Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПРАКТИКУМ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА I

Івано-Франківськ

2013

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73
П 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як навчальний посібник для студентів математичних та технічних напрямів підготовки (протокол № 2 від 15 жовтня 2013 р.).

Рецензенти:

Бігун І.Й., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича),

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

П 69 Практикум з математичного аналізу. – Частина І. / А.В. Загороднюк, М.І. Копач, В.В. Кравців, Г.П. Малицька, А.В. Соломко, С.В. Шарин. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – Івано-Франківськ : Сімик, 2013. – 177 с.

У посібнику наведені короткі відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та приклади розв'язування деяких з них. Перша частина посібника розкриває наступні теми: елементи теорії множин, границя послідовності, границя функції в точці, неперервність функції в точці і на проміжку, похідна і диференціал функції однієї змінної та застосування похідної.

Для студентів математичних та технічних напрямів підготовки, які вивчають курси "математичний аналіз I", "математичний аналіз II".

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання практичного курсу математичного аналізу на факультеті математики та інформатики і фізико-технічному факультеті Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів математичних та технічних напрямів підготовки.

Матеріал першої частини посібника охоплює елементи теорії множин, границю послідовності, границю функції в точці, неперервність функції та диференціальне числення функції однієї змінної разом із застосуванням похідної функції до розв'язування задач.

На початку кожного параграфу подаються короткі теоретичні відомості з кожної теми, які містять основні означення, формулювання важливих теорем та основні формули. Далі поміщено вправи для розв'язування. Друга частина кожного параграфу містить повне розв'язування вибраних вправ.

Маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних прикладів, викладач може зосередити увагу студентів на розв'язуванні більш складніших задач. Наявність теоретичного матеріалу та прикладів розв'язування задач допоможе студенту опрацьовувати матеріал посібника самостійно.

Слід зазначити, що для досконалого вивчення матеріалу перед тим, як починати розв'язувати вправи, необхідно добре засвоїти теоретичний матеріал з кожної теми. Потім розібрати наведені вправи з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ для самостійного виконання.

РОЗДІЛ І. Елементи теорії множин. Дійсні числа

§ 1.1. Поняття множини. Операції над множинами. Властивості

Множина – одне з основних математичних понять, яке не визначається через простіші поняття. Іншими словами, ***множина*** – це сукупність певних об'єктів, які володіють однією і тією ж властивістю. Об'єкти, що утворюють дану множину, називаються її ***елементами***.

Якщо елемент x належить множині A, то позначають $x \in A$. Якщо елемент x не належить множині A, то позначають $x \notin A$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається ***порожньою множиною.***

Множина задається двома способами:

1) переліком її елементів;

2) зазначенням характеристичної властивості елементів множини.

Множини, елементами яких є числа, називаються ***числовими множинами***. Наприклад, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q} : \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ – множина раціональних чисел, $\mathbb{I}$ – множина ірраціональних чисел, $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

Множина B називається ***підмножиною*** множини A і записується $B \subset A$, якщо кожен елемент множини B є одночасно елементом множини A, тобто

$$B \subset A \Longleftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Множини A та B називаються ***рівними*** і записують $A = B$, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Об'єднанням двох множин A та B називається множина C, яка містить всі елементи множин A та B, і не містить ніяких інших елементів (див. рис. 1). Позначається

$$C = A \cup B := \Big\{ x : \ \ x \in A \ \text{ або } \ x \in B \Big\}.$$

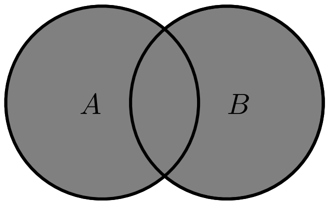

Рис. 1. Об'єднання множин A та B

Перерізом двох множин A та B називається множина C, яка містить всі спільні елементи множин A та B, і не містить ніяких інших елементів (див. рис. 2). Позначається

$$C = A \cap B := \Big\{ x : \ \ x \in A \ \text{ і } \ x \in B \Big\}.$$

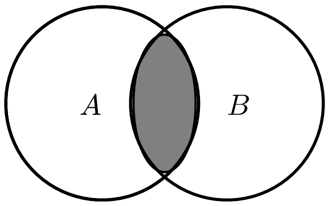

Рис. 2. Переріз множин A та B

Різницею двох множин A та B називається множина C, яка складається з усіх елементів множини A, що не належать множині B, і не містить жодних інших елементів (див. рис. 3). Позначається

$$C = A \setminus B := \Big\{ x : \ \ x \in A \ \text{ і } \ x \notin B \Big\}.$$

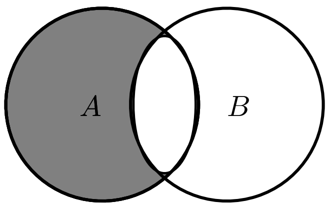

Рис. 3. Різниця множин A та B

Якщо $B \subset A$, то різниця $A \setminus B$ називається ***доповненням*** множини B до множини A і позначається $C_A B$ або $\overline{B}$ (див. рис. 4).

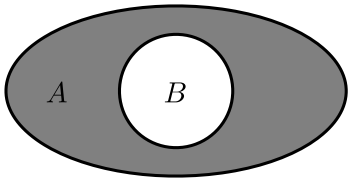

Рис. 4. Доповнення множини B до A

Симетричною різницею множин A та B називається множина C, яка складається з усіх елементів множини A, що не належать множині B та з усіх елементів множини B, що не належать множині A, і не містить жодних інших елементів (див. рис. 5). Позначається

$$C = A \triangle B := \Big(A \setminus B\Big) \cup \Big(B \setminus A\Big).$$

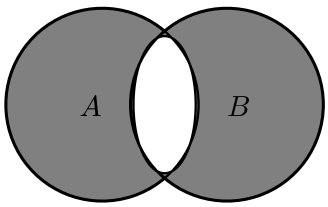

Рис. 5. Симетрична різниця множин A та B

Декартовим добутком двох множин A та B називається множина C, яка складається з впорядкованих пар елементів (x, y), де $x \in A$, $y \in B$. Позначається

$$C = A \times B := \Big\{(x, y) : \ x \in A \ \text{ і } \ x \in B\Big\}.$$

Властивості операцій над множинами

I. 1) $A \cup B = B \cup A$ (комутативність об'єднання),

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (асоціативність об'єднання),

3) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$,

4) $A \cup A = A$,

5) $A \cup \varnothing = A$.

II. 1) $A \cap B = B \cap A$ (комутативність перерізу),

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (асоціативність перерізу),

3) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$,

4) $A \cap A = A$,

5) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

III. 1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (дистрибутивність перерізу відносно об'єднання),

2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивність об'єднання відносно перерізу),

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Вправи

1. За допомогою кругів Ейлера-Венна на площині перевірити, що для множин A, B, C виконуються наступні властивості:

1) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$, 2) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$,

3) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = A$, 4) $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus ((A \cap B) \setminus C)$.

2. Довести властивості:

1) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$, 2) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$,

3) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$, 4) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, 6) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$,

7) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

3. Знайти об'єднання, переріз, різницю та симетричну різницю множин A та B :

1) $A = \Big\{x : \ -1 < x < 5\Big\}$, $B = \Big\{x : \ -2 \le x \le 5\Big\}$,

2) $A = \Big\{x : \ x^2 + 3x < 0\Big\}$, $B = \Big\{x : \ x^2 - 2x - 3 > 0\Big\}$,

3) $A = \Big\{x : \ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0\Big\}$, $B = \Big\{x : \ \dfrac{x - 1}{x + 2} \ge 1\Big\}$,

4) $A = \Big\{x : \ \cos x \ge \dfrac{1}{2}\Big\}$, $B = \Big\{x : \ \sin x < \dfrac{1}{2}\Big\}$,

5) $A=\Big\{x:\ \ -3\le|x-4|\le 3\Big\},\qquad B=\Big\{x:\ \ 3|x|>7\Big\},$

6) $A=\Big\{x:\ \ \log_{\frac{1}{3}}\Big(x-\dfrac{3}{2}\Big)>1\Big\},\qquad B=\Big\{x:\ \ 3^{2x}-6\cdot 3^{x}+8\ge 0\Big\}.$

4. Визначити і зобразити на площині множини $A\cup B,\ A\cap B,\ A\backslash B,\ B\backslash A$, якщо:

1) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+y^2\le 1\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ xy\ge 0\Big\},$

2) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y>\sqrt{x}\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+(y-1)^2\le 1\Big\},$

3) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^3>y^3\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2>y^2\Big\},$

4) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x=y\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ |x|+|y|\le 1\Big\},$

5) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x>0,\ y>0\Big\},$

6) $A=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 2^{x+1}=y^2+4\Big\},\qquad B=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y\ge 2^{x-1}\Big\}.$

5. Знайти об'єднання і переріз множин $X_n,\ n\in\mathbb{N}$, якщо:

1) $X_n=\left(-\dfrac{1}{n};\,\dfrac{1}{n}\right),$ 2) $X_n=(3n-2;\,3n+1),$

3) $X_n=\left[\dfrac{n}{2n+1};\,\dfrac{n}{n+1}\right),$ 4) $X_n=\left(0;\,\dfrac{n}{n+1}\right),$

5) $X_n=\left[-\dfrac{1}{n};\,\dfrac{2n-1}{n}\right],$ 6) $X_n=\left[-\dfrac{1}{n};\,\dfrac{1}{n}\right].$

Приклади розв'язування вправ

2.5. За означенням рівних множин потрібно довести справедливість двох включень:

$$(A\backslash B)\backslash C\subset(A\backslash C)\backslash(B\backslash C)\quad \text{і}\quad (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)\subset(A\backslash B)\backslash C.$$

Отже, з одного боку, для довільного елемента $x\in(A\backslash B)\backslash C$ маємо за означенням різниці множин, що $x\in A\backslash B$ і $x\notin C$.

Звідси

$$\Big((x\in A\ \text{ і }\ x\notin B)\ \text{ і }\ (x\notin C)\Big)\Longrightarrow\Big((x\in A\ \text{ і }\ x\notin C)\ \text{ і }\ (x\notin B)\Big)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big((x \in A \backslash C) \text{ і } (x \notin B \backslash C) \Big) \Longrightarrow \Big(x \in (A \backslash C) \backslash (B \backslash C) \Big).$$

З іншого боку, для довільного елемента $x \in (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$ маємо, що

$$\Big((x \in A \backslash C) \text{ і } (x \notin B \backslash C) \Big) \Longrightarrow \Big((x \in A \text{ і } x \notin C) \text{ і } (x \notin B \text{ або } x \in C) \Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big((x \in A \text{ і } x \notin C) \text{ і } (x \notin B) \Big) \Longrightarrow \Big((x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ і } (x \notin C) \Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(x \in (A \backslash B) \text{ і } (x \notin C) \Big) \Longrightarrow \Big(x \in (A \backslash B) \backslash C \Big).$$

Отже, рівність доведена. ▶

3.3. Спочатку розв'яжемо нерівності, які визначають характеристичні властивості елементів множин A та B :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{x-4} < 0.$$

За методом інтервалів розв'язками цієї нерівності є $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4)$.

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 1 \Longleftrightarrow -\frac{3}{x+2} \geq 0.$$

За методом інтервалів розв'язками даної нерівності є $x \in (-\infty; -2)$.

Отже,

$$A = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4) \Big\}, \quad B = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty; -2) \Big\}.$$

Звідси, за означенням операцій над множинами маємо:

$$A \cup B = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty; 2) \cup (3; 4) \Big\},$$

$$A \cap B = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty; -2) \Big\},$$

$$A \backslash B = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in [-2; 2) \cup (3; 4) \Big\},$$

$$B \backslash A = \varnothing,$$

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \Big\{ x \in \mathbb{R} : \ x \in [-2; 2) \cup (3; 4) \Big\}. \quad ▶$$

§ 1.2. Верхня та нижня межа множини. Метод математичної індукції

Непорожня множина E на дійсній осі $\mathbb{R}$ називається ***обмеженою зверху (знизу)***, якщо існує число $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ таке, що для всіх елементів $x \in E$ виконується нерівність $x \leq M$ $(x \geq m)$. Числа m і M називаються відповідно нижньою і верхньою межами множини.

Множина E називається ***обмеженою***, якщо вона є обмеженою і зверху і знизу.

Кожна непорожня обмежена зверху (знизу) множина має найменшу верхню (найбільшу нижню) межу.

Найменше з чисел, що обмежує множину $E \subset \mathbb{R}$ зверху, називається ***точною верхньою межею*** множини E і позначається $\sup E$. Іншими словами:

$$M = \sup E := \left| \begin{array}{l} 1)\ (\forall x \in E)\,\{x \leq M\}, \\ 2)\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x' \in E)\,\{x' > M - \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Найбільше з чисел, що обмежує множину $E \subset \mathbb{R}$ знизу, називається ***точною нижньою межею*** множини E і позначається $\inf E$. Іншими словами:

$$m = \inf E := \left| \begin{array}{l} 1)\ (\forall x \in E)\,\{x \geq m\}, \\ 2)\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x' \in E)\,\{x' < m + \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Зауважимо, що якщо множина E необмежена зверху (знизу), то вважають, що $\sup E = +\infty\,(\inf E = -\infty)$.

Якщо $\sup E \in E$ $(\inf E \in E)$, то його називають найбільшим елементом або ***максимумом*** (найменшим елементом або ***мінімумом***) множини E. Позначають відповідно $\max E = \sup E$ або $\min E = \inf E$.

Максимум і мінімум множини є точною верхньою і точною нижньою межами, однак із існування точних меж не випливає існування максимуму і мінімуму множини. У випадку, коли $E \subset \mathbb{N}$, то існує $\min E$. На цій властивості ґрунтується принцип математичної індукції: *якщо твердження* $A(n)$

правильне для $n = 1$ $(n = n_0)$ та із припущення правильності цього твердження для $n = k > 1$ $(k > n_0)$ випливає його правильність для $n = k + 1$, то $A(n)$ правильне для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $(n > n_0)$.

Отже, метод математичної індукції полягає у виконанні наступних кроків:

1) перевірити, чи правильне твердження $A(n)$ для $n = 1$ $(n = n_0)$,

2) припустити, що $A(n)$ правильне для $n = k$, де $k > 1\,(k > n_0)$,

3) довести правильність $A(n)$ для $n = k+1$, використовуючи припущення,

4) зробити висновок, що згідно з принципом математичної індукції твердження $A(n)$ правильне для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $(n > n_0)$.

Вправи

1. Знайти точні межі множини E, якщо:

$$1)\ E = \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right): \quad n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$2)\ E = \left\{\frac{n}{n+3}\,(2 + (-1)^n): \quad n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$3)\ E = \left\{\frac{mn}{4m^2 + n^2}: \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$4)\ E = \left\{\frac{m}{m+n}: \quad m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$5)\ E = \left\{\frac{m}{|m| + n}: \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. Знайти $\inf E,\ \sup E,\ \min E,\ \max E$, якщо:

1) $E = (0;1)$,

2) $E = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}; 5]$,

3) $E = [2;3] \backslash \mathbb{Q}$,

4) $E = \left\{x \in \mathbb{Q}: \ \sqrt[3]{x+2} < 4\right\}$,

5) $E = \left\{x: \ |x-2| - |x-3| \le 1\right\}$,

6) $E = \left\{x: \ \sin x - \cos 2x \ge 0\right\}$,

7) $E = \left\{\dfrac{n^2}{3n^2 + 2}: \ n \in \mathbb{N}\right\}$,

8) $E = \left\{\dfrac{n}{|n| + 2}: \ n \in \mathbb{Z}\right\}$,

9) $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}: \ n \in \mathbb{N}\right\}$,

10) $E = \left\{1 + \sin\dfrac{n\pi}{2}: \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$ довести, що:

1) $n^3 + 5n$ ділиться на 6,

2) $n^2(n^4 - 1)$ ділиться на 60,

3) $5^{n+3}+11^{3n+1}$ ділиться на 17,

4) $7^{2n}-4^{2n}$ ділиться на 33,

5) $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2}.

4. Для всіх натуральних чисел $n\in\mathbb{N}$ довести наступні рівності:

1) $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

2) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

3) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

4) $1+2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$,

5) $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$,

6) $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$,

7) $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$, де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, (біном Ньютона),

8) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$,

9) $\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{n}{4(n+4)}$,

10) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$.

5. Довести нерівності, використовуючи метод математичної індукції:

1) $|x_1+x_2+\ldots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$, $n\ge 2$,

2) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}\le 2-\dfrac{1}{n}$,

3) $n!\le\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$,

4) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n\ge 2$,

5) $(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$, $x\ne 0$, $n>1$, (нерівність Бернуллі),

6) $\left|\sin\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k$, якщо всі $x_k\in[0;\pi]$ і $n\ge 1$,

7) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\le\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$,

8) $n^{n+1}>(n+1)^n$, $n\ge 3$,

9) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,

10) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \ \ n > 1.$

Приклади розв'язування вправ

2.7. Оскільки множина E складається з елементів

$$\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{9}{29}, \frac{8}{25}, \dots, \frac{k^2}{3k^2+2}, \dots\right\},$$

то $\min E = \dfrac{1}{5}$, а отже, $\inf E = \dfrac{1}{5}$. Доведемо, що $\max E$ не існує. Якщо $x_k = \dfrac{k^2}{3k^2+2}$, то

$$x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)^2}{3(k+1)^2+2} - \frac{k^2}{3k^2+2} = \frac{4k+2}{(3(k+1)^2+2)(3k^2+2)} > 0.$$

Отже, кожен наступний елемент цієї множини більший за попередній.

Покажемо, що $\sup E = \dfrac{1}{3}$. Для довільного числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\dfrac{n^2}{3n^2+2} < \dfrac{1}{3}$. Дійсно, $\dfrac{n^2}{3n^2+2} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3(3n^2+2)} < 0$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$, для якого $\dfrac{n_0^2}{3n_0^2+2} > \dfrac{1}{3} - \varepsilon$. Звідси

$$3\varepsilon n_0^2 > \frac{2}{3}(1-3\varepsilon), \quad n_0^2 > \frac{2}{9\varepsilon}(1-3\varepsilon),$$

тобто

$$n_0 > \sqrt{\frac{2}{9\varepsilon}(1-3\varepsilon)}. \quad \blacktriangleright$$

4.8. Доведемо рівність

$$A(n) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$$

за допомогою методу математичної індукції.

Перевіримо правильність рівності при $n = 1$:

$$A(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ – рівність очевидна.}$$

Припустимо, що рівність правильна для $n = k$, тобто

$$A(k) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2k+2}.$$

Доведемо справедливість рівності для $n = k+1$:

$$A(k+1) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = A(k) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) =$$

$$= \frac{k+2}{2k+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{2k+4}.$$

Отже, рівність справджується для довільного натурального числа n. ▶

5.5. Доведемо нерівність Бернуллі для $n = 2$. Маємо:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

Отже, для $n = 2$ нерівність виконується.

Припустимо, що нерівність виконується для $n = k$, тобто:

$$(1+x)^k > 1 + kx.$$

Використовуючи припущення, доведемо нерівність для $n = k+1$:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) =$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x.$$

Що й треба було довести. ▶

§ 1.3. Поняття відображення (функції). Види відображень

Відображенням множини A в множину B називається відповідність між A та B, для якої кожному елементу $x \in A$ відповідає єдиний елемент $y \in B$. Позначають $f : A \to B$ або $y = f(x)$, де $x \in A$, $y \in B$.

Відображення $f : A \to B$ часто називають ***функцією*** з множини A у множину B. Множину A при цьому називають ***областю визначення*** функції $y = f(x)$ і позначають $D(f)$. Довільний елемент $x \in A$ називається ***прообразом*** або ***незалежною змінною***, а $y = f(x)$ називається ***образом*** елемента x або ***значенням функції*** у точці x.

Якщо $A \subset \mathbb{R}$ і $B \subset \mathbb{R}$, то відображення $f : A \to B$ називається ***функцією дійсної змінної***.

Образом множини $M \subset A$ при відображенні $f : A \to B$ називається множина $f(M) = \Big\{ f(x) : \ \ x \in M \Big\}$. Множина $E(f)$ називається ***множиною значень*** функції $f : A \to B$.

Відображення $f : A \to B$ називається ***ін'єктивним*** або ***ін'єкцією***, якщо різним елементам множини A ставиться у відповідність різні елементи множини B, тобто:

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A) : \ \Big\{ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Big\}.$$

Відображення $f : A \to B$ називається ***сюр'єктивним*** або ***сюр'єкцією***, якщо прообраз будь-якого елемента множини B є непорожньою множиною.

Відображення $f : A \to B$ називається ***бієктивним*** або ***бієкцією***, якщо f є сюр'єктивним та ін'єктивним одночасно.

Якщо $f : A \to B$ є бієктивним відображенням, то для нього існує так зване ***обернене відображення*** $f^{-1} : B \to A$, яке визначається умовою $f^{-1}(y) = x$. Обернене відображення називається також ***оберненою функцією*** і позначається $y = f^{-1}(x)$, де $x \in B, \ y \in A$.

Суперпозицією відображень (функцій) $g : A \to B$ і $f : B \to C$ називається відображення $f \circ g : A \to C$, яке визначається рівністю $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, де $x \in A$. Суперпозицію функцій f та g називають також ***складеною*** функцією $y = f(g(x))$, де $x \in A, \ \ y \in C$.

Функції $f : A \to B$ та $g : C \to D$ називаються ***тотожніми***, якщо $A = C$ і $f(x) = g(x)$ для довільного елемента $x \in A$.

Вправи

1. Функцію $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ задано співвідношенням $f(n) = 1 + n^2$. Визначити:

1) $f(0), \ f(\{0\}), \ f(\{5; 6\}), \ f(\{-1; 1\})$,

2) $f^{-1}(\{2\}), \ f^{-1}(\{5\}), \ f^{-1}(\{10; 25\}), \ f^{-1}(\{50; 51; 52\})$.

2. Нехай $f(x) = \sin x$. Знайти:

1) $f(\{0\}), \ f(\{0; \pi\}), \ f((0; \pi)), \ f\left(\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\right)$,

2) $f^{-1}(\{0\}), \ f^{-1}((-1; -0,5)), \ f^{-1}([0,2)), \ f^{-1}([0; 0,5])$.

3. Чи є відображення $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ і $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ ін'єкцією, сюр'єкцією і біекцією, якщо:

1) $f(n) = n + (-1)^n$, $\quad g((m;n)) = (n;m)$,
2) $f(n) = 2 - n$, $\quad g((m;n)) = (m+1; n-2)$,
3) $f(n) = (-1)^n$, $\quad g((m;n)) = (m+n; m-n)$,
4) $f(n) = n^2$, $\quad g((m;n)) = (m; -n)$,
5) $f(n) = n^2 + n^3$, $\quad g((m;n)) = (-m; -n)$.

4. Яке з відображень $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є ін'єкцією, сюр'єкцією і біекцією:

1) $f(x) = |x+2|$, $\quad$ 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$,
3) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $\quad$ 4) $f(x) = \cos 2x$,
5) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\quad$ 6) $f(x) = x^5$,
7) $f(x) = x \sin x$, $\quad$ 8) $f(x) = \ln(|x|+1)$,
9) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(0) = 1$, $\quad$ 10) $f(x) = \ln|x-2|$, $f(2) = 0$.

5. Знайти області визначення даних функцій:

1) $y = \dfrac{1}{x+|x|}$, $\quad$ 2) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}}$,
3) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$, $\quad$ 4) $y = \log_4 \log_3 \log_2 x$,
5) $y = \lg(\sin(x-3)) + \sqrt{16-x^2}$, $\quad$ 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \arccos\dfrac{x-2}{x}$,
7) $y = \arcsin\dfrac{2}{2+\sin x}$, $\quad$ 8) $y = \sqrt{\cos(\sin x)} + \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$,
9) $y = \arcsin(x^2 - 5x + 7)$, $\quad$ 10) $y = 3^{\arccos(1-x^2)}$.

6. Знайти множину значень даних функцій:

1) $y = x^2$, $x \in [-3; 2)$, $\quad$ 2) $y = \log_2 x$, $x \in \left[\dfrac{1}{32}; 64\right]$,
3) $y = \{x\}$, $\quad$ 4) $y = \dfrac{1}{5+\sin 2x}$,
5) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$, $\quad$ 6) $y = \sin \pi x$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Приклади розв'язування вправ

3.3. Відображення $f(n) = (-1)^n$ не є сюр'єктивним, бо, наприклад, прообраз числа 2 є порожньою множиною.

Не буде це відображення ін'єктивним, бо взявши $n_1 = 1$ і $n_2 = 3$ маємо, що $n_1 \neq n_2$, однак $f(n_1) = f(n_2) = -1$. Очевидно, що відображення $f(n) = (-1)^n$ не є бієктивним.

Відображення $g((m;n)) = (m+n; m-n)$ не є сюр'єктивним, бо, наприклад, $(3;2) \in \mathbb{Z}^2$, однак прообраз пари $(3;2)$ є порожньою множиною. Це випливає з того, що розв'язком системи $\begin{cases} m+n=3, \\ m-n=2 \end{cases}$ є числа $m = \dfrac{5}{2}$ та $n = \dfrac{1}{2}$, і тоді $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}^2$.

З іншого боку, відображення є ін'єктивним, це випливає з того, що розв'язок системи $\begin{cases} m+n=a, \\ m-n=b \end{cases}$ єдиний (визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$).

З попередніх міркувань слідує, що відображення не є бієкцією. ▶

5.6. Знайдемо область визначення функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \arccos\dfrac{x-2}{x}$. Вона буде співпадати із множиною розв'язків системи

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0, \\ -1 \leq \frac{x-2}{x} \leq 1, \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x < 2, \\ \frac{1}{x} \leq 1, \\ \frac{2}{x} \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x < 2, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Отже, $D(y) = \Big\{x : \ \ x \in [1;2)\Big\}$ – область визначення даної функції. ▶

6.3. Функція $y = \{x\} = x - [x]$ називається дробовою частиною числа x. Тоді для довільного дійсного числа $x \in \mathbb{R}$ будемо мати, що $\{x\} \in [0;1)$. Отже, областю значень даної функції є множина:

$$E(y) = \Big\{y : \ \ y \in [0;1)\Big\}. \quad ▶$$

§ 1.4. Елементарні функції. Алгебричні і трансцендентні функції. Властивості

До множини основних елементарних функцій дійсної змінної належать такі функції: 1) стала, 2) степенева, 3) показникова, 4) логарифмічна, 5) тригонометричні, 6) обернені тригонометричні функції.

Елементарною функцією дійсної змінної називають таку функцію, яку можна отримати з основних елементарних функцій шляхом застосування скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозиції функцій.

Множину елементарних функцій поділяють на такі підмножини:

1) множина ***многочленів*** $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, де a_k $(k = \overline{0, n})$ – сталі дійсні числа, $x \in \mathbb{R}$;

2) множина ***раціональних функцій*** $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q(x)$ – задані многочлени, $Q(x) \neq 0$;

3) множина ***ірраціональних функцій***, тобто функцій, які не є раціональними;

4) множина ***алгебричних функцій*** $y = f(x)$, які задовольняють рівняння $y^n + p_1(x) y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x) y + p_n(x) = 0$, де $p_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ – задані многочлени;

5) множина ***трансцендентних функцій***, тобто функцій, які не є алгебричними. До них належать, наприклад, показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

Графіком функції дійсної змінної $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається множина $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ y = f(x) \in \mathbb{R}\}$ точок на площині. Графіком може бути деяка крива.

Вправи

1. Побудувати графіки функцій шляхом зсуву або деформації простіших елементарних функцій:

1) $y = k(x - x_0)^2 + y_0,\ \ k = 1,\ \ x_0 = -1,\ \ y_0 = -2,$

2) $y = a\sin(\omega x + \varphi),\ \ a = 2,\ \ \omega = \dfrac{1}{2},\ \ \varphi = \dfrac{\pi}{2},$

3) $y = \log_a(kx + b),\ \ a = 10,\ \ k = 10,\ \ b = 2,$

4) $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0,\ \ k = -1,\ \ x_0 = 1,\ \ y_0 = 2,$

5) $y = k\arcsin(x + b),\ \ k = 2,\ \ b = \dfrac{1}{2},$

6) $y = a\,\mathrm{tg}(\omega x + \varphi),\ \ a = 1,\ \ \omega = \dfrac{1}{2},\ \ \varphi = \dfrac{\pi}{4}.$

2. Застосовуючи правило додавання та множення графіків, побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = x^2 + \dfrac{1}{x},$ 2) $y = 1 + x + e^x,$

3) $y = \mathrm{ch}\,x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},$ 4) $y = \mathrm{sign}(\sin x),$

5) $y = \sin x \cdot \mathrm{sign}(\cos x),$ 6) $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

3. Побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x},$ 2) $y = \{x\},$

3) $y = |\sin|x||,$ 4) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+2|} + 1,$

5) $y = |x + 3| + |x - 2|,$ 6) $y = |\lg|x||,$

7) $y = |x^2 - 4|x| + 6|,$ 8) $y = \arccos(\cos 2x),$

9) $y = |\mathrm{arctg}(x - 2)|,$ 10) $y = \sin\left(\arcsin\dfrac{x + 1}{3}\right).$

4. Розв'язати ірраціональні рівняння і нерівності:

1) $5x^2 + 35x - \sqrt{x^2 + 7x - 1} = 4,$

2) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{5x - x^2 - 6} = 0,$

3) $\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{2},$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} + 2\sqrt{x^2 + 5x} = 25 - 2x,$

5) $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{7 - x} = 2,$

6) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}} \geq \sqrt{6}$,

7) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{1-x} < 1$,

8) $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{2x^2-x-5} \geq 2$,

9) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2} > \sqrt{2x+4}$,

10) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

5. Розв'язати трансцендентні рівняння та нерівності:

1) $x^{1+\lg x} = 10x$,

2) $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x+4$,

3) $3^{0,5+\log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{0,5+\log_9 \sin x}$,

4) $(\sqrt{13}+2)^{\cos x} + (\sqrt{13}-2)^{\cos x} = 2^{\sin x} \cdot 3^{\cos x}$,

5) $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{\pi}\left(\left|x-\dfrac{\pi}{4}\right| - \left|x-\dfrac{3\pi}{4}\right|\right)$,

6) $x^{0,5\log_{0,5} x-3} > 0,5^{3-2,5\log_{0,5} x}$,

7) $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} > |x-1|^3$,

8) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

9) $\log_{\frac{1}{3}} \cos x < \log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x$,

10) $\log_{2x} \dfrac{2-3|x|}{x^2-9} > 0$.

Приклади розв'язування вправ

3.1. Областю визначення функції $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$ є множина

$$D(y) = \Big\{x: \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, \ n \in \mathbb{Z}\}\Big\}.$$

Якщо $\sin x > 0$, тобто $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $(n \in \mathbb{Z})$, то $y = \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$. Якщо $\sin x < 0$, тобто $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $(n \in \mathbb{Z})$, то $y = -\dfrac{\sin x}{\sin x} = -1$.

Отже, початкову функцію можемо переписати у виді

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), \ (n \in \mathbb{Z}), \\ 1, & \text{якщо } x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \ (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Графік функції зображений на рисунку 6. ▶

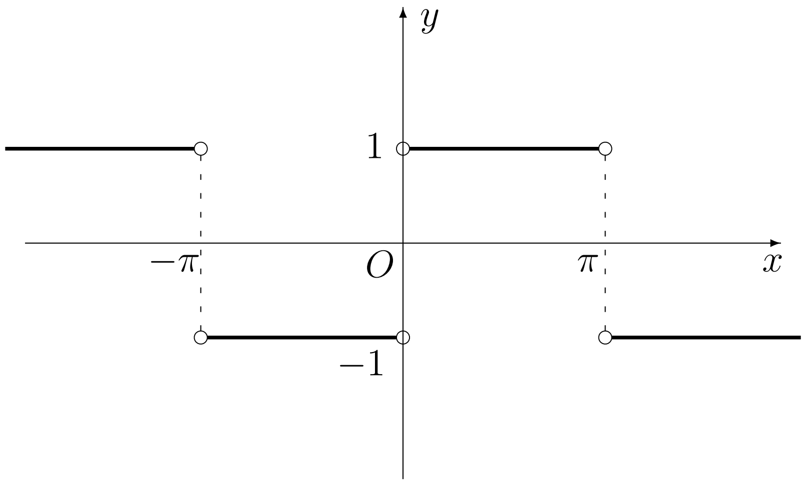

Рис. 6. Графік функції $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

4.6. З урахуванням того, що підкореневі вирази повинні бути невід'ємними, піднесемо обидві частини нерівності до квадрату. Тоді отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x + \sqrt{6x-9} \geq 0, \\ x - \sqrt{6x-9} \geq 0, \\ 6x - 9 \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq 3 - x. \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2}, \\ |x-3| \geq 3 - x. \end{cases}$$

Остання система рівносильна об'єднанню двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3}{2} \leq x < 3, \\ -(x-3) \geq 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 3, \\ x - 3 \geq 3 - x. \end{cases} \end{array} \right.$$

Звідки випливає, що $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. ▶

5.7. Для розв'язування нерівності

$$|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} > |x-1|^3$$

розглядаємо два випадки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<|x-1|<1,\\ \lg^2 x-2\lg x<3,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-1|>1,\\ \lg^2 x-2\lg x>3,\end{cases}\end{array}\right.$$

бо при $x-1=1$ нерівність не виконується, а розв'язок рівняння $x-1=-1$ не входить в область визначення логарифмічної функції. Крім того, при $x=1$ вираз в лівій частині нерівності не має змісту.

Враховуючи монотонність показникової функції, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ 1<x<2,\end{array}\right.\\ \lg^2 x-2\lg x-3<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ \lg^2 x-2\lg x-3>0.\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\ 1<x<2,\end{array}\right.\\ -1<\lg x<3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ \lg x>3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ \lg x<-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідси отримуємо, що

$$x\in\left(\frac{1}{10};\,1\right)\cup(1;2)\cup(1000;\,+\infty). \qquad \blacktriangleright$$

§1.5. Найпростіші властивості функцій. Дослідження на монотонність, парність, періодичність

Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ називається ***обмеженою зверху (знизу)*** на множині $E\subset\mathbb{R}$, якщо множина $f(E)$ обмежена зверху (знизу). Якщо функція обмежена і зверху і знизу на множині E, то вона називається ***обмеженою*** на E. В протилежному випадку, функція f є ***необмеженою*** на множині E.

Функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на множині $E\subset\mathbb{R}$ називається:

а) ***неспадною***, якщо $\forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;

б) ***незростаючою***, якщо $\forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$;

в) ***спадною***, якщо $\forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

г) ***зростаючою***, якщо $\forall x_1, x_2 \in E: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x)$ називається ***монотонною*** на множині $E \subset \mathbb{R}$, якщо вона на цій множині задовольняє одне з попередніх визначень. В останніх двох випадках функція $f(x)$ називається ***строго монотонною***.

Функція $f : E \to \mathbb{R}$ називається ***парною (непарною)***, якщо:

1) область визначення функції $D(f) \equiv E$ є симетричною відносно нуля,

2) для довільного $x \in D(f)$ виконується рівність

$$f(-x) = f(x) \quad \big(f(-x) = -f(x)\big).$$

Будь-яку функцію, визначену при $x \in \mathbb{R}$, можна подати у вигляді суми парної і непарної функцій:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***періодичною***, якщо

$$\exists T \ne 0 : \ \ f(x + T) = f(x), \ \ \forall x \in D(f).$$

При цьому число T називається ***періодом*** функції $f(x)$. Зауважимо, що якщо T є періодом функції $f(x)$, то для довільного числа $n \in \mathbb{Z}$ величина nT також є періодом функції $f(x)$. Найменше з додатних чисел T називається основним періодом функції $f(x)$.

Вправи

1. Довести, що функція:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}$ обмежена знизу на інтервалі $(0; 1)$,

2) $y = -3^x$ обмежена зверху на множині $\mathbb{R}$,

3) $y = \dfrac{3 + 2x^2}{2 + 3x^4}$ обмежена на множині $\mathbb{R}$,

4) $y = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ не буде обмеженою в жодному околі точки $x = 0$.

2. Знайти проміжки монотонності функцій:

1) $y = x^2 - 5x + 7,$ 2) $y = \dfrac{1}{x^2},$

3) $y = \dfrac{1}{x-3},$ 4) $y = \dfrac{x+2}{2x-5},$

5) $y = 10^{\lg x},$ 6) $y = \{x\},$

7) $y = [x],$ 8) $y = \sin(\arcsin x).$

3. Дослідити наступні функції на парність:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x+1},$ 2) $y = \sqrt{9 - x^2},$

3) $y = x \cdot \dfrac{a^x + 1}{a^x - 1},$ 4) $y = \log_3 \dfrac{1+x}{1-x},$

5) $y = 5^{\cos x} + |x|,$ 6) $y = [x],$

7) $y = \log_2 \left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$ 8) $y = \sin^2 x + \cos 3x,$

9) $y = \sin \dfrac{x^3 - x^2}{x-1},$ 10) $y = \arcsin(\sin x).$

4. Подати у вигляді суми парної і непарної функцій задані функції:

1) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1,$ 2) $y = (x+1)^3,$

3) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2} + \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2},$ 4) $y = \sqrt[3]{x-1},$

5) $y = \cos x + x^3 - 2x + 1,$ 6) $y = 3^x.$

5. Визначити, які з наступних функцій є періодичними, і вказати їхній період:

1) $y = \cos 3x,$ 2) $y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{12}\right),$

3) $y = \cos^4 x + \sin^4 x,$ 4) $y = 2^{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)},$

5) $y = [x],$ 6) $y = \{x\},$

7) $y = \sin \dfrac{2x}{5\pi} \cos \dfrac{2x}{3\pi},$ 8) $y = \cos x^2,$

$$9)\ \ y = \operatorname{ctg}\big(2\pi x + 3\big), \qquad 10)\ \ y = \operatorname{tg}(\sqrt{3x} + 3).$$

6. Довести, що періоди функцій

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sin n_i x + \sum_{i=1}^{p} b_i \cos m_i x, \quad n_i, m_i \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \operatorname{tg} n_i x + \sum_{i=1}^{p} b_i \operatorname{ctg} m_i x, \quad n_i, m_i \in \mathbb{N},$$

визначаються відповідно за формулами

$$T = \frac{2\pi}{\text{НСД}(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_p)}, \qquad T = \frac{\pi}{\text{НСД}(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_p)}.$$

7. Довести, що періоди функцій

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \sin n_i x, \quad \text{і} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \operatorname{tg} n_i x,$$

де $n_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, $(i = \overline{1, k})$ і $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, визначаються відповідно за формулами:

$$T = \frac{\text{НСК}(q_1, q_2, \ldots, q_k)}{\text{НСД}(p_1, p_2, \ldots, p_k)} \cdot 2\pi, \qquad T = \frac{\text{НСК}(q_1, q_2, \ldots, q_k)}{\text{НСД}(p_1, p_2, \ldots, p_k)} \cdot \pi.$$

8. Використовуючи формули з вправ **6-7**, довести періодичність заданих функцій і вказати їх основні періоди:

$$1)\ \ y = \sin 2x + \cos 3x, \qquad 2)\ \ y = \cos x + \sin \sqrt{2}x,$$

$$3)\ \ y = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{10}, \qquad 4)\ \ y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{4x}{5},$$

$$5)\ \ y = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}, \qquad 6)\ \ y = \sin x + \cos 3x - \operatorname{tg} 5x.$$

Приклади розв'язування задач

1.3. Зауважимо, що функція $y(x) = \dfrac{3 + 2x^2}{2 + 3x^4} > 0$ для довільного $x \in \mathbb{R}$. Отже, вона є обмеженою знизу.

З іншого боку

$$\frac{3 + 2x^2}{2 + 3x^4} = \frac{3}{2 + 3x^4} + \frac{2x^2}{2 + 3x^4} \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}+\frac{x^2}{1+\frac{3}{2}x^4} \leq \frac{3}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x^2} = \frac{9+\sqrt{6}}{6},$$

крім $x \neq 0$. Зауважимо, що в останній нерівності ми скористались тим, що $1+x^2 \geq 2x$.

Оскільки $y(0)=\dfrac{3}{2}$, то для довільного $x\in\mathbb{R}$ маємо, що $0<y(x)\leq\dfrac{9+\sqrt{6}}{6}$, тобто функція $y(x)=\dfrac{3+2x^2}{2+3x^4}$ є обмеженою на всій числовій осі. ▶

3.3. Областю визначення функції $y = x\cdot\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ є множина

$$D(y)=\Big\{x:\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\Big\},$$

яка симетрична відносно нуля.

Далі

$$y(-x)=(-x)\cdot\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=(-x)\cdot\frac{1+a^x}{1-a^x}=x\cdot\frac{a^x+1}{a^x-1}=y(x).$$

Отже, функція $y=x\cdot\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ є парною. ▶

5.3. Використаємо означення періодичної функції. Розв'яжемо рівняння

$$\cos^4(x+T)+\sin^4(x+T)-\cos^4 x-\sin^4 x=0$$

відносно T.

Отримаємо:

$$1-2\cos^2(x+T)\sin^2(x+T)-1+2\cos^2 x\sin^2 x=0,$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2(2x+2T)+\frac{1}{2}\sin^2 2x=0,$$

$$\big(\sin 2x-\sin(2x+2T)\big)\cdot\big(\sin 2x+\sin(2x+2T)\big)=0.$$

Звідки

$$\sin T\cdot\cos(2x+T)\cdot\sin(2x+T)\cdot\cos T=0.$$

В результаті застосування формули для синуса подвійного кута отримуємо рівняння

$$\sin 2T\cdot\sin(4x+2T)=0,$$

з якого $T = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, функція $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ є періодичною з основним періодом $T = \dfrac{\pi}{2}$. ▶

§ 1.6. Границя числової послідовності. Властивості збіжних послідовностей

Число $a \in \mathbb{R}$ називається ***границею числової послідовності*** $\{x_n\}$, якщо

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\big)(\forall n > N(\varepsilon)) : \ \ \{|x_n - a| < \varepsilon\},$$

і позначається $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Послідовності, які мають скінченну границю, називаються ***збіжними***, а послідовності, границя яких рівна нулю – ***нескінченно малими***. Послідовності, які не мають скінченної границі, називаються ***розбіжними***. Серед розбіжних послідовностей виділяють ***нескінченно великі послідовності***.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно великою***, якщо

$$\big(\forall E > 0\big)\big(\exists N(E) \in \mathbb{N}\big)(\forall n > N(E)) : \ \ \{|x_n| > E\}.$$

Якщо, починаючи з деякого номера, члени нескінченно великої послідовності додатні (від'ємні), то в такому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\big)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху (знизу)***, якщо:

$$\big(\exists M \in \mathbb{R}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big) : \ \ \{x_n < M\}, \ \ \big(\{x_n > M\}\big).$$

Якщо послідовність обмежена зверху і знизу, то вона називається ***обмеженою***.

Властивості збіжних послідовностей

1. Збіжна послідовність має лише одну границю.

2. Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тоді для довільного числа $c \in \mathbb{R}$ існує

$$\lim_{n\to\infty} \big(c \cdot x_n\big) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c \cdot a.$$

3. Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, тоді існують наступні границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(x_n \pm y_n\big) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і для всіх n, починаючи з деякого, виконується нерівність $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то $a \geq b$ $(a \leq b)$.

5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ і, починаючи з деякого n, виконується нерівність $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (теорема про три послідовності).

Вправи

1. Довести обмеженість числових послідовностей:

$$1)\ x_n = \frac{n^2}{2n^2+1}, \qquad 2)\ x_n = \frac{3n+1}{2n+7},$$
$$3)\ x_n = (-1)^n \sin \pi n, \qquad 4)\ x_n = \frac{1-2n}{2n+3}.$$

2. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-2} = \frac{2}{3},$$
$$3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{n} = 1, \qquad 4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0,$$
$$5)\ \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+1}{4^n} = 1, \qquad 6)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ \ a > 0,$$
$$7)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad 8)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} = 0.$$

3. Встановити, які з наведених послідовностей є нескінченно великими, а які – нескінченно малими:

$$1)\ x_n = \frac{1}{n^4}, \qquad 2)\ x_n = n^3,$$
$$3)\ x_n = \frac{n^3+1}{2n^2+1}, \qquad 4)\ x_n = \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+2},$$

$$5)\ x_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}, \qquad 6)\ x_n = \frac{3^n+1}{2^n-1},$$

$$7)\ x_n = \frac{1}{5^n}, \qquad 8)\ x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

4. Довести наступні рівності:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0,\ \ a>1, \qquad 4)\ \lim_{n\to\infty} n\cdot q^n = 0,\ \ |q|<1,$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0,\ \ a>1, \qquad 6)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

5. Обчислити границі числових послідовностей:

$$1)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}, \qquad 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-3)(5k+2)},$$

$$3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \qquad 4)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

$$5)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}, \qquad 6)\ x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2},$$

$$7)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{-k}, \qquad 8)\ x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(k+1).$$

6. Обчислити границі числових послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+5}{7n^2-6}, \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5-6}-\sqrt[3]{n^2+5}}{\sqrt[6]{32n-1}-\sqrt[5]{n^5+9}},$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+5}\right), \qquad 4)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-4}\right)n,$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+8}-\sqrt[3]{n-8}\right), \qquad 6)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+3)(n+1)}-\sqrt{n(n+1)}\right),$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}, \qquad 8)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+3}+3^{n+2}}{2^n+7\cdot 3^n},$$

$$9)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}, \qquad 10)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{2n^3+1},$$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$, 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n!(2n-3)}$,

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$, 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{n}$,

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$, 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2+1}+\dfrac{4}{n^2+1}+\ldots+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)$,

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{5}}{2\sqrt[n]{n^3}-\sqrt[n]{4n}}$, 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$,

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n\,\mathrm{arctg}\,5n}{n^3+7}$, 20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{n}{3}\right)$.

Приклади розв'язування вправ

2.2. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх членів послідовності з номерами $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2-2}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon.$$

Розв'яжемо цю нерівність відносно n :

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2-2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{7}{9n^2-6}\right|<\varepsilon.$$

Звідси, враховуючи, що $n\in\mathbb{N}$, отримаємо

$$n^2>\frac{7}{9\varepsilon}+\frac{2}{3},$$

або $n>\sqrt{\dfrac{7}{9\varepsilon}+\dfrac{2}{3}}$. Тоді $N(\varepsilon)=\left[\sqrt{\dfrac{7}{9\varepsilon}+\dfrac{2}{3}}\right]$.

Отже, якщо $n>\left[\sqrt{\dfrac{7}{9\varepsilon}+\dfrac{2}{3}}\right]$, то нерівність $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2-2}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ виконується для довільного наперед заданого числа $\varepsilon>0$. ▶

2.7. Використовуючи формулу бінома Ньютона для $n\geq 2$, маємо

$$n=\bigl(1+\sqrt[n]{n}-1\bigr)^n=\bigl(1+\bigl(\sqrt[n]{n}-1\bigr)\bigr)^n=$$

$$=1+n\bigl(\sqrt[n]{n}-1\bigr)+\frac{n(n-1)}{2}\bigl(\sqrt[n]{n}-1\bigr)^2+\ldots+\bigl(\sqrt[n]{n}-1\bigr)^n>\frac{n(n-1)}{2}\bigl(\sqrt[n]{n}-1\bigr)^2.$$

Звідси $n > \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$, де $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тоді

$$\frac{n}{n-1} > \frac{n}{2}\alpha_n^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n-1} > \frac{\alpha_n^2}{2} > 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0$, то з властивості **5** для границі послідовності випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ▶

5.1. Оскільки

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right),$$

то

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\Big)+\ldots+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}. \quad ▶$$

6.8. Поділимо чисельник і знаменник дробу на 3^n і скористаємось властивістю **3 в)** для границі частки послідовностей. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+3} + 3^{n+2}}{2^n + 7\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 7} =$$

$$= \frac{8\cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 7} = \left| \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \right| = \frac{9}{7}. \quad ▶$$

6.17. Для знаходження границі даної послідовності скористаємось тим, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{5}}{2\sqrt[n]{n^3} - \sqrt[n]{4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 + \sqrt[n]{5}}{2\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 - \sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{5}}{2 - \sqrt[n]{4}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, де $a > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{5}}{2 - \sqrt[n]{4}} = 2. \quad ▶$$

§ 1.7. Монотонні послідовності. Критерій Коші

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***зростаючою (спадною)***, якщо для довільного номера $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$. Послідовність $\{x_n\}$ називається ***неспадною (незростаючою)***, якщо для довільного номера $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$. Зростаючі та спадні, неспадні та незростаючі послідовності називаються ***монотонними***.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою (спадною) і обмеженою зверху (знизу), то вона має скінченну границю, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}, \quad \big(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}\big).$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою (спадною) і необмеженою зверху (знизу), то границя цієї послідовності дорівнює $+\infty$ $(-\infty)$.

Критерій Коші. Послідовність $\{x_n\}$ є збіжною тоді і тільки тоді, коли

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n > N(\varepsilon)\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big): \ \Big\{\big|x_{n+p} - x_n\big| < \varepsilon\Big\}.$$

Для монотонної і обмеженої послідовності $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ справедливими є наступні границі:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, де $e = 2,718281828...$,

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$, $k \in \mathbb{Z}$,

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$, де $\{p_n\}$ – числова послідовність така, що $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$.

Вправи

1. Для даних послідовностей визначити номер N, починаючи з якого ці послідовності є монотонними:

1) $x_n = n^2 - 49n - 50$, 2) $x_n = \dfrac{3^n}{n^5}$,

3) $x_n = n + \dfrac{100}{n}$, 4) $x_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$,

5) $x_n = \dfrac{2^n}{100n^2}$, 6) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$,

7) $x_n = (-1)^n\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$, 8) $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$.

2. Довести збіжність послідовності $\{x_n\}$, якщо

1) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$,

2) $x_n = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{2^n+1}$,

3) $x_n = \dfrac{1}{5+1} + \dfrac{1}{5^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{5^n+n}$,

4) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2 \cdot 2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{4 \cdot 2^3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$,

5) $x_n = 1 - \dfrac{1}{4x_{n-1}}$, де $x_1 = 1$,

6) $x_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + x_{n-1} + x_{n-2}^3\right)$, де $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

3. Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовностей:

1) $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k q^k$, де $|a_k| < M$, $|q| < 1$, 2) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$,

3) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{5^k}$, 4) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$.

4. Обчислити границі числових послідовностей

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4n}\right)^n$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{5n}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n-3}\right)^n$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+5}\right)^{n^2}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2+n+1}\right)^n$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+5}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 + \dfrac{1}{n}}$,

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+4n+3}\right)^n$, 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3^n+1}{3^n}\right)^{3^n}$.

Приклади розв'язування вправ

1.2. Якщо $x_n = \dfrac{3^n}{n^5}$, то

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5} - \frac{3^n}{n^5} =$$

$$= 3^n \cdot \left(\frac{3}{(n+1)^5} - \frac{1}{n^5} \right) = \frac{3^n}{n^5} \left(\frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5} - 1 \right) > 0,$$

при $n > \dfrac{1}{\sqrt[5]{3} - 1}$, тобто починаючи з $n = 5$.

Отже, послідовність $x_n = \dfrac{3^n}{n^5}$ є монотонно зростаючою, починаючи з п'ятого номера. ▶

2.3. Оскільки

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \ldots + \frac{1}{5^n+n} + \frac{1}{5^{n+1}+n+1} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \ldots + \frac{1}{5^n+n} \right) = \frac{1}{5^{n+1}+n+1} > 0,$$

то послідовність $\{x_n\}$ є монотонно зростаючою.

Покажемо, що $\{x_n\}$ є обмеженою зверху. Дійсно, для довільного $n \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \ldots + \frac{1}{5^n+n} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{5}} < \frac{1}{4}.$$

Отже, за теоремою про границю монотонної послідовності отримуємо, що послідовність $\{x_n\}$ є збіжною. ▶

3.3. Нехай $\varepsilon > 0$ – задане фіксоване число. За критерієм Коші отримуємо

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \left(\frac{\cos 1!}{5} + \ldots + \frac{\cos n!}{5^n} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{5^{n+p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\cos 1!}{5} + \ldots + \frac{\cos n!}{5^n} \right) \right| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{5^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{5^{n+p}} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{5^{n+p}} = \frac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^p}{1 - \frac{1}{5}} < \frac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4 \cdot 5^n} < \varepsilon,$$

якщо $n > \log_5 \dfrac{1}{4\varepsilon}$.

Отже, $N(\varepsilon) = \left[\log_5 \dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$. ▶

4.5. Використовуючи властивість **3)** для монотонної послідовності, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1-3n}{n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n}{n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n}{n^2+n+1}\right)^{\left(-\frac{n^2+n+1}{3n}\right)\cdot\left(-\frac{3n^2}{n^2+n+1}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{n^2+n+1}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}. \quad ▶$$

Індивідуальні завдання до розділу I

Задача 1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (знайти $N(\varepsilon)$).

1.1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{3}{2}$.

1.2. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$.

1.3. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}$, $a = \dfrac{7}{2}$.

1.4. $a_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}$, $a = \dfrac{2}{3}$.

1.5. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}$, $a = 7$.

1.6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $a = \dfrac{4}{3}$.

1.7. $a_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.8. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$.

1.9. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.10. $a_n = -\dfrac{5n}{n+1}$, $a = -5$.

1.11. $a_n = \dfrac{n+1}{1-2n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.12. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$, $a = \dfrac{2}{3}$.

1.13. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$, $a = -2$.

1.14. $a_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}$, $a = -3$.

1.15. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}$, $a = \dfrac{1}{3}$.

1.16. $a_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}$, $a = 3$.

1.17. $a_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

1.18. $a_n = \dfrac{5n+15}{6-n}$, $a = -5$.

1.19. $a_n = \dfrac{3-n^2}{1+2n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.20. $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

1.21. $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}$, $a = \dfrac{3}{5}$.

1.22. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}$, $a = 2$.

1.23. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.24. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

1.25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3+4n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

1.26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}$, $a = 4$.

1.27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}$, $a = -3$.

1.28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$, $a = 2$.

1.29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

1.30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$.

Задача 2. Обчислити границі послідовностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$.

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$.

2.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\left(n+1\right)^3-\left(n-2\right)^3}{n^2+2n-3}$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^3+\left(n+2\right)^3}{\left(n+4\right)^3+\left(n+5\right)^3}$.

2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+3\right)^3+\left(n+4\right)^3}{\left(n+3\right)^4-\left(n+4\right)^4}$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^4-\left(n-1\right)^4}{\left(n+1\right)^3+\left(n-1\right)^3}$.

2.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{\left(n+1\right)^4-\left(n-1\right)^4}$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+6\right)^3-\left(n+1\right)^3}{\left(2n+3\right)^2+\left(n+4\right)^2}$.

2.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2n-3\right)^3-\left(n+5\right)^3}{\left(3n-1\right)^3+\left(2n+3\right)^3}$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+10\right)^2+\left(3n+1\right)^2}{\left(n+6\right)^3-\left(n+1\right)^3}$.

2.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2n+1\right)^3+\left(3n+2\right)^3}{\left(2n+3\right)^3-\left(n-7\right)^3}$.

2.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+7\right)^3-\left(n+2\right)^3}{\left(3n+2\right)^2+\left(4n+1\right)^2}$.

2.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2n+1\right)^3-\left(2n+3\right)^3}{\left(2n+1\right)^2+\left(2n+3\right)^2}$.

2.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-\left(n-1\right)^3}{\left(n+1\right)^4-n^4}$.

2.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+2\right)^4-\left(n-2\right)^4}{\left(n+5\right)^2+\left(n-5\right)^2}$.

2.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^4-\left(n-1\right)^4}{\left(n+1\right)^3+\left(n-1\right)^3}$.

2.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^3-\left(n-1\right)^3}{\left(n+1\right)^2-\left(n-1\right)^2}$.

2.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^3-\left(n-1\right)^3}{\left(n+1\right)^2+\left(n-1\right)^2}$.

2.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+2\right)^3+\left(n-2\right)^3}{n^4+2n^2-1}$.

2.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)^3+\left(n-1\right)^3}{n^3-2n}$.

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$. 2.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

Задача 3. Обчислити границі послідовностей.

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$.

3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}$.

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

3.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$.

3.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}$.

3.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$.

3.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}+\sqrt{n-2}}$.

3.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$.

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}$.

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$.

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}$.

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6}-\sqrt{n-6}}$.

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}$.

3.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5}+\sqrt{n-5}}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}$.

3.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$.

3.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}$.

3.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}$.

3.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

3.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}$.

Задача 4. Обчислити границі послідовностей.

4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

4.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n\,(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$.

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n^2+1)\,(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right]$.

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n\,(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right)$.

4.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

4.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n\,(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$.

4.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n+2)\,(n+1)}-\sqrt{(n-1)\,(n+3)}\right]$.

4.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\,(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

4.11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right)$.

4.12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

4.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right]$.

4.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n\,(n-1)\,(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

4.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)$.

4.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n\,(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)\,(n^2+5)}}{n}$.

4.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n\,(n+5)}-n\right)$.

4.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

4.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.

4.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right]$.

4.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

4.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}$.

4.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n(n-1)}\right]$.

4.25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}\right)$.

4.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right]$.

4.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

4.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$.

4.29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

4.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

Задача 5. Обчислити границі послідовностей.

5.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

5.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

5.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$.

5.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

5.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$.

5.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+3+...+(2n-1)}{n+3}-n\right]$.

5.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+...+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$.

5.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

5.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\,(n-1)}$.

5.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

5.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}$.

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-3+...+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$.

5.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+...+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

5.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+...+(2n-1)}$.

5.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

5.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n+2}{1+2+3+...+n}-\dfrac{2}{3}\right]$.

5.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+...+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

5.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-5+...+2n-(2n+3)}{n+3}$.

5.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

5.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+n}{n-n^2+3}$.

5.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+...+(5n-3)}$.

5.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{9}{64}+...+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$.

5.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+...+2n}{1+3+...+(2n-1)}$.

5.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+5+...+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right]$.

5.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

5.27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

5.28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

5.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+6+9+...+3n}{n^2+4}$.

5.30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+...+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

Задача 6. Обчислити границі послідовностей.

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.

6.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

6.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

6.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

6.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

6.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

6.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

6.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

6.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

6.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^2}$.

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

6.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

6.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

6.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$. 6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$. 6.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7.$ 6.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

6.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$. 6.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

6.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$. 6.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

6.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$. 6.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6+1}$.

РОЗДІЛ II. Границя функції в точці. Неперервність функції

§ 2.1. Означення границі функції в точці. Односторонні границі

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ крім, можливо, самої точки $x_0 \in (a;b)$. Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. У такому разі записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Це означення називається означенням границі функції в точці ***за Гейне*** або "мовою послідовностей".

Означення границі функції в точці ***за Коші*** або "мовою $\varepsilon - \delta$" формулюється наступним чином: число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x : \ \ 0 < |x - x_0| < \delta) : \quad \Big\{|f(x) - A| < \varepsilon\Big\}.$$

Зауважимо, що означення за Гейне і за Коші є еквівалентними.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого числа $M > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх значень x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x)| > M$. Позначається $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Функція $\alpha(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to x_0$, якщо її границя в точці x_0 дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Нескінченно малі функції володіють такими властивостями:

1) алгебраїчна сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

2) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є функція нескінченно мала.

3) якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика функція при умові, що $\alpha(x) \neq 0$, і навпаки.

Якщо маємо $x < x_0$ та $x \to x_0$ (x прямує до x_0 зліва), то умовно пишуть $x \to x_0 - 0$. Аналогічно, якщо $x > x_0$ та $x \to x_0$ (x прямує до x_0 справа), то позначають $x \to x_0 + 0$. Відповідні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ називаються границею функції $f(x)$ зліва в точці x_0 (***лівосторонньою границею***) та границею функції $f(x)$ справа в точці x_0 (***правосторонньою границею***).

Для існування границі функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Якщо односторонні границі різні, або хоча б одна з них не існує, то не існує і границя функції $f(x)$ в точці x_0.

Вправи

1. Сформулювати на "мові $\varepsilon - \delta$" такі твердження:

1) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$, 2) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$,

3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$,

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, 6) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

7) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, 8) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$,

9) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, 10) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty$,

11) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$ 12) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty,$

13) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$ 14) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty,$

15) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,$ 16) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$

17) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$ 18) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$ 20) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty,$ 22) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

2. Користуючись означенням границі функції за Коші, довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5) = 1,$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{2x-8} = \dfrac{3}{2},$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1} = -2,$ 4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8,$

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x} = 2,$ 6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2} = +\infty,$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2},$ 8) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3} = -4,$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty,\ \ a>1,$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}.$

3. Користуючись означенням границі функції за Гейне, довести, що

1) $\lim\limits_{x\to1}(5x-7) = -2,$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+3}{4x+5} = \dfrac{5}{9},$

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = 6,$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-4x+3}{2x+1} = 3,$

5) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+3} = 2,$ 6) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{5}{2}.$

4. Користуючись означенням границі функції в точці, встановити, чи мають дані функції границі у вказаних точках відносно заданих множин:

1) $f(x) = [x],\quad x_0 = 2,\quad A = (1;2),$

2) $f(x) = [x], \quad x_0 = 3, \quad A \equiv \mathbb{R},$

3) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad A = [0;2],$

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = +\infty, -\infty, \infty, \quad A = \mathbb{R} \setminus \{1\},$

5) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0, \quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

5. Встановити, використовуючи означення границі функції в точці за Коші, які з даних функцій є нескінченно малими чи нескінченно великими у вказаних точках:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}, \quad x_0 = -1, \quad x_0 = \infty, \quad x_0 = 1,$

2) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0 = -1, \quad x_0 = \infty,$

3) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \infty,$

4) $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \infty.$

Приклади розв'язування вправ

1.10. Оскільки $x \to a - 0$, то користуючись означенням границі функції за Коші, можемо записати, що

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty \Bigg| \overset{def}{=} \Bigg| (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x:\ a - \delta < x < a): \ \Big\{ f(x) < -\varepsilon \Big\}.$$

Отже, в правій частині маємо означення даної границі за Коші або на "мові $\varepsilon - \delta$". ▶

2.8. Для того, щоб довести справедливість рівності, потрібно для довільного числа $\varepsilon > 0$ вказати таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки виконується умова $0 < |x+3| < \delta$, то має місце нерівність $|f(x) - (-4)| < \varepsilon$. В нашому випадку отримаємо

$$\left| \frac{x^2+2x-3}{x+3} + 4 \right| = \left| \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} + 4 \right| = |x+3| < \varepsilon.$$

Покладаючи $\delta = \varepsilon$, матимемо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \varepsilon$, що для всіх x таких, що $0 < |x+3| < \delta$, виконується нерівність

$$\left| \frac{x^2+2x-3}{x+3} + 4 \right| < \varepsilon,$$

а це означає, що число -4 є границею функції $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ в точці $x_0 = -3$. ▶

3.3. Функція $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ визначена у проколеному околі точки $x = 3$. Виберемо довільну послідовність $\{x_n\}$ таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$ і $x_n \neq 3$, для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f(x_n) = \dfrac{x_n^2-9}{x_n-3}$, де $n \in \mathbb{N}$. Обчислимо границю послідовності $\{f(x_n)\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-9}{x_n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-3)(x_n+3)}{x_n-3} = \lim_{n\to\infty}(x_n+3) = 6.$$

Оскільки $\{x_n\}$ – довільна послідовність, яка прямує до числа 3, то з означення границі функції за Гейне отримаємо, що

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6. \quad ▶$$

4.3. Якщо x прямує до 1 зліва, тобто $x \to 1-0$, то

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x+2) = 3.$$

Якщо x прямує до 1 справа, тобто $x \to 1+0$, то

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(x^2-1) = 0.$$

Доведемо, використовуючи означення границі функції за Коші, правильність цих результатів. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо абсолютну величину різниці $f(x)-3$ при умові, що $x \to 1-0$:

$$|x+2-3| = |x-1| < \varepsilon.$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall x : \ \ 1-\delta < x < 1) : \quad \Big\{|f(x)-3| < \varepsilon\Big\}.$$

Тепер для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо абсолютну величину різниці $f(x)-0$ при умові, що $x \to 1+0$:

$$|x^2-1-0| = |(x-1)(x+1)| < 3|x-1| < \varepsilon.$$

Взяли x близьким до 1 справа таким, що відстань від x до -1 є меншою за 3. Тоді відстань від x до 1 є меншою за 1.

З останньої нерівності маємо $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Візьмемо $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$, тоді

$$(\forall\varepsilon > 0)\big(\exists\delta > 0\big)(\forall x:\ \ 1 < x < 1+\delta):\quad \Big\{|f(x)| < \varepsilon\Big\}.$$

Зауважимо, що звичайної границі в точці $x = 1$ не існує, бо

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) \neq \lim_{x\to 1+0} f(x). \qquad \blacktriangleright$$

§ 2.2. Властивості границі функції в точці

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають скінченні границі в точці x_0, то виконуються такі твердження:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
3) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(c\cdot f(x)\big) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, де $c = \mathrm{const}$,
4) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^n = \big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\big)^n$,
5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
6) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$,
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{c}{x} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{c} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} (c\cdot x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{c}{x} = 0$, де $c = \mathrm{const}$,
8) а) $\lim\limits_{x\to+\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < c < 1, \\ +\infty, & \text{якщо } c > 1, \end{cases}$

   б) $\lim\limits_{x\to-\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c > 1, \\ +\infty, & \text{якщо } 0 < c < 1, \end{cases}$
9) а) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(\log_c f(x)\big) = \log_c \big(\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\big)$,

   б) $\lim\limits_{x\to 0} \log_c x = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } 0 < c < 1, \\ -\infty, & \text{якщо } c > 1, \end{cases}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_c x = \begin{cases} -\infty, & \text{якщо } 0 < c < 1, \\ +\infty, & \text{якщо } c > 1. \end{cases}$

Для того, щоб обчислити границю многочлена n-го степеня $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ при $x \to x_0$, достатньо знайти його значення в точці $x = x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$.

Границя раціональної функції $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени, причому $P(x_0) \neq 0$, знаходиться безпосередньо:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \;\; Q(x_0) \neq 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \infty, \quad P(x_0) \neq 0, \quad Q(x_0) = 0.$$

Якщо $P(x_0) = 0$ і $Q(x_0) = 0$, то властивість **5)** про границю частки двох функцій застосувати не можна. В таких випадках маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Для розкриття такої невизначеності потрібно чисельник і знаменник дробу поділити на вираз $(x - x_0)^k$, де $k = \min\{k_1, k_2\}$, k_1 і k_2 – кратності кореня x_0 многочленів $P(x)$ і $Q(x)$.

Для знаходження границі функції $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ при $x \to \infty$ (невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$) чисельник та знаменник даного дробу ділять на x^k, де k – найбільше з чисел m та n.

В загальному випадку

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } n > m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } m = n, \\ 0, & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

Аналогічний метод застосовується і для знаходження границі від дробу, що містить ірраціональність, при $x \to \infty$.

Для того, щоб розкрити невизначеність $\dfrac{0}{0}$, в якій чисельник і знаменник містять ірраціональність, позбуваються ірраціональності шляхом переведення її з чисельника в знаменник або навпаки. Іноді ірраціональний вираз зводиться до раціонального шляхом введення нової змінної.

При знаходженні границі зустрічаються невизначеності виду $\infty - \infty$ та $0 \cdot \infty$, які за допомогою відповідних перетворень

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} \quad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\right),$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\right),$$

зводяться до невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Вправи

1. Користуючись наведеними властивостями, обчислити границі раціональних функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2x + 3)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 3x - 5}{x - 2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$, 4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{2x + 2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4 - 3x^2 - x}{2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$,

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{2x^3 - 2x^2 + x - 1}$,

9) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{2x - x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$, 10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{x - 4}{3x^2 - 9x + 6}\right)$.

2. Знайти границі функцій, які містять ірраціональність:

1) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{x + 2} - 3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x + 1}}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$,

9) $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{y} - 1}{\sqrt[3]{y} - 1}$, 10) $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{\sqrt{y} + \sqrt{y - 1} - 1}{\sqrt{y^2 - 1}}$.

3. Обчислити границі функцій в нескінченно віддалених точках:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-9}{(x-3)(x+4)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5}{x^3-3x^2-1}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3+(x+3)^3}{x^3+6}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2+1)^{20}(x-3)^{20}}{(4x^2+19)^{30}}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x}{x-2}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+4}}{x-3}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x}}}}{\sqrt{9x+8}}$,

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+\sqrt[3]{2x^2+x^9}}}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$, 10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{x+\sqrt[3]{27x^4+1}}$,

11) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3})$, 12) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+2)}-x)$,

13) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x+1})$, 14) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+9x^2+2}-\sqrt{x^4-9x^2-2})$,

15) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^3+8}-\sqrt{x^3-8})$, 16) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

Приклади розв'язування вправ

1.7. Чисельник та знаменник даного раціонального дробу прямують до нуля при $x \to 1$. Отже, маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. В цьому випадку розкладемо многочлени в чисельнику і знаменнику на множники, серед яких міститься множник $x-1$. Отримаємо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3(x-1)+(x-1)(x-2)}{x^2(x-1)-(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x-2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1+x-1}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = 2. \quad \blacktriangleright$$

2.4. Чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}$ прямують до нуля при $x \to 0$. В даному випадку доповнимо знаменник дробу до формули суми кубів виразом $\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$. Щоб значення виразу не змінилося, домножимо на неповний квадрат і чисельник даного дробу. Тоді

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right) = \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleright$$

3.6. Якщо $x \to \infty$, то вирази $\dfrac{x^2+x}{x-2}$ і $\dfrac{x^2}{x+1}$ прямують до нескінченності, тобто в результаті отримаємо невизначеність виду $\infty - \infty$. Зведемо ці дроби до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{x-2} - \frac{x^2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+x)(x+1) - x^2(x-2)}{x^2-x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+x-x^3+2x^2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x}{x^2-x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 4. \quad \blacktriangleright$$

§ 2.3. Перша та друга визначні границі. Наслідки

В багатьох випадках обчислення границі функції в точці зручно проводити, використовуючи дві важливі формули:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e,$$

які називаються відповідно ***першою та другою визначними границями***.

Зауважимо, що перша визначна границя розкриває невизначеність $\dfrac{0}{0}$, а друга визначна границя – невизначеність 1^∞.

З визначних границь можна легко вивести наступні наслідки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu,$$

де $a>0,\ \ a\neq 0$. Зокрема, при $a=e$ отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

При знаходженні границі виразу $\big[f(x)\big]^{g(x)}$, де функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені в деякому околі точки x_0, причому $f(x)>0$, подамо його у вигляді

$$\big[f(x)\big]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Якщо функції $g(x)$ та $\ln f(x)$ мають скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)=\ln a$, то за неперервністю показникової та логарифмічної функції маємо

$$\lim_{x\to x_0}\big[f(x)\big]^{g(x)}=a^b.$$

В окремих випадках, які відповідають комбінаціям:

$$1)\ a=1,\ b=\pm\infty,\quad 2)\ a=0,\ b=0,\quad 3)\ a=+\infty,\ b=0,$$

говорять, що вираз $\big[f(x)\big]^{g(x)}$ являє собою невизначеність виду $1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$. За рахунок перетворення $\big[f(x)\big]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ ці невизначеності зводяться до невизначеності виду $0\cdot\infty$, яку вміємо розкривати (див. §2.2).

Вправи

1. Використовуючи першу визначну границю та наслідки з неї, знайти границі функцій в точці:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 7x}$,

3) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{x+\frac{\pi}{6}}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^5 \frac{x}{2}}{x^5}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x}{\sin 6x-\sin 2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{\operatorname{arctg} 3x^2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x-\operatorname{arctg} 3x}{3\operatorname{tg} 5x-3\arcsin x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$, 10) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$,

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$, 12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}$,

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$, 14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+4}-2}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{\operatorname{tg} 4x+2}-\sqrt{2}}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+\sin x}-\sqrt{4-\sin x}}{\operatorname{arctg} 2x}$, 18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-\arcsin x}-\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} 2x}}{\sqrt{1+\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt{1+\arcsin 6x}}$,

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 3x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos^4 x}$, 20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^2}$.

2. Використовуючи другу визначну границю та наслідки з неї, обчислити границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{1-x}{2}}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-5}{x^2+6}\right)^{x^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+x+6}{x^2-2x+3}\right)^{5x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3(1+8x)}{x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{3x}-1}{7x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1}{3x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{5x}$,

11) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x-e}{\ln x-1}$, 12) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(x^2+7x+7)}{x+1}$,

13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x^2-3x-8)}{x-3}$, 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x+x^2)+\ln(1-2x+3x^2)}{2x^2}$,

15) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(\ln(x+5)-\ln x)$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2+x}+a^{2-x}-2a^2}{x^2}$, $a>0$, 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 4x-1}{\operatorname{ch} 3x-1}$,

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x}\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+3x}{1-x}}$, 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{e^{2x^2}-1}$.

3. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$,

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 3x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\arcsin 2x}}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 3x}\right)^{\frac{1}{x}}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 4x^2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-\cos 7x}{\sin 5x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x^2}-\cos 4x}{\ln(1+x\sin 2x)}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos 6x}{e^{2x^3}-1}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 6x}{\ln\cos 4x}$.

4. Знайти границі показниково степеневих функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{3+2x}\right)^{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-4}{5x^2+x-2}\right)^{x-1}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^{3x^2}$, 6) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\sin 3x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)^{\operatorname{tg}^2 x}$, 8) $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{tg} 3x)^{2\sin^2 x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x\right)^{\sin 5x}$, 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos 3x}$.

Приклади розв'язування вправ

1.12. Зробимо заміну $x-\dfrac{\pi}{4}=t$. Тоді якщо $x\to\dfrac{\pi}{4}$, то нова змінна $t\to 0$. Отже,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin 2t}{\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4t\left(\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)}{2\cos^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-4t\left(\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)}{-\sin 2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4t\left(\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)}{-2t}=2\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=4. \quad \blacktriangleright$$

2.17. Для знаходження границі функції скористаємось наслідком з другої визначної границі, а саме $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. Тоді отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{2+x}+a^{2-x}-2a^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\left(a^x+a^{-x}-2\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\left(a^{\frac{x}{2}}-a^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2}{a^x}\cdot\left(\frac{a^x-1}{x}\right)^2=a^2\ln^2 a. \quad \blacktriangleright$$

4.7. Маємо невизначеність виду 0^0. Використовуючи правило розкриття такого виду невизначеності, запишемо:

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos 2x)^{\operatorname{tg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}^2 x\cdot\ln(1-\cos 2x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\ln(2\sin^2 x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\ln 2x^2}=\left|\begin{array}{ll}\ln 2x^2=-t, & 2x^2=e^{-t},\\ x^2=\frac{1}{2}e^{-t}, & t\to+\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}te^{-t}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=1.$$

Зауважимо, що при знаходженні цієї границі ми скористалися формулами $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $\blacktriangleright$

§ 2.4. O-символіка. Порівняння функцій

Нехай точка $a = x_0$ або є одним із символів $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, $+\infty$, $-\infty$, ∞. Якщо існують константи $c > 0$ і $\delta > 0$ такі, що

$$\big(\forall x: \ 0 < |x - a| < \delta\big): \quad \Big\{\big|f(x)\big| \le c \cdot \big|g(x)\big|\Big\},$$

то кажуть, що функція $f(x)$ є ***обмеженою порівняно з*** $g(x)$ при $x \to a$. Позначають $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to a$.

Якщо $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to a$ і $g(x) = O\big(f(x)\big)$ при $x \to a$, то кажуть, що $f(x)$ та $g(x)$ є ***функціями одного порядку*** при $x \to a$.

Якщо $f(x)$ та $g(x)$ в деякому проколеному околі точки a відмінні від нуля, і існує границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \ne 0$, то $f(x) = O^*\big(g(x)\big)$ при $x \to a$.

Якщо $f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)$, де $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, то кажуть, що $f(x)$ є ***нескінченно малою порівняно з*** $g(x)$ при $x \to a$. В такому випадку позначають $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.

Зауважимо, що якщо $g(x) \ne 0$ в деякому проколеному околі точки a, то попередню умову можна записати наступним чином:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Отже, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$.

Символи O, O^*, o називаються ***символами Ландау***.

Якщо $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, і функції $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, то $f(x)$ є ***нескінченно малою вищого порядку відносно*** $g(x)$. Якщо $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, і $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно великими при $x \to a$, то $f(x)$ має ***нижчий порядок зростання відносно*** $g(x)$.

Якщо $f(x)$ та $g(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, і $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\big(g(x)\big)^n} = c$, де $c \ne 0$, то $f(x)$ є ***нескінченно малою порядку*** n ***порівняно з функцією*** $g(x)$.

Функції $f(x)$ та $g(x)$ називаються ***еквівалентними*** при $x \to a$, якщо в деякому проколеному околі точки a існує функція $\varphi(x)$ така, що $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$.

Якщо $g(x) \neq 0$ і $f(x) \neq 0$ в деякому проколеному околі точки a, то умова еквівалентності функцій $f(x)$ та $g(x)$ рівносильна умові:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Вправи

1. Нехай $x \to a$. Довести, що:

1) $3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x - 6 = O(x^4), \quad a = +\infty,$
2) $\dfrac{7x+5}{1-4x^2} = O\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad a = +\infty,$
3) $3x - x^2 = O(x), \quad a = 0,$
4) $x \sin \sqrt[3]{x} = O\left(x^{\frac{4}{3}}\right), \quad a = 0,$
5) $x + x^2 \sin x = O(x^2), \quad a = +\infty,$
6) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \quad a = +\infty,$
7) $\sqrt{x^2+3x+3} = x + \dfrac{3}{2} + O\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad a = +\infty,$
8) $2x + \ln x + \sin x = O(x), \quad a = +\infty,$
9) $x \sin \dfrac{1}{x} = O\big(|x|\big), \quad a = 0,$
10) $\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - x^2 = O(x), \quad a = +\infty.$

2. Нехай $x \to a$. Довести, що:

1) $\sin x - x = o(x), \quad a = 0,$
2) $e^x - x - 1 = o(x), \quad a = 0,$
3) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x), \quad a = 0,$
4) $x^p \cdot e^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \quad a = +\infty,$
5) $\ln(\ln x) = o(\ln x), \quad a = +\infty,$
6) $x^{13} \cdot 2^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad a = +\infty,$
7) $(x+2)^3 \sin^2 \dfrac{1}{x+2} = o\left((x+2)^2\right), \quad a = -2,$
8) $x^{\ln x} = o\left(e^x\right), \quad a = +\infty,$

9) $1-\cos x-\dfrac{x^2}{2}=o\left(x^2\right),\quad a=0,$

10) $\ln x=o\left(\dfrac{1}{x^p}\right),\quad p>0,\quad a=0.$

3. Нехай $x\to a$. Довести, що:

1) $x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim e^x-1\sim\ln(1+x),\quad a=0,$

2) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad a=0,$

3) $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n},\quad a=0,$

4) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x},\quad a=0,$

5) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x},\quad a=+\infty,$

6) $\sqrt{x^2+x+1}-x\sim\dfrac{1}{2},\quad a=+\infty,$

7) $3^x+x\cdot 2^x+\ln x+1\sim 3^x,\quad a=+\infty,$

8) $e^{nx}-1\sim nx,\quad a=0,$

9) $\dfrac{x^3+3x}{x+3\cos x}\sim x^2,\quad a=+\infty,$

10) $x^2+x(\ln x)^{2012}\sim x^2,\quad a=+\infty.$

4. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $f(x)$ відносно нескінченно малої функції $g(x)$ при $x\to 0$:

1) $f(x)=\cos x-\sqrt[3]{\cos x},\quad g(x)=\ln(1+\sqrt[3]{x}),$

2) $f(x)=\ln(\cos 2x),\quad g(x)=e^{\sqrt[3]{x}}-1,$

3) $f(x)=e^x-1,\quad g(x)=\sin x(1-\cos 4x),$

4) $f(x)=\operatorname{tg}x,\quad g(x)=\ln\sqrt{1+4x^3\sin^5 x},$

5) $f(x)=\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2},\quad g(x)=x.$

5. Користуючись властивістю еквівалентних функцій, знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{arctg}5x},$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{5x}-1}{3\sin 2x},$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x},$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}},$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[16]{1+x}-1}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)+\operatorname{arctg}(x-2)^3}{x^2-4}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sqrt[5]{1+x^3}+1}{\ln(\cos 2x)}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4\sin^2 x}-1}{\ln(1+3x^2)}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x-5\operatorname{arctg} 2x+3x^5}{\ln(1+x+\sin^2 x)-3xe^x}$.

Приклади розв'язування вправ

1.10. Скористаємося означенням, наведеним на початку параграфа. Оскільки

$$\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2=\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+x^3+1}+x^2},$$

то при $x\to+\infty$ отримаємо оцінку

$$\left|\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+x^3+1}+x^2}\right|\le\left|\frac{x^3+1}{2x^2}\right|\le|x|.$$

Отже, в околі нескінченно віддаленої точки існує стала $c=1$ така, що виконується нерівність

$$\left|\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2\right|\le|x|.$$

Тоді $\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2=O(x)$ при $x\to+\infty$. ▶

3.7. Розглянемо границю:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+x\cdot 2^x+\ln x+1}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+\frac{\ln x}{3^x}+\frac{1}{3^x}\right)=1,$$

бо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}=0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{3^x}=0$.

Отже, $3^x+x\cdot 2^x+\ln x+1\sim 3^x$ при $x\to+\infty$. ▶

4.2. Розглянемо границю виду

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{\left(\frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}\cdot(-2\sin^2 x)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^n}.$$

Якщо $n = 6$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^6} = -2$.

Отже, функція $f(x) = \ln(\cos 2x)$ є нескінченно малою 6-го порядку порівняно з функцією $g(x) = e^{\sqrt[3]{x}} - 1$ при $x \to 0$. ▶

§ 2.5. Означення неперервності функції в точці. Найпростіші властивості неперервних функцій

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Цим самим вимагається для функції $f(x)$ виконання умов:

1) існування функції $f(x)$ в околі точки x_0,

2) існування границі функції в точці x_0,

3) рівність границі і значення функції в точці x_0.

Якщо одна з умов порушується, то функція $f(x)$ має в точці x_0 розрив, а точка x_0 називається точкою розриву.

Означення неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 можна сформулювати в інших термінах.

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо нескінченно малому приросту аргумента в точці x_0 відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \Big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\Big) = 0.$$

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x : \;\; |x - x_0| < \delta) : \quad \Big\{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big\}.$$

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$ такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ прямує до $f(x_0)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функція $f(x)$ називається ***неперервною на проміжку*** $\mathfrak{X}$, якщо вона є неперервною в кожній точці цього проміжка.

Найпростіші властивості неперервних функцій:

1) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці $x_0 \in \mathfrak{X}$, то $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ також є неперервними в точці $x_0 \in \mathfrak{X}$.

2) Якщо функція $f(x)$ є неперервною в точці $x_0 \in \mathfrak{X}$, а функція $x = g(t)$ є неперервною в точці $t_0 \in T$ і $g(t_0) = x_0$, то $f(g(t))$ також є неперервною в точці $t_0 \in T$.

3) Кожна елементарна функція є неперервною в своїй області визначення.

Вправи

1. Користуючись означенням неперервності на мові “$\varepsilon - \delta$”, довести неперервність основних елементарних функцій.

2. Дослідити на неперервність функції $f(x)$ в заданих точках x_0 :

$$1)\ f(x) = 5x^2 - 1, \quad x_0 = 2, \qquad 2)\ f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x_0 = 3,$$
$$3)\ f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad 4)\ f(x) = 3^x, \quad x_0 = 1.$$

3. Дослідити на неперервність задані функції в області визначення:

$$1)\ f(x) = x^2 + 2x + 7, \qquad 2)\ f(x) = \frac{5x}{9 + x^2},$$
$$3)\ f(x) = x^3 + 8x, \qquad 4)\ f(x) = \operatorname{sign} x,$$
$$5)\ f(x) = |x+2| - |x-3|, \qquad 6)\ f(x) = [x],$$
$$7)\ f(x) = \sin x^2, \qquad 8)\ f(x) = \cos^4 x,$$
$$9)\ f(x) = x^3 + 3\sin 4x, \qquad 10)\ f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x,$$
$$11)\ f(x) = x[x], \qquad 12)\ f(x) = \operatorname{sign}(\cos x),$$
$$13)\ f(x) = [x]\cos 2\pi x, \qquad 14)\ f(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|,$$
$$15)\ f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \qquad 16)\ f(x) = (-1)^{[\cos \pi x]}.$$

4) Дослідити на неперервність складену функцію $f(g(t))$, якщо:

$$1)\ f(x) = x^2 + 2x, \quad g(t) = \cos t,$$

2) $f(x) = 3^x, \quad g(t) = \operatorname{ctg} 2t,$

3) $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad g(t) = t^2 + 1,$

4) $f(x) = x^2 + 1, \quad g(t) = \operatorname{sign} t,$

5) $f(x) = 1 + x - [x], \quad g(t) = \operatorname{sign} t,$

6) $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad g(t) = 1 + t - [t].$

Приклади розв'язування вправ

1. Розглянемо тригонометричну функцію $f(x) = \cos x$. Зафіксуємо довільне $x_0 \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Тоді за означенням неперервності функції на мові "$\varepsilon - \delta$" маємо:

$$|f(x) - f(x_0)| = |\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right|.$$

Оскільки $\left| \sin \dfrac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$, а $\left| \sin \dfrac{x - x_0}{2} \right| \leq \dfrac{|x - x_0|}{2}$ для довільного $x \in \mathbb{R}$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} |x - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що можна покласти $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon)(\forall x: \ \ |x - x_0| < \delta): \quad \Big\{ |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon \Big\}.$$

Оскільки точка $x_0 \in \mathbb{R}$ – довільна, то функція $f(x) = \cos x$ є неперервною на всій області визначення. ►

3.16. Якщо $\cos \pi x \in [0; 1)$, то $\pi x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$ і $\pi x \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; якщо $\cos \pi x \in [-1; 0)$, то $\pi x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$; якщо $\cos \pi x = 1$, то $\pi x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. З цього випливає, що якщо $[\cos \pi x] = 0$, то $x \in \left[-\dfrac{1}{2} + 2n; \dfrac{1}{2} + 2n \right]$ і $x \neq 2n$, $n \in \mathbb{Z}$; якщо $[\cos \pi x] = -1$, то $x \in \left(\dfrac{1}{2} + 2n; \dfrac{3}{2} + 2n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$; якщо $[\cos \pi x] = 1$, то $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді $f(x) = (-1)^{[\cos \pi x]} = 1^0 = 1$, якщо $x \in \left[-\dfrac{1}{2} + 2n; \dfrac{1}{2} + 2n \right]$ і $x \neq 2n$, $n \in \mathbb{Z}$; $f(x) = (-1)^{[\cos \pi x]} = (-1)^{(-1)} = -1$, якщо $x \in \left(\dfrac{1}{2} + 2n; \dfrac{3}{2} + 2n \right]$ або $x = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, за означенням неперервності дана функція є неперервною на інтервалах $\left(-\dfrac{1}{2}+2n;2n\right)$, $\left(2n;\dfrac{1}{2}+2n\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}+2n;\dfrac{3}{2}+2n\right)$, де $n\in\mathbb{Z}$. На кінцях цих інтервалів функція буде мати розрив. ▶

4.3. Нехай $t_0\in\mathbb{R}$, тоді надамо цій точці довільного приросту Δt. Обчислимо відповідний приріст функції $g(t)=t^2+1$. Маємо:

$$\Delta g(t_0)=(t_0+\Delta t)^2+1-t_0^2-1=t_0^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2-t_0^2=2t_0\Delta t+\Delta t^2.$$

Звідси дістанемо, що $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta g(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t_0\Delta t+\Delta t^2)=0.$

Отже, функція $g(t)=t^2+1$ є неперервною в довільній точці $t_0\in\mathbb{R}$, а отже, і на всій множині $\mathbb{R}$.

Оскільки $g(t)>0$ для довільного $t\in\mathbb{R}$, то $f(g(t))=\operatorname{sign}(t^2+1)=1$ для довільного $t\in\mathbb{R}$. Отже, функція $f(x)=\operatorname{sign}x$ є неперервною в довільній точці $x_0=g(t_0)$, а отже, і для довільної точки $x\in\mathbb{R}$. За властивістю неперервності складеної функції отримуємо, що функція $f(g(t))=\operatorname{sign}(t^2+1)$ є неперервною на всій множині дійсних чисел. ▶

§ 2.6. Одностороння неперервність функції. Класифікація точок розриву

Функцію $f(x)$ називається ***неперервною зліва (справа) в точці*** x_0, якщо

$$f(x_0-0)\overset{def}{=}\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0),$$

$$f(x_0+0)\overset{def}{=}\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

Для неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною і зліва і справа в цій точці, тобто

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Нехай x_0 – точка розриву функції $f(x)$. Тоді ця точка називається:

1) ***точкою усувного розриву***, якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$,

2) ***точкою розриву I-го роду***, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, однак хоча б одна з них не рівна значенню функції $f(x_0)$. В цьому випадку величина $|f(x_0+0)-f(x_0)|$ $(|f(x_0)-f(x_0-0)|)$ називається ***стрибком функції справа (зліва)*** в точці x_0;

3) ***точкою розриву II-го роду***, якщо хоча б одна із границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ рівна нескінченності, або не існує.

Вправи

1. Знайти точки розриву функцій і встановити їх тип:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & \text{якщо } x\neq 1,\\ 2, & \text{якщо } x=1, \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } x=0, \end{cases}$

3) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$,

4) $f(x)=\dfrac{|x+3|}{x+3}$,

5) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{x}$,

6) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$,

7) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$,

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}$,

9) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$,

10) $f(x)=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

2. Дослідити функції на неперервність і вияснити характер точок розриву:

1) $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 3+x, & \text{якщо } 1<x\le 3, \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{якщо } -1\le x\le 2,\\ 3+x, & \text{якщо } 2<x\le 6, \end{cases}$

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$,

4) $f(x)=\ln(\sin x)$,

5) $f(x)=\dfrac{x+2}{3+2^{\frac{1}{x^2}}}$,

6) $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$,

7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{якщо } x<0, \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}, & \text{якщо } x>0, \end{cases}$ 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$,

9) $f(x)=\dfrac{2^{3x}-1}{x}$, 10) $f(x)=\big(2-x\big)^{\frac{1}{x-1}}$.

3. Підібрати числа a та b, щоб кожна з функцій $f(x)$ в області визначення була неперервною:

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0, \\ a, & \text{якщо } x=0, \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} \cos 4x, & \text{якщо } x\le 0, \\ a(x^2-4), & \text{якщо } x>0, \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{якщо } x\neq 0, \\ a, & \text{якщо } x=0, \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}, & \text{якщо } x\neq 0, \\ ax+b, & \text{якщо } x=0, \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} (x-2)^3, & \text{якщо } x\le 0, \\ ax+b, & \text{якщо } 0<x<4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\ge 4, \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{якщо } x\in\Big[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3}{2}\pi\Big],\ x\neq 0,\ x\neq\pi, \\ a, & \text{якщо } x=0, \\ b, & \text{якщо } x=\pi. \end{cases}$

4. Дослідити на неперервність функції і побудувати їх графіки:

1) $f(x)=\big[x^2\big]$, 2) $f(x)=\big[\cos x\big]$,

$$3)\ f(x)=\big[\ln x\big],\qquad 4)\ f(x)=\big\{x^2\big\},$$

$$5)\ f(x)=\big\{\cos x\big\},\qquad 6)\ f(x)=\big\{\ln x\big\}.$$

Приклади розв'язування вправ

1.2. Нехай $x_0\in\mathbb{R}$ і $x_0\neq 0$. Розглянемо приріст функції в точці x_0 :

$$\Delta f(x_0)=\frac{e^{\frac{1}{x_0+\Delta x}}-e^{-\frac{1}{x_0+\Delta x}}}{e^{\frac{1}{x_0+\Delta x}}+e^{-\frac{1}{x_0+\Delta x}}}-\frac{e^{\frac{1}{x_0}}-e^{-\frac{1}{x_0}}}{e^{\frac{1}{x_0}}+e^{-\frac{1}{x_0}}}=$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{x_0+\Delta x}}\left(e^{\frac{1}{x_0+\Delta x}}-e^{-\frac{1}{x_0+\Delta x}}\right)}{e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}+1}-\frac{e^{\frac{1}{x_0}}\left(e^{\frac{1}{x_0}}-e^{-\frac{1}{x_0}}\right)}{e^{\frac{2}{x_0}}+1}=$$

$$=\frac{\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}-1\right)\left(e^{\frac{2}{x_0}}+1\right)-\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}+1\right)\left(e^{\frac{2}{x_0}}-1\right)}{\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}+1\right)\left(e^{\frac{2}{x_0}}+1\right)}=\frac{2\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}-e^{\frac{2}{x_0}}\right)}{\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}+1\right)\left(e^{\frac{2}{x_0}}+1\right)}.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}-e^{\frac{2}{x_0}}\right)}{\left(e^{\frac{2}{x_0+\Delta x}}+1\right)\left(e^{\frac{2}{x_0}}+1\right)}=0.$$

Отже, функція є неперервною в будь-якій точці $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Розглянемо тепер односторонні границі в точці $x_0=0$:

$$\lim_{x\to -0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to -0}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{2}{x}}+1}=1.$$

Отже, функція $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$ є неперервною справа в точці $x=0$. Крім того, точка $x=0$ є точкою розриву першого роду цієї функції. ▶

2.10. Областю визначення цієї функції є множина виду

$$D(f)=\Big\{x:\quad x\in(-\infty;1)\cup(1;2]\Big\}.$$

Нехай $x_0\in D(f)$, крім $x=2$. Тоді розглянемо приріст функції $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ в точці x_0 :

$$\Delta f(x_0)=(2-x_0-\Delta x)^{\frac{1}{x_0+\Delta x-1}}-(2-x_0)^{\frac{1}{x_0-1}}=e^{\frac{\ln(2-x_0-\Delta x)}{x_0+\Delta x-1}}-e^{\frac{\ln(2-x_0)}{x_0-1}}.$$

З неперервності показникової та логарифмічної функцій на $D(f)$ випливатиме, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$. Отже, функція $f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ є неперервною в своїй області визначення.

Розглянемо границю даної функції в точці $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\big(1+(1-x)\big)^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\big(1+(1-x)\big)^{-\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Отже, точка $x = 1$ є точкою усувного розриву.

Розглянемо лівосторонню границю функції в точці $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to 2-0}(2-x)^{\frac{1}{x-1}} = 0 = f(2-0),$$

Отже, в точці $x = 2$ функція є неперервною зліва. ▶

3.3. Знайдемо границю функції в точці $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, для того, щоб дана функція була неперервною, необхідно і достатньо, щоб $a = \dfrac{1}{2}$. ▶

§ 2.7. Властивості функцій, неперервних на відрізку. Рівномірна неперервність функції

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$, якщо вона є неперервною у кожній точці інтервала $(a;b)$, неперервна зліва у точці b і неперервна справа в точці a.

Перша теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то $f(x)$ є обмеженою на цьому відрізку.

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то $f(x)$ на цьому відрізку досягає свого найбільшого $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ і найменшого $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ значень.

Перша теорема Больцано-Коші. Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків, то всередині цього відрізка існує принаймі одна точка c, що $f(c) = 0$.

Друга теорема Больцано-Коші. Множиною значень функції $y = f(x)$, неперервної на відрізку $[a;b]$, є відрізок $\left[\min\limits_{x\in[a;b]} f(x); \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)\right]$.

Функція $y = f(x)$ називається ***рівномірно неперервною*** на проміжку $\mathfrak{X}$, якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta(\varepsilon) > 0)(\forall x', x'' \in \mathfrak{X}:\ \ |x' - x''| < \delta):\quad \Big\{\big|f(x') - f(x'')\big| < \varepsilon\Big\}.$$

Теорема Кантора. Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, то вона на цьому відрізку є рівномірно неперервною.

Теорема про існування оберненої функції. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) і неперервною на відрізку $[a;b]$, то існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є неперервною і зростаючою (спадною) на відрізку $[c;d]$, де $c = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $d = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Вправи

1. Визначити, чи є обмеженими дані функції на вказаних проміжках:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x \in [1;2],$

2) $f(x) = \ln x, \quad x \in [2;e^2],$

3) $f(x) = 2^{-x}, \quad x \in [-3;+\infty),$

4) $f(x) = \sin x, \quad x \in (-\infty;+\infty),$

5) $f(x) = 2^x + \lg(1 + x^2), \quad x \in [0;1],$

6) $f(x) = \operatorname{arctg} x + e^{\sin x}, \quad x \in [0;+\infty),$

7) $f(x) = \ln(\sin x), \quad x \in (0;\pi),$

8) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}, \quad x \in [-1;1],$

9) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x, \quad x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right],$

10) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}, \quad x \in \left[0;\dfrac{\pi}{6}\right].$

2. Чи має дане рівняння корені, які містяться на заданому відрізку:

1) $x^3-15x+2=0, \quad [0;1]$, 2) $x^3+6x-8=0, \quad [1;1,5]$,

3) $x^4-3x-1=0, \quad [1;2]$, 4) $x^4-4x+1=0, \quad [0;1]$,

5) $x^4-2x-2=0, \quad [-1;0]$, 6) $x+e^x=0, \quad [-1;0]$,

7) $\operatorname{tg} x-\cos x=0, \quad \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, 8) $\ln x=\operatorname{arctg} x, \quad [1;2]$,

9) $\ln^2 x-x+2=0, \quad [3;4]$, 10) $x^2=e^x+2, \quad [-2;-1]$.

3. Знайти функції, обернені до даних:

1) $y=x^2$,

2) $y=2x-x^2$,

3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad ad-bc\neq 0$,

4) $y=x+[x]$,

5) $y=\sin x, \quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3}{2}\pi\right]$,

6) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$,

7) $y=\operatorname{tg} x, \quad x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3}{2}\pi\right)$,

8) $y=\cos x, \quad x\in[0;2\pi]$,

9) $y=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$

10) $y=(1+x^2)\operatorname{sign} x$.

4. Дослідити на рівномірну неперервність в заданих проміжках наступні функції:

1) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}, \quad x\in[-1;1]$,

2) $f(x)=\ln x, \quad x\in(0;1)$,

3) $f(x)=x^2-2x-1, \quad x\in[-2;5]$,

4) $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x\in[1;+\infty)$,

5) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, \quad x\in(0;1)$,

6) $f(x)=\sin^2 x, \quad x\in[0;+\infty)$,

7) $f(x)=\sin x^2, \quad x\in[0;+\infty)$,

8) $f(x)=\sin\sqrt{x}, \quad x\in[0;+\infty)$,

9) $f(x)=\sin(\sin x), \quad x\in[0;+\infty)$,

10) $f(x)=\sin(x\sin x), \quad x\in[0;+\infty)$.

5. Методом інтервалів розв'язати нерівності:

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}<\dfrac{3}{x}$,

2) $\dfrac{2x-1}{x-2}\leq\dfrac{x+2}{x}$,

3) $\dfrac{(x+1)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x-5)(2x-3)}\leq 0$,

4) $\sin 5x\cos 2x<\sin 4x\cos 3x$,

5) $2+\operatorname{tg}2x+\cos 2x<0$, 6) $\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)>0$,

7) $2\sin^2 x-3\cos x<0$, 8) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$,

9) $\log_2|x^2-5x+6|<\log_2|1-x|$, 10) $\log_{2x}\left(\dfrac{2-3|x|}{x^2-9}\right)>0$.

Приклади розв'язування вправ

1.5. Оскільки функції $y=2^x$ та $y=\lg(1+x^2)$ є неперервними в кожній точці відрізка $[0;1]$, то за властивістю неперервних на відрізку $[0;1]$ функцій отримаємо, що функція $y=2^x+\lg(1+x^2)$ є неперервною на відрізку $[0;1]$. Тоді з першої теореми Вейєрштрасса випливатиме, що $y=2^x+\lg(1+x^2)$ є обмеженою на відрізку $[0;1]$. Крім того, вона є монотонно зростаючою як сума монотонно зростаючих функцій на цьому відрізку. Отже,

$$1\le 2^x+\lg(1+x^2)\le 2+\lg 2,$$

де $x\in[0;1]$. ▶

3.4. За означенням цілої частини від x маємо, що для довільного $x\in[n;n+1]$, $(n\in\mathbb{Z})$:

$$f(x)=x+n=y,\quad y\in[2n;2n+1].$$

Звідси випливатиме, що $x=y-n=f^{-1}(y)$, якщо $y\in[2n;2n+1]$, де $n\in\mathbb{Z}$. ▶

4.4. Теорему Кантора застосувати не можемо, тому скористаємось означенням рівномірної неперервності функції на проміжку. Нехай $\varepsilon>0$ – задане фіксоване число. Тоді, якщо $|x'-x''|<\delta$ для довільних $x',x''\in[1;+\infty)$, то:

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt[3]{x'}-\sqrt[3]{x''}\right)\left(\sqrt[3]{(x')^2}+\sqrt[3]{x'x''}+\sqrt[3]{(x'')^2}\right)}{\sqrt[3]{(x')^2}+\sqrt[3]{x'x''}+\sqrt[3]{(x'')^2}}\right|=$$

$$=\frac{|x'-x''|}{\sqrt[3]{(x')^2}+\sqrt[3]{x'x''}+\sqrt[3]{(x'')^2}}.$$

Оскільки x' та x'' – різні і $x' > x'' \geq 1$, тоді $\sqrt[3]{(x')^2} + \sqrt[3]{x'x''} + \sqrt[3]{(x'')^2} > 3$. В такому випадку

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon.$$

Отже, $\delta = 3\varepsilon$ для довільних $x', x'' \in [1; +\infty)$, що і доводить рівномірну неперервність функції $y = \sqrt[3]{x}$ на проміжку $[1; +\infty)$. ▶

4.7. Нехай $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|x_n - x'_n| < \left| \frac{2\pi n - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2\pi n}} \to 0$$

при $n \to +\infty$. Далі

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left| \sin(2\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right| = 1.$$

Тоді для $\varepsilon \in (0; 1)$, яке б ми не взяли $\delta > 0$, існуватимуть $x' \in \{x_n\}$ та $x'' \in \{x'_n\}$ такі, що $|x' - x''| < \delta$, а $|f(x') - f(x'')| = 1 > \varepsilon$. Отже, функція $y = \sin x^2$ не буде рівномірно неперервною на проміжку $[0; +\infty)$. ▶

Індивідуальні завдання до розділу II

Задача 1. Довести виконання наступних рівностей (знайти $\delta(\varepsilon)$):

1.1. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$

1.2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$

1.3. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$

1.4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$

1.5. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$

1.6. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$

1.7. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$

1.8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$

1.9. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$

1.10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$

1.11. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$

1.12. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$

1.13. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$

1.14. $\lim\limits_{x \to -7/5} \dfrac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$

1.15. $\lim\limits_{x\to -7/2}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\dfrac{1}{2}.$ 1.16. $\lim\limits_{x\to 5/2}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}.$

1.17. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2+x-1}{x-1/3}=5.$ 1.18. $\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+1/2}=-81.$

1.19. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23.$ 1.20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}=26.$

1.21. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13.$ 1.22. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10.$

1.23. $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}=-\dfrac{5}{3}.$ 1.24. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}=-8.$

1.25. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}=8.$ 1.26. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}=49.$

1.27. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-1/2}=-3.$ 1.28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x+6}=-19.$

1.29. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+17x-6}{x-1/3}=19.$ 1.30. $\lim\limits_{x\to -1/5}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+1/5}=-8.$

Задача 2. Довести, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 (знайти $\delta(\varepsilon)$):

2.1. $f(x)=5x^2-1,\ x_0=6.$ 2.2. $f(x)=4x^2-2,\ x_0=5.$

2.3. $f(x)=3x^2-3,\ x_0=4.$ 2.4. $f(x)=2x^2-4,\ x_0=3.$

2.5. $f(x)=-2x^2-5,\ x_0=2.$ 2.6. $f(x)=-3x^2-6,\ x_0=1.$

2.7. $f(x)=-4x^2-7,\ x_0=1.$ 2.8. $f(x)=-5x^2-8,\ x_0=2.$

2.9. $f(x)=-5x^2-9,\ x_0=3.$ 2.10. $f(x)=-4x^2+9,\ x_0=4.$

2.11. $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=5.$ 2.12. $f(x)=-2x^2+7,\ x_0=6.$

2.13. $f(x)=2x^2+6,\ x_0=7.$ 2.14. $f(x)=3x^2+5,\ x_0=8.$

2.15. $f(x)=4x^2+4,\ x_0=9.$ 2.16. $f(x)=5x^2+3,\ x_0=8.$

2.17. $f(x)=5x^2+1,\ x_0=7.$ 2.18. $f(x)=4x^2-1,\ x_0=6.$

2.19. $f(x)=3x^2-2,\ x_0=5.$ 2.20. $f(x)=2x^2-3,\ x_0=4.$

2.21. $f(x)=-2x^2-4,\ x_0=3.$ 2.22. $f(x)=-3x^2-5,\ x_0=2.$

2.23. $f(x)=-4x^2-6,\ x_0=1.$ 2.24. $f(x)=-5x^2-7,\ x_0=1.$

2.25. $f(x)=-4x^2-8,\ x_0=2.$ 2.26. $f(x)=-3x^2-9,\ x_0=3.$

2.27. $f(x)=-2x^2+9,\ x_0=4.$ 2.28. $f(x)=2x^2+8,\ x_0=5.$

2.29. $f(x)=3x^2+7,\ x_0=6.$ 2.30. $f(x)=4x^2+6,\ x_0=7.$

Задача 3. Обчислити границі:

3.1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

3.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

Задача 4. Обчислити границі:

4.1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$. 4.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$. 4.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$. 4.14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$. 4.16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$. 4.18. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$. 4.20. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{1/3+x}-\sqrt{2x}}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 1/4} \dfrac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{1/4+x}-\sqrt{2x}}$. 4.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$. 4.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$. 4.26. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$. 4.28. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$. 4.30. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Задача 5. Обчислити границі:

5.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$. 5.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$. 5.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$. 5.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$. 5.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$. 5.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$. 5.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x+5\pi/2)\mathrm{tg} x}{\arcsin 2x^2}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\ln(1-2x)}{4\,\mathrm{arctg}\, 3x}$. 5.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$. 5.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\,\mathrm{arctg}\, x}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$. 5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$. 5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x}-1}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$. 5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin(\pi(x/2+1))}$. 5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{3x}-1)^2}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{x^4}$. 5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$. 5.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}$. 5.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

Задача 6. Обчислити границі:

6.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$. 6.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$. 6.4. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}$. 6.6. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$. 6.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\pi x}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$. 6.10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$. 6.12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$. 6.14. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\mathrm{tg}\pi x}$. 6.16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin(5x/2)\cos x}$. 6.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\ln\mathrm{tg}x}{\cos 2x}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$. 6.20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2(\sqrt{2x}-\sqrt{3x^2-5x+2})}$. 6.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\pi x}{x+2}$. 6.24. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$. 6.26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}3x}$.

Задача 7. Обчислити границі:

7.1. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x-\sqrt[3]{2x-3}\right)}{\sin(\pi x/2)-\sin[(x-1)\pi]}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,2}{\sin\ln(x-1)}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,2x}-e^{-\sin 2x}}{\sin x-1}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\mathrm{tg}(\cos x-1)}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{(1-\pi/x)^2}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\mathrm{tg}\,2x}}{\ln(2x/\pi)}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}2}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}}\dfrac{a^{x^2-a^2}-1}{\mathrm{tg}\ln(x/a)}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\mathrm{arctg}(x+3)}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}\pi}\dfrac{\ln(\cos(x/a)+2)}{a^{a^2\pi^2/x^2-a\pi/x}-a^{a\pi/x-1}}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\mathrm{tg}(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$.

Задача 8. Обчислити границі:

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}$.

8.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$.

8.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

8.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

8.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

8.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$.

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$.

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg}2x-\sin x}$.

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^3}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg}x}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg}x^3}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$.

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

8.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}2x-7x}$.

8.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$.

8.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$.

8.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$.

8.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^2}$.

8.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

Задача 9. Обчислити границі:

9.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

9.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

9.3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

9.4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{\ln x-\ln a}$.

9.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

9.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

9.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

9.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$.

9.9. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

9.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

9.11. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln \mathrm{tg} x}$.

9.12. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$.

9.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

9.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$.

9.15. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$, $x>0$.

9.16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

9.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\mathrm{tg} x}$.

9.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

9.19. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$.

9.21. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

9.25. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

9.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}$.

9.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$.

9.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\mathrm{tg}(\pi/4+ax))}$.

9.29. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

9.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\mathrm{tg}\pi x}$.

Задача 10. Обчислити границі:

10.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+x^3\right)\right)^{3/\left(x^2\arcsin x\right)}$.

10.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$.

10.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

10.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\mathrm{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$.

10.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\mathrm{ctg}^3 x}$.

10.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

10.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$.

10.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{3/x}$.

10.9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$.

10.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\ln\cos x}$.

10.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\mathrm{ctg} x}$.

10.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{1/\ln\left(1+\pi x^3\right)}$.

10.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\left(\mathrm{cosec}^2 x\right)/x}$.

10.14. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{1/\ln\left(1+x^2\right)}$.

10.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\mathrm{ctg}\pi x}$.

10.16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$.

10.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln\left(1+\mathrm{tg}^2(\pi x/3)\right)}$.

10.18. $\lim\limits_{x\to 0}(3-2\cos x)^{-\mathrm{cosec}^2 x}$.

10.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{1/\ln\cos x}$.

10.20. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

10.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 10.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$.

10.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$. 10.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/(1-\cos\pi x)}$.

10.25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)^{1/x^3}$. 10.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$.

10.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$. 10.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln\left(1+3x^2\right)}$.

10.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\cos x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$. 10.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{1/\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 3x\right)}$.

Задача 11. Обчислити границі:

11.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$. 11.2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

11.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$. 11.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2(\pi/4+x)}$.

11.5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$. 11.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

11.7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$. 11.8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.

11.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$. 11.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

11.11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$. 11.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$.

11.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$. 11.14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

11.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$. 11.16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(x+2)\right)^{3/(3+x)}$.

11.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$. 11.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$.

11.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$. 11.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$.

11.21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$. 11.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.

17.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{2/(x+5)}$. 11.24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{x}\right)^{x+2}$.

11.25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\cos x^4}$.

11.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$.

11.27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x}$.

11.28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

11.29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/\left(x^2+1\right)}$.

11.30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$.

Задача 12. Обчислити границі:

12.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.

12.2. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.

12.3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.

12.4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$.

12.5. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$.

12.6. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg}x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$.

12.7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$.

12.8. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

12.9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}2x/\sin 3x}$.

12.10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

12.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

12.12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}x/\sin 4x}$.

12.13. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

12.14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\sin 2x}}$.

12.15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

12.16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}$.

12.17. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{x/(x-1)}$.

12.18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

12.19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{(3x-1)/(x-1)}$.

12.20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

12.21. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2e^{x-2}-1\right)^{(3x+2)/(x-2)}$.

12.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

12.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

12.24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

12.25. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$.

12.26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

12.27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

12.28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

12.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

12.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$.

Задача 13. Обчислити границі:

13.1. $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi}{2e}x}$.

13.2. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}\,x}$.

13.3. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{\ln\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{ctg}x}\right)^{1/(x+\pi/4)}$.

13.4. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin x)^{3/(1+x)}$.

13.5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin\pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$.

13.6. $\lim\limits_{x\to\pi/6}(\sin x)^{6x/\pi}$.

13.7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$.

13.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\left(1-x^2\right)/(1-x)}$.

13.9. $\lim\limits_{x\to 1}(1+e^x)^{\frac{\sin\pi x}{1-x}}$.

13.10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\mathrm{tg}9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/(x+1)}$.

13.11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$.

13.12. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$.

13.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{x-3/4}{(x-1)^2}\right)^{x+1}$.

13.14. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\mathrm{ctg}\dfrac{x}{4}\right)^{\sin(x-\pi)}$.

13.15. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\right)^{x^2/a^2}$.

13.16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$.

13.17. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin x+\cos x)^{1/\mathrm{tg}x}$.

13.18. $\lim\limits_{x\to\pi/8}(\mathrm{tg}2x)^{\sin(\pi/8+x)}$.

13.19. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\pi x}$.

13.20. $\lim\limits_{x\to\pi}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

13.21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln^2 ex\right)^{1/\left(x^2+1\right)}$.

13.22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\pi/\mathrm{arctg}x}$.

13.23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$.

13.24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

13.25. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos\pi x)^{\mathrm{tg}(x-2)}$.

13.26. $\lim\limits_{x\to 1/2}(\arcsin x+\arccos x)^{1/x}$.

13.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\cos x+1)^{\sin x}$.

13.28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}+x-1\right)^{\sin(\pi x/4)}$.

13.29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$.

13.30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}\right)^{x^2}$.

Задача 14. Обчислити границі:

14.1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x+x\,\mathrm{arctg}\,(1/x)}$.

14.2. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sqrt{3\sin x+(2x-\pi)\sin\dfrac{x}{2x-\pi}}$.

14.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

14.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x\cos(1/x)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.

14.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n} + \sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos(1/n)}$.

14.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{2+n^5} - \sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$.

14.7. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + (4x-\pi)\cos\frac{x}{4x-\pi}}{\lg(2+\operatorname{tg} x)}$.

14.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\sqrt{n^2+1}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n^2+1}\right)$.

14.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sqrt{3n^5-7}}{(n^2 - n\cos n+1)\sqrt{n}}$.

14.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\sin n + \sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$.

14.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.

14.12. $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}}\right)$.

14.13. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+(x+2)\sin\frac{x}{x+2}}}$.

14.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.

14.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+\cos n} + \sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$.

14.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + 3}{2-\lg(1+\sin x)}$.

14.17. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\operatorname{arctg} x\cdot\sin^2\dfrac{1}{x} + 5\cos x}$.

14.18. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{4\cos x + \sin\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)}$.

14.19. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2\cos^2 x + (e^x-1)\sin\dfrac{1}{x}}$.

14.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\ln\left(e+x\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

14.21. $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left[\left(e^{x^2}-\cos x\right)\cos\dfrac{1}{x} + \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

14.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \ln(1+x)\sqrt{2+\cos\frac{1}{x}}}{2+e^x}$.

14.23. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos 2\pi x}{2+\left(e^{\sqrt{x-1}}-1\right)\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-1}}$.

14.24. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos\dfrac{1}{x} + 4\cos x}$.

14.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(1+x)}{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)+2}$.

14.26. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{\lg(x+2) + \sin\sqrt{4-x^2}\cos\dfrac{x+2}{x-2}}$.

14.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{2+\cos x\sin\frac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}$.

14.28. $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg}\left(\cos x + \sin\dfrac{x-1}{x+1}\cos\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

14.29. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right) + 4\cos x}$.

14.30. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x + \sin\pi x\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}}{1+\cos x}$.

РОЗДІЛ III. Похідна і диференціал функції однієї змінної

§ 3.1. Похідна функції в точці. Геометричний та фізичний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і $x_0 \in (a, b)$. ***Похідною функції*** $f(x)$ у точці x_0 називають скінченну границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ до приросту аргумента Δx, при умові, що приріст аргумента прямує до нуля, тобто

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функція, яка має скінченну похідну в точці x_0, називається ***диференційовною*** в цій точці. Приріст диференційовної в точці x_0 функції має вигляд

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Зауважимо, що неперервність функції в точці x_0 є необхідною умовою її диференційовності в цій точці.

Якщо існує нескінченна границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці x_0 нескінченну похідну.

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначають одним із символів $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ або $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$.

Використовуючи означення односторонніх границь (див. §2.1) можна означити поняття односторонніх похідних.

Лівосторонньою (правосторонньою) похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається скінченна границя

$$f'(x_0-0) := \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(f'(x_0+0) := \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right).$$

Якщо така границя рівна $\pm\infty$, то говорять, що в точці x_0 існує нескінченна лівостороння (правостороння) похідна.

Зауважимо, що функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, якщо існують та дорівнюють одна одній односторонні похідні в точці x_0, тобто

$$f'(x_0) = f'(x_0-0) = f'(x_0+0).$$

Фізичний зміст похідної: швидкість зміни функції в точці x_0.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у точці $M(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α – кут, який утворює дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$ з додатнім напрямом осі Ox (див. рис. 7).

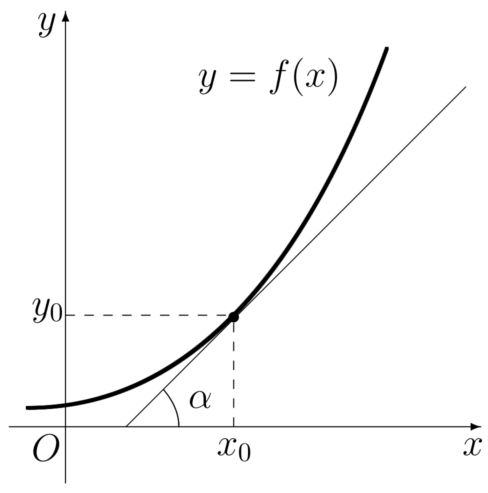

Рис. 7. Геометричний зміст похідної

З геометричного змісту похідної випливає, що рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 записується таким чином

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Якщо неперервна в точці x_0 функція має нескінченну похідну, тоді дотичною до графіка функції в точці $M(x_0, f(x_0))$ є пряма $x = x_0$.

Для нормалі (прямої, яка проходить через точку $M(x_0, f(x_0))$, перпендикулярно до дотичної) рівняння має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Зауважимо, що якщо $f'(x_0) = 0$, то нормаллю є пряма $x = x_0$, а якщо функція в точці x_0 має нескінченну похідну, то нормаллю до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 є пряма $y = f(x_0)$.

Теорема про похідну складеної функції. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x_0, а функція $z = g(y)$ має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $z = g(f(x))$ має похідну в точці x_0, причому

$$z'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Наведене правило обчислення похідної складеної функції застосовується і для композиції довільної скінченної кількості функцій. Наприклад, для складеної функції $z(y(x(t)))$, де $x(t)$, $y(x)$ і $z(y)$ – диференційовні у відповідних точках функції, має місце рівність

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

№з/п	***Функція*** $y = f(x)$	***Похідна функції*** $y' = f'(x)$
1	C, де $C = \text{const}$	0
2	$x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
3	a^x	$a^x \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\sin x$	$\cos x$

№з/п	Функція $y = f(x)$	Похідна функції $y' = f'(x)$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
16	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
17	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
18	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Основні правила диференціювання

Нехай U та V – функції, які мають похідну в точці x, c – стала. Тоді:

1) $c' = 0$;
2) $(U \pm U)' = U' \pm V'$;
3) $(c \cdot U)' = c \cdot U'$;
4) $(U \cdot V)' = U'V + V'U$;
5) $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2}$;
6) $(U(V(x)))' = U'(V(x)) \cdot V'(x)$.

Вправи

1. Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1) $y = 3x^2 - 5x + 6$
2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2}$,
3) $y = \cos^2 3x$,
4) $y = 5^{x-6}$,
5) $y = \log_3(2x^2 + 7)$,
6) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$,
7) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$,
8) $y = \operatorname{tg}^2 x$,
9) $y = 7^{x^2-3x+7}$,
10) $y = \ln(4x - 7)$.

2. Застосовуючи правила диференціювання та формули похідних основних елементарних функцій, знайти похідні наступних функцій:

1) $y=\dfrac{3}{7}x^4\sqrt[3]{x^2}-2x^2\sqrt{x^3}$, 2) $y=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x}$,

3) $y=2x^2+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-4x+7$, 4) $y=\dfrac{3x^2-2x+5}{1-2x^2-x}$,

5) $y=\cos(\sin^2 x)\cdot\sin(\cos^2 x)$, 6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

7) $y=\dfrac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, 8) $y=2^{3\sin x-\sin 3x}$,

9) $y=3x\cos^3 x-3\sin x+\sin^3 x$, 10) $y=\log_2(\log_3(\log_4 x^2))$,

11) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln(x+\sqrt{x^2-4})$, 12) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$,

13) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, 14) $y=10^{\operatorname{arctg}^3(2+\sqrt{x})}$,

15) $y=\dfrac{2\sin x}{\cos^4 x}+\dfrac{3\sin x}{\cos^2 x}-3\ln\dfrac{1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$, 16) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x}{\arcsin x}$,

17) $y=\sqrt[5]{x^4}\cdot\dfrac{x+3}{x^2+4}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^2 3x$, 18) $y=\dfrac{\ln^2\cos x}{\ln^2\sin x}$,

19) $y=2\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\ln\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, 20) $y=x|x|$.

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y=f(x)$ в точці x_0:

1) $y=x^3+2x^2-4x-3,\quad x_0=-2$, 2) $y=\sqrt[3]{x-2},\quad x_0=1$,

3) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x},\quad x_0=1$, 4) $y=\dfrac{x^2}{x-2},\quad x_0=3$,

5) $y=e^{1-x^2},\quad x_0=-1$, 6) $y=\ln\dfrac{x^3-x^2+4}{x^3-x+4},\quad x_0=0$,

7) $y=4\operatorname{tg}x-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x},\quad x_0=0$, 8) $y=x\ln x,\quad x_0=e^2$,

9) $y=3^{x^2-1},\quad x_0=1$, 10) $y=(x+2)\sqrt[3]{9-x},\quad x_0=1$.

4. Знайти кути між кривими в точках їх перетину:

1) $y=4x^2+2x-8,\quad y=x^3-x+10$, 2) $y=\sin x,\quad y=\cos x$,

3) $y^2=x,\quad x=y^2$, 4) $y=\lg x,\quad y=\ln x$,

5) $y=\dfrac{1}{x},\quad y=\sqrt{x}$, 6) $y=e^x,\quad y=e^{2x}$,

7) $y = \operatorname{ch} x, \quad y = 2e^x,$ 8) $y = \sqrt{2x}, \quad y = \dfrac{x^2}{2},$

9) $y = \log_2(x+14), \quad y = 6 - \log_2(x+2),$ 10) $y = \sqrt[3]{4x}, \quad y = \sqrt[3]{3x-2}.$

5. Використовуючи геометричний зміст похідної розв'язати наступні задачі:

1) Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 + 3x^2 - 5$, яка перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 1 = 0$.

2) В якій точці нормаль до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $y = 4x + 1$?

3) В якій точці дотична до графіка функції $y = \dfrac{x+7}{x-2}$ утворює з віссю Ox кут 135^o?

4) Знайти рівняння спільної дотичної до парабол $y = x^2 + 3x + 9$ та $y = x^2 + 5x - 2$.

5) На графіку функції $y = x^2 - 4x + 2$ знайти точки, дотичні в яких проходять через точку $M(4;1)$.

6) Прямі $y = -x$ і $y = 5x - 6$ дотикаються до параболи $y = x^2 + ax + b$. Знайти значення коефіцієнтів a та b, а також координати точок дотику.

7) Для яких значень a пряма $y = ax + 9$ є дотичною до графіка функції $y = 2x - x^2$?

8) При яких значеннях параметра a графіки функцій $y = x^2 - 6ax$ і $y = -2x^2 - 3$ мають спільні точки, через які проходять їхні спільні дотичні. Записати рівняння цих дотичних.

9) Знайти всі дійсні значення параметра a, при яких графік функції $y = x^3 - 27x + a$ дотикається до осі абсцис.

10) Знайти площу трикутника, утвореного віссю абсцис і дотичними, які проведено до графіка функції $y = x^2 + 2x + 10$ із точки $M(0;6)$.

6. Розв'язати задачі, використовуючи фізичний зміст похідної:

1) Знайти швидкість зміни функції $y = x^3 + x^2 - 3x + 2\sqrt[3]{x}$ в точці $x_0 = 8$.

2) Рух матеріальної точки описується законом $s = t^3 + 2t^2 - 3t + 5$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t = 3$ с.

3) Снаряд випущено вертикально вгору зі швидкістю 360 км/год. Яка буде швидкість за 5 с? До якої висоти долетить снаряд?

4) Прямолінійний рух двох тіл задано рівняннями $s_1(t) = t^3 - 4t^2 + 24t - 7$, $s_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 8t - 3$. Знайти прискорення руху тіл у той момент, коли їхні швидкості рівні.

5) Тіло масою $m = 4$ кг рухається прямолінійно за законом $s = t^2 - \frac{t}{2} + 1$. Обчислити кінетичну енергію тіла через 3 с після початку руху.

6) Одна сторона прямокутника має сталу величину $a = 4$ см, а друга зростає зі сталою швидкістю 2 см/с. З якою швидкістю зростуть діагональ прямокутника та його площа в момент, коли $b = 24$ см?

7) Ребро куба зростає рівномірно зі швидкістю 2 см/с. З якою швидкістю зростає об'єм куба в той момент, коли ребро куба дорівнює 10 см?

8) Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с. Обчислити швидкість зміни об'єму та поверхні кулі в момент, коли її радіус дорівнює 60 см.

9) Приставлена до вертикальної стіни драбина, довжина якої 5 м, падає, ковзаючи верхнім кінцем по стіні, а нижнім – по підлозі. З якою швидкістю і прискоренням опускається верхній кінець драбини у той момент, коли нижній кінець, переміщаючись зі сталою швидкістю 2 м/с, перебуває на відстані 4 м від стіни.

10) В циліндричний бак, що має 6 дм в діаметрі, насос подає воду. Висота підняття води зростає на 1 дм за секунду. Знайти швидкість заповнення бака.

Приклади розв'язування вправ

1.3. Використовуючи означення похідної, для даної функції отримаємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos^2(3(x + \Delta x)) - \cos^2 3x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(3x + 3\Delta x) - \cos 3x)(\cos(3x + 3\Delta x) + \cos 3x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4 \sin\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{3\Delta x}{2} \cdot \cos\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\left(3\sin(6x+3\Delta x)\cdot\frac{\sin 3\Delta x}{3\Delta x}\right) = -3\sin 6x. \quad \blacktriangleright$$

2.1. З таблиці похідних основних елементарних функцій і правила знаходження похідної від суми функцій, отримуємо:

$$y' = \left(\frac{3}{7}x^{\frac{14}{3}} - 2x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}\cdot x^{\frac{11}{3}} - 2\cdot\frac{7}{2}\cdot x^{\frac{5}{2}} = 2x^3\sqrt[3]{x^2} - 7x^2\sqrt{x}. \quad \blacktriangleright$$

2.5. За формулою похідної від добутку функцій та правилом відшукання похідної складеної функції одержуємо:

$$y' = (\cos(\sin^2 x))'\cdot\sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)\cdot(\sin(\cos^2 x))' =$$

$$= -\sin(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(\cos^2 x) - \cos(\sin^2 x)\cdot\cos(\cos^2 x)\cdot 2\cos x\cdot\sin x =$$

$$= -\sin 2x\left(\sin(\sin^2 x)\cdot\sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)\cdot\cos(\cos^2 x)\right) =$$

$$= -\sin 2x\cdot\cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x). \quad \blacktriangleright$$

3.6. Значення функції в точці $x_0 = 0$ буде рівне нулю. Далі, за правилом знаходження похідної складеної функції отримуємо:

$$y'(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x^3 - x^2 + 4}\cdot\frac{(3x^2 - 2x)(x^3 - x + 4) - (3x^2 - 1)(x^3 - x^2 + 4)}{(x^3 - x + 4)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4}{(x^3 - x^2 + 4)(x^3 - x + 4)}.$$

Звідси, $y'(0) = \dfrac{1}{4}$.

Отже,

$y = \dfrac{1}{4}x$ – рівняння дотичної, проведеної до кривої в точці x_0,

$y = -4x$ – рівняння нормалі, проведеної до кривої в точці x_0. $\blacktriangleright$

4.2. Нагадаємо, що кутом φ між кривими $y = f(x)$ та $y = g(x)$ в їх точці перетину $M(x_0, y_0)$ вважається величина кута φ між дотичними, проведеними до даних кривих в точці M. Відомо, що тангенс кута між кривими обчислюється за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Точками перетину кривих $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є $M_n\left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих у отриманих точках:

$$y_1'(x) = \cos x, \quad y_1'\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{2};$$

$$y_2'(x) = -\sin x, \quad y_2'\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді з формули для обчислення кутового коефіцієнта між кривими в точці перетину отримуємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{(-1)^n\sqrt{2}}{2} - \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{2}}\right| = 2\sqrt{2}.$$

Отже, кут між кривими $y = \sin x$ та $y = \cos x$ в точках перетину $M_n\left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{(-1)^n\sqrt{2}}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, буде однаковим і рівним $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. ▶

§ 3.2. Похідна від показниково-степеневої та оберненої функцій. Похідна від неявної та параметрично заданої функцій

Диференціювання показниково-степеневої функції. Похідна показниково-степеневої функції $y = (f(x))^{g(x)}$, $f(x) > 0$, знаходиться за формулою

$$y' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)}\right).$$

Цю формулу можна вивести трьома способами:

1) продиференціювати функцію $y = (f(x))^{g(x)}$ спочатку як степеневу (вважаючи $g = \mathrm{const}$), а потім як показникову (вважаючи $f = \mathrm{const}$) та результати додати;

2) записати функцію у вигляді $y = e^{g(x)\ln f(x)}$ і продиференціювати її за правилом відшукання похідної складеної функції;

3) прологарифмувати обидві частини рівності $y = (f(x))^{g(x)}$. В цьому випадку отримаємо, що

$$\ln y = g(x)\ln f(x).$$

Тоді, диференціюючи обидві частини останньої рівності, маємо

$$\frac{y'}{y} = g'(x)f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)},$$

звідки і випливає наведена формула.

Обчислення похідної оберненої функції. Якщо неперервна і строго монотонна в деякому околі точки x функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x) \neq 0$, то обернена функція $x = g(y)$ у відповідній точці y має похідну, причому

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Обчислення похідної функції, заданої параметрично. Похідна функції, яка задано параметрично системою рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – диференційовні в точці t функції, причому $\varphi'(t) \neq 0$, обчислюється за формулою

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Диференціювання неявно заданої функції. Похідна диференційовної на деякому інтервалі функції $y = y(x)$, яка задана неявно у вигляді рівняння $F(x,y) = 0$, знаходиться з умови $\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$, причому при відшуканні похідної функції $F(x,y)$ треба мати на увазі, що функція y залежить від x. Похідну від неявно заданої функції отримуємо в результаті розв'язання знайденого рівняння відносно y'.

Вправи

1. Знайти похідну від показниково-степеневих функцій:

1) $y = x^x$,	2) $y = x^{x^x}$,
3) $y = x^{e^{2x}}$,	4) $y = (\ln x)^{x^2+1}$,
5) $y = x^{\sin^2 x}$,	6) $y = \left(\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\arcsin x}$,
7) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$,	8) $y = (x^2+1)^{3^x}$,
9) $y = (\operatorname{sh} x)^{2^x}$,	10) $y = x^2 \cdot x^{19^x}$.

2. Користуючись правилом диференціювання обернених функцій, знайти y'_x :

1) $x = y\sqrt{1+y}$, 2) $x = e^{\sin y}$,

3) $x = 2^{\cos y}$, 4) $x = \dfrac{2y}{2+\ln y}$,

5) $x = \cos\left(y + 3^y\right)$, 6) $x = y^2 + \dfrac{1}{3}y^3$,

7) $x = \arcsin\dfrac{y+1}{\sqrt{2}}$, 8) $x = 3y - \dfrac{\cos y}{3}$,

9) $x = \log_2(\operatorname{tg} y + 2)$, 10) $x = 3\operatorname{arctg}\left(2^y\right)$.

3. Знайти похідні від параметрично заданих функцій:

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t-1}, \\ y = \dfrac{t^2}{(t-1)^2}, \end{cases}$ $1 < t < +\infty$,

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \end{cases}$ $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$,

4) $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \end{cases}$ $1 < t < \dfrac{\pi}{9}$,

5) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos\dfrac{t}{2}, \end{cases}$ $0 < t < \dfrac{\pi}{4}$,

6) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = e^{2t}\cos^2 t, \\ y = e^{2t}\sin^2 t. \end{cases}$

4. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривих, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ в точці $t = 1$,

2) $\begin{cases} x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^2}, \end{cases}$ в точці $t = 0$,

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{2}$,

4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ в точці $t = \pi$,

5) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{4}$,

6) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{4}$,

7) $\begin{cases} x = \dfrac{3t+1}{t^2+1}, \\ y = \dfrac{2-t}{t^2+1}, \end{cases}$ в точці $t = 0$,

8) $\begin{cases} x = 12\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{6}$,

9) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{2}$,

10) $\begin{cases} x = a\Big(\ln \mathrm{tg}\, \dfrac{t}{2} + \cos t\Big), \\ y = a\sin t, \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої неявно, в точці $M(x_0; y_0)$:

1) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1, \quad M(6; 6,4)$, 2) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{18} = 1, \quad M(1; 3)$,

3) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad M(3; 0)$, 4) $y^2 = 4x, \quad M(1; 2)$,

5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad M(-1; 0)$, 6) $x^5 + y^5 - 2xy = 0, \quad M(1; 1)$,

7) $y=2\ln(x+5)$, $\quad M(-4;0)$, $\qquad$ 8) $x^2(x+y)=a^2(x-y)$, $\quad M(0;0)$,

9) $4x^4+6xy-y^4=0$, $\quad M(1;2)$, $\quad$ 10) $xy+\ln y=1$, $\quad M(1;1)$.

Приклади розв'язування вправ

1.6. Прологарифмуємо обидві частини рівності $y=\left(\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\arcsin x}$. Тоді

$$\ln y=\arcsin x\cdot\ln(\operatorname{arctg}^2 x)\quad\text{або}\quad \ln y=2\arcsin x\cdot\ln|\operatorname{arctg} x|.$$

Продиференціювавши обидві частини останнього співвідношення, отримуємо:

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln|\operatorname{arctg} x|+\frac{2\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Отже,

$$y'=2\left(\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\arcsin x}\left(\frac{\ln|\operatorname{arctg} x|}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right). \quad \blacktriangleright$$

3.4. Використовуючи формулу похідної параметрично заданої функції, спочатку обчислимо x'_t і y'_t :

$$x'_t=\frac{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\sqrt{\cos 2t}+\frac{2\sin 2t\cdot\cos^3 t}{2\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}=\frac{\cos^2 t(\sin 2t\cos t-3\sin t\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}=$$

$$=\frac{\cos^2 t\cdot(\sin t-2\sin t\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}=\frac{\cos^2 t\sin t\cdot(1-2\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}.$$

$$y'_t=\frac{3\sin^2 t\cos t\sqrt{\cos 2t}+\frac{2\sin 2t\cdot\sin^3 t}{2\sqrt{\cos 2t}}}{\cos 2t}=\frac{\sin^2 t(3\cos 2t\cos t+\sin t\sin 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}=$$

$$=\frac{\sin^2 t\cdot(\cos t+2\cos t\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}=\frac{\sin^2 t\cos t\cdot(1+2\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}.$$

Тоді

$$y'_x=\frac{\sin^2 t\cos t\cdot(1+2\cos 2t)}{\sqrt{\cos^3 2t}}\cdot\frac{\sqrt{\cos^3 2t}}{\cos^2 t\sin t(1-2\cos 2t)}=$$

$$=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1+2\cos 2t}{1-2\cos 2t}=\frac{\sin t+2\sin t\cos 2t}{\cos t-2\cos t\sin 2t}=-\operatorname{tg} 3t. \quad \blacktriangleright$$

4.10. З умови отримуємо, що $x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ і $y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

Далі обчислюємо похідну від параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sin t\right)} = \frac{\cos t}{\frac{1}{\sin t} - \sin t} = \frac{\cos t \cdot \sin t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t.$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty$, то $x = 0$ є рівнянням дотичної, а $y = a$ – рівняння нормалі, проведених до заданої кривої в точці $t = \frac{\pi}{2}$. ►

5.8. В цьому випадку $x_0 = 0$ і $y_0 = 0$. З умови маємо неявно задану функцію $F(x,y) = x^2(x+y) - a^2(x-y)$. З формули $\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$ отримаємо:

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - a^2 + a^2y' = 0,$$

звідки

$$y' = \frac{a^2 - 3x^2 - 2xy}{x^2 + a^2},$$

і $y'(0) = 1$.

Тоді, використовуючи формули з параграфа 3.1 для знаходження дотичної та нормалі, проведених до кривої в точці, маємо, що $y = x$ і $y = -x$ є відповідно рівняннями дотичної та нормалі, проведеними до кривої в точці $M(0;0)$. ►

§ 3.3. Диференціал функції. Геометричний та фізичний зміст

Диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0 називається вираз

$$df(x_0) := f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx,$$

де x – незалежна змінна.

Оскільки для диференційовної функції її приріст в точці x_0 записується у виді

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

то $df(x_0)$ – це лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в точці x_0.

Геометричний зміст диференціала. Диференціал функції $f(x)$ дорівнює приросту ординати дотичної, яка проведена до графіка цієї функції в точці $(x_0, f(x_0))$, якщо незалежна змінна отримує приріст Δx (див. рис. 8).

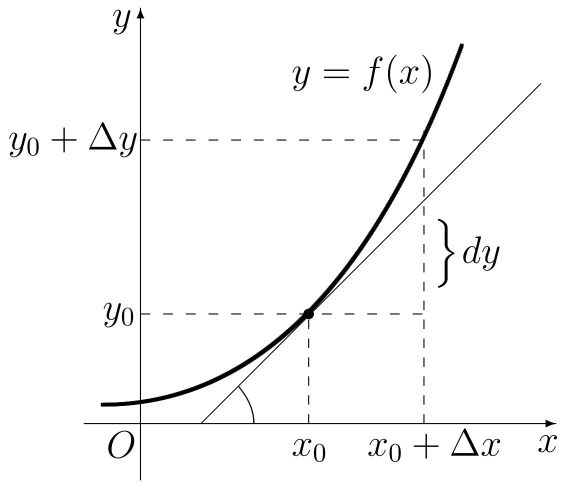

Рис. 8. Геометричний зміст диференціала функції в точці

Механічний зміст диференціала. Вираз $dS(t_0) = \upsilon(t_0)dt$ означає шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, коли б рухалась рівномірно з постійною швидкістю $\upsilon(t_0) = S'(t_0)$.

Форма диференціала функції $f(x)$ в точці x_0 є інваріантною. Тобто, якщо $f(x)$ є диференційовною в точці x_0, то $df(x_0) = f'(x_0)dx$ в обидвох випадках: коли x є незалежною змінною, і коли $x = x(t)$ є диференційовною в точці t_0 функцією, для якої $x(t_0) = x_0$.

Основні властивості диференціала

Для довільних диференційовних функцій $U(x)$ та $V(x)$ справедливі рівності:

1) $dc = 0$, де $c = \text{const}$,

2) $d(\alpha_1 U \pm \alpha_2 V) = \alpha_1 dU \pm \alpha_2 dV$, де α_1, α_2 – сталі,

3) $d(UV) = VdU + UdV$,

4) $d\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{VdU - UdV}{V^2}, \quad V \neq 0.$

При малих Δx справедлива формула $\Delta y \approx dy$, тобто

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Зауважимо, що останню формулу зручно використовувати до наближених обчислень значень функції в заданих точках.

Вправи

1. Знайти диференціали наступних функцій:

1) $y = x^6 + x^3 - \dfrac{1}{x^2}$, 2) $y = (x^2 - 3x + 1)^5$,

3) $y = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$, 4) $y = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$,

5) $y = \ln\left(\sqrt{2\cos x - 1} + \sqrt{1 + 2\cos x}\right)$, 6) $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$,

7) $y = \dfrac{\sqrt[5]{2x - 1} \cdot \sqrt{3 + 2x}}{(4x + 5)^2 \cdot \sqrt[3]{1 - 5x}}$, 8) $y = 2\,\mathrm{ch}^3\,\dfrac{x}{6} + 3\,\mathrm{sh}^2\,\dfrac{x}{6}$,

9) $y = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, 10) $y = \dfrac{x^5 \cdot 5^x}{x^x}$.

2. Знайти диференціали складених функцій, якщо $U = U(x)$, $V = V(x)$, $W = W(x)$ – диференційовні функції:

1) $y = U \cdot V \cdot W$, 2) $y = \arccos\dfrac{U}{V}$,

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{U^2 + 3V^2 + 5W^2}}$, 4) $y = \ln\dfrac{U \cdot V}{W}$,

5) $y = \dfrac{U^2}{V^2} + a^W$, 6) $y = \ln\sqrt{U^2 + W^2}$,

7) $y = \cos U \cdot \sin V + \ln\cos W$, 8) $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{U + V}{W}$,

9) $y = \dfrac{\sin^2 U}{\sin V^2} + \mathrm{ctg}\, W$, 10) $y = \cos(\sin^2 U) \cdot \sin(\cos^2 V)$.

3. Обчислити диференціали функцій в точці $M_0(x_0; y_0)$:

1) $(x + y)^2(2x + y)^3 = 1, \quad M_0(2; -3)$,

2) $x^4 + y^4 = 6x^2 - 4y - 33 = 0, \quad M_0(1; 2)$,

3) $2(1 + xy) - \sqrt{xy^2 + 2} = 0, \quad M_0\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$,

4) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, \quad M_0(1; 0)$,

5) $e^y + xy = e, \quad M_0(0; 1)$,

6) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $\quad M_0\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right); a\right)$,

7) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $\quad M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,

8) $\begin{cases} x = t^2(t-1), \\ y = t^2(t-2), \end{cases}$ $\quad M_0\,(4;0)$,

9) $\begin{cases} x = \frac{e^t}{2t-\frac{1}{3}}, \\ y = (t+1)^2e^t, \end{cases}$ $\quad M_0\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \frac{4}{9\sqrt[3]{e}}\right)$,

10) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{1}{1+t^2}, \end{cases}$ $\quad M_0\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

4. За допомогою диференціала обчислити наближено значення функції $y = f(x)$ в точці x :

1) $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 81{,}256$,
2) $y = \cos x, \quad x = 149^\circ$,
3) $y = \operatorname{tg} x, \quad x = 44^\circ$,
4) $y = e^{1-x^2}, \quad x = 1{,}02$,
5) $y = (x-5)(x-6)^2(x-7)^3, \quad x = 7{,}02$,
6) $y = \operatorname{arctg} x, \quad x = 0{,}98$,
7) $y = \arccos x, \quad x = 0{,}03$,
8) $y = \lg x, \quad x = 102$,
9) $y = \operatorname{ctg} x, \quad x = 45^\circ 10'$,
10) $y = \cos x, \quad x = 60^\circ 30'$.

Приклади розв'язування вправ

2.7. Використовуючи властивість інваріантності форми диференціала, можемо записати:

$$d(\cos U\cdot\sin V+\ln\cos W) = d(\cos U\cdot\sin V)+d(\ln\cos W) =$$

$$= d(\cos U)\cdot\sin V + d(\sin V)\cdot\cos U + \frac{1}{\cos W}\cdot d(\cos W) =$$

$$= -\sin U\cdot\sin V\,dU + \cos V\cdot\cos U\,dV - \operatorname{tg} W\,dW. \quad \blacktriangleright$$

3.10. Спочатку знайдемо похідну від параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'_t}{(\operatorname{arctg} t)'_t} = \frac{-\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = -\frac{2t}{1+t^2}.$$

Далі, обчислимо значення похідної в точці $M_0\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$:

$$y'_x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\left.\frac{2t}{1+t^2}\right|_{t=-1} = 1.$$

Отже, $dy\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = dx$ – диференціал заданої функції, обчислений в точці $M_0\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$. ▶

4.7. Виберемо $x_0 = 0$, тоді $\Delta x = 0{,}03$. Формула для наближеного обчислення значення функції $y = \arccos x$ в точці $x_0 + \Delta x$ матиме вигляд:

$$\arccos(x_0 + \Delta x) = \arccos x_0 - \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}\Delta x.$$

Підставивши в останнє співвідношення відповідні значення x_0 та Δx, отримаємо

$$\arccos 0{,}03 = \arccos 0 - \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} \cdot 0{,}03 = 1 - 0{,}03 = 0{,}97. \quad ▶$$

§ 3.4. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідною n***-го порядку*** (або n-ою похідною) і ***диференціалом*** n***-го порядку*** (або n-им диференціалом) функції $f(x)$ в точці x_0 називають відповідно вирази

$$f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

$$d^n f(x_0) := d\big(d^{n-1} f\big)(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx^n,$$

при умові, що функція $f(x)$ є $(n-1)$-разів диференційовною в околі точки x_0, а x є незалежною змінною.

Основні правила обчислення похідних і диференціалів вищих порядків. Якщо функції $U(x)$ та $V(x)$ є n-разів диференційовними, то виконуються наступні співвідношення:

1) $(\alpha_1 U \pm \alpha_2 V)^{(n)} = \alpha_1 U^{(n)} \pm \alpha_2 V^{(n)}$, де α_1, α_2 – сталі,

2) $\big(U \cdot V\big)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k U^{(n-k)} V^{(k)}$ – формула Лейбніца, де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Якщо для функцій $U(x)$ та $V(x)$ існують диференціали d^nU і d^nV, то

1) $d^n\big(\alpha_1 U \pm \alpha_2 V\big) = \alpha_1 d^nU \pm \alpha_2 d^nV$, де α_1, α_2 – сталі,

2) $d^n\big(U \cdot V\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}U \cdot d^kV, \quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

При обчисленні похідних вищих порядків від елементарних функцій використовують наступні формули:

1) $((ax+b)^{\mu})^{(n)} = a^n \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdot\ldots\cdot(\mu-n+1)(ax+b)^{\mu-n}$,

2) $\left(\dfrac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x \pm a)^{n+1}}$,

3) $\big(a^x\big)^{(n)} = a^x \ln^n a$,

4) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$,

5) $\big(\log_a x\big)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$,

6) $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \dfrac{\pi n}{2}\right)$,

7) $(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Якщо функція задана параметрично рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ тоді похідні $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}$ обчислюються відповідно за формулами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

Вправи

1. Знайти похідні n-го порядку даних функцій:

1) $y = \dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$, 2) $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$,

3) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{1+x}}$, 4) $y = \dfrac{3}{\sqrt{1-2x}}$,

5) $y = \ln(5x - 6)$, 6) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 5x - 14}$,

7) $y = \cos 5x \cdot \sin 6x$, 8) $y = \cos^3 x$,

9) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$, 10) $y = \ln \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 9}$.

2. Застосовуючи формулу Лейбніца, обчислити похідні вказаного порядку наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^2}{2-x}, \quad n = 12$, 2) $y = x^3 \cos 5x, \quad n = 8$,

3) $y = e^{2x} \sin 3x, \quad n = 5$, 4) $y = x \operatorname{sh} 3x, \quad n = 98$,

5) $y = x^3 e^{-3x}, \quad n = 12$, 6) $y = \dfrac{e^{3x}}{x}, \quad n = 9$,

7) $y = x^2 \sin 3x \cdot \cos 5x, \quad n = 5$, 8) $y = x^4 \ln(x^2 - 4x + 3), \quad n = 8$,

9) $y = x^3 \log_2 x, \quad n = 10$, 10) $y = e^{-x} \cos^2 x \cdot \sin 3x, \quad n = 8$.

3. Для функцій $y = f(x)$ знайти диференціали вказаного порядку:

1) $y = x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 2x - 8, \quad n = 4$, 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}, \quad n = 5$,

3) $y = \dfrac{x^4}{1 - x^2}, \quad n = 6$, 4) $y = x^2 \ln x, \quad n = 5$,

5) $y = \sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x, \quad n = 10$, 6) $y = \dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+3)}, \quad n = 8$,

7) $y = e^{3x} \sin^2 x, \quad n = 5$, 8) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad n = 7$,

9) $y = \ln \dfrac{x^2 - 9}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}, \quad n = 6$, 10) $y = e^{2x} \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right), \quad n = 12$.

4. Обчислити похідні другого порядку для функцій, які задані неявно:

1) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, 2) $y^2 - 3xy + x^2 = 2$,

3) $\operatorname{cosec} x \cdot \sin y = 5$, 4) $\ln(x^2 + y^2) = x - y$,

5) $e^x + x = e^y + y$, 6) $e^{x+y} = x^2 - y^2$,

$$7)\ \ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \qquad 8)\ y^2=\cos(2x+3y),$$

$$9)\ e^{2x}=(x+y)^2, \qquad 10)\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=x^2.$$

5. Знайти похідні третього порядку для функцій, які задані параметрично:

$$1)\ \begin{cases} x=2t^3, \\ y=3t^2, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x=a\cos 3t, \\ y=b\sin 3t, \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x=e^{-4t}, \\ y=e^{4t}, \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x=t^{12}+5, \\ y=t^{24}+4, \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} x=e^{-2t}\cos t, \\ y=e^{-2t}\sin t, \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \\ y=\cos t, \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x=2^{\cos^2 t}, \\ y=2^{\sin^2 t}, \end{cases} \qquad 8)\ \begin{cases} x=\operatorname{ctg}t+t, \\ y=\dfrac{1}{\sin t}, \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} x=\dfrac{e^t}{1+t}, \\ y=(t-1)e^t, \end{cases} \qquad 10)\ \begin{cases} x=\ln\sin t, \\ y=\ln\sin 2t. \end{cases}$$

Приклади розв’язування вправ

1.7. Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму:

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin 11x+\sin x\right).$$

Тоді за правилом відшукання похідної n-го порядку від суми і формулою похідної n-го порядку від синуса запишемо:

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{2}(\sin 11x+\sin x)\right)^{(n)}=\frac{1}{2}\big(\sin 11x\big)^{(n)}+\frac{1}{2}\big(\sin x\big)^{(n)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 11^n\cdot\sin\left(11x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Отже, $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left(11^n \cdot \sin\left(11x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$. ▶

4.6. Застосовуючи правило відшукання похідної першого порядку від неявно заданої функції, запишемо

$$\left(e^{x+y} - x^2 + y^2\right)'_x = 0,$$

звідки

$$e^{x+y}(1 + y') - 2x + 2y \cdot y' = 0.$$

Отже, $y' = \dfrac{2x - e^{x+y}}{2y + e^{x+y}}$.

Тоді

$$y'' = \frac{(2x - e^{x+y})'_x(2y + e^{x+y}) - (2x - e^{x+y})(2y + e^{x+y})'_x}{(2y + e^{x+y})^2} =$$

$$= \frac{\left(2 - e^{x+y} \cdot (1 + y')\right)(2y + e^{x+y}) - \left(2y' + e^{x+y}(1 + y')\right)(2x - e^{x+y})}{(2y + e^{x+y})^2}.$$

Підставивши в останню формулу знайдену похідну y', отримаємо

$$y''=\frac{(4y+(2-2x-2y)e^{x+y})(2y+e^{x+y})-(4x+(2x+2y-2)e^{x+y})(2x-e^{x+y})}{(2y + e^{x+y})^3}.$$

Отже,

$$y'' = \frac{8(y^2 - x^2) - 4(y^2 + x^2 + 2xy - 2y - 2x)e^{x+y}}{(2y + e^{x+y})^3}. \quad ▶$$

5.3. Спочатку знайдемо похідну першого порядку y'_x від параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4e^{4t}}{-4e^{-4t}} = -e^{8t}.$$

Тоді

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-e^{8t})'_t}{-4e^{-4t}} = \frac{-8e^{8t}}{-4e^{-4t}} = 2e^{12t}.$$

Отже,

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t} = \frac{(2e^{12t})'_t}{-4e^{-4t}} = \frac{24e^{12t}}{-4e^{-4t}} = -6e^{16t}$$

– похідна третього порядку від параметрично заданої функції. ▶

§ 3.5. Теореми про середнє для диференційовних функцій

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і $f(a)=f(b)$. Тоді існує точка $c\in(a;b)$ така, що $f'(c)=0$.

Точка, в якій похідна рівна нулю, називається ***стаціонарною***.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна в інтервалі $(a;b)$. Тоді існує принаймі одна точка $c\in(a;b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Формулу з теореми Лагранжа називають ***формулою скінченних приростів***. Її записують ще в такому вигляді:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\Theta\Delta x)\Delta x,\quad 0<\Theta<1.$$

Теорема Лагранжа ілюструє той факт, що в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка (може бути і не одна), в якій дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна хорді, що сполучає точки $(a;f(a))$ і $(b;f(b))$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ і диференційовні в інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x)\neq 0$ для довільного значення $x\in(a;b)$. Тоді існує точка $c\in(a;b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Зауважимо, що теорема Ролля є наслідком теореми Лагранжа, а теорема Лагранжа є наслідком теореми Коші.

Вправи

1. Перевірити виконання умов теореми Ролля для функцій:

1) $y=\cos 3x$,
2) $y=x^2-6x+5$,
3) $y=x^3-4x,\quad x\in[-2;2]$,
4) $y=1-(x-1)^{\frac{2}{3}},\quad x\in[0;2]$,
5) $y=|x-1|,\quad x\in[0;2]$,
6) $y=\dfrac{2-x^2}{x^4},\quad x\in[-1;1]$,

7) $y=\sqrt[3]{(x-8)^2}, \quad x\in[7;9]$, 8) $y=(4^x+2)(2-x)-6, \quad x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$,

9) $y=\begin{cases} x+3, & \text{якщо } -3\le x\le -1,\\ x^4, & \text{якщо } -1<x\le 0,\end{cases}$ 10) $y=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } -1\le x<0,\\ e^x, & \text{якщо } 0\le x\le 1.\end{cases}$

2. Чи можна застосувати теорему Лагранжа до даних функцій, і якщо можна, то знайти точку c:

1) $y=\sqrt{2}x^4+2x, \quad x\in[0;1]$,
2) $y=x-x^3, \quad x\in[-2;1]$,
3) $y=\sqrt[5]{x^4(x-1)}, \quad x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$,
4) $y=x+\sin x, \quad x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,
5) $y=2x^2-\ln x, \quad x\in[1;e]$,
6) $y=\dfrac{x}{\ln x}, \quad x\in[e;e^2]$,
7) $y=0,1x+e^{\frac{x}{2}}, \quad x\in[0;2]$,
8) $y=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 4x-x^2-2, & \text{якщо } 1<x\le 2,\end{cases}$
9) $y=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } 1<x\le 2,\end{cases}$
10) $y=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0\le x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } 1\le x\le 4.\end{cases}$

3. Чи можна застосувати теорему Коші до даних функцій, і якщо так, то знайти відповідну точку c:

1) $f(x)=2x^3+5x+1, \quad g(x)=x^2+4, \quad x\in[0;2]$,
2) $f(x)=\sin x, \quad g(x)=\cos x, \quad x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,
3) $f(x)=x^2, \quad g(x)=x^3, \quad x\in[-1;1]$,
4) $f(x)=e^x, \quad g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}, \quad x\in[-2;2]$,
5) $f(x)=\sin x, \quad g(x)=\sqrt[3]{x^2}, \quad x\in[-8;8]$.

4. Використовуючи теорему Лагранжа, довести нерівності:

1) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|, \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}),$

2) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|, \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}),$

3) $\dfrac{x-y}{x} < \ln\dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}, \quad (\forall x, y:\ 0 < y < x),$

4) $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x < \dfrac{y-x}{1+x^2}, \quad (\forall x, y:\ 0 < x < y),$

5) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad (\forall x > -1),$

6) $\dfrac{x-y}{\cos^2 y} < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < \dfrac{x-y}{\cos^2 x}, \quad \Bigl(\forall x, y:\ 0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}\Bigr),$

7) $e^x > 1 + x, \quad (\forall x > 0),$

8) $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\forall x:\ 0 < x < 1),$

9) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \quad \alpha > 1, \quad (\forall x > -1),$

10) $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\forall x > -1).$

Приклади розв'язування вправ

2.3. Функція $y = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ є неперервною на відрізку $\Bigl[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\Bigr]$. Знайдемо її похідну:

$$y' = \frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3(x-1)+x^4}{\sqrt[5]{(x^4(x-1))^4}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^3(5x-4)}{\sqrt[5]{(x^4(x-1))^4}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5x-4}{\sqrt[5]{x(x-1)^4}}.$$

Знайдена похідна існує в усіх точках заданого відрізка, крім $x = 0$. При $x = 0$ маємо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(\Delta x)^4(\Delta x - 1)}}{\Delta x} = \infty$. Тоді умова теореми Лагранжа про диференційовність функції не виконується.

Отже, застосувати теорему Лагранжа до функції $y = \sqrt[5]{x^4(x-1)}$ на відрізку $\Bigl[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\Bigr]$ не можна. ▶

3.4. Функції $f(x) = e^x$ та $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ є неперервними на відрізку $[-2; 2]$. Похідні $f'(x) = e^x$ та $g'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ не мають особливих точок всередині проміжка $(-2; 2)$, тобто самі функції є диференційовними в проміжку $(-2; 2)$.

Однак, $g'(x) = 0$ в точці $x = 0$, яка належить проміжку $(-2; 2)$. Отже, умови теореми Коші для заданих функцій не виконуються. ▶

4.6. Покладемо $f(x) = \operatorname{tg} x$, тоді $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Використовуючи теорему Лагранжа, маємо:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y} = \frac{1}{\cos^2 c},$$

де $c \in (y; x):\ 0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Оскільки $c < x$ і $c > y$, то $\cos^2 c > \cos^2 x$ і $\cos^2 c < \cos^2 y$, тому

$$\frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{і} \quad \frac{1}{\cos^2 c} > \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Звідси

$$\frac{1}{\cos^2 y} < \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y} < \frac{1}{\cos^2 x},$$

тобто

$$\frac{x - y}{\cos^2 y} < \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y < \frac{x - y}{\cos^2 x},$$

де $0 < y < x < \dfrac{\pi}{2}$. ▶

§ 3.6. Формула Тейлора

Формула Тейлора для функції $f(x)$, яка визначена в околі точки x_0 і n-разів диференційовна в околі цієї точки, має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_{n+1}(x),$$

або

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_{n+1}(x),$$

де $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ називається многочленом Тейлора, а $r_{n+1}(x)$ – залишковим членом формули Тейлора.

Залишковий член записують у різних формах, тобто:

1) $r_{n+1}(x) = o\big((x - x_0)^n\big)$ – форма Пеано,

2) $r_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\quad 0 < \Theta < 1$ – форма Лагранжа,

3) $\quad r_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{n!}(1 - \Theta)^n (x - x_0)^{n+1}$, $\quad 0 < \Theta < 1$ – форма Коші.

4) $r_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{n!p}(1 - \Theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1}$, $0 < \Theta < 1$, $p > 0$ – форма Шлемільха-Роша.

Якщо $x_0 = 0$, то формула Тейлора має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Остання формула розкладу функції $f(x)$ називається ***формулою Маклорена*** із залишковим членом у формі Пеано.

Зауважимо, що у випадку парної функції отримаємо формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}),$$

а якщо $f(x)$ є непарною функцією, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Наведемо розклади деяких елементарних функцій за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$,

2) $(1 + x)^\mu = 1 + \mu x + \dfrac{\mu(\mu - 1)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{\mu(\mu - 1) \cdot \ldots \cdot (\mu - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n) =$
$= 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(\mu - 1) \cdot \ldots \cdot (\mu - k + 1)}{k!} x^k + o(x^n)$,

зокрема

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} x^k + o(x^n),\text{ де } (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1),$$

3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$,

4) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$,

5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,

6) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$,

7) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$,

8) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.

Вправи

1. Розкласти функції за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано:

1) $f(x) = \frac{1}{3x+5}$, 2) $f(x) = \frac{1}{2-5x}$,

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$, 4) $f(x) = e^{3x+2}$,

5) $f(x) = (x-3)\sqrt{1-x}$, 6) $f(x) = x\ln(3x+2)$,

7) $f(x) = \ln\frac{1-2x}{1+x}$, 8) $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$,

9) $f(x) = \cos^2 x + xe^{x^2}$, 10) $f(x) = 3^{4-5x}$,

11) $f(x) = \ln(3-2x-x^2)$, 12) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-3x+2}$,

13) $f(x) = \frac{4x+7}{x^2-5x+4}$, 14) $f(x) = \frac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$,

15) $f(x) = x\operatorname{sh} 4x$, 16) $f(x) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} 2x$,

17) $f(x) = x\cos^2 6x$, 18) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$,

19) $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin x$, 20) $f(x) = \cos 2x \cdot \cos 4x$.

2. Розкласти функції в околі точки x_0 за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано:

1) $f(x) = \cos(5x-3)$, $x_0 = 1$,
2) $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = -1$,
3) $f(x) = \ln(2x+1)$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$,
4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x_0 = 2$,
5) $f(x) = \ln(x^2-3x+2)$, $x_0 = 3$,
6) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $x_0 = 2$,
7) $f(x) = \dfrac{5}{6-x-x^2}$, $x_0 = 1$,
8) $f(x) = \ln(1+x-6x^2)$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$,
9) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$, $x_0 = 1$,
10) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-x-6}$, $x_0 = -1$.

3. За допомогою формули Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа обчислити наближено (з точністю до 10^{-3}):

1) $\sqrt[3]{9}$, 2) $\sqrt[4]{90}$, 3) $e^{\frac{1}{3}}$, 4) $\cos 85°$, 5) $\ln 1{,}4$,

6) $\sin 73°$, 7) $\sqrt[6]{734}$, 8) $\sqrt[3]{130}$, 9) $\arcsin 0{,}4$, 10) $\operatorname{arctg} 0{,}3$.

4. Застосовуючи формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$,
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x(e^x+1)}$,
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos x - e^{-x^2}}$,
5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$,
6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$,
7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$,
8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$,
9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$,
10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right)$,

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\operatorname{arctg} x+\arcsin x}{x^2}$, 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$, 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$,

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{\sin x-x}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-2x}-x}{x^2\operatorname{tg} x-e^{-x^3}+1}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x\sqrt{1+x}-1}{\sin x\cdot\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$, 18) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}\right)$,

19) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$, 20) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

Приклади розв'язування вправ

2.5. Зауважимо, що розклад функції $f(x)$ за формулою Тейлора в околі точки x_0 заміною $x-x_0=t$ зводиться до розкладу функції $g(t)=f(x_0+t)$ за формулою Маклорена.

Отже, для функції $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$ введемо заміну $x-3=t$. Тоді:

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln((t+3)^2-3(t+3)+2)=\ln(t^2+3t+2)=$$

$$=\ln(t+1)(t+2)=\ln\left(2(t+1)\left(1+\frac{t}{2}\right)\right)=\ln 2+\ln(1+t)+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right).$$

За формулами розкладу для $\ln(1+t)$ маємо:

$$\ln(t+1)(t+2)=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{2^k\cdot k}+o(t^n)=$$

$$=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)t^k+o(t^n).$$

Підставивши $t=x-3$, отримаємо остаточний результат:

$$\ln(x^2-3x+2)=\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)(x-3)^k+o\big((x-3)^n\big).\quad\blacktriangleright$$

3.3. Скористаємось формулою Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа для $f(x)=e^x$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_{n+1}(x),$$

де $r_{n+1}(x) = \dfrac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

З цієї формули при $x = \dfrac{1}{3}$ дістанемо:

$$e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{3^n} + r_{n+1},$$

де $r_{n+1} = r_{n+1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{e^{\frac{\Theta}{3}}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{1}{3^{n+1}}$.

Щоб обчислити наближене значення $e^{\frac{1}{3}}$ з точністю до 0,001, визначимо спочатку, скільки доданків у формулі для $e^{\frac{1}{3}}$ потрібно залишити. Для цього розв'яжемо нерівність

$$|r_{n+1}| < \frac{3}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} < 0{,}001.$$

Оскільки

$$|r_4| < \frac{1}{3^3\cdot 4!} = \frac{1}{27\cdot 24} > 0{,}001, \quad \text{і} \quad |r_5| < \frac{1}{3^4\cdot 5!} = \frac{1}{81\cdot 120} < 0{,}001,$$

то у формулі для $e^{\frac{1}{3}}$ потрібно взяти п'ять доданків. Тобто

$$e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3^4} + r_5,$$

де $|r_5| < 0{,}001$.

Отже, $e^{\frac{1}{3}} = 1{,}396$ з точністю до 0,001. ▶

4.4. Оскільки

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + o(x^8),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7),$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + o(x^6),$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos x - e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + o(x^8)}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4}\right)}{x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{4!}x^2 + \frac{119}{6!}x^4\right)} = 2. \quad ▶$$

Індивідуальні завдання до розділу III

Задача 1. За означенням похідної функції знайти $f'(0)$:

1.1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{9x}\right) + \frac{2}{3}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin \frac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.5. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin \frac{3}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right)} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.7. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x^2 \sin \frac{5}{x}} - 1\right) + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.8. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.9. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.10. $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \cos \frac{5}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.11. $f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin \frac{6}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.12. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(2^{x^2 \cos(1/8x)} - 1 + x\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

1.13. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

$$1.14.\ f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\frac{1}{9x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.15.\ f(x)=\begin{cases} x^2\cos^2\frac{11}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.16.\ f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.17.\ f(x)=\begin{cases} \frac{\ln\cos x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.18.\ f(x)=\begin{cases} 6x+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.19.\ f(x)=\begin{cases} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.20.\ f(x)=\begin{cases} e^{x\sin\frac{5}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.21.\ f(x)=\begin{cases} 3^{x^2\sin\frac{2}{x}}-1+2x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.22.\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+\ln\left(1+3x^2\cos\frac{2}{x}\right)}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.23.\ f(x)=\begin{cases} e^{x\sin\frac{3}{5x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.24.\ f(x)=\begin{cases} \frac{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}{x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.25.\ f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}-x^2\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.26.\ f(x)=\begin{cases} e^{\sin\left(x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{2}{x}\right)}-1+x^2, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.27.\ f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{1-2x^3\sin\frac{5}{x}}-1+x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$1.28.\ f(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.29.\ f(x) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+2x^2+x^3\right)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$1.30.\ f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Скласти рівняння нормалі (у варіантах 2.1-2.12) або рівняння дотичної (у варіантах 2.13-2.30) до даної кривої в точці з абсцисою x_0 :

2.1. $y = \left(4x - x^2\right)/4, \quad x_0 = 2.$ 2.2. $y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2.$

2.3. $y = x - x^3, \quad x_0 = -1.$ 2.4. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4.$

2.5. $y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1.$ 2.6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8.$

2.7. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$ 2.8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16.$

2.9. $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$ 2.10. $y = \left(x^2 - 3x + 6\right)/x^2, \quad x_0 = 3.$

2.11. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64.$ 2.12. $y = \left(x^3 + 2\right)/\left(x^3 - 2\right), \quad x_0 = 2.$

2.13. $y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1.$ 2.14. $y = \dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}, \quad x_0 = 1.$

2.15. $y = 2x + \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$ 2.16. $y = -2\left(x^8 + 2\right)/\left(3\left(x^4+1\right)\right), \quad x_0=1.$

2.17. $y = \dfrac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x_0 = 1.$ 2.18. $y = \dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}, \quad x_0 = 1.$

2.19. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right), \quad x_0 = 1.$ 2.20. $y = 1/(3x+2), \quad x_0 = 2.$

2.21. $y = x/\left(x^2 + 1\right), \quad x_0 = -2.$ 2.22. $y = \left(x^2 - 3x + 3\right)/3, \quad x_0 = 3.$

2.23. $y = 2x/\left(x^2 + 1\right), \quad x_0 = 1.$ 2.24. $y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right), \quad x_0 = 1.$

2.25. $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = 1.$ 2.26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1.$

2.27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$ 2.28. $y = \left(3x - 2x^3\right)/3, \quad x_0 = 1.$

2.29. $y = x^2/10 + 3, \quad x_0 = 2.$ 2.30. $y = \left(x^2 - 2x - 3\right)/4, \quad x_0 = 4.$

Задача 3. Знайти диференціал dy :

$$3.1.\ y = x \arcsin(1/x) + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|, \quad x > 0.$$

3.2. $y = \operatorname{tg}\left(2\arccos\sqrt{1-2x^2}\right), \quad x > 0.$

3.3. $y = \sqrt{1+2x} - \ln\left|x + \sqrt{1+2x}\right|.$

3.4. $y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}.$

3.5. $y = \arccos\left(1\Big/\sqrt{1+2x^2}\right), \quad x > 0.$

3.6. $y = x\ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| - \sqrt{x^2+3}.$

3.7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x)\ln \operatorname{ch} x.$

3.8. $y = \arccos\left(\left(x^2-1\right)\Big/\left(x^2\sqrt{2}\right)\right).$

3.9. $y = \ln\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right).$

3.10. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x.$

3.11. $y = \dfrac{\ln|x|}{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$

3.12. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) + \arcsin e^x.$

3.13. $y = x\sqrt{4-x^2} + a\arcsin(x/2).$

3.14. $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x.$

3.15. $y = 2x + \ln|\sin x + 2\cos x|.$

3.16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\Big/3.$

3.17. $y = \ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}\right|.$

3.18. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}.$

3.19. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}.$

3.20. $y = \ln\left|x^2-1\right| - \dfrac{1}{x^2-1}.$

3.21. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right).$

3.22. $y = \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1\right|.$

3.23. $y = \ln\left|\cos\sqrt{x}\right| + \sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}.$

3.24. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x).$

3.25. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x).$

3.26. $y = \left(\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x-1}}.$

3.27. $y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

3.28. $y = \sqrt{3+x^2} - x\ln\left|x + \sqrt{3+x^2}\right|.$

3.29. $y = \sqrt{x} - (1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

3.30. $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}.$

Задача 4. Обчислити наближено з допомогою диференціала:

4.1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$

4.2. $y = \sqrt[3]{x^3+7x}, \quad x = 1,012.$

4.3. $y = \left(x + \sqrt{5-x^2}\right)\Big/2, \quad x = 0,98.$

4.4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$

4.5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$

4.6. $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}, \quad x = 0,97.$

4.7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$

4.8. $y = \sqrt{x^2+x+3}, \quad x = 1,97.$

4.9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021.$

4.10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$

4.11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998.$

4.12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$

4.13. $y = x^6, \quad x = 2,01.$

4.14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24.$

4.15. $y = x^7, \quad x = 1,996.$

4.16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$

4.17. $y = \sqrt{4x-1}, \quad x = 2,56.$

4.18. $y = 1\Big/\sqrt{2x^2+x+1}, \quad x = 1,016.$

4.19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36.$

4.20. $y = 1\big/\sqrt{x}, \quad x = 4,16.$

4.21. $y = x^7, \quad x = 2,002.$

4.22. $y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78.$

4.23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98.$

4.24. $y = x^5, \quad x = 2,997.$

4.25. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$

4.26. $y = x^4, \quad x = 3,998.$

4.27. $y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0,01.$

4.28. $y = \sqrt[3]{3x+\cos x}, \quad x = 0,01.$

4.29. $y = \sqrt[4]{2x-\sin(\pi x/2)}, \quad x = 1,02.$

4.30. $y = \sqrt{x^2+5}, \quad x = 1,97.$

Задача 5. Знайти похідну:

5.1. $y = \dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}}.$

5.2. $y = \dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}.$

5.3. $y = \dfrac{x^4-8x^2}{2\left(x^2-4\right)}.$

5.4. $y = \dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}.$

5.5. $y = \dfrac{\left(1+x^8\right)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}.$

5.6. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}.$

5.7. $y = \dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}.$

5.8. $y = \dfrac{\left(x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}.$

5.9. $y = \dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}.$

5.10. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\left(1+x^{3/4}\right)^2}{x^{3/2}}}.$

5.11. $y = \dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}.$

5.12. $y = \dfrac{\left(x^2-2\right)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}.$

5.13. $y = \dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}.$

5.14. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}\,(3x+2)}{4x^2}.$

5.15. $y = \dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}.$

5.16. $y = \dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}.$

5.17. $y = \dfrac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2}.$

5.18. $y = \left(1-x^2\right)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}.$

5.19. $y = \dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}.$

5.20. $y = \dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}.$

5.21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

5.22. $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

5.23. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5.24. $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

5.25. $y=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2}}$.

5.26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$.

5.27. $y=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$.

5.28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

5.29. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$.

5.30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$.

Задача 6. Знайти похідну:

6.1. $y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

6.2. $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)/8$.

6.3. $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{e^x-3}{2}$.

6.4. $y=\dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$.

6.5. $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$.

6.6. $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}\,e^x)^3}$.

6.7. $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-2\mathrm{arctg}\,e^x$.

6.8. $y=\ln(e^x+1)+\dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$.

6.9. $y=\dfrac{2\left(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)}{\ln 2}$.

6.10. $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$.

6.11. $y=\dfrac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$.

6.12. $y=\dfrac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x-\alpha\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$.

6.13. $y=e^{ax}\left[\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$.

6.14. $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

6.15. $y=x-3\ln\left[\left(1+e^{x/6}\right)\sqrt{1+e^{x/3}}\right]-3\,\mathrm{arctg}\,e^{x/6}$.

6.16. $y = x + \dfrac{8}{1 + e^{x/4}}$.

6.17. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) + \arcsin e^{-x}$.

6.18. $y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}\right)$.

6.19. $y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - \left(\operatorname{arctg} e^{x/2}\right)^2$.

6.20. $y = \dfrac{e^{x^3}}{1 + x^3}$.

6.21. $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(e^{mx} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

6.22. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right)$.

6.23. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1}$.

6.24. $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

6.25. $y = \dfrac{e^x}{2}\left[\left(x^2 - 1\right)\cos x + (x - 1)^2 \sin x\right]$.

6.26. $y = \operatorname{arctg}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

6.27. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right)$.

6.28. $y = -\dfrac{e^{3x}}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

6.29. $y = \arcsin e^{-x} - \sqrt{1 - e^{2x}}$.

6.30. $y = -\dfrac{1}{2} e^{-x^2}\left(x^4 + 2x^2 + 2\right)$.

Задача 7. Знайти похідну:

7.1. $y = \sqrt{x} \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right) - \sqrt{x+a}$.

7.2. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

7.3. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln\left(2 + \sqrt{x}\right)$.

7.4. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$.

7.5. $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}\right)$.

7.6. $y = \ln \dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

7.7. $y = \ln^2(x + \cos x)$.

7.8. $y = \ln^3(1 + \cos x)$.

7.9. $y = \ln \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

7.10. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$.

7.11. $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.

7.12. $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + a^{\pi^{\sqrt{2}}}$.

7.13. $y = \ln \sin \dfrac{2x + 4}{x + 1}$.

7.14. $y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$.

7.15. $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x.$

7.16. $y = x\left(\cos \ln x + \sin \ln x\right)/2.$

7.17. $y = \ln \cos \dfrac{2x+3}{x+1}.$

7.18. $y = \lg \ln\left(\operatorname{ctg} x\right).$

7.19. $y = \log_a \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$

7.20. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right).$

7.21. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}.$

7.22. $y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}.$

7.23. $y = \ln\left(bx + \sqrt{a^2+b^2x^2}\right).$

7.24. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}.$

7.25. $y = \ln\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

7.26. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right).$

7.27. $y = \ln \dfrac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}(x/2)}.$

7.28. $y = \ln \dfrac{\ln x}{\sin(1/x)}.$

7.29. $y = \ln \ln \sin\left(1+1/x\right).$

7.30. $y = \ln \ln^3 \ln^2 x.$

Задача 8. Знайти похідну:

8.1. $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$

8.2. $y = \cos \ln 2 - \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}.$

8.3. $y = \operatorname{tg}\ \lg \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}.$

8.4. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}.$

8.5. $y = \dfrac{\cos \sin 5 \cdot \sin^2 2x}{2\cos 4x}.$

8.6. $y = \dfrac{\sin \cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4\sin 4x}.$

8.7. $y = \dfrac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7\cos 14x}.$

8.8. $y = \cos\left(\operatorname{ctg} 2\right) - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}.$

8.9. $y = \operatorname{ctg}\left(\cos 2\right) + \dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}.$

8.10. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}.$

8.11. $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}.$

8.12. $y = \ln \sin \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}.$

8.13. $y = 8\sin\left(\operatorname{ctg} 3\right) + \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}.$

8.14. $y = \dfrac{\cos\left(\operatorname{ctg} 3\right) \cdot \cos^2 14x}{28\sin 28x}.$

8.15. $y = \dfrac{\cos\left(\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 15x}{15\cos 30x}.$

8.16. $y = \dfrac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right) \cdot \cos^2 16x}{32\sin 32x}.$

8.17. $y = \dfrac{\operatorname{ctg}\ \left(\sin\frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 17x}{17\cos 34x}.$

8.18. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2} \cdot \cos^2 18x}{36\sin 36x}.$

8.19. $y = \dfrac{\operatorname{tg}\ (\ln 2) \cdot \sin^2 19x}{19\cos 38x}.$

8.20. $y = \operatorname{ctg}\ \left(\cos 5\right) - \dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$

8.21. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}.$

8.22. $y = \cos\left(\ln 13\right) - \dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}.$

8.23. $y = \ln \cos \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}.$

8.24. $y = \operatorname{ctg}\left(\sin \dfrac{1}{13}\right) - \dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}.$

8.25. $y = \sin\ln 2 + \dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.

8.26. $y = \sqrt[3]{\cos\sqrt{2}} - \dfrac{1}{52}\dfrac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$.

8.27. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}\,(\cos 2)} + \dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.

8.28. $y = \sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.

8.29. $y = \cos^2\sin 3 + \dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$.

8.30. $y = \sin^3\cos 2 - \dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$.

Задача 9. Знайти похідну:

9.1. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$.

9.2. $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.

9.3. $y = \dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$.

9.4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

9.5. $y = \arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.

9.6. $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.

9.7. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

9.8. $y = \dfrac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7} - 9\arccos\sqrt{\dfrac{x-1}{6}}$.

9.9. $y = \dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$.

9.10. $y = \dfrac{x^3}{3}\arccos x - \dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

9.11. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9.12. $y = \dfrac{3+x}{2}\sqrt{x\,(2-x)} + 3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

9.13. $y = \dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{x}$.

9.14. $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9.15. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1} - \dfrac{\arccos x}{2x^2}$.

9.16. $y = 6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{6+x}{2}\sqrt{x\,(4-x)}$.

9.17. $y = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}$.

9.18. $y = \dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$.

9.19. $y = \dfrac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

9.20. $y = \dfrac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2} + \dfrac{9}{4}\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$.

9.21. $y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$.

9.22. $y = \arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$.

9.23. $y = \sqrt{1-x^2} - x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

9.24. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

9.25. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$.

9.26. $y = \left(2x^2+6x+5\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - x$.

9.27. $y = \dfrac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x + \dfrac{1}{8}\ln\left(1-4x^2\right)$.

9.28. $y = \left(2x^2 - x + \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}} - \dfrac{x^3}{2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

9.29. $y = \left(x + 2\sqrt{x} + 2\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \sqrt{x}$.

9.30. $y = \sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{1+x} - \sqrt{2}\ln(1+x)$.

Задача 10. Знайти похідну:

10.1. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}\operatorname{th} x}{2-\sqrt{5}\operatorname{th} x}$.

10.2. $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{4\operatorname{ch}^4 x} + \dfrac{3\operatorname{sh} x}{8\operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

10.3. $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{1-\sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x}$.

10.4. $y = \dfrac{3}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\operatorname{th} x}{\sqrt{2}-\operatorname{th} x} - \dfrac{\operatorname{th} x}{4\left(2-\operatorname{th}^2 x\right)}$.

10.5. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{th} x + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

10.6. $y = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}$.

10.7. $y = \dfrac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\dfrac{a+\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}{a-\sqrt{1+a^2}\operatorname{th} x}$.

10.8. $y = \dfrac{1}{18\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{cth} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{cth} x}$.

10.9. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

10.10. $y = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{1 - \operatorname{sh} 2x}{2 + \operatorname{sh} 2x}$.

10.11. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.

10.12. $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}$.

10.13. $y = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

10.14. $y = \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$.

10.15. $y = \dfrac{1 + 8 \operatorname{ch}^2 x \cdot \ln(\operatorname{ch} x)}{2 \operatorname{ch}^2 x}$.

10.16. $y = -\dfrac{12 \operatorname{sh}^2 x + 1}{3 \operatorname{sh}^2 x}$.

10.17. $y = -\dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{3}{2} \arcsin(\operatorname{th} x)$.

10.18. $y = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \arcsin \dfrac{3 + \operatorname{ch} x}{1 + 3 \operatorname{ch} x}$.

10.19. $y = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \ln \dfrac{4 + \sqrt{8} \operatorname{th} \frac{x}{2}}{4 - \sqrt{8} \operatorname{th} \frac{x}{2}}$.

10.20. $y = \dfrac{1}{4} \ln \left| \operatorname{th} \dfrac{x}{2} \right| - \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{3 + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

10.21. $y = -\dfrac{1}{4} \arcsin \dfrac{5 + 3 \operatorname{ch} x}{3 + 5 \operatorname{ch} x}$.

10.22. $y = \dfrac{1 - 8 \operatorname{ch}^2 x}{4 \operatorname{ch}^4 x}$.

10.23. $y = \dfrac{2}{\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{3 \operatorname{sh}^3 x} + \dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{5}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

10.24. $y = \dfrac{8}{3} \operatorname{cth} 2x - \dfrac{1}{3 \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^3 x}$.

10.25. $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) - \dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x}$.

10.26. $y = \dfrac{3}{2} \ln\left(\operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right) + \operatorname{ch} x - \dfrac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x}$.

10.27. $y = -\dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} - \dfrac{3}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

10.28. $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)$.

10.29. $y = \dfrac{1}{2} \left[\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) \right]$.

10.30. $y = -\dfrac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \dfrac{1}{2} \ln\left(\operatorname{th} \dfrac{x}{2}\right)$.

Задача 11. Знайти похідну показниково-степеневої функції:

11.1. $y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2) \ln(\operatorname{arctg} x)}$.

11.2. $y = \left(\sin \sqrt{x}\right)^{\ln(\sin \sqrt{x})}$.

11.3. $y = (\sin x)^{5e^x}$.

11.4. $y = (\arcsin x)^{e^x}$.

11.5. $y = (\ln x)^{3^x}$.

11.6. $y = x^{\arcsin x}$.

11.7. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$.

11.8. $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$.

11.9. $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.

11.10. $y = (\cos 5x)^{e^x}$.

11.11. $y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}$.

11.12. $y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}$.

11.13. $y = \left(x^3+4\right)^{\operatorname{tg} x}$.

11.14. $y = x^{\sin x^3}$.

11.15. $y = \left(x^2-1\right)^{\operatorname{sh} x}$.

11.16. $y = \left(x^4+5\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

11.17. $y = (\sin x)^{5x/2}$.

11.18. $y = \left(x^2+1\right)^{\cos x}$.

11.19. $y = 19^{x^{19}} x^{19}$.

11.20. $y = x^{3^x} \cdot 2^x$.

11.21. $y = \left(\sin \sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$.

11.22. $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.

11.23. $y = x^{e^{\cos x}}$.

11.24. $y = x^{2^x} \cdot 5^x$.

11.25. $y = x^{e^{\sin x}}$.

11.26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}$.

11.27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$.

11.28. $y = \left(x^8+1\right)^{\operatorname{th} x}$.

11.29. $y = x^{29^x} \cdot 29^x$.

11.30. $y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}$.

Задача 12. Знайти похідну:

12.1. $y = \dfrac{1}{24}\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2-4} + \dfrac{x^2}{16} \arcsin \dfrac{2}{x}, \quad x > 0.$

12.2. $y = \dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

12.3. $y = 2x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{4x}}\right) - e^{-2x} \arcsin\left(e^{2x}\right)$.

12.4. $y = \sqrt{9x^2-12x+5} \operatorname{arctg}(3x-2) - \ln\left(3x-2+\sqrt{9x^2-12x+5}\right)$.

12.5. $y = \dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2} + \ln \dfrac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.

12.6. $y = \dfrac{x^2}{81} \arcsin \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}, \quad x > 0.$

12.7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{3x-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

12.8. $y = 3x - \ln\left(1+\sqrt{1-e^{6x}}\right) - e^{-3x} \arcsin\left(e^{3x}\right)$.

12.9. $y = \ln\left(4x-1+\sqrt{16x^2-8x+2}\right) - \sqrt{16x^2-8x+2} \operatorname{arctg}(4x-1)$.

12.10. $y = \ln \dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.

12.11. $y=(2x+3)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{2}{3}\left(4x^2+12x+11\right)\sqrt{x^2+3x+2},\quad 2x+3>0.$

12.12. $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}.$

12.13. $y=5x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{10x}}\right)-e^{-5x}\arcsin\left(e^{5x}\right).$

12.14. $y=\sqrt{x^2-8x+17}\operatorname{arctg}(x-4)-\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right).$

12.15. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+4x-x^2}}{2-x}+\dfrac{2}{2-x}\sqrt{-3+4x-x^2}.$

12.16. $y=\left(3x^2-4x+2\right)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\arcsin\dfrac{1}{3x-2},\quad 3x-2>0.$

12.17. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{x-1}{x^2-2x+3}.$

12.18. $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-5x}\right).$

12.19. $y=\ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right)-\sqrt{4x^2-12x+10}\operatorname{arctg}(2x-3).$

12.20. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}.$

12.21. $y=\dfrac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\dfrac{1}{2x-1},\quad 2x-1>0.$

12.22. $y=\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}.$

12.23. $y=\arcsin\left(e^{-4x}\right)+\ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1}\right).$

12.24. $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)-\sqrt{25x^2+1}\operatorname{arctg}5x.$

12.25. $y=\dfrac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+12x-9x^2}}{3x-2}.$

12.26. $y=(3x+1)^4\arcsin\dfrac{1}{3x+1}+\left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x},\quad 3x+1>0.$

12.27. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+3}.$

12.28. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-3x}\right).$

12.29. $y=\sqrt{49x^2+1}\operatorname{arctg}7x-\ln\left(7x+\sqrt{49x^2+1}\right).$

12.30. $y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}.$

Задача 13. Знайти похідну:

13.1. $y = \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}$.

13.2. $y = 4 \ln \dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}} - \dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

13.3. $y = x\left(2x^2+5\right)\sqrt{x^2+1} + 3\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.4. $y = x^3 \arcsin x + \dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

13.5. $y = 3 \arcsin \dfrac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2+2x-2}, \quad 4x+1>0$.

13.6. $y = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\, x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

13.7. $y = 2 \arcsin \dfrac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}, \quad 3x+4>0$.

13.8. $y = x\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

13.9. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

13.10. $y = \sqrt{1-3x-2x^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$.

13.11. $y = \sqrt{(4+x)(1+x)} + 3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right)$.

13.12. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\, \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

13.13. $y = \dfrac{1}{12} \ln \dfrac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\, \dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

13.14. $y = 4 \arcsin \dfrac{4}{2x+3} + \sqrt{4x^2+12x-7}, \quad 2x+3>0$.

13.15. $y = 2 \arcsin \dfrac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}, \quad 3x+1>0$.

13.16. $y = (2+3x)\sqrt{x-1} - \dfrac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x-1}$.

13.17. $y = \dfrac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$.

13.18. $y = \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

13.19. $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{arctg}\, x$.

13.20. $y = x \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \dfrac{1}{2}(\arcsin x - x)$.

13.21. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

13.22. $y = 3\arcsin\dfrac{3}{x+2} + \sqrt{x^2+4x-5}.$

13.23. $y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5\arcsin\sqrt{\dfrac{x+2}{5}}.$

13.24. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

13.25. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x.$

13.26. $y = x^2\arccos x - \dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

13.27. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}.$

13.28. $y = \dfrac{x}{4}\left(10-x^2\right)\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\dfrac{x}{2}.$

13.29. $y = \arcsin\dfrac{1}{2x+3} + 2\sqrt{x^2+3x+2}, \quad 2x+3>0.$

13.30. $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

Задача 14. Знайти похідну:

14.1. $y = \dfrac{1}{\sin\alpha}\ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\alpha).$

14.2. $y = x\cos\alpha + \sin\alpha\ln\sin(x-\alpha).$

14.3. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sin\ln x - \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\cos\ln x\right]x^{\sqrt{2}+1}.$

14.4. $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}\right).$

14.5. $y = 3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}.$

14.6. $y = \left(a^2+b^2\right)^{-1/2}\cdot\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b}\right).$

14.7. $y = \dfrac{7^x(3\sin 3x + \cos 3x\cdot\ln 7)}{9+\ln^2 7}.$

14.8. $y = \ln\dfrac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$

14.9. $y = \dfrac{1}{a(1+a^2)}\left[\operatorname{arctg}(a\cos x) + a\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right].$

14.10. $y=-\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

14.11. $y=\left(1+x^2\right)e^{\operatorname{arctg} x}$.

14.12. $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x+x}{1-x\operatorname{ctg} x}$.

14.13. $y=\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{1-x^2}$.

14.14. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x},\quad x>0$.

14.15. $y=\dfrac{6^x(\sin 4x\cdot\ln 6-4\cos 4x)}{16+\ln^2 6}$.

14.16. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}$.

14.17. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$.

14.18. $y=\dfrac{5^x\left(2\sin 2x+\cos 2x\cdot\ln 5\right)}{4+\ln^2 5}$.

14.19. $y=\ln\dfrac{\sqrt{2}+\operatorname{th} x}{\sqrt{2}-\operatorname{th} x}$.

14.20. $y=\dfrac{3^x\left(4\sin 4x+\ln 3\cdot\cos 4x\right)}{16+\ln^2 3}$.

14.21. $y=\dfrac{4^x\left(\ln 4\cdot\sin 4x-4\cos 4x\right)}{16+\ln^2 4}$.

14.22. $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

14.23. $y=\dfrac{5^x(\sin 3x\cdot\ln 5-3\cos 3x)}{9+\ln^2 5}$.

14.24. $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}$.

14.25. $y=\dfrac{2^x\left(\sin x+\cos x\cdot\ln 2\right)}{1+\ln^2 2}$.

14.26. $y=\dfrac{\ln\left(\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\alpha\right)}{\sin\alpha}$.

14.27. $y=2\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}+3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

14.28. $y=\dfrac{\cos x}{3\left(2+\sin x\right)}+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\left(x/2\right)+1}{\sqrt{3}}$.

14.29. $y=\dfrac{3^x\left(\ln 3\cdot\sin 2x-2\cos 2x\right)}{\ln^2 3+4}$.

14.30. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{3\cos^3 x}$.

Задача 15. Знайти похідну y'_x :

15.1. $\begin{cases} x=\frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

15.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

15.3. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$

15.4. $\begin{cases} x=\arcsin\left(\sin t\right), \\ y=\arccos\left(\cos t\right). \end{cases}$

15.5. $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y=t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

15.6. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin\left(t-1\right). \end{cases}$

15.7. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}\left(2e^t\right), \\ y = \ln\left(\operatorname{tg} e^t\right). \end{cases}$

15.8. $\begin{cases} x = \ln\left(\operatorname{ctg} t\right), \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

15.9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$

15.10. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

15.11. $\begin{cases} x = \ln\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

15.12. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15.13. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sqrt{1 - t^2}\right), \\ y = \left(\arccos t\right)^2. \end{cases}$

15.14. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15.15. $\begin{cases} x = \left(1 + \cos^2 t\right)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15.16. $\begin{cases} x = \ln\frac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

15.17. $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{t}. \end{cases}$

15.18. $\begin{cases} x = \frac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

15.19. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$

15.20. $\begin{cases} x = \left(\arcsin t\right)^2, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

15.21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$

15.22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

15.23. $\begin{cases} x = \ln\left(1 - t^2\right), \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

15.24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\frac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

15.25. $\begin{cases} x = \ln\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}, \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t + \ln\cos t. \end{cases}$

15.26. $\begin{cases} x = \sqrt{t - t^2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1 - t}\arcsin\sqrt{t}. \end{cases}$

15.27. $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15.28. $\begin{cases} x = \frac{t^2\ln t}{1-t^2} + \ln\sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t + \ln\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

15.29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \cdot \ln\cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$ 15.30. $\begin{cases} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t + \ln\sqrt{1-t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

Задача 16. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої в точці, що відповідає значенню параметра $t = t_0$:

16.1. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$ 16.2. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right), \\ y = a\left(1 - \cos t\right), \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$ 16.4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$ 16.6. $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x = t\left(t\cos t - 2\sin t\right), \\ y = t\left(t\sin t + 2\cos t\right), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$ 16.8. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} x = 2\ln\left(\operatorname{ctg} t\right) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$ 16.10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$ 16.12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} x = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$ 16.14. $\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$ 16.16. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x = a\left(t\sin t + \cos t\right), \\ y = a\left(\sin t - t\cos t\right), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$ 16.18. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x = t\left(1 - \sin t\right), \\ y = t\cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$

16.26. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

16.27. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$

16.29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$

Задача 17. Знайти похідну функції n-го порядку:

17.1. $y = xe^{ax}$.

17.2. $y = \sin 2x + \cos\left(x + 1\right)$.

17.3. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

17.4. $y = \dfrac{4x + 7}{2x + 3}$.

17.5. $y = \lg\left(5x + 2\right)$.

17.6. $y = a^{3x}$.

17.7. $y = \dfrac{x}{2\left(3x + 2\right)}$.

17.8. $y = \lg\left(x + 4\right)$.

17.9. $y = \sqrt{x}$.

17.10. $y = \dfrac{2x + 5}{13\left(3x + 1\right)}$.

17.11. $y = 2^{3x+5}$.

17.12. $y = \sin\left(x + 1\right) + \cos 2x$.

17.13. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

17.14. $y = \dfrac{4 + 15x}{5x + 1}$.

17.15. $y = \lg\left(3x + 1\right)$.

17.16. $y = 7^{5x}$.

17.17. $y = \dfrac{x}{9\left(4x + 9\right)}$.

17.18. $y = \lg\left(1 + x\right)$.

17.19. $y = \dfrac{4}{x}$. 17.20. $y = \dfrac{5x+1}{13\,(2x+3)}$.

17.21. $y = a^{2x+3}$. 17.22. $y = \sin(3x+1) + \cos 5x$.

17.23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$. 17.24. $y = \dfrac{11+12x}{6x+5}$.

17.25. $y = \lg(2x+7)$. 17.26. $y = 2^{kx}$.

17.27. $y = \dfrac{x}{x+1}$. 17.28. $y = \log_3(x+5)$.

17.29. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$. 17.30. $y = \dfrac{7x+1}{17\,(4x+3)}$.

Задача 18. Знайти похідну функції вказаного порядку:

18.1. $y = \left(2x^2 - 7\right)\ln(x-1), \quad y^{V} = ?$ 18.2. $y = \left(3 - x^2\right)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$

18.3. $y = x\cos x^2, \quad y^{III} = ?$ 18.4. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y^{III} = ?$

18.5. $y = \dfrac{\log_2 x}{x^3}, \quad y^{III} = ?$ 18.6. $y = \left(4x^3 + 5\right)e^{2x+1}, \quad y^{V} = ?$

18.7. $y = x^2\sin(5x-3), \quad y^{III} = ?$ 18.8. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$

18.9. $y = (2x+3)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$ 18.10. $y = \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x, \quad y^{III} = ?$

18.11. $y = \dfrac{\ln x}{x^3}, \quad y^{IV} = ?$ 18.12. $y = (4x+3)\cdot 2^{-x}, \quad y^{V} = ?$

18.13. $y = e^{1-2x}\cdot\sin(2+3x), \quad y^{IV} = ?$ 18.14. $y = \dfrac{\ln(3+x)}{3+x}, \quad y^{III} = ?$

18.15. $y = \left(2x^3 + 1\right)\cos x, \quad y^{V} = ?$ 18.16. $y = \left(x^2+3\right)\ln(x-3), \quad y^{IV} = ?$

18.17. $y = \left(1-x-x^2\right)e^{(x-1)/2}, \quad y^{IV} = ?$ 18.18. $y = \dfrac{1}{x}\sin 2x, \quad y^{III} = ?$

18.19. $y = (x+7)\ln(x+4), \quad y^{V} = ?$ 18.20. $y = (3x-7)\cdot 3^{-x}, \quad y^{IV} = ?$

18.21. $y = \dfrac{\ln(2x+5)}{2x+5}, \quad y^{III} = ?$ 18.22. $y = e^{x/2}\cdot\sin 2x, \quad y^{IV} = ?$

18.23. $y = \dfrac{\ln x}{x^5}, \quad y^{III} = ?$ 18.24. $y = x\ln(1-3x), \quad y^{IV} = ?$

18.25. $y = \left(x^2+3x+1\right)e^{3x+2}, \quad y^{V} = ?$ 18.26. $y = (5x-8)\cdot 2^{-x}, \quad y^{IV} = ?$

18.27. $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y^{V} = ?$ 18.28. $y = e^{-x}\cdot(\cos 2x - x), \quad y^{IV} = ?$

18.29. $y = (5x-1)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$

18.30. $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$

Задача 19. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} від функції, заданої параметрично:

19.1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1\big/ \operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$

19.5. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

19.6. $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1\big/\left(1+t^2\right). \end{cases}$

19.7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1\big/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

19.8. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

19.9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$

19.10. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t\big/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

19.11. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$

19.12. $\begin{cases} x = \cos t/\left(1+2\cos t\right), \\ y = \sin t/\left(1+2\cos t\right). \end{cases}$

19.13. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$

19.14. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

19.15. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1\big/\sqrt{t}. \end{cases}$

19.16. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

19.17. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln\left(t-2\right). \end{cases}$

19.18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

19.19. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

19.20. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

19.21. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$ 19.22. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

19.23. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$ 19.24. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 (t/2). \end{cases}$

19.25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$ 19.26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$

19.27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$ 19.28. $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$

19.29. $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/\left(t^2 + 1\right). \end{cases}$ 19.30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Задача 20. Довести, що функція y задовольняє задане рівняння:

20.1. $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = \left(1 - x^2\right) y$.

20.2. $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

20.3. $y = 5e^{-2x} + e^x/3$, $y' + 2y = e^x$.

20.4. $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, $\left(1 - x^2\right) y' + xy = 2x$.

20.5. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $yy' = x - 2x^3$.

20.6. $y = \frac{c}{\cos x}$, $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$.

20.7. $y = -\frac{1}{3x+c}$, $y' = 3y^2$.

20.8. $y = \ln(c + e^x)$, $y' = e^{x-y}$.

20.9. $y = \sqrt{x^2 - cx}$, $\left(x^2 + y^2\right) dx - 2xydy = 0$.

20.10. $y = x(c - \ln x)$, $(x - y) dx + xdy = 0$.

20.11. $y = e^{tg(x/2)}$, $y' \sin x = y \ln y$.

20.12. $y = \frac{1+x}{1-x}$, $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

20.13. $y = \frac{b+x}{1+bx}$, $y - xy' = b\left(1 + x^2 y'\right)$.

20.14. $y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2}$, $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

20.15. $y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1}$, $(1 + e^x)\, yy' = e^x$.

20.16. $y = \operatorname{tg} \ln 3x$, $\left(1 + y^2\right) dx = xdy$.

20.17. $y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1}$, $1 + y^2 + xyy' = 0$.

20.18. $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1}$, $\ln x + y^3 - 3xy^2 y' = 0$.

20.19. $y = a + \frac{7x}{ax+1}$, $y - xy' = a\left(1 + x^2 y'\right)$.

20.20. $y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{x} - 1}$, $a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}\, y' = 0$.

20.21. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$, $8xy' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}$.

20.22. $y = (x+1)\, e^{x^2}$, $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

20.23. $y = \frac{2x}{x^3+1} + \frac{1}{x}$, $x\left(x^3+1\right) y' + \left(2x^3-1\right) y = \frac{x^3-2}{x}$.

20.24. $y = e^{x+x^2} + 2e^x$, $y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

20.25. $y = -x\cos x + 3x$, $xy' = y + x^2 \sin x$.

20.26. $y = 1\big/\sqrt{\sin x + x}$, $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3 (x\cos x - \sin x)$.

20.27. $y = \frac{x}{x-1} + x^2$, $x(x-1)\, y' + y = x^2 (2x - 1)$.

20.28. $y = \frac{x}{\cos x}$, $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$.

20.29. $y = (x+1)^n (e^x - 1)$, $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x (1+x)^n$.

20.30. $y = 2^{\frac{\sin x}{x}} + \cos x$, $x\sin x \cdot y' + (\sin x - x\cos x)\, y = \sin x \cdot \cos x - x$.

Задача 21. Розкласти функцію за формулою Маклорена:

21.1. $y = \dfrac{9}{20 - x - x^2}$.

21.2. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - 5x}}$.

21.3. $y = \ln(1 - x - 6x^2)$. 21.4. $y = 2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - x$.

21.5. $y = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2$. 21.6. $y = \dfrac{7}{12 + x - x^2}$.

21.7. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{27 - 2x}}$. 21.8. $y = \ln(1 + x - 6x^2)$.

21.9. $y = (x - 1)\sin 5x$. 21.10. $y = \dfrac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}$.

21.11. $y = \dfrac{6}{8 + 2x - x^2}$. 21.12. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16 - 3x}}$.

21.13. $y = \ln(1 - x - 12x^2)$. 21.14. $y = (3 + e^{-x})^2$.

21.15. $y = \dfrac{\arcsin x}{x} - 1$. 21.16. $y = \dfrac{7}{12 - x - x^2}$.

21.17. $y = x^2\sqrt{4 - 3x}$. 21.18. $y = \ln(1 + 2x - 8x^2)$.

21.19. $y = 2x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - x$. 21.20. $y = (x - 1)\operatorname{sh} x$.

21.21. $y = \dfrac{5}{6 + x - x^2}$. 21.22. $y = x\sqrt[3]{27 - 2x}$.

21.23. $y = \ln(1 + x - 12x^2)$. 21.24. $y = \dfrac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$.

21.25. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$. 21.26. $y = \dfrac{5}{6 - x - x^2}$.

21.27. $y = \sqrt[4]{16 - 5x}$. 21.28. $y = \ln(1 - x - 20x^2)$.

21.29. $y = (2 - e^x)^2$. 21.30. $y = (x - 1)\operatorname{ch} x$.

РОЗДІЛ IV. Застосування похідної

§ 4.1. Правило Лопіталя-Бернуллі

I. Розкриття невизначеності виду $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 1. Нехай:

1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені в проміжку $(a;b]$,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$

3) в проміжку $(a;b)$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$,

4) існує скінченна (або ні) границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема 2. Нехай:

1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені в проміжку $[b;+\infty)$, де $b > 0$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0,$

3) в проміжку $(b;+\infty)$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$,

4) існує скінченна (або ні) границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема 3. Нехай:

1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені в проміжку $(a;b]$,

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,$

3) в проміжку $(a; b)$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$,

4) існує скінченна (або ні) границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема 4. Нехай:

1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені в проміжку $[b; +\infty)$, де $b > 0$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty,$

3) в проміжку $(b; +\infty)$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$,

4) існує скінченна (або ні) границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$.

II. Розкриття невизначеності виду $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, де a може бути як скінченне, так і рівне $\pm\infty$, то добуток $f(x) \cdot g(x)$ подають у вигляді $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ або $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$. Тоді розкриття невизначеності виду $0 \cdot \infty$ зводиться до розкриття невизначеностей $\dfrac{\infty}{\infty}$ або $\dfrac{0}{0}$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то різницю $f(x) - g(x)$ представляють у вигляді $\dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$. Тоді розкриття невизначеності виду $\infty - \infty$ зводиться до розкриття невизначеності $\dfrac{0}{0}$.

3. Невизначеності виду $1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$ зводяться до невизначеності $0 \cdot \infty$ за допомогою зображення функції $\big(f(x)\big)^{g(x)}$ у вигляді $e^{g(x)\ln f(x)}$.

Вправи

1. Обчислити границі функцій, використовуючи правило Лопіталя-Бернуллі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x-5}{x^3-6x^2+5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-5^x}{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin^2 x}{x\cos x-\sin x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$, 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 7x)}$,

11) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}}\dfrac{1+\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}{1-2\cos^2 x}$, 12) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{4\sin^2 x-6\sin x+2}{3\sin^2 x+5\sin x-\frac{13}{4}}$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2\cos x+e^{-x}}{x\sin x}$, 14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\ln(\ln x)}{\sqrt[3]{2x+5}\cdot\sqrt{\ln x}}$,

15) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}$, 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg}x}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\operatorname{ch}x}{\sin x^2}$, 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$,

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$, 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$.

2. Обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}\right)$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$, 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$,

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$,

9) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$, 10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$,

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$, 12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$,

13) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{x}$, 14) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$,

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\ln\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$,

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 18) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$,

19) $\lim\limits_{x\to 0}(1-10^{x})^{\operatorname{tg}x}$, 20) $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^{x}-1}$.

Приклади розв'язування вправ

1.7. Використовуючи теорему 1, можемо записати

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin^2 x}{x\cos x-\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x\arcsin^2 x)'}{(x\cos x-\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x-x\sin x-\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{2x}{1-x^2}}{-\sin x-x\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{1-x^2}+2x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\left(1+\frac{1}{1-x^2}\right)+\frac{8x\arcsin x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}+\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}}{-2\cos x+x\sin x}=-3.$$

Зауважимо, що маючи невизначеність $\dfrac{0}{0}$, ми повторно застосували правило Лопіталя-Бернуллі тричі. ▶

2.5. Застосовуючи правило розкриття невизначеності $\infty-\infty$, отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x^2}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2\operatorname{arctg}x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{2x\operatorname{arctg}x+\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2(1+x^2)\operatorname{arctg}x+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4x\operatorname{arctg}x+3}=\frac{1}{3}. \quad ▶$$

2.17. Користуємось правилом розкриття невизначеності 1^{∞} :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{2\sin 2x}{2\sin 2x+8x\cos 2x-4x^2\sin 2x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}e^{\frac{4\cos 2x}{12\cos 2x-24x\sin 2x-8x^2\cos 2x}}=\sqrt[3]{e}. \quad ▶$$

§ 4.2. Критерій сталості та монотонності функції на відрізку

Функція $f(x)$ називається ***зростаючою (спадною)*** на $(a; b)$, якщо для довільних значень $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Функція $f(x)$ називається ***незростаючою (неспадною)*** на $(a; b)$, якщо для довільних значень $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ і має на проміжку $(a; b)$ скінченну похідну $f'(x)$. Для того, щоб $f(x)$ була на $(a; b)$ сталою, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) = 0$ в $(a; b)$.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Для того, щоб $f(x)$ була неспадною (незростаючою) на $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на $(a; b)$.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Для того, щоб $f(x)$ була зростаючою (спадною) на $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на $(a; b)$,

2) не існує інтервала $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$ такого, що $f'(x) = 0$ на $(\alpha; \beta)$.

Вправи

1. Знайти проміжки монотонності даних функцій:

1) $y = x^4 - 2x$,

2) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$,

3) $y = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 30$,

4) $y = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^3}$,

5) $y = \arcsin(2 + x)$,

6) $y = \sqrt{x-2}(x-3)$,

7) $y = \dfrac{x}{\ln x}$,

8) $y = \sin x - 3\sin\dfrac{x}{3}$,

9) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$,

10) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$,

11) $y = \left(2^{2x} - 1\right)\left(2^x - 4\right)^2$, 12) $y = \cos x - 3\cos\dfrac{x}{3}$,

13) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1 - x^2}$, 14) $y = \sin x \cdot \sin 2x$,

15) $y = \sqrt[3]{(x+3)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$, 16) $y = \cos 3x - 3\cos x$,

17) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, 18) $y = xe^{x - x^2}$,

19) $y = \arcsin\dfrac{|1 - x^2|}{1 + x^2}$, 20) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1 - x^2}$.

2. При якому значенні параметра a функція:

1) $f(x) = 3x^3 + ax + 3$ зростає на $\mathbb{R}$,

2) $f(x) = \sqrt{ax^3 - 12x^2 + 6x}$ зростає на інтервалі $(0; +\infty)$,

3) $f(x) = \dfrac{a^2 - 1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 4$ зростає на $\mathbb{R}$,

4) $f(x) = (a-1)x^3 - 6x^2 + 6(a+1)x + 7$ зростає на $\mathbb{R}$,

5) $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$ зростає на $\mathbb{R}$,

6) $f(x) = (a-2)x^3 - 12x^2 + 6(a+5)x + 3$ монотонна на інтервалі $(0; +\infty)$,

7) $f(x) = (a-3)x^3 + 6\sqrt{7}x^2 + 12(a+3)x - 4$ зростає на $\mathbb{R}$,

8) $f(x) = (a-1)x^3 + 6x^2 + 3(a-4)x + 2$ монотонна на інтервалі $(-\infty; 0)$,

9) $f(x) = ax + \cos x$ зростає на $\mathbb{R}$,

10) $f(x) = 2x + 4\operatorname{arctg} 3x$ зростає на $\mathbb{R}$.

3. Довести наступні нерівності:

1) $e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0$,

2) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$,

3) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x, \quad \forall x > 0$,

4) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad \forall x > 0$,

5) $x^\alpha - 1 \geq \alpha(x - 1), \quad \forall x > 0, \quad \alpha > 1$,

6) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$

7) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}, \quad \forall x \in (0;1],$

8) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-1} \leq 1, \quad \forall x \geq 1, \quad n \in \mathbb{N},$

9) $e^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x, \quad \forall x \geq 0,$

10) $e^{-x} > 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}, \quad \forall x > 0.$

4. З'ясувати, при яких значеннях x дані рівності є тотожностями:

1) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},$

2) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x},$

3) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4},$

4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x},$

5) $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2},$

6) $\arccos x - \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \pi,$

7) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2},$

8) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = -\pi,$

9) $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right),$

10) $2 \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\cos^2 x - 1.$

5. З'ясувати, чи існують проміжки, в яких дані функції є сталими, і знайти значення цих сталих:

1) $\cos(\pi + 3x)\cos 2x - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 3x\right)\sin 2x - 2\sin^2 \dfrac{5}{2}x,$

2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},$

3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2 x,$

4) $\sin^6 x + \cos^6 x - \dfrac{3}{4}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2,$

5) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \dfrac{1-x}{1+x},$

6) $\operatorname{arctg} x - \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},$

7) $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x},$

8) $2 \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2},$

9) $2\arccos x + \arccos(2x^2 - 1)$, 10) $\arccos x + \arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

Приклади розв'язування вправ

1.11. Знайдемо похідну функції $y = \big(2^{2x} - 1\big)\big(2^x - 4\big)^2$:

$$y = \big(2^{2x} - 1\big)'\big(2^x - 4\big)^2 + \big(\big(2^x - 4\big)^2\big)'(2^{2x} - 1\big) =$$

$$= 2^{2x}\ln 2 \cdot 2\big(2^x - 4\big)^2 + 2\big(2^x - 4\big) \cdot 2^x \ln 2\big(2^{2x} - 1\big) =$$

$$= 2^x \ln 4\big(2^x - 4\big)\big(2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1\big).$$

Прирівняємо отриману похідну до нуля:

$$\big(2^x - 4\big)\big(2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1\big) = 0.$$

Тоді $2^x - 4 = 0$ або $2 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$. Звідси отримуємо корені двох рівнянь:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \log_2 \frac{2 + \sqrt{6}}{2} = \log_2(2 + \sqrt{6}) - 1.$$

Відкладемо отримані точки на дійсній осі і дослідимо знак похідної на кожному з трьох отриманих інтервалів (див. рис. 9).

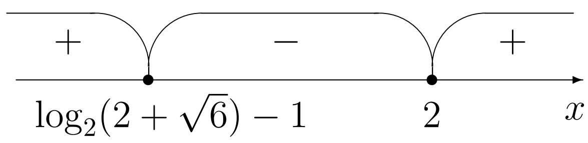

Рис. 9. Дослідження похідної заданої функції в отриманих проміжках

Тоді $y'(x) > 0$ для всіх $x \in (-\infty;\, \log_2(2 + \sqrt{6}) - 1) \cup (2;\, +\infty)$, $y'(x) < 0$ для всіх $x \in (\log_2(2 + \sqrt{6}) - 1;\, 2)$.

Отже, функція $y = \big(2^{2x}-1\big)\big(2^x-4\big)^2$ є монотонно зростаючою на кожному з проміжків $(-\infty;\, \log_2(2 + \sqrt{6}) - 1)$ і $(2;\, +\infty)$ та монотонно спадною на проміжку $(\log_2(2 + \sqrt{6}) - 1;\, 2)$. ▶

3.6. Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3}$, де $x \in \big(0;\, \frac{\pi}{2}\big)$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0, \quad \forall x \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, функція $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3}$ зростає на проміжку $\left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для довільного $x \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$ або $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$. ▶

4.8. Розглянемо функцію $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, яка визначена при $x \in \mathbb{R}$. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}\left(1 + \frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right).$$

Зауважимо, що функція має скінченну похідну у всіх точках області визначення, крім $x = \pm 1$. Крім того,

$$f(1) = \pi, \quad f(-1) = -\pi.$$

При $x \in (-\infty;\, -1) \cup (1;\, +\infty)$ $f'(x) = 0$, тому на кожному з проміжків функція $f(x)$ є сталою. Якщо $x = -\sqrt{3}$, то $f(-\sqrt{3}) = -\pi$. Нехай тепер $x = \sqrt{3}$, тоді $f(\sqrt{3}) = \pi$.

Отже,

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -\pi, \quad \forall x \in (-\infty;\, -1),$$

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \quad \forall x \in (1;\, +\infty). \quad ▶$$

§ 4.3. Екстремум функції в точці. Достатні умови

Точка x_0 називається точкою ***локального максимуму (мінімуму)*** функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл цієї точки $U(x_0)$, що

$$(\forall x \in U(x_0)): \quad \{f(x) \le f(x_0)\} \quad (\{f(x) \ge f(x_0)\}).$$

Точки максимуму і мінімуму функції називаються ***точками екстремуму функції***.

Необхідна умова екстремуму. В точках, підозрілих на екстремум, похідна функції $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких похідна рівна нулю або не існує, називаються ***критичними***. Точки, в яких похідна рівна нулю, називаються ***стаціонарними***.

***Достатні умови екстремуму*.** **1)** Якщо функція $f(x)$ диференційовна в околі $U(x_0)$ і при переході через точку x_0 її похідна $f'(x)$ змінює знак, тобто $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для $x < x_0$ в межах околу $U(x_0)$ і $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ для $x > x_0$ в межах околу $U(x_0)$, то x_0 є точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$.

2) Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна в околі $U(x_0)$ і $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$; якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$.

3) Нехай функція $f(x)$ є n-раз диференційовною в околі $U(x_0)$ і $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, але $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Якщо число n є парним, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ точка x_0 є точкою локального максимуму, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ точка x_0 є точкою локального мінімуму. Якщо число n є непарним, то екстремуму в точці x_0 не існує.

Зауважимо, що друга і третя умова екстремуму застосовна лише до дослідження стаціонарних точок.

Вправи

1. Дослідити на екстремум наступні функції:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$,

2) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$,

3) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$,

4) $y = x\sqrt[3]{x-1}$,

5) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 2}$,

6) $y = e^x + e^{-x}$,

7) $y = \sqrt{x} + \ln x$,

8) $y = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$,

9) $y = x - \arcsin x$,

10) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$,

11) $y = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$, 12) $y = |x|e^{-|x-1|}$,

13) $y = e^x \cos x$, 14) $y = x^2 e^{-x^2}$,

15) $y = \log_5^3 x - 6\log_5^2 x - 15\log_5 x$, 16) $y = 2x + \arccos\dfrac{x}{2}$,

17) $y = \log_2 x + \log_x 2$, 18) $y = 3^{3x} - 15\cdot 3^{2x} + 27\cdot 3^x$,

19) $y = |x^2 - 4x - 12|$, 20) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x} - \dfrac{9}{8x}$.

2. Довести наступні нерівності:

1) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$, 2) $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \le 3$,

3) $\dfrac{7}{23} \le \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2} \le 1$, 4) $\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

5) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \le \sin^3 x - \sin x \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, 6) $1 \le \sin^2 2x - 2\sin^2 x + 3 \le \dfrac{13}{4}$,

7) $2^{\frac{1-n}{n}} \le \dfrac{\sqrt[n]{x^n+a^n}}{x+a} < 1,\ \ x>0,\ a>0,\ n\in\mathbb{N}$, 8) $-\dfrac{1}{4} \le \dfrac{\cos 2x}{1+3\sin^2 x} \le 1$,

9) $\dfrac{1}{2^{n-1}} \le \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \le 1,\ \ n\in\mathbb{N}$, 10) $\dfrac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \le 1$.

3. Знайти критичні точки функцій:

1) $y = (x-1)^2(x-2)(x-3)^3$, 2) $y = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$,

3) $y = \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-3}{2}$, 4) $y = (x^2-8)e^{-x}$,

5) $y = e^x + 2\cos x + e^{-x}$, 6) $y = \dfrac{x^3+2x^2+4x+4}{e^x}$,

7) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$, 8) $y = \sin 2x + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$,

9) $y = \ln(x^2+1) - 2\,\mathrm{arctg}\,x$, 10) $y = |x^2 - 7x + 10|$.

4. Знайти всі значення змінної x, при яких свого найбільшого значення набуває функція

1) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$, 2) $y = xe^{2+x-x^2}$,

3) $y = 4 + \sin^2 2x - 2\sin^2 x$, 4) $y = \sin 6x - \sqrt{3}\cos 6x$,

5) $y = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{2}\sin x\right)$, 6) $y = \arcsin(\sin^2 x)$,

7) $y = \arcsin\dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$, 8) $y = \arccos\dfrac{2|x|}{1+x^2}$.

5. Знайти всі значення змінної x, при яких свого найменшого значення набуває функція

1) $y = 5x + e^{-2x}$, 2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 - x - x^2)$,

3) $y = 2x\ln x - x\ln 49$, 4) $y = 9^x - 2\cdot 3^x - 3$,

5) $y = 2\cos x + \dfrac{1}{2\cos x}$, $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, 6) $y = \dfrac{4(2-\cos x)}{\sin x}$, $x \in \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Приклади розв'язування вправ

1.15. Областю визначення даної функції є множина значень $x \in (0;\ +\infty)$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(\log_5^3 x - 6\log_5^2 x - 15\log_5 x\right)' = 3\log_5^2 x\cdot\frac{1}{x\ln 5} - 12\log_5 x\cdot\frac{1}{x\ln 5} - \frac{15}{x\ln 5} =$$

$$= \frac{3}{x\ln 5}(\log_5^2 x - 4\log_5 x - 5).$$

Прирівнявши похідну до нуля, знайдемо точки, підозрілі на екстремум:

$$\frac{3}{x\ln 5}(\log_5^2 x - 4\log_5 x - 5) = 0,$$

звідси

$$\log_5^2 x - 4\log_5 x - 5 = 0.$$

Ввівши заміну $\log_5 x = t$, отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 4t - 5 = 0$. Отже, $t_1 = 5$ або $t_2 = -1$, звідки $x_1 = 3125$ або $x_2 = \dfrac{1}{5}$.

Для дослідження функції на екстремум використаємо першу достатню умову. Для цього відкладемо знайдені точки на дійсній осі і дослідимо першу похідну функції всередині отриманих проміжків (рис. 10).

При $x \in \left(0;\ \frac{1}{5}\right) \cup (3125;\ +\infty)$ похідна функції $y'(x) > 0$, при $x \in \left(\frac{1}{5};\ 3125\right)$ похідна функції $y'(x) < 0$.

Рис. 10. Дослідження похідної функції $y = \log_5^3 x - 6\log_5^2 x - 15\log_5 x$

Отже, $x = 3125$ є точкою локального мінімуму і $y_{\min} = y(3125) = -40$, $x = \frac{1}{5}$ є точкою локального максимуму і $y_{\max} = y\left(\frac{1}{5}\right) = 8$. ▶

2.3. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}$, визначену і неперервну при $x \in \mathbb{R}$ і знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2}\right)' = \frac{(4x+1)(3x^2 - x + 2) - (6x-1)(2x^2 + x + 1)}{(3x^2 - x + 2)^2} =$$

$$= \frac{12x^3 - 4x^2 + 8x + 3x^2 - x + 2 - 12x^3 - 6x^2 - 6x + 2x^2 + x + 1}{(3x^2 - x + 2)^2} =$$

$$= \frac{-5x^2 + 2x + 3}{(3x^2 - x + 2)^2} = -\frac{5x^2 - 2x - 3}{(3x^2 - x + 2)^2}.$$

Прирівнявши похідну до нуля, знайдемо стаціонарні точки:

$$5x^2 - 2x - 3 = 0,$$

звідки $x_1 = 1$ або $x_2 = -\dfrac{3}{5}$.

Дослідимо знак похідної на проміжках $\left(-\infty;\ -\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5};\ 1\right)$ і $(1;\ +\infty)$ (див. рис. 11).

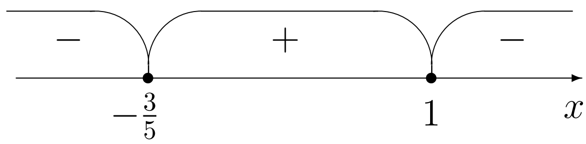

Рис. 11. Дослідження похідної функції $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}$ *в отриманих проміжках*

Тоді

$$y_{\min} = y\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{23}, \quad y_{\max} = y(1) = 1.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}=\dfrac{2}{3}$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}=\dfrac{2}{3}$, отримаємо, що

$$\frac{7}{23}\le\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}\le 1. \quad \blacktriangleright$$

5.5. Знайдемо похідну заданої функції:

$$y'=\left(2\cos x+\frac{1}{2\cos x}\right)'=-2\sin x+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}.$$

Прирівнявши її до нуля, знайдемо критичні точки:

$$-2\sin x+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\sin x(1-4\cos^2 x)}{2\cos^2 x}=0.$$

Звідси $\sin x=0$ або $1-4\cos^2 x=0$. Отже, $x=\pi n$ або $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Із зліченної кількості критичних точок виберемо $x=\frac{\pi}{4}\in\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ і дослідимо знак похідної в околі вибраної точки. Тоді при $x\in\left(0;\,\frac{\pi}{4}\right)$ похідна функції $y'(x)<0$, а при $x\in\left(\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{2}\right)$ похідна функції $y'(x)>0$.

Отже, $y_{\min}=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, а значення змінної x, при якому дана функція набуває свого найменшого значення в проміжку $\left(0;\,\frac{\pi}{2}\right)$ рівне $\dfrac{\pi}{4}$. ▶

§ 4.4. Екстремум функції на відрізку. Задачі на найбільше і найменше значення

Максимум та мінімум функції на відрізку називається відповідно ***найбільшим і найменшим значенням*** функції на цьому відрізку.

Якщо $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;\,b]$, то свого найбільшого і найменшого значення функція досягає або в критичних точках, або на кінцях відрізка.

Для відшукання найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a;\,b]$, використовують такий алгоритм:

1) знаходять похідну функції $f(x)$;

2) прирівнявши похідну до нуля, шукають критичні точки, що належать відрізку $[a;\,b]$;

3) обчислюють значення функції $f(x)$ в цих критичних точках;

4) обчислюють значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка $[a;\, b]$;

5) серед знайдених значень функції вибирають максимальне $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ та мінімальне $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ значення функції $f(x)$ на даному відрізку.

Зауважимо, що цей алгоритм не застосовний в тому випадку, коли кількість критичних точок на $[a,b]$ є нескінченною.

Вправи

1. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

1) $y = 3x^2 - 5x + 1, \quad x \in [0;\, 4],$

2) $y = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in [0{,}01;\, 100],$

3) $y = 3^x, \quad x \in [-2;\, 6],$

4) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}, \quad x \in [0;\, 1],$

5) $y = x^2 - 4x + 6, \quad x \in [-3;\, 10],$

6) $y = |x^2 - 5x + 6|, \quad x \in [-1;\, 4],$

7) $y = \sqrt{5 - 4x}, \quad x \in [-1;\, 1],$

8) $y = x + 2\sqrt{x}, \quad x \in [0;\, 4],$

9) $y = \sin 2x - x, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right],$

10) $y = |x^2 - x - 6| - x^3, \quad x \in [-6;\, 6],$

11) $y = \operatorname{tg}^2 x + 16\cos^2 x, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\, \dfrac{\pi}{2}\right],$

12) $y = \dfrac{|x-1| - 1}{x^2 - 4}, \quad x \in [-1;\, 1],$

13) $y = 15 - 3\cos x + \cos 3x, \quad x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{2}\right],$

14) $y = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + \cos x, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\, \pi\right],$

15) $y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|, \quad x \in \left[-\dfrac{3}{2};\, \dfrac{5}{2}\right],$

16) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{\ln 3}, \quad x \in [-2;\ 1],$

17) $y = 2 \cdot 2^{3x} - 15 \cdot 2^{2x} + 24 \cdot 2^x, \quad x \in [-2;\ 2],$

18) $y = \dfrac{(x+4)^2}{x-3}, \quad x \in [-7;\ 1],$

19) $y = 1 + 4\sin x - 2x, \quad x \in [0;\ \pi],$

20) $y = ||x^2 - 4| - 5|, \quad x \in [-4;\ 4].$

2. Довести, що якщо $x+y+z = \pi$, $(x, y, z \neq 0)$, то справджуються наступні нерівності:

1) $\cos x + \cos y + \cos z \leq \dfrac{3}{2}$, 2) $\sin x + \sin y + \sin z \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z \geq 3\sqrt{3}$, 4) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z \geq \sqrt{3}$,

5) $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, 6) $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq \dfrac{1}{8}$,

7) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z \geq 3\sqrt{3}$, 8) $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$,

9) $\sin \dfrac{x}{x} \cdot \sin \dfrac{y}{2} \cdot \sin \dfrac{z}{2} \leq \dfrac{1}{8}$, 10) $\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \dfrac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \dfrac{z}{2} \geq 1.$

3. Розв'язати задачі на відшукання найбільшого і найменшого значень.

1) Знайти найменше значення суми m-го та n-го степеня $(m > 0,\ \ n > 0)$ двох додатних чисел, добуток яких є сталою величиною, рівною p.

2) Знайти найбільше значення добутку m-го та n-го степеня $(m>0,\ n>0)$ двох додатних чисел, сума яких є сталою величиною, рівною s.

3) Знайти найбільшу відстань від точки $A(2;\ 0)$ до точки графіка функції $y = \sqrt{12 + 5x - 2x^2}$.

4) У площині xOy дано точки $A(0;\ 3)$ та $B(4;\ 5)$. На осі Ox знайти точку C таку, щоб периметр $\triangle\, ABC$ був найменшим.

5) Серед рівнобедрених трикутників з бічною стороною a вказати трикутник найбільшої площі.

6) З усіх прямокутників площі S знайти той, периметр якого є найменшим.

7) В трикутник з основою b і висотою h вписати прямокутник з найбільшою площею.

8) У еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вписати прямокутник зі сторонами, паралельними осі еліпса, площа якого є найбільшою.

9) Знайти найменшу і найбільшу відстань від точки $A(2;\,0)$ до кола $x^2 + y^2 = 1$.

10) На координатній площині дано точки $A(3;\,-4)$ та $B(4;\,-2)$. Точка C лежить на колі $x^2 + y^2 = \dfrac{16}{5}$. Знайти координати точки C, щоб площа $\triangle ABC$ була найменшою.

11) Закон руху тіла описується співвідношенням $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}5t^3$. В який момент часу тіло матиме найбільшу швидкість?

12) В початковий момент часу починають рухатись дві точки: одна по осі Ox за законом $x(t) = t - 2$, а друга рухається по осі Oy за законом $y(t) = \sqrt{2t^4 - 4t^3 + t^2 + 4t}$. Знайти найбільшу і найменшу відстань між точками за час $t \in [0;\,2]$.

13) Є прямокутний лист жесті розміром 50×80 см. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати і роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість утвореної коробки?

14) З круга радіуса R вирізано сектор, з якого склеєно лійку у формі конуса. Який найбільший об'єм може мати утворена лійка?

15) Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом V, щоб на облицювання його стін і дна затратити якнайменше матеріалу.

16) У півкулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед з квадратною основою найбільшого об'єму.

17) В кулю радіуса R вписати циліндр найбільшого об'єму.

18) В кулю радіуса R вписати циліндр з найбільшою повною поверхнею.

19) Навколо даної кулі радіуса R описати конус найменшого об'єму.

20) Знайти найбільший об'єм конуса з даною твірною l.

Приклади розв'язування вправ

1.13. Використовуючи наведений алгоритм, спочатку знайдемо похідну функції $y = 15 - 3\cos x + \cos 3x$:

$$y' = 3\sin x - 3\sin 3x = -6\sin x \cdot \cos 2x.$$

Тоді з рівняння $\sin x \cdot \cos 2x = 0$ знаходимо критичні точки:

$$x = \pi n, \quad \text{або} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad \text{де } n \in \mathbb{Z}.$$

Серед знайдених точок вибираємо лише ті, які належать відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тобто $x = \frac{\pi}{4}$.

Обчислимо значення функції в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$ і $x_3 = \frac{\pi}{2}$:

$$y(x_1) = y(0) = 13, \quad y(x_2) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15 - 2\sqrt{2}, \quad y(x_3) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 15.$$

Отже,

$$\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 15 - 2\sqrt{2},$$

$$\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 15. \quad \blacktriangleright$$

2.6. Задачі на доведення нерівностей тісно пов'язані із задачами на відшукання найбільшого і найменшого значень певних функцій. Розглянемо функцію $f(x, y, z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$, де $x + y + z = \pi$. Тоді $z = \pi - y - x$, $\cos z = \cos(\pi - y - x) = -\cos(x + y)$. Звідси

$$F(x, y) = f(x, y, \pi - y - x) = -\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y).$$

Зафіксуємо змінну y і дослідимо на екстремум неперервну і диференційовну функцію $g(x) = -\cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$:

$$g'(x) = \big(\sin x \cdot \cos(x + y) + \sin(x + y) \cdot \cos x\big) \cos y = \cos y \cdot \sin(2x + y).$$

Прирівнявши $g'(x)$ до нуля, отримаємо критичні точки $x = \frac{\pi n}{2} - \frac{y}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Умову задачі задовольняє лише одна точка $x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}$.

Якщо $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$, то $g'(x) > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2};\ \pi\right)$, то $g'(x) < 0$. Отже, $x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}$ є точкою максимуму функції $g(x)$, причому

$$g_{\max} = g\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) = \sin^2\frac{y}{2}\cdot\cos y.$$

Дослідимо тепер на екстремум функцію $h(y) = g_{\max} = \sin^2\frac{y}{2}\cdot\cos y$:

$$h'(y) = \sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\cdot\cos y - \sin^2\frac{y}{2}\cdot\sin y = \sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{3y}{2}.$$

Прирівнявши $h'(y)$ до нуля, отримаємо критичні точки $y = 2\pi n$, і $y = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Умову задачі задовольняє лише одна критична точка $y = \frac{\pi}{3}$. Оскільки $h'(y) > 0$ для $y \in \left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$ і $h'(y) < 0$, якщо $y \in \left(\frac{\pi}{3};\ \pi\right)$, то $y = \frac{\pi}{3}$ – точка максимуму функції, причому $h_{\max} = h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Якщо $y = \frac{\pi}{3}$, то $x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} = \frac{\pi}{3}$ і $z = \pi - (x+y) = \frac{\pi}{3}$. Тоді

$$f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

Отже, якщо $x + y + z = \pi$, то

$$\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z \le \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleright$$

3.9. Нехай $B(x;\ y)$ – довільна точка, яка лежить на колі $x^2 + y^2 = 1$. Тоді $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Відомо, що відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ обчислюється за формулою $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Знайдемо довжину відрізка AB в нашому випадку:

$$g(x) = |AB| = \sqrt{(x-2)^2 + 1 - x^2} = \sqrt{-4x + 5}.$$

Дослідимо функцію $g(x)$ на екстремум, знайшовши її похідну:

$$g'(x) = -\frac{2}{\sqrt{-4x+5}},$$

де $x \in [-1;\ 1]$.

Оскільки критичних точок всередині відрізка $[-1;\,1]$ немає, то обчислюємо значення функції $g(x)$ на кінцях відрізка. Отже,

$$\max_{x\in[-1;\,1]} g(x) = 3, \qquad \min_{x\in[-1;\,1]} g(x) = 1,$$

тобто найбільша відстань від точки $A(2;\,0)$ до кола $x^2 + y^2 = 1$ рівна 3, а найменша – рівна 1. ▶

§ 4.5. Опуклі функції та точки перегину

Функція $f(x)$, яка визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, називається ***опуклою вниз (вгору)*** на проміжку $(a;\,b)$, якщо $(\forall x_1, x_2 :\ x_1 < x_2)$ графік функції $f(x)$ на відрізку $[a;\,b]$ лежить не вище (не нижче) хорди AB, де $A(x_1;\,f(x_1))$, $B(x_2;\,f(x_2))$, тобто виконуються нерівності:

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$\left(f(x) \ge \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \right).$$

Проміжком опуклості функції $f(x)$ називається такий проміжок $(a;\,b)$, в якому функція $f(x)$ опукла вниз або вгору, але $f(x)$ не є опуклою вниз або вгору на більшому проміжку $(c;\,d) \supset (a;\,b)$.

Точкою перегину функції $f(x)$ називається така точка x_0, зліва і справа від якої функція $f(x)$ опукла в різних напрямках (зліва – вверх, справа – вниз, або навпаки).

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;\,b]$ та диференційовною на інтервалі $(a;\,b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на $[a;\,b]$ тоді і тільки тоді, коли:

1) $f'(x)$ не спадає (не зростає) на $(a;\,b)$,

2) графік функції лежить не нижче (не вище) будь-якої дотичної до цього графіка.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;\, b]$ та двічі диференційовною на інтервалі $(a;\, b)$, то вона є опуклою вниз (вгору) на $[a;\, b]$ тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ на $(a;\, b)$.

Необхідна умова існування точки перегину. Якщо x_0 – точка перегину функції $f(x)$ та існує $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

Достатня умова існування точки перегину. Якщо $f''(x_0) = 0$ і $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

Вправи

1. Знайти проміжки опуклості та точки перегину даних функцій:

1) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$, 2) $y = 6x^2 - x^3$,

3) $y = x + \sin x$, 4) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$,

5) $y = (1 + x^2)e^x$, 6) $y = x^2 \ln x$,

7) $y = 2x^2 + \ln x$, 8) $y = \sqrt[3]{(x+5)^2} - \sqrt[3]{(x-5)^2}$,

9) $y = \cos^3 x - \sin^3 x$, 10) $y = \cos x + 4\sin\dfrac{x}{2}$,

11) $y = \cos x \cdot \sin^2 x$, 12) $y = \sin x \cdot \cos^2 x$,

13) $y = \dfrac{x^3}{(x+2)^2}$, 14) $y = \dfrac{x^4}{x^3+1}$,

15) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, 16) $y = \arccos\dfrac{1}{x}$,

17) $y = \ln(1 + x^2)$, 18) $y = x\sin(\ln x)$,

19) $y = 2x + 4\operatorname{arcctg} x$, 20) $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

2. Дослідити на опуклість параметрично задані функції:

1) $x = te^t, \quad y = te^{-t}, \quad |t| < 1,2$,

2) $x = \dfrac{t^2}{t-1}, \quad y = \dfrac{t^3}{t-1}, \quad t < 1,$

3) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0;\, 2\pi], \quad a, b > 0,$

4) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad t \in [0;\, 2\pi], \quad a > 0,$

5) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$

6) $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad t \in \mathbb{R},$

7) $x = a\,\mathrm{ch}\, t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\, t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0.$

3. Довести нерівності:

1) $e^{\frac{a+b}{2}} \le \dfrac{e^a + e^b}{2}, \quad a, b \in \mathbb{R},$

2) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \le \dfrac{1}{2}\Big(a^4 + b^4\Big), \quad a \ge 0,\ b \ge 0,$

3) $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2} \le a\ln a + b\ln b, \quad a, b > 0,$

4) $\operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b), \quad 0 < a < b < +\infty,$

5) $\operatorname{arcctg}\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{1}{2}(\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg} b), \quad -\infty < a < b < 0,$

6) $\lg\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{1}{2}(\lg a + \lg b), \quad 0 < a < b < +\infty,$

7) $\arcsin\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{1}{2}(\arcsin a + \arcsin b), \quad -1 < a < b < 0,$

8) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^\alpha \le \dfrac{1}{2}\Big(a^\alpha + b^\alpha\Big), \quad a \ge 0,\ b \ge 0,\ \alpha \ge 1,$

9) $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} > \dfrac{1}{2}\big(\sqrt{a} + \sqrt{b}\big), \quad 0 < a < b < +\infty,$

10) $\operatorname{ctg}\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{1}{2}\big(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b\big), \quad 0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}.$

Приклади розв'язування вправ

1.15. Областю визначення функції $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ є множина

$$D(y) = \{x : \; x \in [-1;\, 0) \cup (0;\, 1]\}.$$

Знайдемо другу похідну:

$$y' = \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' =$$

$$= x^2 \cdot \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Якщо $x \in [-1;\, 0)$, то $y''(x) > 0$; якщо $x \in (0;\, 1]$, то $y''(x) < 0$. Отже, функція є опуклою вниз для $x \in [-1;\, 0)$, і є опуклою вверх для $x \in (0;\, 1]$. ►

2.4. Оскільки для довільного $t \in [0;\, 2\pi]$ маємо

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t \cdot \cos t,$$

то $x'(t) = 0$ на множині $\left\{0;\, \dfrac{\pi}{2};\, \pi;\, \dfrac{3\pi}{2};\, 2\pi\right\}$. Отже, параметрично задана функція є диференційовною у кожному з інтервалів $\left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\, \pi\right)$, $\left(\pi;\, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2};\, 2\pi\right)$, і $y'(x) = -\operatorname{tg} t$.

Тоді

$$y''(x) = \frac{\big(y'(x)\big)'_t}{x'(t)} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{1}{\cos^4 t \cdot \sin t}.$$

За умовою задачі $a > 0$, тоді:

а) $y''(x) < 0$ у випадку, коли $\sin t < 0$, тобто для $t \in \left(\pi;\, \dfrac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2};\, 2\pi\right)$. Отже, функція опукла вгору на кожному з інтервалів $\left(\pi;\, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2};\, 2\pi\right)$;

б) $y''(x) > 0$ у випадку, коли $\sin t > 0$, тобто для $t \in \left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2};\, \pi\right)$. Отже, функція опукла вниз на кожному з інтервалів $\left(0;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\, \pi\right)$.

Точок перегину для даної функції не існує. ►

3.4. Розглянемо функцію $y = \operatorname{arctg} x$ і знайдемо для неї другу похідну:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Отже, функція є опуклою вгору для $x \in (0; +\infty)$. Тоді за означенням опуклої вгору функції позначимо $x_1 = a$, $x_2 = b$, де $0 < x_1 < x_2 < +\infty$. Отже, нерівності

$$\operatorname{arctg} x > \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \operatorname{arctg} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \operatorname{arctg} x_2$$

відповідатиме нерівність

$$\operatorname{arctg} x > \frac{b - x}{b - a} \operatorname{arctg} a + \frac{x - a}{b - a} \operatorname{arctg} b.$$

Якщо $x = \dfrac{a+b}{2}$, то

$$\operatorname{arctg} \frac{a+b}{2} > \frac{1}{2} \operatorname{arctg} a + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b,$$

де $0 < a < b < +\infty$. ▶

§4.6. Дослідження функцій і побудова їх графіків

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Розрізняють вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.

Вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

Горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма $y = b$, якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$, то $y = b_1$ називається ***правосторонньою горизонтальною асимптотою***. Якщо $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_2$, то $y = b_2$ називається ***лівосторонньою горизонтальною асимптотою***. Якщо $b_1 = b_2 = b$, то $y = b$ буде горизонтальною асимптотою.

Похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) називається пряма $y = k_1x + b_1$ ($y = k_2x + b_2$), якщо існують границі

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_1x) = b_1$$

$$\Big(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_2x) = b_2\Big).$$

Тоді пряма $y = k_1x + b_1$ є правою похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, а пряма $y = k_2x + b_2$ є лівою похилою асимптотою.

Зауважимо, що якщо крива має правосторонню горизонтальну асимптоту, то правосторонньої похилої не існує і навпаки. Аналогічна ситуація з лівосторонніми асимптотами.

Дослідження і побудова графіка функції $y = f(x)$ проводиться за таким алгоритмом:

1) визначають область визначення функції, точки розриву і точки перетину з осями координат;

2) досліджують функцію на періодичність, парність;

3) знаходять асимптоти графіка функції;

4) досліджують функцію на монотонність та екстремум;

5) знаходять проміжки опуклості функції та точки перегину;

6) за необхідності знаходять додаткові точки, що належать графіку функції;

7) після виконання дослідження будують графік функції.

Вправи

1. Знайти асимптоти графіків функцій:

1) $y = \dfrac{1}{9 - x^2}$, 2) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$,

3) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 4}$, 4) $y = \dfrac{\ln x}{x}$,

5) $y = \dfrac{3x + 1}{9 + x^2}$, 6) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x-3}$,

7) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, 8) $y = x - 3 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$,

9) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2+4x+2}}{x^2-1}$, 10) $y = \operatorname{arctg}(x^2-1)$,

11) $y = \sqrt{x^2-3}$, 12 $y = e^{\frac{1}{x}}$,

13) $y = \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-x}$, 14) $y = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$,

15) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, 16) $y = \dfrac{1}{x \ln x}$,

17) $y = 2x + 4 \operatorname{arcctg} x$, 18) $y = e^{-x^2} + 1$,

19) $y = 4x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4}$, 20) $y = \dfrac{2x^2|x|+1}{x|x|}$.

2. Провести повне дослідження і побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = 3x - x^3$, 2) $y = 1 + \dfrac{4x+1}{x^2}$,

3) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$, 4) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$,

5) $y = \dfrac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}$, 6) $y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$,

7) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, 8) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

9) $y = \sqrt{\dfrac{x^3-2}{3x}}$, 10) $y = x + e^{-x}$,

11) $y = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{10}{3x^2} + \dfrac{1}{1-x}$, 12) $y = (x-3)\sqrt{x}$,

13) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, 14) $y = \ln \cos x$,

15) $y = x\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}$, 16) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$,

17) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$, 18) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

19) $y = \ln(x^2-1)$, 20) $y = 2^{x(x-2)}$,

21) $y = \dfrac{4|x|}{(x+1)^2}$, 22) $y = \dfrac{e^x}{1+x}$,

23) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, 24) $y = \cos x - \ln \cos x$,

25) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, 26) $y = \sin x \cdot \sin 3x$,

27) $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 28) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$,

29) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 30) $y = x + \operatorname{arctg} x$.

Приклади розв'язування вправ

1.8. Областю визначення функції $y = x - 3 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$ є вся множина дійсних чисел. Отже, вертикальних асимптот для графіка функції не існує.

Шукаємо горизонтальні асимптоти:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \left|\begin{matrix} x = -t \\ t \to +\infty \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-3 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}} - t\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-3 + \frac{t^2 - t\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-3 + \frac{t^4 - t^4 - 4t^2}{\sqrt{t^2+4}(t^2 + t\sqrt{t^2+4})}\right) = -3.$$

Отже, лівосторонньою горизонтальною асимптотою є пряма $y = -3$, правосторонньої горизонтальної асимптоти немає.

Права похила асимптота матиме вигляд $y = k_2 x + b_2$, де

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x} + \frac{x^2}{x\sqrt{x^2+4}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = 2,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-(x+3)\sqrt{x^2+4} + x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4 - (x+3)^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}\big(x^2 + (x+3)\sqrt{x^2+4}\big)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^3 - 13x^2 - 24x - 36}{\sqrt{x^2+4}\big(x^2 + (x+3)\sqrt{x^2+4}\big)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6 - \frac{13}{x} - \frac{24}{x^2} - \frac{36}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\left(1 + \left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)} = -3.$$

Отже, при $x \to +\infty$ графік даної функції має похилу асимптоту, що описується рівнянням $y = 2x - 3$. ▶

2.8. Досліджуємо функцію $y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$, дотримуючись наведеного алгоритму.

1) Областю визначення даної функції є множина

$$D(y) = \{x: \ x \in (-\infty; -1) \cup (-1;\, 1) \cup (1; +\infty)\}.$$

Знайдемо точки перетину з осями координат. Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Отже, графік функції проходить через початок координат.

2) Функція $y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$ є неперіодичною, бо областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім чисел ± 1.

Область визначення симетрична відносно нуля, однак

$$y(-x) = -\frac{x}{(1-x)(1+x)^2}.$$

Отже, функція є ні парною, ні непарною.

3) Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+0} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = -\infty.$$

Отже, $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти.

Оскільки

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+x)(1-x)^2} = 0,$$

то $y = 0$ є горизонтальною асимптотою.

4) Знаходимо похідну першого порядку для заданої функції:

$$y' = \left(\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}\right)' = \frac{(1+x)(1-x)^2 - x\big((1-x)^2 - 2(1-x^2)\big)}{(1+x)^2(1-x)^4} =$$

$$= \frac{1 - x^2 - x(1 - x - 2 - 2x)}{(1+x)^2(1-x)^3} = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3}.$$

Оскільки $2x^2 + x + 1 \neq 0$, то точок екстремуму для даної функції не існує.

Досліджуємо функцію на монотонність: якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (-1;\, 1)$, то $y'(x) > 0$; якщо $x \in (1; +\infty)$, то $y'(x) < 0$. Отже, при $x \in (-\infty; -1)$ та $x \in (-1;\, 1)$ функція зростає, при $x \in (1; +\infty)$ функція спадає.

Побудуємо графік функції на основі вже проведених досліджень без відшукання точок перегину та проміжків опуклості графіка функції (див. рис. 12).

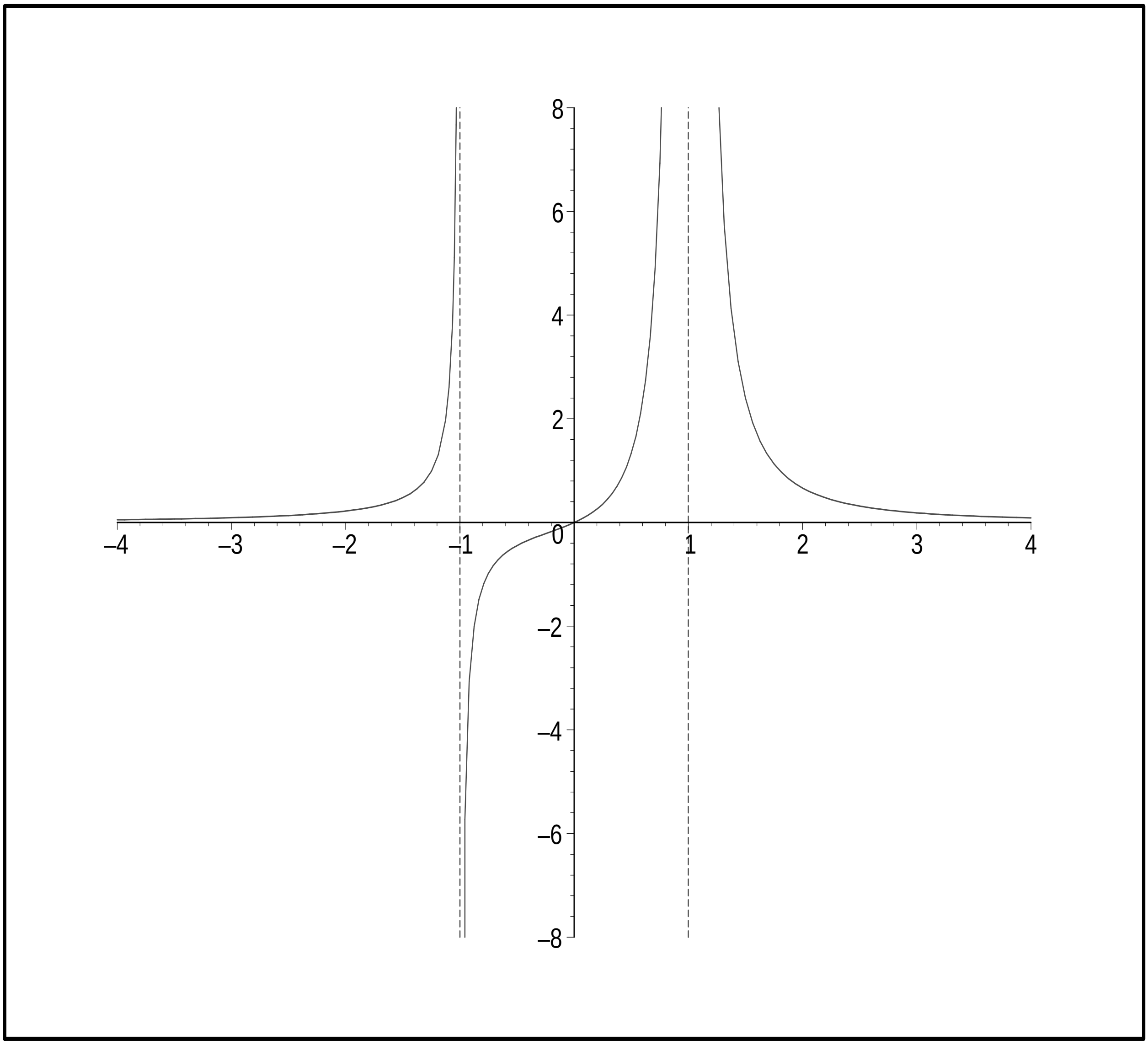

Рис. 12. Графік функції $f(x) = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$

.

Індивідуальні завдання до розділу IV

Задача 1. Побудувати графіки функцій за допомогою похідної першого порядку:

1.1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9.$ 1.2. $y = 3x - x^3.$

1.3. $y = x^2(x-2)^2.$ 1.4. $y = \dfrac{x^3 - 9x^2}{4} + 6x - 9.$

1.5. $y = 2 - 3x^2 - x^3.$ 1.6. $y = (x+1)^2(x-1)^2.$

1.7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4.$ 1.8. $y = 3x^2 - 2 - x^3.$

1.9. $y = (x-1)^2(x-3)^2.$ 1.10. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2}{4} - 5.$

1.11. $y = 6x - 8x^3.$ 1.12. $y = 16x^2(x-1)^2.$

1.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5.$ 1.14. $y = 2 - 12x^2 - 8x^3.$

1.15. $y = (2x+1)^2(2x-1)^2.$ 1.16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x.$

1.17. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2.$ 1.18. $y = (2x-1)^2(2x-3)^2.$

1.19. $y = \dfrac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4.$ 1.20. $y = \dfrac{x(12 - x^2)}{8}.$

1.21. $y = \dfrac{x^2(x-1)^2}{16}.$ 1.22. $y = \dfrac{27(x^3 + x^2)}{4} - 5.$

1.23. $y = \dfrac{16 - 6x^2 - x^3}{8}.$ 1.24. $y = -\dfrac{(x^2 - 4)^2}{16}.$

1.25. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9.$ 1.26. $y = \dfrac{6x^2 - x^3 - 16}{8}.$

1.27. $y = -\dfrac{(x-2)^2(x-6)^2}{16}.$ 1.28. $y = 16x^3 - 12x^2 - 4.$

1.29. $y = \dfrac{11 + 9x - 3x^2 - x^3}{8}.$ 1.30. $y = -\dfrac{(x+1)^2(x-3)^2}{16}.$

Задача 2. Побудувати графіки ірраціональних функцій за допомогою похідної першого порядку:

2.1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$ 2.2. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

2.3. $y = \dfrac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2 + 8}.$ 2.4. $y = -\dfrac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}.$

2.5. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}.$ 2.6. $y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}.$

2.7. $y = \dfrac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{x^2-2x+9}$.

2.8. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2+4x+3}$.

2.9. $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6$.

2.10. $y = \dfrac{6\sqrt[3]{6x^2}}{x^2+4x+12}$.

2.11. $y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

2.12. $y = \dfrac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$.

2.13. $y = \sqrt[3]{x(x+2)}$.

2.14. $y = \sqrt[3]{x^2+4x+3}$.

2.15. $y = -\dfrac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{x^2+6x+17}$.

2.16. $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8$.

2.17. $y = \dfrac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{x^2-6x+17}$.

2.18. $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$.

2.19. $y = 6x - 9 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

2.20. $y = \sqrt[3]{x^2+6x+8}$.

2.21. $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$.

2.22. $y = -\dfrac{3\sqrt[3]{6(x+2)^2}}{x^2+8x+24}$.

2.23. $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$.

2.24. $y = -\dfrac{6\sqrt[3]{6(x-6)^2}}{x^2-8x+24}$.

2.25. $y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x - 6$.

2.26. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2-4x+3}$.

2.27. $y = 8x - 16 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

2.28. $y = \dfrac{6\sqrt[3]{6(x+3)^2}}{x^2+10x+33}$.

2.29. $y = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16$.

2.30. $y = \dfrac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2+2x+9)}$.

Задача 3. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданих відрізках:

3.1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16,\ \ [1,\ 4]$.

3.1. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2},\ \ [1,\ 4]$.

3.3. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1,\ \ [0,\ 6]$.

3.4. $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5},\ \ [-3,\ 3]$.

3.5. $y = 2\sqrt{x} - x,\ \ [0,\ 6]$.

3.6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)},\ [-1, 5]$.

3.7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5,\ \ [1,\ 9]$.

3.8. $y = \dfrac{10x}{1+x^2},\ \ [0,\ 3]$.

3.9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2,\ \ [-3,\ 3]$.

3.10. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59,\ \ [2,\ 4]$.

3.11. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2},\ \ [-1,\ 2]$.

3.12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)},\ \ [-1,\ 6]$.

3.13. $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2},\ \ [1,\ 4]$.

3.14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8,\ \ [-1,\ 7]$.

3.15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1,\ 5]$.

3.16. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$, $[-4,\ 2]$.

3.17. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$, $[-4,\ -1]$.

3.18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $[-2,\ 4]$.

3.19. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, $[1,\ 4]$.

3.20. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $[-5,\ 1]$.

3.21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $[0,\ 4]$.

3.22. $y = x^2 - 2x + \dfrac{16}{x-1} - 13$, $[2,\ 5]$.

3.23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, $[1,\ 5]$.

3.24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $[-3,\ 4]$.

3.25. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$, $[-2,\ 1]$.

3.26. $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15$, $\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right]$.

3.27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$, $[-4, 2]$.

3.28. $y = x^2 + 4x + \dfrac{16}{x+2} - 9$, $[-1,\ 2]$.

3.29. $y = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15$, $\left[-2,\ -\dfrac{1}{2}\right]$.

3.30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, $[-2,\ 5]$.

Задача 4. Дослідити поведінку функцій в околах заданих точок за допомогою похідних вищих порядків:

4.1. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$, $x_0 = 2$.

4.2. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2)$, $x_0 = 2$.

4.3. $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.

4.4. $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$, $x_0 = 0$.

4.5. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$, $x_0 = 1$.

4.6. $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.

4.7. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.

4.8. $y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x+1)$, $x_0 = -1$.

4.9. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$, $x_0 = -2$.

4.10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.

4.11. $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.

4.12. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = 1$.

4.13. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.

4.14. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.

4.15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$, $x_0 = -2$.

4.16. $y = x^2 + 2\ln(x+2),\ \ x_0 = -1.$

4.17. $y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2),\ \ x_0 = 2.$

4.18. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5,\ \ x_0 = 0.$

4.19. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2},\ \ x_0 = 2.$

4.20. $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4,\ \ x_0 = -2.$

4.21. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x,\ \ x_0 = 1.$

4.22. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x,\ \ x_0 = 1.$

4.23. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2,\ \ x_0 = 1.$

4.24. $y = x^2 - 4x + \cos^2(x-2),\ \ x_0 = 2.$

4.25. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x),\ \ x_0 = 0.$

4.26. $y = \sin^2(x-2) - x^2 + 4x - 4,\ \ x_0 = 2.$

4.27. $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16,\ \ x_0 = -1.$

4.28. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x,\ \ x_0 = 0.$

4.29. $y = \sin^2(x-1) - x^2 + 2x,\ \ x_0 = 1.$

4.30. $y = \cos x + \operatorname{ch} x,\ \ x_0 = 0.$

Задача 5. Знайти асимптоти і побудувати графіки функцій:

5.1. $y = \dfrac{17 - x^2}{4x - 5}.$

5.2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}.$

5.3. $y = \dfrac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}.$

5.4. $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x + 8}.$

5.5. $y = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 8x - 2}{2 - 3x^2}.$

5.6. $y = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}.$

5.7. $y = \dfrac{2x^2 - 6}{x - 2}.$

5.8. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}.$

5.9. $y = \dfrac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}.$

5.10. $y = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3x - 2}.$

5.11. $y = \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{9x^2 - 4}}.$

5.12. $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}.$

5.13. $y = \dfrac{3x^2 - 7}{2x + 1}.$

5.14. $y = \dfrac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}.$

5.15. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{2 - 3x^2}.$

5.16. $y = \dfrac{21 - x^2}{7x + 9}.$

5.17. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 2}}$. 5.18. $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{1 - 3x^2}$.

5.19. $y = \dfrac{x^2 - 11}{4x - 3}$. 5.20. $y = \dfrac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

5.21. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$. 5.22. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$.

5.23. $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 1}{2x^2 - 2}$. 5.24. $y = \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$.

5.25. $y = \dfrac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$. 5.26. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$.

5.27. $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x^2 - 3}$. 5.28. $y = \dfrac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$.

5.29. $y = \dfrac{-x^2 - 4x + 13}{4x + 3}$. 5.30. $y = \dfrac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Задача 6. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

6.1. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$. 6.2. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

6.3. $y = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. 6.4. $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$.

6.5. $y = \dfrac{12x}{9 + x^2}$. 6.6. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

6.7. $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2}$. 6.8. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.

6.9. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$. 6.10. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2}$.

6.11. $y = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$. 6.12. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

6.13. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$. 6.14. $y = \dfrac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$.

6.15. $y = \dfrac{-8x}{x^2 + 4}$. 6.16. $y = \left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2$.

6.17. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$. 6.18. $y = \dfrac{4x}{(x + 1)^2}$.

6.19. $y = \dfrac{8(x - 1)}{(x + 1)^2}$. 6.20. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$.

6.21. $y = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$. 6.22. $y = \dfrac{4}{3 + 2x - x^2}$.

6.23. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 7}{x^2 + 2x - 3}$. 6.24. $y = \dfrac{1}{x^4 - 1}$.

6.25. $y=-\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$. 6.26. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$.

6.27. $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$. 6.28. $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$.

6.29. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$. 6.30. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$.

Задача 7. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

7.1. $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$. 7.2. $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

7.3. $y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$. 7.4. $y=(3-x)e^{x-2}$.

7.5. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$. 7.6. $y=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

7.7. $y=(x-2)e^{3-x}$. 7.8. $y=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

7.9. $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$. 7.10. $y=-(2x+1)e^{2(x+1)}$.

7.11. $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$. 7.12. $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$.

7.13. $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$. 7.14. $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x}$.

7.15. $y=2\ln\dfrac{x}{x+1}-1$. 7.16. $y=(4-x)e^{x-3}$.

7.17. $y=\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$. 7.18. $y=2\ln\dfrac{x+3}{x}-3$.

7.19. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$. 7.20. $y=-\dfrac{e^{-(x+2)}}{x+2}$.

7.21. $y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$. 7.22. $y=-(x+1)e^{x+2}$.

7.23. $y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$. 7.24. $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

7.25. $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$. 7.26. $y=-\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

7.27. $y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$. 7.28. $y=(x+4)e^{-(x+3)}$.

7.29. $y=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$. 7.30. $y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$.

Задача 8. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

8.1. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.

8.2. $y=-\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$.

8.3. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$.

8.4. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$.

8.5. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$.

8.6. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$.

8.7. $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.

8.8. $y=\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.

8.9. $y=\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.

8.10. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$.

8.11. $y=\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$.

8.12. $y=\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$.

8.13. $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

8.14. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.

8.15. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

8.16. $y=\sqrt[3]{(x+6)x^2}$.

8.17. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$.

8.18. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

8.19. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$.

8.20. $y=\sqrt[3]{(x-3)x^2}$.

8.21. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

8.22. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.

8.23. $y=\sqrt[3]{(x-6)x^2}$.

8.24. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

8.25. $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

8.26. $y=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

8.27. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+3)^2}$.

8.28. $y=\sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

8.29. $y=\sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

8.30. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Задача 9. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки:

9.1. $y=e^{\sin x+\cos x}$.

9.2. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$.

9.3. $y=\ln(\sin x+\cos x)$.

9.4. $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

9.5. $y=e^{\sqrt{2}\sin x}$.

9.6. $y=\operatorname{arctg}(\sin x)$.

9.7. $y=\ln\left(\sqrt{2}\sin x\right)$.

9.8. $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$.

9.9. $y=e^{\sin x-\cos x}$.

9.10. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}$.

9.11. $y=\ln(\sin x-\cos x)$.

9.12. $y=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$.

9.13. $y = e^{-\sqrt{2}\cos x}$.

9.14. $y = -\operatorname{arctg}(\cos x)$.

9.15. $y = \ln\left(-\sqrt{2}\cos x\right)$.

9.16. $y = \dfrac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

9.17. $y = e^{-\sin x - \cos x}$.

9.18. $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

9.19. $y = \ln(-\sin x - \cos x)$.

9.20. $y = \sqrt{\dfrac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}$.

9.21. $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$.

9.22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$.

9.23. $y = \ln\left(-\sqrt{2}\sin x\right)$.

9.24. $y = \sqrt{\cos x}$.

9.25. $y = e^{\cos x - \sin x}$.

9.26. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$.

9.27. $y = \ln(\cos x - \sin x)$.

9.28. $y = \sqrt{\sin x}$.

9.29. $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$.

9.30. $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}}$.

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.
2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
3. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.
4. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.1. – 462 с.
5. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
6. *Коновалова Н.Р.* Математичний аналіз: приклади і задачі: Навчальний посібник / Н.Р. Коновалова, Т.Г. Стрижак. – К.: Либідь. – 1995. – 240 с.
7. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз / І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук. – К.: Вища школа, 1992. – Ч.1. – 495 с.
8. *Никольський С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольський. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 484 с.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.1. – 680 с.
10. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.1. – 447 с.