І.В. ФЕДАК

ІВАНО-ФРАНКІВСЬКІ ОБЛАСНІ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

2001 - 2010 рр.

Івано-Франківськ
– 2010 –

ББК: 22.1
УДК: 51(031)
Ф 36
Федак І. В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2001 – 2010 рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2010. – 84 с.

Друкується за рішеннями вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника та методичної ради Івано-Франківського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника ***Казмерчук А. І.*** ,

завідувач відділом Івано-Франківського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти ***Голуб Л. В.***

Зібрані задачі Івано-Франківських обласних олімпіад з математики за 2001–2010 роки. Наведені відповіді та вказівки до розв’язування задач.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

УМОВИ ЗАДАЧ

2001 рік

7 клас

1. Відстань між пунктами *A* та *B* – 80*км*, *B* та *C* – 300*км*, *C* та *D* – 120*км*, *D* та *A* – 100*км*. Яка відстань між пунктами *A* та *C*?

2. За допомогою якої мінімальної кількості доданків, що містять у своєму записі лише цифри 3, можна отримати у сумі число 111111?

3. У таблиці $n \times n$ розміщено n чорних шашок по діагоналі знизу вверх та n білих шашок по діагоналі зверху вниз. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або протилежному напрямах на одну клітинку. Чи можна за скінченну кількість ходів добитися, щоб всі чорні шашки опинилися в першому стовпчику, а всі білі – в останньому стовпчику, якщо: а) $n = 4$, б) $n = 6$?

4. а) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?

б) Чи можна здійснити цю процедуру для чисел 1, 2, 3, ..., 999 ?

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left||x| - 2\right| = x.$

2. Турист пройшов половину шляху між пунктами *A* та *B* зі швидкістю 4 *км/год.*, а решту шляху до *B* – зі швидкістю 6 *км/год*. На зворотному шляху від *B* до *A* він дві третини цього шляху пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від *A* до *B*, а решту шляху – зі швидкістю 5 *км/год*. Знайдіть відстань між пунктами *A* та *B*, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на дві хвилини більше, ніж на весь шлях від *A* до *B*.

3. Чи існують такі цілі числа $k, l,$ що $k^3 + l^3 = 2001$?

4. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрали точки M, P, N, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ перпендикулярні. Нехай O – точка їх перетину. Доведіть, що для периметрів утворених при цьому чотирикутників виконується рівність

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}.$$

5. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають у гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника, і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток чисел сірників в отриманих двох менших купках. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

9 клас

1. Доведіть нерівність $\frac{|a|}{\sqrt{b}} + \frac{|b|}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x|x| + y|y| = 1, \\ [x] + [y] = 1. \end{cases}$.

(Тут $[t]$ позначає найбільше ціле число, яке не перевищує t).

3. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника, вершини якого розташовані у цих точках.

4. Два рівних квадрати утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поділяють його на чотири чотирикутники. Доведіть, що ці діагоналі перпендикулярні одна до одної.

5. Із паперу в клітинку вирізали квадрат 8×8. Яку найбільшу кількість фігурок у вигляді хрестика, складеного з п'яти клітинок, можна вирізати з цього квадрата?

10 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin 9x + ... + \sin nx \cdot \sin n^2 x = 1.$$

2. Для кожного натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$. Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n \geq 1$.

а) Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)a(n+1)$ належить до S.

б) Доведіть, що існують n, k більші за 2001 такі, що $a(n)a(k)$ не належить до S.

3. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a,b,c,d,e виконується нерівність $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq \left(a+b+c+d\right)e.$

4. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло. Промені AE і CD перетинаються в точці P, а промені ED і BC – у точці Q так, що $PQ \parallel AB.$ Доведіть, що $DA = DB.$

5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

11 клас

1. Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння

$$\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin 9x + ... + \sin nx \cdot \sin n^2 x = 1.$$

2. Числова послідовність $a_1, a_2, a_3, ...,$ в якій $a_1 = 2,$ $a_2 = 500,$ $a_3 = 2000,$ при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову $\dfrac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}.$ Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на $2^{2001}.$

3. Знайдіть всі функції $f,$ які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють наступні дві умови:

а) рівняння $f\left(x\right) = 0$ має єдиний корінь;

б) для будь-яких $x, y \in R$ виконується рівність

$$f\left(y + f\left(x\right)\right) = f\left(x^2 - y\right) + 4f\left(x\right)y.$$

4. Поза площиною α дано точку A. Доведіть, що для будь-якої прямої $l,$ яка належить $\alpha,$ у цій же площині існує така відмінна від l пряма $m \parallel l,$ що для кожної точки $M \in m$ спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходитиме через середину відрізка $AM.$

5. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

2002 рік

7 клас

1. Правильний дріб $\dfrac{m}{n}$ та неправильний дріб $\dfrac{n}{m}$ посперечалися, котрий з них знаходиться ближче до одиниці.

а) Розсудіть їх; б) Знайдіть хоч одну пару дробів указаного вигляду, один із яких у 2002 рази ближчий до одиниці, ніж інший.

2. На площині відзначили 6 різних точок. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві зі цих точок, містить принаймні ще одну відзначену точку. Доведіть, що всі ці 6 точок лежать на одній прямій.

3. Семикласник Петрусь одержав у подарунок на свій день народження лінійку довжиною 13 *см* без поділок. Він хвалиться, що зумів нанести на ній 4 поділки таким чином, що з їх допомогою можна відкласти відрізки будь-якої цілочислової довжини від 1 *см* до 13 *см* включно, прикладаючи лінійку у кожному зі цих випадків лише один раз. Чи можуть його слова бути правдою? Відповідь обґрунтуйте.

4. Множину чисел 1, 2, 3, ..., 2002 розбили на дві групи. До першої групи віднесли всі числа з непарною сумою цифр, а до другої – з парною. Що більше: сума всіх чисел першої групи, чи сума всіх чисел другої групи?

8 клас

1. Торговець мав кілька штук однакових годинників. Якщо він їх усіх продасть по 13 гривень, то матиме 54 гривні збитку, а якщо продасть по 18 гривень, то наживе 81 гривню. Скільки було годинників і якої вартості?

2. Учень задумав деяке натуральне число n. Доведіть, що:

а) існує натуральне число k, що число $nk+1$ є складеним;

б) існує безліч натуральних чисел k з такою властивістю.

3. У гострокутному трикутнику з однієї вершини проведено медіану, з другої – бісектрису, а з третьої – висоту. При їхньому перетині утворився новий трикутник. Доведіть, що він не може бути рівностороннім.

4. Доведіть, що

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2002}=\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{2002}.$$

5. П’ятдесят каменів розташовані у порядку спадання їхньої маси. Перший важить 468 *кг*, а кожен наступний на 2 *кг* легший від сусіднього з ним. Якою мінімальною кількістю вантажівок можна перевезти ці камені, якщо вантажити їх дозволяється у довільному порядку, але не більше трьох тон на одну автомашину?

9 клас

1. Дорога Петруся до школи проходить мимо п’яти садків. Петрусь стверджує, що у першому і другому садках разом є 9, другому і третьому – 13, третьому і четвертому – 19, четвертому і п’ятому – 11, п’ятому і першому – 16 дерев. Чи можна на основі його даних встановити загальну кількість дерев у всіх п’яти садках? Якщо так, то знайдіть цю кількість.

2. Число x замінили на x^2-2001. Із одержаним числом поступили таким же чином, продовживши процедуру описаних замін 2002 рази. Чи могли у кінцевому результаті одержати початкове число?

3. a, b, c – довжини сторін деякого трикутника. Доведіть, що

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

4. На двох сторонах трикутника *ABC* побудовані квадрати *ABMK* та *BCTP*, які лежать зовні цього трикутника. Точка *O* – середина сторони *AC*. Доведіть, що $\angle BPM=\angle CBO$.

5. Доріжки у зоопарку утворюють правильний трикутник, в якому проведені середні лінії. Із клітки втекла мавпа. Її ловлять два сторожі. Чи зможуть вони спіймати мавпу, якщо всі троє будуть бігати лише по доріжках, бачитимуть одне одного і матимуть однакові максимальні швидкості руху?

10 клас

1. Таблицю розмірами 5×5 заповнили натуральними числами $1, 2, \ldots, 25,$ причому будь-які два сусідні натуральні числа знаходяться у сусідніх зі спільною стороною клітинках. Дослідіть, яка максимальна кількість простих чисел могла опинитися в одному стовпчику такої таблиці.

2. Доведіть, що число

$$\cos 20^0 \cos 30^0 \sin 50^0 - \cos 10^0 \sin 40^0 \sin 80^0$$

є раціональним.

3. Знайдіть довжину відрізка, паралельного до основ трапеції, довжини яких відповідно дорівнюють a та b, якщо відомо, що цей відрізок ділить площу трапеції пополам, а його кінці знаходяться на бічних сторонах цієї трапеції.

4. Знайдіть всі функції $f: N \to N$, для яких при кожному натуральному n виконується рівність

$$f\left(f(n)\right) + f^2(n) = n^2 + 3n + 3.$$

5. Після введення у шкільну програму замість одного уроку математики уроку футболу вирішили провести Всеукраїнські змагання школярів із цього виду спорту. В Івано-Франківській області заявки для участі у цих змаганнях подали 202 команди замість очікуваних 2002-ох. Їх певним чином розбили на групи. У кожній групі провели турніри в одне коло. При цьому кожна зустріч закінчувалася перемогою однієї з команд. Після статистичної обробки результатів змагань виявилося, що сума квадратів перемог, здобутих усіма учасниками змагань, дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Чи могло таке статися, якщо б у змаганнях взяли участь 2002 команди і в усіх групах кількості команд були різними?

11 клас

1. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$..

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x + y = 1, \\ yz + y + z = 1000, \\ zx + z + x = 2001. \end{cases}$$

3. Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника $ABCE$, вписаного у коло з центром O, перпендикулярні, то ламана AOC ділить площу цього чотирикутника пополам.

4. Доведіть або спростуйте наступне твердження: у довільній трикутній піраміді знайдеться вершина, що із ребер, які виходять з неї, можна утворити трикутник.

5. Учень виписав на дошці чотири множини натуральних чисел, які складалися відповідно зі всіх натуральних дільників наступних чисел: $a = 2^{2001} - 11$, $b = 2001^2 - 11$, $c = 2^{2002} + 11$, $d = 2002^2 + 11$. Встановіть, які числа йому довелося виписувати рівно три рази.

2003 рік

7 клас

1. Діти, вишикувавшись парами, виходять з лісу. У кожній парі йдуть хлопчик і дівчинка, причому у хлопчика або вдвічі більше горіхів, ніж у дівчинки, або вдвічі менше. Чи могло так статися, що у всіх разом 2003 горіхи ?

2. Ліспромгосп вирішив вирубати сосновий ліс, але екологи рішуче виступили проти цього. Тоді директор ліспромгоспу всіх заспокоїв, сказавши: „У вашому лісі 99% сосен. Ми будемо рубати тільки їх, причому після рубки сосен залишиться 98% від всіх дерев.” Яку частину лісу має намір вирубати ліспромгосп ?

3. На дорозі між двома гірськими селами горизонтальних дільниць немає. Автобус вгору їде завжди зі швидкістю 15 *км/год.*, а вниз – 30 *км/год*. Яка відстань між селами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус проїздить за 4 години ?

4. Незнайко вважає, що тільки правильний трикутник можна розрізати на три рівні трикутники. Чи не помиляється він?

8 клас

1. Жорстокий цар Шагріяр зажадав від чарівної Шахразади, щоб вона протягом наступних 1001-єї ночей називала йому по одному розв’язкові в натуральних числах рівняння $x^2 - y^2 = p^{2003}$, де p – деяке просте число. Скориставшись килимом-літаком, Шахразада прилетіла до Івано-Франківська і просить вашої допомоги. Не забувайте тільки, що у її розпорядженні всього 3 години, а самого числа p вона поки що не знає.

2. На базарі продаються рибки – великі і малі. Сьогодні 3 великі і 1 мала коштують разом стільки, як 5 великих вчора. А 2 великі і 1 мала коштують сьогодні стільки ж, як 3 великі і 1 мала вчора. Чи можна за цими даними визначити, що дорожче: 1 велика і 2 малі сьогодні, чи 5 малих вчора ?

3. Петрусь та Миколка по черзі розставляють у виразі $n * n^2 * n^3 * n^4 * n^5 * n^6 * n^7 * n^8$ замість зірочок знаки „ + ”, або „ - ”. Доведіть, що Петрусь, який розпочинає розставляти знаки, може добитися, щоб одержаний вкінці вираз ділився на 6 при всіх натуральних n, незалежно від ходів Миколки.

4. Медіани AD та BE трикутника ABC перетинаються у точці M. Знайдіть довжину медіани CF трикутника BCM, якщо $AB = 5$, $AD = 6$, $AC = 8$.

9 клас

1. Петрусь виписав на дошці 2003 зведені квадратні рівняння і перевірив, що жодне з них на має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і одержане в результаті рівняння також не має дійсних коренів.

2. Трава на лузі росте рівномірно. 30 корів можуть спасти її за 4 дні, а 25 – за 6 днів. Скільки корів можуть пастися на такому лузі безперервно, поки на ньому буде рости трава ?

3. Із 40 одиниць, 30 двійок, 20 трійок і 10 четвірок склали два різні стоцифрові числа. Доведіть, що вони не діляться одне на одне.

4. У трикутнику ABC кут B дорівнює 60^0. Бісектриси AD та CE перетинаються у точці O. Доведіть, що $OE = OD$.

10 клас

1. У вершинах десятикутника у довільному порядку розмістили всі натуральні числа від 1 до 10, а потім на кожній стороні виписали суму чисел, які знаходяться на її кінцях. Доведіть, що принаймні дві зі цих сум закінчуються на одну і ту ж цифру.

2. Доведіть, що число

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 1001 + 1002\cdot 1003\cdot 1004\cdot \ldots \cdot 2002$$

ділиться на 2003.

3. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\frac{y+z-x}{1} = \frac{z+x-y}{3} = \frac{x+y-z}{5} = \frac{xyz}{6}.$$

4. На стороні AB гострокутного трикутника ABC довільно вибрали точку M, з якої опустили перпендикуляри MK та MP на дві інші сторони трикутника. При якому розташуванні точки M довжина відрізка PK буде найменшою?

11 клас

1. Діагоналями, які не перетинаються між собою, опуклий n-кутник поділено на трикутники так, що з кожної вершини виходить парне число проведених діагоналей. Доведіть, що n ділиться на 3.

2. Тангенси кутів трикутника є натуральними числами. Знайдіть ці числа.

3. Дослідіть, якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$.

4. Місто розташоване на 2003-ьох островах, причому деякі з них з'єднані між собою так, що з будь-якого острова можна проїхати на будь-який інший. При поїздках містом його жителі виражають довжину свого шляху числом мостів, які їм доводиться проїздити. Після закриття одного з мостів кожен житель міста заявив: „ У мене є друг, найкоротший шлях до якого став на 1 міст довшим, ніж був досі." Чи не помилився хтось із них у своїх підрахунках?

5. Всередині трикутника *ABC* довільно вибрали точку *M*. Прямі AM, BM, CM перетинають сторони трикутника відповідно у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що $\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=1$.

2004 рік

7 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3$.

2. Із селища *A* до селища *B* виїхав велосипедист, а через 15 хвилин вслід за ним виїхав автомобіль (обидва рухаються з постійними швидкостями). Рівно на половині шляху від *A* до *B* автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища *B*, велосипедистові залишалося проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист проїхав шлях від *A* до *B* ?

3. Дано трикутник *ABC* ($\angle A<45^0$, $\angle C=90^0$), на сторонах *AC* та *AB* якого обрано такі точки *D* та *E* відповідно, що $BD=AD$, $BC=CE$. Відрізки *BD* та *CE* перетинаються в точці *O*. Доведіть, що $\angle DOE=90^0$.

4. Троє учнів, котрі відвідують заняття математичного гуртка, на перерві вирішили пограти у „слова". Кожен з них написав по 50 різних слів. А потім слова, які зустрілися принаймні у двох учнів, було викреслено. Після цього у першого виявилося 23, у другого – 32, у третього – 26 слів. Коли вчитель математики дізнався про це, то він сказав дітям, що принаймні одне слово було записане у всіх трьох учнів. На основі чого учитель міг зробити такий висновок ?

5. Як у виразі $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\frac{4}{5}*...*\frac{97}{98}*\frac{98}{99}*\frac{99}{100}$, який містить 99 дробів, замінити всі зірочки знаками арифметичних дій таким чином, щоб значення одержаного арифметичного виразу дорівнювало нулю?

6. Петрик вибрав три різні цифри і записав усі можливі різні трицифрові натуральні числа десятковий запис кожного з котрих містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. Виявилося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані, і доведіть, що інших варіантів немає.

7. Дано горизонтальну клітчату смугу розмірами 1×2004. У кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній фішці. Двоє по черзі беруть одну з фішок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через фішки і ставити фішки у клітинки, у яких уже знаходиться інша фішка не дозволяється). Переможеним вважається той зі гравців, який не може зробити свій черговий хід. Доведіть, що той гравець, який розпочинає гру, може забезпечити собі перемогу.

8 клас

1. Побудуйте графік функції $y=\frac{5x^2-|x|}{x+|x|}$.

2. Сума тангенса гострого кута та котангенса другого гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Обчисліть значення тангенса більшого гострого кута цього трикутника.

3. Для яких натуральних n число n^4-22n^2-46 ділиться без остачі на $n+5$?

4. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3=p$, де $p-$ середнє арифметичне чисел $A=\frac{158^2+158\cdot 185+185^2}{158+185}$ та $B=\frac{158^2-158\cdot 185+185^2}{185-158}$.

5. Знайдіть натуральне число B за умови, що з трьох наступних тверджень два істинних, а одне хибне:

а) $B+41$ є квадратом натурального числа; б) $B-21$ ділиться на 10; в) $B-48$ є квадратом натурального числа.

6. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут 35^0 на 7 рівних частин.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC вибрано точку K так, що $\angle BAK = 24^0$. На відрізку AK вибрана точка M так, що $\angle ABM = 90^0$, $AM = 2BK$. Знайдіть кути трикутника ABC.

9 клас

1. Розв’яжіть рівняння $\sqrt{x^5 + x^3 + x - 42} = x\sqrt{2-x}$.

2. На декартовій координатній площині задані чотири точки: $A_1(0,0)$, $A_2(0,2)$, $A_3(-2,-2)$, $A_4(4,0)$. Для кожної зі цих точок вказати множину точок площини, до яких ця точка є найближчою у порівнянні з трьома іншими.

3. Знайти усі $x_0 < 3$ такі, що для деяких натуральних чисел a, b, c число x_0 є найбільшим коренем рівняння $(a-x)(b-x) = c$.

4. Знайти всі натуральні n такі, що для десяткового запису чисел $6n$, $9n$, $13n$ необхідно використати у сукупності всі цифри від 0 до 9 по одному разові.

5. Деякі сторони клітинок шахівниці пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки і перефарбовувати всі її сторони одночасно у протилежний колір. Чи завжди можна зробити декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше ніж $\frac{1}{4}$ від усієї кількості сторін клітинок ?

6. Нехай додатні числа a, b, c та дійсні числа x, y, z такі, що $ax + by + cz = 0$. Доведіть нерівність

$$\left(a + \sqrt{ab} + b\right)xy + \left(b + \sqrt{bc} + c\right)yz + \left(c + \sqrt{ca} + a\right)zx \le 0.$$

7. На дошці намальовано трикутник ABC. Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане у трикутник коло у різних точках M та N, P та Q відповідно. Після цього малюнок витерли, залишивши лише точки H, M та Q. Відновити трикутник ABC.

10 клас

1. Нехай α, β, γ – такі гострі кути, що $\cos\alpha = tg\beta$, $\cos\beta = tg\gamma$, $\cos\gamma = tg\alpha$. Доведіть, що

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. Нехай α – таке дійсне число, що числа $\alpha^2+\alpha$ та $\alpha^3+2\alpha$ є раціональними. Доведіть, що α також є раціональним.

3. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел $a, b, c,$ що $ab^3-2003,$ bc^3+2005 та ca^3-2007 ca^3 – 2007 є квадратами натуральних чисел.

4. Знайдіть усі такі дійсні числа $x,$ які не є цілими і при цьому задовольняють рівність $x+\frac{2004}{x}=[x]+\frac{2004}{[x]},$ де $[x]$ – найбільше ціле число, котре не перевищує $x.$

5. У трикутнику ABC точки M та N є серединами сторін BC та AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC співпадає з точкою перетину медіан трикутника AMN. Знайдіть величину кута ABC.

6. Доведіть, що якщо $x, y, z>0$ і $x+y+z=1,$ то виконується нерівність $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\geq\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$

7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

11 клас

1. Знайдіть усі значення параметра $a,$ при яких рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має тільки один дійсний корінь.

2. Дано трикутник ABC, в якому $\angle B>90^0$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC у точці M, а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB поза вершину B у точці N. Відомо, що відрізки MN і BC є рівними та перетинаються під прямим кутом. Знайдіть величини всіх кутів трикутника ABC у градусах.

3. Відомо, що $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a.$

Доведіть, що $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a.$

4. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нехай точки E та F є основами перпендикулярів, проведених із точки A до прямих A_1D та A_1C відповідно, а точки P та Q є основами перпендикулярів, проведених із точки B_1 до прямих A_1C_1 та A_1C відповідно. Доведіть, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

5. Доведіть, що якщо $x, y, z > 0$ і $x + y + z = 1$, то виконується нерівність $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2}$.

6. Знайдіть усі такі визначені на множині $(0, +\infty)$ функції f, що для будь-яких $x > 0$ виконується нерівність $f(x) > 0$ і при всіх $x > 0$, $y > 0$ справджується рівність $f(xf(y)) + f(x) + f(y) = f(x + y)$.

7. Кожне натуральне число пофарбоване в один з двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбоване синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

2005 рік

7 клас

1. В озері водяться карасі, окуні та щуки. Два рибаки спіймали разом 70 риб, причому $\frac{5}{9}$ улову першого рибака складали карасі, а $\frac{7}{17}$ улову другого – окуні. Скільки щук спіймав кожен із рибаків, якщо обидва спіймали порівну карасів і порівну окунів?

2. На острові живуть лицарі, які завжди говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть. Подорожуючий зустрів трьох жителів острова і спитав: „Скільки лицарів серед твоїх супутників?” Перший відповів: „Жодного.” Другий сказав: „Один.” Що сказав третій? Відповідь обґрунтуйте.

3. На дошці спочатку було записане число 1. Щохвилини до наявного у даний момент числа додають суму його цифр. Чи може через деякий час на дошці появитися число 200520052005?

4. Чи можна квадрат зі стороною 1*м* розрізати на 7 прямокутників, не обов'язково однакових, кожен з яких має периметр 2*м*?

8 клас.

1. Є 8 відрізків, причому відомо, що довжина кожного з них – ціле число сантиметрів, а довжина найбільшого – 20 см. Доведіть, що серед цих відрізків знайдуться три, з яких можна скласти трикутник.

2. У корзині лежать 16 яблук. За одне зважування можна взнати сумарну масу довільних трьох яблук. Запропонуйте спосіб, як за 8 зважувань знайти загальну масу всіх яблук.

3. На площині розташовані точки A, B, C, D, E, F так, що жодні три з них не лежать на одній прямій, причому $AB = AF$, $BC = CD$, $DE = EF$. Доведіть, що прямі, на яких лежать бісектриси кутів BAF, BCD та DEF, перетинаються в одній точці.

4. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел $a = 2^{2004} - 1$ та $a = 2^{2005} + 1$.

9 клас.

1. Розв'яжіть рівняння $(x-15)(x^2+1) = 2005$.

2. Доведіть, що для довжин сторін довільного трикутника виконується нерівність $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

3. У кожній клітинці таблиці 9×9 записані знаки «+» або «–». Можна одночасно змінювати всі знаки на протилежні у будь-якому рядку чи у будь-якому стовпчику таблиці. Чи обов'язково вдасться добитися, щоб за декілька кроків у всіх рядках та у всіх стовпчиках таблиці плюсів було більше, ніж мінусів.?

4. У прямокутному трикутнику ABC точка O – середина гіпотенузи AB. На відрізку AC взяли точку M, а на відрізку BC – точку K так, що кут MOK прямий. Доведіть, що $AM^2 + BK^2 = MK^2$.

10 клас.

1. Від відрізка $[2004, 2005]$ відрізали зліва четверту його частину. Потім від залишку справа знову відрізали четверту частину. Від нового залишку ще раз відрізали четверту частину зліва, а потім (від залишку) – четверту частину справа, і так далі. Вкажіть точку цього відрізка, яка ніколи не буде відрізана.

2. У підприємця працюють 10 робітників. Кожного місяця він підвищує зарплату дев'ятьом із них (на свій вибір) на одну гривню. Чи зможе підприємець у такий спосіб вирівняти їхні зарплати, якщо спочатку у всіх зарплати були різними і виражалися цілими числами гривень?

3. Хорди AC та BD кола з центром O перетинаються в точці K. Нехай M і N – центри кіл, описаних навколо трикутників ABK та CDK відповідно. Доведіть, що $OM = KN$.

4. Для $a > b > c$ доведіть нерівність $a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq c + 4$.

11 клас.

1. У трикутнику ABC проведені бісектриса AK, медіана BL і висота CM. Трикутник KML рівносторонній. Доведіть, що і трикутник ABC рівносторонній.

2. Розв'яжіть рівняння $\left(x^2 + x - \frac{2005}{2}\right)^2 + x^2 = 2005$.

3. Доведіть, що якщо жодне з одинадцяти цілих чисел не ділиться на 11, то сума їх десятих степенів ділиться на 11.

4. Перший, десятий та тридцятий члени геометричної прогресії є натуральними числами. Чи вірно, що і двадцятий її член є натуральним числом?

5. Сума плоских кутів при вершині піраміди більша 180^0. Доведіть, що кожне з бічних ребер цієї піраміди менше півпериметра основи.

2006 рік

7 клас.

1. Перед початком олімпіади з математики кожен учень сьомого класу висловився, яке місце він розраховує зайняти. Петрусь заявив, що він буде останнім. Після перевірки виявилося, що всі, крім, звичайно, Петруся, виступили гірше, ніж очікували. Яке місце зайняв Петрусь? Відповідь обґрунтуйте.

2. У шкатулці пірата є декілька дорогоцінних каменів (не більше 2006). Відомо, що $\frac{3}{11}$ всіх каменів – алмази, $\frac{4}{13}$ – рубіни,

$\frac{5}{14}$ – сапфіри, а решта – смарагди. Скільки у його шкатулці смарагдів?

3. Два торговці купили у місті однакову кількість товару і поїхали продавати його у свої села. Перший продавав товар удвічі дорожче, ніж купив його. Другий спочатку підняв ціну на 50%, а потім, продавши частину товару, підняв ціну ще на 50%. Чи міг він виручити за проданий товар таку ж суму грошей, що й перший торговець? Якщо так, то яку частину товару йому потрібно було продати за першою ціною?

4. В одній вершині куба записане число 7, а в інших його вершинах – нулі. За один крок дозволяється вибрати довільну вершину і додати по одиниці у тих трьох вершинах куба, кожна з яких зв'язана із вибраною спільним ребром. Невмійко стверджує, що за декілька таких кроків він зумів вирівняти числа у всіх восьми вершинах. Чи не помиляється він?

5. Довжини сторін прямокутника виражаються цілими числами. Якими повинні бути ці числа, щоб периметр прямокутника чисельно дорівнював його площі? Знайдіть всі можливі варіанти і доведіть, що інших немає.

8 клас

1. У восьмому класі навчається 25 учнів. Відомо, що серед будь-яких чотирьох учнів класу принаймні двоє дружать між собою. Доведіть, що у класі є учень, в якого не менше восьми друзів.

2. Розв'яжіть рівняння $|x+1003|+|x|+|x-1003|=2006-x^2$.

3. Доведіть, що числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можна розбити на дві групи по чотири числа так, щоб в обох групах суми чисел були рівними і в обох групах суми квадратів чисел були рівними. Скількома способами вдасться добитися бажаного результату?

4. Дві прямі, проведені через вершину A паралелограма $ABCD$, ділять його діагональ BD на три рівні відрізки з довжинами 2*см*. Знайдіть відстань між точками, в яких одна з цих прямих перетинає сторону BC, а друга – сторону CD.

5. Кут A трикутника ABC втричі більший кута C. На стороні BC вибрали точку E так, що $\angle AEC = 2\angle ACB$. Доведіть, що $AB + AE = BC$.

9 клас

1. Розв’яжіть рівняння $x^4+4x=1$.

2. Доведіть, що для катетів a та b і гіпотенузи c прямокутного трикутника виконується нерівність $c^2>\dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

3. Дослідіть, чи можна рівносторонній трикутник зі стороною 9*см* розбити на два трикутники з периметрами 20*см* та 23*см*.

4. У вазі 2006 цукерок. Марійка, Петрусь і Миколка по черзі (саме у такому порядку) забирають їх із вази. За один раз Марійка може взяти одну, дві або три цукерки, а Миколка і Петрусь – лише одну або дві. Доведіть, що хлопці, діючи узгоджено, можуть домогтися, щоб останню цукерку із вази забрала Марійка.

5. У трикутнику ABC довжина медіани BM дорівнює довжині сторони AC. На прямих AB та AC взяли точки D та E відповідно так, що вони відмінні від точок B та M і $AD=AB$, $CE=CM$. Знайдіть величину кута між прямими DM і BE.

10 клас

1. Розв’яжіть рівняння $x^4-x^3-4x^2+x+1=0$.

2. Для додатних чисел a та b доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{2006}\geq 4(a-2006).$$

При яких a, b досягається рівність?

3. Знайдіть всі такі натуральні числа x, y, для яких $x+y$ є простим числом, і x^2+y^2 ділиться на $x+y$.

4. Нехай H – точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що

$$AH\cdot BC+BH\cdot CA+CH\cdot AB=4S,$$

де S – площа трикутника ABC. Чи існують інші точки всередині цього трикутника, для яких виконується аналогічна рівність?

5. Павук з’єднав зв’язною павутиною всі вісім вершин порожнистого куба з ребром 1,5*м*. Дослідіть, чи могла довжина його павутини бути меншою 10*м*.

11 клас

1. У виразі $\sqrt{x}*\sqrt{y}=2006$ Миколка замінив знак «*» на один із знаків арифметичних дій і переконався, що існує

принаймні одна пара натуральних чисел x, y, менших за 2006, для яких виконується отримана ним рівність. Знайдіть усі пари таких чисел.

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$x+y^2+z^2=\frac{3}{8},\ x^2+y+z^2=\frac{3}{8},\ x^2+y^2+z=\frac{3}{8}.$$

3. Знайдіть найбільше значення виразу $\cos\alpha+\cos\beta$, якщо відомо, що $\sin\alpha+\sin\beta=1$.

4. Опуклий чотирикутник розбили діагоналями на чотири трикутники. Доведіть, що точки перетину медіан цих трикутників є вершинами паралелограма.

5. У трикутній піраміді $ABCD$ ребра AB, BC, CD мають довжину 3 *см*, а ребра BD, DA, AC – довжину $\sqrt{11}$ *см*. Знайдіть відстань між прямими AD та BC.

2007 рік

7 клас

1. По колу записано 2007 цілих чисел, причому кожне з них дорівнює сумі двох своїх сусідів. Доведіть, що сума всіх записаних чисел дорівнює нулю.

2. У семикласника Андрійка є вірьовка довжиною $\frac{2}{3}$ метра. Чи може він, не маючи метра, відрізати від неї рівно півметра?

3. Чи існують натуральні числа x, y, z, для яких виконується рівність $29x+30y+31z=366$? Якщо так, то знайдіть всі можливі трійки таких чисел.

4. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, на 3 – остачу 2, на 4 – остачу 3, на 5 – остачу 4, на 6 – остачу 5, на 7 – остачу 6. Обґрунтуйте, що воно справді найменше з усіх можливих.

5. Вчитель намалював на дошці шестикутник, сторони якого дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5 та 6 *см* відповідно (не обов'язково саме у такому порядку). Чи могло трапитися так, що всі кути такого шестикутника виявилися рівними між собою? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. У Змія Горинича x голів. Кожну хвилину Іван Царевич відрубує одну голову. Після кожних чотирьох відрубаних голів відростає одна нова. Знайдіть x, якщо відомо, що після 2007-ої хвилини Змій залишився обезголовленим.

2. Доведіть, що серед будь-яких 2007 натуральних чисел завжди можна знайти такі три числа a, b, c, що $a(b-c)$ ділиться на 2007. Чи обов'язково вдасться зробити такий вибір із 2006 чисел?

3. У трикутнику довжини сторін задовольняють співвідношення

$$\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}.$$

Доведіть, що такий трикутник рівнобедрений.

4. У трикутнику ABC точка M є серединою сторони BC. На продовженні сторони AB поза точку B вибрали точку K. Виявилося, що $AB = BK = AM$. Нехай H – точка перетину прямих KM та AC. Доведіть, що $CH = MH$.

5. У таблиці 8×8 виписали по порядку всі натуральні числа від 1 до 64. При цьому у першому рядку виписали зліва направо числа від 1 до 8, у другому рядку – зліва направо числа від 9 до 16 і т.д. Після цього перед кожним числом поставили знак «+» або знак «–», причому у кожному рядку та у кожному стовпчику плюсів та мінусів виявилося порівну. Знайдіть всі можливі значення, яких може набувати сума чисел отриманої у такий спосіб таблиці.

9 клас

1. У натуральному числі A цифри записані у порядку зростання (зліва направо). Доведіть, що сума цифр числа $9A$ не залежить від їх кількості та від числа A і знайдіть цю суму.

2. Знайдіть всі значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=6x-8, \\ x^2+y^2=a^2+8y-16 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

3. На дошці записане число 2007. Грають двоє, роблячи ходи по черзі. За один хід дозволяється відняти від наявного у даний момент числа будь-яку його ненульову цифру і записати отримане у такий спосіб число замість попереднього. Виграє той, хто отримає нуль. У котрого з гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію.

4. Точка M знаходиться поза рівностороннім трикутником ABC але всередині кута BAC. Відомо, що $\angle AMC = 30^0$, а $\angle AMB = \alpha$. Прямі AM та BC перетинаються у точці K. Знайдіть α, якщо відомо, що трикутник BKM рівнобедрений.

5. У поході, який тривав 12 днів, взяли участь 9 учнів. Кожного дня чергували троє. При цьому чергові сварилися між собою і жодні двоє з них більше не хотіли чергувати разом. Чи вдасться із дотриманням такої вимоги забезпечити чергування на всі 12 днів?

10 клас

1. Опуклий чотирикутник поділили діагоналями на чотири трикутники. Виявилося, що площі цих трикутників виражаються цілими числами. Миколка порахував добуток цих чисел і отримав число 2007. Доведіть, що він помилився у своїх обчисленнях.

2. Обчисліть без таблиць і калькулятора $\cos 36^0 - \cos 72^0$.

3. Знайдіть всі розв’язки рівняння $xy + yz + zx = xyzt$ у натуральних числах

4. Радіус кола, вписаного у трикутник ABC, дорівнює r. Нехай $M, N, K -$ точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA відповідно. Доведіть, що

$$\frac{1}{AM \cdot MB} + \frac{1}{BN \cdot NC} + \frac{1}{CK \cdot KA} = \frac{1}{r^2}.$$

5. На поле для «морського бою» (квадрат 10×10) виставляють 10 «кораблів» у такій послідовності: спочатку один «корабель» розмірами 1×4, потім два, три та чотири «кораблі» відповідно з розмірами 1×3, 1×2 та 1×1. Правила не дозволяють «кораблям» торкатися один одного навіть вершинами. Чи може трапитися так, що коли частину «кораблів» уже виставлено, наступного немає де розмістити?

11 клас

1. Дослідіть, при яких натуральних n вираз $n^2 + 3n + 5$ ділиться на 121.

2. Знайдіть найменше значення функції

$$y = |x-1| + |x-2| + ... + |x-2007|.$$

3. Доведіть, що $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$

4. Точка M всередині рівностороннього трикутника ABC віддалена від його вершин A, B, C на $\sqrt{3}$, 3 та $2\sqrt{3}$ $см$ відповідно. Під якими кутами з точки M видно сторони цього трикутника?

5. Із будь-яких трьох відрізків із заданих шести можна скласти трикутник. Чи обов'язково із цих шести відрізків вдасться скласти тетраедр?

2008 рік

7 клас

1. Якщо задумане двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці вийде 4, а в остачі 3. Якщо від задуманого числа відняти подвоєну суму його цифр, то вийде 25. Яке число задумано?

2. Знайти всі можливі значення суми трьох попарно різних натуральних чисел, добуток яких дорівнює 2007.

3. На площині дано чотири різні точки O, A, B, C. Півпрямі OM та ON є бісектрисами кутів AOC та BOC відповідно, причому кут MON є прямим. Довести, що точка O належить прямій AB.

4. Розв'язати рівняння $\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3$.

5. Розкласти дужки і знаки арифметичних дій так, щоб отримати правильну рівність: $\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6024} = 2008$.

8 клас

1. Довести, що у прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.

2. Сума кількох цілих чисел ділиться на 6. Доведіть, що і сума їх кубів ділиться на 6.

3. Точки A_1 та A симетричні відносно сторони BC, а точки C_1 та C – відносно сторони AB трикутника ABC. Знайдіть величину кута AC_1B, якщо відомо, що точки A_1, B, C_1 лежать на одній прямій і $A_1B = 2BC_1$.

4. У стіні коридору замку є 2008 закритих дверей. Один за одним 2008 сторожів починають рухатися з початку коридору до його кінця. При цьому перший сторож відкриває всі двері, другий змінює положення кожних других дверей, третій – положення

кожних третіх дверей, і так далі. Скільки дверей буде відкрито після проходження всіх сторожів?

5. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$ ціле

9 клас

1. Про натуральні числа x, y, z висловлено такі три твердження: а) $x+y+2z-$ просте число; б) $x+2y+z-$ просте число; в) $2x+y+z-$ просте число. Доведіть, що принаймні одне з цих тверджень хибне.

2. Перевірте, чи для кожного додатного числа a хоч одне з чисел: $\frac{a^9+2}{a^2}$, $\frac{a^9+2}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$ не менше від 2.

3. Всередині опуклого п'ятикутника довільним чином вибрали дві точки. Доведіть, що існує чотирикутник з вершинами у вершинах п'ятикутника, в якому знаходяться обидві вибрані точки.

4. Не користуючись калькулятором, обчисліть значення виразу

$$A=\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\cdot\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\cdot\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

при $a=2008$.

5. Доведіть, що діаметр круга, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнє пропорційне між основами трапеції.

10 клас

1. Знайти множину всіх точок на площині, координати (x, y), яких задовольняють умову: $x^2+4y^2+1=4|xy|-2|x|+4|y|$.

2. Дослідіть кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt{x^2-6x+10}+\sqrt{x^2-6x+18}=a$$

в залежності від значень параметра a.

3. Знайдіть найменше значення виразу $A=x^{2007}+x+\frac{2008}{x}$ на інтервалі $(0,+\infty)$.

4. Точки M, N, K вибрані відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK=\angle BMN=\angle ACB$. Нехай $L-$ точка перетину AN та BK. Довести, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

5. Чи існує таке натуральне число n, що сума $1+2+...+n$ закінчується на 2008? У випадку існування вказати хоч одне таке n.

11 клас

1. Дослідити кількість розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} y-|x|-|x-4|=0, \\ y+x^2-4x=a^2-2a-3 \end{cases}$$
в залежності від значень параметра a.

2. Чи можна серед чисел 1, 2, 3, …, 11 вибрати такі два числа, добуток яких дорівнює сумі решти дев'яти чисел?

3. Знайти всі такі функції $f: R \to R,$ що для будь-яких дійсних x, y виконується рівність $f\left(x \cdot f\left(y\right)\right)=x^2y^4.$

4. У чотирикутник $ABCD$ можна вписати і навколо нього можна описати коло. Знайти площу цього чотирикутника, якщо $AB=1,\ DC=2,\ CD=a.$

5. Для кожного натурального n доведіть нерівність
$$\sqrt{1\cdot\left(4n-1\right)}+\sqrt{2\cdot\left(4n-2\right)}+...+\sqrt{\left(2n-1\right)\cdot\left(2n+1\right)}<\pi n^2.$$

2009 рік

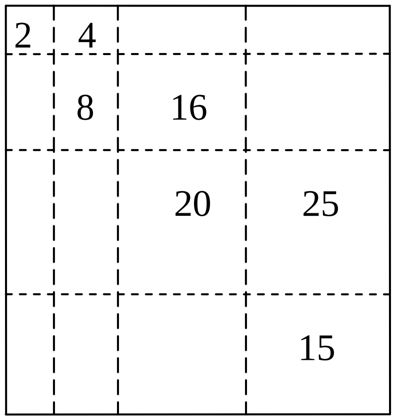
7 клас

1. У супермаркеті введені знижки. За купівлю товарів на суму від 300 гривень, покупець отримує знижку 4%, а при покупці товарів на суму від 600 гривень, він отримує знижку 10%. На яку найбільшу суму (з точністю до копійки) зможе придбати товарів покупець, якщо у нього у кишені: а) 594 гривні; б) 534 гривні?

2. Шахівниця розміром 7×7 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою ходів цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір?

3. Усі числа від 1 до 2009 у довільному порядку написали в рядок у вигляді одного числа. Чи може одержане число бути квадратом цілого числа?

4. Прямокутник розбитий на 16 різних прямокутників, у яких невідомі довжини сторін. Відома площа сімох малих прямокутників, які утворилися внаслідок розбиття. Їх площі наведені на рисунку. Знайти площу усього заданого великого прямокутника. Відповідь обґрунтувати.



8 клас

1. Знайдіть найбільше трицифрове число, яке задовольняє такі три умови:

1) саме число є простим;

2) число, записане тими ж самими цифрами у зворотному порядку також є простим;

3) добуток цифр цього числа є простим.

2. Цілі числа a,b,c задовольняють умову: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Доведіть, що число $a^2+b^2+c^2$ є повним квадратом деякого цілого числа.

3. Усі числа від 1 до 2009 у довільному порядку написали в рядок у вигляді одного числа. Чи може одержане число бути квадратом цілого числа?

4. Шахівниця розміром 7×7 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір?

5. Задано трикутник $A_1A_2A_3$ та точка X, яка не належить жодній з прямих, які містять сторони трикутника. Нехай l_i – пряма, яка проходить через точку A_i перпендикулярно до прямої XA_i, $i=1,2,3$. Нехай B_1 є точкою перетину прямих l_2,l_3, B_2 – точка перетину прямих l_3,l_1, а точка B_3 є перетином прямих l_1,l_2, а точки H_1,H_2,H_3 – точки перетину висот трикутників $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ відповідно. Довести, що трикутники $A_1A_2A_3$ та $H_1H_2H_3$ рівні.

9 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{9}{2(x+y)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \\ \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3-y^2}. \end{cases}$

2. Знайти найменше натуральне число, добуток цифр якого складає 320.

3. Довести, що для будь-яких дійсних чисел $a,b \in [-1,1]$ справджується нерівність: $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \le 1$.

4. Задано трикутник $A_1A_2A_3$ та точка X, яка не належить жодній з прямих, які містять сторони трикутника. Нехай l_i – пряма, яка проходить через точку A_i перпендикулярно до прямої XA_i, $i=1,2,3$. Нехай B_1 є точкою перетину прямих l_2, l_3, B_2 – точка перетину прямих l_3, l_1, а точка B_3 є перетином прямих l_1, l_2, а точки H_1, H_2, H_3 – точки перетину висот трикутників $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ відповідно. Довести, що трикутники $A_1A_2A_3$ та $H_1H_2H_3$ рівні.

5. Шахівниця розміром 2009×2009 пофарбована у шаховому порядку (усі кутові клітини чорні). По шахівниці ходить фішка, яка може ходити з клітини на сусідню по стороні клітину. Якщо фішка попадає на деяку клітину, то ця клітина змінює свій колір на протилежний. На початку фішка стоїть у лівому нижньому куті. Чи можна за допомогою цієї фішки перефарбувати усі клітини дошки у чорний колір, якщо ходити відразу у зворотному напрямі заборонено?

10 клас

1. Пряма l_1 перетинає параболу $y = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$ у двох точках A і B. Пряма l_2, паралельна прямій l_1, перетинає цю параболу в точках C і D. Довести, що сума абсцис точок A і B дорівнює сумі абсцис точок C і D.

2. а) Відомо, що для натуральних чисел a,b,c,d кожне з чисел ab, bc, cd, da є кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел a,b,c,d також є кубом натурального числа.

б) Відомо, що для натуральних чисел a,b,c,d,e кожне з чисел ab, bc, cd, de, ea є кубом натурального числа. Чи обов'язково кожне з чисел a,b,c,d,e також є кубом натурального числа.

3. На папері у клітинку виділено квадрат 2009×2009. Два гравці по черзі зафарбовують у жовтий колір одиничні відрізки, які є межами одиничних квадратів, що розташовані всередині чи на межі виділеного квадрату та ще не були зафарбовані. Перемагає той гравець, після ходу якого вперше з'являється одинична клітинка, усі чотири сторони якої зафарбовані у жовтий колір. Хто перемагає у цій грі при правильній грі обох – той, хто починає чи той, хто ходить другим?

4. У трикутнику ABC проведено бісектриси AX та BY, які перетинаються між собою у точці I, а також перетинають описане навколо трикутника ABC коло у точках E та D відповідно. Відрізок DE перетинає сторони AC і BC у точках F і K відповідно. Довести, що чотирикутник $IKCF$ – ромб.

5. Довести, що для будь-яких дійсних чисел $a,b\in[-1,1]$ справджується нерівність: $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\le1$.

11 клас

1. Порівняйте числа

$\sqrt{2008+\sqrt{2009}}+\sqrt{2009+\sqrt{2008}}$ та $\sqrt{2008+\sqrt{2008}}+\sqrt{2009+\sqrt{2009}}$.

2. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких число 3π є періодом функції $f(x)=\cos nx\cdot\sin\dfrac{2009x}{n^2}$.

3. У трикутнику ABC проведено бісектриси AX та BY, які перетинаються між собою у точці I, а також перетинають описане навколо трикутника ABC коло у точках E та D відповідно. Відрізок DE перетинає сторони AC і BC у точках F і K відповідно. Довести, що чотирикутник $IKCF$ – ромб.

4. Назвемо заповнення квадрату 2009×2009, розбитого на одиничні квадратики, „правильним", якщо його заповнено числами $1,2,\ldots,2009$ таким чином, що у кожному рядку та у кожному стовпчику присутнє кожне з цих чисел. Розглянемо відстань від центральної клітини до найближчої клітини з числом 1 (під відстанню розуміється найменше число ходів, які потрібні шаховому королю, щоб дістатись до клітинки). Яке найбільше значення може набувати така відстань?

5. Чи існує такий многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $|c|\le2009$, усі три корені якого цілі числа та $|f(34)|$ – просте число?

2010 рік

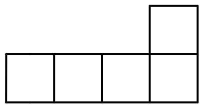
І тур

7 клас

1. У виразі $12-11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1$ певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Знайдіть найменше натуральне число $n>100$ таке, що серед чисел $n-100, n-99, ..., n-1, n, n+1, ..., n+99, n+100$ (усього чисел 201) найбільшу суму цифр має число n. Відповідь обґрунтуйте.

3. Кожна з дівчинок – Оксана, Олеся, Оля та Олександра – одержала прямокутник розміром 2010×10. Їм запропонували прямолінійним розрізом розрізати цей прямокутник на дві частини таким чином, щоб з цих частин, не накладаючи їх одна на другу, можна було скласти трикутник. Усі вони справилися із завданням. Чи могли вони отримати чотири попарно різні трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

4. Яку найбільшу кількість фігурок вигляду  можна розташувати у квадраті розміром 8×8 так, щоб вони не накладались одна на іншу? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. У виразі $2010-2009-2010-2009-...-2010-2009$ (всього 2010 чисел) певним чином розставили дужки та порахували значення отриманого виразу. Яке найбільше значення могли отримати? Відповідь обґрунтуйте.

2. Олеся та Андрій кидають по одному разові стандартний гральний кубик. Знайдіть ймовірність того, що кількість очок у Олесі більша, ніж кількість очок, які випали у Андрія. Відповідь обґрунтуйте.

3. При яких натуральних n серед чисел $n, n+1, n+2, ..., n^2$ можна вибрати чотири попарно різні числа $a, b, c, d,$ для яких виконується рівність $ab=cd$. Відповідь обґрунтуйте.

4. У гострокутному трикутнику ABC точки M та N – середини сторін AB та AC відповідно. Для довільної точки $S,$ що лежить на стороні $BC,$ доведіть нерівність $(MB-MS)(NC-NS)\le 0.$

5. Чи існують такі попарно різні натуральні числа $a_1, a_2, ..., a_k$, більші від 1, для яких виконується рівність

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 2010\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k}\right):$$

а) якщо $k = 2$; б) якщо $k = 12$?

9 клас

1. Побудуйте графік рівняння $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$.

2. Прямокутник розміром 2010×11 розбито на одиничні квадратики. Зовнішній шар клітин цього прямокутника товщиною в одну клітинку пофарбовано у жовтий колір, а шар клітин товщиною в одну клітинку, який межує з зовнішнім шаром, пофарбовано у блакитний колір. Наступний шар клітин, який межує з блакитним, пофарбовано у жовтий колір, і так далі. Знайдіть кількість жовтих та блакитних клітин у цьому прямокутнику.

3. При яких x значення функції $y = \left(\sqrt{x}\right)^{2009} + \left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}$ є цілим числом?

4. Точка O – центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Пряма AO перетинає сторону BC в точці D так, що $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Знайдіть кути трикутника ABC.

5. Число $n > 2010$ задовольняє умову: для кожного $k \in \{1, 2, ..., n-2010\}$ числа $n+k$ та $2010+k$ є взаємно простими. Знайдіть усі такі числа n.

10 клас

1. Розглянемо чотирицифрове число, а також число, записане тими ж цифрами у зворотному порядку. Яку найбільшу кількість цифр 5 може мати у своєму записі модуль різниці цих чисел?

2. Розв’яжіть рівняння

$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 +$$
$$+(x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0.$$

3. Всередині квадрата $ABCD$ вибрано точку O. Квадрат $A'B'C'D'$ – образ квадрата $ABCD$ при гомотетії з центром у точці O

та коефіцієнтом $k>1$ (точки A', B', C', D' є образами точок A, B, C, D відповідно). Доведіть, що сума площ чотирикутників $A'ABB'$ та $C'CDD'$ дорівнює сумі площ чотирикутників $B'BCC'$ та $D'DAA'$.

4. Дійсні числа x, y, z задовольняють умову $\frac{1}{xy}=\frac{y}{z-x+1}=\frac{2}{z+1}$. Доведіть, що одне з чисел є середнім арифметичним двох інших.

5. Вчителька розсадила за круглим столом своїх учнів, серед яких було втричі менше хлопчиків, ніж дівчаток. Виявилося, що серед усіх пар учнів, які сидять поруч, пар дітей одної статі у два рази більше, ніж пар дітей різної статі. При якій мінімальній кількості дітей за столом це могло трапитися?

11 клас

1. Знайдіть всі натуральні значення n, при яких виконується рівність $-2^0+2^1-2^2+2^3-2^4+\ldots-\left(-2\right)^n=4^0+4^1+4^2+\ldots+4^{2010}$.

2. У кубі розміром $11\times11\times11$ зовнішній шар одиничних кубиків пофарбовано у жовтий колір, наступний шар, що дотикається до цього зовнішнього жовтого, фарбується у блакитний колір, наступний шар – знову у жовтий, і так далі. Знайти загальну кількість жовтих та блакитних кубиків.

3. Чотирикутник $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями вписаний в коло. Точки $K, L, M, Q-$ точки перетину висот трикутників ABD, ACD, BCD, ABC відповідно. Довести, що чотирикутник $MLKQ$ рівний чотирикутнику $ABCD$.

4. Натуральні числа m, n такі, що число 2^n+3^m ділиться на 5. Доведіть, що число 2^m+3^n також ділиться на 5.

5. Знайдіть невід'ємні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2y^2+1=x^2+xy, \\ y^2z^2+1=y^2+yz, \\ z^2x^2+1=z^2+zx. \end{cases}$$

II тур

7 клас

1. Кожна школа делегувала рівно трьох учнів на районну олімпіаду. Андрій, Богдан та Олеся представляли ліцей «Кубик». Усіх учасників перед початком олімпіади вишикували в одну лінію і роздали послідовно зліва направо номери учасників. Андрій

побачив, що перед ним стільки ж учасників, скільки й після нього. Виявилось, що обидва інших учасники з «Кубика» стоять за ним і мають номери: у Богдана – 19-ий, у Олесі – 28-ий. Скільки шкіл у цьому районі? Відповідь обґрунтуйте.

2. Розріжте квадрат на декілька трикутників таким чином, щоб кожний трикутник мав рівно три сусідні трикутники. При цьому два трикутники вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону або спільний відрізок, який є частиною сторони.

3. Доведіть, що існує як завгодно багато натуральних чисел, у яких сума цифр самого числа дорівнює сумі цифр квадрата цього числа, і які не діляться на 10.

4. У кожній з 2010 клітин, розташованих вздовж кола, записане деяке натуральне число. На деяку з клітин ставиться фішка. Далі ця фішка рухається за годинниковою стрілкою за таким правилом. Вона пересувається на кількість клітин, яка дорівнює числу, записаному у вихідній клітині, після чого число у клітині, куди ця фішка прибула збільшується на 1. Далі вона знову рухається за тим самим правилом. Доведіть, що через деякий час фішка побуває у всіх клітинах хоча б по одному разу. Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. Задача 7.1.

2. Олеся може писати на дошці числа за двома правилами. Для кожного натурального n, яке вже написане на дошці, вона може написати число $3n+13$. Якщо ж записане число є точним квадратом, то вона може також записати квадратний корінь з цього числа. Чи зможе Олеся, використовуючи лише ці два правила, одержати:

а) число 55, якщо вона починала з числа 256;

б) число 256, якщо вона починала з числа 55 ?

3. У гострокутному трикутнику ABC кут $\angle B = 30^0$, H – точка перетину його висот. Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, вписаних у трикутники ABH та CBH відповідно. Знайдіть у градусах величину кута між прямими AO_2 та CO_1.

4. Задача 7.4.

9 клас

1. На дошці записано 16 послідовних натуральних чисел. Андрійко підрахував добуток записаних чисел, а Олеся – суму. Чи могло так трапитись, що у Андрійка та Олесі співпали:

а) три останні цифри результату;

б) чотири останні цифри результату?

2. Задача 8.2.

3. Задача 8.3.

4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^2(b+c-a)}{b+c}+\frac{b^2(c+a-b)}{c+a}+\frac{c^2(a+b-c)}{a+b}\le\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

10 клас

1. Задача 9.1.

2. У змаганнях бере участь 2010 програмістів. У кожному раунді всі програмісти поділяються на дві команди з рівною кількістю учасників. Знайдіть мінімальну кількість раундів, які повинні пройти, щоб кожні два програмісти принаймні у одному з раундів були у різних командах.

3. Задача 9.4.

4. На площині задані точки $A\ne B.$ Точка C рухається по площині таким чином, що $\angle ACB=\alpha,$ де $\alpha-$ фіксований кут з проміжку $\left(0^0,180^0\right).$ Вписане у трикутник ABC коло має центр у точці I та дотикається сторін AB, BC, CA у точках D, E, F відповідно. Прямі AI та BI перетинають пряму EF у точках M та N відповідно. Покажіть, що:

а) відрізок MN має сталу довжину;

б) усі кола, описані навколо трикутників $DMN,$ мають спільну точку.

11 клас

1. На параболі $y=ax^2$ обрані дві точки A та $B.$ Точка $P-$ середина відрізка $AB.$ У точках A та B до параболи проведено дотичні, які перетинаються у точці $T.$ Доведіть, що середина відрізка PT належить параболі.

2. Задача 10.2.

3. Знайти всі пари натуральних чисел $m>1, n>1,$ для яких n^3-1 ділиться на $mn-1.$

4. Задача 10.4.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2001 рік

7.1. Оскільки сума трьох відстаней від B до A, від A до D, від D до C дорівнює відстані від B до C, то ці пункти лежать на одній прямій у такому порядку: B, A, D, C. Отже, $AC = AD + DC = 220\,км.$

7.2. Оскільки $111111 = 3\cdot 33333 + 3\cdot 3333 + 3\cdot 333 + 3\cdot 33 + 5\cdot 3,$ то звідси маємо 17 доданків. Якщо би кількість доданків якогось з перших чотирьох типів була меншою за 3, то від цього загальна кількість доданків лише збільшилась би. Зрозуміло також, що їх не може бути і більше за 3.

7.3. а) Так. Змістимо спочатку білі шашки з другого рядка у перший, а з третього у четвертий. Потім чорні шашки – з першого рядка у другий, а з четвертого – у третій. Наступні 8 ходів витратимо для пересування білих шашок вдовж рядків вправо, а чорних шашок – вліво. Ще два ходи будуть потрібні, щоб у кожному рядку стало по одній білій та по одній чорній шашці. І, нарешті, два останні ходи білими шашками вправо, а чорними вліво приведуть до потрібної конфігурації.

б) Ні. Поставимо у відповідність кожній шашці номер стовпчика, у якому вона знаходиться. Спочатку сума таких номерів дорівнювала 21. При вказаних переміщеннях така сума або не змінюється, або змінюється на 2, а отже, весь час залишається непарною. Тому вона не зможе стати рівною 6, що відповідатиме всім чорним шашкам у першому стовпчику.

7.4. В обох випадках – так. Добавимо до наявних чисел число 0, квадрат якого не вплине на вказані суми. Легко бачити, що $0^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2.$ Крім того, при кожному натуральному n справедлива рівність

$$(8n)^2 + (8n+3)^2 + (8n+5)^2 + (8n+6)^2 =$$
$$= (8n+1)^2 + (8n+2)^2 + (8n+4)^2 + (8n+7)^2.$$

Отже, для досягнення потрібної рівності для суми квадратів достатньо буде включати у першу групу числа вигляду $8n, 8n+3, 8n+5, 8n+6,$ а другу – числа $8n+1, 8n+2, 8n+4, 8n+7,$ де $n \in Z_+$. Зайвий уже тепер нуль можна відкинути. Залишилось лише врахувати, що і 15, і 999 при діленні на 8 дають остачу 7.

8.1. З умови випливає, що $x \geq 0$. Тому рівняння зводиться до такого $|x-2| = x.$ З нього знаходимо $x = 1.$

8.2. Нехай $x-$ довжина половини шляху між заданими пунктами у кілометрах. Тоді середня швидкість на всьому шляху дорівнюватиме $\dfrac{2x}{x/4 + x/6} = 4{,}8$ (*км/год.*). Оскільки у зворотному напрямі турист частину шляху рухався зі швидкістю, більшою за середню швидкість у напрямі від *A* до *B*, то затратити на зворотний шлях більше часу, ніж на шлях від *A* до *B*, він не міг. Таким чином дана задача, запропонована МОН України, виявилася некоректною.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати аналогічну задачу при умові, що на зворотний шлях турист затратив на дві хвилини менше, ніж на шлях від *A* до *B*. (Відповідь: 12 *км*).

8.3. Якщо число n при діленні на 3 дає остачі 0, 1, 2, то число n^3 при діленні на 9 матиме відповідно остачі 0, 1, 8. Отже, ліва частина рівності при діленні на 9 може мати лише остачі 0, 1, 2, 7, 8. Тому вона не може дорівнювати числу 2001 з остачею 3 від ділення на 9.

8.4. Проведемо через центр O_1 даного квадрата відрізки $M_1N_1 \,||\, MN$ та $P_1Q_1 \,||\, PQ$ з кінцями на сторонах квадрата. Тоді

$$P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{AM_1O_1Q_1} + P_{CP_1O_1N_1} = P_{BM_1O_1P_1} + P_{DQ_1O_1N_1} = P_{BMOP} + P_{DQON}.$$

8.5. Не зможе. Купі із n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n. Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k відповідно, і два прямокутники зі сторонами m та k. Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk, яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою виявиться площа $\dfrac{1}{2} \cdot 2001^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2001 = 1000 \cdot 2001,$ і вона не залежить від порядку зроблених ходів.

9.1. Зрозуміло, що $a > 0,\ b > 0.$ Тому знаки модуля можна опустити і, після зведення лівої частини до спільного знаменника, скоротити на $\sqrt{a} + \sqrt{b}.$ У результаті отримаємо нерівність $\dfrac{a - \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \geq 1,$ яка рівносильна нерівності $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$

9.2. Якщо $y<0,$ то $[y]\le -1.$ Тоді $[x]=1-[y]\ge 2.$ Отже, $x\ge 2,$ звідки випливає $x|x|+y|y|=x^2-y^2=(x-y)(x+y)\ge 2([x]+[y])=2,$ що суперечить першому рівнянню. Аналогічно доводимо, що не може бути $x<0.$ Але тоді $0\le x\le 1$ та $0\le y\le 1,$ причому на основі другого рівняння хоч одне з цих чисел не менше одиниці. Звідси знаходимо $x=1,$ $y=0$ та $x=0,$ $y=1.$

9.3. Нехай фіксованими є точки *A* та *B*, а точка *C* рухається по колу. Тоді точка перетину медіан трикутників *ABC* утворюється за допомогою гомотетії з центром у середині відрізка *AB* та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Отже шуканим геометричним місцем точок є образ кола з виколотими точками *A* та *B* при вказаній гомотетії, тобто також коло з двома виколотими точками.

9.4. Якщо рухати один з квадратів паралельно до сторін іншого квадрата, то кут між вказаними діагоналями восьмикутника змінюватися не буде. За допомогою двох таких взаємно перпендикулярних переміщень можна добитися, щоб центри обох квадратів співпали між собою. Оскільки при повороті на 90^0 навколо спільного центра кожен квадрат переходить сам у себе, то при такому повороті діагональ *BD* перейде у діагональ B_1D_1. А отже, ці діагоналі перпендикулярні.

9.5. До сторін квадрата прилягають 28 його клітинок. Легко переконатися, що вказані фігурки зможуть покрити не більше восьми з них. Отже, принаймні 20 прилягаючих до границі клітинок вирізаними не будуть. Решти 44-ьох клітинок дошки вистачить не більше, як на 8 фігурок. Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що 8 фігурок вирізати вдасться.

10.1. Оскільки

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},\ (k+1)^2-(k+1)=k^2+k,$$

то після очевидних спрощень рівняння запишеться у вигляді $\cos(n^2+n)x=-1.$ Звідси знаходимо $x=\dfrac{(2m+1)\pi}{n^2+n},$ $m\in Z.$

10.2. а). Безпосереднім обчисленням переконуємося, що $a(k-1)a(k)=a(k^2)\in S.$

б). Твердження задачі випливає з нерівності

$$a\left(m^2-2\right)=m^4-3m^2+3<m^4-3m^2+9=a\left(m-2\right)a\left(m+1\right)<$$
$$<m^4-m^2+1=a\left(m^2-1\right)\ \text{при}\ \ n=m-2>2001,\ k=m+1>2001.$$

10.3. Дана нерівність рівносильна такій очевидній нерівності
$$\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+\left(b-\frac{e}{2}\right)^2+\left(c-\frac{e}{2}\right)^2+\left(d-\frac{e}{2}\right)^2\geq 0.$$

10.4. Проведемо діагональ CE. Оскільки чотирикутник $ABCE$ вписаний, то $\angle BAE=\angle QCE$. Оскільки прямі AB та PQ паралельні, то $\angle BAE+\angle QPE=180^0$. Отже, також $\angle QCE+\angle QPE=180^0$. Тому навколо чотирикутника $CQPE$ можна описати коло. Звідси випливає, що $\angle PCQ=\angle PEQ$ та $\angle BCD=\angle AED$. Тоді $AD=BD$.

10.4. Припустимо, що таке перефарбування можливе. Для конкретності будемо вважати, що спочатку чорною була вершина A_1 правильного 2001-кутника $A_1A_2...A_{2001}$. Позначимо через a_k кількість разів, при яких відповідна вершина A_k вибиралася центральною у вказаних перефарбуваннях. Нехай
$$S=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\left(a_4+a_5+a_6\right)+...+\left(a_{1999}+a_{2000}+a_{2001}\right).$$
Оскільки колір вершини змінювався тоді і тільки тоді, коли центральною обиралася дана вершина або сусідня з нею, то суми, записані у круглих дужках, чисельно дорівнюють загальній кількості змін кольору у вершинах $A_2,\ A_5,...,A_{2000}$ відповідно, а отже, будуть парними числами. Адже колір у всіх цих вершинах має залишитися білим, як і на початку, а кожне перефарбування змінює колір на протилежний. Тому і сума S має бути парною. З іншого боку, дана сума записується у вигляді
$$S=\left(a_{2001}+a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4+a_5\right)+...+\left(a_{1998}+a_{1999}+a_{2000}\right).$$
Оскільки колір у вершині A_1 має змінитися з чорного на білий, то отримаємо, що тут у перших дужках сума буде непарною, а в усіх інших дужках – парною. Адже колір у вершинах $A_4,...,A_{1999}$ має залишитися білим. А отже, S повинна бути непарною. Отримане протиріччя доводить, що вказане перефарбування неможливе.

11.1. Див. розв'язання задачі 10.1.

11.2. Із заданої рівності випливає, що $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n}=\dfrac{a_{n+1}}{a_na_{n-1}}$ при всіх $n\geq 2$. Звідси отримуємо, що

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = \dfrac{a_3}{a_2 a_1} = 2,\ \ a_{n+1} = 2a_n a_{n-1}$ при всіх $n \geq 2.$ Тому всі члени цієї послідовності є натуральними числами. Крім того, числа $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2a_{n-1}$ є парними. Отже, $a_{2001} = \dfrac{a_{2001}}{a_{2000}} \cdot \dfrac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_2}{a_1} \cdot a_1$ ділиться на 2^{2001}.

11.3. Покладемо у даному функціональному рівнянні послідовно $y = -f(x)$ та $y = x^2$. Тоді при всіх $x \in R$ виконуватимуться рівності: $f\left(x^2 + f(x)\right) = 4\left(f(x)\right)^2$ та $f\left(x^2 + f(x)\right) = 4x^2 f(x).$ Прирівнявши при $x = 0$ праві частини цих рівностей, одержимо $f(0) = 0.$ Оскільки $f(x)$ не може дорівнювати нулю при інших $x,$ то із рівності правих частин випливатиме, що $f(x) = x^2$ при $x \neq 0.$ Перевірка показує, що функція $f(x) = x^2,\ x \in R,$ задовольняє дане рівняння.

11.4. Нехай $B -$ проекція точки A на пряму $l.$ Проведемо пряму m на відстані AB від прямої $l.$ Якщо $N \in m,$ і площина ABN перпендикулярна до прямої $l,$ то спільний перпендикуляр до прямих l та AN є одночасно висотою і медіаною рівнобедреного трикутника ABN. Якщо ж $M \in m$ і не співпадає з точкою $N,$ то проведемо площину, перпендикулярну до $l,$ через точку $L -$ середину відрізка MN. Нехай O та P є відповідно точками перетину цієї площини з прямими l та AM. Тоді $OP \perp l.$ Крім того, оскільки $AN \parallel PL,$ то $P -$ середина відрізка AM. Але $OA = ON = OM,$ то OP є не лише медіаною, а й висотою рівнобедреного трикутника AOM. Таким чином, пряма m є шуканою.

11.5. Див. розв'язання задачі 10.5.

2002 рік

7.1. а). Оскільки $m < n,$ то $1 - \dfrac{m}{n} = \dfrac{n-m}{n} < \dfrac{n-m}{m} = \dfrac{n}{m} - 1.$ Отже, правильний дріб $\dfrac{m}{n}$ ближчий до 1, ніж неправильний дріб $\dfrac{n}{m}$.

б). $2002 = \left(\dfrac{n}{m} - 1\right) : \left(1 - \dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{n}{m}.$ Отже, шуканою є, наприклад, пара дробів $\dfrac{1}{2002}$ та $\dfrac{2002}{1}$.

7.2. Принаймні три відзначені точки, наприклад, *A, B, C*, лежать на одній прямій. Якщо би відзначена точка *D* цій прямій не належала, то на прямих *AD, BD, CD* існувало би ще по одній з відзначених точок, відмінних від *A, B, C, D*. Але у такому разі всіх відзначених точок повинно бути не менше 7.

7.3. Можуть. Наприклад, якщо нанести поділки на відстанях 1 *см*, 2 *см*, 6 *см* та 10 *см* від одного з кінців лінійки.

7.4. Добавимо до заданих чисел ще одне число нуль. Далі, зауважимо, що у кожній двадцятці чисел $20n,\ 20n+1,\ \dots,\ 20n+19$ пари $(20n,\ 20n+19)$, $(20n+2,\ 20n+17)$, $(20n+4,\ 20n+15)$, $(20n+6,\ 20n+13)$, $(20n+8,\ 20n+11)$ попадають до однієї групи, а пари $(20n+1,\ 20n+18)$, $(20n+3,\ 20n+16)$, $(20n+5,\ 20n+14)$, $(20n+7,\ 20n+12)$, $(20n+9,\ 20n+10)$ – до іншої. Оскільки у кожній зі цих пар суми чисел однакові, то для кожної двадцятки суми чисел, які попали у різні групи, також будуть однаковими. Отже, достатньо розглянути лише числа 2000, 2001 та 2002. Зрозуміло, що у такому разі сума всіх чисел другої групи буде на 2000 + 2002 – 2001 = 2001 більшою, ніж сума всіх чисел першої групи. Добавлене нами число нуль на цю різницю не впливає.

8.1. Нехай було *n* годинників вартістю *x*. Тоді $nx-13n=54$, $18n-nx=81$. Додавши ці рівняння, одержимо $5n=135,\ n=27$. Тоді $x=15$.

8.2. Справді, такими є, наприклад, всі числа $k=m^3n^2$, де $m\in N$, $m\ge 2$. Для них $nk+1=(mn)^3+1=(mn+1)\left(m^2n^2-mn+1\right)$ – складене число. Зауважимо, що $m=1$ не підійде для $n=1$.

8.3. Нехай *AM* – медіана, *BH* – висота, *CK* - бісектриса, *S*, Q, P є відповідно точками перетину відрізків *AM* та *BH*, *CK* та *BH*, *CK* та *AM*. Якщо $\angle SQP=60^0$, то $\angle QCH=30^0$, $\angle ACB=60^0$. Якщо $\angle QSP=60^0$, то $\angle ASH=60^0$, $\angle SAH=30^0$, $\angle MAC=30^0$, $\angle AMC=90^0$. Отже, *AM* є також висотою. А тому $AB=BC$ і, оскільки $\angle ACB=60^0$, то трикутник ABC рівносторонній. Але у такому разі точки *P, Q, S* співпадають. Отримали протиріччя. Отже, трикутник *PQS* не може бути рівностороннім.

8.4. Справді, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2001}-\frac{1}{2002}=$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2002}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1001}\right)=\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+...+\frac{1}{2002}.$$

8.5. Найлегший камінь важить $468-49\cdot 2=370$ (*кг*). Але $370+372+374+376+378+380+382+384=3016>3000,$ то на одну автомашину можна завантажити не більше 7 каменів. У такому разі необхідно буде не менше 8 вантажівок. Їх вистачить, якщо на перші 6 із них вантажити по 6 каменів у порядку спадання їхньої ваги, а на дві останні – по 7 каменів. Справді, $6\cdot 468<3000,$ $7\cdot 396<3000.$ Тут враховано, що перші 36 каменів не важчі за 468 *кг*, а 14 останніх – не важчі за 396 *кг*.

9.1. Нехай у цих садках було відповідно x_1, x_2, x_3, x_4 та x_5 дерев. Тоді $x_1+x_2=9,$ $x_2+x_3=13,$ $x_3+x_4=19,$ $x_4+x_5=11,$ $x_5+x_1=16.$ Додавши ці рівності, знайдемо $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=34.$ Але, віднімаючи тепер третє та п'яте рівняння, будемо мати, що $x_2=-1.$ Отже, Петрусь помилився у своїх підрахунках.

9.2. Могли. Наприклад, якщо $x-$ корінь рівняння $x^2-2001=x.$ Тоді на кожному кроці отримуватимемо початкове число.

9.3. Оскільки $0<a<b+c,$ $0<b<c+a,$ $0<c<a+b,$ то $a^2<a(b+c),$ $b^2<b(c+a),$ $c^2<c(a+b).$ Залишилось тільки додати три останні нерівності.

9.4. Добудуємо трикутник *ABC* до паралелограма *ABCH*. Тоді $\angle MBP=180^0-\angle ABC=\angle BCH,$ $MB=AB=HC,$ $PB=BC.$ Отже, $\triangle MBP=\triangle HCB.$ А оскільки точка O лежить на перетині діагоналей паралелограма *ABCH*, то $\angle BMP=\angle CBH=\angle CBO.$

9.5. Зможуть. Нехай доріжки утворюють трикутник *ABC* із середніми лініями *MP*, *MK*, *PK*, причому точка *M* лежить на *AB*, *P* – на *BC*, *K* – на AC. Розмістимо спочатку сторожів у точках *M* та *P*. Якщо мавпа на трикутнику *MBP*, то ловля очевидна. В іншому разі сторож із *P* рухається по *PC*, поки не опиниться із мавпою на одній прямій, паралельній до *AC*, а дальше зберігає умову такої паралельності. Зрозуміло, що при цьому він не дасть мавпі втекти через точку *P*. Тепер сторож із *M* рухається по *MK*, поки не опиниться з мавпою на одній прямій, паралельній до *AC*, чи, якщо мавпа знаходиться на відрізку *AK*, - паралельній до *AB*. Зрозуміло, що він заблокує мавпі втечу через точки *M* та *K*. Якщо тепер мавпа знаходиться на трикутнику *AMK*, то сторожі мають змогу зібратись у точках *M* та *K*, а якщо мавпа на трикутнику *PKC*, то вони зосередяться у точках *K* та *P*. У кожному з цих випадків мавпу легко впіймати.

10.1. Розмалюємо таблицю у шаховому порядку. Тоді всі непарні числа опиняться у клітинках одного кольору, а всі парні – у клітинках іншого кольору. Відповідно у кожному стовпчику виявиться не більше трьох непарних чисел. Оскільки 2 – єдине парне просте число, то більше чотирьох простих чисел в одному стовпчику опинитись не може. Такою є, наприклад, таблиця, в якій у третьому стовпчику зверху вниз записані числа 19, 2, 5, 8, 11. Решту чисел такої таблиці запишіть самостійно.

10.2. $\cos 20^0 \cos 30^0 \sin 50^0 - \cos 10^0 \sin 40^0 \sin 80^0 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 50^0 + \cos 10^0\right)\sin 50^0 - \frac{1}{2}\cos 10^0\left(\cos 40^0 - \cos 120^0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos 50^0 \sin 50^0 + \cos 10^0 \cos 120^0\right) = \frac{1}{4}\left(\sin 100^0 - \cos 10^0\right) = 0.$$

10.3. Нехай у трапеції *ABCH* більша основа $AH = a,$ менша основа $BC = b,$ відрізок $MK = x$ ділить площу трапеції пополам. Продовжимо сторони *AB* та *CH* до їх перетину у точці *P*. Трикутники *APH*, *MPK* та *BPC* гомотетичні. Тому $S_{\triangle APH} = ka^2,$ $S_{\triangle MPK} = kx^2,$ $S_{\triangle BPC} = kb^2$ при деякому k. Оскільки площі трапецій *AMKH* та *MBCK* рівні між собою, то $ka^2 - kx^2 = kx^2 - kb^2$. Звідси отримуємо $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}.$

10.4. $f\left(f\left(1\right)\right) + f^2\left(1\right) = 7.$ Отже, $1 \le f\left(1\right) \le 2.$ Якщо $f\left(1\right) = 1,$ то $f\left(1\right) + 1^2 = 7,$ $f\left(1\right) = 6.$ Протиріччя. Отже, $f\left(1\right) = 2.$ Тоді $f\left(2\right) + 2^2 = 7,$ $f\left(2\right) = 3.$ Припустимо, що $f\left(n\right) = n + 1.$ Для $n = 1$ та $n = 2$ це вірно. Якщо припустити, що це вірно для $n = k,$ то отримаємо $f\left(k+1\right) + \left(k+1\right)^2 = k^2 + 2k + 3,$ $f\left(k+1\right) = k + 2.$ Отже, $f\left(n\right) = n + 1$ для всіх $n \in N.$

10.5. Досить довести, що у кожній групі сума квадратів перемог усіх команд групи дорівнює сумі квадратів їхніх поразок. Справді, якщо у групі була $n+1$ команда, то одержимо, що $V_1^2+\ldots+V_{n+1}^2$ – сума квадратів їхніх перемог, а $(n-V_1)^2+\ldots+(n-V_{n+1})^2$ – сума квадратів їхніх поразок. Різниця між такими сумами дорівнює $2n(V_1+\ldots+V_{n+1})-(n+1)n^2=2n\dfrac{(n+1)n}{2}-(n+1)n^2=0,$ оскільки сума всіх перемог дорівнює сумі всіх зіграних у групі ігор. Таким чином, виділена статистична характеристика не залежить від кількості команд, які беруть участь у змаганнях.

11.1. Попередньо спрощуємо вираз:

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\begin{cases}1-\sqrt{x-1}, & 1\le x\le 2,\\ \sqrt{x-1}-1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Тепер побудова графіка очевидна.

11.2. Задана система рівнянь рівносильна наступній:

$$(x+1)(y+1)=2,\ (y+1)(z+1)=1001,\ (z+1)(x+1)=2002.$$

Перемножуючи ці рівняння, одержимо $(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 2002.$ Отже, $x+1=2,\ \ y+1=1,\ z+1=1001$ або $x+1=-2,\ \ y+1=-1,$ $z+1=-1001.$ Звідси знаходимо два розв'язки: $x=1,\ y=0,\ z=1000$ та $x=-3,\ y=-2,\ z=-1002.$

11.3. Зауважимо, що вписані кути, які спираються на дуги *AB*, *BC*, *CE*, *EA* є гострими. Тому центр кола знаходиться всередині чотирикутника *ABCE*. Оскільки $\angle BAC+\angle ABE=90^0$, то

$$S_{\vartriangle BOC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC=\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle BAC=$$

$$=\frac{1}{2}R^2\sin 2\angle ABE=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOE=S_{\vartriangle AOE}.$$

Так само доводимо рівність площ трикутників *AOB* та *COE*.

11.4. Нехай *AB* – найбільше ребро цієї піраміди. Тоді $(AC+AE-AB)+(BC+BE-AB)=(AC+BC-AB)+(AE+BE-AB)>0.$ А отже, вірною є хоч одна з нерівностей: $AC+AE>AB$ чи $BC+BE>BA.$ Тобто хоч одна з вершин *A* або *B* задовольняє сформульоване твердження.

11.5. Число, виписане тричі, є спільним дільником або лише пари (a,c), або лише пари (b,d). У першому випадку воно є також дільником числа $a+c=3\cdot 2^{2001}$. Оскільки a та c непарні, то таким дільником може бути лише число 3, бо число 1 виписувалось 4 рази. Аналізуючи остачі степенів двійки від ділення на 3, легко перевірити, що a,c,d на 3 діляться , а b – ні. У другому випадку це число має бути також дільником числа $d-b=4025=25\cdot 7\cdot 23.$ Але b та d не діляться ні на 25, ні на 7, ні на 23. Проте a,b,d діляться на 5, а c на 5 не ділиться. Отже, 3 та 5 – два числа, які були виписані учнем на дошці рівно 3 рази.

2003 рік

7.1. Не могло, бо у кожній парі кількість горіхів ділиться на 3, а число 2003 на 3 не ділиться.

7.2. Оскільки спочатку інших дерев був 1%, а після рубки сосен їх мало стати 2%, то загальна кількість дерев зменшиться вдвічі. Отже, ліспромгосп має намір вирубати половину лісу.

7.3. Зрозуміло, що загальна довжина як підйомів, так і спусків на маршруті туди і назад дорівнює відстані між селами, яку позначимо через x (*км*). Тоді $\frac{x}{15}+\frac{x}{30}=4,\ x=40\,км.$

7.4. Помиляється. Розглянемо трикутник ABC , в якому $\angle A=30^0,\ \angle C=90^0$. Нехай M – середина $AB,\ MK\perp AB,\ K\in AC$. Тоді трикутники $AMK,\ BMK,\ BCK$ рівні між собою. Обґрунтування очевидні.

8.1. Запишемо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y)=p^{2003}$ і покладемо $x-y=p^k,\quad x+y=p^{2003-k},$ де $k=1,2,...,1001.$ Тоді $x=\frac{p^{2003-k}+p^k}{2},\ y=\frac{p^{2003-k}-p^k}{2}$ - шукані розв'язки у натуральних числах. Для $p\neq 2$ існує ще один такий розв'язок при $k=0$.

8.2. З умови задачі випливає, що 9 великих і 3 малі рибки сьогодні коштують стільки ж, як 15 великих вчора, а 10 великих і 5 малих сьогодні – стільки ж, як 15 великих і 5 малих вчора. Отже, 1 велика і 2 малих сьогодні коштують стільки ж, як 5 малих вчора.

8.3. Спочатку Петрусь повинен поставити знак „ -” перед n^3, а потім у кожній парі $\left(n^2,n^4\right),\ \left(n^5,n^7\right),\ \left(n^6,n^8\right)$ ставити знак, протилежний до того, який поставив Миколка. Справді, $n^{k+2}-n^k=n^{k-1}\cdot(n-1)n(n+1)\vdots 6$ при всіх натуральних n.

8.4. $AM = \frac{2}{3}AD = 4,\ AE = EC = 4.$ Отже, $AN = AE = EC.$ Тому $\angle AME = \angle AEM,\quad \angle AMB = \angle CEF.$ Також маємо $BF = MF = ME,$ а значить, $BM = FE.$ Отже, $\Delta AMB = \Delta CEF, CF = AB = 5.$

9.1. Оскільки рівняння не мають дійсних коренів, а коефіцієнти при x^2 додатні, то для всіх дійсних x їх ліві частини набувають лише додатних значень. Зрозуміло, що аналогічну властивість матиме і ліва частина рівняння, одержаного в результаті додавання. А отже, воно також не матиме дійсних коренів.

9.2. Нехай $a-$ об'єм трави на лузі до випасання, $x-$ об'єм трави, яку спасає за 1 день одна корова, $y-$ об'єм трави, яка виростає на лузі за 1 день. Тоді $30x \cdot 4 = a + 4y,$ $25x \cdot 6 = a + 6y.$Віднімаючи ці рівності, знаходимо $y = 15x.$ Отже, безперервно на лузі може пастися не більше, як 15 корів.

9.3. Зауважимо, що відношення найбільшого з чисел, які можна утворити таким чином, до найменшого менше за 4. Крім того, сума цифр кожного з таких чисел при діленні на 3 дає остачу 2. Тому такі ж остачі даватимуть і самі числа. Оскільки рівності $3n + 2 = 3(3k + 2)$ та $3n + 2 = 2(3k + 2)$ при натуральних n та k виконуватися не можуть, то і утворені таким чином два різні числа не можуть ділитися одне на одне.

9.4. $\angle ABC = 60^0$, то $\angle BAC + \angle ACB = 120^0$, $\angle OAC + \angle OCA = 60^0$, $\angle AOC = 120^0$. Отже, отримуємо $\angle DBE + \angle DOE = 180^0$, і навколо чотирикутника $BEOD$ можна описати коло. Але $\angle OBE = \angle OBD,$ то і хорди OE та OD цього кола рівні.

10.1. Сума всіх записаних на сторонах десятикутника чисел дорівнює подвоєній сумі чисел, записаних у його вершинах, тобто дорівнює 110. Але, якщо би всі такі суми закінчувалися різними цифрами від 0 до 9 включно, то остання цифра вказаної суми була би 5, а не 0.

10.2. Справді,

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdot \ldots \cdot 2002 =$$
$$= 1001! + (2003 - 1001)(2003 - 1000) \cdot \ldots \cdot (2003 - 1) =$$
$$= 1001! + 2003 \cdot n - 1001! = 2003 \cdot n,$$

де $n-$ деяке ціле число.

10.3. Нехай $y + z - x = t.$ Тоді $z + x - y = 3t,\quad x + y - z = 5t,$ $xyz = 6t.$ Додавши перші три рівності, знайдемо $x + y + z = 9t.$

Віднімаючи тепер по черзі перші три рівняння, одержимо $x = 4t$, $y = 3t$, $z = 2t$. Отже, $4t \cdot 3t \cdot 2t = 6t$. Тому $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}$. Звідси відповідно маємо розв'язки: $(0,0,0)$, $\left(2,\frac{3}{2},1\right)$, $\left(-2,-\frac{3}{2},-1\right)$.

10.4. $\angle CKM = \angle CPM = 90^0$. Тому навколо чотирикутника *CKMP* можна описати коло з діаметром *CM*. Тоді для будь-якого розташування точки *M* на *AB* маємо $\angle KCP + \angle KMP = 180^0$. Отже, $\angle KMP = const$. Зрозуміло, що довжина хорди *KP* вказаного кола буде найменшою, якщо найменшим буде діаметр такого кола, тобто, якщо точка *M* є основою висоти *CM* трикутника *ABC*. Оскільки трикутник гострокутний, то $M \in AB$.

11.1. Розмалюємо трикутники, з яких складається многокутник, у два кольори так, щоб будь-які два трикутники зі спільною стороною були різного кольору. Оскільки з кожної вершини виходить парне число діагоналей, то всі трикутники, які прилягають до сторін многокутника, будуть одного кольору. Отже, різниця між кількістю всіх сторін трикутників цього кольору і кількістю всіх сторін трикутників іншого кольору буде дорівнювати *n*. Оскільки така різниця ділиться на 3, то і *n* ділиться на 3.

11.2. $\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B) \Rightarrow tg\angle C = -\frac{tg\angle A + tg\angle B}{1 - tg\angle A \cdot tg\angle B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow tg\angle A + tg\angle B + tg\angle C = tg\angle A \cdot tg\angle B \cdot tg\angle C.$$

Нехай для конкретності $tg\angle A \le tg\angle B \le tg\angle C$. Тоді $tg\angle A \cdot tg\angle B \cdot tg\angle C \le 3tg\angle C$, $1 < tg\angle A \cdot tg\angle B \le 3$. Оскільки тангенси кутів є натуральними числами, то звідси простим перебором знаходимо $tg\angle A = 1, tg\angle B = 2, tg\angle C = 3$.

11.3. Зрозуміло, що найменше значення досягається при $x \ge 0$. Побудуємо прямокутний трикутник *ABC*, в якому $AC = BC = 1$, і з вершини *C* проведемо відрізок $AX = x$ під кутами 60^o та 30^o до катетів. Тоді за теоремою косинусів знайдемо, що $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - x\sqrt{3} + 1} = AX + BX \ge AB = \sqrt{2}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $X \in AB$. Отже, $\sqrt{2}$ – найменше значення цього виразу.

11.4. Не обов'язково. Припустимо, що острови $A_1, A_2, ..., A_{2003}$ послідовно сполучені між собою мостами і, крім того, ще один міст з'єднує острови A_1 та A_3. Якщо острів A_2 не заселений, на острові A_1 проживає одна особа, і з нею дружать всі інші жителі міста, закритим виявився міст між островами A_1 та A_3, то слова кожного із жителів міста можуть бути правдою. Відзначимо, що якщо вважати всі острови заселеними, то можна довести, що справді хтось помилився у своїх підрахунках.

11.5. Справді,

$$\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{h_a}{H_a}+\frac{h_b}{H_b}+\frac{h_c}{H_c}=\frac{S(BCM)}{S(ABC)}+\frac{S(CAM)}{S(ABC)}+\frac{S(ABM)}{S(ABC)}=1,$$

де $h_a, h_b, h_c, H_a, H_b H_c$ – висоти, а $S(***)$ – площі відповідних трикутників.

2004 рік

7.1. Послідовно отримуємо $\left|4|x|-3\right|=5$ ($\left|4|x|-3\right|=-1$ не задовольняє), $4|x|=8$ ($4|x|=-2$ не задовольняє), $x=\pm 2.$

7.2. Оскільки автомобіль наздогнав велосипедиста рівно посередині шляху, то у селище *B* він прибув на 15 хвилин раніше, ніж велосипедист. Отже, останньому на третину шляху потрібно 15 хвилин, а на весь шлях від *A* до *B* – 45 хвилин.

7.3. З умови задачі випливає, що $\angle CBE=\angle CEB,$ $\angle DEA=\angle DAE.$ Отже, $\angle OEB+\angle OBE=\angle CBA+\angle CAB=90^0.$ Тому $\angle BOE=90^0$, а значить, і $\angle DOE=90^0.$

7.4. Учитель міг міркувати, наприклад, так: якщо би кожне викреслене слово записали рівно два учні, то, оскільки обидва вони викреслюють дане слово, загальна кількість викреслених слів у трьох списках мала бути парною, а отже, зі 150 записаних слів мала залишитися парна їх кількість. Але, згідно з умовою, їх залишилося $23+32+26=81.$

7.5. Наприклад, $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}-\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}=0.$

7.6. При перестановці цифр місцями їх сума не змінюється. Тому при діленні на 3 всі записані числа дають однакові остачі. Якщо серед вибраних цифр немає нуля, то сума шести чисел, які можна утворити перестановками даних цифр, повинна ділитися на 3, і не може дорівнювати 3376. Якщо ж одна з вибраних цифр є нулем, то приходимо до рівності $\overline{ab0}+\overline{a0b}+\overline{ba0}+\overline{b0a}=211(a+b)=3376.$ Тоді $a+b=16,$ і, оскільки вибрані цифри різні, то дві інші цифри –7 та 9.

7.7. Занумеруємо фішки зліва направо цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Для забезпечення перемоги першому гравцеві достатньо спочатку пересунути фішку №5 у крайнє праве положення, а потім весь час пересувати фішку з непарним номером впритул до тієї фішки з парним номером, яку перед цим пересунув його суперник. При цьому раніше вичерпаються ходи у другого гравця.

8.1. Після розкриття модуля отримаємо $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2},\ x > 0.$

8.2. Нехай A та B – гострі кути трикутника ABC, $BC = a, AC = b.$ Тоді $tgA = ctgB = \frac{a}{b},\ \frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1,\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2}.$ Отже, $\angle A < \angle B,\ tg\angle B = \frac{b}{a} = 2.$

8.3. $n^4 - 22n^2 - 46 = \left(n^2 - 25\right)\left(n^2 + 3\right) + 29.$ Це число ділиться на $n+5,$ якщо $n+5$ є дільником числа 29. Отже, $n = 24.$

8.4. Скориставшись формулами для суми та різниці кубів, отримаємо

$$A + B = \frac{(185-158)\left(158^2 + 158\cdot 185 + 185^2\right)}{343\cdot 27} +$$
$$+\frac{(185+158)\left(158^2 - 158\cdot 185 + 185^2\right)}{343\cdot 27} = \frac{2\cdot 185^3}{21^3}.$$

Тоді $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = \left(\frac{185}{21}\right)^3$, звідки знаходимо $x = 5.$

8.5. Друге твердження не може бути вірним, бо у такому разі число B мало би закінчуватися на 1, $B + 41 -$ на 2, $B - 48 -$ на 3, а отже, жодне з двох інших тверджень не було би вірним. Тому $B + 41 = x^2$ та $B - 48 = y^2$ – квадрати натуральних чисел. Тоді $x^2 - y^2 = 89,\ (x-y)(x+y) = 89,\ x - y = 1,\ x + y = 89,\ x = 45,\ y = 44.$ Отже, $B = 44^2 + 48 = 1984.$

8.6. Продовжте одну зі сторін заданого кута і скористайтеся рівностями $35^o : 7 = 5^o = 180^0 - 5\cdot 35^0.$ Можна також від однієї сторони кута відкласти кут 30^0. Побудови очевидні.

8.7. Нехай P – середина AM. Оскільки $\angle ABM = 90^o,\ AM = 2BK,$ то $BK = AP = PM = PB.$ Отже, $\angle ABP = \angle BAP = 24^o,$ $\angle BKP = \angle BPK = 48^o.$ Звідси послідовно знаходимо $\angle PBK = 84^o,$ $\angle ABK = 108^o,\ \angle BAC = \angle BCA = 36^o.$

9.1. Враховуючи область визначення для функції $y=\sqrt{2-x},$ отримаємо, що $x\le 2.$ Оскільки $x^5+x^3+x-42<2^5+2^3+2-42=0$ для $x<2,$ то залишається безпосередньою перевіркою переконатися, що $x=2-$ єдиний корінь даного рівняння.

9.2. Зафіксуємо довільну з цих точок і проведемо серединні перпендикуляри до відрізків, які сполучають дану точку з трьома іншими. Область, обмежена цими перпендикулярами, яка містить фіксовану точку, і є шуканою для даної точки. Аналогічно поступаємо для інших трьох точок.

9.3. Розглянемо функцію $y=(x-a)(x-b).$ З умов задачі випливає, що $x_0>\max\{a,b\}$ та $y(3)>c.$ Отже, залишається проаналізувати наступні варіанти:

а) $a=b=1.$ Тоді $y(3)=4, c<4.$ Звідси знаходимо $c=1\Rightarrow x_0=2,$ $c=2\Rightarrow x_0=1+\sqrt{2},$ $c=3\Rightarrow x_0=1+\sqrt{3};$

б) $a=1, b=2$ чи $a=2, b=1.$ Тоді $y(3)=2, c=1, x_0=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};$

в) $a=b=2.$ Тоді $y(3)=1,$ і рівняння потрібного кореня не має.

9.4. Зрозуміло, що числа $6n$ та $9n$ мають бути трицифровими, а число $13n-$чотирицифровим. Отже, $77\le n\le 111.$ Оскільки ж $6n+9n+13n=28n,$ а сума всіх десяти цифр ділиться на 9, то і число n має ділитися на 9. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що із чисел 81, 90, 99, 108 підходить тільки $n=81.$ Для нього $6n=486, 9n=729, 13n=1053.$

9.5. Не завжди. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п'ятого та сьомого стовпців шахівниці у синій колір. При цьому отримаємо 72 вершини клітинок, з яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбовуваннях вона залишатиметься непарною, а отже, кількість вершин, з яких виходять сині відрізки, зменшитися не може. Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за $72:2=36=144:4.$

9.6. З умови задачі випливає, що $0=(ax+by+cz)(x+y+z).$ Тому досить довести нерівність

$$\sqrt{ab}xy+\sqrt{bc}yz+\sqrt{ca}zx\le ax^2+by^2+cz^2.$$

А вона рівносильна очевидній нерівності

$$\left(\sqrt{a}x-\sqrt{b}y\right)^2+\left(\sqrt{b}y-\sqrt{c}z\right)^2+\left(\sqrt{c}z-\sqrt{a}x\right)^2\geq 0.$$

9.7. З властивостей вписаного кола випливає такий процес відновлення трикутника ABC:

а) будуємо промінь HM, на якому лежить висота AH трикутника ABC;

б) через точку H проводимо пряму $a=BC,$ перпендикулярну до HM, на якій лежить сторона BC;

в) будуємо коло, яке проходить через точки M, Q та дотикається до прямої a. Це можна зробити, скориставшись, наприклад, інверсією відносно кола з центром M і радіусом MQ, або враховуючи рівність добутку відрізків січної квадратові дотичної. В останньому випадку доцільно врахувати також, що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить останню на відрізки, добуток яких дорівнює квадратові висоти. Крім того, прямий кут, вписаний в коло, спирається на діаметр. Зауважимо, що таких кіл є два;

г) через центри O цих кіл проводимо прямі OQ. Те коло, для якого така пряма перетинає промінь HM, і буде колом, вписаним у трикутник ABC, а сама точка перетину – вершиною A цього трикутника;

д) з точки A проводимо дотичні до вписаного кола і на перетині їх з прямою a знаходимо вершини B та C.

10.1. Якщо припустити, що $\alpha>\beta,$ то, враховуючи задані рівності та монотонність функцій косинус і тангенс для гострих кутів, послідовно отримаємо $\cos\alpha<\cos\beta,$ $tg\beta<tg\gamma,$ $\beta<\gamma,$ $\cos\beta>\cos\gamma,$ $tg\gamma>tg\alpha,$ $\gamma>\alpha,$ $\cos\gamma<\cos\alpha,$ $tg\alpha<tg\beta,$ $\alpha<\beta,$ що суперечить зробленому припущенню. Аналогічно доводимо, що не може бути $\alpha<\beta.$ Звідси, з врахуванням заданих рівностей, випливає, що $\alpha=\beta=\gamma.$ Тоді $\cos\alpha=tg\alpha,$ $1-\sin^2\alpha=\sin\alpha,$ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Зрозуміло, що також $\sin\beta=\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

10.2. Нехай $A=a^2+a,$ $B=a^3+2a-$ раціональні числа. Тоді $B=a(A+3)-A.$ Оскільки рівняння $a^2+a+3=0$ не має дійсних коренів, то $A\neq-3$. Отже, $a=\dfrac{A+B}{A+3}$ - раціональне число.

10.3. Оскільки при непарних a, b, c значення всіх трьох виразів є парними числами, то вони, будучи квадратами парних чисел, мали би ділитися на 4. У такому разі кожне з чисел ab^3, bc^3, ca^3 при діленні на 4 повинно давати остачу 3. Але тоді їхній добуток, який дорівнює $\left(a^2b^2c^2\right)^2$ і є точним квадратом, також мав би давати остачу 3, що неможливо. Отже, всі три вказані числа одночасно точними квадратами бути не можуть.

10.4. З умови випливає, що $x[x]=2004.$ Нехай $[x]=n.$ Якщо $n\ge 0,$ то $n^2<2004<(n+1)^2, n=44.$ Звідси $x=\frac{2004}{44}>45,$ що не задовольняє умову $x-[x]<1.$ Якщо ж $n<0,$ то $(n+1)^2<2004<n^2,$ $n=-45,$ $x=-\frac{2004}{45}=-44\frac{8}{15}.$

10.5. Нехай висоти AA_1 та BB_1 трикутника ABC перетинаються у точці H, точки K, P, Q – середини відрізків MN, AM, AN відповідно. Тоді $NP \parallel MC,$ $BK=KM,$ звідки випливає, що $\triangle HKN=\triangle A_1KM,$ а тому чотирикутник HMA_1N- паралелограм. Отже, $A_1H=AH=\frac{1}{2}AA_1,$ $\frac{A_1C}{MC}=\frac{NC}{QC}=\frac{2}{3},$ а значить, $A_1C=\frac{1}{2}BB_1.$ Тоді, враховуючи, що у прямокутних трикутників AA_1C та BB_1C кут C спільний, отримаємо $\frac{A_1H}{BA_1}=\frac{A_1C}{AA_1},$ звідки випливає, що $\frac{1}{2}AA_1^2=\frac{1}{2}BA_1^2,$ тобто $AA_1=BB_1.$ Але $\angle AA_1B=90^o,$ то $\angle ABC=45^o.$

10.6. Оскільки при $v>0$ виконується нерівність $\frac{u^2}{v}\ge 2u-v,$ яка випливає з очевидної нерівності $(u-v)^2\ge 0,$ то різниця між лівою і правою частинами заданої в умові нерівності не менша за

$$x(2x-y)+y(2y-z)+z(2z-x)+x(2x-z)+y(2y-x)+z(2z-y)-$$
$$-\frac{x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2}{2}=\frac{3}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\ge 0,$$

звідки і випливає потрібна нерівність.

10.7. Доведемо, що всі непарні числа одного кольору, а всі парні – іншого. Припустимо, що є, наприклад, два числа n та $n+2$

різних кольорів. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що n – синього, а $n+2$ – жовтого кольору. Позначимо $n=s_1,\ n+2=g_1$. Оскільки чисел кожного з кольорів є безліч, то знайдеться пара сусідніх чисел $g_2>g_1$ та $s_2=g_2+1$ відповідно жовтого та синього кольорів, і аналогічна пара $g_3>g_2$ та $s_3=g_3+1$. Зауважимо, що $s_1+s_2+s_3=g_1+g_2+g_3$. Наступні 2000 пар, кожна з яких знаходиться строго правіше від попередньої, утворимо за таким принципом: $g_4=s_4+1,\quad s_5=g_5+1,\quad g_6=s_6+1,\quad s_7=g_7+1,\ \ldots,$ $g_{2002}=s_{2002}+1,\quad s_{2003}=g_{2003}+1,$ де s_i – синього, а g_i – жовтого кольору. Позначимо тепер їх спільну суму

$$s_1+s_2+\ldots+s_{2003}=g_1+g_2+\ldots+g_{2003}=M.$$

Тоді за умовою задачі число M повинно бути зафарбоване як у синій, так і у жовтий кольори, що, зрозуміло, одночасно не можливо. Таке протиріччя доводить, що кольори всіх чисел однієї парності співпадають. Оскільки число 1 – синього кольору, то 2004 – жовтого кольору.

11.1. Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2+(a-4)x+2=0, \\ x\ge 2. \end{cases}$

Якщо тут дискримінант квадратного рівняння $D<0$, то дійсних коренів немає. Якщо $D=0$, то $a=4\pm 2\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{2}$ не задовольняють умову задачі. Якщо ж $D>0$, то, враховуючи особливість графіка функції $f(x)=x^2+(a-4)x+2$, одержимо, що єдиність кореня $x>2$ забезпечить умова $f(2)<0$, з якої знайдемо $a<1$. Єдиний корінь $x=2$ отримуємо і при $a=1$. Отже, $a\in(-\infty,1]$.

11.2. Нехай K,L,O – середини відрізків AB, AC, MN відповідно. Тоді $KL\parallel BC$, $KL=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}MN$, $KL\perp MN$. Оскільки $\angle FDC>90^o$, то M лежить на відрізку AL. Крім того, чотирикутник $KNLM$ вписаний у коло з діаметром MN. Отже, $OL=ON=OM=KL$. Оскільки діаметр MN ділить перпендикулярну до нього хорду пополам, то $\sin\angle MOL=\frac{1}{2}$. Отже, $\angle MOL=30^o$. Далі послідовно знаходимо $\angle OML=\angle OLM=75^o$, $\angle BCA=\angle KLM=15^o$, $\angle AMK=30^o$, $\angle BAC=\angle KAM=60^o$, $\angle ABC=105^o$.

11.3. Легко бачити, що

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=$$
$$=\cos((x+y+z)-z)+\cos((x+y+z)-x)+\cos((x+y+z)-y)=$$
$$=\cos(x+y+z)(\cos x+\cos y+\cos z)+$$
$$+\sin(x+y+z)(\sin x+\sin y+\sin z)=$$
$$=a\cos^2(x+y+z)+a\sin^2(x+y+z)=a.$$

11.4. Оскільки $AE\perp A_1D$ за умовою задачі і $AE\perp CD,$ бо $CD\perp(AA_1D),$ то $AE\perp(A_1CD),$ а отже, $AE\perp A_1C.$ Але за умовою задачі також $AF\perp A_1C,$ тому $A_1C\perp(AEF),$ а значить, $EF\perp A_1C.$ Крім того, за умовою задачі $B_1Q\perp A_1C,$ і, оскільки EF та B_1Q належать одній площині $A_1B_1CD,$ то $EF\parallel B_1Q.$ Аналогічно доводиться паралельність прямих AF та $PQ.$ Звідси випливає, що $\angle EFA=\angle PQB_1.$

11.5. Див. розв'язання задачі 10.6.

11.6. Таких функцій не існує. Справді, з умови задачі випливає, що для всіх додатних $x,\,y$ виконується нерівність $f(x+y)>f(x),$ а тому функція f строго монотонно зростає на проміжку $(0,+\infty).$ Із вихідної тотожності, якщо в ній аргументи поміняти місцями, також випливає, що $f(xf(y))=f(yf(x)).$ І, оскільки шукана функція є строго монотонною, то $xf(y)=yf(x),$ тобто $f(x)=\dfrac{f(y)}{y}x.$ А отже, $f(x)=kx,$ де $k>0.$ Але безпосередня підстановка у вихідне рівняння показує, що жодна з таких функцій його не задовольняє.

11.7. Див. розв'язання задачі 10.7.

2005 рік

7.1. Зрозуміло, що кількість риб, спійманих першим рибаком, повинна ділитись на 9, а спійманих другим – на 17. При сумі 70 це можливо лише для чисел 36 та 34 відповідно. Тоді отримаємо, що обидва спіймали по 20 карасів та по 14 окунів. А отже, перший рибак спіймав дві щуки, а другий не спіймав жодної.

7.2. Якщо перший – лицар, то з його слів другий і третій – брехуни, що суперечить висловлюванню другого. Отже, перший –

брехун. Якщо другий – брехун, то на основі його слів третій також мав би бути брехуном, що неможливо, бо у такому разі перший, який є брехуном, сказав би правду. Отже, другий – лицар, а тому з його слів випливає, що і третій є лицарем. А значить, відповідь третього буде: один.

7.3. Число і сума його цифр при діленні на 3 дають однакові остачі. Тому, починаючи з остачі 1, на другому кроці отримаємо остачу 2, а з остачі 2 – знову остачу 1, і так далі. Таким чином число 200520052005, яке ділиться на 3, появитись на дошці не зможе.

7.4. Можна. Наприклад, відрізати по периметру квадрата 4 прямокутники зі сторонами $\frac{7}{8}м$ та $\frac{1}{8}м$, а потім розрізати квадрат, який залишився, на 3 прямокутники зі сторонами $\frac{3}{4}м$ та $\frac{1}{4}м.$

8.1. Припустимо, що з даних відрізків трикутник скласти не можна. Тоді їх довжини у сантиметрах, впорядковані за зростанням, задовольнятимуть нерівності: $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, a_3 \geq 2, a_4 \geq 3, a_5 \geq 5,$ $a_6 \geq 8, a_7 \geq 13, a_8 \geq 21.$ А це суперечить умові, що довжина найбільшого відрізка дорівнює 20 *см*.

8.2. Нехай $m_i,\ i = 1,...,16, -$ маси цих яблук. За чотири зважування легко знайти

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)+\left(m_1+m_2+m_4\right)+\left(m_1+m_3+m_4\right)+\left(m_2+m_3+m_4\right)-$$

потроєну сумарну масу перших чотирьох яблук. Ще за чотири зважування знаходимо сумарну масу решти дванадцяти яблук:

$$\left(m_5+m_6+m_7\right)+\left(m_8+m_9+m_{10}\right)+\left(m_{11}+m_{12}+m_{13}\right)+\left(m_{14}+m_{15}+m_{16}\right).$$

8.3. Оскільки $AB = AF,$ то бісектриса кута BAF є висотою і медіаною трикутника BAF. Аналогічно міркуємо і щодо бісектрис кутів BCD та DEF. Таким чином, вказані бісектриси лежатимуть на серединних перпендикулярах до сторін трикутника BDF. А вони, як відомо, перетинаються в одній точці – центрі кола, описаного навколо цього трикутника.

8.4. Спільний дільник даних чисел є дільником числа $b - 2a = 3.$ Аналізуючи остачі від ділення степенів двійки на 3 (2 в парному степені дає остачу 1, а в непарному – остачу 2), переконуємося, що кожне із заданих чисел на 3 ділиться. Тому $НСД\left(a,b\right) = 3.$

9.1. Оскільки $x^2 + 1 > 0,$ то $x > 15.$ При цих x обидва множники у лівій частині рівняння є додатними зростаючими функціями.

Отже, рівняння може мати не більше одного кореня. Легко перевірити, що таким коренем є $x = 20$.

9.2. $$a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) + 3abc >$$
$$> c\left(a^2 - ab + b^2\right) + 3abc = c(a+b)^2 > c^3.$$

9.3. Так. З усіх таблиць, які можна утворити з початкової таблиці вказаним способом, розглянемо ту, в якій є найбільша можлива кількість плюсів. Якщо би в ній в якомусь рядку чи в якомусь стовпчику мінусів було більше, ніж плюсів, то, змінивши у ньому всі знаки на протилежні, ми отримали би таблицю з більшою загальною кількістю плюсів, що суперечить вибору таблиці.

9.4. На промені KO відкладемо точку N, відмінну від точки K, так, що $ON = OK$. Тоді $\Delta AON = \Delta BOK$ (за двома сторонами і кутом між ними). А отже, $AN = BK$, $\angle OAN = \angle OBK$. Тому $\angle MAN = 90^0$. Крім того, $MO -$ висота і медіана трикутника KMN, звідки $MN = MK$. Отже, $AM^2 + BK^2 = AM^2 + AN^2 = MN^2 = MK^2$.

10.1. Зрозуміло, що після $2n$ відрізань залишається відрізок довжиною $\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \to 0$. Тому залишитися не відрізаною може лише одна точка, а саме $2004 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} + ... = 2004\frac{4}{7}$.

10.2. Припустимо, що підприємець кожного місяця знижує зарплату на одну гривню одному з робітників, котрий одержує більше, ніж найменш оплачуваний у даний момент часу, і зразу ж всім десятьом підвищує зарплату на одну гривню. Очевидно, що за рахунок лише самих знижень вирівняти зарплати вдається. А оскільки кожного разу прибавки для всіх є однаковими, то при цьому зарплати вирівняються і в ситуації, описаній в задачі.

10.3. Зрозуміло, що $OM \perp AB$, як серединний перпендикуляр до AB. Продовжимо NK до перетину з прямою AB у точці P. Тоді
$$\angle PAK + \angle PKA = \angle KDC + \angle CKN = \frac{1}{2}\angle KNC + \frac{1}{2}\left(\angle CKN + \angle KCN\right) = 90^0.$$
Отже, $KN \perp AB$. Тому $KN \,||\, OM$. Аналогічно доводиться, що $KM \,||\, ON$. Отже, $KNOM -$ паралелограм, і в ньому $OM = KN$.

10.4.
$$a + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} = c + \left(a - b + \frac{1}{a-b}\right) + \left(b - c + \frac{1}{b-c}\right) \geq c + 2 + 2 = c + 4.$$

11.1. Медіана ML прямокутного трикутника AMC дорівнює половинам гіпотенузи AL та LC, а також відрізкам KL та KM, оскільки сторони трикутника KLM рівні. У трикутнику AKC медіана KL дорівнює половині сторони AC, тому кут AKC прямий, і у трикутнику ABC бісектриса AK є і висотою. Отже, трикутник ABC рівнобедрений ($AB = AC$), в якому AK є також медіаною: $BK = KC$. Значить, MK – медіана прямокутного трикутника BMC. Тому $BC = 2MK = 2KL = AC$. Отже, $AB = BC = AC$, що і слід було довести.

11.2. Нехай $\frac{2005}{2} = a$. Тоді рівняння легко зводиться до вигляду $\left(x^2 - a\right)\left(x^2 + 2x + 2 - a\right) = 0$. Звідси $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2005}{2}}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{2003}{2}}$. Зауважимо, що, позначивши $f(x) = x^2 + x - a$, ми могли б записати рівняння у вигляді $f\left(f(x)\right) = x$. При цьому $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - a = 0$.

11.3. Перебором остач від ділення на 11 легко перевірити, що якщо ціле число не ділиться на 11, то його десятий степінь при діленні на 11 дає остачу 1. Тому сума одинадцяти таких десятих степенів ділитиметься на 11.

11.4. Вірно. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ – задана геометрична прогресія, q – її знаменник. За умовою a_1, $a_{10} = a_1 q^9$, $a_{30} = a_1 q^{29}$ – натуральні числа. Тому q^9 та q^{29} – додатні раціональні числа. Звідси випливає, що також $q^2 = \frac{q^{29}}{\left(q^9\right)^3}$ та $q^2 = \frac{q^9}{\left(q^2\right)^4}$ – додатні раціональні числа. Нехай $q = \frac{m}{n}$, де m та n – натуральні взаємно прості числа. Оскільки число $a_{30} = \frac{a_1 m^{29}}{n^{29}}$ натуральне, m^{29} та n^{29} – взаємно прості, то a_1 ділиться на n^{29}. Тому й $a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}}$ – натуральне число.

11.5. Нехай AS – найбільше з бічних ребер піраміди. Розглянемо розгортку бічної поверхні піраміди, яка починається і закінчується гранями з ребром AS. З’єднаємо точки A між собою і проведемо до цього відрізка серединний перпендикуляр, який, очевидно, пройде через точку S. Позначимо через M точку перетину цього перпендикуляра з ребром чи вершиною основи піраміди на цій розгортці. Тоді периметр основи $P > 2 \cdot AM > 2 \cdot AS$, що й слід було довести.

2006 рік

7.1. Жоден учень, крім Петруся, не міг зайняти перше місце, оскільки у протилежному випадку він виступив би не гірше, ніж очікував. Отже, Петрусь був першим.

7.2. Оскільки $\frac{3}{11}+\frac{4}{13}+\frac{5}{14}=\frac{1877}{2002}$, і останній дріб нескоротний, то всього у шкатулці пірата 2002 дорогоцінні камені. З них $2002-1877=125$ смарагдів.

7.3. Міг. Нехай весь товар становить 1. Позначимо його частину, продану за першою ціною, через x. Тоді із рівняння $1{,}5x+1{,}5\cdot 1{,}5\cdot(1-x)=2$ знаходимо $x=\frac{1}{3}$.

7.4. Помиляється. Розглянемо три грані куба, які містять вершину із числом 7, і замалюємо дану вершину та три діагонально протилежні до неї вершини виділених граней у чорний колір. Решту вершин куба вважатимемо білими. Тоді на кожному кроці по одиниці буде додаватися у трьох вершинах одного кольору. А отже, при діленні на 3 остачі сум чисел як у чорних, так і у білих вершинах куба змінюватися не будуть. Оскільки спочатку для чорних вершин така остача дорівнювала 1, а для білих вершин становила 0, то вирівняти числа у всіх вершинах не вдасться.

7.5. Нехай довжини сторін такого прямокутника дорівнюють x, y. Тоді $xy=2x+2y$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді $(x-2)(y-2)=4$. Оскільки числа x, y повинні бути натуральними, то звідси знаходимо такі пари розв'язків: $x=3, y=6$; $x=4, y=4$; $x=6, y=3$. Можна міркувати й по-іншому. Запишемо отримане рівняння у вигляді $x(y-2)=2y$. Нехай $x \geq y$. Тоді з попередньої рівності випливає, що $1 \leq y-2 \leq 2$. Звідси знаходимо $y=3, x=6$ та $y=4, x=4$.

8.1. *Перший спосіб.* Припустимо, що кожен учень класу має не більше семи друзів. Зафіксуємо одного з учнів. Тоді у класі знайдеться принаймні 17 учнів, з якими він не дружить. Зафіксуємо одного з них. Тоді серед решти шістнадцяти учнів є принаймні 9, з якими він не дружить. Зафіксуємо одного з них. Тоді серед решти восьми знайдеться хоч 1, з яким він не дружить. А отже, ми отримали четвірку, в якій немає жодної пари друзів. Таке протиріччя доводить, що принаймні в одного учня класу не менше восьми друзів.

Другий спосіб. Якщо кожен учень дружить з усіма учнями класу, то твердження задачі очевидне. Якщо ж є два учні, які не дружать між собою, то можливі два випадки: а) кожен з решти 23-ьох учнів дружить принаймні з одним із них. Тоді хоч в одного з цих двох учнів не менше 12 друзів; б) знайдеться принаймні один учень, який не дружить із жодним з цих двох учнів. Тоді з решти 22-ох учнів кожен повинен дружити хоч з одним учнем виділеної трійки. А отже, хоч один учень з цієї трійки матиме не менше 8 друзів.

8.2. Ліву частину рівняння можна трактувати як суму відстаней від точки x числової прямої до точок $x_1 = -1003$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1003$. Оскільки відстань між крайніми з цих точок дорівнює 2006, то сума всіх відстаней не менша 2006. А з іншого боку, права частина рівняння набуває значень, які не перевищують 2006. Рівність досягається тільки при $x = 0$.

8.3. Оскільки сума всіх заданих чисел дорівнює 36, а сума їх квадратів – 204, то вказаний поділ можливий лише при умові, що у кожній групі сума чисел дорівнюватиме 18, а сума квадратів цих чисел – 102. Розглянемо групу, в яку входить число 8. Тоді сума квадратів решти трьох чисел цієї групи має дорівнювати $102 - 64 = 38$. Це неможливо, якщо в дану групу попадуть числа 7 або 6. А з іншого боку, якщо до неї не ввійде число 5, то сума квадратів чисел цієї групи не перевищить $64 + 16 + 9 + 4 = 93$. Оскільки $38 - 25 = 13$, то разом із 8 та 5 у дану групу можуть попасти лише числа 3 та 2. Перевірка показує, що справді $8 + 5 + 3 + 2 = 18$. Зрозуміло, що такий поділ на групи єдиний.

8.4. Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам, то проведені прямі ділять медіани трикутників ABC та ADC у відношенні $2:1$, рахуючи від вершин B та D відповідно. А отже, дані прямі ділять кожну зі сторін BC та CD пополам. Тому відстань між точками перетину дорівнює половині BD, тобто 3 *см*.

8.5. *Перший спосіб.* Продовжимо сторону BA поза точку A до точки K так, щоб $AK = AE$. Нехай $\angle ACB = \gamma$. Тоді $\angle AEC = 2\gamma$,

$\angle BAC = 3\gamma$. Отже, $\angle CAE = \angle CAK = \pi - 3\gamma$. Тоді $\triangle CAE = \triangle CAK$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle BKC = \angle BCK = 2\gamma$. Звідси випливає, що $AB + AE = AB + AK = BK = BC$.

Другий спосіб. Відкладемо на стороні BC точку K так, щоб $\angle KAC = \angle KCA$. Тоді $\angle BAK = \angle BKA = \angle KEA = 2\angle BCA$. Отже, $AB = BK$, $AE = AK = CK$. Тому $AB + AE = BC$.

9.1. Запишемо дане рівняння у вигляді $\left(x^2+1\right)^2 - 2\left(x-1\right)^2 = 0$. Тоді $\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}\right) = 0$. Дискримінант першого із цих множників від'ємний. А другий множник має два дійсні корені $x_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

9.2. Оскільки $a^2 + b^2 = c^2$, то задана нерівність рівносильна нерівності $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$, а отже, й нерівності $\left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 > 0$. Остання ж нерівність очевидна, бо у прямокутному трикутнику одночасно всі три сторони рівними бути не можуть.

9.3. Ні. Припустимо, що BD ділить рівносторонній трикутник ABC зі стороною 9 *см* на трикутники ABD та CBD з периметрами 20 *см* та 23 *см* відповідно. Тоді знаходимо, що $2BD = P_{ABD} + P_{CBD} - P_{ABC} = 20 + 23 - 27 = 16$. Отже, $BD = 8$, $AD = 3$. Але це неможливо, бо за теоремою косинусів

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^0 = 63.$$

9.4. Якщо Марійка візьме одну, дві чи три цукерки, то хлопці мають змогу забрати за сумою ходів кожного з них дві + дві, дві + одну чи одну + одну цукерки відповідно. При дотриманні ними такої стратегії перед кожним ходом Марійки залишатиметься кількість цукерок, яка при діленні на 5 дає остачу 1, а перед ходами кожного із хлопців такі остачі будуть відмінними від 1. Тому останню цукерку змушена буде взяти саме Марійка.

9.5. *Перший спосіб.* Відкладемо на прямій AC точку K, відмінну від точки M, так, щоб $AK = AM$. Тоді чотирикутник $DKBM$ буде паралелограмом. Отже, кут між вказаними прямими дорівнюватиме куту KBE. Але $MK = MB = ME$, то $\angle KBE = 90^0$.

Другий спосіб. Оскільки $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$,

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM},$$

то $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM}\right) = 4\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{BM}^2 = 0.$ Отже, кут між вказаними прямими дорівнює 90^0.

Третій спосіб. Оскільки $AB = AD,$ $\dfrac{EM}{MA} = \dfrac{2}{1},$ то $M -$ точка перетину медіан трикутника DBE. Нехай $P -$ точка перетину прямих DM та BE. Тоді $MP -$ медіана трикутника BME. Але $BM = ME$. Тому пряма MP, а отже, і пряма DM перпендикулярна до BE.

10.1. Розклавши ліву частину рівняння на множники, запишемо рівняння у вигляді $\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 0.$ Звідси знаходимо $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$ $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}.$ Можна поступити ще й так: поділити обидві частини рівняння на x^2 і зробити заміну $y = x - \dfrac{1}{x}.$

10.2. Оскільки $\left(x - 2y\right)^2 \geq 0,$ то для $y > 0$ виконується нерівність $\dfrac{x^2}{y} \geq 4x - 4y,$ причому рівність досягається лише при $x = 2y.$ Отже,

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{2006} \geq \left(4a - 4b\right) + \left(4b - 4 \cdot 2006\right) = 4\left(a - 2006\right).$$

Рівність можлива тільки при $a = 8024,$ $b = 4012.$

10.3. З очевидної рівності $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = x + y - \dfrac{2xy}{x + y}$ і простоти числа $x + y$ випливає, що $x + y$ має бути дільником принаймні одного множника у чисельнику останнього дробу. Але $x < x + y$ та $y < x + y,$ то $x + y$ є дільником двійки. Звідси знаходимо $x = y = 1.$

10.4. Нехай $A_1,$ $B_1,$ C_1 – точки перетину висот трикутника ABC зі сторонами $BC,$ $CA,$ AB відповідно. Тоді отримуємо $AA_1 \cdot BC + BB_1 \cdot CA + CC_1 \cdot AB = 6S.$ Оскільки при цьому також $HA_1 \cdot BC + HB_1 \cdot CA + HC_1 \cdot AB = 2S,$ то віднявши останню рівність від попередньої, переконуємося у справедливості твердження задачі. Якщо ж $M -$ довільна інша точка всередині трикутника $ABC,$ $A_2,$ $B_2,$ C_2 – основи перпендикулярів, опущених з точки M на сторони $BC,$ $CA,$ AB відповідно, то з нерівностей $AM + MA_2 \geq AA_1,$

$BM + MB_2 \geq BB_1$, $CM + MC_2 \geq CC_1$, серед яких принаймні одна буде строгою, та рівності $MA_2 \cdot BC + MB_2 \cdot CA + MC_2 \cdot AB = 2S$ випливатиме, що $AM \cdot BC + BM \cdot CA + CM \cdot AB > 4S$. Отже, H – єдина точка із заданою властивістю.

10.5. Могла. Наприклад, якщо павук попарно поз’єднував протилежні вершини однієї з граней куба, потім поступив аналогічно з вершинами протилежної до неї грані, а вкінці з’єднав між собою центри цих граней. Тоді загальна довжина павутини становитиме $4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{3}{2} < 10$.

11.1. Очевидно, що при заміні знака „ * ” діленням чи відніманням ми не отримаємо жодної пари натуральних чисел, менших за 2006, які задовольняли би одержане рівняння, бо у такому разі число x повинно бути не менше 2006. У випадку операції додавання отримуємо $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\sqrt{2005} < 2006$. Отже, і при такій заміні рівність неможлива. І, нарешті, якщо Миколка замінив „ * ” знаком множення, то отримуємо, що $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \leq \sqrt{2005} \cdot \sqrt{2005} < 2006$. Тому рівність теж не може виконуватися. А оскільки ми перебрали всі знаки арифметичних дій і не отримали жодної пари, про яку йде мова в задачі, то звідси випливає, що Миколка помилився у своїх обчисленнях. Насправді ж, пар натуральних чисел із вказаними властивостями не існує.

11.2. Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо $(y - x)(x + y - 1) = 0$. Тоді $y = x$ або $x + y = 1$. Додавши ж перші два рівняння, будемо мати $x + y + x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{3}{4}$. А отже, другий випадок є неможливим. Аналогічно з другого і третього рівняння встановлюємо, що $y = z$. Таким чином, маємо $x = y = z$. Тому з першого рівняння отримуємо $2x^2 + x - \frac{3}{8} = 0$. Звідси $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$. Остаточно маємо: $x = y = z = \frac{1}{4}$ та $x = y = z = -\frac{3}{4}$.

11.3. Позначимо $\cos\alpha + \cos\beta = t$. Тоді

$$t^2 + 1 = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 2 + 2\cos(\alpha - \beta) \leq 4.$$

Отже, $t^2 \leq 3$, $t \leq \sqrt{3}$. Рівність досягається, наприклад, при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$.

11.4. При гомотетії з центром у точці перетину діагоналей початкового чотирикутника і коефіцієнтом $\frac{3}{2}$ чотирикутник з вершинами у точках перетину медіан отриманих трикутників перейде у чотирикутник, вершини якого є серединами сторін заданого опуклого чотирикутника. Цей чотирикутник є паралелограмом, бо за властивостями середніх ліній трикутників його протилежні сторони попарно паралельні. А тому і гомотетичний до нього чотирикутник з вершинами у точках перетину медіан отриманих при поділі трикутників також буде паралелограмом.

11.5. Нехай M та N – середини ребер AD та BC відповідно. Оскільки $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами), то їх медіани BM та CM рівні. Отже, трикутник BMC рівнобедрений. Тому $MN \perp BC$. Аналогічно доводимо, що $AN = DN$. Отже, також $MN \perp AD$. Таким чином, відстань між прямими AD і BC дорівнює MN. З трикутника ABD знаходимо медіану $BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BD^2 - AD^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$. А з прямокутного трикутника BMN маємо $MN = \sqrt{BM^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$.

2007 рік

7.1. Позначимо записані числа через $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$, а їх суму - через S. Тоді $a_1 = a_{2007} + a_2$, $a_2 = a_1 + a_3, \dots, a_{2006} = a_{2005} + a_{2007}$, $a_{2007} = a_{2006} + a_1$. Додавши ці рівності, отримаємо $S = 2S$. Звідси випливає, що $S = 0$.

7.2. Може. Оскільки $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$, то Андрійко міг би поступити, наприклад, так: зігнути наявну вірьовку пополам, потім одну з половинок ще раз зігнути пополам і розрізати вірьовку у місці останнього згину.

7.3. Існують. Наприклад, це кількості місяців високосного року, які мають відповідно 29, 30 та 31 день. Для знаходження всіх розв'язків зауважимо, що $29(x+y+z) < 366$. А отже, $x+y+z \le 12$. З іншого боку $31(x+y+z) > 366$. Тому $x+y+z \ge 12$. Таким чином, остаточно отримаємо, що $x+y+z = 12$. Отже, записавши задане рівняння у вигляді $30(x+y+z)+z-x=366$, будемо мати, що $z-x=6$. Із сказаного вище отримуємо наступні трійки розв'язків у натуральних числах: (1, 4, 7) та (2, 2, 8).

7.4. Нехай шуканим є число n. Тоді число $n+1$ повинно ділитися і на 2, і на 3, і на 4, і на 5, і на 6, і на 7. Найменшим натуральним числом, яке ділиться на всі вказані числа, є 420. Отже, шуканим буде число 419.

7.5. Могло. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною 9 *см* і відріжемо у ньому від однієї вершини рівносторонній трикутник зі стороною 1 *см*, від другої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 2 *см*, а від третьої вершини – рівносторонній трикутник зі стороною 3 *см*. Отримали шуканий шестикутник з рівними кутами.

8.1. З умови задачі випливає, що Іван Царевич відрубав рівно 2007 голів, причому після останнього відрубування нова голова не відростала.. Оскільки натуральних чисел, які діляться на 4 і не перевищують 2007, є 501, то саме стільки голів виросло додатково. А отже, спочатку у Змія було 1506 голів.

8.2. Якщо серед цих чисел є число, кратне 2007, то виберемо його в ролі a. Якщо ж такого числа немає, то при діленні заданих 2007-и чисел на 2007 отримаємо не більше 2006 різних остач. А отже, принаймні два із цих чисел при такому діленні даватимуть однакові остачі. Тоді їх різниця $b-c$ буде ділитися на 2007. Тому вказана трійка чисел завжди знайдеться.

Аналогічний вибір можна зробити і з 2006 натуральних чисел. Справді, якщо серед них є число, кратне трьом, то позначимо його через a. Тоді серед решти чисел знайдуться два, різниця яких $b-c$ буде ділитися на 669. А отже, $a(b-c)$ поділиться на 2007. Якщо ж числа, кратного трьом, немає, то немає і остач від ділення на 2007, кратних трьом. А отже, різних таких остач не більше 1338. Тому знайдуться такі два числа, різниця яких $b-c$ ділиться на 2007.

8.3. Задане співвідношення може бути представлене у вигляді $\frac{(a^2+b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{a^2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)}=0$. Звідси отримуємо $a=c$ або $b=c$. Зауважимо, що для спрощення доцільно було перенести доданок $\frac{1}{c^2}$ у ліву частину і окремо зводити ліву та праву частини до спільних знаменників. Можна було також позначити $a^2=x, b^2=y, c^2=z$.

8.4. Оскільки $AB = AM$, то кути ABM та AMB рівні. А отже, рівними будуть і кути KBM та AMC. Тоді трикутники KBM та AMC рівні між собою (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle HCM = \angle BMK = \angle HMC$. Тому $CH = MH$.

8.5. Оскільки після розстановки знаків «+» та «-» плюсів та мінусів у кожному рядку буде порівну, то віднімання одного і того ж числа від кожного з чисел будь-якого рядка початкової таблиці не змінить суми чисел таблиці, утвореної описаною розстановкою знаків. Тому віднімемо від всіх чисел другого рядка число 8, від всіх чисел третього рядка – число 16, четвертого рядка – 24, п'ятого рядка – 32, шостого рядка – 40, сьомого рядка – 48, восьмого рядка – 56. В результаті отримаємо таблицю, в якій у кожному стовпчику всі записані числа цього стовпчика однакові. Зрозуміло, що після описаної розстановки знаків суми чисел кожного із стовпчиків зміненої таблиці дорівнюватимуть нулю. А отже, нулю дорівнюватиме і сума чисел таблиці, отриманої в умові задачі.

9.1. Нехай $A = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, де $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$. Зрозуміло, що при цьому $n \le 9$. Тоді $9A = 10A - A = \overline{a_1 a_2 ... a_n 0} - \overline{a_1 a_2 ... a_n}$. Цифри такого числа послідовно зліва направо дорівнюватимуть: a_1, $a_2 - a_1, ...$, $a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_n - 1 - a_{n-1}$, $10 - a_n$ при $n > 1$ та $a_1 - 1$, $10 - a_1$ при $n = 1$, причому в останньому випадку при $a_1 = 1$ першу цифру нуль писати не потрібно. А отже, незалежно від кількості таких цифр, їх сума дорівнюватиме 9.

9.2. Перепишемо задану систему рівнянь у вигляді: $\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y-4)^2 = a^2. \end{cases}$ Отримали систему із рівнянь двох кіл, відстань між центрами яких дорівнює 5. Ця система матиме єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли такі кола дотикатимуться одне до одного, тобто коли сума або різниця їх радіусів дорівнюватиме 5. Звідси знаходимо $a = \pm 4$ або $a = \pm 6$.

9.3. Виграшна стратегія є у першого гравця. Для перемоги йому достатньо весь час віднімати останню цифру числа, залишаючи суперникові числа, які закінчуються нулем.

9.4. Розглянемо коло з центром у точці B радіуса BA. Оскільки $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle ABC$, то точка M лежить на цьому колі. Отже, $AB = BM$. Тому $\angle BAM = \angle BMA = \alpha$. Звідси знаходимо, що

$\angle ABM = 180^0 - 2\alpha$, $\angle KBM = 120^0 - 2\alpha$, $\angle BKM = 60^0 + \alpha$. Тому трикутник BKM може бути рівнобедреним лише при $\alpha = 20^0$ (тоді $BM = KM$) або $\alpha = 40^0$ (тоді $BK = KM$).

9.5. Вдасться. Занумеруємо учнів цифрами від 1 до 9 і запишемо їхні номери у вигляді таблиці:

Чергування організуємо таким чином: перші три дні чергують трійки учнів, номери яких записані в одному рядку таблиці; наступні три дні – трійки учнів, номери яких записані в одному стовпчику таблиці; решту шість днів – трійки учнів, номери яких записані в різних рядках та різних стовпчиках таблиці. В результаті отримаємо, наприклад, такий графік чергування: (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (1, 4, 7), (2, 5, 8), (3, 6, 9), (1, 5, 9), (1, 6, 8), (2, 4, 9), (2, 6, 7), (3, 4, 8), (3, 5, 7).

10.1. Нехай діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O під кутом α. Тоді добуток площ трикутників AOB та COD дорівнює добутку площ трикутників BOC та AOD і дорівнює $\frac{1}{4} AO \cdot BO \cdot CO \cdot DO \cdot \sin^2 \alpha$. Тому, якщо площі кожного з цих чотирьох трикутників є цілими числами, то добуток таких площ повинен бути квадратом натурального числа, а отже, не може дорівнювати 2007.

10.2. $$\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{\cos 18^0 \cdot \cos 36^0 - \cos 18^0 \cdot \cos 72^0}{\cos 18^0} =$$
$$= \frac{(\cos 18^0 + \cos 54^0) - (\cos 54^0 + \cos 90^0)}{2\cos 18^0} = \frac{1}{2}.$$

10.3. Запишемо дане рівняння у вигляді $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = t$. Отже, $t \le 3$ для всіх натуральних чисел x, y, z. Надалі для конкретності спочатку будемо вважати, що $x \le y \le z$. Якщо $x > 3$, то $t < 1$, що не задовольняє умову задачі. При $x = 3$ ліва частина з врахуванням вказаних вище обмежень не перевищує значення $t = 1$, яке при цих обмеженнях набувається лише для $y = z = 3$. Якщо $x = 2$, то $t \le 1{,}5$, а отже, t має дорівнювати 1. Тоді з рівняння $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ аналогічними міркуваннями отримуємо, що $y\le 4,$ і знаходимо $y=z=4$ або $y=3,\ z=6.$ І, нарешті, при $x=1$ та натуральних $t\le 3$ отримуємо ще такі три рівняння $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ та $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2.$ Перше з них не має розв’язків у натуральних числах, з другого знаходимо $y=z=2,$ а з третього – $y=z=1.$ Таким чином, з врахуванням всіх можливих перестановок чисел x, y, z отримаємо наступні розв’язки (x,y,z,t) даного рівняння у натуральних числах: (1, 1, 1, 3), (1, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2), (2, 2, 1, 2), (3, 3, 3, 1), (2, 4, 4, 1), (4, 2, 4, 1), (4, 4, 2, 1), (2, 3, 6, 1), (2, 6, 3, 1), (3, 2, 6, 1), (3, 6, 2, 1), (6, 2, 3, 1) та (6, 3, 2, 1).

10.4. Після множення на r^2 рівність, яку необхідно довести, запишеться у вигляді $tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}\cdot tg\frac{A}{2}=1.$
А справедливість останньої легко випливає з таких рівностей

$$tg\frac{C}{2}=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=ctg\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1-tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}.$$

10.5. Зрозуміло, що для розв’язання задачі досить довести, що завжди вдасться доставити другий із «кораблів» $1\times 3,$ третій із «кораблів» 1×2 та четвертий «корабель» 1×1 при умові, що всі попередні розстановки вже зроблені. Адже інші «кораблі» відповідних розмірів у такому разі перед цим тим більше вдасться поставити. Для доведення розглянемо наступні три малюнки:

*	*	*							
							*	*	*
*	*	*							
							*	*	*

*	*			*	*			*	*
*	*			*	*			*	*
*	*			*	*			*	*
*	*			*	*			*	*

*			*			*			*
*			*			*			*
*			*			*			*
*			*			*			*

Мал. 1 Мал. 2

Мал. 3

З малюнка 1 видно, що, як би не були поставлені перші два кораблі (1×4 та 1×3), принаймні одна з позицій, позначених трьома зірочками, буде придатною для постановки ще одного «корабля» 1×3. З малюнка 2 отримаємо, що кожен із перших п'яти поставлених «кораблів» (1×4, 1×3, 1×3, 1×2, 1×2) може зробити непридатними для розміщення ще одного «корабля» 1×2 не більше як по дві позиції, позначені двома зірочками. А отже, місце ще для одного такого «корабля» завжди знайдеться. І, нарешті, дев'ять перших виставлених на малюнку 3 «кораблів» зможуть зробити непридатними для постановки останнього «корабля» 1×1 не більше 15 намальованих на цьому малюнку позицій, позначених однією зірочкою (по одній позиції можуть відібрати «кораблі» 1×1 та по дві – решта 6 «кораблів»). А отже, місце знайдеться і для постановки останнього «корабля» 1×1.

11.1. Нехай $n=11m+k$, де $m\in Z_+$, $k-$ остача від ділення n на 11. Тоді заданий в умові задачі вираз запишеться у вигляді $121m^2+22mk+k^2+33m+3k+5.$ Оскільки $121=11^2$, то для подільності на 121 необхідно, щоб k^2+3k+5 ділилося на 11. Повний перебір остач k показує, що таке можливе лише при $k=4$. Але при такому k вираз набуває вигляду $121m^2+121m+33$ і ділитися на 121 не може. Тому вираз n^2+3n+5 не ділиться на 121, яким би не було натуральне число n.

11.2. Зауважимо, що для будь-яких чисел a, b, x виконується нерівність $|x-a|+|x-b|\ge|a-b|$, причому рівність досягається лише тоді, коли x лежить на відрізку з кінцями a та b. Тому

$$f(x)=\left(|x-1|+|x-2007|\right)+\left(|x-2|+|x-2006|\right)+\ldots+$$

$$+\left(|x-1003|+|x-1005|\right)+|x-1004|\ge$$

$$\ge 2006+2004+\ldots+2+0=\frac{2006+0}{2}\cdot 1004=1007012.$$

Враховуючи сказане вище, рівність досягатиметься лише для точки $x=1004$, яка лежить на кожному з відповідних відрізків і перетворює в нуль останній доданок. Отже, найменшим значенням заданої функції є число 1007012.

11.3. $$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{11}(\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11})=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\cdot\left[\sin\frac{2\pi}{11}+(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11})+(\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11})+\right.$$

$$\left.+(\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11})+(\sin\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11})\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\cdot\sin\frac{10\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

11.4. Повернемо трикутник AMC на 60^0 навколо точки A так, щоб він перейшов у трикутник AKB. Оскільки при цьому отримаємо рівносторонній трикутник AKM, то $\angle AMK=60^0$. При цьому сторони трикутника KBM відповідно дорівнюють: $KM=\sqrt{3}$, $BM=3$, $KB=2\sqrt{3}$. Отже, $KM^2+BM^2=KB^2$. Тому $\angle KMB=90^0$. Тоді $\angle AMB=150^0$. Знову повернемо трикутник AMC на 60^0 але навколо точки C так, щоб він перейшов у трикутник BNC. Отримаємо рівносторонній трикутник CMN, в якому $\angle CMN=60^0$. А у трикутнику BMN сторони будуть відповідно дорівнювати: $BN=\sqrt{3}$, $BM=3$, $MN=2\sqrt{3}$. Тому $\angle MBN=90^0$. А оскільки $\frac{BN}{MN}=\frac{1}{2}$, то $\angle BMN=30^0$. Отже, $\angle BMC=90^0$. Зрозуміло, що на кут AMC залишається 120^0.

11.5. Не обов'язково. Нехай п'ять із цих відрізків мають довжину 1 *см*, а шостий – довжину $\sqrt{3}$ *см*. Зрозуміло, що із будь-яких трьох із них скласти трикутник вдасться. Припустимо, що із цих шести відрізків вдасться скласти тетраедр $ABCD$. Нехай для конкретності $CD=\sqrt{3}$. Позначимо через M середину ребра CD. Тоді з рівнобедрених трикутників CAD та CBD визначимо $AM=BM=\frac{1}{2}$. Але тоді у трикутнику ABM сума довжин двох сторін дорівнюватиме довжині його третьої сторони, що є неможливим. Зрозуміло також, що точка M не може знаходитися на відрізку AB. Отримане протиріччя доводить, що із вказаних шести відрізків скласти тетраедр не вдасться.

2008 рік

7.1. Якщо задумане число $\overline{ab}$, то $\begin{cases} 10a+b=4(a+b)+3, \\ 10a+b-2(a+b)=25. \end{cases}$ Звідси знаходимо $a=4$, $b=7$. Отже, шукане число 47.

7.2. Оскільки $2007=3^2\cdot 223$, і число 223 просте, то отримуємо лише дві такі суми: $1+3+669=673$ та $1+9+223=233$.

7.3. Якщо обидва кути AOC та BOC менші розгорнутих, то кут AOB дорівнює їх сумі і дорівнює подвоєному куту MON, тобто дорівнює 180^o. Якщо обидва ці кути більші розгорнутого, то їх сума дорівнюватиме 540^o. А якщо один з них більший розгорнутого, а другий менший, то отримаємо, що різниця цих кутів дорівнює 180^o. У кожному з цих випадків точка O належатиме прямій AB.

7.4. $$\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3 \Rightarrow \left|4|x|-3\right|=5 \Rightarrow 4|x|=8 \Rightarrow x=\pm 2.$$

7.5. $$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right):\frac{1}{6024}=2008.$$

8.1. Нехай CH – висота, а CM – медіана, проведені до гіпотенузи AB. Тоді $CM=MA$. Отже, $\angle MCA=\angle MAC$. Також $\angle HCA=90^o-\angle HAC=\angle ABC$. Тому кут MCH дорівнює різниці між гострими кутами цього трикутника.

8.2. Зауважимо, що $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ при всіх цілих значеннях a ділиться на 6. Тому, якщо $\sum_{k=1}^{n} a_k \,\vdots\, 6$, то й $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 \,\vdots\, 6$.

8.3. З умови задачі випливає, що $\angle ABC_1=\angle ABC$ та $\angle A_1BC=\angle ABC$. Оскільки точки A_1, B, C_1 лежать на одній прямій, то всі ці кути дорівнюють 60^0. Крім того, $AB=BA_1=2BC_1$. Нехай точка B_1 – симетрична до точки B відносно C_1. Тоді трикутник ABB_1 рівносторонній, і в ньому медіана AC_1 одночасно буде і висотою. Тому $\angle AC_1B=90^0$.

8.4. Зміна положення дверей відбувається при проходженні сторожа, порядковий номер якого є дільником номера дверей. Тому після проходження всіх сторожів відкритими будуть ті двері, номери яких мають непарну кількість дільників, тобто є точними квадратами. Оскільки $44^2 < 2008 < 45^2$, то всього будуть відкритими 44 двері.

8.5. $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}} = \sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{\left(\sqrt{19}-4\right)^2}}} =$

$$= \sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\left(\sqrt{19}-4\right)}} = \sqrt{\sqrt{19}-\left(\sqrt{19}-4\right)} = 2.$$

9.1. Зрозуміло, що кожна з цих сум більша, ніж 2. Отже, як прості числа, такі суми мали би бути непарними. Але це не можливо, бо їх загальна сума $4\left(x+y+z\right)$ є парною.

9.2. Припустимо, що всі ці числа менші від 2. Тоді їх добуток $\frac{\left(a^9+2\right)^2}{a^9} < 8,$ тобто $\left(a^9-2\right)^2 < 0,$ чого не може бути. Тому хоч одне з цих чисел не менше, ніж 2.

9.3. Проведемо діагоналі п'ятикутника і розглянемо 5 трикутників, кожен з яких утворений двома суміжними сторонами п'ятикутника і однією з його діагоналей. Жодна точка не може одночасно належати більше, ніж двом таким трикутникам. Тому хоч в одному з них не буде ні одної з вибраних точок. Відрізавши його від п'ятикутника, отримаємо шуканий чотирикутник.

9.4. Зауважимо, що даний вираз визначений при $a \geq -\frac{3}{4}$ і для всіх таких a виконується рівність

$$A^3 = a+1+3A\cdot\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\cdot\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}\cdot$$

$$\cdot\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\cdot\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} = a+1-Aa.$$

Звідси випливає, що $\left(A-1\right)\left(A^2+A+1+a\right)=0.$ При $a=2008$ другий множник додатний. Тому $A=1.$

9.5. Нехай задана рівнобічна трапеція $ABCD$ з основами $AD=a,\ BC=b$ та бічною стороною $AB=c.$ Оскільки у трапецію можна вписати коло, то $a+b=2c.$ Опустивши з вершин меншої основи перпендикуляри на більшу основу трапеції, за теоремою Піфагора отримаємо, що діаметр вписаного кола

$$d=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{ab}.$$

10.1. Оскільки $x^2=|x|^2$, $y^2=|y|^2$, $|xy|=|x|\cdot|y|$, то задана рівність може бути зведена до вигляду $\left(|x|-2|y|+1\right)^2=0$. Тому достатньо побудувати графік функції $y=\dfrac{x+1}{2}$ при $x\geq 0$ і добавити до нього симетричні вітки відносно кожної з координатних осей та відносно початку координат.

10.2. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\sqrt{(x-3)^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+9}=a.$$

Оскільки його ліва частина не менша 4, то при $a<4$ рівняння розв'язків не має. При $a=4$ рівняння має єдиний розв'язок $x=3$. Враховуючи ж монотонність лівої частини на кожному з проміжків $(-\infty,3)$ та $(3,\infty)$, легко бачити, що при $a>4$ рівняння має два розв'язки – по одному на кожному з цих проміжків.

10.3. Найменшим значенням виразу є 2010. Справді

$$A=x^{2007}+x+\underbrace{\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}_{2008}\geq 2010\cdot\sqrt[2010]{x^{2007}\cdot x\cdot\underbrace{\frac{1}{x}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x}}_{2008}}=2010.$$

Рівність досягається при $x=1$.

10.4. З умов задачі випливає, що $\angle AMN+\angle ACN=180^o$ та $\angle BMK+\angle BCK=180^o$. Отже, навколо $AMNC$ та $BMKC$ можна описати кола. Тому $\angle ANC=\angle AMC,$ $\angle BKC=\angle BMC.$ Тоді $\angle LNC+\angle LKC=\angle ANC+\angle BKC=\angle AMC+\angle BMC=180^o$, а значить, точки C, K, L, N лежать на одному колі.

10.5. З умов задачі випливає рівність вигляду $n(n+1)=\ldots 4016.$ Розглядаючи її як квадратне рівняння відносно n, отримаємо, що дискримінант цього рівняння закінчується на 65, а отже, не може бути точним квадратом. Тому натуральних коренів воно не має. А значить, при жодному натуральному n вказана сума не може закінчуватися на 2008.

11.1. Розглянемо графіки кожної з рівностей системи. З цих рівнянь відповідно отримуємо

$$y=\begin{cases}-2x+4, & x<0,\\ 4, & x\in[0,4],\\ 2x-4, & x>4,\end{cases} \qquad y=(a-1)^2-(x-2)^2.$$

Мінімумом першої функції є 4, а максимумом другої є $(a-1)^2$, причому обидва ці значення досягаються при спільному значенні $x=2$. Крім того, лінія $x=2$ є віссю симетрії кожного з цих графіків. Тому при $(a-1)^2<4$ система не має розв'язків, при $(a-1)^2=4$ – має один розв'язок, а при $(a-1)^2>4$ – два розв'язки.

11.2. Не можна. Припустимо, що такими є числа a та b. Тоді повинна виконуватися рівність $ab=66-a-b,$ тобто $(a+1)(b+1)=67.$ Але 67 – просте число, тому таке рівняння розв'язків у натуральних числах не має.

11.3. Покладемо $y=1$. Нехай $f(1)=a.$ Тоді отримаємо, що $f(ax)\equiv x^2$. При цьому $a\neq 0$. Тому $f(x)=\left(\dfrac{x}{a}\right)^2=cx^2$. Підстановкою такої функції у початкове рівняння встановлюємо, що вона є його розв'язком лише при $c=1$. Отже, остаточно $f(x)=x^2$.

11.4. Оскільки навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, то $AB+CD=BC+AD.$ Отже, $AD=a-1$. Крім того, для площ чотирикутників, вписаних в коло, сторони яких дорівнюють m,n,k,l маємо $S=\sqrt{(p-m)(p-n)(p-k)(p-l)}.$ Користуючись цією формулою, безпосередньо отримуємо, що площа заданого трикутника $S=\sqrt{2a(a-1)}$ при всіх $a>1$.

Формулу для обчислення площі можна було б отримати і безпосередньо як суму площ двох трикутників, які утворюють чотирикутник $ABCD.$ Для цього спочатку з цих трикутників за теоремою косинусів обчислюємо діагональ чотирикутника і знаходимо з отриманої рівності косинуси протилежних кутів, які відрізняються лише знаком. Далі знаходимо синуси цих кутів. А вже тоді легко знайти і площі кожного з цих трикутників.

11.5. Розглянемо півкруг з діаметром $4n$. Проведемо перпендикуляри до цього діаметра на відстанях $1,2,3,\ldots,2n-1$ від його лівого кінця. Їх довжини дорівнюють відповідним доданкам у лівій частині нерівності. На кожному з перпендикулярів справа від нього побудуємо прямокутник з основою 1, яка лежить на діаметрі півкруга. Сума площ таких прямокутників дорівнюватиме лівій частині нерівності. Зрозуміло, що ця сума менша площі половини півкруга, тобто менша πn^2.

2009 рік

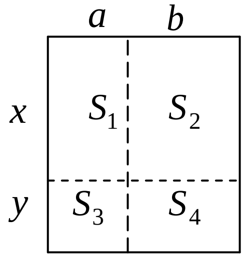
7.1. Щоб придбати товару на суму, не меншу 600 *грн.*, треба мати не менше $0,9 \cdot 600 = 540$ *грн.* Отже, у випадку а) покупець зможе отримати знижку 10% і зробити покупку на максимальну суму $594 : 0,90 = 660$ *грн.* А у випадку б) знижка становитиме лише 4%. Тому максимальна сума покупки дорівнюватиме $534 : 0,96 = 556,25$ *грн.*

7.2. Можна. Для цього досить пройти шлях від лівої нижньої кутової клітинки до кожної з білих клітинок, повертаючись при цьому кожен раз у початкову кутову клітинку тим же маршрутом, але у зворотному напрямі. Після кожного такого обходу свій колір змінять тільки ліва нижня кутова клітинка і та кінцева з білих клітинок, до якої дійшла фішка. А оскільки на вказаній шахівниці є 24 білих клітинки, то за 24 такі обходи всі клітинки дошки стануть чорними. Зауважимо також, що нескладно вказати і значно коротший маршрут фішки, при якому вона у кожній білій клітинці побуває по одному разові, а у кожній чорній – не більше, як двічі.

7.3. Розглянемо остачу від ділення суми цифр записаного числа на 9. Вона не залежить від порядку, в якому були виписані числа 1, 2, …, 2009, а з іншого боку – дорівнює остачі від ділення на 9 суми цих чисел, бо натуральне число і сума його цифр при діленні на 9 дають однакові остачі. Враховуючи рівність $1+2+...+2009 =$

$$=(1+2006)+(2+2005)+...+(1003+1004)+2007+2008+2009$$

та подільність числа 2007 на 9, отримаємо, що шукана остача дорівнює 3. Тому записане число ділиться на 3, але не ділиться на 9, а отже, не може бути квадратом цілого числа.



7.4. Розглянемо рисунок справа. Оскільки $S_1 = ax$, $S_2 = bx$, $S_3 = ay$, $S_4 = by$, то $S_1S_4 = S_2S_3$. Отже, якщо відома площа трьох із цих чотирьох прямокутників, то можна знайти й площу останнього. Таким чином, на заданому в умові задачі рисунку можна обчислити площі усіх прямокутників: верхній ряд: $2,4,8,10$, другий ряд: $4,8,16,20$, третій ряд: $5,10,20,25$, і четвертий ряд: $3,6,12,15$. Їх сума складає 168.

8.1. Оскільки добуток цифр є простим числом, то цифри числа повинні бути $1, 1, p,$ де цифра p – просте число. Проаналізуємо можливі значення p у порядку спадання: 7, 5, 3, 2. Цифра p не може дорівнювати 7, оскільки тоді це число ділиться на 3 і не є простим. Цифра $p=5$ не може бути першою, бо це суперечить умові 2). Число 311 задовольняє умови задачі. Із сказаного вище випливає, що це найбільше із таких чисел, а отже, є шуканим.

8.2. З умов задачі випливає, що $abc \neq 0$ та $ab+bc+ca=0.$ Тому $a^2+b^2+c^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2,$ що й треба було довести.

8.3. Див. розв’язання задачі 7.3.

8.4. Див. розв’язання задачі 7.2.

8.5. Не залежно від вибору точки X, отримаємо, що $A_3H_2 \parallel A_1X$ та $A_2H_3 \parallel A_1X$ як прямі, перпендикулярні до l_1. Зрозуміло, що при цьому також $A_3H_2 \parallel A_2H_3$. Далі, аналогічно встановимо, що, $A_1H_2 \parallel A_3X$ та $A_1H_3 \parallel A_2X$. Тому чотирикутники $A_1XA_3H_2$ та $A_1XA_2H_3$ є паралелограмами. Отже, $A_3H_2 = A_1X = A_2H_3$. Тому чотирикутник $A_2A_3H_2H_3$ – також паралелограм, і в ньому $A_2A_3 = H_2H_3$. Аналогічно доводимо, що $A_2A_3 = H_2H_3$ та $A_2A_3 = H_2H_3$. Отже, $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle H_1H_2H_3$.

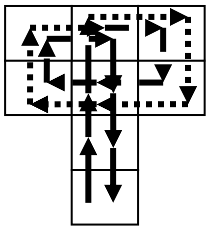
9.1. При $xy \neq 0$ перше рівняння системи рівносильне рівнянню $9xy = 2(x+y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-2x)(2y-x) = 0.$ Отже, при $x \neq 0$ з першого рівняння отримуємо $y = 2x$ та $y = \frac{1}{2}x.$ Друге рівняння при $|x| \geq \sqrt{2},$ $|y| \leq \sqrt{3}$ після піднесення до квадрату зводиться до вигляду $x^2 + y^2 = 5.$ Якщо $y = 2x,$ то звідси отримуємо два розв’язки системи: $(2,1)$ та $(-2,-1).$ А якщо $y = \frac{1}{2}x,$ то знайдемо такі дві пари чисел (x, y): $(1,2)$ та $(-1,-2).$ Легко бачити, що друге рівняння системи жодна з них не задовольняє.

9.2. Оскільки $320 = 2^6 \cdot 5$, то одна з цифр цього числа ділиться на 5. Зрозуміло, що такою цифрою може бути тільки цифра 5, бо інакше добуток всіх цифр такого числа дорівнював би нулю. Тоді добуток решти цифр становить $64 = 2^6.$ Ясно, що таких інших цифр не менше, як дві. Оскільки число 64 єдиним способом розкладається у добуток двох одноцифрових множників: $64 = 8 \cdot 8$, то серед чисел 588, 858, 885 найменшим трицифровим числом із добутком цифр 320 буде число 588. Оскільки всі решта числа із таким добутком цифр не менше, як чотирицифрові, а отже, більші, ніж 588, то число 588 є шуканим.

9.3. Оскільки $xy \le \frac{x^2 + y^2}{2}$ для будь-яких дійсних чисел x, y, то

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \le \frac{a^2 + (1-b^2)}{2} + \frac{b^2 + (1-a^2)}{2} = 1.$$

9.4. Див. розв'язання задачі 8.5.



9.5. Оскільки жодна біла клітинка дошки не є кутовою, то для кожної білої клітинки існують дві сусідні клітинки, які знаходяться або обидві на одній горизонталі шахівниці, або обидві на одній вертикалі шахівниці. Пройдемо тепер з лівого нижнього кута до кожної білої клітинки маршрутом, проілюстрованим для першого з цих варіантів на рисунку справа. Тут біла клітинка, до якої ми проходимо фішкою, є центральною у верхньому ряді рисунка. Інші можливі входження у білі клітинки при їх розташуванні на лівому, правому чи нижньому краях шахівниці легко проаналізувати повертаючи цей рисунок на 90 чи 180 градусів. Обійшовши згідно поставлених стрілок клітинки верхніх двох рядів рисунка, ми далі вертаємося у лівий нижній кут шахівниці тим же маршрутом, яким ввійшли у середню клітинку другого рядка, але, рухаючись у зворотному напрямі. Оскільки при цьому непарну кількість разів ми побуваємо лише у вибраній білій клітинці, то її колір стане чорним. Крім того, при кожному такому обході буде змінюватися на протилежний і колір лівої нижньої клітинки шахівниці. Враховуючи, що кількість білих клітинок на такій шахівниці є парною, отримаємо після завершення всіх обходів всі клітинки шахівниці чорними.

10.1. Нехай рівняння прямих l_1 та l_2 мають вигляд $y = kx + d_1$ та $y = kx + d_2$. Тоді абсциси точок A і B є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = kx + d_1$, а абсциси точок C і $D -$ коренями рівняння $ax^2 + bx + c = kx + d_2$, які за умовою задачі мають по два розв'язки x_1, x_2 та x_3, x_4 відповідно. За теоремою Вієта отримуємо: $x_1 + x_2 = \frac{k-b}{a}$ та $x_3 + x_4 = \frac{k-b}{a}$. Отже, $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

10.2. а) Не обов'язково. Наприклад, $a = c = 2,\ b = d = 4.$

б) Обов'язково. Покажемо, що якщо у натурального числа n його квадрат n^2 є кубом деякого іншого натурального числа, то й саме число n також є кубом декого натурального числа. Дійсно, розглянемо розклад числа n на прості множники, тобто $n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$. Його квадрат – число $n^2 = p_1^{2m_1}...p_k^{2m_k}$. Якщо воно є кубом натурального числа, то для кожного $i = \overline{1,k}$ повинна виконуватись рівність $2m_i \vdots 3$, що рівносильне умові $m_i \vdots 3$. А це й означає, що число n є кубом. Оскільки $\dfrac{ab \cdot cd \cdot ea}{bc \cdot de} = a^2 = a_1^3$, то й кожне з чисел a, b, c, d, e є повним кубом.

10.3. Виграє той, хто ходить другим. Для цього йому досить дотримуватися такої стратегії: 1) якщо він своїм ходом може пофарбувати останню сторону якої-небудь клітини, то він це робить і перемагає; 2) якщо ні, то на хід першого він відповідає симетричним ходом відносно однієї і тієї ж діагоналі квадрата. Зрозуміло, що при цьому він або першим замалює четверту сторону якогось одиничного квадратика, або матиме симетричний хід після ходу першого гравця. Зауважимо, що після такого симетричного ходу перший гравець виграти не зможе, бо інакше другий уже мав би нагоду виграти раніше своїм попереднім ходом.

10.4. З властивостей зовнішніх та вписаних кутів отримуємо, що

$$\angle CFK = \angle CFE = \angle CAE + \angle AED = \tfrac{1}{2}(\cup CE + \cup AD) = \tfrac{1}{2}(\angle A + \angle B).$$

Аналогічно доводимо, що $\angle CKF = \tfrac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Тому $CF = CK$. Далі, з рівності дуг $\cup CD = \cup AD$ та $\cup CE = \cup BE$ отримуємо рівність трикутників DCE та DIE за спільною стороною DE та прилеглими до неї кутами. Звідси випливає, що також $\triangle DCK = \triangle DIK$ та $\triangle FCE = \triangle FIE$ за відповідними двома сторонами і кутом між ними. Тому $CF = FI$ та $CK = KI$. Отже, у чотирикутнику $CFIK$ всі сторони рівні і він є ромбом.

10.5. Див. розв'язання задачі 9.3.

Можна міркувати ще й так: зробимо заміну: $a = \cos\alpha,\ b = \cos\beta,$ $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Тоді нерівність набуває вигляду:

$$\cos\alpha \sin\beta + \cos\beta \sin\alpha = \sin(\alpha + \beta) \le 1.$$

Крім того, справедливість нерівності легко отримати, розглянувши скалярний добуток векторів $\vec{x}=\left(a,\sqrt{1-a^2}\right)$ та $\vec{y}=\left(\sqrt{1-b^2},b\right)$. Тоді

$$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=a\cdot\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-a^2}\cdot b=$$
$$=\vec{x}\cdot\vec{y}\le\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|=\sqrt{a^2+(1-a^2)}\cdot\sqrt{b^2+(1-b^2)}=1.$$

11.1. Перше число більше. Запишемо цю задачу у загальному вигляді: для деяких додатних $a\neq b$ порівняти додатні числа $A=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{b+\sqrt{a}}$ та $B=\sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{b+\sqrt{b}}$. Доведемо, що $A>B$. Це рівносильне тому, що

$$A^2>B^2\Leftrightarrow\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{a}}>\sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Після чергового піднесення до квадрату та спрощень маємо: $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\Leftrightarrow(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)>0$ при $a\neq b.$

11.2. $n\in\{1;7\}$. Число 3π є періодом період даної функції $f\left(x\right)$, якщо для всіх $x\in R$ виконується рівність $f\left(x+3\pi\right)=f\left(x\right)$. Зокрема, ця рівність має виконуватись і для $x=0$. Знаходимо: $f\left(0\right)=0;$ $f\left(3\pi\right)=\cos 3\pi n\cdot\sin\dfrac{3\cdot 2009\pi}{n^2}$. Отже повинна виконуватись рівність

$$0=\cos 3\pi n\cdot\sin\frac{3\cdot 2009\pi}{n^2}\Leftrightarrow 0=\sin\frac{3\cdot 2009\pi}{n^2}\Leftrightarrow\frac{6027\pi}{n^2}=\pi k,\ k\in Z.$$

Отже, $6027\,\vdots\,n^2$. Але $6027=3\cdot 7^2\cdot 41$, то можливими значеннями n можуть бути лише числа 1 та 7. Перевіркою переконуємося, що при цих n число 3π справді є періодом функції $f\left(x\right)$.

11.3. Див. розв'язання задачі 10.4.

11.4. Неважко заповнити квадрат 2009×2009 числами $1,2,\ldots,2009$ так, щоб виконувались умови задачі і відстань до найближчої одиниці дорівнювала 502. Для цього будемо виписувати одиниці на тих діагоналях, паралельних до діагоналі квадрата, яка йде з його лівого нижнього кута у правий верхній кут, що складаються відповідно з 1005 та 1004 клітинок квадрата. Решту клітинок квадрата заповнимо аналогічно, дотримуючись принципу, щоб при кожному k на діагоналях із k та $2009-k$ було записане одне і те ж число від 2 до 2009, різне для різних k. Покажемо, що отримати більшу відстань, ніж 502, не вдасться. Для цього помітимо, що у верхніх та нижніх 502 горизонталях разом завжди будуть знаходитися $2\cdot 502=1004$ одиниці (бо в кожному рядку є рівно одна одиниця). Крім них, у лівих 502 вертикалях та у правих 502 вертикалях знаходиться не більше 1004 одиниць (не більше, бо деякі з них можуть бути враховані в горизонталях). Отже, в центральному квадраті з розмірами 1005×1005 лежить принаймні одна одиниця. А відстань від центра до будь-якої клітини цього квадрата не перевищує 502.

11.5. Не існує. Справді, припустивши, що корені такого многочлена задовольняють умову задачі, отримаємо $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$ де $\alpha,\beta,\gamma-$ цілі числа. Тоді число $|f(34)|=|(34-\alpha)(34-\beta)(34-\gamma)|$ просте. Не порушуючи загальність розгляду, можемо вважати, що $|34-\alpha|=|34-\beta|=1,$ а $|34-\gamma|-$ просте число. Звідси випливає, що $\alpha\geq 33$ та $\beta\geq 33.$ А оскільки найближчими до 34 є прості числа 31 та 37, то $|\gamma|\geq 3.$ Отже, $|c|=|\alpha\beta\gamma|\geq 33\cdot 33\cdot 3=3267>2009,$ що суперечить умові $|c|\leq 2009.$

2010 рік

I тур

7.1. $12-\left(11-10-9-8-7-6-5-4-3-2-1\right)=56.$ При будь-якій розстановці дужок число 12 завжди буде зі знаком «+», а число 11 – зі знаком «–». Тому значення виразу буде найбільшим, якщо всі інші доданки після розкриття дужок будуть зі знаком «+».

7.2. 999. Якщо $n<999,$ то хоч одна цифра числа n менша, ніж 9. А тоді сума цифр принаймні одного з чисел $n+1,$ $n+10$ або $n+100$ більша, ніж сума цифр числа $n.$

7.3. Могли. Двом дівчатам слід було розрізати прямокутник по діагоналі і скласти два різні трикутники, третій – розрізати прямокутник від вершини до середини більшої сторони, а четвертій – від вершини до середини меншої сторони.

7.4. 12 фігурок. Вісьмома з них заповнити прямокутник $5\times8,$ а ще по дві розмістити у двох прямокутниках $3\times4.$ На більшу кількість фігурок просто не вистачить площі квадрата.

8.1. $2010-\left(2009-2010-2009-...-2010-2009\right)=4035077.$ При будь-якій розстановці дужок перше число 2010 завжди буде зі знаком «+», а перше число 2009 – зі знаком «–». Тому значення виразу буде найбільшим, якщо всі інші доданки після розкриття дужок будуть зі знаком «+». Врахуйте також, що

$$2010-\left(2009-2010-2009-...-2010-2009\right)=1+\left(2010+2009\right)\cdot 1004.$$

8.2. Усіх можливих варіантів випадання очок є $6^2=36.$ У шести з них в обох дітей очок випаде порівну. У решті тридцяти – в половині випадків більше очок випаде в Олесі. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}.$

8.3. При всіх $n\geq 3.$ Справді, тоді $n\cdot\left(2n+2\right)=2n\cdot\left(n+1\right),$ причому $n<n+1<2n<2n+2<n^2.$ Якщо ж $n=1$ чи $n=2,$ то у пропонованому наборі чотирьох різних чисел просто не існує.

8.4. Проведемо висоту AH цього трикутника. Тоді $BM=MH,$ $CN=NH.$ Якщо S співпадає з однією з точок $B,C,H,$ то заданий добуток дорівнює нулю. Якщо S лежить між B і $H,$ то маємо $MB-MS<MB-MH<0,$ $NC-NS>NC-NH>0,$ і нерівність виконується, а якщо S лежить між C і $H,$ то аналогічно доводимо, що $MB-MS>MB-MH>0,$ $NC-NS<NC-NH<0.$

8.5. а). Існують. Наприклад, $a_1=2,$ $a_2=1005.$ З умови задачі випливає рівність $a_1\cdot a_2=2010,$ яка дає змогу знайти й інші пари чисел a_1,a_2 – дільників числа 2010. б). Існують. Наприклад, числа 2, 3, 5, 6, 10, 15, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, які можна розбити на 6 пар, в кожній з яких добуток чисел дорівнює 2010.

9.1. Розкриваючи знаки модулів при $x\neq 0,$ $y\neq 0,$ отримаємо $y=1$ при $x>0,$ $y>0$ та $y=-1$ при $x<0,$ $y<0.$ Якщо ж $xy<0,$ то з рівняння випливає $y=0,$ що неможливо.

9.2. Жовтих 12066, блакитних 10044. Зовнішні шари прямокутників розмірами $2008\times 9,$ $2004\times 5,$ 2000×1 будуть блакитними. Кількості їх клітинок чисельно дорівнюють площам відповідних шарів, які ще можна подати як різниці площ відповідних прямокутників. Остаточно отримуємо

$$\left(2008\cdot 9-2006\cdot 7\right)+\left(2004\cdot 5-2002\cdot 3\right)+2000\cdot 1=10044.$$

блакитних клітинок. Решта $2010\cdot 11-10044=12066$ клітинок жовті.

9.3. При $x=0$ та $x=1.$ При інших допустимих $x\in\left(0;1\right)$ отримуємо нерівність $0<\left(\sqrt{x}\right)^{2009}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}<x+\left(1-x\right)=1.$

9.4. Відкладемо на стороні BC точку E так, що $CE = BD.$ Оскільки $OB = OC,$ то $\Delta OBD = \Delta OCE.$ Враховуючи умову задачі, отримаємо, що $BD = OD = OE = CE = DE.$ Далі знаходимо $\angle DOE = \angle OED = \angle ODE = 60^0,$ $\angle BOD = \angle COE = 30^0.$ Звідси випливає, що $\angle BOC = 120^0,$ $\angle DOC = 90^0,$ $\angle AOC = 90^0,$ $\angle AOB = 150^0.$ А оскільки вписаний кут дорівнює половині відповідного центрального кута, то $\angle ABC = 45^0,$ $\angle BAC = 60^0,$ $\angle ACB = 75^0.$

9.5. 2011. Нехай $n = 2010 + m.$ Тоді за умовою задачі для кожного $k \in \{1, 2, ..., m\}$ числа $n + k = 2010 + m + k$ та $2010 + k$ є взаємно простими. Віднявши від першого з них друге, отримаємо, що при цих же k взаємно простими будуть і числа m та $2010 + k$. Але серед m послідовних чисел $2011, 2012, ..., 2010 + m$ одне обов'язково ділиться на $m.$ Тому m може бути лише 1.

10.1. Три. Наприклад, $9954 - 4599 = 5355.$ Ясно, що п'ятірок не більше чотирьох. Але різниця $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 999(a-d) + 90(b-c) \vdots 9,$ а число 5555 на 9 не ділиться.

10.2. $x = 0.$ Помноживши ліву і праву частину заданого рівняння на $2 = (x+1) - (x-1),$ отримаємо рівняння

$$(x+1)^6 - (x-1)^6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2.$$

10.3. Вказані чотирикутники є трапеціями з рівними відповідними основами. Позначимо довжини цих основ a та $b.$ Тому, враховуючи формулу площі трапеції: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$ достатньо довести, що у названих парах таких трапецій суми висот є рівними. Неважко побачити, що вони дорівнюють $|a-b|.$

10.4. З умов задачі випливає, що $z = xy^2 + x - 1 = 2xy - 1.$ Отже, $x(y^2 - 2y + 1) = 0.$ Оскільки ж $x \neq 0,$ то знаходимо $y = 1.$ Тоді з рівності $xy = \frac{z+1}{2}$ будемо мати $x = \frac{z+y}{2},$ що й слід було довести.

10.5. При дванадцяти. Кількість пар сусідів дорівнює кількості учнів за столом. З умови задачі випливає, що з одного боку вона має ділитись на 3, а іншого боку – на 4, отже, не може бути меншою, ніж 12. Для трьох хлопчиків, два з яких сидять поруч, а третій окремо від них, і дев'яти дівчаток умова задачі виконується.

11.1. Якщо $n -$ парне, то групуючи зліва доданки по два, починаючи з другого, переконуємося, що ліва частина від'ємна. Якщо ж $n -$ непарне, то знову групуючи зліва доданки по два, але починаючи з першого, бачимо, що у кожній парі різниці дорівнюють відповідним доданкам правої частини. Враховуючи монотонність суми зліва, звідси знаходимо єдиний розв'язок $n = 2010 \cdot 2 + 1 = 4021$.

Можна було також порахувати суми зліва та справа за формулами для суми членів геометричної прогресії.

11.2. Жовтих 846, блакитних 485. Зовнішні шари кубів розмірами $9 \times 9 \times 9$, $5 \times 5 \times 5$, $1 \times 1 \times 1$ будуть блакитними. Кількості їх клітинок чисельно дорівнюють об'ємам відповідних шарів, які ще можна подати як різниці об'ємів відповідних кубів. Отже, остаточно отримуємо кількість блакитних клітинок $\left(9^3 - 7^3\right) + \left(5^3 - 3^3\right) + 1^3 = 485$. Всі інші $11^3 - 485 = 846$ клітинок жовті.

11.3. Позначимо через O точку перетину діагоналей AC та BD. Оскільки висота AO трикутника ABD лежить на прямій AC, то на цій прямій лежатиме і точка K перетину його висот. Проведемо через K висоту BH цього трикутника. Тоді $\angle DBH = \angle DAC = \angle DBC$. Отже, у трикутнику KBC висота BO є ще й бісектрисою, а значить, і медіаною. Тому точка K симетрична до C відносно точки O. Аналогічно доводимо симетричність відносно O пар точок M та A, L та B, Q та D. Отже, чотирикутники $MLKQ$ та $ABCD$ рівні як симетричні відносно O.

11.4. Останні цифри чисел 2^n та 3^m повторюються з періодом 4. Для першого числа їх послідовність $2,4,8,6$, а для другого – $3,9,7,1$. При подільності $2^n + 3^m$ на 5 отримуємо такі комбінації останніх цифр: $2+3, 4+1, 8+7, 6+4$. Тоді для числа $2^m + 3^n$ відповідні їм комбінації будуть такими: $2+3, 6+4, 8+7, 4+1$. Отже, дане число також ділиться на 5.

11.5. Запишемо перше рівняння даної системи у вигляді $(xy-1)^2 = x(x-y)$. Оскільки $x = 0$ не задовольняє його, то при $x > 0$ звідси отримуємо, що $x \ge y$. Аналогічно з інших двох рівнянь знайдемо $y \ge z$ та $z \ge x$. Тому $x = y = z$. Далі з першого рівняння отримаємо $x^4 + 1 = 2x^2$. Отже, $x = y = z = 1$.

II тур

7.1. Зрозуміло, що учасників олімпіади непарна кількість, і номер Андрія не більший, ніж 18. Тому всіх учасників олімпіади не більше, ніж 35. Їх також не менше, ніж 28. Між 28 і 35 є єдине непарне число, кратне 3, – це 33. Тому шкіл у районі – 11.

7.2. Проведемо діагональ AC квадрата $ABCD$, виберемо на ній точки E та F і сполучимо ці точки з вершиною B. Далі, виберемо на відрізку BF точку G і сполучимо її з E та серединою відрізка BE. Отримаємо одне з багатьох можливих розбиттів квадрата.

7.3. Для довільного $n \in N$ сума цифр числа $10^n - 1$ дорівнює $9n$. Оскільки $\left(10^n - 1\right)^2 = 10^{2n} - 2\cdot 10^n + 1 = 99...9800...01$, причому цифр 9 та 0 тут по $n-1$, то і сума цифр квадрата такого числа теж буде $9n$.

7.4. Якщо фішка рухається достатньо довго, то настане момент, коли у деякій клітинці A вона побуває 2010 разів. Перший свій стрибок з цієї клітинки вона зробить у деяку клітинку B, другий – у наступну за B клітинку, і так далі. За 2010 таких послідовних стрибків із клітинки A фішка побуває у всіх клітинках.

8.1. Див. розв’язання задачі 7.1.

8.2. а). Зможе. $256 \to \sqrt{256} = 16 \to 3\cdot 16 + 13 = 61 \to$

$$\to 3\cdot 61 + 13 = 196 \to \sqrt{196} = 14 \to 3\cdot 14 + 13 = 55.$$

б). Не зможе. Квадрати натуральних чисел при діленні на 4 можуть давати лише остачі 0 або 1. Число 55 при такому діленні дає остачу 3. Тому, діючи за першим правилом, ми отримаємо на другому кроці остачу 2, далі – остачу 3, потім – знову остачу 2, які, таким чином, будуть чергуватися. А отже, жодного точного квадрата, зокрема і числа 256, отримати не вдасться.

8.3. 45^0. Нехай прямі CO_1 та AO_2 перетинаються в точці K. Відкладемо на цих прямих точки P та Q відповідно так, що $\angle PBA = \angle O_1BA$, $\angle QBC = \angle O_2BC$. Оскільки $\angle BAH = \angle BCH = 60^0$, то $\angle BO_1H = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAH = 120^0$, $\angle BO_2H = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BCH = 120^0$. Отже, навколо чотирикутників O_1BCH та O_2BAH можна описати кола. Тому $\angle O_1CH = \angle O_1BH = \angle PBA$, $\angle O_2AH = \angle O_2BH = \angle QBC$. Звідси, враховуючи, що $AH \perp BC$, $CH \perp AB$, отримуємо, що $\angle BPK = \angle BQK = 90^0$. Тому $\angle PKA = \angle PBQ = 45^0$.

8.4. Див. розв’язання задачі 7.4.

9.1. а). Могло. Нехай на дошці були записані числа $n, n+1, n+2, ..., n+15$. Їх сума $16n+120=8(2n+15)$ ділиться на 8, а при $n=55-$ ще й на 125, а отже, при такому n закінчується трьома нулями. Але серед 16 послідовних чисел є принаймні 3 числа, кратні 5, та 3 парні числа, то і їх добуток теж ділиться на 1000.

б). Не могло. Сума $8(2n+15)$ при жодному натуральному n не ділиться на 16. А добуток 16 послідовних натуральних чисел на 16 ділиться. Отже, 4 останні цифри у них співпадати не можуть.

9.2. Див. розв'язання задачі 8.2.

9.3. Див. розв'язання задачі 8.3.

9.4. Дана нерівність при додатних a, b, c рівносильна нерівності

$$a^2+b^2+c^2 \le \frac{a^3}{b+c}+\frac{1}{4}a(b+c)+\frac{b^3}{c+a}+\frac{1}{4}b(c+a)+\frac{c^3}{a+b}+\frac{1}{4}c(a+b).$$

А справедливість останньої випливає з трьох нерівностей вигляду

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{1}{4}x(y+z) \ge 2\sqrt{\frac{x^3}{y+z}\cdot\frac{1}{4}x(y+z)}=x^2, \quad x>0, y>0, z>0.$$

10.1. Див. розв'язання задачі 9.1.

10.2. 11 раундів. Додамо до 2010 учасників ще 38 фіктивних програмістів, причому 19 з них розмістимо на початку, а решту 19 – в кінці списку. Після цього занумеруємо всіх їх номерами від 0 до 2047, записавши ці номери у двійковій системі числення таким чином, щоб кожен номер мав 11 цифр, дописуючи при потребі нулі на початку. Тепер в кожному $k-$му раунді, $k=1,2,...,11,$ в одну групу будемо включати всіх учасників, у яких на $k-$му місці стоїть 0, а в другу групу – всіх учасників, у яких на $k-$му місці стоїть 1. Зрозуміло, що при цьому всі групи будуть рівними і міститимуть по 19 фіктивних учасників. Крім того, кожні два номери відрізнятимуться хоч в одному розряді, тому у відповідному цьому розряду раунді гравці з цими номерами гратимуть в різних групах. Покажемо тепер, що 10 раундів буде недостатньо. Справді в першому раунді 1005 учасників будуть в одній групі. З них не менше 503 попадуть в одну групу у другому раунді, не менше 252 – у третьому, не менше 126 – у четвертому, не менше 63 – у п'ятому, не менше 32 – у шостому, не менше 16 – у сьомому, не менше 8 – у восьмому, не менше 4 – у дев'ятому, і принаймні два – у десятому.

10.3. Див. розв'язання задачі 9.4.

10.4. а). $\angle AMF = \angle CFE - \angle FAI = \left(90^0 - \frac{1}{2}\angle C\right) - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B.$ Тому $\angle IMN = \angle IBA.$ Аналогічно доводимо, що $\angle INM = \angle IAB.$ Точки F та D симетричні відносно прямої AM. Тому $\angle IMD = \angle IMN = \angle IBD.$ Отже, навколо чотирикутника $IMBD$ можна описати коло. Тому $\angle IMB = \angle IDB = 90^0.$ Нехай P – середина $AB.$ Тоді $\angle MPD = 2\angle IAD = \angle A.$ Аналогічно доводимо, що $\angle INA = 90^0,$ $\angle NPA = \angle B.$ Отже, точка P є центром кола, описаного навколо чотирикутника $ANMB,$ причому $\angle NPM = \alpha = const.$ Тому й довжина хорди MN цього кола теж стала.

б). Точки E та D симетричні відносно прямої BN, то $\angle MND = 2\angle MNI = 2\angle IAD = \angle MPD.$ Тому точки P, N, M, D лежать на одному колі. Це означає, що кожен раз коло, описане навколо трикутника $MND,$ проходитиме через середину $AB.$

11.1. Нехай $A\left(x_1, ax_1^2\right),$ $B\left(x_2, ax_2^2\right).$ Тоді $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2}\right).$ Запишемо рівняння дотичних до параболи у у точках A та B: $y = 2ax_1x - ax_1^2,$ $y = 2ax_2x - ax_2^2.$ Розв'язавши систему цих рівнянь, знайдемо точку перетину цих дотичних: $T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, ax_1x_2\right).$ Серединою відрізка PT є точка $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1x_2}{4}\right).$ Неважко переконатися, що $y_M = ax_M^2$, що й слід було довести.

11.2. Див. розв'язання задачі 10.2.

11.3. Оскільки $\left(n^3 - 1\right) \vdots \left(mn - 1\right),$ $n > 1,$ то отримуємо, що $m \le n^2.$ $m^3 - 1 = \left(\left(\left(mn\right)^3 - 1\right) - m^3\left(n^3 - 1\right)\right) \vdots \left(mn - 1\right),$ $m > 1,$ то також $n \le m^2.$ Якщо $m < n^2,$ то з умови $n^2 - m = \left(\left(n^3 - 1\right)m - n^2\left(mn - 1\right)\right) \vdots \left(mn - 1\right)$ отримуємо $n^2 - m \ge mn - 1 > mn - m \Rightarrow n > m.$ Якщо при цьому ще й $n < m^2,$ то з умови $m^2 - n = \left(\left(m^3 - 1\right)n - m^2\left(mn - 1\right)\right) \vdots \left(mn - 1\right)$ будемо мати $m^2 - n \ge mn - 1 > mn - n \Rightarrow m > n.$ Таким чином, отримуємо лише $n = m^2$ або $m = n^2$, які й є розв'язками задачі при $m > 1, n > 1.$

11.4. Див. розв'язання задачі 10.4.

Зміст

Підписано до друку 31 серпня 2010р.
Формат 61х84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 5,25 друк. арк. Наклад 400 пр.
Замовлення № 145 від 20.08.2010

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32