння показує, що жодна з таких функцій його не задовольняє.

11.7. Див. розв'язання задачі 10.7.

2 0 0 5 р і к

7.1. Зрозуміло, що кількість риб, спійманих першим рибакom, повинна ділитись на 9, а спійманих другим – на 17. При сумі 70 це можливо лише для чисел 36 та 34 відповідно. Тоді отримаємо, що обидва спіймали по 20 карасів та по 14 окунів. А отже, перший рибак спіймав дві щуки, а другий не спіймав жодної.

7.2. Якщо перший – лицар, то з його слів другий і третій – брехуни, що суперечить висловлюванню другого. Отже, перший – брехун. Якщо другий – брехун, то на основі його слів третій також мав би бути брехуном, що неможливо, бо у такому разі перший, який є брехуном, сказав би правду. Отже, другий – лицар, а тому з його слів випливає, що і третій є лицарем. А значить, відповідь третього буде: один.

7.3. Число і сума його цифр при діленні на 3 дають однакові остачі. Тому, починаючи з остачі 1, на другому кроці отримаємо остачу 2, а з остачі 2 – знову остачу 1, і так далі. Таким чином число 200520052005, яке ділиться на 3, появиться на дошці не зможе.

7.4. Можна. Наприклад, відрізвавши по периметру квадрата 4 прямокутники зі сторонами $\frac{7}{8}m$ та $\frac{1}{8}m$, а

потім розрізавши квадрат, який залишився, на 3 прямокутники зі сторонами $\frac{3}{4}m$ та $\frac{1}{4}m$.

8.1. Припустимо, що з даних відрізків трикутник скласти не можна. Тоді їх довжини у сантиметрах, впорядковані за зростанням, задовольнятимуть нерівності:

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, a_3 \geq 2, a_4 \geq 3, a_5 \geq 5, a_6 \geq 8, a_7 \geq 13, a_8 \geq 21,$$

що суперечить умові про довжину найбільшого відрізка 20 см.

8.2. Нехай $m_i, i=1, \dots, 16$, – маси цих яблук. За чотири зважування знайдемо

$$(m_1 + m_2 + m_3) + (m_1 + m_2 + m_4) +$$

$$+ (m_1 + m_3 + m_4) + (m_2 + m_3 + m_4) = 3(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) -$$

потроєну сумарну масу перших чотирьох яблук. Ще за чотири зважування знаходимо сумарну масу решти дванадцяти яблук:

$$(m_5 + m_6 + m_7) + (m_8 + m_9 + m_{10}) + (m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (m_{14} + m_{15} + m_{16}).$$

8.3. Оскільки $AB = AF$, то бісектриса кута BAF є висотою і медіаною трикутника BAF . Аналогічно міркуємо і щодо бісектрис кутів BCD та DEF . Таким чином, вказані бісектриси лежатимуть на серединних перпендикулярах до сторін трикутника BDF . А вони, як відомо, перетинаються в одній точці – центрі кола, описаного навколо цього трикутника.

8.4. Спільний дільник даних чисел буде також дільником числа $b - 2a = 3$. Аналізуючи остачі від ділення степенів двійки на 3 (2 в парному степені дає остачу 1, а в непарному – остачу 2), переконуємося, що кожне із заданих чисел на 3 ділиться. Тому $НСД(a, b) = 3$.

9.1. Оскільки $x^2 + 1 > 0$, то $x > 15$. При цих x обидва множники у лівій частині рівняння є додатними зростаючими функціями. Отже, рівняння має не більше одного кореня. Легко перевірити, що ним є $x = 20$.

$$9.2. \quad a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > \\ > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a+b)^2 > c^3.$$

9.3. Обов'язково. Зі всіх таблиць, які можна утворити з початкової таблиці описаним у задачі способом, розглянемо ту, в якій є найбільша можлива кількість плюсів. Якщо би в ній в якомусь рядку чи в якомусь стовпчику мінусів було більше, ніж плюсів, то, змінивши у ньому всі знаки на протилежні, ми отримали би таблицю з більшою загальною кількістю плюсів, що суперечить зробленому раніше вибору таблиці.

Можливий також і конструктивний спосіб отримання потрібної таблиці. Для цього замінимо у кожному рядку, де мінусів було більше, ніж плюсів, всі знаки на протилежні. В отриманій у результаті таких замін таблиці аналогічну процедуру проробимо зі стовпчиками. Потім знову з рядками, і так далі. При кожній такій заміні кількість плюсів збільшується. Але всього у таблиці може бути не більше, як 81 плюс. Тому цей процес завершиться через скінченне число кроків. Отримана так таблиця буде шуканою.

9.4. На промені KO відкладемо точку N , відмінну від точки K , так, що $ON = OK$. Тоді $\triangle AON = \triangle BOK$ (за двома сторонами і кутом між ними). А отже, $AN = BK$, $\angle OAN = \angle OBK$. Тому $\angle MAN = 90^\circ$. Крім того, MO – висота і медіана трикутника KMN . Тому $MN = MK$. Отже, $AM^2 + BK^2 = AM^2 + AN^2 = MN^2 = MK^2$.

10.1. Зрозуміло, що після $2n$ відрізань залишається відрізок довжиною $\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \rightarrow 0$. Тому гарантовано залишитися не відрізаною може лише одна точка, а саме $2004 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} + \dots = 2004\frac{4}{7}$, до якої ми послідовно будемо наближатися з обох кінців початкового відрізка.

10.2. Припустимо, що підприємець кожного місяця знижує зарплату на одну гривню одному з робітників, котрий одержує більше, ніж найменш оплачуваний у даний момент часу, і зразу ж всім десятьом підвищує зарплату на одну гривню. Очевидно, що за рахунок лише самих знижень вирівняти зарплати вдасться. А оскільки кожного разу прибавки для всіх є однаковими, то при цьому зарплати вирівнюються і в ситуації, описаній в задачі.

10.3. Зрозуміло, що $OM \perp AB$, як серединний перпендикуляр до AB . Продовжимо NK до перетину з прямою AB у точці P . Тоді $\angle PAK + \angle PKA = \angle KDC + \angle CKN = \frac{1}{2}\angle KNC + \frac{1}{2}(\angle CKN + \angle KCN) = 90^\circ$.

Отже, $KN \perp AB$. Тому $KN \parallel OM$. Аналогічно доводиться, що $KM \parallel ON$. Отже, $KNOM$ – паралелограм, і в ньому $OM = KN$.

10.4. Оскільки $a - b > 0$, $b - c > 0$, то

$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} = c + \left(a - b + \frac{1}{a-b}\right) + \left(b - c + \frac{1}{b-c}\right) \geq \geq c + 2 + 2 = c + 4.$$

11.1. Медіана ML прямокутного трикутника AMC дорівнює половинам гіпотенузи AL та LC , а також

відрізкам KL та KM , оскільки сторони трикутника KLM рівні. У трикутнику AKC медіана KL дорівнює половині сторони AC , тому кут AKC прямий, і у трикутнику ABC бісектриса AK є і висотою. Отже, трикутник ABC рівнобедрений ($AB=AC$), в якому AK є також медіаною: $BK=KC$. Значить, MK – медіана прямокутного трикутника BMC , а тому $BC=2MK=2KL=AC$. Отже, $AB=BC=AC$, що і слід було довести.

11.2. Позначимо $\frac{2005}{2} = a$. Тоді рівняння легко зводиться до вигляду $(x^2 - a)(x^2 + 2x + 2 - a) = 0$. Звідси

знаходимо: $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2005}{2}}$ та $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{2003}{2}}$.

Зауважимо, що, позначивши $f(x) = x^2 + x - a$, ми могли б записати рівняння у вигляді $f(f(x)) = x$. При цьому $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - a = 0$.

11.3. Перебором остач від ділення на 11 легко перевірити, що якщо ціле число не ділиться на 11, то його десятий степінь при діленні на 11 дає остачу 1. Тому сума одинадцяти таких десятих степенів ділитиметься на 11.

11.4. Вірно. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - задана геометрична прогресія, q - її знаменник. За умовою $a_1, a_{10} = a_1 q^9$ та $a_{30} = a_1 q^{29}$ - натуральні числа. Тому q^9 і q^{29} - додатні раціональні числа. Звідси випливає, що $q^2 = \frac{q^{29}}{(q^9)^3}$ та $q = \frac{q^9}{(q^2)^4}$ - додатні раціональні числа.

Нехай $q = \frac{m}{n}$, де m та n - натуральні взаємно прості

числа. Оскільки число $a_{30} = \frac{a_1 m^{29}}{n^{29}}$ натуральне, m^{29} і n^{29} взаємно прості, то a_1 ділиться на n^{29} . Звідси отримуємо, що $a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}}$ – натуральне число.

11.5. Нехай AS – найбільше з бічних ребер піраміди. Розглянемо розгортку бічної поверхні піраміди, яка починається і закінчується гранями з ребром AS . З'єднаємо точки A між собою і проведемо до цього відрізка серединний перпендикуляр, який, очевидно, пройде через точку S . Позначимо через M точку перетину цього перпендикуляра з ребром чи вершиною основи піраміди на цій розгортці. Тоді периметр основи $P > 2 \cdot AM > 2 \cdot AS$, що й слід було довести.

Задачі обласного турніру юних математиків 2005 року

1. Числа 1, 2, 3, ..., 25 записують у таблиці 5x5 так, щоб у кожному рядку вони були записані у порядку зростання. Яке найбільше та найменше значення може набувати при цьому сума чисел третього стовпчика?

2. Всередині правильного трикутника ABC вибрали точку M так, що $\angle AMB = 115^\circ$, $\angle BMC = 125^\circ$. Доведіть, що існує трикутник зі сторонами AM , BM , CM , і знайдіть кути цього трикутника.

3. Знайдіть довжини сторін всіх рівнобедрених трикутників, які медіана, проведена до бічної сторони, ділить на два трикутники з периметрами 24 см та 30 см.

4. Порівняйте числа

$$\frac{2^2}{1^1} + \frac{3^3}{2^2} + \dots + \frac{2005^{2005}}{2004^{2004}} \quad \text{та} \quad 2005^2.$$

5. Виясніть, чи існує прямокутний трикутник з цілочисловими довжинами сторін, всі вершини якого лежать у вузлах решітки зі стороною 1, а жодна зі сторін не проходить по лініях решітки.

6. Дослідіть, при яких $n \in \mathbb{N}$ число $11\dots 1$ ділиться на 3^n .

7. Довжини сторін трикутника дорівнюють 30 см, 45 см та 60 см. Кожну сторону поділили на 15 рівних частин, а точки поділу з'єднали з протилежними вершинами. Підрахуйте кількість точок всередині трикутника, в яких перетинаються по три з проведених відрізків.

8. Є три бікфордові шнури, кожен з яких згорає нерівномірно на протязі однієї години. Які відрізки часу можна відміряти з їх допомогою? Вкажіть всі можливі варіанти.

9. Не користуючись поняттям похідної, знайдіть найбільше та найменше значення функції

$$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}.$$

10. Знайдіть хоч один многочлен з цілими коефіцієнтами, який має своїм коренем число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Який найменший степінь може мати такий многочлен?

11. Точки сторін правильного трикутника розмалювали у два кольори. Чи обов'язково існує:

а) рівносторонній, б) прямокутний трикутник, всі вершини якого мають однаковий колір?

12. Послідовність $\{a_n\}$ така, що $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+3} \cdot a_n - a_{n+2} \cdot a_{n+1} = 9 \cdot (-2)^n, n \geq 0$. Чи вірно, що всі елементи цієї послідовності є натуральними числами?

13. На площині задані дві паралельні прямі і відрізок на одній з них. З допомогою лише лінійки:

а) поділіть цей відрізок пополам;

б) подвойте цей відрізок.

Врахуйте, що лінійкою можна проводити лише прямі лінії.

14. Доведіть, що якщо для кутів трикутника виконується рівність $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$, то хоч один з цих кутів дорівнює 60° .

15. Розв'яжіть у цілих числах нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \leq ab + 3b + 2c$.

16. На сторонах AB та BC гострокутного трикутника ABC побудуйте такі точки M та K відповідно, щоб виконувалися рівності: а) $AM = MK = KC$; б) $BM = MK = KC$.

17. Доведіть, що для всіх натуральних n виконується нерівність $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} < 2$.

18. Чотири прями при перетині обмежують чотири трикутники. Чи вірно, що кола, описані навколо цих трикутників, перетинаються в одній точці? Якщо ні, то у яких випадках таке твердження буде справедливим?

19. Відомо, що $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c}$. Обчисліть $x^3 + y^3 + z^3$.

20. Знайдіть всі функції $f: N \rightarrow N$ такі, що $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$ при всіх натуральних $n \geq 2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.– 112с.

2. Бугаенко В.О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. – М.: ТЕИС, 1995. – 110с.

3. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986. – 176с.

4. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – (Б-ка мат. кружка). – 288 с.

5. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади: Довідник. – К.: Вища шк., 1993.– 415с.

6. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад.– К.: Вища шк., 1984.– 240с.

7. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993 рр. Збірник задач: Навч. посібник.– К.: Либідь, 1993,–144с.

8. Вишенський В.А., Ядренко М.Й. Вибрані математичні задачі.– К.: Вища шк., 1974.– 108с.

9. Вишенський В.А., Ядренко М.Й. Вибрані задачі з алгебри і геометрії. – К.: Вища шк., 1978.–72с.

10. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Задачи Московских математических олимпиад М.: Просвещение, 1986.–304с.

11. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки: Пособие для внеклассной работы. – Киров: АСА, 1994.– 272с.

12. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.

13. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 304с.

14. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 1991-2000: Навчально-методичний посібник. – К.: Техніка, 2003. – 541с.

15. Лоповок Л.М. Збірник математичних задач логічного характеру. – К.: Рад. шк., 1972.– 152с.

16. Лоповок Л.М. Факультативные задания по геометрии для 7-11 классов: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1990.– 128с.

17. Маланюк М.П., Лукавецький В.І. Олімпіади юних математиків.– К.: Рад. шк., 1972.– 88с.

18. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников.– М.: Просвещение, 1982.– 96с.
19. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1.– М.: Наука, 1991.–320с.
20. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2.– М.: Наука, 1991.–320с.
21. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – Житомир: ЖДПУ, 2002. - 298с.
22. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. – М.: Просвещение, 1968, – 312с.
23. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Чернівці, 2003. – 360с.
24. Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – С.-Пб.: Политехника, 1994.
25. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1992.
26. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця, 1998. – 266 с.

Зміст

| | |
|--------------------------|---|
| Передмова | 3 |
| Критерії оцінювання..... | 4 |

| <u>Рік</u> | <u>Умови</u> | <u>Вказівки</u> |
|------------|--------------|-----------------|
| 1987 | 5 | 67 |
| 1988 | 7 | 71 |
| 1989 | 10 | 74 |
| 1990 | 13 | 77 |
| 1991 | 15 | 80 |
| 1992 | 17 | 83 |
| 1993 | 19 | 86 |
| 1994 | 21 | 89 |
| 1995 | 25 | 93 |
| 1996 | 28 | 98 |
| 1997 | 31 | 103 |
| 1998 | 34 | 106 |
| 1999 | 38 | 112 |
| 2000 | 42 | 118 |
| 2001 | 46 | 125 |
| 2002 | 51 | 132 |
| 2003 | 55 | 138 |
| 2004 | 58 | 142 |
| 2005 | 64 | 152 |

| | |
|---|-----|
| Задачі обласного турніру юних математиків 2005 року..... | 158 |
| Список рекомендованої літератури | 161 |