МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА

Романишин Р. Я.

МАТЕМАТИКА

ЦІЛІ НЕВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

Навчальний посібник

Івано-Франківськ
2014

УДК 378.14:510.8
ББК 22.128
Р – 64

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(*лист № 1/11-8233 від 30 травня 2014 р.*)

Рецензенти:

Портенко М.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент Національної академії наук України, провідний науковий співробітник інституту математики НАН України (м. Київ);

Артемович О.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Козак М.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих і математичних дисциплін початкового навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка;

Бігун М.І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри менеджменту та освітніх інновацій Івано-Франківського ІППО.

Романишин Р.Я. Математика. Цілі невід’ємні числа: Навчальний посібник / Р. Я. Романишин. – Івано-Франківськ: Симфонія форте, 2014. – 196 с.

Посібник містить матеріал, який вивчається студентами педагогічних спеціальностей на другому курсі. В повному обсязі висвітлені теми, які виносяться на самостійне опрацювання студентів, що сприятиме ефективному їх сприйняттю і опануванню. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується наведенням прикладів та розв’язком задач, які ілюструють типові підходи до вирішення і правильного їх оформлення. Навчальний посібник буде корисним не тільки слухачам денної і заочної форми навчання, а й екстернатної.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА………………………………………………………………**6**

§ 1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ (КІЛЬКІСНА ТЕОРІЯ)..……………………………………………………………**7**

1. Поняття про натуральні, цілі невід'ємні числа і нуль……………**7**
2. Порівняння натуральних чисел за величиною……………………**9**
3. Додавання цілих невід'ємних чисел…………………………...**11**
4. Віднімання цілих невід'ємних чисел…………………………..**14**
5. Множення цілих невід'ємних чисел…………………………...**17**
6. Ділення цілих невід'ємних чисел………………………………**23**
7. ВПРАВИ……………………………………………………...….**28**
8. ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ…………………………………………...**31**
9. ВІДПОВІДІ…………………………………………..………….**35**

§ 2. АКСІОМАТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ (АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ)….**36**

1. Аксіоматичний метод побудови теорії………………………...**36**
2. Аксіоми Пеано………………………………………………….**37**
3. Аксіоматичне означення додавання цілих невід'ємних чисел…**40**
4. Аксіоматичне означення множення цілих невід'ємних чисел…**43**
5. Упорядкованість множини цілих невід'ємних чисел……………**45**
6. Дискретність множини цілих невід'ємних чисел,
   принципи найменшого та найбільшого чисел…………………...**49**
7. Віднімання і ділення цілих невід'ємних чисел…………………..**50**
8. Ділення з остачею на множині цілих невід'ємних чисел………**53**
9. Метод математичної індукції…………………………………..**54**
10. Відрізок натурального ряду…………………………………...**58**

§ 3. НАТУРАЛЬНЕ ЧИСЛО ЯК РЕЗУЛЬТАТ ВИМІРЮВАННЯ ВЕЛИЧИНИ……………………………………………………...…**61**

1. Відрізки та відношення між ними…………………..…………**61**
2. Операції над відрізками………………………………………...**63**

3. Натуральне число як міра відрізка……………………………**65**
4. Додавання і віднімання натуральних чисел,
що розглядаються як міри відрізків…………………………**67**
5. Множення і ділення натуральних чисел,
що розглядаються як міри відрізків……..…………………**69**
6. ВПРАВИ……………………………………………...……**74**

§ 4. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ……………………………………...**75**

1. Поняття про системи числення та їх види………..…………**75**
2. Десяткова система числення……………………………**76**
3. Алгоритми додавання у десятковій системі числення…………..**80**
4. Алгоритми віднімання у десятковій системі числення………...**82**
5. Алгоритми множення у десятковій системі числення………….**84**
6. Алгоритми ділення у десятковій системі числення…...……..…**87**
7. Позиційні системи числення з довільною основою
та запис чисел у них…………………………..…………...**90**
8. Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми
виконання арифметичних операцій над ними
у різних позиційних системах числення……………….…..**93**
9. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі
числення до запису в іншій………………………………....**95**
10. ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ…………………………………...**100**
11. ВІДПОВІДІ..……………………………………..………**110**

§ 5. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ……………**111**

1. Відношення подільності на множині
цілих невід'ємних чисел………………………………….……**111**
2. Подільність суми, різниці і добутку……………………**113**
3. Ознаки подільності..…………………………………….**115**
4. Прості і складені числа. Решето Ератосфена…………..………**120**
5. Спільне кратне, найменше спільне кратне
кількох натуральних чисел…………………………………....**124**
6. Спільний дільник, найбільший спільний дільник
кількох натуральних чисел………………………….......**126**
7. Властивості найменшого спільного кратного і
найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел…..…**127**
8. Теореми про подільність, які пов'язані

з взаємно простими числами…………………………...……..**130**
9. Основна теорема арифметики і
канонічний розклад натурального числа……………………**132**
10. Знаходження найбільшого спільного дільника і
найменшого спільного кратного кількох чисел за їх
канонічними розкладами………………………………..**135**
11. Алгоритм Евкліда…………………………...……..**138**
12. ВПРАВИ……………………..……………………**140**
13. ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ…………………………………...**142**
14. ЗАДАЧІ……………...…………………………………...**149**
15. ВІДПОВІДІ………...…………………………….………**153**
16. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА……………….…......**154**
17. ДОДАТКИ………………………………………….…..…**158**
18. Додаток А…………………………………………….……**158**
19. Додаток Б………………………………………………...**190**
20. Додаток В………………………………………………..….**191**

ПЕРЕДМОВА

В умовах розвитку інформаційних технологій значна роль належить підготовці висококваліфікованих кадрів, які здатні творчо мислити, вміти аналізувати та самонавчатися. У зв'язку з цим математична освіта займає важливе місце в підготовці майбутніх фахівців. Особливої уваги потребує процес навчання вчителів математики початкових класів, який неможливий без широкого використання навчальної літератури.

Навчальний посібник відповідає чинній навчальній програмі з математики для студентів спеціальності "Початкове навчання" та містить матеріал другого курсу, який охоплює наступні теми: кількісна та аксіоматична теорія побудови множини цілих невід'ємних чисел, натуральне число як результат вимірювання величини, системи числення та подільність цілих невід'ємних чисел. На доступному для розуміння предмету рівні представлено теми, які за програмою пропонуються для самостійного вивчення студентами – аксіоматична теорія цілих невід'ємних чисел, аксіоми Пеано, метод математичної індукції, натуральне число як результат вимірювання величини.

Виділені й наочно проілюстровані в посібнику теореми, означення та властивості сприятимуть їх кращому візуальному сприйняттю студентами і допоможуть їм виділити найголовніше у запропонованому матеріалі. Виклад теоретичних положень супроводжується наведенням прикладів і розв'язками задач, які демонструють типові підходи до вирішення і правильного їх оформлення.

Окрім задач до теми, навчальний посібник пропонує тестові завдання, які, при потребі, можна переформатувати в задачі, оскільки вміння розв'язувати задачі-тести є актуальним завданням вищої школи. Запропоновані відповіді до певних завдань сприятимуть самоконтролю з боку студентів, а також допоможуть їм при виконанні домашніх завдань.

У посібнику наявні обґрунтовані додатки, які розширюють науковий кругозір студентів, вчать їх користуватися новим, цікавим матеріалом.

Навчальний посібник допоможе студентам педагогічних спеціальностей денної, заочної та екстернатної форм навчання здобути необхідні математичні знання та вміння, а також стане суттєвим доповненням до лекційного курсу.

§ 1. ТЕОРЕТИКО - МНОЖИННИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ (КІЛЬКІСНА ТЕОРІЯ)

1. Поняття про натуральні, цілі невід'ємні числа і нуль

При вивченні освітньої галузі "Математика" у початковій школі поняття натурального числа асоціюється з поняттям про множину. Зокрема, Сонце, Місяць, мама є прикладом одноелементних множин і ототожнюються з числом 1; очі, руки, крила ілюструють поняття про число 2; трикутник – число 3; чотирикутник – 4; кількість пальців на одній руці – 5 і т. д. Так, число 1 є спільною властивістю всіх одноелементних множин, відповідно числа 2, 3, 4, 5 і т. д. є спільною властивістю, якою володіють ці множини, тобто їх спільною кількісною характеристикою.

Для більш чіткого розуміння поняття "натуральне число" слід дати означення потужності, еквівалентності, та рівнопотужності множин.

Поняття потужності множин пов'язане з оцінкою кількості елементів у них. У скінченній множині кількість елементів можна перерахувати.

Якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі скінченні множини, які мають однакову кількість елементів, будуть еквівалентні за кількістю елементів у них і визначають один клас еквівалентності. Цей клас еквівалентності може бути позначений натуральним числом, яке визначає кількість елементів у множині. Всі одноелементі множини утворюють один клас еквівалентності, двоелементі – другий і так далі. Кожному натуральному числу відповідає клас еквівалентності, який об'єднує всі скінченні множини із кількістю елементів, що дорівнює даному числу.

Число, що визначає деяка множина A, називається *потужністю множини A* і позначається $n(A)$ або $|A|$.

Нагадаємо, що дві множини A і B називаються рівнопотужними (еквівалентними), якщо вони порожні, або існує бієктивне відображення множини A на множину B (позначається $A \sim B$ і читається "множина A рівнопотужна множині B", або “множини A і B рівнопотужні”). Це відношення є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Цим відношенням всі скінченні непорожні множини розбиваються на підмножини, які називаються *класами еквівалентних множин*, причому будь-які дві множини одного класу є еквівалентними, а різних класів – нееквівалентними. Між множиною класів еквівалентних множин і множиною всіх натуральних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність.

Кожній скінченній множині відповідає тільки одне натуральне число, а кожному натуральному числу безліч еквівалентних скінченних множин.

Натуральним числом називається клас скінченних еквівалентних (рівнопотужних) непорожніх множин.

Зауваження 1. У науковій літературі зустрічаються й такі означення натурального числа:

Натуральним числом називається клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Натуральним числом називається потужність скінченної непорожньої множини.

Усі натуральні числа становлять множину натуральних чисел, яку в математиці позначають буквою N.

Зауваження 2. Слід зазначити, що у ряді наукових видань зустрічаються два позначення потужності множини: $n\ (A)$ або $|\ A\ |$. У нашому випадку будемо користуватися першим позначенням.

Таким чином, натуральні числа, які є потужностями скінченних непорожніх множин A, B, C, ... позначають відповідно малими буквами латинського алфавіту a, b, c, ..., записують так: $a = n\ (A)$, $b = n\ (B)$, $c = n\ (C)$, ... і читають:

$a = n\ (A)$ – “число a є потужністю множини A”.

Потужність порожньої множини називається *нулем* ($n\ (\varnothing) = 0$).

Потужність одноелементної множини E називається *одиницею* і позначається 1, тобто $1 = n\ (E)$.

Множина, утворена приєднанням до множини N натуральних чисел числа “нуль”, називається *множиною цілих невід’ємних чисел* і позначається N_0, а її елементи називаються *цілими невід’ємними числами*. Записують так:

$$N_0 = N \cup \{0\}.$$

Отже, *цілим невід'ємним числом* називається потужність скінченної множини.

У курсі математики початкової школи у першому класі діти вчаться порівнювати числа та оперувати такими термінами як "передує" та "слідує за".

Відносно будь-яких двох різних чисел множини цілих невід'ємних чисел одне буде завжди меншим за інше. Менше число передує більшому, а більше слідує за меншим. Оскільки порожня множина є підмножиною кожної множини, то число нуль, що їй відповідає, є числом меншим від будь-якого натурального числа.

Множина цілих невід'ємних чисел утворює зростаючу послідовність 0, 1, 2, 3, ... , … обмежену зліва нулем. У цій послідовності кожне наступне число є більшим за попереднє. Така множина є *нескінченною*.

У множині натуральних чисел не існує найбільшого числа тому, що яке натуральне число n ми не візьмемо, безпосередньо за ним йде наступне натуральне число виду $n' = n + 1$, яке є кількісною характеристикою множини M', утвореної з множини M приєднанням до неї ще одного елемента.

Множина N_0 цілих невід'ємних чисел має єдине найменше число – 0. За кожним числом у множині N_0 йде єдине число і кожне ціле невід'ємне число (крім нуля) безпосередньо йде тільки за одним цілим невід'ємним числом. Тобто, для жодної пари чисел n і n' не можна вказати ніякого третього числа x такого, що $n < x < n'$. Цю властивість називають *дискретністю* послідовності цілих невід'ємних чисел.

Цілі невід'ємні числа a і b називаються рівними ($a = b$), якщо множини, для яких ці числа є потужностями – рівнопотужні, і нерівними ($a \neq b$), якщо відповідні їм множини нерівнопотужні.

Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

2. Порівняння натуральних чисел за величиною

Нехай A і B – дві скінченні множини, а $n(A) = a$ і $n(B) = b$ – відповідні їм натуральні числа. Множини A і B можуть бути як еквівалентними ($A \sim B$), так і нееквівалентними ($\overline{A \sim B}$). Якщо

$A \sim B$, то вони належать одному й тому ж класу, а тому відповідні їм числа – рівні, тобто $a = b$. Отже,

$$(a = b) \Leftrightarrow (A \sim B), \text{ де } a = n\,(A),\ b = n\,(B).$$

Якщо множина A еквівалентна власній підмножині множини B, то число a менше від числа b ($a < b$). Отже,

$$(a < b) \Leftrightarrow (A \sim B_1 \wedge B_1 \subset B \wedge B_1 \neq B \wedge B_1 \neq \varnothing).$$

Які б не були скінченні множини A і B, то для довільних натуральних чисел a і b, завжди виконується одне із співвідношень: $a = b$, або $a \neq b$.

З означення еквівалентності множин та поняття натурального числа випливають такі **властивості**:

1. Властивість рефлективності. Кожна множина еквівалентна сама собі ($A \sim A$). Кожне натуральне число дорівнює самому собі ($a = a$).

2. Властивість симетричності. Якщо множина A еквівалентна множині B, то множина B еквівалентна множині A ($A \sim B$, то $B \sim A$). Якщо $a = b$, то $b = a$.

3. Властивість транзитивності. Якщо

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$. Якщо $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$.

Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b число a, яке є потужністю множини A, називається *меншим* за число b, що є потужністю множини B (позначається $a < b$), якщо у множині B знайдеться відмінна від неї підмножина B_1 рівнопотужна множині A.

$$\forall\ a, b \in N_0,\ a < b \Leftrightarrow \exists\ B_1 \subset B,\ B_1 \neq B \wedge A \sim B_1,$$
$$\text{де } n\,(A) = a \text{ і } n\,(B) = b.$$

Відношення "*менше*" на множині цілих невід'ємних чисел не залежить від вибору множин.

Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце тільки одне з відношень:

$$a = b,\ a < b,\ b < a.$$

Відношення "*менше*" на множині цілих невід'ємних чисел має наступні **властивості**:

1. Відношення "*менше*" на множині цілих невід'ємних чисел транзитивне:

$$\forall\ a, b \in N_0\ \ (a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c).$$

2. Відношення “*менше*” на множині цілих невід’ємних чисел є відношенням строгого лінійного порядку, а сама множина N_0 з цим відношенням є строго лінійно впорядкованою множиною.

3. Відношення обернене до відношення “*менше*” на множині цілих невід’ємних чисел називається відношенням “*більше*” (позначається “ > ”):

$$\forall\ a, b \in N_0 \quad a > b \ \Leftrightarrow\ b < a.$$

4. Відношення “*менше*” і “*більше*” – взаємно обернені і мають однакові властивості.

5. Відношення “*менше або рівне*” (позначається “$\leq$”) можна розглядати як об’єднання відношень “менше” і “рівне”:

$$\forall\ a, b \in N_0 \quad (a \leq b) \ \Leftrightarrow\ (a = b) \vee (a < b).$$

6. Відношення “*більше або рівне*” (позначається “$\geq$”) можна розглядати і як об’єднання відношень “*більше*” і “*рівне*”, і як обернене до відношення “менше або рівне”:

$$\forall\ a, b \in N_0 \quad (a \geq b) \ \Leftrightarrow\ (a = b) \vee (a > b).$$

7. Відношення “*менше або рівне*” і “*більше або рівне*” на множині цілих невід’ємних чисел є відношеннями нестрогого лінійного порядку.

3. Додавання цілих невід’ємних чисел

Серед вивчених операцій над множинами найпростішою операцією є об’єднання скінченних множин, які не мають спільних елементів. Операція додавання цілих невід’ємних чисел пов’язана з об’єднанням множин.

Сумою цілих невід’ємних чисел a і b (позначається $a + b$), що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів об’єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів:

$$\forall\ a, b \in N_0 \quad (a + b = n\,(A \cup B), \text{ де } A \cap B = \varnothing,\ n\,(A) = a \text{ і } n\,(B) = b).$$

Операція (дія) на множині цілих невід’ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням цілих невід’ємних чисел.* Компоненти додавання називаються *доданками,* а результат – *сумою.*

Об’єднання множин завжди існує і визначається однозначно, тому й сума двох довільних цілих невід’ємних чисел завжди існує і визначається однозначно.

Сума довільного цілого невід'ємного і натурального чисел є натуральним числом.

При додаванні виконується така властивість (властивість нуля при додаванні):

$$\forall a \in N_0 \ a + 0 = 0 + a = a.$$

Операція додавання цілих невід'ємних чисел **комутативна**:

$$\forall \ a, b \in N_0 \ \ a + b = \ a + b.$$

Операція додавання цілих невід'ємних чисел **асоціативна**:

$$\forall \ a, b, c \in N_0 \ \ (a + b) + c = a + (b + c).$$

Записані рівності називаються відповідно комутативним (переставним) та асоціативним (сполучним) законами додавання.

На основі асоціативного закону додавання цілих невід'ємних чисел випливає правило додавання кількох цілих невід'ємних чисел. Зокрема, сума трьох цілих невід'ємних чисел не зміниться, якщо будь-які два доданки замінити на їх суму.

$$\forall \ a, b, c \in N_0 \ a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Цю властивість можна застосувати не тільки до трьох доданків, але й до скінченної кількості доданків розташованих у будь-якому порядку.

З комутативного і асоціативного законів додавання випливає наступне правило додавання числа до суми та суми до числа. Це правило є основою алгоритмів додавання та застосовується у початковій школі:

$$\forall \ a, b, c \in N_0 \ (a + b) + c = a + (b + c), (a + b) + c = (a + c) + b.$$

Щоб додати число до суми або суму до числа, треба знайти суму і до неї додати число або додати це число до одного з доданків і до отриманого результату додати другий доданок.

Приклад 1. Виконати додавання 12 + 6.

Розв'язання:

$$12 + 6 = (10 + 2) + 6 = 10 + (2 + 6) = 10 + 8 = 18.$$

Відповідь. 18.

При вивченні алгоритму додавання багатоцифрових чисел застосовують правило додавання суми до суми:

$$\forall \ a, b, c, d \in N_0 \ (a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d).$$

Приклад 2. Виконати додавання 23 + 15.

Розв'язання:

$$23 + 15 = (20 + 3) + (10 + 5) = (20 + 10) + (3 + 5) = 30 + 8 = 38.$$

Відповідь. 38.

Операція додавання цілих невід'ємних чисел **монотонна** відносно відношення рівності (закон монотонності додавання):

$$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Якщо до обох частин рівності цілих невід'ємних чисел додати одне й те саме ціле невід'ємне число, то рівність не порушиться.

На основі дії додавання вводиться означення відношення "менше". Зокрема, число a менше числа b тоді і тільки тоді, коли існує таке натуральне число c, що $a + c = b$.

$$\forall\ a, b \in N_0\ \ a < b \ \Leftrightarrow \exists\ c \in N,\ \ a + c = b.$$

Теорема 1. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b $a < b$ тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число c таке, що $a + c = b$, де $a = n\ (A)$ і $b = (B)$.

Доведення.

▶ Якщо $a = n\ (A)$, $b = n\ (B)$ і $a < b$, то існує власна підмножина B_1 множини B така, що $A \sim B_1$. Оскільки $B_1 \subset B$, то $B = B_1 \cup (B \setminus B_1)$. Якщо $\overline{B_1} = B \setminus B_1$, то $B = B_1 \cup \overline{B_1}$. Отже, $n\ (B) = n\ (B_1 \cup \overline{B_1})$.

Оскільки $B_1 \cap \overline{B_1} = \varnothing$, то за означенням суми $n\ (B) = n\ (B_1) + n\ (\overline{B_1})$. З того, що $B_1 \sim A$, маємо $n\ (B_1) = n\ (A)$. Отже, $n\ (B) = n\ (A) + n\ (\overline{B_1})$. Якщо позначити $n\ (\overline{B_1}) = c$, то отримаємо рівність $b = a + c$. Якщо здійснити міркування в зворотному напрямі, то з $b = a + c$ випливає, що $a < b$. ◀

На основі означення "менше" та монотонності додавання можна довести властивість монотонності для нерівності.

Теорема 2. Операція додавання цілих невід'ємних чисел монотонна.
$\forall\ a, b, k \in N_0,\ \ a < b \Leftrightarrow a + k < b + k.$

Доведення.

▶ Якщо $a < b$, то існує таке натуральне число c, що $a + c = b$. За властивістю монотонності рівності $((a + c) + k = b + k) \Leftrightarrow ((a + k) + c = b + k) \Leftrightarrow (a + k < b + k)$. ◀

Для множин, які не мають спільних елементів, справедлива **адитивна** властивість рівностей цілих невід'ємних чисел.

$$\forall\ a, b, c, d \in N_0\ \ a = b\ \wedge c = d\ \Rightarrow\ a + c = b + d.$$

Цю властивість можна довести на основі властивості монотонності і транзитивності рівності цілих невід'ємних чисел:

якщо $a = b$ і $c = d$, то $a + c = b + c$ і $b + c = b + d$.

Отже, $a + c = b + d$.

Аналогічно доводиться адитивність для нерівностей.

$$\forall\ a, b, c, d \in N_0\ \ a < b \land c < d \Rightarrow a + c < b + d.$$

З доведеного можна сформулювати таке правило: нерівності одного смислу можна почленно додавати.

Для додавання цілих невід'ємних чисел мають місце **правила скорочення** для додавання:

Якщо від обох частин рівності відняти одне і те ж число, то рівність не порушиться:

$$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ a + c = b + c \Leftrightarrow a = b;$$

Якщо від обох частин нерівності відняти одне і те ж число, то знак нерівності не зміниться:

$$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ a + c < b + c \Leftrightarrow a < b.$$

Поняття суми двох цілих невід'ємних чисел можна узагальнити на довільну скінченну сукупність чисел.

Сумою довільних цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, ..., a_n (позначається $a_1 + a_2 + ...+ a_n$ або $\sum_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика об'єднання множин A_1 A_2, ..., A_n, які попарно не перетинаються і мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа a_1, a_2, ..., a_n.

4. Віднімання цілих невід'ємних чисел

Операція віднімання (дія віднімання) цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії цілих невід'ємних чисел пов'язана з відніманням множин, тобто з доповненням підмножини до множини.

Як і додавання, дію віднімання можна означити за допомогою дії над множинами і довести всі її основні властивості. Отже, нехай $a = n\ (A)$, $b = n\ (B)$, причому $B \subset A$.

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) називається число елементів у доповненні множини B до множини A, тобто $a - b = n\ (A \setminus B)$.

$$\forall\ a, b \in N_0\ \ a - b = n\ (A \setminus B),\ \text{де}\ a = n\ (A),\ b = n\ (B),\ B \subset A.$$

Знаходження за даними двома числами a і b їхньої різниці $a - b$ називається *відніманням* і позначається $a - b = c$. Число a називається *зменшуваним*, b – *від'ємником.*

За означенням різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує тоді і тільки тоді, коли множина B є підмножиною множини A, тобто коли $n(B) \leq n(A)$, або $b \leq a$. Із зазначеного випливає, що дія віднімання на множині цілих невід'ємних чисел виконується не у всіх випадках, тобто є частковою.

Оскільки $A \setminus A = \emptyset$, то $a - a = 0$.

$A = B \cup (A \setminus B)$, а $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, то

$n(A) = n(B \cup A \setminus B) = n(B) + n(A \setminus B)$.

Отже, $a = b + (a - b)$.

Існує ще одне означення різниці через суму:

Різницею цілих невід'ємних чисел a і b називається таке число c, сума якого з числом b дорівнює a:

$$b + c = a.$$

Обидва означення різниці цілих невід'ємних чисел рівносильні:

$$(a - b = c) \Leftrightarrow (a = b + c).$$

Звідси дія віднімання є оберненою до дії додавання: дія, яка полягає в знаходженні невідомого доданка за відомою сумою і другим доданком:

$$(x + b = a) \Rightarrow (x = a - b).$$

У початковій школі зв'язок між відніманням і додаванням використовується при розв'язуванні вправ типу: знайдіть невідомий доданок.

Означенням віднімання, як дії оберненої до додавання, користуються при розв'язуванні вправ такого типу: визначте на скільки одне число менше чи більше від іншого. При цьому від більшого числа віднімається менше.

Теорема 3.	Для будь-яких цілих невід'ємних чисел a і b, де $a \geq b$, існує таке єдине число c, що є різницею чисел a і b.

Доведення.

► I. Доведемо **існування різниці**.

Нехай різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує. Покажемо, що $a \geq b$. Оскільки різниця цілих невід'ємних чисел a і b існує, то за означенням різниці знайдеться таке ціле невід’ємне число x, що $b + x = a$. Для x можливі два випадки: або $x = 0$, або $x \neq 0$ ($x \in N$).

Якщо $x = 0$, то з того, що $b + 0 = a$, випливає (за властивістю нуля при додаванні) $b = a$.

Якщо ж $x \in N$, то з того, що $b + x = a$, одержуємо (за означенням відношення “більше”) $a > b$.

За умови існуванні різниці чисел a і b маємо, що $a \geq b$.

Отже, існування різниці доведено.

II. Доведемо **єдиність різниці**.

Нехай різниця цілих невід’ємних чисел a і b існує. Припустимо, що існують дві різниці виду $a - b = x_1$ і $a - b = x_2$. Звідси за означенням різниці маємо $a = b + x_1$ і $a = b + x_2$. Тому $b + x_1 = b + x_2$ і за правилом скорочення для додавання одержимо $x_1 = x_2$. Отже, різниця цілих невід’ємних чисел, якщо вона існує, визначається однозначно. ◄

На основі означення різниці цілих невід’ємних чисел та даної теореми можна сформулювати такі **властивості**:

1. Якщо від будь-якого цілого невід’ємного числа відняти нуль, то отримаємо те саме ціле невід’ємне число:

$$\forall\ a \in N_0 \quad a - 0 = a.$$

2. Якщо від будь-якого цілого невід’ємного числа відняти те саме ціле невід’ємне число, то отримаємо нуль:

$$\forall\ a \in N_0 \quad a - a = 0.$$

3. Якщо зменшуване і від’ємник одночасно збільшити або зменшити на одне й те саме число, то різниця не зміниться (основна властивість різниці):

$$\forall\ a, b, c, k \in N_0 \quad (a - b = c) \Leftrightarrow ((a + k) - (a + k) = c).$$

Теорема 4 **(правило віднімання числа від суми).** Для довільних цілих невід’ємних чисел a, b і c, якщо відповідні різниці існують, то мають місце рівності:

$$(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b.$$

Доведення.

► Нехай має місце умова теореми. Доведемо, що істинною є рівність виду: $(a + b) - c = a + (b - c)$. (1)

Позначимо праву частину рівності (1) через x, тобто

$$a + (b - c) = x. \qquad (2)$$

Тоді на основі заміни отримаємо: $(a+b)-c=x$ за означенням різниці: $(a+b)-c=\underbrace{a+(b-c)}_{x}$. Виконавши заміну за означенням різниці, отримаємо: $b-c=x-a$. Визначимо значення b за властивістю монотонності додавання: $b=(x-a)+c$ і підставимо у рівність $a+b$ замість b:

$a+b=a+((x-a)+c)$. У другій частині рівності відкриємо дужки:

$a+b=a+x-a+c$ і отримаємо:

$a+b=x+c$. З цієї рівності виразимо x: $(a+b)-c=x$. (3)

З рівностей (2) і (3) одержуємо:

$(a+b)-c=a+(b-c)$, тобто рівність (1).

Другу частину цієї теореми отримаємо аналогічним способом. ◄

Цю теорему можна узагальнити на довільну скінченну кількість доданків.

Якщо відповідні різниці існують, то, щоб відняти число від суми кількох доданків, достатньо відняти його від одного з них і одержану різницю додати до суми решти доданків.

Аналогічно до попередньої теореми доводиться наступна теорема:

Теорема 5. **(правило віднімання суми від числа).** Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c, якщо існують відповідні різниці, то має місце рівність:
$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$.

Дану теорему можна узагальнити на довільну скінченну кількість доданків.

Якщо відповідні різниці існують, то, щоб відняти суму від числа, достатньо відняти від цього числа один із доданків, від одержаної різниці відняти ще один із доданків, що залишився, і т. д., поки не віднімемо останній доданок.

5. Множення цілих невід'ємних чисел

Операцію (дію) знаходження суми рівних між собою доданків називають *множенням*, а результат множення – *добутком*.

Суму n доданків (n >1), кожний з яких є цілим невід'ємним числом m називають *добутком* m на натуральне число n і позначають mn.

Означення добутку пов'язано з об'єднанням скінченних еквівалентних між собою множин:

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$n(S) = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n} = mn \Leftrightarrow n(S) = nm.$$

Дію, за допомогою якої знаходять добуток двох чисел n і m, називають *множенням*. Числа, які перемножують, – *множниками*. Зокрема, число m – *множеним*, число n – *множником*, а вираз mn називають *добутком*, або результатом множення.

Означення добутку цілих невід'ємних чисел можна представити через поняття декартового (див. Додаток А, далі [1]) добутку множин.

Розглянемо дві множини A і B, такі, що $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, тоді декартів добуток запишеться у вигляді:

$$A \times B = \{ (a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}.$$

Число елементів у декартовому добутку $A \times B$ дорівнює, з одного боку, 2 + 2 + 2 = 6. З іншого боку, якщо $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, тоді
$2 \cdot 3 = 6$. Отже, якщо A і B скінченні множини, одержимо:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Добутком цілих невід'ємних чисел m *і* n називається число елементів декартового добутку множини, що має m елементів, на множину, що має n елементів.

На основі означення дії множення як дії додавання рівних доданків та закону існування та єдиності суми цілих невід'ємних чисел виконується закон існування та єдиності добутку двох натуральних чисел.

Теорема 6. Які б не були цілі невід'ємні числа a і b, завжди існує єдине число p, що є їхнім добутком, причому також цілим невід'ємним числом.

Доведення.

► Спочатку доведемо, що добуток двох довільних цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

Нехай a і b – довільні цілі невід'ємні числа, де $a = n\ (A)$ і $b = n\ (B)$. Розглянемо різні випадки.

І. Нехай одне з чисел a або b дорівнює нулю, тоді хоча б одна з множин A або B є порожньою множиною. Отже, порожньою множиною є і їх декартів добуток. Тоді за означенням добутку цілих невід'ємних чисел одержимо:

$$a \cdot b = n\ (A \times B) = n\ (\varnothing) = 0.$$

$$a \cdot 0 = 0.$$

ІІ. Числа a і b є натуральними, причому одне з них, наприклад, b, дорівнює одиниці. Множини A і B непорожні, а B – одноелементна множина матиме вигляд $n\ (B) = 1$. Розглянемо:

$$a \cdot b = n\ (A \times B) = n\ (A) \cdot n\ (B) = n\ (A) \cdot 1 = n\ (A) = a.$$

$$a \cdot 1 = a.$$

ІІІ. Розглянемо випадок, коли числа a і b є натуральними, відмінними від одиниці. Множини A і B є не порожні і не одноелементні. Множину B (позначимо $B = \{y\}$) за властивостями скінченних множин можна розглядати як об'єднання одноелементних множин, які попарно не перетинаються, тобто $B = \{y_1\} \cup \{y_2\} \cup \ldots \cup \{y_n\}$. Користуючись властивістю декартового множення відносно об'єднання множин, маємо:

$$A \times B = (A \times \{y_1\}) \cup (A \times \{y_2\}) \cup \ldots \cup (A \times \{y_n\}).$$

Кожна з множин у правій частині рівності є скінченною множиною, оскільки вона рівнопотужна скінченній множині A. Об'єднання скінченної сукупності скінченних множин є скінченною множиною, а тому і множина $A \times B$ є скінченною множиною, а її потужність є натуральним числом.

Отже, добуток двох довільних цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом.

Оскільки добуток цілих невід'ємних чисел не залежить від множин, які входять до нього, а декартів добуток довільних множин завжди існує і визначається однозначно, то й добуток двох цілих невід'ємних чисел завжди існує і визначається однозначно та є цілим невід'ємним числом. ◄

З даної теореми можна сформулювати наступні **властивості**:

1. Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на нуль, то одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0\ \ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

2. Якщо будь-яке ціле невід'ємне число помножити на одиницю, то одержимо це саме ціле невід'ємне число:

$$\forall\ a \in N_0\ \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

3. Добуток двох довільних натуральних чисел є натуральним числом.

Операція множення цілих невід'ємних чисел **комутативна**:

$$\forall\ a, b \in N_0\ \ a \cdot b = b \cdot a.$$

Скористаємося властивістю декартового добутку. Істинність цієї властивості випливає з того, що $n\ (A \times B) = n\ (B \times A)$. Між парами виду $(a, b) \in A \times B$ і парами виду $(b, a) \in B \times A$ існує взаємно однозначна відповідність.

Операція множення цілих невід'ємних чисел **асоціативна**:

$$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Добуток трьох невід'ємних цілих чисел не зміниться, якщо будь-які два послідовні множники замінити їхнім добутком, тобто $abc = (a\ b)\ c = a\ (bc)$.

Істинність цієї властивості випливає з того, що:

$$n\ ((A \times B) \times C) = n\ (A \times (B \times C)).$$

Справді, між елементами

$((a, b), c) \in (A \times B) \times C$ і $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ має місце взаємно однозначна відповідність.

З комутативного й асоціативного законів множення випливають наступні **властивості**:

4. Щоб помножити добуток на число або число на добуток, досить помножити на це число один із множників і результат помножити на інший множник і т. д.

$$\forall\ a, b, c, d \in N_0\ \ (abc)\ d = (a\ d)\ bc = (b\ d)\ ac = \ldots$$

5. Щоб помножити добуток на добуток, досить один із множників першого добутку помножити на будь-який множник другого добутку, а знайдений результат помножити на інший множник із добутку і т. д.

6. Якщо один з множників збільшити (зменшити) в кілька разів, то й добуток відповідно збільшиться (зменшиться) в стільки ж разів, тобто:

$$(ab = c) \Leftrightarrow ((am)\ b = cm).$$

Операція множення цілих невід'ємних чисел **дистрибутивна** відносно додавання:

$$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Записану властивість можна сформулювати так: щоб помножити суму на число потрібно помножити на це число кожен з доданків і результати додати.

Справді, за означеннями операцій та їхніми властивостями маємо:

$$ac + bc = ca + cb = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{a\ \text{разів}} + \underbrace{c+c+\ldots+c}_{b\ \text{разів}} =$$

$$= \underbrace{c+c+\ldots+c}_{(a+b)\ \text{разів}} = c\,(a+b) = (a+b)\,c$$

Цей закон випливає також із рівності для множин:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),\ \text{де}\ A \cap B = \varnothing.$$

З рівності $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ випливає **розподільний** (дистрибутивний) закон множення відносно різниці:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 \quad ac - bc = (a - b)\,c.$$

Розподільні закони встановлюють зв'язок множення з додаванням і відніманням. Читати їх можна і зліва направо, і справа наліво. На основі цих законів розкривають дужки і виносять спільні множники за дужки.

Теорема 7. Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна помножити на одне й те саме натуральне число, в результаті чого знак рівності чи нерівності не зміниться.

Доведення.

|► Якщо $a = b$, то за законом існування і єдиності добутку ac і bc одержимо $ac = bc$.

Якщо $a < b$, то за означенням "менше" $a + k = b$. Тоді $ac + kc = bc$. Звідси $ac < bc$. ◄|

За законом монотонності множення та властивостей відношень "=" і "<", ">" випливають такі **властивості**:

7. На множині цілих невід'ємних чисел, рівності та нерівності однакового смислу можна почленно перемножити. Тобто:

а) $\forall\ a, b, c, d \in N_0 \quad a = b \wedge c = d \Rightarrow ac = bd;$

б) $\forall\ a, b, c, d \in N_0 \quad a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd.$

8. Обидві частини рівності або нерівності цілих невід'ємних чисел можна поділити на одне й те саме натуральне число, після чого знак рівності або нерівності не зміниться:

а) $\forall\ a, b, c \in N_0 \quad a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0 \Rightarrow a = b$;
б) $\forall\ a, b, c \in N_0 \quad a \cdot c < b \cdot c \wedge c \neq 0 \Rightarrow a < b$.

Поняття добутку двох цілих невід'ємних чисел можна розповсюдити на довільну скінченну сукупність чисел.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел a_1, a_2, … a_n (позначається $a_1a_2...a_n$ або $\prod_{i=1}^{n} a_i$) називається кількісна характеристика декартового добутку множин A_1, A_2, ..., A_n, кількісними характеристиками яких є відповідно числа a_1, a_2, … a_n.

Добуток n множників, де $n > 1$, кожен з яких дорівнює a, називається n-м степенем числа a (позначається a^n).

Знаходженя n-го степеня числа a називається *піднесенням до степеня*: a називається основою, n – показником степеня.

Число a в першому степені дорівнює самому числу a.

З означення степеня та властивостей дії множення випливають такі **властивості степеня:**

1. При множенні з однаковими основами степені додаються (адитивність показників степенів при однаковій основі):

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}.$$

Доведемо цю властивість. Запишемо у вигляді добутку виду:

$$a^n \cdot a^k = \underbrace{a\,a\,\ldots a}_{n}\ \underbrace{a\,a\ldots a}_{k} = \underbrace{a\,a\ldots a}_{n+k} = a^{n+k}.$$

2. При піднесенні до степеня добутку кожен з множників підноситься до степеня (дистрибутивність піднесення до степеня відносно множення):

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

3. При піднесенні степеня до степеня степені перемножуються (мультиплікативність показників при піднесенні степеня до степеня):

$$(a^n)^k = a^{nk}.$$

4. Властивість монотонності:

якщо $a > 1$ і $n > k$, то $a^n > a^k$.

5. Будь-яке натуральне число в нульовому степені дорівнює одиниці:

$$a^0 = 1.$$

6. Якщо один з множників дорівнює нулю, то і добуток дорівнює нулю.

7. Якщо один з множників дорівнює одиниці, то добуток дорівнює іншому множнику.

6. Ділення цілих невід'ємних чисел

Операція ділення цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії пов'язана з розбиттям множини на класи. У курсі математики початкової школи поняття про ділення формується на основі практичних задач, пов'язаних із розбиттям скінченної множини на еквівалентні підмножини. Розглядаються два типи задач, які називаються *ділення на вміщення* та *ділення на рівні частини*.

Задача 1 (*ділення на вміщення*). У Юлі було 15 цукерок. Вона роздала ці цукерки по 3 кожній подрузі. Скільки подруг отримали цукерки?

Задача 2 (*ділення на рівні частини*). У Юлі було 15 цукерок. Вона роздала ці цукерки порівну трьом подругам. По скільки цукерок одержала кожна подруга?

Задача *ділення на вміщення* ставить завдання визначити скільки всіх підмножин, які не мають спільних елементів, еквівалентних підмножині B множини A, має множина A.

Розв'язок цієї задачі зводиться до знаходження числа доданків, кожен з яких дорівнює b, а сума яких a:

$$\underbrace{b+b+...+b}_{X\ ДОДАНКІВ} = a, \text{ або } b \cdot x = a.$$

Задача *ділення на частини* ставить завдання множину A розбити на певне число еквівалентних між собою підмножин і визначити чисельність цих підмножин.

Її розв'язок зводиться до знаходження b однакових доданків, сума яких дорівнює a:

$$\underbrace{x+x+...+x}_{b\ ДОДАНКІВ} = a, \text{ або } x \cdot b = a.$$

Такі задачі з теоретико-множинної точки зору приводять до представлення скінченної множини A у вигляді об'єднання еквівалентних між собою підмножин (які не мають спільних елементів). На основі цих задач розглянемо дію ділення на множині цілих невід'ємних чисел.

Нехай $a = n\ (A)$ і множина A розбита на еквівалентні множини без спільних елементів. Тоді якщо b – число підмножин у розбитті множини A, то часткою чисел a і b називається число елементів кожної підмножини.

Якщо b – число елементів кожної підмножини в розбитті множини A, то часткою чисел a і b називається число підмножин у цьому розбитті.

В обох розглянутих задачах відбувалося знаходження невідомого множника за відомим добутком і другим множником. Дія ділення є обернена до множення. З означення добутку одержимо правило заходження частки чисел a і b.

Розділити ціле невід'ємне число a на натуральне число b – означає знайти таке число c, що $a = b \cdot c$. Число a називається *діленим*, b – *дільником*, c – *часткою* ($c = a : b$):

$$\forall\ a \in N_0,\ \ \forall\ b \in N\ \ a : b = c \Leftrightarrow b \cdot c = a.$$

З даного означення випливає, що ділене дорівнює частці, помноженій на дільник: $(a : b) \cdot b = a.$ З означення частки та дії ділення випливає рівність $(a \cdot b) : b = a$.

Оскільки дія ділення зводиться до розв'язування рівняння виду:

$$b \cdot x = a,$$

то необхідно запам'ятати, що на множині цілих невід'ємних чисел вираз $0 : 0$ не має смислу. Тому **ділити нуль на нуль не можна**.

Нехай b – натуральне число. Розглянемо добутки числа b на цілі невід'ємні числа і одержимо:

$b \cdot 0 = b$, $b \cdot 1 = b$, $b \cdot 2 = 2b$, $b \cdot 3 = 3b$, $b \cdot 4 = 4b$, $b \cdot 5 = 5b$ і т.д.

Числа 0, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ і т.д. *кратними* числу b (детальніше це питання розглядатиметься у §5).

Якщо a ділиться на b, то a кратне b (пишуть $a \vdots b$, або $b \mid a$).

Як бачимо, щоб a ділилося на b, необхідно, щоб $a \geq b$. Проте, щоб в результаті ділення одержати частку, яка буде цілим невід'ємним числом, така умова є не достатньою. Як і віднімання, ділення на множині цілих невід'ємних чисел виконується не завжди. Питання про можливості виконання ділення і пов'язані з цим властивості чисел вивчає теорія подільності, яка розглядатиметься у §5.

Теорема 8. Ціле невід'ємне число a ділиться на натуральне число b тоді і тільки тоді, коли a кратне b.

Теорема 9. Для довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b, якщо їх частка $a : b$ існує, то вона єдина.

Доведення.

▶ Припустимо, що існують дві частки від ділення c і c', тобто: $a : b = c$ і $a : b = c'$, тоді $a = b\ c$ і $a = b\ c'$. Тому $b\ c = b\ c'$. За властивістю монотонності дії множення, отримаємо $c = c'$. ◀

Операція ділення на основі другого означення частки є оберненою до операції множення, при якій за добутком двох чисел і одним із множників визначається другий множник. З другого означення частки одержуємо такі **властивості:**

1. Якщо нуль розділити на будь-яке натуральне число, то в результаті одержимо нуль:

$$\forall\ a \in N_0 \quad 0 : a = 0.$$

2. Якщо будь-яке натуральне число розділити на одиницю, то в результаті одержимо те саме натуральне число:

$$\forall\ a \in N_0 \quad a : 1 = a.$$

3. Якщо будь-яке натуральне число розділити на те саме натуральне число, то одержимо одиницю:

$$\forall\ a \in N_0 \quad a : a = 1.$$

4. Ділення неасоціативне.

Приклад 3. $(30 : 3) : 5 \neq 30 : (3 : 5)$

5. Якщо $a < b$ і $a \vdots b$, то $a = 0$.

6. Ділення комутативне лише у випадку $a = b$.

7. Якщо обидві частини рівності поділити на натуральне число, то рівність не порушиться ($c > 0$, то $a\ c = b\ c \Rightarrow a = b$).

За означенням ділення $ac : c = a$ і $bc : c = b$ ($ac = bc$). Тому з теореми про єдиність частки випливає, що $a = b$.

8. Ділення на добуток можна виконати послідовним діленням на окремі множники $a : b\ d = (a : b) : d$.

Приклад 4. $12 : (6 \cdot 2) = 12 : 6 : 2$.

9. Ділення частки на число:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 \quad a : b : c = a : c : b = a : b\ c.$$

Приклад 5. $12 : 6 : 2 = 12 : 2 : 6 = 12 : 6 \cdot 2$.

10. Ділення на частку можна виконати за таким правилом:

$$\forall\ a, b, c \in N_0 \quad a : (b : c) = (a : b)\, c.$$

За означенням ділення:

$$((a : b) \cdot c)\,(b : c) = (a : b)\,((b : c) \cdot c) = (a : b) \cdot b = a.$$

Сформулюємо теорему про основну властивість частки.

Теорема 10. Якщо ділене і дільник помножити або розділити на одне й те саме натуральне число, то частка не зміниться, при умові, що відповідні частки існують.

Доведення.

▶ Нехай a і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що їх частка існує і має вигляд:

$$a : b = x. \qquad (1)$$

За означенням частки $a = b \cdot x$.

Візьмемо довільне натуральне число k. За законом монотонності для множення $a \cdot k = (b \cdot x) \cdot k$.

З останньої рівності, користуючись асоціативністю і комутативністю множення, одержуємо $a \cdot k = (b \cdot k) \cdot x$.

Звідси за означенням частки

$$(a \cdot k) : (b \cdot k) = x. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає:

$$a : b = (a \cdot k) : (b \cdot k).$$ ◀

Сформулюємо теорему про ділення суми на число:

Теорема 11. Щоб поділити суму кількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, потрібно поділити на це число кожен із доданків, а одержані частки додати, при умові, що відповідні частки існують.

Доведення.

▶ Доведемо теорему для випадку двох доданків. Нехай a і b – довільні цілі невід'ємні числа, а c – довільне натуральне число, причому частки суми і кожного з доданків існують. Доведемо, що має місце рівність

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Якщо $a : c = x_1$ і $b : c = x_2$, то за означенням частки $a = c \cdot x_1$ і $b = c \cdot x_2$. Додавши почленно дві останні рівності, отримаємо:

$$a + b = c \cdot x_1 + c \cdot x_2.$$

За дистрибутивним законом множення відносно додавання винесемо c за дужки:

$$a + b = c\,(x_1 + x_2).$$

За означенням частки $(a + b) : c = x_1 + x_2$. Підставляючи в останню рівність замість x_1 і x_2 їх значення, одержимо

$$(a + b) : c = a : c + b : c.\ ◄|$$

Аналогічно можна сформулювати теорему про ділення різниці на число.

Теорема 12. Щоб поділити різницю двох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, потрібно поділити на це число зменшуване і від'ємник, а одержані частки відняти, при умові, що різниця і відповідні частки існують:
$\forall\ a, b, c \in N_0\ \ (a - b) : c = a : c - b : c.$

Сформулюємо теорему про ділення добутку на число:

Теорема 13. Щоб поділити добуток кількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, достатньо поділити на це число один із множників і одержану частку помножити на добуток решти множників, при умові, що відповідні частки існують.

Доведення.

|► Нехай маємо два множники a і b – довільні цілі невід'ємні числа, і c – довільне натуральне число. Причому ці числа такі, що відповідні частки існують. Доведемо, що мають місце рівності:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c).$$

Позначимо $(a : c) \cdot b = x$.

Тоді за законом монотонності для множення:

$$c \cdot ((a : c) \cdot b) = c \cdot x.$$

За асоціативністю множення:

$$(c \cdot (a : c)) \cdot b) = c \cdot x$$

За означенням частки:

$$a \cdot b = c \cdot x \Rightarrow (a \cdot b) : c = x,$$

Отже, $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$. ◄|

ВПРАВИ

Приклад 1.А. На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме x

$$((56\cdot(666+x)+12\,600):40-700)\cdot 24=21000.$$

Розв'язання. Пронумеруємо порядок виконання дій у лівій частині рівняння:

$$\underbrace{((56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600)\overset{4}{:}40\overset{5}{-}700)}_{НЕВІДОМИЙ\ МНОЖНИК}\overset{6}{\cdot}\underbrace{24}_{МНОЖНИК}=\underbrace{21\,000}_{ДОБУТОК}.$$

Розгляд почнемо з останньої дії, тобто з дії (6).

Невідомий множник дорівнює добутку, поділеному на відомий множник:

$$(56\cdot(666+x)+12\,600):40-700=21\,000:24=875;$$

$$\underbrace{(56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600)\overset{4}{:}40}_{ЗМЕНШУВАНЕ}\overset{5}{-}\underbrace{700}_{ВІД'ЄМНИК}=\underbrace{875}_{РІЗНИЦЯ}.$$

Невідоме зменшуване дорівнює сумі різниці і від'ємника:

$$(56\cdot(666+x)+12\,600):40=875+700=1575;$$

$$\underbrace{56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)\overset{3}{+}12\,600}_{ДІЛЕНЕ}\overset{4}{:}\underbrace{40}_{ДІЛЬНИК}=\underbrace{1\,575}_{ЧАСТКА}.$$

Невідоме ділене дорівнює добутку частки і дільника:

$$56\cdot(666+x)+12\,600=1575\cdot 40=63\,000;$$

$$\underbrace{56\overset{2}{\cdot}(666\overset{1}{+}x)}_{НЕВІДОМИЙ\ ДОДАНОК}\overset{3}{+}\underbrace{12\,600}_{ДОДАНОК}=\underbrace{63\,000}_{СУМА}.$$

Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок:

$$56\cdot(666+x)=63\,000-12\,600=50\,400;$$

$$\underbrace{56}_{МНОЖНИК}\overset{2}{\cdot}\underbrace{(666\overset{1}{+}x)}_{НЕВІДОМИЙ\ МНОЖНИК}=\underbrace{50\,400}_{ДОБУТОК}.$$

Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник:

$$666+x=50400:56=900;$$

$$\underbrace{666}_{ДОДАНОК}+\underbrace{x}_{\substack{НЕВІДОМИЙ\\ДОДАНОК}}=\underbrace{900}_{СУМА}.$$

Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок:

$$x = 900 - 666 = 234.$$

Відповідь. $x = 234$.

Приклад 1.Б. На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме x

$$24\,960 : \left(3\,360 - \frac{300 \cdot \left(200 - 6x\right)}{115}\right) = 8.$$

Розв'язання. Пронумеруємо порядок виконання дій у лівій частині рівняння:

$$\underbrace{24\,960}_{\text{ДІЛЕНЕ}} \overset{6}{:} \underbrace{3\,360 \overset{5}{-} \frac{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}{115}\,{}^{4}}_{\text{ДІЛЬНИК}} = \underbrace{8}_{\text{ЧАСТКА}}.$$

Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку:

$$3\,360 - \frac{300 \cdot (200 - 6 \cdot x)}{115} = 24\,960 : 8 = 3120;$$

$$\underbrace{3\,360}_{\text{ЗМЕНШУВАНЕ}} \overset{5}{-} \underbrace{\frac{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}{115}\,{}^{4}}_{\text{ВІД'ЄМНИК}} = \underbrace{3120}_{\text{РІЗНИЦЯ}}.$$

Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю:

$$\frac{300 \cdot (200 - 6 \cdot x)}{115} = 3\,360 - 3120 = 240;$$

$$\underbrace{300 \overset{3}{\cdot} (200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}_{\text{ДІЛЕНЕ}} \overset{4}{:} \underbrace{115}_{\text{ДІЛЬНИК}} = \underbrace{240}_{\text{ЧАСТКА}}.$$

Щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник:

$$300 \cdot (200 - 6 \cdot x) = 240 \cdot 115 = 27\,600;$$

$$\underbrace{300}_{\text{МНОЖНИК}} \overset{3}{\cdot} \underbrace{(200 \overset{2}{-} 6 \overset{1}{\cdot} x)}_{\substack{\text{НЕВІДОМИЙ} \\ \text{МНОЖНИК}}} = \underbrace{27\,600}_{\text{ДОБУТОК}}.$$

Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник:

$$(200 - 6 \cdot x) = 27\,600 : 300 = 92;$$

$$\underbrace{200}_{\text{ЗМЕНШУВАНЕ}} \overset{2}{-} \underbrace{6 \overset{1}{\cdot} x}_{\text{ВІД'ЄМНИК}} = \underbrace{92}_{\text{РІЗНИЦЯ}}.$$

Щоб знайти невідомий від’ємник, треба від зменшуваного відняти різницю:

$$6 \cdot x = 200 - 92 = 108;$$

$$\underbrace{6}_{\text{МНОЖНИК}} \overset{1}{\cdot} \underbrace{x}_{\substack{\text{НЕВІДОМИЙ} \\ \text{МНОЖНИК}}} = \underbrace{108}_{\text{ДОБУТОК}}.$$

Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник:

$$x = 108 : 6 = 18.$$

Відповідь. $x = 18$.

ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ

На основі залежності між компонентами і результатами дій знайти невідоме:

1.1. $(7x + 222\,171 : (100\,000 - 97\,843)) : 33 = 64.$

а) 27
б) 287
в) 872
г) 782
д) інша відповідь.

1.2. $(4\,300 - 650 \cdot 144 : x) \cdot\ 84 : 165 - 105 = 595.$

а) 32
б) 23
в) 2 925
г) 1 375
д) інша відповідь.

1.3. $564 - (48 \cdot (1\,683 - (197 + 7x)) : 1\,516) = 540.$

а) 401
б) 14
в) 104
г) 728
д) інша відповідь.

1.4. $\left(742 - \dfrac{(180 - 5y) \cdot 320}{128}\right) : 14 \cdot 107 = 2\,996.$

а) 8
б) 18
в) 40
г) 48
д) інша відповідь.

1.5. $(((138x - 5\,859) : 39 + 28\,604) : 403) \cdot 29 - 1\,059 = 1000.$

а) 45
б) 6 210
в) 23
г) 452
д) інша відповідь.

1.6. $\left(\dfrac{7\,008 - 52 \cdot 14}{314 \cdot x} \cdot 425 \cdot 60 - 305\,000\right) : 4\,100 = 50.$

а) 12
б) 20
в) 8 500
г) 1
д) інша відповідь.

1.7. $2\,020 - \left(\left(28\,836 : \left(3\,060 - \dfrac{780}{x} \cdot 208\right)\right) + 5\,319\right) : 135 = 1980.$

а) 13
б) 780
в) 6
г) 60
д) інша відповідь.

1.8. $(((1\,500+2x:28)\cdot 48-85\,776)\cdot 24+608)\cdot 202=6\,173\,120.$

а) 8 764 г) 54
б) 4 382 д) інша відповідь.
в) 38

1.9. $\left(\left(223\,440:\left(\dfrac{72\cdot x}{252}+239\right)+8\,268\right):108-59\right)\cdot 403=10\,478.$

а) 12 г) 21
б) 45 д) інша відповідь.
в) 1 512

1.10. $\left(111\,111\,000:\left(3\,150+9\,000\,000:x\right)+10\,912\right):407=76.$

а) 3 750 г) 543
б) 375 д) інша відповідь.
в) 345

1.11. $(9\,564-(8\,352-(848-21)+(8x-41)))-211=1813.$

а) 17 г) 9
б) 7 д) інша відповідь.
в) 56

1.12. $(((750+x:28)\cdot 24-21144)\cdot 12+38)\cdot 101=192910.$

а) 850 г) 3 850
б) 12 д) інша відповідь.
в) 350

1.13. $282-(72\cdot(1548-(x\cdot 13+62)):4548)=270.$

а) 56 г) 605
б) 506 д) інша відповідь.
в) 65

1.14. $(14\,972\,580:(250\,000-52\cdot(4\,881-x))\cdot 1\,024-590\,000):376=1\,003.$

а) 873 г) 213
б) 378 д) інша відповідь.
в) 305

1.15. $(((134\cdot x-3179)+856)\cdot 81):333=315.$

а) 3 618 г) 567
б) 27 д) інша відповідь.
в) 74

1.16. $((56\cdot(666+x)+12\,600):400-700)\cdot 24=21\,000.$

а) 103 590 г) 1 056
б) 1 339 д) інша відповідь.

в) 10 359

1.17. $1889118:\dfrac{\dfrac{2x+125}{111}+1025}{150}-36268=233606.$

а) 15
б) 1325
в) 123
г) 52
д) інша відповідь.

1.18. $\dfrac{2114\cdot(x+1005\cdot120)}{151}+21170=1712552.$

а) 213
б) 320
в) 219
г) 321
д) інша відповідь.

1.19. $\left(\dfrac{x\cdot115-1325}{350}\cdot7124\right)-16884=1700000.$

а) 125
б) 765
в) 345
г) 745
д) інша відповідь.

1.20. $(((35224+(x-96))-1230):379)+1245=1335.$

а) 116
б) 121
в) 212
г) 216
д) інша відповідь.

1.21. $\left(\left(3514-\dfrac{x}{311}\right):73+2752\right):140+15280=15300.$

а) 3504
б) 1232
в) 3110
г) 2800
д) інша відповідь.

1.22. $(((x\cdot15+1225):50)-22)\cdot1278=8946.$

а) 15
б) 134
в) 510
г) 43
д) інша відповідь.

1.23. $(1224-(15432:(5x-127))):120=10.$

а) 453
б) 154
в) 234
г) 643
д) інша відповідь.

1.24. $\left(230+\dfrac{4x+13032}{140}\right):110+12787=12790.$

а) 242
б) 968
в) 349
г) 1231
д) інша відповідь.

1.25. $\left(8956:\dfrac{\dfrac{x}{201}+1996}{1003}-478\right)\cdot 161=644000.$

а) 210
б) 1023
в) 1201
г) 2010
д) інша відповідь.

1.26. $(56830+(17x-85):100):57=1000.$

а) 1005
б) 515
в) 105
г) 2712
д) інша відповідь.

1.27. $\left(3560+\dfrac{(x-108)\cdot 27}{81}\right):51+18125=18195.$

а) 138
б) 293
в) 467
г) 701
д) інша відповідь.

1.28. $\left(23160:\dfrac{131\cdot x-41}{70}-1008\right)\cdot 123=18450.$

а) 110
б) 121
в) 11
г) 130
д) інша відповідь.

1.29. $\left(329190+\dfrac{363206-6x}{200}\right)-330000=1000.$

а) 201
б) 211
в) 112
г) 124
д) інша відповідь.

1.30. $27562-\left(\dfrac{4x-212}{25}+2660\right)=24862.$

а) 1000
б) 214
в) 140
г) 303
д) інша відповідь.

ВІДПОВІДІ

1.2. 32.	**1.4.** 8.	**1.6.** 1.	**1.8.** 4382.
1.10. 3750.	**1.11.** 7.	**1.13.** 56.	**1.15.** 27.
1.17. 1325.	**1.19.** 745.	**1.21.** 3110.	**1.22.** 15.
1.23. 154.	**1.25.** 2010.	**1.27.** 138.	**1.28.** 11.
1.30. 303.			

§ 2. АКСІОМАТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МНОЖИНИ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ (АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ)

1. Аксіоматичний метод побудови теорії

Наукове обґрунтування аксіоматичного методу належить визначному філософу і математику Піфагору [1] (V ст. до н. е.) ([1] Додаток А). Вже у IV ст. до н. е. інший вчений – Арістотель сформулював основний принцип аксіоматичної побудови математики, який полягав у тому, що при доведенні складних положень треба посилатися на відомі поняття та відомі раніше доведені твердження.

У кожній теорії треба визначити первісні поняття і найбільш прості вихідні твердження, істинність яких незаперечна і за допомогою яких потрібно розвивати теорію на основі відомих законів формальної логіки. Твердження, які приймаються в межах певної теорії істинними без доведення, називаються *аксіомами.*

Ці принципи лягли в основу праці Евкліда [1] (III ст. до н. е.) “Начала”. Евклід вперше в геометрії сформулював основні поняття, аксіоми й постулати, на основі яких можна було розвивати цю науку шляхом логічного доведення.

Новим кроком у розвитку аксіоматичного методу стало відкриття Лобачевським М. І.[1] у 1826 р. неевклідової геометрії. Математик який спростував думку, що геометрія може бути тільки одна. На основі розробок Лобачевського М. І. було побудовано багато інших аксіоматичних систем, які знайшли широке застосування в математиці і природознавстві, та був сформований сучасний підхід до побудови аксіоматичної теорії.

Аксіоматичний метод побудови теорії полягає в тому, що:

1) виділяються *неозначувані* (*первісні*) *поняття теорії*. Усі інші поняття цієї теорії означаються через раніше означені або через первинні поняття;

2) виділяються вихідні твердження – аксіоми. Усі інші твердження цієї теорії, які називають її *теоремами*, доводяться на основі раніше доведених теорем, або на основі аксіом.

У теорії спочатку треба сформулювати систему аксіом.

С*истемою аксіом* називають сукупність тверджень про основні (первісні) поняття. Система аксіом повинна задовольняти такі умови:

1) бути несуперечливою (умова несуперечності). Система аксіом вважається *несуперечливою*, якщо серед її логічних наслідків немає двох, які є запереченням один одного.

2) бути незалежною (умова незалежності, або мінімальності) Суть незалежності полягає в тому, що жодна з аксіом не є логічним наслідком інших аксіом цієї системи.

3) бути повною (умова повноти).

Одна і та ж теорія може бути побудована на основі різних первинних понять і систем аксіом.

2. Аксіоми Пеано

Аксіоматична побудова арифметики цілих невід'ємних чисел була розроблена у 1891 р. італійським математиком Д. Пеано[1]. В її основу було покладено ідеї німецького математика Р. Дедекінда. При аксіоматичній побудові множини цілих невід'ємних чисел не можна вважати відомими властивості цих чисел. Усі відомості, якими можна користуватися при міркуваннях, беруться з аксіом і наслідків із них.

Первинними поняттями аксіоматичної теорії цілих невід'ємних чисел є:

- "ціле невід'ємне число";
- "нуль";
- відношення між числами ("безпосередньо йде за", "наступне за", "йде за").

Рівність $a = b$ означає, що те саме ціле невід'ємне число позначене двома різними буквами.

Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

Нерівність $a \neq b$ означає, що буквами a і b позначено різні цілі невід'ємні числа.

Цілими невід'ємними числами називають елементи будь-якої не порожньої множини N_0, в якій виділено нульовий елемент 0, визначене відношення між числами (′) – "безпосередньо йде за", операції додавання і множення та встановлені аксіоми, які називають ***аксіомами Пеано***:

1. Нуль є цілим невід'ємним числом, яке безпосередньо не йде за жодним цілим невід'ємним числом:

$$\forall a \in N_0 \ a' \neq 0.$$

Ця аксіома характеризує властивість числа нуль.

2. Для кожного цілого невід'ємного числа існує одне і тільки одне ціле невід'ємне число, яке безпосередньо йде за ним:

$$\forall a, b \in N_0 \ a = b \Rightarrow a' = b'.$$

Дана аксіома встановлює нескінченність множини цілих невід'ємних чисел.

3. Кожне ціле невід'ємне число, окрім нуля, безпосередньо йде не більш як за одним цілим невід'ємним числом:

$$\forall a, b \in N_0 \ a' = b' \Rightarrow a = b.$$

Аксіома показує, що жодне ціле невід'ємне число не може бути наступним за двома різними числами.

4. (Аксіома індукції). Якщо деяке твердження доведене для **1** і з припущення що воно вірне для деякого натурального числа випливає, що воно вірне і для **наступного** за ним числа, то воно є вірним для всіх натуральних чисел.

Аксіома покладена в основу методу доведення, який називається *методом математичної індукції* і який широко використовується в математиці.

5. $\forall a \in N_0 \ (a + 0 = 0)$.

6. $\forall a, b \in N_0 \ (a + b' = (a + b)')$.

7. $\forall a \in N_0 \ (a \cdot 0 = 0)$.

8. $\forall a, b \in N_0 \ (a \cdot b' = a \cdot b + a)$.

Теорема 1.	Кожне ціле невід'ємне число відмінне від числа, що безпосередньо йде за ним.

Доведення.

► Нехай маємо множину M цілих невід'ємних чисел a таких, що $a' \neq a$. Тоді:

1) $0 \in M$, оскільки $0' \neq 0$ за першою аксіомою;

2) нехай ціле невід'ємне число a належить множині M, тобто $a' \neq a$;

3) доведемо, що наступне число a' належить множині M.

Якщо $(a')' = a'$, то на основі аксіоми 3 $a' = a$. Отже, $a \in M$. Одержана суперечність показує, що $(a')' \neq a'$, тобто

$$a' \in M.$$

Отже, підмножина M множини N_0 така, що

$$(0 \in M) \wedge (\forall a \in N_0 \ a \in M \Rightarrow a' \in M).$$

За аксіомою індукції одержуємо $M = N_0$. ◄|

Теорема 2. Для кожного цілого невід'ємного числа a, відмінного від нуля, існує єдине попереднє число.

Доведення.

|► Розглянемо множину цілих невід'ємних чисел, яку позначимо M. Їй належить число нуль і ті цілі невід'ємні числа a, для яких існує попереднє число. Тоді:

– ціле невід'ємне число a, відмінне від нуля, належить множині M;

– так як $a \in M$, то й $a' \in M$, оскільки a є попереднім до числа a.

За аксіомою індукції $M = N_0$. Тому для кожного цілого невід'ємного числа, відмінного від нуля, існує попереднє число. Єдиність такого числа випливає з третьої аксіоми. ◄|

З аксіом 2 і 3 одержуємо наступні теореми:

Теорема 3. Для довільних двох цілих невід'ємних чисел, якщо вони різні, то й наступні за ними числа різні:

$$\forall a, b \in N_0 \ (a \neq b \ \Rightarrow a' \neq b').$$

Теорема 4. Для довільних двох цілих невід'ємних чисел, якщо наступні за ними числа різні, то й самі числа різні:

$$\forall a, b \in N_0 \ (a' \neq b' \Rightarrow a \neq b).$$

Цілі невід'ємні числа, відмінні від нуля, називаються *натуральними числами.* Множину всіх натуральних чисел позначають N ($N = N_0 \setminus \{0\}$).

Аксіоми Пеано, а також твердження, що формулюються для цілих невід'ємних чисел, справедливі і для натуральних чисел, але відповідно сформульовані.

Операції додавання і множення цілих невід'ємних чисел також вводяться аксіоматично.

3. Аксіоматичне означення додавання цілих невід'ємних чисел

Додаванням цілих невід'ємних чисел називається операція, яка кожній парі чисел a і b ставить у відповідність число $a + b$, таке, що мають місце аксіоми (аксіома 5 і 6):

$\forall a \in N_0 \ (a + 0 = a)$;

$\forall a, b \in N_0 \ (a + b' = (a + b)')$.

Число $a + b$ називається *сумою* чисел a і b, а самі числа a і b – *доданками.*

Аксіоматичне означення додавання цілих невід'ємних чисел передбачає доведення існування такої операції.

Розглянемо наступну теорему:

Теорема 5. Операція додавання цілих невід'ємних чисел існує і до того ж єдина.

Доведення.

► I. Доведемо, що на множині цілих невід'ємних чисел N_0 існує така операція, яка задовольняє умови запропонованого означення. Нехай A – множина цілих невід'ємних чисел b, таких, що для довільного цілого невід'ємного числа a і числа b існує єдине число, яке називається сумою чисел a і b, що позначається $a + b$.

1) За означенням:

$$a + 0 = a. \qquad (1)$$

Оскільки кожне ціле невід'ємне число a у множині N_0 єдине, то і сума $a + 0$ для довільного цілого невід'ємного числа визначається однозначно. Отже, $0 \in A$.

2) Припустимо, що число $b \in A$. Для числа b і для довільного числа a сума чисел a і b існує і визначається однозначно.

3) Доведемо, що $b' \in A$. За означенням:

$$a + b' = (a + b)' \qquad (2)$$

За припущенням про існування і єдиність суми $a + b$ та аксіоми 2 випливає, що число $a + b'$ існує і воно єдине. Доведено, що сума $a + b'$ існує і визначається однозначно. Тобто $b' \in A$.

За аксіомою індукції $A = N_0$.

На множині цілих невід'ємних чисел існує операція додавання, і для неї мають місце (за рівностями (1) і (2)) аксіоми 5 і 6.

ІІ. Доведемо, що операція додавання єдина. Проведемо доведення від супротивного, тобто припустимо, що на множині цілих невід'ємних чисел, крім операції "+", визначена ще одна деяка операція "*", для якої виконуються аксіоми 5 і 6:

$$\forall a \in N_0\ (a * 0 = a), \qquad (3)$$

$$\forall a, b \in N_0\ (a * b' = (a * b)'). \qquad (4)$$

Позначимо через A множину цілих невід'ємних чисел b, таких, що для довільного цілого невід'ємного числа a виконується рівність

$$a + b = a * b. \qquad (5)$$

1. За аксіомою 1 і для $b = 0$ матимемо

$$a + 0 = a = a * 0.$$

Отже, $0 \in A$.

2. Припустимо, що $b \in A$. Для b і для довільного цілого невід'ємного числа a має місце рівність (5).

3. Тоді за аксіомою 2 отримаємо: $a + b = a * b$; а за аксіомою 6 і твердженням (4) $(a + b)' = (a * b)'$;

$$a + b' = a * b'.$$

Значить, $b' \in A$ і за аксіомою індукції $A = N_0$.

Отже, доведено твердження

$$\forall a, b \in N_0\ (a + b = a * b),$$

яке показує, що операція додавання цілих невід'ємних чисел єдина. ◀

Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c при додаванні мають місце такі ***властивості***:

1. Якщо до цілого невід'ємного числа додати нуль, то одержимо це саме ціле невід'ємне число (властивість нуля при додаванні):

$$\forall a \in N_0\ (a + 0 = 0 + a = a).$$

Доведення.

▶Доведення твердження (1), яке будемо розглядати як два твердження виду:

$$\forall a \in N_0\ (a + 0 = a), \qquad (6)$$

$$\forall a \in N_0\ (0 + a = a). \qquad (7)$$

Твердження (6) є аксіомою 5, а тому воно істинне. Залишається довести твердження (7).

Нехай M – множина цілих невід'ємних чисел a, для яких має місце рівність $0 + a = a$. Тоді:

1) $0 \in M$, тому що за аксіомою 5

$$0 + 0 = 0.$$

2) Припустимо, що ціле невід'ємне число a належить множині M, тобто $0 + a = a$.

3) Покажемо, що й a' належить множині M. Дійсно:

$$0 + a' = (0 + a)' = a.$$

Отже, $a' \in M$ і за аксіомою індукції $M = N_0$. А тому твердження (7) істинне. ◄|

2. Якщо до цілого невід'ємного числа додати одиницю, то одержимо наступне ціле невід'ємне число (властивість одиниці при додаванні):

$$\forall a \in N_0 \ (a + 1 = 1 + a = a').$$

3. Асоціативний закон додавання:

$$\forall a, b \in N_0 \ \ ((a + b) + c = a + (b + c)).$$

4. Комутативний закон додавання:

$$\forall a, b \ \in N_0 \ (a + b = b + a).$$

Доведення.

|► Доведемо, що для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце рівність:

$$a + b = b + a. \qquad (8)$$

Позначимо через M множину тих цілих невід'ємних чисел b, для яких при довільному цілому невід'ємному числі a має місце рівність (8).

1) За властивістю нуля при додаванні для цілого невід'ємного числа a має місце рівність:

$$a + 0 = 0 + a.$$

Отже, $0 \in M$.

2) Припустимо, що $b \in M$, тобто, що для b і для довільного цілого невід'ємного числа a виконується рівність (8).

3) Доведемо, що і $b' \in M$. Здійснимо рід міркувань: За аксіомою 6: $a + b' = (a + b)' = (b + a)'$. За властивістю одиниці при додаванні $b + a' = b + (1 + + a) = (b + 1) + a = b' + a$.

За транзитивністю відношення рівності одержуємо:

$$a + b' = b' + a.$$

Отже, $b' \in M$. За аксіомою індукції $M = N_0$. Це означає, що рівність (8) має місце для довільних цілих невід'ємних чисел a і b. ◄|

5. Закон монотонності додавання відносно відношення рівності:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

При аксіоматичній побудові множини цілих невід'ємних чисел важливим є порядок, у якому формулюються і доводяться твердження. Вважається, що кожне сформульоване попереду твердження доведене і може бути використане при доведенні наступних тверджень.

Відому з початкового курсу математики таблицю додавання одноцифрових чисел можна одержати на основі визначених аксіом, позначивши $1 = 0'$, $2 = 1'$, $3 = 2'$, $4 = 3'$, $5 = 4'$,...

За допомогою комутативного закону можна одержати всю таблицю додавання одноцифрових чисел.

4. Аксіоматичне означення множення цілих невід'ємних чисел

Множенням цілих невід'ємних чисел називається операція, яка кожній парі чисел a і b ставить у відповідність число $a \cdot b$. При цьому, мають місце наступні аксіоми:

$$\forall a \in N_0 \ (a \cdot 0 = 0);$$

$$\forall a, b \in N_0 \ (a \cdot b' = a \cdot b + a).$$

Число $a\,b$ називається *добутком чисел* a і b, а самі числа a і b – *множниками.*

Як і для додавання, доводиться теорема про існування і єдиність операції множення.

Теорема 6.	Операція множення на множині цілих невід'ємних чисел існує, причому єдина.

Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c при множенні мають місце наступні **властивості**:

1. При множенні цілого невід'ємного числа на нуль одержимо нуль (властивість нуля при множенні):

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

2. При множенні цілого невід'ємного числа на одиницю одержимо саме це ціле невід'ємне число (властивість одиниці при множенні):

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Доведення.

|► Доведення зводиться до встановлення істинності двох тверджень:

$$\forall a \in N_0 \ (a \cdot 1 = a); \qquad (1)$$

$$\forall a \in N_0 \ (1 \cdot a = a). \qquad (2)$$

Доведемо твердження (1). Для довільного цілого невід'ємного числа a маємо:

$$a \cdot 1 = a \cdot 0' = a \cdot 0 + a = 0 + a = a.$$

За транзитивністю відношення рівності $a \cdot 1 = a$.

Отже, твердження (1) доведено.

Доведемо тепер твердження (2). Позначимо через M множину тих цілих невід'ємних чисел a, для яких має місце рівність:

$$1 \cdot a = a. \qquad (3)$$

За аксіомою 7

$$1 \cdot 0 = 0, \text{ отже, } 0 \in M.$$

Припустимо, що $a \in M$, тобто має місце рівність (3).

Тоді:

$$1 \cdot a' = 1 \cdot a + 1 = a + 1 = a'.$$

Звідси за транзитивністю відношення рівності $1 \cdot a' = a'$. А тому $a' \in M$. Отже, за аксіомою індукції $M = N_0$, твердження (2) також буде істинним. ◄|

3. Дистрибутивний закон множення відносно додавання:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Доведення.

|► Доведемо дистрибутивний закон множення відносно додавання:

$$\forall a, b, c \in N_0 \ (a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c.$$

Позначимо через M – множину тих цілих невід'ємних чисел c, що для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце рівність

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \qquad (4)$$

1. Якщо $c = 0$, то

$(a + b) \cdot 0 = 0$ за аксіомою 7;

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Тому $(a + b) \cdot 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$. Отже, $0 \in M$.

2. Нехай $c \in M$, тобто c – таке ціле невід'ємне число, що для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце рівність (4).

3. Тоді

$$(a + b) \cdot c' = (a + b) \cdot (c + 1) = (a + b) \cdot c + (a + b) =$$
$$= (a \cdot c + b \cdot c) + (a + b) = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b) =$$
$$= a \cdot c' + b \cdot c'.$$

За транзитивністю відношення рівності:

$$(a + b) \cdot c' = a \cdot c' + b \cdot c'.$$

Отже, $c \in M$. Тому за аксіомою індукції $M = N_0$, а це означає, що дане твердження є істинним. ◄

4. Асоціативний закон множення:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot (b + c).$$

5. Комутативний закон множення:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

6. Закон монотонності множення відносно відношення рівності:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

5. Упорядкованість множини цілих невід'ємних чисел

Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b число a називається меншим за число b (позначається $a < b$), якщо існує таке натуральне число x, що $a + x = b$:

$$\forall a, b \in N_0 \ (a < b) \Leftrightarrow \exists \ x \in N \ (a + x = b).$$

На основі того, що $a + 1 = 1 + a = a$ одержуємо таку **властивість:**

1. На множині цілих невід'ємних чисел наступне число завжди більше за попереднє:

$$\forall a \in N_0 \ (a < a').$$

Теорема 7. Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел транзитивне:

$$\forall a, b \in N_0 \ (a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c).$$

Доведення.

► Нехай a, b і c – такі довільні цілі невід'ємні числа, що $a < b$ і $b < c$. За означенням відношення "менше" у множині натуральних чисел N існують такі числа x_1 і x_2, що:

$$a + x_1 = b, \ \ x_1 \in N \ \ \text{і} \ \ b + x_2 = c, x_2 \in N.$$

У другу рівність підставимо значення першої і одержимо:

$$(a + x_1) + x_2 = c.$$

За асоціативною властивістю додавання отримаємо рівність:

$$a + (x_1 + x_2) = c.$$

Оскільки x_1 і x_2 – натуральні числа, то і їх сума $x = x_1 + x_2$ також натуральне число. Отже, $a + x = c$, $x \in N$. За означенням відношення "менше" $a < c$. ◂|

На множині цілих невід'ємних чисел властивості відношення "менше" ілюструють наступні теореми:

Теорема 8. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і x, якщо число x відмінне від нуля, то сума чисел a і x відмінна від числа a:

$$\forall a,\ x \in N_0\ (x \neq 0 \Rightarrow a + x \neq a).$$

Теорема 9. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце одне з трьох відношень:

$$a = b,$$
$$a < b,$$
$$b < a.$$

Доведення.

|▸ Доведемо, що для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце принаймні одне з відношень, про які говориться в теоремі.

Припустимо, що одночасно виконуються одразу два відношення $a = b$ і $a > b$. Враховуючи транзитивність рівностей $a = b$ і $a = b + k$, отримаємо $b \neq b + k$, бо $k \neq 0$. Цим самим прийшли до суперечності, оскільки не може бути, щоб $a = b$ і $b < a$.

Припустимо, що $a > b$ і $b > a$. Тоді існують такі натуральні числа k і l, що $a = b + k$ і $b = a + l$. Підставивши у першу рівність значення другої, отримаємо $a = (a + l) + k = a + (l + k)$. Оскільки $l + k$ є натуральним числом, то рівність $a = a + (l + k)$ – суперечлива. ◂|

На основі даних теорем одержуємо наслідок:

Наслідок 1. Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням строгого лінійного порядку (транзитивне і асиметричне), а сама множина є строго лінійно впорядкованою множиною.

Відношення "більше" (позначається ">"), "менше або рівне" (позначається "≤"), "більше або рівне" (позначається "≥") означуються аналогічно до означень в кількісній теорії цілих невід'ємних чисел, тобто відношення "більше" є оберненим до відношення "менше"; відношення "менше або рівне" є об'єднанням двох відношень – "менше" і "рівне"; відношення "більше або рівне" можна означити такими двома способами: як відношення, обернене до відношення "менше або дорівнює", або як об'єднання двох відношень "більше" і "рівне".

Для відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел справедливі наступні **властивості**:

1. Нуль є найменшим цілим невід'ємним числом:

$$\forall a \in N_0 \ (0 \le a).$$

2. Одиниця є найменшим натуральним числом

$$\forall a \in N_0 \ (1 \le a).$$

3. У множині цілих невід'ємних чисел не існує найбільшого числа (властивість нескінченності множини цілих невід'ємних чисел).

В аксіоматичній теорії цілих невід'ємних чисел, як і в кількісній теорії, для операцій додавання і множення справедливі закони монотонності та правила скорочення.

Із законів монотонності множення і додавання цілих невід'ємних чисел одержуємо **властивості** рівностей і нерівностей, пов'язаних з операціями над ними:

1. Рівності з цілими невід'ємними числами можна почленно додавати:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow (a + c = b + d),$$

2. Рівності з цілими невід'ємними числами можна почленно множити:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a = b) \wedge (c = d) \Rightarrow (a \cdot c = b \cdot d).$$

Доведення.

▶ Доведемо властивість про почленне перемножування рівностей. Нехай a, b, c і d – такі довільні цілі невід'ємні числа, що

$$(a = b) \wedge (c = d).$$

За монотонністю множення цілих невід'ємних чисел:

$$(a \cdot c = b \cdot c) \wedge (b \cdot c = b \cdot d).$$

За транзитивністю відношення рівності цілих невід'ємних чисел:

$$a \cdot c = b \cdot d.$$

Нерівності $a < b$, $c < d$ ($a > b$ і $c > d$) називаються *нерівностями однакового смислу*, а нерівності $a < b$, $c > d$ ($a > b$ і $c < d$) – *нерівностями протилежного смислу*. ◀

3. Нерівності з цілими невід'ємними числами однакового смислу можна почленно додавати:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d).$$

4. Нерівності з цілими невід'ємними числами однакового смислу можна почленно множити:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot d).$$

Доведення.

▶ Нехай a, b, c, d – такі довільні цілі невід'ємні числа, що за означенням відношення "менше" для цілих невід'ємних чисел отримаємо:

$$(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + x_1 = b, x_1 \in N) \wedge (c + x_2 = d, x_2 \in N).$$

За властивостями множення і додавання цілих невід'ємних чисел:

$$(a + x_1)(c + x_2) = b \cdot d, x_1 \cdot x_2 \in N \Rightarrow$$
$$a \cdot c + (a \cdot x_2 + x_1 \cdot c + x_1 \cdot x_2) = b \cdot d, \quad x_1 \cdot x_2 \in N \Rightarrow$$
$$a \cdot c + y = b \cdot d, y = a \cdot x_2 + x_1 \cdot c + x_1 \cdot x_2 \in N.$$

За означенням відношення "менше" для цілих невід'ємних чисел:

$$a \cdot c < b \cdot d \text{ . } ◀$$

5. Рівність і нерівність з цілими невід'ємними числами можна також почленно додавати, зберігаючи в результаті знак нерівності, зокрема:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a = b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d).$$

6. Рівність із натуральними числами і нерівність з цілими невід'ємними числами можна почленно перемножити, зберігаючи при цьому знак нерівності, зокрема:

$$\forall a, b, c, d \in N_0 \ (a = b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot d).$$

Доведення.

▶ Нехай a і b – довільні натуральні числа, а c і d – такі довільні цілі невід'ємні числа, що за означенням відношення "менше" для цілих невід'ємних чисел:

$$a = b \wedge c < d.$$

За властивостями додавання цілих невід'ємних чисел:

$$(a = b, a, b \in N_0) \wedge (c + x = d, x \in N).$$

За властивостями додавання і множення цілих невід'ємних чисел:

$$a \cdot (c + x) = b \cdot d, \quad a, x \in N.$$

За означенням відношення “менше” для цілих невід’ємних чисел:

$$a \cdot c + y = b \cdot d, \quad a, y \in N \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d.$$ ◄

6. Дискретність множини цілих невід’ємних чисел, принципи найменшого та найбільшого чисел

Ряд властивостей цілих невід’ємних чисел порівняно легко доводяться в аксіоматичній теорії.

Множина, яка є строго лінійно впорядкована, називається *дискретною*, якщо для кожного її елемента існує сусідній елемент.

Тобто для двох сусідніх чисел a і a' характерне відношення “безпосередньо йде за”.

Теорема 10. Множина цілих невід’ємних чисел N_0, впорядкована відношенням “менше”, є дискретна.

Доведення.

► Доведемо, що для кожного цілого невід’ємного числа існує сусіднє число.

У множині цілих невід’ємних чисел для будь-якого цілого невід’ємного числа a існує наступне число a'. Доведемо, що числа a і a' є сусідніми.

Введемо таке ціле невід’ємне число b, що виконуватиметься нерівність:

$$a < b.$$

За теоремою про існування попереднього числа, число b можна представити:

$$a + x = b, \; x \in N.$$

Враховуючи властивість одиниці при додаванні:

$$(y' = x) \wedge (a + y' = b) \Rightarrow a + (1 + y) = b.$$

За асоціативним законом додавання:

$$(a + 1) + y = b \Rightarrow a' + y = b.$$

Для довільного цілого невід’ємного числа y можливі два випадки:

$$y = 0, \text{ або } y \neq 0.$$

За означенням відношень “менше” і “менше або рівне” матимемо:

$$\text{якщо } a < b, \text{ то } a' \leq b.$$

З даних нерівностей одержали протиріччя, оскільки не існує такого цілого невід'ємного числа, яке було б більше за a і менше за a'. Отже, a і a' є сусідніми. Тому множина цілих невід'ємних чисел, впорядкована відношенням “менше” і є дискретною. ◄|

Теорема 11	**(принцип найменшого числа).** У кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел існує найменше число.

Доведення.

|► Нехай у множині цілих невід'ємних чисел існує довільна непорожня підмножина A, а число a – деяке число заданої підмножини.

Розглянемо ряд чисел: 0, 1, 2, 3, …, a.

З даного ряду чисел хоча б одне належить множині A. Нехай число b – найменше число цього ряду, яке належить множині A. Тоді воно буде найменшим і у множині A, бо всі числа, які належать ряду, більші від a, а тому більші і від числа b. Отже, множина А задовольняє принцип найменшого числа. ◄|

Аналогічно можна довести і наступну теорему:

Теорема 12	**(принцип найбільшого числа).** У кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел, які не перевищують заданого числа, існує найбільше число.

7. Віднімання і ділення цілих невід'ємних чисел

В аксіоматичній теорії цілих невід'ємних чисел дія віднімання є оберненою до дії додавання.

Дія, за якою знаходять невідомий доданок, якщо відомо суму і другий доданок, називається відніманням:

$$x + b = a \Rightarrow x = a - b.$$

Компоненти при відніманні називаються:

a – зменшуване,

b – від'ємник,

$(a - b)$ – різниця.

Як бачимо, різниця – це число, яке одержують в результаті дії віднімання.

Дії віднімання можна дати й інше означення:

Відніманням чисел називається така операція, яка числам $a, b \in N_0$ ставить у відповідність таке число $a - b$ з множини N_0 (якщо воно існує), що $(a - b) + b = a$.

Якщо $a > b$ і $a = b$, то різниця виду $x = a - b$ існує. Причому, у першому випадку $x \neq 0$, а в другому $x = 0$.

Тому дія віднімання можлива лише тоді, коли $a \geq b$. Звідси випливає, що віднімання на множині цілих невід'ємних чисел не завжди можна виконати.

Теорема 13.	Якщо різниця двох цілих невід'ємних чисел існує, то вона єдина.

Доведення.

▶ Припустимо, що для чисел a і b при $a \geq b$ існують дві різниці:

$$a - b = c_1 \text{ і } a - b = c_2.$$

Тоді $a = b + c_1$ і $a = b + c_2$.

Звідси, за властивістю транзитивності рівностей маємо:

$$b + c_1 = b + c_2.$$

За законом монотонності $c_1 = c_2$. Отже, різниця єдина. ◀

Дія віднімання має такі **властивості:**

1. Множення дистрибутивне відносно віднімання, тобто:

$$(a - b)\, c = ac - bc.$$

Доведення.

▶ За означенням дії віднімання: $(a - b) + b = a$.

За дистрибутивним законом множення відносно додавання:

$$((a - b) + b)\, c = (a - b)\, c + b\, c = ac.$$

Із співвідношення: $(a - b)\, c + b\, c = ac$.

За означенням віднімання маємо: $(a - b)\, c = ac - bc$. ◀

2. Якщо різниця $a - b$ існує, то $a - b \leq a$.

Доведення.

▶ За означенням різниці $(a - b) + b = a$.

Якщо $b = 0$, то $a - b = a$; якщо $b > 0$, то за означенням відношення "більше" $a > a - b$. ◀

3. $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c$.

4. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

5. $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$.

6. $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$.

7. $b > c \Leftrightarrow a - b < a - c$.

Часткою довільних цілих невід'ємних чисел a і $b \neq 0$ (позначається $a : b$ або $\frac{a}{b}$) називається таке ціле невід'ємне число x, що $b \cdot x = a$.

Відповідно, дія ділення – це дія, за якою знаходять невідомий множник, якщо відомо добуток і другий множник.

Компоненти при діленні називаються:

a – ділене,

b – дільник,

$\frac{a}{b}$ – частка.

З означення ділення на b накладається умова: $b \neq 0$.
Проте, якщо $a = 0$, то $0 : b = 0$.

У шкільному курсі математики вказана властивість формулюється у вигляді правила: **ділення на нуль неможливе**.

Доведемо теорему, яка характеризує необхідну умову існування частки натуральних чисел.

Теорема 14. Для натуральних чисел a і b, якщо їх частка існує, то $a \geq b$, зокрема, коли $a \neq b$, то $a > b$.

Доведення.

|► Дійсно, нехай існує частка натуральних чисел a і b, тобто $a : b = x$. Звідси за означенням частки $b \cdot x = a$. Оскільки $a \neq 0$, то з останньої рівності випливає, що $x \neq 0$. Отже, $x \geq 1$. Тому за законом монотонності множення матимемо $b \cdot x \geq b$, що відповідає $a \geq b$. ◄|

Оскільки дія ділення є оберненою до дії множення, тому, щоб ділення виконувалося на множині цілих невід'ємних чисел, необхідно і достатньо, щоб ділене a мало вигляд bk, тобто, щоб ділене було кратним дільника ($a, b, k \in N$).

Проте не кожна пара чисел a і b при довільному їх виборі задовольняють умову $a = bk$. Тому дія ділення на множині цілих невід'ємних чисел, на відміну від додавання і множення, виконується не завжди і є частковою операцією.

8. Ділення з остачею на множині цілих невід'ємних чисел

Розглянемо узагальнення дії ділення, яке називається діленням з остачею. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $b \neq 0$ *поділити a на b з остачею* – означає знайти таку пару цілих невід'ємних чисел q і r, що:

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Число q називається *неповною часткою,* а r – *остачею* при діленні числа a на число b з остачею.

Існування та єдність неповної частки і остачі встановлюється наступною теоремою:

Теорема 15. Для будь-якого цілого невід'ємного числа a і натурального числа b існує така єдина пара цілих невід'ємних чисел q і r, що

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (1)$$

Доведення.

▶ I. Доведемо існування пари чисел q і r, для яких виконуються умови:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Розглянемо множину A таких цілих невід'ємних чисел x, що $x = a - b \cdot y$, де $y \in N_0$. Множина A – непорожня, бо при $y = 0$ і $x = a$, а також за означенням множини A ($a \in A$). За принципом найменшого числа у множині A при деякому $y = q$ число $r = a - b \cdot q$ є найменшим. Звідси:

$$a = b \cdot q + r. \quad (2)$$

Доведемо, що $r < b$. Припустимо, що $r \geq b$. Тоді існує різниця чисел r і b ($r - b = r_1$). За означенням різниці і відношення "менше" дістанемо $r = b + r_1$ і $r_1 < r$. З рівності (2) матимемо:

$$a = b \cdot q + (b + r_1) = b \cdot (q + 1) + r_1,$$

тобто $a = b \cdot (q + 1) + r_1$. Одержуємо, що $r_1 = a - b \cdot (q + 1)$ і $r_1 \in A$ та $r_1 < r$. А це суперечить вибору числа r як найменшого у множині A.

Отже, $r < b$ і пара чисел q та r існує.

II. Доведемо єдиність пари чисел q і r, які задовольняють умові (1). Припустимо, що

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \; r_1 < b \text{ і } a = b \cdot q_2 + r_2, r_2 < b.$$

Тоді

$$b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2, \; r_1 < b, \; r_2 < b, \quad (3)$$

причому $(q_1, r_1) \neq (q_2, r_2)$.

Якщо $r_1 = r_2$, то з (3) за правилом скорочення матимемо $q_1 = q_2$, що й доводить єдиність пари у цьому випадку.

Будемо вважати $r_1 \neq r_2$ і $r_1 < r_2$. Тоді з (3) одержуємо

$$r_2 - r_1 = b \cdot (q_1 - q_2),\ \ r_1 < r_2 < b.$$

Отже, існує частка чисел $r_2 - r_1$ і b. Але $r_1 < r_2 < b$.

Тому $1 \leq r_2 - r_1 < b$, що суперечить необхідній умові існування частки натуральних чисел. Одержане протиріччя доводить єдиність частки і остачі. ◄

Приклади. Поділити a на b з остачею, якщо

$$1)\ a = 28 \text{ і } b = 6 \Rightarrow 28 = 6 \cdot 4 + 4;$$
$$2)\ a = 33 \text{ і } b = 6 \Rightarrow 33 = 6 \cdot 5 + 3;$$
$$3)\ a = 40 \text{ і } b = 6 \Rightarrow 40 = 6 \cdot 6 + 4;$$
$$4)\ a = 5 \text{ і } b = 6 \Rightarrow 5 = 6 \cdot 0 + 5.$$

Ділення з остачею дає можливість встановити умову існування частки у множині цілих невід'ємних чисел.

Теорема 16. Для будь-яких цілих невід'ємних чисел, таких, що a і $b \neq 0$ їх частка $a : b$ існує тоді і тільки тоді, коли при діленні

Ділення у множині цілих невід'ємних чисел можна розглядати як частковий випадок ділення з остачею, коли остача дорівнює нулю.

Ділення з остачею буде застосовуватися при вивченні теми "Системи числення".

9. Метод математичної індукції

Можливість перевірити доводжувані твердження для всіх чисел дає спеціальний метод доведення, який називається *методом математичної індукції*. Теоретичною основою методу математичної індукції є теорема.

Нагадаємо, що речення, які містять змінні аргументи (позначимо $P(n)$) і після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об'єктів з певної множини M перетворюються у висловлювання, називають ***висловлювальними формами***.

У випадку, що розглядається, $P(n)$ – висловлювальна форма від однієї змінної, або одномісна висловлювальна форма.

Одномісним предикатом називається відображення p, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише у двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення виду $M \overset{p}{\mapsto} \{0; 1\}$.

Принцип математичної індукції.

У ряді математичних тверджень йдеться про нескінченну множину об'єктів і переглянути всі ці об'єкти просто неможливо. Існує метод міркувань, що заміняє нездійсненний перебір такої нескінченної множини випадків і називається методом математичної індукції, підґрунтям якого є *принцип математичної індукції*.

Якщо предикат $P(n)$, який визначений на множині цілих невід'ємних чисел, задовольняє такі умови, як

1) висловлення $P(1)$ – істинне;

2) припускаючи істинність твердження $P(k)$, доводять істинність твердження $P(k + 1)$.

Якщо доведення істинне для кожного натурального значення k, то, відповідно до принципу математичної індукції, твердження $P(n)$ є істинним для будь-яких натуральних значень n.

На принципі математичної індукції базується метод доведення, який називається методом математичної індукції. Він складається з трьох частин.

Схема доведення *методом математичної індукції* така:

1. Практичною перевіркою встановлюється, що предикат $P(n)$ істинний при $n = 1$.
2. Припускається, що предикат $P(n)$ істинний при $n = k$.
3. Доводиться, що предикат $P(n)$ істинний і при $n = k + 1$.

На основі розглянутого, за принципом математичної індукції, робиться висновок, що предикат $P(n)$ істинний для всіх цілих невід'ємних чисел.

За принципом математичної індукції можна доводити рівності, нерівності, а також подільність цілих невід'ємних чисел, які розглядатимуться пізніше.

Теорема 17. Якщо предикат $P(n)$, визначений для всіх натуральних чисел $n \geq a$ (a – задане натуральне число), задовольняє такі умови:

1) висловлення $P(a)$ – істинне,

2) з того, що предикат $P(n)$ істинний при довільному натуральному числі $k > a$, випливає, що предикат $P(n)$ істинний і при

$$n = k + 1,$$

то предикат істинний для всіх натуральних чисел $n \geq a$.

Задача 1. Довести, що для всіх натуральних чисел $n \geq 3$ має місце нерівність $n^2 > 2n + 1$.

Розв'язання.

Доведемо це твердження методом математичної індукції, врахувавши попередню теорему.

1. При $n = 3 : 3^2 = 9$, $2 \cdot 3 + 1 = 7$ і $9 > 7$. Отже, нерівність істинна при $n = 3$.

2. Припускаємо, що нерівність істинна при $n = k$, тобто, що має місце нерівність $k^2 > 2k + 1$.

3. Доведемо, що нерівність істинна при $n = k + 1$, тобто, що:

$$(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1.$$

За формулою для квадрата суми двох чисел одержуємо:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1.$$

За припущенням $k^2 > 2k + 1$, а тому:

$k^2 + 2k + 1 > (2k + 1) + (2k + 1)$ або $k^2 + 2k + 1 > (2k + 2) + 2k$.

Оскільки k – натуральне число, то $2k > 1$. Отже:

$$(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1.$$

Таким чином, за принципом математичної індукції нерівність істинна для всіх натуральних чисел $n \geq 3$.

Задача 2. Довести, що $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Розв'язання.

1) Доведемо, що рівність виконується при $n = 1$:

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 \text{ і } n^2 = 1^2 = 1.$$

2) Доведемо, що рівність виконується при $n = k$:

$$1+3+5+...+(2k-1) = k^2.$$

3) Доведемо, що рівність виконується при $n = k+1$:

$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ – розкриємо дужки

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+2-1)=(k+1)^2,$$

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$ Оскільки

$$\underbrace{1+3+5+...+(2k-1)}_{k^2}+(2k+1)=(k+1)^2$$ (за доведеним у п.2.)

$$k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Задача 3. Довести подільність при кожному натуральному n: $6^{2n+1}+20\cdot 3^{n+1} \vdots 11$.

Розв'язання. Позначимо вираз $6^{2n+1}+20\cdot 3^{n+1}$ через $f(n)$. Доведемо подільність $f(n) \vdots 11$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$
отримаємо: $f(1) = 6^{2\cdot 1+1} + 20\cdot 3^{1+1} = 6^3 + 20\cdot 3^2 = 216 + 180 = 396$.
Оскільки $(3 + 9) - 9 = 0 \vdots 11$, то і $396 \vdots 11$.

2. Припустимо, що $f(k) = 6^{2k+1} + 20\cdot 3^{k+1} \vdots 11$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k+1) = (6^{2k+3} + 20\cdot 3^{k+2}) \vdots 11$.

Тоді $f(k+1) = 6^{2k+1+2} + 20\cdot 3^{k+1+1} = 6^2\cdot 6^{2k+1} + 20\cdot 3\cdot 3^{k+1} =$
$= 36\cdot 6^{2k+1} + 20\cdot 3\cdot 3^{k+1}$.

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення:

якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться:

$$f(k+1) = 36\cdot 6^{2k+1} + 20\cdot 3\cdot 3^{k+1} =$$

$$= 36\cdot 6^{2k+1} + \underbrace{36\cdot 20\cdot 3^{k+1} - 36\cdot 20\cdot 3^{k+1}}_{\textit{ДОДАМО І ВІДНІМЕМО ОДИН І ТОЙ САМИЙ ВИРАЗ}} + 3\cdot 20\cdot 3^{k+1} =$$

згрупуємо два перші доданки:

$$= 36\,(6^{2k+1} + 20\cdot 3^{k+1}) - 36\cdot 20\cdot 3^{k+1} + 20\cdot 3\cdot 3^{k+1} =$$

$$= 36\,\underbrace{(6^{2k+1} + 20\cdot 3^{k+1})}_{\textit{ДІЛИТЬСЯ НА 11 ЗА ПРИПУЩЕННЯМ П.2.}} - \underbrace{36\cdot 20\cdot 3^{k+1} + 3\cdot 20\cdot 3^{k+1}}_{=33\cdot 20\cdot 3^{K+1}} =$$

$$= 36\,(6^{2k+1} + 20\cdot 3^{k+1}) - 33\cdot 20\cdot 3^{k+1}.$$

Як бачимо, у зменшуваному алгебраїчний вираз, що міститься у дужках, ділиться на 11 за п.2, а у від'ємнику $33 \vdots 11$. Різниця ділиться на число тоді, коли зменшуване і від'ємник діляться на число, то доходимо висновку, що $f(k+1) \vdots 11$.

Відповідь. Отже, $6^{2n+1} + 20\cdot 3^{n+1} \vdots 11$.

Задача 4. Довести подільність при кожному натуральному n:

$$4^n + 15n - 1 \vdots 9.$$

Розв’язання. Позначимо вираз $4^n + 15n - 1 = f(n)$. Доведемо подільність $f(n) \vdots 9$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$ отримаємо:

$$f(1) = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18,\ 18 \vdots 9.$$

2. Припустимо, що $f(k) = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k + 1) = 4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 \vdots 9$.

Тоді $f(k + 1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14$.

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення:

вираз $15k$ представимо у вигляді $4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k = 15k$;

якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться:

$$f(k + 1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 =$$

$$= 4 \cdot 4^k + \underbrace{4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k}_{15k} - \underbrace{4 + 4}_{0} + 14 =$$

перегрупуємо доданки

$$= (4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 4) - 3 \cdot 15k + 4 + 14 =$$

з дужок винесемо 4 за дужки, а вираз

$$3 \cdot 15k = 3 \cdot 3 \cdot 5k = 9 \cdot 5k$$

$$= 4\underbrace{(4^k + 15k - 1)}_{\text{ДІЛИТЬСЯ НА } 9 \text{ ЗА П. } 2.} - \underbrace{9 \cdot 5k}_{\vdots 9} + \underbrace{18}_{\vdots 9}.$$

Оскільки всі доданки діляться на 9, то і сам вираз ділиться на 9.

Відповідь. Отже, $4^n + 15n - 1 \vdots 9$.

10. Відрізок натурального ряду

За допомогою аксіоматичної теорії цілих невід’ємних чисел при лічбі елементів скінченної множини можна встановити зв’язок між кількісними і порядковими натуральними числами.

Множина натуральних чисел, впорядкованих відношенням “менше”, називається *натуральним рядом чисел* (*натуральним рядом*). Перші елементи натурального ряду записуються

1, 2, 3,4, 5, 6, 7.....

Множина натуральних чисел, які не перевищують заданого натурального числа *n*, називається *відрізком натурального ряду*.

Із означення відрізка натурального ряду випливає, що одиниця належить кожному відрізку натурального ряду.

Теорема 18.	Кожний відрізок натурального ряду є скінченною множиною.

З наведених міркувань випливає теорема.

Теорема 19.	Кожна скінченна непорожня множина рівнопотужна єдиному відрізку натурального ряду.

Потужність скінченної і непорожньої множини A називають *кількісним натуральним числом.*

Кількісні натуральні числа вживаються при розгляді задач про кількість елементів у тій чи іншій множині. Якщо множина порожня, то кількість елементів приймається рівною 0. Отже, кожне ціле невід'ємне число є кількісною характеристикою скінченної множини.

З іншого боку, цілі невід'ємні числа, які визначаються аксіомами Пеано, називають *порядковими цілими невід'ємними числами* (зокрема, *порядковими натуральними числами*). Порядкові натуральні числа вживаються при розгляді задач про порядок елементів у тій чи іншій множині. Отже, одне й те ж натуральне число, залежно від обставин, можна розглядати як кількісне і як порядкове натуральне число.

Встановлення взаємно однозначної відповідності між числами відрізка натурального ряду і елементами скінченної непорожньої множини A називається *нумерацією її елементів,* а сам процес – *лічбою елементів множини A.* Результат лічби не залежить від її порядку за умови, що при лічбі не було пропущено жодного з елементів. Останнє твердження іноді називають *аксіомою лічби.* З ним учні ознайомлюються на перших уроках математики.

Зв'язок порядкових і кількісних чисел знайшов своє відображення у початковому курсі математики. Уже при вивченні чисел першого десятка учні повинні усвідомити кількісне і порядкове значення числа. Вони навчаються користуватися вивченими відрізками натурального ряду чисел для одержання відповіді на питання, скільки елементів входить у дану множину та зрозуміти, що за допомогою тієї ж послідовності можна розмістити елементи в певному порядку, перенумерувавши їх. Більше того, учні повинні впевнено володіти операцією лічби елементів множини, виконувати її в різних умовах. Виконуючи лічбу предметів, учні ознайомлюються з випадками, коли множини є рівнопотужними (5 пальців, 5 яблук, 5 паличок і т. і.). На основі цього вони помічають те спільне, що є в усіх множинах (“у них порівну предметів”, “яблук стільки ж, скільки пальців на руці” тощо).

При теоретико-множинному підході до побудови множини цілих невід’ємних чисел користувалися такими означеннями скінченної множини:

1. Множина називається *скінченною*, якщо вона нерівнопотужна жодній власній підмножині.

2. Множина називається *скінченною*, якщо вона або порожня, або рівнопотужна деякому відрізку натурального ряду.

Доведення рівносильності цих означень ґрунтується на теоремі.

Теорема 20. Жодний відрізок натурального ряду нерівнопотужний жодній власній підмножині.

§ 3. НАТУРАЛЬНЕ ЧИСЛО ЯК РЕЗУЛЬТАТ ВИМІРЮВАННЯ ВЕЛИЧИНИ

Практична діяльність змушує людину оперувати різними величинами. Практична потреба в їх лічбі та вимірюванні сприяли виникненню поняття натурального числа (N). Різні способи вимірювання величин об'єднує спільний принцип. Він полягає в тому, що серед об'єктів, які потрібно виміряти, вибирається довільний, який називають *одиничним відрізком*, а всі інші порівнюються з ним. Результатом порівняння є різного виду числа, насамперед натуральні. Зміст натурального числа як результату вимірювання величин можна розглянути на прикладі вимірювання відрізка.

1. Відрізки та відношення між ними

Відрізок – це частина прямої, обмеженої двома точками. Ці точки називаються *кінцями відрізка*. Всі інші точки відрізка, які лежать між кінцями, називаються *внутрішніми точками*. Відрізок позначається двома великими латинськими літерами, що відповідають кінцям відрізка (наприклад $\alpha = AB$ і $\beta = CD$).

Відрізки α і β називаються рівними (позначаються $\alpha = \beta$), якщо вони можуть бути суміщені своїми кінцями (один з них можна накласти на другий так, щоб їхні кінці збігалися).

Теорема 1. Відношення рівності на множині відрізків є відношенням еквівалентності.

Відрізки α і β можна порівнювати. З цією метою на промені OX відкладають відрізки $OA = \alpha$ і $OB = \beta$. Розглядають такі три випадки:

1. Точки A і B збігаються (рис. 1). У даному випадку $OA = OB$ або $\alpha = \beta$.

Рис. 1

2. Точка *B* – внутрішня точка відрізка *OA* (рис. 2). Тоді відрізок *OB* називається *меншим* за відрізок *OA*, а відрізок *OA* – *більшим* за відрізок *OB* (записується відповідно $OB < OA$ ($OA > OB$), або $\beta < \alpha$ ($\alpha > \beta$)).

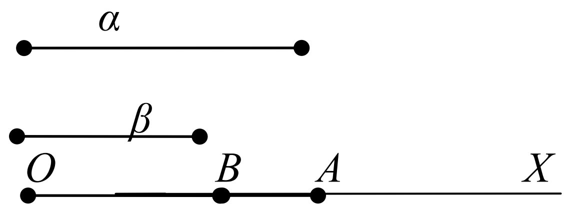


Рис. 2

3. Точка *A* є внутрішньою точкою відрізка *OB* (рис. 3). Відрізок *OA* називається *меншим* за відрізок *OB*, а відрізок *OB* – *більшим* за відрізок *OA* (записується відповідно $OA < OB$ ($OB > OA$), або $\alpha < \beta$ ($\beta > \alpha$)).

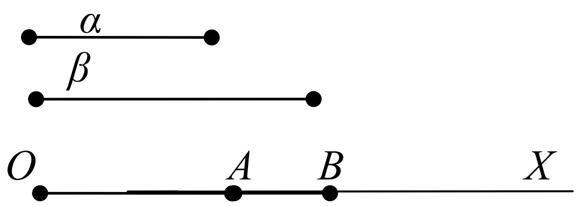


Рис. 3

На основі наведених прикладів одержуємо теорему:

Теорема 2. Для довільних відрізків α і β має місце тільки одне з відношень: або $\alpha = \beta$, або $\alpha < \beta$, або $\alpha > \beta$.

Теорема 3. Відношення "менше" ("більше") транзитивне на множині відрізків.

Із даних теорем одержуємо наслідок:

Наслідок 1. Відношення "менше" ("більше") є відношенням строгого лінійного порядку на множині відрізків.

Користуючись відношеннями "рівне", "менше" ("більше"), множину всіх відрізків можна розбити на класи рівних між собою відрізків.

2. Операції над відрізками

Розглянемо операції над відрізками, зокрема додавання і віднімання.

Відрізок β є сумою відрізків α_1, α_2, ..., α_n, якщо вони лежать на одному і тому самому промені, не мають жодної спільної внутрішньої точки і кінець першого відрізка є початком другого.

Записується

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \ldots + \alpha_n.$$

Висловлювання "відрізок складається з відрізків" замінюють терміном: "відрізок розбито на відрізки".

Якщо відрізок β складається з n рівних відрізків, кожен з яких дорівнює α, тобто

$$\beta = \underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{n\ разів},$$

то відрізок β **поділено на *n* рівних частин** (відрізків), і записують:

$$\beta = n\alpha\ ,\ \alpha = \frac{\beta}{n}\ \text{або}\ \alpha = \frac{1}{n}\beta\ .$$

Замість висловлювання "відрізок β поділено на n рівних відрізків α" кажуть "відрізок α вміщується (вкладається) у відрізку β n разів".

Якщо відрізок $\beta = \alpha$, то кажуть, що відрізок α **вміщується у відрізку** β один раз, і записують $\beta = 1\alpha$.

Сумою довільних відрізків α і β (позначається $\alpha + \beta$) називається відрізок y, який складається з цих відрізків.

Суму відрізків α і β можна зобразити на промені OX (рис. 4) шляхом відкладання відрізка $OA = \alpha$, а потім відрізка $AB = \beta$.

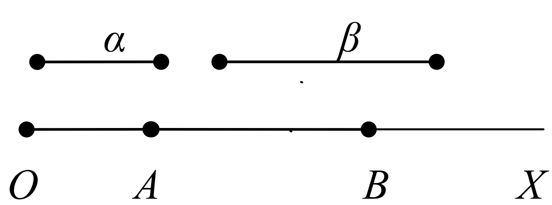


Рис. 4

Теорема 4. Сума двох довільних відрізків завжди існує та є єдиною (з точністю до відношення рівності відрізків).

Операція на множині відрізків, при якій кожній парі відрізків α і β ставиться у відповідність їх сума $\alpha + \beta$, називається *додаванням відрізків.*

Теорема 5. Для довільних відрізків α, β і γ мають місце властивості додавання:
1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ – комутативний закон додавання;
2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ – асоціативний закон додавання;
3) $\alpha + \beta > \alpha \wedge \alpha + \beta > \beta$;
4) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$;
5) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

Різницею довільних відрізків α і β (позначається $\alpha - \beta$) називається такий відрізок γ, що $\alpha + \beta = \gamma$.

Для знаходження різниці відрізків на промені OX (рис. 5) відкладають відрізки $OA = \alpha$ і $OB = \beta$. Тоді відрізок BA і буде різницею відрізків.

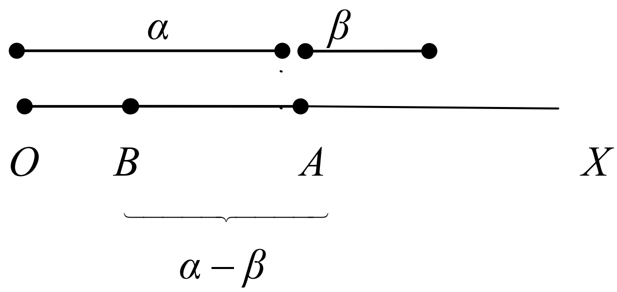


Рис. 5

Теорема 6. Якщо $\alpha > \beta$, тоді існує різниця відрізків α і β. Якщо різниця відрізків α і β існує, то вона єдина.

На множині відрізків операція, при якій кожній парі відрізків α і β, де $\alpha > \beta$, ставиться у відповідність їх різниця $\alpha - \beta$, називається *відніманням відрізків.*

У початковому курсі математики з відрізками учні ознайомлюються в першому класі після того, як у них сформувалося розуміння поняття точки. Для цього на дошці, наносять дві різні точки, які з'єднують за допомогою лінійки і кажуть, що одержана фігура називається відрізком, а нанесені точки – його кінцями.

Учні навчаються креслити відрізки, знаходити і виділяти їх на навколишніх предметах. Шляхом накладання відрізків вводяться відношення “рівності”, “менше” і “більше” між ними. Учні вивчають операції додавання і віднімання над відрізками. Пізніше вони навчаються позначати кінці відрізків великими латинськими буквами.

3. Натуральне число як міра відрізка

При порівнянні відрізків та виконанні операцій над ними не завжди зручно користуватися безпосередньо самими відрізками. Постає завдання як звести ці дії до порівняння і операцій над натуральними числами. Дана задача розв’язується за допомогою вимірювання відрізків.

Виберемо у множині відрізків деякий відрізок ε (умовну одиницю довжини), який називається *одиничним відрізком.* Довільний відрізок α можна розбити на відрізки, рівні одиничному відрізку ε.

При розбитті можливі два випадки:

1) Відрізок a розбивається на n відрізків, які дорівнюють ε, тобто

$$\alpha = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n\ \text{доданків}}$$

На рис. 6

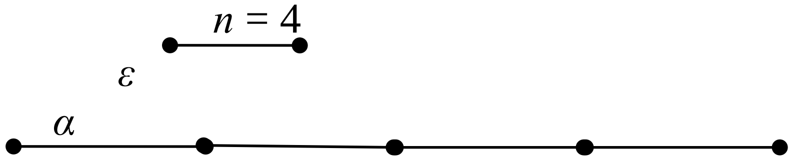


Рис.6

2) У множині натуральних чисел не існує такого натурального числа n, щоб відрізок α можна було розбити на n відрізків, кожен з яких дорівнює ε.

Якщо вибраний одиничний відрізок ε і відрізок α можна розбити на n одиничних відрізків, то число n називається *мірою відрізка α при одиничному відрізку ε*, або *значенням довжини* *відрізка α,* або *числовим значенням довжини відрізка α при одиничному відрізку ε,* або *довжиною відрізка α.*

Якщо відрізок *α* дорівнює одиничному відрізку, то за означенням його міра дорівнює одиниці.

Якщо натуральне число *n* є мірою відрізка *α* при одиничному відрізку *ε*, то виконується рівність

$$\alpha = \begin{cases} \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + ... + \varepsilon}_{n\ доданків},\ якщо\ n > 1; \\ \varepsilon,\ якщо\ n = 1, \end{cases}$$

або

$$\alpha = n \cdot \varepsilon$$

Наведений приклад на рис. 7 показує, що числове значення довжини відрізка залежить від вибору одиничного відрізка, де

$$\alpha = 3 \cdot \varepsilon \text{ і } \alpha = 6 \cdot \varepsilon_1.$$

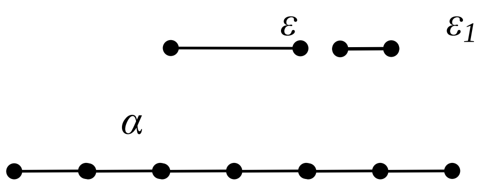


Рис. 7

Якщо визначено одиничний відрізок, а розглядуваний відрізок має міру, то вона визначається завжди однозначно.

Для довільного натурального числа *n* при вибраному одиничному відрізку *ε* існує єдиний відрізок, мірою якого є число *n*. Проте, не кожний відрізок при одиничному відрізку має своєю мірою натуральне число.

З цих міркувань одержуємо наслідок.

Наслідок 2. Натуральне число як міра відрізка вказує, сумою скількох одиничних відрізків є заданий відрізок. При вибраному одиничному відрізку це число єдине.

Якщо при одиничному відрізку розглядати натуральні числа як міри відрізків, то матимемо наслідки.

Наслідок 3. Два натуральні числа будуть рівними тоді і тільки тоді, коли відрізки, для яких вони є мірами, рівні.

Наслідок 4. З двох натуральних чисел меншим буде те відрізок, мірою якого є дане число, менший за відрізок, мірою якого є інше число.

Визначення натурального числа як міри відрізка дає можливість по-іншому підійти до означення арифметичних операцій над натуральними числами, які будуть використовуватися для розширення поняття натурального числа.

4. Додавання і віднімання натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків

Розглянемо n і k – будь-які натуральні числа. Виберемо довільний одиничний відрізок ε і представимо відрізки у вигляді:

$$\alpha = n \cdot \varepsilon \text{ та } \beta = k \cdot \varepsilon.$$

Одержимо

$$\alpha + \beta = n \cdot \varepsilon + k \cdot \varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ доданків}} + \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{k \text{ доданків}}.$$

У одержану суму відрізок ε входить $n + k$ разів, а тому:

$$\alpha + \beta = (n + k) \cdot \varepsilon.$$

Теорема 7. Якщо при вибраному одиничному відрізку ε відрізки α і β мають мірами відповідно натуральні числа n і k, то їх сума має мірою натуральне число $n + k$.

Дана теорема дає можливість сформулювати означення суми довільних двох натуральних чисел.

Сумою двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n + k$) при вибраному одиничному відрізку називається таке натуральне число, яке є мірою відрізка, що є сумою двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k.

Теорема 8. Сума натуральних чисел завжди існує і є єдиною.

Доведення.

► Нехай n і k – довільні натуральні числа, а ε – вибраний одиничний відрізок. Побудуємо відрізки $\alpha = n \cdot \varepsilon$ та $\beta = k \cdot \varepsilon$. Сума відрізків $\alpha + \beta$ завжди існує і єдина. Вона визначається як об'єднання двох скінченних множин одиничних відрізків. На основі означення міри відрізка, мірою відрізка $\alpha + \beta$ є натуральне число, причому воно єдине при вибраному одиничному відрізку. Отже, сума натуральних чисел завжди існує і єдина. ◄

Ця теорема дає можливість визначити операцію додавання на множині натуральних чисел. Оскільки сума натуральних чисел означена через суму відрізків, то для операції додавання натуральних чисел матимуть місце властивості, аналогічні властивостям операції додавання відрізків.

Такі міркування приводять до означення різниці натуральних чисел, які розглядаються як міри відрізків.

Різницею двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n-k$) при вибраному одиничному відрізку, називається натуральне число, яке є мірою різниці двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k.

Різниця натуральних чисел, яка означена через різницю відрізків, існує і єдина тоді і тільки тоді, коли перший відрізок більший за другий. Загалом, у множині натуральних чисел різниця натуральних чисел існує і єдина тоді і тільки тоді, коли перше число більше за друге. Операція віднімання є частковою (виконується не завжди) операцією у множині натуральних чисел.

Розгляд суми і різниці натуральних чисел як міри величин дає можливість обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні різних задач, які розглядаються у курсі математики.

Задача 1. Обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні задачі.

За перший день турист пройшов 8 км, а за другий – 6 км. Яку відстань пройшов турист за два дні? На скільки кілометрів більше пройшов турист першого дня, ніж другого?

Розв'язання. Шлях, який пройшов турист за два дні, розглядається як сума двох відрізків, кожен з яких є шляхом, пройденим туристом відповідно за перший і другий дні. Їх мірами є числа 8 і 6 при одиничному відрізку, який дорівнює 1 кілометр.

Міра відрізка, який є сумою відрізків, дорівнює сумі мір даних відрізків, тому міра всього шляху знаходиться за допомогою операції додавання:

$$8 + 6 = 14 \text{ (км)}.$$

Оскільки $8 > 6$, то існує відрізок, який є різницею відрізків, що відповідають шляхам, пройденим туристом відповідно за перший і другий дні, а його числове значення вказує, на скільки перший відрізок більший за другий. Міра відрізка, що дорівнює різниці відрізків, знаходиться за допомогою операції віднімання:

$$8 - 6 = 2 \text{ (км)}.$$

Відповідь. 14 км, на 2 км.

5. Множення і ділення натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків

Поняття добутку і частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків, можна представити через розв'язування задач про знаходження міри відрізка при різних одиничних відрізках.

Нехай ε і ε_1 – вибрані одиничні відрізки, а n і k – натуральні числа такі, що n – міра відрізка α при одиничному відрізку ε, а k – міра відрізка ε при одиничному відрізку ε_1, тобто $\alpha = n\,\varepsilon$ і $\varepsilon = k\,\varepsilon_1$. За означенням міри відрізка одержимо наступні рівності:

$$\alpha = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ доданків}} \quad і \quad \varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{k \text{ доданків}}.$$

Представимо наступні суми у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 + \\ + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{+ \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 + \varepsilon_1}_{k \text{ доданків у кожному рядку}} \end{array}\right\} n \text{ рядків}$$

За означенням добутку натуральних чисел одержимо:

$$\alpha = (n \cdot k) \cdot \varepsilon_1.$$

Теорема 9. При вибраних одиничних відрізках ε і ε_1 таких, що відрізок α при одиничному відрізку ε має мірою натуральне число n, а відрізок ε при одиничному відрізку ε_1, має мірою натуральне число k, мірою відрізка α при одиничному відрізку ε_1, буде натуральне число, що дорівнює добутку чисел n і k:

$$\alpha = (n \cdot k) \cdot \varepsilon_1.$$

Ця теорема дає можливість сформулювати означення добутку натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків.

Добутком двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n \cdot k$) при одиничному відрізку ε_1 називається таке натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де n є мірою цього ж відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε.

Теорема 10. Добуток двох довільних натуральних чисел завжди існує і є єдиним.

Доведення.

▶ Нехай n і k – довільні натуральні числа, а ε – одиничний відрізок. Побудуємо відрізок $\alpha = n \cdot \varepsilon$. Виберемо одиничний відрізок ε_1 такий, що $\varepsilon = k\,\varepsilon_1$.

Відрізок α розглядається як об'єднання скінченної множини одиничних відрізків ε, кожен з яких, у свою чергу, є об'єднанням скінченної множини одиничних відрізків ε_1. Отже, відрізок α є об'єднанням скінченної множини одиничних відрізків ε_1. На основі означення міри відрізка відрізок α має мірою натуральне число, причому воно єдине при одиничному відрізку ε_1.

Отже, означений добуток натуральних чисел завжди існує і єдиний. ◀

Теорема дає можливість визначити операцію множення натуральних чисел. Встановлення властивостей множення натуральних чисел на основі означення добутку натуральних чисел будуть мати певні особливості.

Нехай існує частка натуральних чисел n і k така, що $n : k = p$. З цієї рівності $n = k \cdot p$. Виберемо одиничний відрізок ε і розглянемо відрізки
$\alpha = n \cdot \varepsilon$ та $\varepsilon_1 = k \cdot \varepsilon$. Визначимо, якою буде міра відрізка α при одиничному відрізку ε_1.

За означенням міри відрізка одержимо:

$$\alpha = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n\ доданків} \quad і \quad \varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{k\ доданків}.$$

Враховуючи, що $n = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{k\ доданків}$, відрізок α можна представити у вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon + \\ + \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{+ \varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon + \varepsilon}_{k\ доданків\ у\ кожному\ рядку} \end{array}\right\} p\ рядків$$

Звідси одержуємо, що $\alpha = \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1}_{p = n:k}$, тобто

$\alpha = (n : k) \cdot \varepsilon_1$.

Теорема 11. При вибраних одиничних відрізках ε і ε_1, таких, що відрізок α має мірою натуральне число n при одиничному відрізку ε, а відрізок ε_1, має мірою натуральне число k при одиничному відрізку ε, то мірою відрізка α при одиничному відрізку ε_1, буде частка чисел n і k за умови, що частка існує:

$$\alpha = (n : k) \cdot \varepsilon_1.$$

Теорема дає можливість сформулювати означення частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків.

Часткою двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n : k$ або $\frac{n}{k}$) при одиничному відрізку ε називається натуральне число, яке є мірою відрізку при одиничному відрізку ε_1, де число n є мірою цього ж відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε_1.

Оскільки у множині натуральних чисел довільний відрізок a не завжди можна розбити на відрізки

$$\varepsilon_1 = k \cdot \varepsilon, \text{ де } k > 1,$$

то частка натуральних чисел не завжди існує.

Якщо ж частка натуральних чисел існує, то вона єдина. Операція знаходження частки натуральних чисел називається *діленням*. Вона буде частковою операцією у множині натуральних чисел.

Означення добутку і частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків, показують, що за допомогою множення здійснюється перехід до менших одиничних відрізків, а при діленні – до більших одиничних відрізків.

Визначення натуральних чисел як міри величин дає можливість обґрунтувати вибір арифметичних операцій при розв'язуванні задач.

Задача 2. Обґрунтувати вибір арифметичних операцій при розв'язуванні задачі.

На пошиття шкільної форми витрачають два метри шерстяної тканини. Скільки комплектів можна пошити з 14 м шерстяної тканини?

Розв'язання. Всю тканину можна розглядати як відрізок, мірою якого є натуральне число 14 при одиничному відрізку "метр", а шкільну форму – як новий еталон, мірою якого є натуральне число 2 при одиничному відрізку "метр". Кількість комплектів буде мірою відрізка шерстяної тканини при еталоні "шкільна форма", і, оскільки " шкільна форма" є більшим еталоном, ніж "метр", то відповідь на питання задачі одержуємо за допомогою операції ділення:

$$14 : 2 = 7 \text{ (к.)}.$$

Відповідь. 7 комплектів.

У початковому курсі математики приділяється велика увага питанню вимірювання величин. Результатом їх вимірювання завжди є натуральне число. У процесі вимірювання учні переконуються на практиці, що за допомогою лічби і у результаті вимірювання одержується число, яке вказує, наприклад, скільки гир масою 1 кг потрібно поставити на другу шальку терезів, щоб врівноважити зважуваний предмет, скільки літрів води, молока і т. д. містить дана посудина.

ВПРАВИ

1. Задати відрізки a, b і c так, щоб можливою стала побудова таких відрізків:

а) $a - (b + c)$ $(a - b)$ c;

б) $a + b - c$ $a - c + b$;

в) $a - (b - c)$ $(a - b) + c$;

г) $a - b + c$ $(a + c) - c$;

д) $a + (b - c)$ $(a + b) - c$;

е) $a + b - c$ $(a - c) + b$.

2. Задати довільний різносторонній трикутник ABC зі сторонами a, b і c. Побудувати суми $a + b$, $b + c$ і $c + a$ і порівняти кожну з цих сум з третьою стороною.

3. Вибрати одиничний відрізок e:

а) побудувати відрізок довжиною $2e$, $3e$, $5e$, $6e$.

б) побудувати відрізок, у якому одиничний відрізок e вкладається 4 рази з остачею. Підібрати відрізок так, щоб четверта частина одиничного відрізка вкладалася в остачі ціле число разів. Записати міру довжини відрізка при новій одиниці довжини.

§ 4. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

1. Поняття про системи числення та їх види

У процесі еволюції виникла потреба не тільки називати та записувати певні числа, але й виконувати дії над ними. Як результат практичної діяльності у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел (Додаток В).

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число. Для нас загальноприйнятою є позиційна десяткова система числення. Умовними знаками для запису чисел вживаються цифри.

Перед кожною системою числення ставляться такі три вимоги:

1) будь-яке ціле невід'ємне число записується однозначно у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, достатньо прості.

Для деяких цілих невід'ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються *цифрами,* а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються *вузловими*. Усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються *алгоритмічними.*

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні.*

Система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється, називається *непозиційною*.

У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у записі числа. З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська система числення, якою у деяких випадках користуються і нині.

У ній застосовується сім знаків: I –1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000.

Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами. Наприклад, у римській системі числення записом числа 1996 буде MCMXCVI, а 324 = CCCXXIV.

Недоліки непозиційної системи числення: відсутність нуля, складність виконання арифметичних операцій. Хоча римськими числами часто користуються при нумерації розділів у книгах, віків в історії та інше.

Одним із недоліків непозиційних систем числення є те, що у них для запису великих чисел потрібно вводити все нові і нові вузлові числа, а, отже, нові цифри.

Щоб визначити число, недостатньо знати тип і алфавіт системи числення. Для цього необхідно ще додати правила, які дають змогу за значеннями цифр встановити значення числа.

Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа, називається *позиційною*. Це значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. Тому позиційні системи числення набули широкого вжитку. У них використовується розрядний принцип запису чисел: число g одиниць одного розряду становить одну одиницю наступного вищого розряду. Інакше кажучи, число g, яке називається *основою системи числення*, вказує на те, що при зміні положення цифри у запису числа на одну одиницю вліво (вправо) числове значення її збільшується (зменшується) у g разів. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число $g > 1$. Для запису чисел у позиційній системі числення з основою g потрібно g цифр, кожна з яких позначає одне з цілих невід'ємних чисел від 0 до $g - 1$, які називаються *одноцифровими числами.* При $g = 10$ одержуємо позиційну систему числення, яка називається *десятковою*.

2. Десяткова система числення

Найбільш зручною, як показала практична діяльність, для людини виявилася саме десяткова система числення. Вона є одним із видів позиційних систем числення. Широке впровадження її у практику обумовлено наявністю у людини найпростішого лічильного пристрою – 10 пальців рук. Вивчення десяткової системи числення – одне з основних завдань курсу математики сучасної школи.

У десятковій системі числення для запису перших десяти цілих невід'ємних чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Десятковим записом натурального числа a називається представлення його у вигляді

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0, \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – цифри десяткової системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$ коротко записується так:

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}\ .$$

Числа $1 = 10^0, 10^1, 10^2, ..., 10^n$, тобто 1, 10, 100, ..., $1\underbrace{00...0}_{n\ нулів}$ (у числі n нулів) називаються розрядними одиницями відповідно першого, другого, ..., $(n + 1)$ – розрядів, причому 10 одиниць одного розряду становлять одну одиницю наступного вищого розряду.

У запису (1) доданки a_0, $a_1 10^1$, $a_2 10^2$,..., $a_{n-1} 10^{n-1}$, $a_n 10^n$ називають *розрядними доданками*.

Десятковий запис числа показує, скільки одиниць найнижчого розряду є у числі.

Теорема 1. Десятковий запис натурального числа завжди існує і є єдиний.

Теорема є окремим випадком теореми про запис числа у позиційній системі числення.

Зауваження. Оскільки:

$$\forall a \in N_0,\ 0 \cdot a = 0 \quad і \quad \forall a \in N_0,\ 0 + a = a,$$

то приписування нулів зліва до числа, записаного у десятковій системі числення не змінює його значення, що дає можливість зрівнювати кількості цифр, де це доцільно, у десятковому записі чисел.

У початковому курсі математики під десятковим записом числа розуміють суму його розрядних доданків, тобто, коли у записі

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0$$

операції множення і піднесення до степеня замінити їх результатами.

Приклад 1.
$43075 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 5 = 40000 + 3000 + 70 + 5.$

Для читання числа його розряди, починаючи з найнижчого, діляться на *класи* по три розряди у кожному, причому останній клас може включати і менше розрядів. Перший розряд (найнижчий) кожного з класів називається *розрядом одиниць,* другий – *розрядом десятків,* третій – *розрядом сотень* відповідного класу.

Таблиця розрядів і класів

Клас мільйонів			Клас тисяч			Клас одиниць		
сотні мільйонів	десятки мільйонів	одиниці мільйонів	сотні тисяч	десятки тисяч	одиниці тисяч	сотні	десятки	одиниці

Перший, найнижчий, клас називається *класом одиниць*, другий – *класом тисяч,* третій – *класом мільйонів,* четвертий – *класом мільярдів,* п'ятий – *класом трильйонів* і т. д.

Для найменування чисел у межах трильйона потрібно знати лише 18 слів: нуль, один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять, десять, сорок, дев'яносто, сто, тисяча, мільйон, мільярд і трильйон.

Назва чисел другого десятка, крім десяти (десять є першим двоцифровим числом), тобто чисел виду $\overline{1\,a_0} = 10 + a_0$, утворюється із поєднання назв одноцифрового числа і слова "десять". Таке утворення є характерним тільки для чисел другого десятку, де усна і письмова нумерація не співпадають.

Наприклад, число 13 читається: "три-на-дцять" (три на десять). У цих назвах природно вживати сполучник "і" (три і десять), але наші пращури вживали прийменник "на", що й залишилося у мові.

Числа від 21 до 999 читаються так: послідовно називається число одиниць, якщо воно є у запису, третього, другого і першого розрядів, причому назва останнього розряду не вказується.

Наприклад (2), число 365 читається: триста шістдесят п'ять.

Для читання чисел, записи яких містять більше як три цифри, їх спочатку ділять на класи, а потім послідовно читають числа кожного класу, починаючи з найвищого, причому вказується найменування кожного класу, за винятком класу одиниць.

Наприклад (3), число 25 607 421 015 673 містить п'ять класів і читається: двадцять п'ять трильйонів шістсот сім мільярдів чотириста двадцять один мільйоні п'ятнадцять тисяч шістсот сімдесят три.

Порівняння чисел, записаних у десятковій системі числення, ґрунтується на таких теоремах.

Теорема 2. Кожна одиниця вищого розряду більша за число, яке складається з одиниць нижчих розрядів:

$$\forall k \in N \ 10^k > \overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0}\,.$$

Доведення.

▶ Нехай k – довільне натуральне число і $a = \overline{a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0}$.

Запишемо число a у вигляді суми розрядних доданків і врахуємо те, що кожне одноцифрове число не перевищує 10 – 1. Звідси одержуємо:

$$a = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \ldots +$$
$$+ a_1 10 + a_0 \leq (10-1)\cdot 10^{k-1} + (10-1)\cdot 10^{k-2} + \ldots + (10-1)\cdot 10 +$$
$$+ (10-1) = (10^k - 10^{k-1}) + (10^{k-1} + 10^{k-2}) + \ldots + (10^2 - 10) +$$
$$+ (10-1) = 10^k - 1 < 10^k.$$

Отже, $10^k > a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \ldots + a_1 10 + a_0$.

При формулюванні наступної теореми вважатимемо, що кількість цифр у десяткових записах чисел однакова. ◀

Теорема 3. З двох чисел більшим буде те, у десятковому записі якого раніше зустрічається більша кількість одиниць відповідного розряду.

Доведення.

▶ Нехай

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_{k+1}10^{k+1} + a_k 10^k + \ldots + a_1 10 + a_0,$$
$$b = b_n 10^n + b_{n-1}10^{n-1} + \ldots + b_{k+1}10^{k+1} + b_k 10^k + \ldots + b_1 10 + b_0,$$

де

$$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_{k+1} = b_{k+1} \qquad (2)$$

і

$$a_k > b_k\,. \qquad (3)$$

З рівностей (2) на основі монотонності множення цілих невід'ємних чисел матимемо:

$$\left.\begin{array}{l} a_n\,10^n = b_n\,10^n \\ a_{n-1}\,10^{n-1} = b_{n-1}\,10^{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k+1}\,10^{k+1} = b_{k+1}\,10^{k+1} \\ b_k\,10^k = b_k\,10^k \end{array}\right\} \quad (4)$$

З нерівності (3) і дискретності множини цілих невід’ємних чисел одержимо $a_k \geq b_k + 1$, і, значить:

$$a_k = b_k + c + 1,\ \text{де}\ c \in N_0. \quad (5)$$

На основі попередньої теореми:

$$10^k > b_{k-1}\,10^{k-1} + b_{k-2}\,10^{k-2} + \ldots + b_1 10 + b_0. \quad (6)$$

Очевидно, що

$$c10^k + a_{k-1}\,10^{k-1} + a_{k-2}\,10^{k-2} + \ldots + a_1\,10 + a_0 \geq 0. \quad (7)$$

Додавши почленно рівності і нерівності (4), (6) і (7), одержимо:

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_{k+1}\,10^{k+1} + (b_k + c + 1)\,10^k + a_{k-1}\,10^{k-1} + \ldots + a_1\,10 + a_0 > b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ b_{k+1}\,10^{k+1} + b_k\,10^k + \ldots + b_1\,10 + b_0. \quad (8)$$

Враховуючи рівність (5) та десятковий запис чисел a і b, з нерівності (8) одержуємо $a > b$. ◄|

Наприклад (4), з двох чисел 467015 і 466918 перше число буде більше другого, бо 4 = 4, 6 = 6, але 7 > 6.

Розгляд цього завдання показує, що у десятковій системі числення:

1) кожне ціле невід’ємне число записується однозначно;

2) легко порівнювати числа на основі їх запису.

3. Алгоритми додавання у десятковій системі числення

Представимо алгоритм додавання багатоцифрових чисел у десятковій системі числення. Для довільних одноцифрових чисел s і t виконуються наступні умови (сума одноцифрових чисел не перевищує 18, а збільшення цієї суми на 1 – не перевищує 19):

$$s + t \leq 18 \quad і \quad s + t + 1 \leq 19,$$

тобто обидві ці суми є або одноцифровими числами, або двоцифровими числами виду $\overline{1\,a_0} = 10 + a_0$.

Для знаходження суми двох багатоцифрових цілих невід’ємних чисел у десятковій системі числення користуються їх десятковим записом, причому можна вважати, що записи містять однакову кількість цифр.

Нехай:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0,$$
$$b = b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + b_1\, 10 + b_0,$$

Тоді:

$$a + b = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0) +$$
$$+ (b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + b_1\, 10 + b_0).$$

На основі комутативного і асоціативного законів додавання, суму $a + b$ можна представити у вигляді:

$$a + b = (a_n + b_n)\, 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots$$
$$+ (a_1 + b_1)\, 10 + (a_0 + b_0). \qquad (1)$$

Права частина рівності (1) є десятковим записом суми чисел a і b лише тодві, коли всі суми $a_i + b_i$ $i = 0, 1, \ldots, n$ будуть одноцифровими числами.

Коли ж серед сум $a_i + b_i$ будуть двоцифрові числа, то міркують за алгоритмом:

– нехай k – найменше серед значень i, при якому сума $a_i + b_i$ є двоцифровим числом,

– тоді за зауваженням, зробленим на початку цього пункту,

$$(a_k + b_k)\, 10^k = (10 + c_k)\, 10^k = 10^{k+1} + c_k\, 10^k \text{, де } c_k < 10.$$

Таким чином, запис (1) набере наступного вигляду:

$$a + b = (a_n + b_n)\, 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (a_{k+1} + b_{k+1})\, 10^{k+1} + (a_k + b_k)\, 10^k + \ldots$$
$$+ (a_1 + b_1)\, 10 + (a_0 + b_0) =$$
$$= (a_n + b_n)\, 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots$$
$$+ (a_{k+1} + b_{k+1})\, 10^{k+1} + 10^{k+1} + c_k\, 10^k + \ldots + (a_1 + b_1)\, 10 + (a_0 + b_0) =$$
$$(a_n + b_n)\, 10^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (a_{k+1} + b_{k+1} + 1)\, 10^{k+1} + c_k\, 10^k + \ldots + (a_1 + b_1)\, 10 + (a_0 + b_0).$$

Якщо сума $a_{k+1} + b_{k+1} + 1$, а також інші суми запису (2) будуть двоцифровими числами, то здійснюють міркування, аналогічні попереднім, поки не одержать десятковий запис суми чисел a і b.

Отже, додавання багатоцифрових чисел у десятковій системі числення зводиться до додавання одноцифрових чисел, суми яких можна знайти, скориставшись однією з раніше вивчених теорій цілих невід’ємних чисел. Враховуючи це, таблицю додавання як одну із зручних форм алгоритму додавання одноцифрових чисел слід знати бездоганно, зокрема учням початкової школи.

На основі проведених міркувань ***алгоритм додавання*** можна представити у вигляді ряду кроків.

Алгоритм додавання у десятковій системі числення

1. Записати перший доданок і під ним підписати другий доданок так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходились одні під одними.

2. Доданки від результату суми відділити горизонтальною рискою.

3. Додати одиниці найнижчих розрядів. Якщо їх сума – одноцифрове число, то записати її під одиницями цього розряду і перейти до додавання одиниць наступного розряду.

4. Якщо сума одиниць найнижчого розряду є двоцифровим числом, то його подати у вигляді $10 + c_0$, де c_0 – одноцифрове число, записати c_0 під одиницями найнижчого розряду, а число 1 додати до суми одиниць наступного розряду і перейти до знаходження цієї суми.

5. Повторювати ці ж операції з одиницями кожного наступного розряду.

Процес закінчиться після того, як будуть додані одиниці найвищого розряду, причому їх сума повністю записується під рискою.

6. Число, записане під рискою, буде сумою даних чисел.

Наприклад (5):

1) 4235 + 3629 =7864; 2) 34377 + 5839 = 40216.

$$\begin{array}{r} 4235 \\ +\ \underline{3629} \\ 7864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34377 \\ +\ \underline{05839} \\ 40216 \end{array}$$

При виконанні операції додавання не обов’язково зрівнювати кількість цифр у доданках, достатньо розпочати запис другого доданку у строгій відповідності до розрядів першого доданку.

4. Алгоритми віднімання у десятковій системі числення

Як уже зазначалося, сума двох одноцифрових чисел не перевищує 18 (найбільше одноцифрове число – 9). Користуючись таблицями додавання, можна знайти різницю чисел a і b ($a \geq b$), де $a \leq 18$, а b – одноцифрове число, у вигляді числа c такого, що $b + c = a$.

У випадку багатоцифрових чисел суть дії віднімання залишається тією самою, але процес знаходження різниці інший. У ньому використовуються правила віднімання числа від суми і суми від числа, дистрибутивні закони множення відносно додавання і віднімання, а також таблиця додавання одноцифрових чисел у десятковій системі числення. Для зручності запису алгоритму дії віднімання будемо вважати, що числа мають однакову кількість цифр.

Алгоритми віднімання у десятковій системі числення

1. Під зменшуваним записати від'ємник так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходилися одні під одними.

2. Від'ємник і зменшуване відділити від різниці горизонтальною рискою.

3. Якщо число одиниць найнижчого розряду зменшуваного не менше числа одиниць від'ємника, то виконати їх віднімання, а результат записати під одиницями цього розряду і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

4. Якщо ж у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше за число одиниць цього розряду від'ємника, а число одиниць наступного розряду відмінне від нуля, то одночасно у зменшуваному число одиниць наступного розряду зменшити на одиницю. Таким чином, число одиниць найнижчого розряду збільшиться на 10. З урахуванням збільшення виконати віднімання одиниць цього розряду, а результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

5. Якщо у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше за число одиниць цього розряду від'ємника, а число одиниць наступного розряду в зменшуваному рівне нулю, то у першому з наступних вищих розрядів, число одиниць якого відмінне від нуля потрібно число одиниць зменшити на одиницю. Число одиниць всіх нижчих розрядів, крім останнього, збільшити на 9, а число одиниць останнього розряду збільшити на 10. Після цього виконати віднімання одиниць цього розряду. Результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

6. У наступному розряді повторити описаний процес.

7. Віднімання закінчити після того, як буде здійснено віднімання одиниць найвищого розряду.

8. Одержане число, записане під рискою, буде різницею даних чисел. **Наприклад (6)**:

1) 6431 – 5326 = 1105;

2) 3505 – 426 = 3079;

3) 300005 – 298728 = 1277.

$$\begin{array}{r} 6431 \\ -\underline{5326} \\ 1105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3505 \\ -\underline{0426} \\ 3079 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300005 \\ -\underline{298728} \\ 001277 \end{array}$$

При виконанні дії віднімання не обов’язково, як у прикладі (2) урівнювати кількість цифр у компонентах.

5. Алгоритми множення у десятковій системі числення

У початковій школі таблицю множення одноцифрових чисел, як одну із зручних форм алгоритму множення, учні початкової школи вивчають напам’ять. Для довільних одноцифрових чисел m, s і t виконується така нерівність:

$$m \cdot s + t \leq 90 .$$

Розглянемо випадок, коли потрібно знайти добуток двох багатоцифрових чисел

$$a = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0} \text{ і } b = \overline{b_n\, b_{n-1} \ldots b_1\, b_0} ,$$

які представлені у десятковій системі числення.

Маємо

$$a \cdot b = a \cdot (b_k\, 10^k + b_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + b_1\, 10 + b_0).$$

Скориставшись дистрибутивним законом множення відносно додавання, а також асоціативним і комутативним законами множення, одержимо:

$$a \cdot b = (a \cdot b_k)10^k + (a \cdot b_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + (a \cdot b_1)\, 10 + (a \cdot b_0). \qquad (1)$$

З рівності (1) видно, що для знаходження добутку двох багатоцифрових чисел потрібно вміти множити число на десять у натуральному степені і багатоцифрове число на одноцифрове.

Множення на 10^i, де $i \in N$, будь-якого натурального числа, записаного у десятковій системі числення, зводиться до приписування до даного числа справа i нулів.

Нехай $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ – багатоцифрове число і b – одноцифрове число. Користуючись десятковим записом числа a та законами арифметичних операцій, одержимо:

$$a \cdot b = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0)\, b =$$
$$= (a_n \cdot b)\, 10^n + (a_{n-1} \cdot b)\, 10^{n-1} + \dots + (a_1 \cdot b)\, 10 + (a_0 \cdot b).$$

Права частина рівності (2) є десятковим записом добутку чисел a і b тільки у тому випадку, коли добутки виду $a_i \cdot b$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, будуть одноцифровими числами.

Коли ж серед добутків виду $a_i \cdot b$ є двоцифрові числа, то міркують так:

– якщо k – найменше серед значень i, при якому добуток $a_k \cdot b$ є двоцифровим числом, тоді:

$a_k \cdot b = 10\, c_{k1} + c_{k0}$ де c_{k1} і c_{k0} – цифри десяткової системи числення і тепер запис (2) набере такого вигляду:

$$a \cdot b = (a_n \cdot b)\, 10^n + \dots + (a_{k+1} \cdot b) 10^{k+1} + (10\, c_{k1} + c_{k0})\, 10^k +$$
$$+ (a_{k-1} \cdot b)\, 10^{k-1} + \dots + (a_1 \cdot b)\, 10 + (a_0 \cdot b) =$$
$$= (a_n \cdot b)\, 10^n + \dots + (a_{k+1} \cdot b + c_k)\, 10^{k+1} +$$
$$c_{k0}\, 10^k + \dots + (a_1 \cdot b)\, 10 + (a_0 \cdot b_0).$$

– якщо $(a_{k+1} \cdot b + c_{k1})$, а також інші добутки запису (3) є двоцифровими числами, то проводять міркування, аналогічні попереднім, поки не отримають десятковий запис добутку чисел a і b.

На основі проведених міркувань алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове у десятковій системі числення можна представити у вигляді послідовних кроків.

Алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове у десятковій системі числення

1. Спочатку записати перше багатоцифрове число a і під його одиницями найнижчого розряду підписати число b.

2. Множники від добутку відділити горизонтальною рискою.

3. Помножити число одиниць найнижчого розряду числа a на число b. Якщо добуток $a_0 \cdot b$ менший від десяти, то записати його під числом b і перейти до множення числа одиниць наступного розряду числа a на число b.

4. Якщо добуток $a_0 \cdot b$ не менший від десяти, то потрібно представити його у вигляді $c_1 \cdot 10 + c_0$, де c_1 і c_0 – цифри десяткової системи числення. Число c_0 записати як одиницю найнижчого розряду шуканого добутку, а число c_1 запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду числа a на число b. До добутку $a_1 \cdot b$ додати число c_1. Якщо одержана сума менша 10, то її записати як другу розрядну одиницю добутку. Якщо ж одержана сума не менша від десяти, то її потрібно записати у вигляді $d_1 \cdot 10 + d_0$, де d_1 і d_0 – цифри десяткової системи числення, при цьому число d_0 записати під рискою як цифру наступного розряду добутку чисел a і b, а число d_1 запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду числа a на число b, до якого потім додати число d_1.

5. Процес множення закінчити після того, як помножаться одиниці найвищого розряду числа a на число b.

6. Число, записане під рискою, буде добутком чисел a і b.

За законами арифметичних операцій над цілими невід'ємними числами та враховуючи запис їх у десятковій системі числення, таблицю множення одноцифрових чисел, алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове число, множення числа на натуральний степінь десяти, можна сформулювати алгоритм множення у десятковій системі числення багатоцифрового числа на багатоцифрове.

Алгоритми множення багатоцифрового числа на багатоцифрове у десятковій системі числення

1. Записати перший множник. Під ним у строгій послідовності підписати другий множник так, щоб однойменні розрядні одиниці були підписані одні під одними. За комутативним законом множення і для спрощення алгоритму першим береться той множник, у якого більша кількість цифр.

2. Множники a і b від добутку відділити горизонтальною рискою.

3. Помножити число a на число одиниць найнижчого розряду числа b і записати добуток $a \cdot b_0$ (перший неповний добуток) під рискою.

4. Помножити число a на число одиниць наступного розряду числа b. Одержаний добуток $a \cdot b_1$ (другий неповний добуток)

записати під числом $a \cdot b_0$ із зсувом на один розряд вліво, що відповідає множенню на число 10.

5. Процес обчислення неповних добутків закінчиться після того, як помножиться число a на число одиниць найвищого розряду числа b.

6. Всі знайдені неповні добутки додати.

7. Одержана сума є добутком чисел a і b.

Аналіз алгоритму множення та властивості множення цілих невід’ємних чисел на нуль дають можливість зробити такі два **зауваження:**

8. Якщо у другому множнику одна із цифр дорівнює нулю, то можна не виконувати множення на цей нуль, а наступний неповний добуток потрібно зсунути вліво на дві цифри.

9. Якщо хоч один з множників закінчується нулями, то при підписуванні множників один під одним і множенні їх нулі не враховуються. Лише після виконання множення до одержаного добутку дописується стільки нулів, скількома нулями закінчуються обидва множники разом.

Наприклад (7):

$$30500 \cdot 7010 = 213805000.$$

$$\begin{array}{r} 30500 \\ \times \quad \underline{7010} \\ + \quad 305 \\ \underline{2135} \\ 213805000 \end{array}$$

Розглянуті алгоритми додавання, віднімання, множення називаються письмовими діями і виконуються шляхом запису “у стовпчик”.

6. Алгоритми ділення у десятковій системі числення

Для цілих невід’ємних чисел операція ділення є оберненою до операції множення. Вона є частковою, тобто виконується не завжди. Частіше розглядають дію ділення з остачею на натуральне число, яку і мають на увазі, коли йдеться про ділення загалом.

Нагадаємо, що добуток натуральних одноцифрових чисел не перевищує 81 ($9 \cdot 9$), а при діленні числа $a \leq 81$ на одноцифрове число b можна скористатися таблицею множення у випадку, коли $a < 10b$.

Наприклад (8), поділити числа 24 і 51 на 6.

У таблиці множення на число 6 серед добутків є число

$$24 = 6 \cdot 4.$$

Отже, 24 : 6 = 4.

Число 51 у таблиці множення на 6 відсутнє, але серед добутків можна знайти найближче до нього число 48 = 6 · 8. Значить, неповною часткою при діленні 51 на 6 буде число 8. Для знаходження остачі слід від 51 відняти 48, одержимо число 3 і

$$51 = 6 \cdot 8 + 3.$$

Одним із важливих теоретичних положень, на яких ґрунтується процес ділення, є така теорема.

Теорема 4. Для довільних натуральних чисел m і n, записаних у десятковій системі числення, якщо $m < n$, то при діленні з остачею числа $10m + k$, де k – одноцифрове число, на n у частці одержимо одноцифрове число.

Доведення.

▶ Нехай m і n – довільні натуральні числа, такі, що

$$m < n. \qquad (1)$$

Поділимо з остачею число $10m + k$, де k – одноцифрове число, на n:

$$10m + k = n \cdot q + r, r < n. \qquad (2)$$

Припустимо, що $q \geq 10$, тоді

$$n \cdot q \geq 10n. \qquad (3)$$

З (2) і (3) одержуємо $k \geq 10(n - m) + r$. Звідси випливає:

$$k \geq 10(n - m). \qquad (4)$$

Оскільки $n > m$, то різниця $n - m$ є натуральним числом. Нерівність (4) показує, що одноцифрове число буде не меншим за двоцифрове число. Прийшли до протиріччя. Отже, припущення хибне, а q – одноцифрове число. ◀

Розглянемо ділення багатоцифрового числа:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0 \qquad (5)$$

на одноцифрове число b.

Якщо $a_n > b$, то поділимо a_n, на b з остачею:

$$a_n = b \cdot q_n + r_n, \; r_n < b, \; q_n < 10.$$

Тоді запис (5) набуде вигляду:

$$a_n = (b \cdot q_n + r_n) 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0 =$$

$$= (b \cdot q_n)\, 10^n + (\, 10\, r_n + a_{n-1})10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0.$$

Число $10\, r_n + a_{n-1}$ знову поділимо на число b з остачею:

$$10\, r_n + a_{n-1} = b\, q_{n-1} + r_{n-1},\ r_{n-1} < b.$$

На основі теореми $q_{n-1} < 10$.

Запис (6) набуде вигляду

$$a = (b \cdot q_n)\, 10^n + (b\, q_{n-1} + r_{n-1})\, 10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + \\ + a_1\, 10 + a_0$$

$$= (b \cdot q_n)\, 10^n + (b\, q_{n-1})\, 10^{n-1} + (10\, r_{n-1} + a_{n-2})\, 10^{n-2} + \\ + a_{n-3}10^{n-3} + \ldots + a_1\, 10 + a_0. \qquad (7)$$

Продовжуючи аналогічні міркування, через скінченну кількість кроків прийдемо до запису:

$$a = (b \cdot q_n)\, 10^n + (b\, q_{n-1})\, 10^{n-1} + \ldots + (b \cdot q_1)10 + b \cdot q_0 + r_0 = \\ = b \cdot (q_n\, 10^n + q_{n-1}10^{n-1} + \ldots + q_1\, 10 + q_0) + r_0, \quad r_0 < b. \qquad (8)$$

Числа $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0$ є одноцифровими, отже,

$$q_n\, 10^n + q_{n-1}10^{n-1} + \ldots + q_1 10 + q_0$$

є десятковим записом натурального числа q і

$$a = b \cdot q + r_0, \quad r_0 < b,$$

тобто число q є неповною часткою, а r_0 – остачею від ділення числа a на число b.

У випадку, коли $a_n < b$, то число a можна записати:

$$a = (a_n 10 + a_{n-1})\, 10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1\, 10 + a_0$$

і до чисел $a_n 10 + a_{n-1}$ та b застосувати алгоритм ділення з остачею, як у попередніх міркуваннях.

На основі проведених міркувань алгоритм ділення багатоцифрового числа на одноцифрове число у десятковій системі числення можна представити у вигляді послідовних кроків.

Алгоритм ділення багатоцифрового числа на одноцифрове число у десятковій системі числення

1. Записати ділене $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0$, а потім дільник b з невеликим проміжком між ними в одному рядку.

2. Між діленим і дільником спочатку провести вертикальну риску, а потім під дільником провести горизонтальну риску до перетину з вертикальною.

3. Якщо $a_n \geq b$, то неповну частку q_n від ділення числа a_n на число b записують під горизонтальною рискою відразу після

вертикальної, добуток $b \cdot q_n$ підписують під a_n і знаходять їх різницю r_n.

4. До числа r_n дописують a_{n-1} і неповну частку q_{n-1} від ділення числа $\overline{r_n\, a_{n-1}}$ на число b записують справа від q_n, добуток $b\, q_{n-1}$ підписують під $\overline{r_n\, a_{n-1}}$ і знаходять їх різницю r_{n-1}.

5. Процес продовжують, поки при діленні на число b не будуть використані всі цифри числа a.

6. Якщо ж $a_n < b$, то замість числа a_n розглядають число $\overline{a_n\, a_{n-1}}$ і діють згідно з пунктом 3.

7. Число, записане під горизонтальною рискою, є неповною часткою, а остання остача r_0 – остачею від ділення числа a на число b.

Наприклад (9), поділити 1364 на 2

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1364 & \underline{2} \\
\underline{12} & 681 \\
-\,16 & \\
\underline{16} & \\
-\,4 & \\
\underline{4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Сформульований та проілюстрований алгоритм ділення відносять до письмових обчислень і називається “ділення кутом”.

7. Позиційні системи числення з довільною основою та запис чисел у них

У практичній діяльності люди використовують відмінні від десяткової системи числення, які відносяться до позиційних. Такі системи числення дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. В астрономії застосовується шістдесяткова система числення. Основою цієї системи є число 60. У цій системі ми маємо поділ години на 60 хвилин, хвилини на 60 секунд, градуса на 60 мінут. Є й інші підтвердження існування позиційних систем числення з різними основами, зокрема, тривалість року складає 12 місяців. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Для запису чисел у різних позиційних системах числення користуються цифрами десяткової системи числення. Наприклад, цифрами системи числення з основою $g = 2$ є 0 і 1, а при $g = 5$ числа 0, 1, 2, 3 і 4. Якщо ж основа системи числення $g > 10$, то її цифри як багатоцифрові числа десяткової системи числення беруться в дужки. Наприклад, якщо основа системи числення $g = 12$, то цифрами її будуть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11).

З розвитком обчислювальної техніки для зображення чисел потрібно було використовувати якнайменше знаків. Для цього потрібна система числення з малою кількістю цифр. Такою системою є двійкова система, якою найчастіше користуються при роботі на сучасних ЕОМ.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою $g \geq 2$ називається подання його у вигляді:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g$.

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки

$a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, \ldots, a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^n$ – *розрядними доданками.*

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду і основу системи числення. Наприклад, число 43065_8 читається: “чотири три нуль шість п’ять у системі числення з основою вісім”.

Запис числа у позиційній системі числення з основою g показує, скільки одиниць найнижчого розряду містить дане число і як вони розподілені у числі як одиниці вищих розрядів.

Теорема 5. Запис натурального числа у позиційній системі числення з основою $g > 1$ завжди існує і єдиний.

Доведення.

▶ І. Доведення існування запису числа у позиційній системі числення з основою $g > 1$ проведемо методом математичної індукції.

Твердження істинне для натурального числа $a = 1$ і для всіх натуральних чисел, які менші від основи системи числення, бо вони записуються цифрами даної позиційної системи числення: $a = a_0$.

Припустимо, що твердження істинне для всіх натуральних чисел b таких, що $g-1 \leq b < a$.

Доведемо, що твердження істинне і для натурального числа a.

Поділимо a на g з остачею:

$$a = g \cdot q + a_0, \quad a_0 < g. \qquad (1)$$

Оскільки за властивістю ділення $q < a$, то за припущенням

$$q = g_k \cdot q^k + g_{k-1} \cdot q^{k-1} + \ldots + g_1 \cdot q + q_0.$$

Звідси, користуючись (1), одержуємо:

$$a = (g_k \cdot q^k + g_{k-1} \cdot q^{k-1} + \ldots + g_1 \cdot q + q_0) \cdot g + a_0.$$

А тому за дистрибутивним законом множення відносно додавання:

$$a = g_k \cdot g^{k+1} + g_{k-1} \cdot q^k + \ldots + g_1 \cdot g^2 + q_0 \cdot g + a_0,$$

де q_k, q_{k-1}, ..., q_0, a_0 – цифри даної системи числення і $q_k \neq 0$. Отже, твердження істинне і для числа a.

Тоді за принципом математичної індукції зазначене вище твердження буде істинним для будь-якого натурального числа a.

II. Доведемо тепер єдиність запису натурального числа у позиційній системі числення з основою g.

Припустимо, що існує принаймні два записи числа a:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0 \text{ і}$$
$$a = a_s \cdot g^s + a_{s-1} \cdot g^{s-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0.$$

На основі транзитивності відношення рівності маємо:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= a_s \cdot g^s + a_{s-1} \cdot g^{s-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0.$$

Користуючись законами операцій додавання і множення, рівність (2) можна записати:

$$(a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g + a_1) \cdot g + a_0 =$$
$$= (c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + \ldots + c_2 \cdot g + c_1) \cdot g + c_0.$$

Числа

$$a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g + a_1 \text{ і}$$
$$c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + \ldots + c_2 \cdot g + c_1$$

є неповними частками, a_0 і c_0 – остачами при діленні a на g. За теоремою про ділення з остачею неповна частка і остача єдині, отже:

$$a_n \cdot g^{n-1} a_{n-1} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g + a_1 =$$
$$= c_s \cdot g^{s-1} + c_{s-1} \cdot g^{s-2} + \ldots + c_2 \cdot g + c_1 = c_0.$$

Міркуючи аналогічно, через скінченну кількість кроків отримаємо:

$n = s$, $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, ... , $a_{n-1} = c_{n-1}$, $a_n = c_n$. ◄

Сам спосіб доведення теореми дає можливість переходу від запису числа в одній позиційній системі числення до його запису в іншій системі числення, якщо відомі алгоритми виконання арифметичних операцій у першій системі числення.

Задача 1. Число 55288 записати у позиційній системі числення з основою 8 (вісімковій системі числення).

Розв'язання. Скористаємося способом ділення ("кутом"), де дільником буде виступати задана нова система числення, тобто число 8. Будемо шукати остачу від ділення, а одержану частку знову ділити на 8, доки одержана частка буде меншою за дільник (число 8). Одержані остачі прочитаємо у зворотньому порядку.

```
_55288 | 8
 48     _6911 | 8
 _72     64    _863 | 8
  72     _51    8    _107 | 8
   _8     48    _63    8    _13 | 8
    8    _31     56   _27     8   1
    _8    24      7    24     5
     8     7            3
     0
```

Отже, $55288 = 153770_8$

Відповідь. $55288 = 153770_8$.

8. Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення

Цілі невід'ємні числа можна порівнювати, а алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюються так само, як і у десятковій системі числення. При цьому потрібно враховувати основу системи числення і пам'ятати, що g одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, а одна одиниця вищого розряду дорівнює g одиницям сусіднього нижчого розряду.

Наприклад (10),

число $32413_8 > 32235_8$, бо 3 = 3, 2 = 2, а 4 > 2.

Для полегшення обчислення іноді складають таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у позиційній системі числення, в якій проводять обчислення. Щоб записи не були громіздкими при виконанні операцій в одній і тій же системі числення, її основу можна не вказувати у проміжних результатах.

Задача 2. Обчислити значення виразу, який складений з чисел, що записані у системі числення з основою 5:

$$(2342_5 + 342_5 - 442_5) \cdot 32_5$$

Розв'язання:

1) $$\begin{array}{r} 2342_5 \\ +\ \underline{\ \ 342_5} \\ 3234_5 \end{array}$$

При додаванні користуємося таким алгоритмом:

• 2 + 2 = 4, а 4 у п'ятірковій системі числення буде 4

• в числі 8 міститься одна "п'ятірка" і 3 одиниці

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

• 3 + 3 = 6 і ще одна "п'ятірка", 6 + 1 = 7

$7 = 1 \cdot 5 + 2$

• тому до 2 додаємо ще 1

$2 + 1 = 3$

2) $$\begin{array}{r} -\ 3234_5 \\ \underline{442_5} \\ 2242_5 \end{array}$$

Будемо міркувати так:

• у п'ятірковій системі числення 4 – 2 = 2

• у п'ятірковій системі числення від 3 відняти 4 неможна, тому з вищого розряду позичаємо одну "п'ятірку" і отримуємо: 3 + 5 = 8, а

$8 - 4 = 4$

• від залишеної одиниці не можемо відняти 4, тому знову з вищого розряду позичаємо "п'ятірку" і отримуємо:

$1 + 5 = 6$, а $6 - 4 = 2$

• у цьому розряді після позичання залишається 2.

3) $$\begin{array}{r} 2242_5 \\ \times\ \underline{\ \ 32_5} \\ 10034 \\ \underline{+\ 12331\ \ } \\ 133344_5 \end{array}$$

Продовжимо міркування:

• $2 \cdot 2 = 4$;

• $2 \cdot 4 = 8$, $8 = 1 \cdot 5 + 3$;

• $2 \cdot 2 = 4$, $4 + 1 = 5$, $5 = 1 \cdot 5 + 0$;

• $2 \cdot 2 = 4$, $4 + 1 = 5$, $5 = 1 \cdot 5 + 0$;

• $3 \cdot 2 = 6$, $6 = 1 \cdot 5 + 1$;

• $3 \cdot 4 = 12$, $12 + 1 = 13$, $13 = 2 \cdot 5 + 3$;

• $3 \cdot 2 = 6$, $6 + 2 = 8$, $8 = 1 \cdot 5 + 3$;

• $3 \cdot 2 = 6$, $6 + 1 = 7$, $7 = 1 \cdot 5 + 2$;

• Виконавши додавання в п’ятірковій системі числення, одержимо: 13334_5.

Відповідь. 13334_5.

Найпростіше виконуються арифметичні операції у двійковій системі числення.

Наприклад (11):

1) $\begin{array}{r} 10111 \\ +\ \underline{1100} \\ 100011 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ \underline{101} \\ 1101 \\ +\ \underline{1101} \\ 1000001 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -\ 111011 \\ \underline{100110} \\ 10101 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r|l} -\ 10001 & \underline{101} \\ \underline{101} & 111 \\ -\ 111 & \\ \underline{101} & \\ -\ 101 & \\ \underline{101} & \\ 0 & \end{array}$

Двійкова система числення є зручною тому, що у ній запис чисел здійснюється за допомогою лише двох цифр і обчислення можуть бути просто реалізовані за допомогою електронних пристроїв.

9. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій

Одне й те ж число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення – однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Нехай натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_g$ записано у системі числення з основою g і потрібно записати його у системі числення з основою h. За теоремою такий запис існує і єдиний. Отже:

$$a = b_k \cdot h^k + b_{k-1} \cdot h^{k-1} + \dots + b_1 \cdot h + h_0, \qquad (1)$$

де b_k, b_{k-1}, ..., b_1, b_0 – цифри позиційної системи числення з основою h.

Скориставшись законами операцій додавання і множення цілих невід’ємних чисел, рівність (1) можна записати:

$$a = (b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + ... + b_2 \cdot h + b_1) \cdot h + b_0, \ b_0 < h. \qquad (2)$$

Позначимо

$$q_0 = b_k \cdot h^{k-1} + b_{k-1} \cdot h^{k-2} + ... + b_2 \cdot h + b_1.$$

Тоді рівність (2) запишеться:

$$a = h \cdot q_0 + b_0, \ b_0 < h, \ q_0 < a. \qquad (3)$$

Відношення (3) показують, що b_0 є остачею, а q_0 – неповною часткою при діленні a на h з остачею.

Застосуємо до числа q_0 ті ж міркування, що й до числа a, і будемо мати:

$$q_0 = (b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + ... + b_3 \cdot h + b_2) \cdot h + b_1, \ b_1 < h. \qquad (4)$$

Якщо ввести позначення:

$$q_1 = b_k \cdot h^{k-2} + b_{k-1} \cdot h^{k-3} + ... + b_3 \cdot h + b_2,$$

то відношення (4) запишуться:

$$q_0 = h \cdot q_1 + b_1, \ \ b_1 < h_1, \ \ q_1 < q_0. \qquad (5)$$

Відношення (5) показують, що числа q_1 і b_1 є відповідно неповною часткою і остачею при діленні числа q_0 на h з остачею.

Такі міркування проводяться, поки на кроці з номером $k - 1$ не одержимо $q_{k-1} < h$, і будемо мати $b_k = q_{k-1}$.

Отже, можемо визначити всі цифри запису числа a у системі числення з основою h.

Таким чином, ***метод ділення*** виконується за такою схемою.

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується, поки не одержимо частку, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$,

бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g, і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Теоретичною основою *способу множення* є таке представлення числа a, записаного у позиційній системі числення з основою g:

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= ((\ldots(a_n \cdot g^n + a_{n-1}) \cdot g + a_{n-2}) \cdot g + \ldots + a_2) \cdot g + a_1) \cdot g + a_0.$$

Якщо виконати усі зазначені тут операції у системі числення з основою h, то одержане число буде також записане у системі числення з основою h.

Суть ***методу множення можна*** викласти так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у системі числення з цією основою як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо доти, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа. На цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

Приклад (12). Число 3566_7 записати у десятковій системі числення.

Перейдемо до десяткової системи числення і скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення:

$$3 \cdot 7 + 5 = 26$$
$$\underline{\times\ 7}$$
$$182 + 6 = 188$$
$$\underline{\times\ 7}$$
$$1316 + 6 = 1322$$

Відповідь. 1322.

Приклад (13). Число 2011_3 записати за основою g = 7.

Перейдемо до десяткової системи числення і скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення:

$$
\begin{array}{l}
2011 \\
\times\ \underline{3\quad} \\
6 + 0 = 6 \\
\qquad \times\ \underline{\ 3} \\
\qquad 18 + 1 = 19 \\
\qquad\qquad \times\ \underline{\ 3} \\
\qquad\qquad 57 + 1 = 58.
\end{array}
$$

Тепер використаємо ділення “кутом”, де дільником буде число 7:

$$
\begin{array}{llll}
-58 & \underline{|\ 7\quad} & & \\
\ \underline{56\ } & -8 & \underline{|\ 7\quad} & \\
\ \mathbf{2} & \ \underline{7\ } & \mathbf{1} & \\
 & \ \mathbf{1} & &
\end{array}
$$

Отже, $2011_3 = 112_7$.

Відповідь. $2011_3 = 112_7$.

Приклад (14).

Число 42757 записати в сімнадцятковій системі числення.

Розв’язання. Використаємо ділення “кутом”, де дільником буде число 17. Як бачимо, отримані остачі є числа 2, 16, 11, 8. У записі сімнадцяткової системи запишемо всі отримані остачі від ділення з кінця на перед, як показано на схемі. Двозначні остачі записують в дужках.

_42757 | 17
34 _2515 | 17
_87 17 _147 | 17
85 _81 136 **8**
_25 68 **11**
17 _135
_87 119
85 **16**
2

Отже, $42757 = 8(11)(16)2_{17}$

Відповідь. $42757 = 8(11)(16)2_{17}$

ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ

2.1. Число 548 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 4143_5
б) 1434_5
в) 3434_5
г) 3414_5
д) інша відповідь.

2.2. Число 545 записати в двійковій системі числення:

а) 1000010001_2
б) 1000110001_2
в) 1000100001_2
г) 1100010001_2
д) інша відповідь.

2.3. Число 17283 записати в четвірковій системі числення:

а) 30023001_4
б) 10023003_4
в) 30032001_4
г) 10032003_4
д) інша відповідь.

2.4. Число 1398 записати в трійковій системі числення:

а) 120120_3
б) 120210_3
в) 102120_3
г) 120210_3
д) інша відповідь.

2.5. Число 95713 записати в сімковій системі числення:

а) 230644_7
б) 446023_7
в) 320644_7
г) 446032_7
д) інша відповідь.

2.6. Число 544736 записати в двійковій системі числення:

а) 1101110100011100000_2
б) 11100010111011_2
в) 1101110100011111000_2
г) 11011101000111_2
д) інша відповідь.

2.7. Число 25312 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 4302222_5
б) 2222031_5
в) 1302222_5
г) 2220231_5
д) інша відповідь.

2.8. Число 24517 записати в вісімковій системі числення:

а) 50777_8
б) 57705_8
в) 56743_8
г) 57037_8
д) інша відповідь.

2.9. Число 24517 записати в шістковій системі числення:

а) 324001_6
б) 234041_6
в) 334044_6
г) 140432_6
д) інша відповідь.

2.10. Число 105591 записати в дев'ятковій системі числення:

а) 170753_9 г) 270553_9
б) 307001_9 д) інша відповідь.
в) 357071_9

2.11. Число 9466 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 133003_5 г) 313003_5
б) 300331_5 д) інша відповідь.
в) 130331_5

2.12. Число 2745 записати в шістковій системі числення:

а) 21431_6 г) 13402_6
б) 31402_6 д) інша відповідь.
в) 20413_6

2.13. Число 13499 записати в сімковій системі числення:

а) 54333_7 г) 53343_7
б) 54373_7 д) інша відповідь.
в) 33245_7

2.14. Число 29154 записати в шістковій системі числення:

а) 255243_6 г) 342550_6
б) 55243_6 д) інша відповідь.
в) 324550_6

2.15. Число 49915 записати в четвірковій системі числення:

а) 32332003_4 г) 30223323_4
б) 30023323_4 д) інша відповідь.
в) 33332003_4

2.16. Число 85675 записати в дев'ятковій системі числення:

а) 464041_9 г) 140464_9
б) 104464_9 д) інша відповідь.
в) 464014_9

2.17. Число 29123 записати в п'ятнадцятковій системі числення:

а) 8698_{15} г) $89(13)8_{15}$
б) 8968_{15} д) інша відповідь.
в) $8(11)68_{15}$

2.18. Число 61472 записати в одинадцятковій системі числення:

а) $422(10)4_{11}$ г) $4(10)224_{11}$
б) 40224_{11} д) інша відповідь.
в) 42204_{11}

2.19. Число 22683 записати в тринадцятковій системі числення:

а) $(11)24(10)_{13}$
б) $(10)14(11)_{13}$
в) $(10)42(11)_{13}$
г) $(11)34(10)_{13}$
д) інша відповідь.

2.20. Число 24242 записати в двадцять першій системі числення:

а) $2(12)(20)8_{21}$
б) $8(20)(12)2_{21}$
в) $82(12)(20)_{21}$
г) $(12)2(20)8_{21}$
д) інша відповідь.

2.21. Число 67199 записати в дев'ятнадцятковій системі числення:

а) $(18)3(14)9_{19}$
б) $9(15)2(15)_{19}$
в) $(15)7(15)8_{19}$
г) $(15)2(15)9_{19}$
д) інша відповідь.

2.22. Число 52475 записати в двадцятковій системі числення:

а) $(15)3(11)6_{20}$
б) $6(11)3(15)_{20}$
в) $(15)116_{20}$
г) $(15)516_{20}$
д) інша відповідь.

2.23. Число 7415 записати в п'ятнадцятковій системі числення:

а) $5(14)22_{15}$
б) $145(12)_{15}$
в) $15(13)4_{15}$
г) $22(14)5_{15}$
д) інша відповідь.

2.24. Число 24719 записати в тринадцятковій системі числення:

а) $139(11)_{13}$
б) $633(11)_{13}$
в) $(11)336_{13}$
г) $(12)336_{13}$
д) інша відповідь.

2.25. Число 24111 записати в одинадцятковій системі числення:

а) $1712(10)_{11}$
б) $(10)7121_{11}$
в) $(10)2171_{11}$
г) $1217(10)_{11}$
д) інша відповідь.

2.26. Число 1824 записати в чотирнадцятковій системі числення:

а) 494_{14}
б) 944_{14}
в) 449_{14}
г) $9(12)4_{14}$
д) інша відповідь.

2.27. Число 17284 записати в п'ятнадцятковій системі числення:

а) $4(12)13_{15}$
б) $13(14)9_{15}$
в) $14(13)5_{15}$
г) $41(12)4_{15}$
д) інша відповідь.

2.28. Число 17547 записати в тринадцятковій системі числення:

а) $7(12)(10)(10)_{13}$
б) $(10)(10)(12)7_{13}$
в) $7(11)(12)(10)_{13}$
г) $(11)(12)(11)7_{13}$
д) інша відповідь.

2.29. Число 95435 записати в дванадцятковій системі числення:

а) $(10)8234_{12}$
б) $(11)8274_{12}$
в) $4728(11)_{12}$
г) $(11)2874_{12}$
д) інша відповідь.

2.30. Число 81271 записати в одинадцятковій системі числення:

а) 56037_{11}
б) 56073_{11}
в) 34065_{11}
г) 37065_{11}
д) інша відповідь.

Перевести число з заданої системи числення в будь-яку іншу систему числення

Приклад 15.

Число 50213_6 записати в десятковій системі числення.

Розв'язання.

$$\overset{4}{5}\overset{3}{0}\overset{2}{2}\overset{1}{1}\overset{0}{3}$$

$$5 \cdot 6^4 + 0 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 =$$
$$= 5 \cdot 1296 + 0 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 3 =$$
$$= 6480 + 0 + 72 + 6 + 3 = 6561$$

Отже, $50213_6 = 6561$.

Відповідь. $50213_6 = 6561$.

Приклад 16.

Число 12243_5 записати в одинадцятковій системі числення.

Розв'язання.

$$\overset{4}{1}\overset{3}{2}\overset{2}{2}\overset{1}{4}\overset{0}{3}{}_5$$

Представимо у вигляді суми розрядних доданків:

$$1 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 =$$
$$=625 + 250 + 50 + 20 + 3 = 948.$$

```
_948  |11
 88    _86 |11
_68     77   7
 66      9
  2
```

Отже, $12243_5 = 792_{11}$

Відповідь. $12243_5 = 792_{11}$

3.1. Число 21514_6 записати в десятковій системі числення:

а) 3016 г) 5327
б) 44512 д) інша відповідь.
в) 1544

3.2. Число 75144_8 записати в десятковій системі числення:

а) 1332 г) 2175
б) 3452 д) інша відповідь.
в) 31332

3.3. Число 1512_7 записати в десятковій системі числення:

а) 597 г) 1597
б) 795 д) інша відповідь.
в) 1243

3.4. Число 3401_5 записати в шістковій системі числення:

а) 1221_6 г) 2112_6
б) 2341_6 д) інша відповідь.
в) 4324_6

3.5. Число 26554_7 записати в п’ятірковій системі числення:

а) 430212_5 г) 202034_5
б) 212034_5 д) інша відповідь.
в) 130212_5

3.6. Число 71732_8 записати в одинадцятковій системі числення:

а) 21302_{11} г) 12302_{11}
б) 31220_{11} д) інша відповідь.
в) 20312_{11}

3.7. Число 2455_7 записати в дванадцятковій системі числення:

а) $64(10)_{12}$ г) $56(10)_{12}$

б) 6410_{12} д) інша відповідь.
в) $64(11)_{12}$

3.8. Число 44512_9 записати в тринадцятковій системі числення:
а) $(10)601_{13}$ г) 10601_{13}
б) 13601_{13} д) інша відповідь.
в) 23601_{13}

3.9. Число 71125_8 записати в дев'ятковій системі числення:
а) 44131_9 г) 41341_9
б) 33131_9 д) інша відповідь.
в) 41131_9

3.10. Число 43301_5 записати в сімковій системі числення:
а) 14405_7 г) 45410_7
б) 10445_7 д) інша відповідь.
в) 44510_7

3.11. Число 24133_5 записати в дев'ятковій системі числення:
а) 1042_9 г) 1024_9
б) 4201_9 д) інша відповідь.
в) 2401_9

3.12. Число 35711_8 записати в п'ятірковій системі числення:
а) 424201_5 г) 110244_5
б) 10244_5 д) інша відповідь.
в) 442010_5

3.13. Число 43312_5 записати в четвірковій системі числення:
а) 232031_4 г) 132034_4
б) 130232_4 д) інша відповідь.
в) 31232_4

3.14. Число 22211_5 записати в трійковій системі числення:
а) 2210102_3 г) 1210120_3
б) 1012220_3 д) інша відповідь.
в) 2010122_3

3.15. Число 25125_6 записати в сімковій системі числення:
а) 13601_7 г) 32541_7
б) 10631_7 д) інша відповідь.
в) 14523_7

3.16. Число 13332_4 записати в п'ятірковій системі числення:
а) 2242_5 г) 4020_5
б) 3243_5 д) інша відповідь.
в) 3423_5

3.17. Число 75110_8 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 4020002_5 г) 4002000_5
б) 2000204_5 д) інша відповідь.
в) 2000402_5

3.18. Число 5243_6 записати в одинадцятковій системі числення:

а) 829_{11} г) 928_{11}
б) 982_{11} д) інша відповідь.
в) 282_{11}

3.19. Число 35422_7 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 103042_5 г) 243010_5
б) 402032_5 д) інша відповідь.
в) 10342_5

3.20. Число 42242_5 записати в одинадцятковій системі числення:

а) 3123_{11} г) 1242_{11}
б) 6312_{11} д) інша відповідь.
в) 2136_{11}

3.21. Число 62551_7 записати в дванадцятковій системі числення:

а) $8(10)91_{12}$ г) 19108_{12}
б) 19108_{12} д) інша відповідь.
в) $19(10)8_{12}$

3.22. Число 5243_6 записати в трійковій системі числення:

а) 21211_3 г) 1200112_3
б) 1121200_3 д) інша відповідь.
в) 200112_3

3.23. Число 24621_8 записати в тринадцятковій системі числення:

а) 41027_{13} г) 410127_{13}
б) 712104_{13} д) інша відповідь.
в) $4(10)(12)7_{13}$

3.24. Число 32421_5 записати в вісімковій системі числення:

а) 4274_8 г) 4727_8
б) 4327_8 д) інша відповідь.
в) 4372_8

3.25. Число 12311_4 записати в сімковій системі числення:

а) 3611_7 г) 1163_7
б) 6321_7 д) інша відповідь.
в) 2312_7

3.26. Число 22131_4 записати в п'ятірковій системі числення:

а) 43212_5 г) 10134_5
б) 31012_5 д) інша відповідь.
в) 43231_5

3.27. Число 42231_5 записати в одинадцятковій системі числення:

а) 6721_{11} г) 3214_{11}

б) 2176_{11} д) інша відповідь.

в) 6217_{11}

3.28. Число 27116_8 записати в дев'ятковій системі числення:

а) 13217_9 г) 17231_9

б) 13523_9 д) інша відповідь.

в) 13271_9

3.29. Число 45111_6 записати в тринадцятковій системі числення:

а) $2(11)42_{13}$ г) 42143_{13}

б) 21142_{13} д) інша відповідь.

в) 24112_{13}

3.30. Число 55512_7 записати в чотирнадцятковій системі числення:

а) 5142_{14} г) 2141_{14}

б) 1242_{14} д) інша відповідь.

в) $5(14)2_{14}$

Приклад 17. У яких системах числення справджуються рівність:

$$456_x - 165_x = 261_x$$

Розв'язання. Представимо у вигляді суми розрядних доданків.

$$\overset{2\,1\,0}{456_x} - \overset{2\,1\,0}{165_x} = \overset{2\,1\,0}{261_x}$$

$$4x^2 + 5x + 6 - (1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5) = 2x^2 + 6x + 1.$$

Зведемо подібні доданки:

$$4x^2 + 5x + 6 - x^2 - 6x - 5 - 2x^2 - 6x - 1 = 0,$$
$$x^2 - 7x = 0,$$
$$x(x - 7) = 0,$$
$$x = 0 \text{ або } x = 7.$$

Значення $x = 0$ не задовольняє умову задачі. Тому, дана рівність справджується у сімковій системі числення.

Відповідь. $x = 7$.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $x_5 \cdot 24_5 - 114_5 = 2310_5$

Розв'язання. Визначимо порядок виконання дій у рівнянні.

$$x_5 \overset{1}{\cdot} 24_5 \overset{2}{-} 114_5 = 2310_5$$

$$x_5 \cdot 24_5 = 2310_5 + 114_5.$$

$$\begin{array}{r} 2310_5 \\ +\ \underline{114_5} \\ 2424_5 \end{array}$$

$$x_5 \cdot 24_5 = 2424_5,$$
$$x_5 = 2424_5 : 24_5,$$
$$x_5 = 101_5.$$

Відповідь. $x_5 = 101_5$.

4.1. Обчислити: $10013_5 – 4234_5 + 40432_5$;
4.2. Обчислити: $425_6 \cdot 54_6 + 43_6$;
4.3. У яких системах числення справджуються рівності

$$306_x + 124_x = 220;$$

4.4. Обчислити: $1201_3 – 201_3 + 22001_3$;
4.5. Обчислити: $(42_8 + 135_8) \cdot 44_8 – 124_8$;
4.6. Обчислити: $(1155_6 – 24_6) \cdot 12_6 + 135_6$;
4.7. Розв’язати рівняння

$$x_8 : 621_8 + 431_8 = 1252_8;$$

4.8. Обчислити: $(76_8 \cdot 64_8 – 57_8 \cdot 38_8) \cdot 44_8$;
4.9. У яких системах числення справджуються рівності:

$$342_x + 44_x = 441_x;$$

4.10. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$13223_5 – 22_5 \cdot 43_5;$$

4.11. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$3245_6 \cdot 201_6 – 542_6 \cdot 201_6;$$

4.12. У яких системах числення справджується рівність:

$$15_x = 12;$$

4.13. У яких системах числення справджується рівність:

$$30_x : 2_x = 12_x;$$

4.14. У яких системах числення справджується рівність:

$$507_x + 436_x = 1145_x;$$

4.15. У яких системах числення справджується рівність:

$$102_x + 212_x = 34;$$

4.16. Обчислити: $(523_7 – 21_7 \cdot 11_7) + 3411_7$;

4.17. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$101101_2 \cdot 101_2 + 111_2 \cdot 10_2;$$

4.18. У яких системах числення справджується рівність:

$$29 = 104_x;$$

4.19. Обчислити: $1002_3 \cdot (1110_3 - 121_3)$;

4.20. У яких системах числення справджується рівність:

$$55_x : 13_x = 4_x;$$

4.21. У яких системах числення справджуються рівності:

$$321_x + 122_x = 1103_x;$$

4.22. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$1515_8 \cdot 15_8 - 31_8;$$

4.23. Обчислити: $3421_5 - (32_5 \cdot 12_5 + 1213_5)$;

4.24. У яких системах числення справджується рівність:

$$1520_x : 12_x = 123_x;$$

4.25. При якому значенні *p* виконується рівність:

$$236_p = 1240_5;$$

4.26. У яких системах числення справджується рівність:

$$626_x : 123_x = 5;$$

4.27. При якому значенні *p* виконується рівність:

$$102_p + 212_p = 34;$$

4.28. Обчислити значення виразу у позиційній системі числення з основою g, якщо:

$$3203_4 \cdot 43_5 - 42323_5 + 8105_9 \text{ і } g = 5;$$

4.29. У яких системах числення справджується рівність

$$752_x - 647_x = 67;$$

4.30. Обчислити результат найзручнішим способом і подати його у десятковій системі числення:

$$232212_4 \cdot 131_4 \cdot 2_4 + 201_4 \cdot 1323_4$$

ВІДПОВІДІ

1.

1.1. 4143_5.
1.4. 1220210_3.
1.5. 546022_7.
1.7. 1302222_5.
1.9. 305301_6.
1.11. 300331_5.
1.13. 54233_7.
1.18. 42204_{11}.
1.20. $2(12)(20)8_{21}$.
1.22. $6(11)3(15)_{20}$.
1.24. $(11)336_{13}$.
1.26. 944_{14}.
1.29. $4728(11)_{12}$.

2.

2.1. 2998.
2.4. 2112_6.
2.7. $64(10)_{12}$.
2.10. 11414_7.
2.13. 232031_4.
2.14. 2010122_3.
2.16. 4020_5.
2.18. 982_{11}.
2.20. 2136_{11}.
2.21. $8(10)91_{12}$.
2.24. 4274_8.
2.28. 17231_9.
2.30. 5142_{14}.

3.

3.1. 41211_5
3.2. 41245_6
3.3. 7
3.5. 10610_8
3.7. 472041_8
3.9. 5
3.10. 787
3.13. 4
3.14. 8
3.15. 3
3.24. 6
3.20. 7
3.29. 7

§ 5. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ НЕВІД'ЄМНИХ ЧИСЕЛ

1. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел

На множині цілих невід'ємних чисел дії додавання і множення виконуються завжди, тобто завжди в результаті виконання цих дій отримуємо ціле невід'ємне число. Проте дії віднімання і ділення є частковими операціями на цій множині. Якщо для виконання дії віднімання ($a - b$) слід застосувати просту ознаку ($a \geq b$), то для дії ділення такої очевидної ознаки не існує.

Пошуки таких ознак почалися ще до нашої ери. Важливе місце у розкритті властивостей чисел належить Піфагору[1] та його послідовникам. Дослідження у цій галузі привели не тільки до відкриття ряду ознак, а й до встановлення важливих властивостей чисел, пов'язаних з розглядом спеціального відношення, яке називається *відношенням подільності.*

Про довільні цілі невід'ємні числа a і b кажуть, що a знаходиться у відношенні подільності з b або що *a ділиться на b* (позначається $a \vdots b$), якщо існує ціле невід'ємне число x, таке, що:

$$a = b \cdot x:$$

$$\forall a, b \in N_0,\ a \vdots b \ \Leftrightarrow\ \exists\ x \in N_0,\ a = b \cdot x.$$

З означення відношення подільності випливають наступні **властивості**.

1. Нуль ділиться на будь-яке ціле невід'ємне число:

$$\forall a \in N_0,\ 0 \vdots a.$$

2. Будь-яке ціле невід'ємне число ділиться на одиницю:

$$\forall a \in N_0,\ a \vdots 1.$$

Теорема 1. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел:

1) рефлексивне: $\forall a \in N_0,\ a \vdots a$;

2) антисиметричне:

$$\forall a, b \in N_0,\ (a \vdots b) \wedge (b \vdots a) \Rightarrow (a = b);$$

3) транзитивне:

$$\forall a, b, c \in N_0,\ (a \vdots b) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c);$$

4) незв'язне.

Доведення.

▶ **1.** Оскільки для довільного цілого невід'ємного числа a за властивістю одиниці при множенні $a = a \cdot 1$, то за означенням відношення подільності одержуємо $a \vdots a$. Отже, відношення подільності рефлексивне.

2. Нехай a і b – довільні цілі невід'ємні числа, такі, що $a \vdots b$ і $b \vdots a$. Звідси за означенням відношення подільності:

$$a = b \cdot x_1 \text{ і } b = a \cdot x_2.$$

А тому $a = a \cdot (x_1 \cdot x_2)$. (1)

Для цілого невід'ємного числа a можливі два випадки:

1) $a = 0$, тоді і $b = 0$. Отже, $a = b$.

2) $a \neq 0$, тоді з рівності (1), внаслідок правила скорочення для множення, одержуємо $x_1 \cdot x_2 = 1$. Але добуток двох цілих невід'ємних чисел дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли ці числа рівні 1. Отже, $a = b$.

Тому завжди, якщо $a \vdots b$ і $b \vdots a$, то $a = b$. Отже, відношення подільності цілих невід'ємних чисел антисиметричне.

3. Нехай a, b і c – довільні цілі невід'ємні числа такі, що $a \vdots b$ і $b \vdots c$. Звідси за означенням відношення подільності $a = b \cdot x_1$,

$$b = c \cdot x_2, \; x_1, x_2 \in N_0.$$

Якщо замість b у першу рівність підставити його значення з другої рівності, то одержимо $a = (c \cdot x_2) \cdot x_1$ або $a = c \cdot (x_2 \cdot x_1)$. Оскільки добуток двох цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом, то $a = c \cdot x$, де $x_1 \cdot x_2 = x \in N_0$. Звідси за означенням подільності цілих невід'ємних чисел, одержуємо $a \vdots c$. Таким чином, відношення подільності транзитивне.

4. Візьмемо два різні довільні числа 3 і 5 різні. Ні 3 не ділиться на 5, ні 5 не ділиться на 3. Отже, відношення подільності незв'язне.◄

З теореми випливає такий **наслідок**.

Наслідок 1. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням нестрогого порядку.

Особливе місце у теорії подільності цілих невід'ємних чисел займають числа 0 і 1. Нуль ділиться на довільне ціле невід'ємне число, а тому висловлення "$0 \vdots 0$" – істинне. З іншого боку, якщо $a \vdots 0$, то за означенням подільності $a = 0 \cdot x$, що можливо лише тоді, коли $a = 0$. Отже, на нуль з цілих невід'ємних чисел ділиться лише 0. Іноді відношення подільності $a \vdots b$ розглядається лише тоді, коли b є натуральним числом. У цьому випадку замість терміна “*a* ділиться на *b*” користуються термінами “*a кратне b*”, “*b є дільником a*” або “*a ділиться націло на b*”.

Зауваження 1. Відношення подільності на множині цілих невід’ємних чисел слід відрізняти від операції ділення у цій множині: пару чисел, яка належить цьому відношенню, не можна ототожнювати з результатом операції ділення, що ставиться їй у відповідність.

На основі означень відношення подільності, частки і ділення з остачею одержуємо **наслідки**.

Наслідок 2. Для довільних цілого невід’ємного числа a і натурального числа b число a ділиться на b тоді і тільки тоді, коли при діленні a на b з остачею остача дорівнює нулю.

Наслідок 3. Для довільних цілого невід’ємного числа a і натурального числа b число a ділиться на b тоді і тільки тоді, коли існує частка чисел a і b.

Необхідною умовою подільності натуральних чисел є така теорема.

Теорема 2. Для довільних натуральних чисел a і b, якщо a ділиться на b, то a не менше b, зокрема, якщо $a \neq b$, то $a > b$.

Доведення.

▸ Нехай a і b – довільні натуральні числа такі, що $a \vdots b$. Звідси за означенням подільності $a = b \cdot x, x \in N$. Оскільки x – натуральне число, то $x \geq 1$. За властивістю монотонності множення $b \cdot x \geq b$, тобто $a \geq b$. Зокрема, якщо $a \neq b$, то $x > 1$ і $a > b$. ◂

2. Подільність суми, різниці і добутку

Відношення подільності цілих невід’ємних чисел розглядається з операціями додавання, віднімання і множення. Про це свідчать наступні теореми.

Теорема 3 **(подільність суми).** Якщо кожен із доданків ділиться на задане число, то й сума ділиться на це число.

Доведення.

▸ Доведення теореми проведемо для випадку двох доданків. Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа такі, що $a_1 \vdots b$ і $a_2 \vdots b$. Звідси за означенням подільності:

$$a_1 = b \cdot x_1,\ a_2 = b \cdot x_2, \qquad x_1, x_2 \in N_0.$$

Додамо одержані рівності почленно:

$$a_1 + a_2 = b \cdot x_1 + b \cdot x_2.$$

На основі дистрибутивності множення відносно додавання

$$a_1 + a_2 = b \cdot (x_1 + x_2).$$

Число $x = x_1 + x_2$ є цілим невід'ємним числом як сума цілих невід'ємних чисел. Отже, $a_1 + a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$. Тому за означенням подільності

$(a_1 + a_2) \vdots b$. ◂

Аналогічно доводиться така теорема.

Теорема 4 **(подільність різниці).** Якщо зменшуване і від'ємник діляться на дане число, то й різниця ділиться на це число.

Вираз, у якому є тільки операції додавання і віднімання, називається *алгебраїчною сумою*, а його компоненти – *доданками.*

Із розглянутих теорем одержуємо **наслідок**.

Наслідок 4. Якщо алгебраїчна сума кількох чисел і кожний її доданок, за винятком одного, діляться на задане число, то й цей доданок ділиться на задане число.

Теорема 5 **(подільність добутку).** Якщо у добутку кількох чисел хоч один із множників ділиться на задане число, то й добуток ділиться на це число.

Доведення.

▸ Доведення проведемо для випадку двох множників. Нехай a_1, a_2 і b – довільні цілі невід'ємні числа, такі, що $a_1 \vdots b$. З того, що $a_1 \vdots b$, за означенням подільності випливає:

$$a_1 = b \cdot x_1,\ x_1 \in N_0.$$

Тоді $a_1 \cdot a_2 = (b \cdot x_1) \cdot a_2 = b \cdot (x_1 \cdot a_2)$.

Але $x = x_1 \cdot a_2$ є цілим невід'ємним числом як добуток цілих невід'ємних чисел. Тому $a_1 \cdot a_2 = b \cdot x$, $x \in N_0$.

Отже, за означенням подільності $a_1 \cdot a_2 ⋮ b$. ◄

З властивостей відношення подільності та теореми одержуємо **наслідок**.

Наслідок 5. Якщо число ділиться на добуток кількох чисел, то воно ділиться на кожний множник.

3. Ознаки подільності

У багатьох випадках процес ділення одного числа на інше досить трудомісткий. З'ясування істинності висловлення "$a ⋮ b$" при діленні чисел a і b не завжди просте. У зв'язку з цим виникає задача пошуку одержання відповіді без виконання безпосереднього ділення.

Ознакою подільності одного натурального числа на інше називається необхідна і достатня умова, при виконанні якої одне число ділиться на інше, причому перевірка умови виконується легше, ніж безпосереднє ділення.

Ряд ознак подільності натуральних чисел одержують із загальної ознаки подільності Паскаля.

Теорема 6 **(загальна ознака подільності Паскаля).** Для того, щоб натуральне число $a = \overline{a_n\, a_{n-1} \dots a_1\, a_0}_g$, записане у позиційній системі числення з основою g, ділилося на натуральне число b, необхідно і достатньо, щоб на b ділилася сума

$$r = a_0 + a_1 \cdot r_1 + a_2 \cdot r_2 + \dots + a_n \cdot r_n,$$

де $r_1, r_2, \dots r_n$ – остачі від ділення $g, g^2, \dots, g^n$ на число b.

Доведення.

► Розглянемо запис числа a у позиційній системі числення з основою g :

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0 \quad (1)$$

На основі ділення з остачею степені основи системи числення запишуться:

$$g = b \cdot q_1 + r_1, \quad r_1 < b;$$
$$g^2 = b \cdot q_2 + r_2, \quad r_2 < b;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g^n = b \cdot q_n + r_n, \quad r_n < b.$$

Підставляючи значення $g, g^2,..., g^n$ у (1), одержимо

$$a = a_n \cdot (b \cdot q_n + r_n) + ... + a_2 \cdot (b \cdot q_2 + r_2) + a_1 \cdot (b \cdot q_1+r_1) + a_0. \quad (2)$$

На основі законів операцій множення і додавання цілих невід'ємних чисел рівність (1) можна записати так:

$$a = b \cdot (a_n \cdot q_n +... + a_2 \cdot q_2 + a_1 \cdot q_1) +$$
$$+ (a_n \cdot r_n +... + a_2 \cdot r_2+a_1 \cdot r_1+a_0).$$

Якщо ввести позначення $q = a_n \cdot q_n + ... + a_2 \cdot q_2 + a_1 \cdot q_1$ і $r = a_n \cdot r_n + ... + a_2 \cdot r_2 + a_1 \cdot r_1 + a_0$, то одержимо рівність

$$a = b \cdot q + r. \quad (3)$$

З рівності (3) матимемо:

1. За теоремою про подільність добутку число $b \cdot q$ ділиться на b. Якщо і другий доданок r ділиться на b, то за теоремою про подільність суми $a \vdots b$.

2. Навпаки, якщо число r ділиться на число b, то за наслідком і число a ділиться на b.

Цим самим доведено, що $a \vdots b \Leftrightarrow r \vdots b$. ◄

Користуючись теоремою, можна встановлювати ознаку подільності на довільне задане натуральне число у позиційній системі числення з будь-якою основою. Найбільш вживаними є ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11 і 25 у десятковій системі числення, деякі з них відомі ще з середньої школи.

Теорема 7	**(ознака подільності на 2).** Для того щоб число ділилося на 2, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі ділилося на 2.

Доведення.

► Нехай маємо довільне число, записане в вигляді:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}.$$

Розглянемо десятковий запис числа

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} +... + a_1 10 + a_0.$$

Згрупувавши всі доданки, крім останнього, і винісши 10 за дужки:

$$a = 10 (a_n 10^{n-1} +... + a_1) + a_0,$$

Якщо, $b = a_n 10^{n-1} +... + a_1$, то $a = 10 \cdot b + a_0$.

Як бачимо, перший доданок $10 \cdot b$ ділиться на 10, а $10 \vdots 2$, то, щоб число $a \vdots 2$, необхідно, щоб $a_0 \vdots 2$. ◄

Теорема 8 | **(ознака подільності на 5).** Для того, щоб число ділилося на 5, необхідно і достатньо, щоб остання цифра у його записі була 0 або 5.

Теорема 9 | **(ознака подільності на 3 і на 9).** Для того, щоб натуральне число ділилося на 3, або 9, необхідно і достатньо, щоб на 3, або 9 ділилася сума цифр даного числа ($a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n$).

Доведення.

▸ Введемо допоміжні пояснення. Число виду $10^k - 1$ завжди ділиться на 9, а отже і на 3. Запишемо рівність:

$$10^k - 1 = \underbrace{99...9}_{k\ ДЕВ'ЯТОК} = 9 \cdot \underbrace{11...1}_{k\ ОДИНИЦЬ}.$$

Нехай задане число записане у виді $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$, суму його цифр позначимо $b = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$. Різницю цифр $a - b = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0 - (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0) = a_n (10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + … + a_1 (10 - 1)$. Оскільки числа виду $10^k - 1 \vdots 9$, то $10^n - 1 \vdots 9$, $10^{n-1} - 1 \vdots 9$, …, $10 - 1 \vdots 9$, отже, $a - b = 9m$. Щоб дане число ділилося на 3 або на 9, потрібно, щоб сума цифр ділилася на 3, або на 9. ◂

Теорема 10 | **(ознака подільності на 4).** Для того, щоб число ділилося на 4, необхідно і достатньо, щоб число $a_0 + 2a_1$ ділилося на 4.

Теорема 11 | **(ознака подільності на 11).** Для того, щоб число ділилося на 11, необхідно і достатньо, щоб на 11 ділилася різниця:
$(a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)$.

Доведення.

▸ Подільність на 11 доведемо на основі ознаки Паскаля. Розглянемо десятковий запис числа:

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0.$$

Знаходимо остачі r_1, r_2, ... r_n при діленні 10, 10^2..., 10^n на 11.

$$10 = 11 \cdot 0 + 10,\ r_1 = 10,$$

$$10^2 = 99 + 1 = 11 \cdot 9 + 1,\ r_2 = 1.$$

Якщо $n = 2k,\ k \in N$, то:

$$10^{2k} = \underbrace{999\ldots9}_{2k\ \text{разів}} + 1 = 11g + 1,\ r_{2k} = 1.$$

Якщо $n = 2k + 1,\ k \in N$,

то: $10^{2k+1} = 10^{2k} \cdot 10 = (11g + 1) \cdot 10 =$
$= 11 \cdot (10g) + 10$, отже, $r_{2k+1} = 10$.

А тому маємо:

$$r = a_0 + 10\,a_1 + a_2 + 10\,a_3 + a_4 + 10\,a_5 + \ldots =$$
$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) + 10(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

Якщо до правої частини одержаної рівності додати і відняти вираз $(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)$, то можна записати:

$$r = ((a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)) + 11(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

Звідси, за властивостями відношення подільності та ознакою Паскаля, отримаємо:

$$a \,⋮\, 11 \Leftrightarrow ((a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)) \,⋮\, 11. ◄|$$

Наприклад (1), число 153623 не ділиться на 11, бо $(3 + 6 + 5) - (2 + 3 + 1) = 8$, і 8 не ділиться на 11, а число 150623 ділиться на 11, бо $(3 + 6 + 5) - (2 + 0 + 1) = 11$, і 11 ділиться на 11.

Теорема 12 | **(ознака подільності на 25).** Для того щоб число ділилося на 25, необхідно і достатньо, щоб на 25 ділилися дві останні цифри числа.

Доведення.

|► Нехай задане число записане у виді $a = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0}$ і його можна записати у вигляді $a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1\, 10 + a_0$. Це число можна записати у вигляді:

$$a = 100\,(a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \ldots + a_2) + a_1\, 10 + a_0.$$

Позначимо вміст дужок через c, тобто

$$c = a_n 10^{n-2} + a_{n-1}10^{n-3} + \ldots + a_2.$$

Тоді $a = 100\, c + \overline{a_1 a_0}$. Оскільки число 100 ділиться на 25 , то і число виду $\overline{a_1 a_0}$ має ділитися на 25. Цю властивість можна використати і як ознаку подільності на 4, оскільки 100 ділиться і на 4. ◄|

На основі теореми Паскаля можна сформулювати і деякі інші ознаки подільності.

Загальна ознаки подільності чисел на 7, 11, 13.

Якщо різниця, одержана від віднімання числа вираженого трьома його останніми цифрами і всіма іншими (або навпаки) ділиться на 7, або на 11, або 13, то і саме число ділиться на 7, 11, 13.

Наприклад (2).

Визначити чи число 368 312 ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Число, записане трьома останніми цифрами

$$Q = 312.$$

Тоді число, виражене цифрами, що залишилися

$$P = 368.$$

Вказана різниця запишеться:

$$P - Q = 368 - 312 = 56.$$

Отже, 56 ділиться на 7 і не ділиться на 11 і 13.

Наприклад (3).

Визначити, чи число 378 456 ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. Число, записане трьома останніми цифрами, –

$$Q = 456.$$

Тоді число, виражене цифрами, що залишилися, –

$$P = 378.$$

Вказана різниця запишеться:

$$Q - P = 456 - 378 = 78.$$

Оскільки 78 ділиться на 13, то і 378 456 ділиться на 13 і не ділиться на 7 і 11.

Ознака подільності чисел на 50.

Для того, щоб число ділилося на 50, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00, або 50.

Ознака подільності чисел на 100.

Для того, щоб число ділилося на 100, необхідно і достатньо, щоб дві останні цифри у записі числа були 00.

Ознака подільності чисел на 8, 125, 250.

Для того, щоб число ділилося на 8, 125, 250, необхідно і достатньо, щоб на ці числа воно ділилося число, записане трьома останніми цифрами цього числа.

Ознака подільності чисел на 6.

Для того, щоб число ділилося на 6, необхідно і достатньо, щоб це число ділилось на 2 і на 3 одночасно.

Ознака подільності чисел на 12.

Для того, щоб число ділилося на 12, необхідно і достатньо, щоб це число ділилось на 3 і на 4 одночасно.

Ознака подільності чисел на 15.

Для того, щоб число ділилося на 15, необхідно і достатньо, щоб це число ділилось на 3 і на 5 одночасно.

4. Прості і складені числа. Решето Ератосфена

Для довільного цілого невід'ємного числа a і натурального числа b, якщо a ділиться на b, то число b називається дільником числа a.

Натуральне число, яке більше за одиницю, називається *простим*, якщо воно має своїми дільниками тільки одиницю і саме себе (Додаток Б).

Натуральне число, яке більше за одиницю, називається *складеним*, якщо воно має не менше трьох дільників.

Отже, числа 2, 3, 5, 7 – прості числа першого десятка, 11, 13, 17, 19 – прості числа другого десятка, а числа 4, 6, 8, 9, 10, 12 складені.

Натуральні числа a_1, a_2, ..., a_n називаються *взаємно простими*, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці. Якщо кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа a_1, a_2, ..., a_n називають *попарно взаємно простими.*

Теорема 13. Якщо просте число ділиться на натуральне число, більше за одиницю, то ці числа рівні.

Доведення.

► Нехай p – просте число і $a > 1$ – натуральне число таке, що $p \vdots a$. Якщо p – просте число, тоді за означенням простого числа воно має своїми дільниками лише числа 1 і p. Оскільки $a > 1$, то воно і є дільником p. Отже, $a = p$. ◄

Теорема 14. Добуток кількох натуральних множників ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли хоча б один них ділиться на просте число.

Доведення.

▶ *Необхідність.* Нехай p – довільне просте число і $a_1, a_2,..., a_n$ – будь-які натуральні числа, такі, що

$$a_1, a_2, ..., a_n \vdots p.$$

Доведемо, що хоча б одне з чисел $a_1, a_2 ,..., a_n$ ділиться на p. Доведення проведемо методом математичної індукції.

1. Нехай $n = 2$ і $a_1 \cdot a_2 \vdots p$. Для натурального числа a_1 і простого числа p за теоремою можливі лише такі два випадки:

а) $a_1 \vdots p$, тоді дане твердження істинне;

б) числа a_1 і p взаємно прості. Тому маємо, що добуток двох чисел ділиться на третє число, яке взаємно просте з одним із них. Звідси за теоремою одержуємо, що друге число ділиться на просте число. Отже, твердження істинне для двох множників.

2. Припустимо, що твердження істинне при $n = k \geq 2$ тобто, коли $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \vdots p$, то принаймні один із множників ділиться на p.

3. Доведемо, що твердження істинне при $n = k + 1$. Нехай задано добуток $k + 1$ множників $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}$, який ділиться на p. За властивостями множення цілих невід'ємних чисел добуток можна записати $(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k) \cdot a_{k+1}$. Позначивши $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k = a$, отримаємо $a \cdot a_{k+1} \vdots p$.

Розглянемо число a_{k+1}. Оскільки p – просте число, то можливі лише такі два випадки:

а) $a_{k+1} \vdots p$ і у цьому випадку твердження істинне при

$$n = k + 1;$$

б) a_{k+1} і p взаємно прості числа. У цьому випадку за теоремою одержуємо $a \vdots p$, тобто $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \vdots p$. За припущенням маємо, що хоча б одне із чисел $a_1, a_2,..., a_k$ ділиться на p. Отже, у цьому випадку твердження істинне при $n = к + 1$.

За принципом математичної індукції твердження істинне для кожного натурального числа $a \geq 2$.

Достатність теореми випливає з теореми про подільність добутку. ◀

Теорема 15. Кожне натуральне число, яке більше за одиницю, має хоча б один простий дільник.

Доведення.

▶ Нехай a – довільне натуральне число більше за одиницю. Розглянемо множину його дільників, які більші від 1 і позначимо її M. Ця множина непорожня, бо їй належить саме число a. За принципом найменшого числа у ній існує найменше число. Позначимо його p і доведемо, що воно просте.

Припустимо протилежне, що число p не є простим. Тоді воно ділиться на деяке натуральне число g, таке, що $1 < g < p$. Маємо:

$$a \vdots p \text{ і } p \vdots g.$$

За транзитивністю відношення подільності $a \vdots g$, де $1 < g < p$, що суперечить вибору числа p як найменшого дільника числа a. Отже, p є простим дільником числа a. ◀

З теореми одержуємо наслідок.

Наслідок 6. Найменший, відмінний від одиниці, дільник натурального числа є числом простим.

Теорема 16 **(теорема Евкліда).** Множина простих чисел нескінченна.

Доведення.

▶ Доведемо теорему методом від протилежного. Припустимо, що множина простих чисел скінченна, тобто, що вона складається з простих чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Розглянемо число виду $g = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Число g натуральне і більше за одиницю, а тому воно має принаймні один простий дільник. Таким простим числом не може бути жодне з простих чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, бо число g при діленні на кожне з них дає в остачі 1. Отже, існує просте число, відмінне від чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Значить, наше припущення про скінченність множини простих чисел хибне. ◀

Простим чи складеним є задане натуральне число, більше від 1, встановлюється на основі теореми, яка може бути використана як критерій простоти натурального числа.

Теорема 17. Якщо натуральне число a, більше одиниці, не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують a, то число a просте.

Доведення.

|▸ Доведемо теорему методом від протилежного. Припустимо, що число a складене. Тоді за властивістю простих чисел найменший його дільник, більший від 1, є числом простим. Позначимо його g. Матимемо:

$$a = g \cdot a_1, \quad 1 < g < a, \quad a_1 > 1.$$

За вибором числа g воно є найменшим дільником числа a, більшим від одиниці і простим, а тому $g \le a_1$. За монотонністю множення цілих невід'ємних чисел $g^2 \le a_1 \cdot g$, тобто $g^2 \le a$. Отже, g є простим дільником числа a, квадрат якого не перевищує a, а це суперечить умові теореми. ◂|

З теореми одержуємо наслідок.

Наслідок 7. Найменший простий дільник натурального числа не перевищує кореня квадратного з даного числа.

Задача 1. Встановити, простим чи складеним є число 967.

Роз'язання.

Для того, щоб встановити простим чи складеним є число 967, потрібно перевірити, чи є його дільниками всі прості числа від 2 до 31, бо $31^2 = 961 < 967$, а $32^2 = 1024 > 967$.

За ознаками подільності встановлюємо, що число 967 не ділиться на прості числа 2, 3, 5 і 11. Безпосередньо перевіряємо, що це число не ділиться на прості числа 7, 13, 17, 19, 23, 29 і 31.

Отже, число 967 не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують числа 967, а тому воно буде простим.

Відповідь. Число 967 – просте.

Для вивчення розподілу простих чисел у натуральному ряді та інших задач теорії чисел потрібно знати всі прості числа, які не перевищують заданого натурального числа. Для розв'язання цієї задачі є спеціальний метод, який називається *решетом Ератосфена*[1].

Суть методу *решета Ератосфена* полягає у тому, що:

1. Виписують всі натуральні числа від 2 до n:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., n. (1)

2. Число 2 ділиться тільки на 1 і саме на себе, отже, воно є простим. Викреслюють у ряді (1) усі числа, кратні двом, крім самого числа 2.

3. Перше, наступне за 2, невикреслене число буде 3. Воно не ділиться на 2 (інакше його б викреслили). Отже, 3 ділиться тільки на 1 і саме на себе, а тому також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 3, крім самого числа 3.

4. Перше, наступне за 3, невикреслене число буде 5. Воно не ділиться ні на 2, ні на 3. Отже, 5 ділиться тільки на 1 і саме на себе, тому воно також буде простим. Викреслюють усі числа, кратні 5, крім самого числа 5 і т. д.

Процес буде закінчено, коли одержимо просте число p таке, що $p^2 \leq n$, але для першого, наступного за p, невикресленого простого числа p_1 $p_1^2 > n$. Усі невикреслені числа від 2 до n будуть простими.

Наприклад, щоб скласти таблицю простих чисел, які не перевищують 1000, викреслювання потрібно закінчити при $p = 31$, бо $31^2 = 961 < 1000$. Для наступного за 31 числа, тобто для числа 32, маємо $32^2 = 1024 > 1000$, а тому й для наступного за 31 простого числа будемо мати таку ж нерівність.

Зауваження.

1. Щоб викреслити всі складені числа, кратні простому числу p, не потрібно знати ознаки подільності на p. Для цього досить у ряді (1) викреслити кожне p-те число після числа p, враховуючи й ті, які вже раніше були викреслені.

2. Викреслювання чисел, кратних простому числу p, слід починати з p, тому що всі складені числа між p і p^2 уже викреслені як кратні простим числам, меншим від p.

5. Спільне кратне, найменше спільне кратне кількох натуральних чисел

Нехай a_1, a_2, a_3, ..., a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, яке ділиться на кожне із заданих чисел, називається їх *спільним кратним*, а найменше зі спільних кратних – їх *найменшим спільним кратним* і позначається *НСК* (a_1, a_2, a_3, ..., a_n).

Множина спільних кратних для натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n нескінченна. Це випливає з того, що за теоремою про подільність добутку число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ є спільним кратним заданих чисел, а тому і кожне число виду

$$(a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n) \cdot k, \text{ де } k \in N,$$

також буде їх спільним кратним. За принципом найменшого числа у множині спільних кратних існує найменше число, воно і є найменше спільне кратне заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел $a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n$ їх найменше спільне кратне існує і причому єдине.

З означення найменшого спільного кратного випливає теорема.

Теорема 18. Для довільних натуральних чисел a і b, якщо a ділиться на b, то a і буде найменшим спільним кратним заданих чисел:
$\forall a, b \in N : a \,\vdots\, b \Rightarrow НСК\,(a, b) = a.$

Основну властивість найменшого спільного кратного виражає така теорема.

Теорема 19. Кожне спільне кратне кількох натуральних чисел ділиться на їх найменше спільне кратне.

Доведення.

► Нехай $a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n$ – довільні натуральні числа, $m = НСК\,(a_1,\ a_2, \ldots, a_n)$ і M – довільне спільне кратне цих чисел. Поділимо M на m з остачею:

$$M = m \cdot g + r, \quad r < m. \qquad (1)$$

M і m – спільні кратні чисел $a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n$, тоді для кожного

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad M \,\vdots\, a_i \quad \text{і} \quad m \,\vdots\, a_i.$$

За теоремою про подільність добутку, $m \cdot g \,\vdots\, a_i \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$

Отже, у рівності (1) усі члени, крім одного r, діляться на кожне з чисел $a_i \;\; i= 1, 2, \ldots, n.$ Звідси за наслідком $r \,\vdots\, a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Оскільки $r < m$ є найменшим спільним кратним заданих чисел, то

$r = 0$ і $M = m \cdot g$, тобто $M \,\vdots\, m.$ ◄

Найменше спільне кратне має такі **властивості**:

1. Для довільних натуральних чисел $a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_n$ існує єдине *НСК*.

2. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то $НСК\ (a, b) \geq a$).

3. Кожне спільне кратне даних чисел ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

4. Якщо $a \vdots b$, то $НСК\ (a, b) = a$.

6. Спільний дільник, найбільший спільний дільник кількох натуральних чисел

Нехай $a_1,\ a_2, ..., a_n$ – довільні натуральні числа. Натуральне число, на яке ділиться кожне із заданих чисел, називається їх *спільним дільником*, а найбільший із спільних дільників – їх *найбільшим спільним дільником* і позначається $НСД\ (a_1,\ a_2, ..., a_n)$. Множина спільних дільників декількох натуральних чисел є непорожньою і скінченною. Це випливає з того, що число 1 є спільним дільником довільних натуральних чисел, а дільник числа не перевищує саме число. Тоді за принципом найбільшого числа у множині спільних дільників заданих чисел існує найбільше число, яке і буде найбільшим спільним дільником заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел $a_1,\ a_2, ..., a_n$ їх найбільший спільний дільник завжди існує і причому єдиний.

З означення найбільшого спільного дільника випливає теорема.

Теорема 20. Для довільних натуральних чисел a і b, якщо a ділиться на b, то їх найбільший спільний дільник дорівнює b:
$\forall a, b \notin N\ \ a \vdots b\ \Rightarrow НСК\ (a, b) = b.$

Основну властивість найбільшого спільного дільника виражає така теорема.

Теорема 21. Довільний спільний дільник заданих натуральних чисел є дільником їх найбільшого спільного дільника.

Доведення.

▶ Нехай $a_1,\ a_2, ..., a_n$ – довільні натуральні числа,

$D = НСД\ (a_1,\ a_2, ..., a_n)$ і d – їх довільний спільний дільник. Тоді за означенням найбільшого спільного дільника $D \geq d$. Припустимо, що D не ділиться на d. Нехай $m = НСК\ (D, d)$.

Оскільки $\overline{D \vdots d}$, то $m > D$. Числа D і d є спільними дільниками кожного із чисел a_i, $i = 1, 2, ..., n$, тобто кожне з даних чисел є спільним кратним чисел d і D. За основною властивістю найменшого спільного кратного кожне з чисел a_i, $i = 1, 2, ... , n$, буде кратним числу m, тобто m є їх спільним дільником. А це неможливо, бо D – найбільший спільний дільник чисел $a_1,\ a_2, ..., a_n$. Одержали протиріччя. Отже, теорему доведено. ◄

Найбільший спільний дільник має такі **властивості**:

1. Для довільних натуральних чисел $a_1,\ a_2, a_3, ..., a_n$ існує єдине *НСД*.

2. Найбільший спільний дільник чисел a і b не перевищує меншого за більше з даних чисел (якщо $a > b$, то НСД $(a, b) \leq a$).

3. Найбільший спільний дільник даних чисел ділиться на будь-який спільний дільник.

4. Якщо $a \vdots b$, то $НСД\ (a, b) = b$.

7. Властивості найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел

Між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох натуральних чисел існує зв’язок, який виражається такою теоремою.

Теорема 22. Для довільних натуральних чисел a і b їх найменше спільне кратне дорівнює добутку даних чисел, поділеному на їх найбільший спільний дільник:

$$\forall a, b \in N \quad НСК\ (a, b) = \frac{ab}{НСД\ (a, b)}.$$

Доведення.

► Нехай d – довільний спільний дільник натуральних чисел a і b. Розглянемо число виду:

$$M = \frac{ab}{d}.$$

Цю рівність (1) можна записати у вигляді:

$$M = a \cdot \frac{b}{d} = b \cdot \frac{a}{d}.$$

Звідси за означенням подільності одержуємо, що M є спільним кратним чисел a і b. За основною властивістю найменшого спільного кратного будемо мати:

$$M = m \cdot t,\ \ m = НСК\,(a, b)\ \text{ і } t \in N.$$

Скориставшись заміною $M = m \cdot t$, запишемо:

$$m\,t = \frac{ab}{d}$$

Тоді:

$$d = \frac{ab}{mt}.$$

Отже, будь-який спільний дільник чисел a і b дорівнює їх добутку, поділеному на число, кратне найменшому спільному кратному даних чисел. Дана рівність показує, що найбільшим спільний дільник буде при $t = 1$. Враховуючи це, рівність запишеться:

$$НСД\,(a, b) = \frac{ab}{m}.$$

Отже:

$$НСК\ (a, b) = \frac{ab}{НСД\ (a, b)}. \blacktriangleleft$$

З доведеної теореми одержуємо наслідок.

Наслідок 8. Для того, щоб найменше спільне кратне двох чисел дорівнювало їх добутку, необхідно і достатньо, щоб ці числа були взаємно простими.

Теорема не може бути застосована більше, ніж до двох чисел, бо, наприклад, $НСК$ (2, 4, 6) = 12, тоді як за теоремою:

$$НСК(2, 4, 6) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2} = 24.$$

Теорема 23. Для того, щоб спільний дільник d натуральних чисел a і b був їх найбільшим спільним дільником, необхідно і достатньо, щоб числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ були взаємно простими.

Доведення.

▶ **Необхідність.** Нехай $d = НСД\,(a, b)$. Доведемо, що числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ – взаємно прості. Припустимо протилежне, тобто, що числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ – не взаємно прості. Отже, вони мають спільний дільник $k > 1$.

$$\text{Тоді } \frac{a}{d} = k \cdot a_1 \text{ і } \frac{b}{d} = k \cdot b_1.$$

Звідси:

$$a = (d \cdot k) \cdot a_1 \text{ і } b = (d \cdot k) \cdot b_1,$$

тобто $a \,\vdots\, (d \cdot k)$ і $b \,\vdots\, (d \cdot k)$, де $(d \cdot k) > d$, що суперечить вибору числа d як найбільшого спільного дільника чисел a і b.

Отже, числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ – взаємно прості.

Достатність. Нехай d є спільним дільником чисел a і b, таким, що числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ – взаємно прості. Доведемо, що $d = НСД\,(a, b)$. Припустимо, d не є найбільшим спільним дільником чисел a і b. Нехай D = НСД (a, b). За основною властивістю найбільшого спільного дільника та необхідною ознакою подільності натуральних чисел матимемо:

$D = d \cdot k$, де $k > 1$. Звідси видно, що $a \,\vdots\, (d \cdot k)$ і $b \,\vdots\, (d \cdot k)$. Отже, числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ мають спільний дільник $k > 1$, що суперечить умові. ◀

Теорему можна узагальнити на довільну скінченну сукупність натуральних чисел.

Теорема 24. Спільний дільник двох натуральних чисел можна виносити за знак їхнього найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного:

$\forall\, a, b, c \in N : НСД\,(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot НСД\,(a, b)$;

$\forall\, a, b, c \in N : НСК\,(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot НСК\,(a, b)$.

Доведення.

▸ 1. Нехай D = НСД (a, b). Розглянемо число $D_1 = c \cdot D$. Матимемо

$$НСД\left(\frac{a\cdot c}{D_1}, \frac{b\cdot c}{D_1}\right) = НСД\left(\frac{a\cdot c}{c\cdot D}, \frac{b\cdot c}{c\cdot D_1}\right) = НСД\left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}\right).$$

За попередньою теоремою числа $\frac{a}{D}$ і $\frac{b}{D}$ будуть взаємно простими, тобто $НСД\left(\frac{a}{D}, \frac{b}{D}\right) = 1$. Отже, $НСД\left(\frac{a\cdot c}{D_1}, \frac{b\cdot c}{D_1}\right) = 1$.

За тією ж теоремою $НСД\,(a\cdot c, b\cdot c) = D_1$. А тому $НСД\,(a\cdot c, b\cdot c) = c\cdot НСД\,(a, b)$.

2. Маємо

$$НСК\,(a\cdot c, b\cdot c) = \frac{a\cdot c\cdot b\cdot c}{НСД\,(a\cdot c, b\cdot c)} = \frac{c^2(a\cdot c)}{c\cdot НСД\,(a,b)} =$$

$$= c\cdot\frac{(a\cdot c)}{НСД\,(a,b)} = c\cdot НСК\,(a, b).$$

Отже, $НСК\,(a\cdot c, b\cdot c) = c\cdot НСК\,(a, b)$. ◂

Теорема полегшує знаходження найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника двох чисел. Наприклад:

$$НСК\,(45, 60) = 15\cdot НСК\,(3, 4) = 15\cdot 3\cdot 4 = 180;$$

$$НСД\,(45, 60) = 15\cdot НСД\,(3, 4) = 15.$$

Теорему також можна узагальнити на довільну скінчену сукупність натуральних чисел.

8. Теореми про подільність пов'язані з взаємно простими числами

З поняттям про взаємно прості числа пов'язані дві важливі теореми про подільність.

Теорема 25.	Для довільних натурального числа a і простого числа p має місце одне і тільки одне з відношень: або a ділиться на p, або вони взаємно прості.

Доведення.

▸ Нехай a – довільне натуральне число, а p – будь-яке просте число. Розглянемо $НСД\,(a, p)$. Можливі лише два такі випадки:

1. *НСД* $(a, p) = 1$, тоді числа a і p взаємно прості;
2. *НСД* $(a, p) = d > 1$.

На основі цих залежностей доходимо висновку, що $p \vdots d$. За попередньою теоремою маємо, що $p = d$, а тому $a \vdots p$. ◄

Теорема 26. *Якщо добуток двох натуральних чисел ділиться на третє натуральне число, яке взаємно просте з одним із множників, то другий множник ділиться на це число:*
$\forall a, b, c \in N : a, b \vdots c \wedge НСД(a, b) = 1 \Rightarrow a \vdots c.$

Доведення.

► Нехай a, b і c – довільні натуральні числа такі, для яких виконуються наступні умови:

$$a, b \vdots c \text{ і } НСД(a, b) = 1.$$

Доведемо, що $a \vdots c$. За теоремою про подільність добутку, $a \cdot b \vdots b$ і за умовою теореми $a \cdot b \vdots c$. За основною властивістю найменшого спільного кратного $a \cdot b \vdots НСК(b, c)$. Оскільки числа b і c взаємно прості, то:

$$НСК(b, c) = b \cdot c, \text{ отже, } a \cdot b \vdots b \cdot c.$$

За означенням подільності $a \cdot b = (b \cdot c) \cdot x$ і за монотонністю множення цілих невід'ємних чисел $a = c \cdot x$, тобто $a \vdots c$. ◄

Теорема 27. *Якщо натуральне число ділиться на кожне з двох взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їх добуток:*
$\forall a, b, c \in N \ (a \vdots b) \wedge (a \vdots c) \wedge НСД(b, c) = 1 \Rightarrow a \vdots b \cdot c.$

Доведення.

► Нехай a, b і c – довільні натуральні числа, такі, що $a \vdots b$, $a \vdots c$ і *НСД* $(b, c) = 1$.

Доведемо, що $a \vdots b \cdot c$. За умовою теореми число a є спільним кратним чисел b і c. За властивістю найменшого спільного кратного матимемо $a \vdots НСК(b, c)$. Числа b і c взаємно прості, отже, $НСК(b, c) = b \cdot c$, а тому $a \vdots b \cdot c$. ◄

Відомо, що коли число ділиться на добуток, то воно ділиться і на кожний множник. Користуючись цим фактом та теоремою, одержуємо наслідок.

Наслідок 9. Для того, щоб натуральне число ділилося на добуток двох взаємно простих чисел, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на кожен із множників.

Одержаний наслідок дає можливість встановлювати ознаки подільності на натуральні числа, які можна подати у вигляді добутку двох взаємно простих чисел. Відзначимо також, що цей наслідок можна застосувати і до множників числа, подільність на яке встановлюється.

Задача 2. Встановити ознаку подільності на 110.
Число 110 = 2 · 55, де числа 2 і 55 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 55 .$$

Число 55 = 5 · 11, де числа 5 і 11 взаємно прості. На основі наслідку

$$a \vdots 55 \Leftrightarrow a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

На основі попередніх узагальнень одержимо

$$a \vdots 110 \Leftrightarrow a \vdots 2 \wedge a \vdots 5 \wedge a \vdots 11.$$

Отже, число ділиться на 110 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на числа 2, 5 і 11.

За цією ознакою число 2640 ділиться на 110, бо остання цифра цього число ділиться як на 2, так і на 5 і виконується наступна умова

$$(6 + 0) – (4 + 2) = 0 \vdots 11.$$

9. Основна теорема арифметики і канонічний розклад натурального числа

З простих чисел будується кожне натуральне число, яке більше за одиницю. Це випливає з теореми, яку в математиці називають *основною теоремою арифметики.*

Теорема 27. Кожне натуральне число, більше за одиницю є або простим, або розкладається у добуток простих множників, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку слідування множників.

Доведення.

▶ Покажемо, що кожне натуральне число, більше за одиницю є або простим, або розкладається в добуток простих множників. Для цього скористаємося методом математичної індукції.

1. 2 – просте число. Отже, твердження істинне при $a = 2$.

2. Припустимо, що твердження істинне для довільного натурального числа k, такого, що $2 \le k < a$, тобто, що кожне таке число є або простим, або розкладається в добуток простих множників.

3. Доведемо істинність твердження і для числа a. Оскільки натуральне число a більше за одиницю, то воно має принаймні один простий дільник. Позначимо його p_1.

$$a = p_1 k_1 . \qquad (1)$$

У рівності (1) k_1 є натуральним числом, отже, для нього можливі лише два такі випадки: або $k_1 = 1$, або $k_1 > 1$.

Якщо $k_1 = 1$, то число a є простим, і твердження у цьому випадку істинне для a.

Якщо $k_1 > 1$, то внаслідок рівності (1) $2 \le k_1 < a$. Звідси та з припущення одержуємо, що для числа k_1 можливі лише два такі випадки:

а) число k_1 є простим і тоді число a є добутком двох простих множників;

б) число k_1 є складеним і розкладається у добуток простих чисел, тобто

$$k_1 = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n, \text{ і тоді } a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n .$$

Отже, твердження істинне для a і у випадку, коли $k_1 > 1$. Таким чином, твердження істинне для a.

Звідси на основі принципу математичної індукції твердження істинне для довільного натурального числа $a \ge 2$.

Доведемо тепер, що для складеного натурального числа його розклад у добуток простих множників єдиний з точністю до порядку слідування множників. Нехай складене число a має принаймні два розклади у добуток простих чисел:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \quad \text{і} \quad a = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_s.$$

Тоді

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_s. \qquad (2)$$

З рівності (2) випливає, що добуток $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ ділиться на просте число g_1, а тому на основі теореми про подільність добутку на просте число робимо висновок, що принаймні один із множників p_1, p_2, ..., p_n ділиться на число g_1. Можна вважати, що таким множником є число p_1. Оскільки p_1 і g_1 – прості числа, то на основі теореми про властивість простих чисел слідує, що $p_1 = g_1$. Скорочуючи обидві частини рівності (2) на p_1, маємо

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n = g_2 \cdot g_3 \cdot \ldots \cdot g_s.$$

Повторюючи аналогічні міркування, через скінченну кількість кроків одержимо

$$p_1 = g_1 \quad p_2 = g_2, \ldots, p_k = g_k \text{ і або } n = s, \text{ або } n \neq s.$$

Покажемо, що $n = s$. Дійсно, якщо припустити, що $n < s$, то:

$$1 = g_{n+1} \cdot g_{n+2} \cdot \ldots \cdot g_s,$$

що неможливо, бо добуток простих чисел більший 1. Аналогічно розглядається випадок, коли $n > s$.

Отже, $n = s$ і розклади не відрізняються простими множниками, тобто він єдиний з точністю до порядку слідування множників. ◄|

Якщо для складеного натурального числа знайдено його зображення у вигляді добутку простих множників і у ньому рівні прості множники записано у вигляді степенів простих множників, а самі прості множники розміщені у порядку зростання, то такий запис складеного числа у вигляді добутку простих множників називається *канонічним розкладом натурального числа*

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – різні прості дільники числа a і

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n.$$

Якщо натуральне число a є простим, то його запис і є канонічним розкладом числа a.

Просте число p *входить у канонічний розклад числа* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, якщо воно дорівнює одному з чисел p_1, p_2, ..., p_n.

На основі поняття канонічного розкладу з основної теореми арифметики одержуємо наслідок.

Наслідок 10. Канонічний розклад складеного числа єдиний.

Щоб знайти канонічний розклад складеного числа, з'ясовують його подільність на прості числа у порядку зростання. При цьому користуються відомими ознаками подільності на прості числа.

10. Знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного кількох чисел за їх канонічними розкладами

При розгляді кількох натуральних чисел можна вважати, що їх канонічні розклади містять степені одних і тих же простих множників, при цьому показники степенів у деяких з них можуть бути рівні нулю, бо за означенням нульового показника степеня

$\boldsymbol{x^0 = 1}$ для довільного числа $x \neq 0$.

За допомогою канонічного розкладу натуральних чисел можна встановити вигляд їх дільників.

Теорема 28. Якщо натуральне число a має канонічний розклад

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

то натуральне число b є його дільником тоді і тільки тоді, коли воно має канонічний розклад

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \text{ і } 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1,$$
$$0 \leq \beta_2 \leq a_2, ..., 0 \leq \beta_n \leq a.$$

Доведення.

▶ *Необхідність.* Нехай число $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ділиться на число b. Отже, $a = b \cdot g$, або, що те саме, $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} = b \cdot g$.

Внаслідок єдиності розкладу на прості множники до канонічного розкладу чисел b і g не можуть входити прості числа, відмінні від чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. А тому:

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \quad \text{і} \quad g = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}.$$

Отже,

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} =$$
$$= (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}) \cdot (p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}) =$$
$$= p_1^{\beta_1+\gamma_1} \cdot p_2^{\beta_2+\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n+\gamma_n}.$$

Звідси, завдяки єдиності канонічного розкладу, одержуємо

$$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2, \quad ...., \quad \alpha_n = \beta_n + \gamma_n.$$

Числа α_i, β_i і γ_i є цілими невід'ємними числами, тому з попередніх рівностей $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, ..., 0 \leq \beta_n \leq \alpha$.

Достатність. Нехай число b має такий канонічний розклад, як вказано у теоремі. Тоді число a можна записати:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} =$$

$$= (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}) \cdot (p_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n-\beta_n}).$$

Різниці $\alpha_i - \beta_i$ існують завдяки умові $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ $i = 1, 2, ..., n.$

З одержаної рівності випливає, що число b є дільником числа a. ◄

З теореми випливають наслідки.

Наслідок 11. Натуральне число ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли дане просте число входить до його канонічного розкладу.

Наслідок 12. Два натуральних числа взаємно прості тоді і тільки тоді, коли їх канонічні розклади не мають спільних простих дільників.

Наслідок 13. Якщо кожне з двох даних натуральних чисел взаємно просте з третім натуральним числом, то і їх добуток взаємно простий з даним числом.

Теорема також дає можливість за канонічними розкладами кількох натуральних чисел знайти їх найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне.

Теорема 29. Якщо число a можна представити у канонічному записі $a = p_1^{\alpha_1} \cdot\cdot \ldots p_2^{\alpha_2} \cdot p_n^{\alpha_n}$, то число дільників числа a визначиться за формулою:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1).$$

Доведення.

► Множиною всіх дільників числа a є числа b виду

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ $(0 \le \beta_1 \le \alpha_1,\ 0 \le \beta_2 \le a_2,\ ...,\ 0 \le \beta_n \le a)$.

Оскільки число β_1 можна вибрати $\alpha_1 + 1$ способами (з чисел 0, 1, 2, …, α_1), число β_2 можна вибрати $\alpha_2 + 1$ способами, а число β_n можна вибрати $\alpha_n + 1$, то за правилом добутку число всіх способів, за якими можна отримати число b, що ділить a, дорівнює

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1)$. Оскільки розклад на прості множники єдиний, то це і буде число всіх дільників числа a. ◄|

Задача 3. Знайти число дільників числа 504.

Розв'язання. Дане число можна представити у вигляді такого канонічного розкладу:
$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, то число всіх дільників цього числа дорівнює

$$\tau\,(504) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Теорема 30. **1.** Канонічний розклад найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел містить всі ті прості множники, що й канонічні розклади цих чисел, але взяті з найменшими показниками степенів.

2. Канонічний розклад найменшого спільного кратного кількох натуральних чисел містить всі ті прості множники, що й канонічні розклади даних чисел, але взяті з найбільшими показниками степенів.

Доведення.

|►Нехай задано кілька натуральних чисел і відомі їх канонічні розклади

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n},$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n} \cdot \ldots \cdot l = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\lambda_n}.$$

Позначимо через μ_1 – найменше, а через ν_1 – найбільше з чисел $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1$, тобто

$$\mu_1 = \min\{\alpha_1, \beta_1, \lambda_1\}, \quad \nu_1 = \max\{\alpha_1, \beta_1, \lambda_1\}.$$

Аналогічно

$$\mu_2 = \min\{\alpha_2, \beta_2, \lambda_2\}, \quad \nu_2 = \max\{\alpha_2, \beta_2, \lambda_2\}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_n = \min\{\alpha_n, \beta_n, \lambda_n\}, \quad \nu_1 = \max\{\alpha_n, \beta_n, \lambda_n\}.$$

На основі введених позначень, щоб довести теорему, потрібно показати, що

$$НСД\,(a, b, \ldots, l) = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\mu_n}, \tag{1}$$

$$НСК\,(a, b, \ldots, l) = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdot\ldots\cdot p_n^{\nu_n}. \tag{2}$$

Доведемо рівність (1). Нехай $d = p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\mu_n}$. Тоді за теоремою число d є спільним дільником чисел a, b, ..., l. За основною властивістю найбільшого спільного дільника число d є дільником числа D = НСД (a, b, ..., l). Знову, за теоремою, число:

$$D = p_1^{\sigma_1} \cdot p_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\sigma_n} \text{ де } \sigma_1 \geq \mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\ .$$

Покажемо, що $\sigma_1 = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Дійсно, якби при деякому i_0 було $\sigma_{i_0} > \mu_{i_0}$ то те з чисел a, b, ..., l, до канонічного розкладу якого входить число $p_{i_0}^{\mu_{i_0}}$, не ділилося б на D. Отже, с $\sigma_i = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, тобто НСД (a, b, ..., l) = $p_1^{\mu_1} \cdot p_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\mu_n}$.

Аналогічно доводиться рівність (2). ◄

11. Алгоритм Евкліда

Знаходження *НСД* і *НСК* двох чисел не завжди дають можливість їх обчислювати, оскільки є дуже трудомісткими. Для розв'язання цієї задачі є метод, який називається *послідовним діленням*, або *алгоритмом Евкліда*[1], описаний Евклідом у VII книзі "Начала". Теоретичною основою його є теорема про ділення з остачею і наступна теорема.

Теорема 31. Якщо довільні натуральні числа a, b, g і r, пов'язані співвідношенням $a = b \cdot g + r$, то множина спільних дільників чисел a і b дорівнює множині спільних дільників чисел b і r, тобто:

$$\text{НСД } (a, b) = \text{НСД } (g, r).$$

Доведення.

► Нехай натуральні числа a, b, g і r пов'язані співвідношенням:

$$a = b \cdot g + r$$

Якщо d – будь-який спільний дільник чисел a і b, то за теоремою про подільність добутку $b \cdot g \vdots d$. Тоді за властивістю подільності алгебраїчної суми інший доданок також ділиться на d ($r \vdots d$).

Отже, кожний спільний дільник чисел a і b є спільним дільником чисел b і r.

Якщо d – будь-який спільний дільник чисел b і r, то за теоремою про подільність добутку і суми $a \vdots d$. Отже, кожний спільний дільник чисел b і r є спільним дільником чисел a і b.

З доведеного вище випливає, що множини спільних дільників чисел a і b та b і r збігаються, а тому і

НСД (a, b) = *НСД* (b, r). ◄

Алгоритм Евкліда полягає у тому, що:

1. Число a ділиться на число b з остачею r_1

$$a = b \cdot g_1 + r_1, \quad r_1 < b.$$

Якщо $r_1 = 0$, то b = *НСД* (a, b).

2. Якщо $r_1 > 0$, то число b ділять на число r з остачею:

$$b = r_1 \cdot g_2 + r_2, \quad r_2 < r_1.$$

Якщо $r_2 = 0$, то r_1 = *НСД* (b, r_1) = *НСД* (a, b).

3. Якщо $r_2 > 0$, то число r_1 ділять на число r_2 з остачею:

$$r_1 \Rightarrow r_2 \cdot g_3 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

Якщо $r_3 = 0$, то

$$r_2 = НСД\,(r_1, r_2) = НСД\,(b, r_1) = НСД\,(a, b).$$

4. Якщо $r_3 > 0$, то повторюють ділення аналогічно пункту 3, поки не отримають остачу, рівну нулю.

5. Остання, відмінна від нуля, остача буде найбільшим спільним дільником чисел a і b. Процес ділення в алгоритмі Евкліда скінченний, бо остачі, які є цілими невід'ємними числами, на кожному кроці зменшуються, залишаючись меншими від b, а таких чисел не більше як b.

Задача 3. Знайти *НСД* і *НСК* чисел 2970 і 1980 за алгоритмом Евкліда та залежністю між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел.

Розв'язання. Знайдемо *НСД* (2970, 1980). Поділимо більше число на менше.

$$-\begin{array}{r|l} 2970 & \underline{1980} \\ \underline{1980} & 1 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 1980 & \underline{\mathbf{990}} \\ \underline{1980} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

НСД (2970, 1980) = 990.

НСК (2970, 1980) = $\dfrac{2970 \cdot 1980}{990} = 5940$.

***Відповідь*:** *НСД* (2970, 1980) = 990, *НСК* (2970, 1980) = 5940.

ВПРАВИ

Приклад 1.А. Знайти розкладом на прості множники НСД і НСК чисел 6160 і 1560.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 6160 & 2 \\ 3080 & 2 \\ 1540 & 2 \\ 770 & 2 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1560 & 2 \\ 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$6160 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ $\qquad$ $1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

Отже, *НСД* (6160, 1560) = $2^3 \cdot 5 = 40$,
НСК (6160, 1560) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 240240$.

***Відповідь*:** *НСД* (6160, 1560) = 40, *НСК* (6160, 1560) = 240240.

Приклад 1.Б. Знайти розкладом на прості множники *НСД* і *НСК* чисел 27720, 207900 і 12600.

Розв'язання. Розкладемо на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 27720 & 2 \\ 13860 & 2 \\ 6930 & 2 \\ 3465 & 3 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 207900 & 2 \\ 103950 & 2 \\ 51975 & 3 \\ 17325 & 3 \\ 5775 & 3 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12600 & 2 \\ 6300 & 2 \\ 3150 & 2 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ & \end{array}$$

$27720 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ $\qquad$ $207900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ $\qquad$ $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

НСД (27720, 207900, 12600) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$.

НСК (27720, 207900, 12600) = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 415800$.

***Відповідь*: *НСД* (27720, 207900, 12600) = 1260,
НСК (27720, 207900, 12600) = 415800.

Приклад 1.В. Знайти за алгоритмом Евкліда *НСД* і *НСК* чисел 2911 і 1763.

Розв'язання. Знайдемо *НСД* (2911, 1763). Для цього більше з даних чисел, тобто 2911 ділимо на менше – 1763. Якщо залишиться остача, то менше число ділимо на остачу, потім першу остачу ділимо на другу і т. д., доки не одержимо остачу 0. Остання не рівна нулю остача і буде шуканим найбільшим спільним дільником даних чисел:

$$\begin{array}{r|l} -\,2911 & \underline{1763} \\ \underline{1763} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1763 & \underline{1148} \\ \underline{1148} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,1148 & \underline{615} \\ \underline{615} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,615 & \underline{533} \\ \underline{533} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,533 & \underline{82} \\ \underline{492} & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,82 & \underline{\mathbf{41}} \\ \underline{82} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Отже, *НСД* (2911, 1763) = 41.

На основі формули, яка виражає залежність між НСД, НСК і добутком двох чисел *НСК* (a, b) = $\dfrac{a \cdot b}{НСД\ (a, b)}$, *НСК* (2911, 1763) =

$= \dfrac{2911 \cdot 1763}{41} = 125173$.

***Відповідь*.** *НСД* (2911, 1763) = 41, *НСК* (2911, 1763) = 125173.

ТЕСТИ ДО РОЗДІЛУ

Знайти НСД і НСК.

1.1. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 3960 і 3024:

а) 166
б) 360
в) 630
г) 164
д) інша відповідь.

1.2. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 132300 і 11760:

а) 4320
б) 5630
в) 2850
г) 2940
д) інша відповідь.

1.3. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2520 і 3600:

а) 120
б) 160
в) 360
г) 180
д) інша відповідь.

1.4. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 80, 64 і 96:

а) 16
б) 18
в) 24
г) 20
д) інша відповідь.

1.5. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 12870 і 7650:

а) 180
б) 270
в) 90
г) 120
д) інша відповідь.

1.6. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 2550 і 1320

а) 60
б) 240
в) 280
г) 30
д) інша відповідь.

1.7. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 2970 і 660:

а) 2345
б) 6789
в) 5940
г) 4563
д) інша відповідь.

1.8. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 48510, 2940 і 1650:

а) 30 г) 125
б) 145 д) інша відповідь.
в) 56

1.9. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 2310, 780 і 50050:

а) 300300 г) 567320
б) 300455 д) інша відповідь.
в) 456320

1.10. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 1980, 702 і 936:

а) 450 г) 210
б) 18 д) інша відповідь.
в) 128

1.11. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 315315, 42900 і 6930:

а) 6750 г) 165
б) 345 д) інша відповідь.
в) 450

1.12. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 132300 і 11760.

а) 923400 г) 54870
б) 345600 д) інша відповідь.
в) 529200

1.13. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 77000, 12740 і 296450

а) 700 г) 70
б) 370 д) інша відповідь.
в) 348

1.14. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 7800 і 193050:

а) 2345 г) 4530
б) 1950 д) інша відповідь.
в) 4562

1.15. Знайти розкладом на прості множники НСК чисел 3960 і 3024:

а) 166320 г) 12360
б) 320160 д) інша відповідь.

в) 345230

1.16. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 5390, 21780 і 1650:

а) 780 г) 34
б) 342 д) інша відповідь.
в) 110

1.17. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 609840 і 4200:

а) 564 г) 840
б) 360 д) інша відповідь.
в) 340

1.18. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 8820 і 29400:

а) 2940 г) 450
б) 2730 д) інша відповідь.
в) 1250

1.19. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 4200 і 11088:

а) 277200 г) 76540
б) 34578 д) інша відповідь.
в) 45320

1.20. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 363000 і 21780

а) 4560 г) 2540
б) 7260 д) інша відповідь.
в) 5620

1.21. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 87750 і 51480

а) 456784 г) 78542
б) 76540 д) інша відповідь.
в) 3861000

1.22. Знайти розкладом на прості множники НСД чисел 163350, 7644 і 528:

а) 6 г) 789
б) 56 д) інша відповідь.
в) 128

1.23. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 2911 і 1763:

а) 64 г) 32
б) 214 д) інша відповідь.
в) 41

1.24. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 86625 і 10890:

а) 345 г) 495
б) 342 д) інша відповідь.
в) 542

1.25. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 211750 і 2940:
а) 70
б) 346
в) 560
г) 56
д) інша відповідь.

1.26. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 225225 і 38610:
а) 4562
б) 784
в)350
г) 6435
д) інша відповідь.

1.27. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 92400 і 16380:
а) 456000
б) 3603600
в) 456700
г) 567890
д) інша відповідь.

1.28. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 24750 і 7800:
а) 450
б) 150
в) 670
г) 452
д) інша відповідь.

1.29. Знайти за алгоритмом Евкліда НСК чисел 4840 і 1100:
а) 24200
б) 34500
в) 4530
г) 2354
д) інша відповідь.

1.30. Знайти за алгоритмом Евкліда НСД чисел 2970 і 3300:
а) 56
б) 330
в) 280
г) 46
д) інша відповідь.

Приклад. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 180$, НСД$(a,b) = 6$.

Розв'язання. Розкладемо НСК і НСД на множники.
НСК $(a, b) = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ і НСД $(a, b) = 6 = 2 \cdot 3$. Відповідно у записі чисел a і b буде присутній НСД цих чисел, тобто – 6. Отже:

$$\begin{cases} a = 6 \cdot 2 \cdot 5 = 60, \\ b = 6 \cdot 3 = 18. \end{cases} \text{, або } \begin{cases} a = 6 \cdot 2 = 12, \\ b = 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90. \end{cases}$$

Відповідь. 60 і 18, або 12 і 90.

Приклад. Скоротити дріб $\dfrac{21120}{30720}$.

Розв'язання. Представимо чисельник і знаменник дробу у вигляді їх канонічного розкладу:

$$\begin{array}{r|l}
21120 & 2 \\
10560 & 2 \\
5280 & 2 \\
2640 & 2 \\
1320 & 2 \\
660 & 2 \\
330 & 2 \\
165 & 3 \\
55 & 5 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

$21120 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$

$$\begin{array}{r|l}
30720 & 2 \\
15360 & 2 \\
7680 & 2 \\
3840 & 2 \\
1920 & 2 \\
960 & 2 \\
480 & 2 \\
240 & 2 \\
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

$30720 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5.$

Тепер даний дріб можна записати у вигляді $\frac{21120}{30720} = \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5}$. Здійснивши скорочення у чисельнику і знаменнику дробу, отримаємо:

$\frac{21120}{30720} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}$.

Відповідь. $\frac{11}{16}$.

Приклад. Довести подільність при кожному натуральному n: $6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1} \vdots 11$.

Розв'язання. Позначимо вираз $6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1}$ через $f(n)$. Доведемо подільність $f(n) \vdots 11$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$
отримаємо: $f(1) = 6^{2 \cdot 1+1} + 20 \cdot 3^{1+1} = 6^3 + 20 \cdot 3^2 = 216 + 180 = 396$.
Оскільки $(3 + 9) - 9 = 0 \vdots 11$, то і $396 \vdots 11$.

2. Припустимо, що $f(k) = 6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1} \vdots 11$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k + 1) = (6^{2k+3} + 20 \cdot 3^{k+2}) \vdots 11$.

Тоді $f(k + 1) = 6^{2k+1+2} + 20 \cdot 3^{k+1+1} = 6^2 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$
$= 36 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1}$.

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення.

Якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться:

$$f(k+1) = 36 \cdot 6^{2k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$$

$$= 36 \cdot 6^{2k+1} + \underbrace{36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} - 36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}}_{\text{ДОДАМО І ВІДНІМЕМО ОДИН І ТОЙ САМИЙ ВИРАЗ}} + 3 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} =$$

Згрупуємо два перші доданки.

$$= 36\,(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1}) - 36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} + 20 \cdot 3 \cdot 3^{k+1} =$$

$$= 36\,\underbrace{(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1})}_{\text{ДІЛИТЬСЯ НА 11 ЗА ПРИПУЩЕННЯМ П.2.}} - \underbrace{36 \cdot 20 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}}_{=33 \cdot 20 \cdot 3^{K+1}} =$$

$$= 36\,(6^{2k+1} + 20 \cdot 3^{k+1}) - 33 \cdot 20 \cdot 3^{k+1}.$$

Як бачимо, у зменшуваному алгебраїчний вираз, що міститься у дужках ділиться на 11 за п.2., а у від'ємнику 33 ⋮ 11. Оскільки різниця ділиться на число, тоді коли зменшуване і від'ємник ділиться на число, то доходимо висновку, що $f(k+1) ⋮ 11$.

Відповідь. Отже, $6^{2n+1} + 20 \cdot 3^{n+1} ⋮ 11$.

Приклад. Довести подільність при кожному натуральному n: $4^n + 15n - 1 ⋮ 9$.

Розв'язання. Позначимо вираз $4^n + 15n - 1 = f(n)$. Доведемо подільність $f(n) ⋮ 9$ методом математичної індукції.

1. При $n = 1$

отримаємо: $f(1) = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$, $18 ⋮ 9$.

2. Припустимо, що $f(k) = 4^k + 15k - 1 ⋮ 9$ при будь-якому натуральному k.

3. Покажемо, що $f(k+1) = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 ⋮ 9$.

Тоді $f(k+1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14$.

Для доведення цього кроку здійснимо наступні математичні перетворення.

Вираз $15k$ представимо у вигляді $4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k = 15k$.

Якщо до алгебраїчного виразу додати і одночасно відняти один і той самий вираз, то значення алгебраїчного виразу не зміниться.

$$f(k+1) = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 =$$

$$= 4 \cdot 4^k + \underbrace{4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k}_{15k} - \underbrace{4 + 4}_{0} + 14 =$$

Перегрупуємо доданки.

$$= (4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - 4) - 3 \cdot 15k + 4 + 14 =$$

З дужок винесемо 4 за дужки, а вираз $3 \cdot 15k = 3 \cdot 3 \cdot 5k = 9 \cdot 5k$

$$= 4\underbrace{(4^k + 15k - 1)}_{\substack{\text{ДІЛИТЬСЯ НА } 9 \\ \text{ЗА П. } 2.}} - \underbrace{9 \cdot 5k}_{\vdots 9} + \underbrace{18}_{\vdots 9}.$$

Оскільки всі доданки діляться на 9, то і сам вираз ділиться на 9.

Відповідь. Отже, $4^n + 15n - 1 \vdots 9$.

ЗАДАЧІ

2.1. Знайти канонічний розклад таких чисел:

а) 714285;

б) 121275.

2.2. Не виконуючи, додавання встановити, чи діляться наступні суми на 3:

а) 126 + 285;

б) 741 + 231;

в) 162 + 112

г) 442 + 111;

д) 225 + 321.

2.3. Не виконуючи віднімання, встановити, чи діляться наступні різниці на 9:

а) 126 – 285;

б) 741 – 231;

в) 162 – 112.

2.4. Не виконуючи дій, встановити, чи діляться наступні вирази на 4:

а) 1516 – 336;

б) 1304 – 512;

в) 13210 – 116;

г) 1224 – 1020;

д) 3536 – 1212.

2.5. Не виконуючи дій, встановити, чи діляться наступні вирази на 11:

а) 3670 – 1252;

б) 2225 – 1716;

в) 3795 – 2838;

г) 5016 – 4521;

д) 7543 – 3654.

2.3. Не виконуючи ділення, встановити, чи різниця чисел 23544 – 17028 кратна числам 4, 8, 9.

2.4. Не виконуючи ділення, встановити, чи ділиться число 1980 на 165.

2.5. Не виконуючи ділення, встановити, чи ділиться число 6732 на 66.

2.6. Не виконуючи ділення, встановити, чи ділиться число 2912 на 26.

2.7. Не виконуючи ділення, встановити, чи ділиться 1265 на 45.

2.8. Скільки дільників має число 720.

2.9. НСК двох чисел 420, а одне з чисел дорівнює 60. Знайти друге число, якщо НСД дорівнює 10.

2.10. Одне з чисел 576, НСД цих чисел дорівнює 192, а НСК – 2880. Знайти друге число.

2.11. НСД двох чисел – 27, а їх НСК – 324. Знайти числа a і b, якщо $\frac{3}{4}a = b$.

2.12. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 210 і 77, а їх сума дорівнює НСК чисел 168 і 224. Знайти ці числа.

2.13. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 913 і 781, а різниця цих чисел дорівнює НСК чисел 175 і 126. Знайти ці числа.

2.14. Знайти канонічний розклад числа 10800 і число всіх дільників цього числа.

2.15. Скоротити дріб $\frac{15120}{340200}$.

2.16. Дані дроби звести до спільного знаменника $\frac{7}{192}$ і $\frac{187}{1620}$.

2.17. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 5$, НСК $(a, b) = 105$.

2.18. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД$(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.

2.19. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК$(a, b) = 75$, $a \cdot b = 375$.

2.20. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК$(a, b) = 915$, НСД$(a, b) = 3$.

2.21. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД$(a, b) = 7$, $a \cdot b = 1470$.

2.22. Довести, що при будь-якому n число $n^2 (n^2 - 1)$ ділиться на 4.

2.23. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД$(a, b) = 30$, $a + b = 150$.

2.24. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК$(a, b) = 10$, $a \cdot b = 20$.

2.25. Скільки дільників має число 192.

2.26. Скільки дільників має число 810.

2.27. Скільки дільників має число 650.

2.28. Дані дроби звести до спільного знаменника $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1234}{30720}$.

2.29. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 817 і 1691.

2.30. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв'язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 391 і 667.

2.31. Які з наступних висловлень істинні:

а) якщо число ділиться на 7 і на 5, то воно ділиться на 35;

б) якщо число ділиться на 10 і на 15, то воно ділиться на 150;

в) якщо число ділиться на 4 і на 8, то воно ділиться на 32;

г) якщо число не ділиться на 3 або на 5, то воно не ділиться на 15;

д) якщо число не ділиться на 15, то воно не ділиться ні на 3, ні на 5;

е) якщо число не ділиться на 24, то воно або не ділиться на 12, або не ділиться на 8.

2.32. НСК двох чисел 420, а одне з чисел дорівнює 60. Знайти друге число, якщо НСД дорівнює 10.

2.33. Знайти a і b, якщо відомо, що $a : b = 11 : 13$, НСД $(a, b) = 5$.

2.34. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 5$,
НСК $(a, b) = 165$.

2.35. Знайти a і b, якщо відомо, що НСД $(a, b) = 7$, $a \cdot b = 294$.

2.36. Знайти a і b, якщо відомо, що НСК $(a, b) = 75$, $a \cdot b = 375$.

2.37. Знайти a і b, якщо відомо, що $a : b = 7 : 8$, НСК $(a, b) = 224$.

2.38. Скільки дільників має число 192.

2.39. Скільки дільників має число 810.

2.40. Скільки дільників має число 650.

2.41. Дані дроби звести до спільного знаменника $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1234}{30720}$.

2.42. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв’язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 817 і 1691.

2.43. Користуючись алгоритмом Евкліда та зв’язком між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел, знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 391 і 667.

2.44. Три пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший пароплав приходить з рейсу через кожні 6 днів, другий – за 5 днів, третій – 10 днів. Через скільки найближчих днів зустрінуться в порту перший пароплав з другим, перший з третім, другий з третім. Всі три пароплави разом, якщо вони вийшли з порту одночасно?

2.45. Довести подільність при кожному натуральному n:
$7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ на 17.

2.46. Довести подільність при кожному натуральному n:
$9^n - 8n - 1$ на 16.

2.47. Довести подільність при кожному натуральному n:
$n^7 - n$ ділиться на 7.

2.48. Довести подільність при кожному натуральному n:
$n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

2.49. Довести подільність при кожному натуральному n:
$6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ділиться на 43.

2.50. Довести подільність при кожному натуральному n:
$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на133.

2.51. Довести подільність при кожному натуральному n:
$3^{2n+1} + 40n - 67$ ділиться на 64.

ВІДПОВІДІ
1.

1.2. 2940.	**1.4.** 16.	**1.6.** 30.	**1.7.** 5940.
1.9. 300300.	**1.12.** 529200.	**1.13.** 70.	**1.15.** 166320.
1.16. 110.	**1.19.** 277200.	**1.21.** 3861000.	**1.23.** 41.
1.26. 6435.	**1.29.** 24200.		

2.

2.4. Так.
Вказівка: використати властивість подільності на добуток множників.
2.8. 30.
2.9. 70.
2.11. 81 і 108.
2.15. $\frac{2}{45}$.
2.16. $\frac{945}{25920}$ і $\frac{2992}{25920}$.
2.17. 15 і 35.
2.18. 14 і 21.
2.19. 15 і 25.
2.23. 30 і 120, або 60 і 90.
2.28. $\frac{1776}{337920}$ і $\frac{13574}{337920}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і теорія чисел / [С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Г. І. Хацет]. – Ч. 1. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1974. – 464 с.

2. Андронов И. К. Арифметика: развитие понятия числа и действий над числами : пособ. для фак-тов нач. школы педагог. ин-тов и педагог. училищ / И. К. Андронов. – Изд. 2-е испр. и доп. – М. : Учпедгиз, 1962. – 374 с.

3. Бантова М. О. Викладання математики в початкових класах / М. О. Бантова, К. В. Бельтюкова, О. М. Полевщиков. – Вид. 2-ге. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1982. – 288 с.

4. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре : пособ. для учителей / Ф. А. Бартенев. – М. : Просвещение, 1976. – 95 с.

5. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : навч. посібник / В. Г. Бевз. – К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

6. Белл Э. Т. Творцы математики: предшественники современной математики : пособ. для учителей / Э. Т. Белл. – М. : Просвещение, 1979. – 254 с.

7. Бельский А. А. Деление с остатком / А. А. Бельский, Л. А. Калужнин. – К. : Выща школа, 1977. – 71 с.

8. Бородин А. И. Число и мистика / А. И. Бородин. – Изд.2-е. – Донецк : Донбас, 1972, 143 с.

9. Бородін О. І. Основні поняття сучасної алгебри : посіб. для самоосвіти вчителів / О. І. Бородін, Л. В. Потьомкін, А. К. Сліпенко. – 2-е вид., перер. – К. : Радянська школа, 1983. – 112 с.

10. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення / О. І. Бородін. – Вид. 3-тє. – К. : Рад. шк., 1978. – 103 с.

11. Бородін О. І. Теорія чисел / О. І. Бородін. – Вид. 3-тє. – К. : Вища шк., 1970. – 275с.

12. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко. – К. : Вища шк. Головне вид-во, 1988. – 282 с.

13. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до сер. XIX ст. / Г. Вилейтнер. – М. : Наука, 1966. – 506 с.

14. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости / Н. Н. Воробьёв. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – 95 с.

15. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1983. – 63 с.

16. Гребенча М. К. Арифметика : пособ. для учительських ин-тов / М. К. Гребенча, С. Е. Ляпин. – М. : Учпедгиз, 1952. – 280 с.

17. Задачник-практикум по математике / [Н. Я. Виленкин, Н. Н. Ларова и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 205 с.

18. Збірник задач з арифметики для педагогічних училищ / [В. А. Ігнатьев, М. І. Ігнатьєв, О. Я. Шор]. – Вид. 3-тє. – К. : Рад. шк., 1964. – 263 с.

19. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру / Л. А. Калужнин. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

20. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики / Л. А. Калужнин. – М. : Наука, 1969. – 31 с.

21. Коваль Л.В., Скворцова С.О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник для студентів за спеціальністю 6.010102 “Початкове навчання”, освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр” [2-ге вид., допов. і переробл.] – Харків: ЧП «Принт-Лідер», 2011. – 414 с.

22. Ковриженко Г. А. Системы счисления и двоичная арифметика: от счёта на пальцах до ЭВМ / Г. А. Ковриженко. – К. : Рад. шк., 1984. – 72 с.

23. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / А. Г. Конфорович. – К. : Рад. школа, 1981. – 189 с.

24. Конфорович А. Г. Колумби математики / А. Г. Конфорович. – К. : Рад. школа, 1982. – 223 с.

25. Косаткин В. Н. Новое о системах счисления / В. Н. Косаткин. – К. : Выща школа, 1982. – 94 с.

26. Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки : посіб. для самоосвіти вчителів / О. В. Кужель. – К. : Рад. шк., 1977. – 160 с.

27. Кужель О. В. Розвиток поняття про число: ознаки подільності: досконалі числа : посіб. для учнів фізико-математ. шкіл / О. В. Кужель. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1974. – 80 с.

28. Курс математики : навчальний посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. – К. : Вища шк. – 1995. – 392 с.

29. Кухар В. М. Математика: множини: логіка: цілі числа : практикум / В. М. Кухар, С. І. Тадіян, В. П. Тадіян. – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1989. – 333 с.

30. Кухар В. М. Теоретичні основи початкового курсу математики : навч. посіб. для педагог. училищ / В. М. Кухар, Б. М. Білий. – Вид. 2-ге, – К. : Вища шк., Головне вид-во. – 1987. – 319 с.

31. Лаврова Н. Н. Задачник-практикум по математике : учеб. пособие для студентов-заочн. I-III курсов фак-тов педагогики и методики начальн. обуч. педагог. ин-тов / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 183 с.

32. Математика : навч. посібник для напряму підготовки 6.010102 «Початкова освіта» пед. навч. закладів : у 3 ч. Ч. 1 / М.М. Левшин, Є.О. Лодатка. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012 – 264 с.

33. Математика : навч. посібник / [Н. І. Затула, А. М. Зуб, Г. І. Коберник, А. Ф. Нещадим]. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.

34. Математика : посібник для педінститутів / [В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. Н. Костарчук та ін.]. – К. : Вища шк., Головне вид-во, 1980. – 400 с.

35. Математика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2121 “Педагогика и методика начального обучения” / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало и др. – М. : Просвещение, 1977. – 352 с.

36. Непман И. Я. История арифметики : пособие для учителей / И. Я. Непман. – Изд. 2-е, испр. – М. : Просвещение, 1965. – 414 с.

37. Пономарёв С. А. Задачник-практикум по арифметике : пособие для фак-та начальных классов педагог. ин-тов / С. А. Пономарёв. – Изд. 2-е., доп. – М. : Просвещение, 1966. – 223 с.

38. Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар : [пер. с нем. А. А. Карацубы]. – М. : Мир, 1967. – 511 с.

Про математику і математиків / [упоряд. А. С. Зоря, С. М. Кіро]. – К. : Рад. школа, 1981. – 254 с.

40. Рибников К. А. История математики : учеб. пособие для математ. специальностей ун-тов и педагог. ин-тов / К. А. Рибников. – М. : Изд-во Московского университета, 1974. – 304 с.

41. Сборник задач по математике : пособие для педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова и др. – М. : Просвещение, 1979. – 208 с.

42. Стойлова Л. П. Основи начального курса математики : учеб. пособие для учащихся педагог. училищ по специальности № 2001 "Преподавание в начальных классах общеобразоват. шк." / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1988. – 320 с.

43. Стойлова Л. П., Виленкин Н. Я. Целые неотрицательные числа / Л. П. Стойлова, Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1986. – 79 с.

44. Теоретические основы начального курса математики : учеб. пособие для учащихся школьных отделений педагог. училищ / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова др. – М. : Просвещение, 1974. – 368 с.

45. Феферман С. Числовые системы: основания алгебры и анализа / С. Феферман : [пер. с анг. А. А. Мальцева]. – М. : Наука, 1971. – 440 с.

46. Фомин С. В. Системы счисления / С. В. Фомин. – 4-е изд. – М. : Наука, 1980. – 47 с.

47. Фридман Л. М. Арифметика : пособие для студент.-заочн. фак-тов учителей начальных классов педагог. ин-тов / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение. – 166 с.

48. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел / А. Я. Хинчин. – Изд. 2-е, стереотип. – М. : Эдиториал УРСС, 2004. – 72 с.

49. Хрестоматия по истории математики / [под ред. А. П. Юркевича]. – М. : Просвещение, 1976. – 319 с.

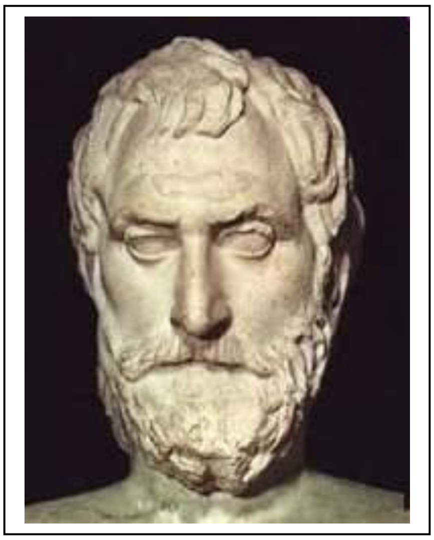
50. Чекмарёв Я. Ф. Арифметика. Для педагогических училищ / Я. Ф. Чекмарёв, Б. А. Туликов. – Изд. 9-е. – М. : Просвещение, 1967. – 304с.

51. Чекмарёв Я. Ф. Сборник арифметических задач: для педагогических училищ / Я. Ф. Чекмарёв, С. В. Филичёв. – Изд. 8-е. – М. : Просвещение, 1968. – 223 с.

52. Шнеперман Л. Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях : учеб. пособие / Л. Б .Шнеперман. – Минск : Вышэйш. шк., 1986. – 256 с.

ДОДАТКИ
ДОДАТОК А
ЦЕ ЦІКАВО ЗНАТИ

ФАЛЕС МІЛЕТСЬКИЙ
(бл. 625 – 547 до н. е.)



Фалес Мілетський – один із семи великих мудреців, “батько грецької науки”, один з перших відомих в історії математиків. Він народився і жив в іонійському місті Мілеті на малоазійському узбережжі.

Зі спогадів філософа Діогена Лаертського відомо, що вчителів Фалес не мав, проте він здійснив подорож до Єгипту і жив там у жерців.

Повернувшись на батьківщину, Фалес заснував першу Мілетську (іонійську) школу, в якій ознайомлював учнів із своїми філософськими поглядами і передавав знання, здобуті в Єгипті.

Фалес Мілетський був обдарованим і різностороннім ученим – займався політикою, технікою, філософією, астрономією, математикою, торгівлею. Він був автором творів на природничі та філософські теми, але жодного рядка з них до нас не дійшло.

Офіційних посад учений не займав, хоча прославився як політичний діяч своїми далекоглядними рекомендаціями з питань військової тактики. Як інженер Фалес відомий тим, що за його порадою для форсування річки провели канал, у який тимчасово відвели її русло. Воїни перейшли річку, не замочивши ніг.

У галузі астрономії Фалесу і його учням приписують визначення тривалості року (365 днів) і думку про те, що Земля є серединою Всесвіту та має кулясту форму. Фалес передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до н. е. Цей факт справив велике враження на його сучасників.

Знаменитий давньогрецький історик Геродот (бл. 485 – бл. 425 до н. е.) писав у своїй “Історії”, що під час битви між лідійцями і мідянами на прикордонній річці Галісі “день перетворився на ніч”. Воїни так налякалися, що відмовилися воювати і ворогуючі сторони помирилися.

Про Фалеса передавали в давнину ще одну легенду, яку згодом описав Арістотель. Він зазначав, що Фалес був бідний і люди часто докоряли йому, що через своє захоплення наукою вчений зовсім занедбав своє господарство. Спостереження за зірками дало можливість передбачити Фалесу врожайний рік на маслини. На свої заощадження він викупив маслодавильні жорна у Мілеті і Хіосі майже за безцінь, а коли прийшов час збирання маслин, попит на них раптово зріс. Фалес віддав їх в аренду і одразу розбагатів, показавши тим самим, що філософи при бажанні легко можуть розбагатіти, однак це не те, про що варто піклуватися вченому. Так Фалес виявив свою мудрість.

Постать Фалеса займає почесне місце в історії філософії. Першоосновою всього він вважав матеріальне начало – воду, а це було справжньою революцією в поглядах на світобудову.

В Єгипті Фалес вразив місцевих землемірів тим, що визначив висоту піраміди скориставшись методом встановлення пропорційного відношення між трьома величинами, які можна виміряти, і шуканою величиною – висотою піраміди.

Фалес справедливо заслужив слави родоначальника математики як теоретичної галузі знань з характерним для неї логічним доведенням тверджень – теорем. Від нього починається формування таких основоположних математичних понять, як доведення і теорема. Заслуга Фалеса в тому, що він перший зайнявся логічною організацією цих емпіричних рецептів і оформив їх у систему математичних фактів. Вважають, що саме з Фалеса Мілетського єгипетська і вавілонська емпірична математика поступово перетворилася в грецьку дедуктивну науку.

Фалес у першій мілетській школі

Фалес займався вивченням фігури, яка утвориться, якщо в прямокутнику, вписаному в коло, провести діагоналі. При цьому він переконався, що кут, вписаний у півколо, завжди прямий. Це дало можливість вписувати в коло прямокутні трикутники і доводити теореми про суму внутрішніх кутів трикутника, а також про те, що кути можна додавати так само, як відстані.

Про визнання філософа його земляками засвідчує така легенда: одного разу греки вирішили подарувати наймудрішому з мудрих золотий триніг, знайдений рибалками. Вони передали його Фалесу. Фалес передав його іншому філософу, той – третьому і так далі. Триніг обійшов по колу сімох філософів і повернувся до Фалеса.

За свідченням літописців Фалес помер на трибуні Олімпійського стадіону. Філософ, який учив, що все походить з води і складається з неї, помер від спеки і спраги на олімпіаді, яка стала для його сучасника Піфагора спортивним тріумфом. На його пам’ятнику написано: “Наскільки мала ця гробниця, настільки велика слава цього царя астрономії в галузі зірок”.

Теореми, які довів Фалес

1. Вертикальні кути конгруентні.

2. Діаметр ділить круг пополам.

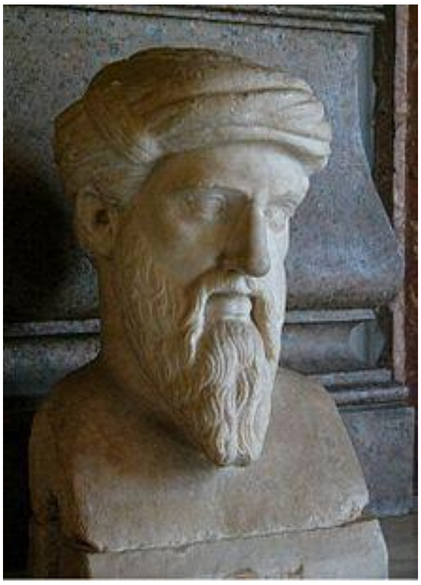
3. Кути при основі рівнобедреного трикутника конгруентні.

4. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно конгруентні стороні й двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники конгруентні.

5. Якщо на одній стороні кута відкласти послідовно кілька конгруентних відрізків і через їх кінці провести паралельні прямі, які перетнуть другу сторону кута, то утворені на ній відрізки конгруентні між собою (відома в науці як *теорема Фалеса*).

ПІФАГОР САМОСЬКИЙ

(б.І. 580 – бл, 500до н. е.)



Бюст Піфагора Самоського
в Капітолійському музеї, Рим

Народився Піфагор на о. Самосі. Його батько Мнесарх із знатного, але збіднілого роду, був каменерізом. Піфагор здійснив традиційну подорож до Єгипту, де жив біля 22 років і витримав немало випробувань, перш ніж жерці відкрили йому "дивовижне чергування чисел, хитромудрі правила геометрії, науку про зорі, медицину".

Легендою Піфагор став уже в стародавні часи. У 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам'ятник в римському форумі. Учень давньогрецького філософа Платона Гераклід Понтійський (IV ст. до н. е.) назвав Піфагора найученішим із сучасників, хоча вважав, що на його геніальності позначилося "недостойне мистецтво" – числова магія.

Після повернення Піфагора з подорожі навколо нього згуртувалися однодумці, організувавши аристократичний за духом, таємний релігійно-політичний союз – гетерію. Незабаром і в інших містах південної Італії та Греції виникли такі союзи, в яких поряд з науковими проблемами – математичними, філософськими, етичними – розглядалися релігійні й політичні.

Піфагорійський союз складався з акусматиків і математиків. Перші тільки слухали загальні істини і не бачили самого вчителя. Інші, пройшовши випробування мовчанням, отримували право висловлюватися і засвоювати вчення.

Боротьба, яка точилася в еллінському світі проти панування аристократії, захопила й піфагорійців. Еллінські міста наповнилися кровопролиттям і розбратом. Рятуючись від небезпеки, Піфагор переселився в Метапонт, але там теж було неспокійно і в одній з нічних сутичок він загинув.

Піфагорійське вчення – окремий випадок формування філософії, в якій міфологічні погляди під впливом математики еволюціонували в наукові.

Анархії і беззаконню піфагорійці протиставляли царство законів, праведливість влади богів. Але еллінські боги все більше ототожнювалися з числами і геометриними фігурами, тобто математизувалися.

Фреска «Афінська школа»
Рафаель (1510–1511 рр.)

Джерелом усіх законів ставала космічна гармонія, істинна керівниця світу, бо, як проголошувала їхня основна теза: “порядок і симетрія прекрасні і корисні, а безпорядок і асиметрія – потворні та шкідливі”. Цей складний процес виразно розкрив визначний учений Стародавньої Греції Арістотель (384 – 322 до н. е.). Він писав: “…так звані піфагорійці, зайнявшись математикою, перші розвинули її і, оволодівши нею, стали вважати її початками всього існуючого. А оскільки серед цих початків числа від природи є першими, а в числах піфагорійці вбачали (так їм здавалося) багато подібного до того, що існує і виникає, – більше, ніж у вогні, землі та воді (наприклад, така-то властивість чисел є справедливістю, а така-то – душа й розум, інша – удача), бо далі вони побачили, що властивості та співвідношення, притаманні гармонії, можна подати в числах; оскільки їм здавалося, що все інше за своєю природою явно уподібнюється числами і що числа – перше в усій природі, то вони припустили, що елементи чисел є елементами всього існуючого і що все небо – це гармонія чисел”.

Піфагорійці узагальнювали спостереження за явищами навколишньої дійсності. Вони відкривали або й здогадувалися про унікальну роль числа, але цю роль трактували в магічно-міфологічному контексті. Про це свідчать висловлення піфагорійців про числа: “Що божество? Одиниця! Тільки через співвідношення чисел можна пізнати істину. Усі речі – числа”, “Де нема числа і – там хаос і химери”, “Наймудріше – це число”, “Числа керують світом”. Піфагор ввів загальновизнаний тепер дедуктивний метод, суть якого полягає в тому, що, крім невеликої кількості прийнятих без доведень первісних положень, які називаються аксіомами, всі інші твердження математики виводяться логічними міркуваннями. Основним змістом піфагорійської математики є вчення про число. Як і вавілонські маги, піфагорійці вважали надзвичайно важливими різні властивості чисел і відношення між ними.

Найважливішою властивістю чисел піфагорійці вважали парність і непарність. Вони першими ввели поняття парного і непарного числа, простого і складеного, розробили теорію подільності на два, визначили кілька класифікацій натуральних чисел. Одиницю означали як те, з чого складено числа, і не визнавали її числом.

Піфагорійці вважали унікальними такі числа, в яких сума власних дільників менших за число, дорівнює самому числу.

Наприклад:

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Такі числа назвали досконалими. Ці числа приховують і сьогодні багато загадок. Невідомо, скінченна чи нескінченна їхня множина. Усі відкриті досконалі числа парні. Учені довели, що має бути не менше 10^{36} непарних досконалих чисел, але жодного з них ще не знайшли. Вважають, що навіть найменше з непарних досконалих чисел має бути надзвичайно великим. Постають також інші питання, відповіді на які шукає багато математиків-теоретиків.

Узагальнивши поняття досконалого числа, піфагорійці розглядали співдружні числа: пари чисел, кожне з яких дорівнює сумі дільників іншого. Співдружніми є 220 і 284, бо

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \text{ і}$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Піфагорійці знали тільки цю пару і вважали її символом дружби. Вважалося, що талісмани з числами 220 і 284 сприяють зміцненню любові. Другу пару (17296, 18416) відкрив у 1636 р. знаменитий французький математик П’єр Ферма (1601 – 1665), Його земляк Рене Декарт (1596 – 1650) обчислив третю пару (9363584, 9437056). Геніальний Леонард Ейлер (1707 – 1783) дав список 64 пар співдружніх чисел, хоча, як з’ясувалося пізніше, дві пари потрапили туди випадково. У 1867 р. шістнадцятирічний італієць Ніколо Паганіні (тезка знаменитого скрипаля) здивував математиків повідомленням, що 1184 і 1210 – співдружні числа. Цю найближчу до 220 і 284 пару пропустили всі знамениті математики, які «чаклували» над числами двадцять п’ять століть.

Сьогодні відомо більше як 600 пар співдружніх чисел. І досі вчених турбує багато різних питань: скільки існує співдружніх чисел; у кожній вже обчисленій парі співдружніх чисел обидва числа парні чи непарні; чи існують співдружні числа різної парності?

За деякими переказами на честь відкриття своєї відомої теореми (“Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи”) Піфагор приніс у жертву бика.

Теорему, названу іменем Піфагора, шумеро-вавілонські математики знали і використовували під час розв’язування задач десь за 1500 років до народження Піфагора. Присвоєння цій знаменитій теоремі імені Піфагора свідчить про те, якого значення надавали в той час доведенню математичних тверджень. Теорема допускає багато красивих доведень, в тому числі і на основі розрізування та перекроювання фігур. Американський любитель математики Е.Луміс зібрав і опублікував 367 різних доведень цієї знаменитої теореми, а колекція їх поповнюється і сьогодні.

Піфагорові приписують й доведення іншої теореми: про суму внутрішніх кутів трикутника.

У школі Піфагора було зроблено відкриття, яке започаткувало нову епоху в історії математики і завдало нищівного удару по піфагорійських поглядах на число. Шукаючи спільну міру між стороною і діагоналлю квадрата, піфагорійці відкрили, що ці відрізки спільної міри не мають, тобто не існує числа, яким би можна було виразити відношення цих відрізків.

Доведення піфагорійцями несумірності сторони і діагоналі квадрата – перше відоме в історії математики доведення “від супротивного” (міркування, при якому виходять з істинності твердження, протилежного доводжуваному, і приходять до суперечності).

Це відкриття несумірності приголомшило піфагорійців. Виходило, що число не всесильне, воно може не все, йому не все підкоряється, коли навіть відношення двох відрізків, які легко побудувати, не вдається виразити ніяким числом, точніше ніяким додатним раціональним числом, бо тільки такі числа й знали на той час учені.

Досягнення грецького ідеалу людини, який поєднував у собі етичне й естетичне, було, на думку піфагорійців, неможливе без занять спортом. Закономірно, що вони приділяли йому багато уваги. Сам Піфагор віддав належне здоровому тілу і брав участь у кулачному бою на 58-й Олімпіаді, яка проходила в 548 р. до н. е. Переказують, що через малий зріст Піфагора судді не хотіли допустити його до змагань.

– Можливо, – заперечив Піфагор, – мій вигляд і не викликає у вас довір'я. Але я буду наносити удари з такою математичною точністю, що супротивникові стане жарко. Моя глибока віра в число – це моє життєве кредо.

Він дотримав свого слова – став чемпіоном з цього виду спорту і утримував цей титул ще на кількох олімпіадах.

Задачі

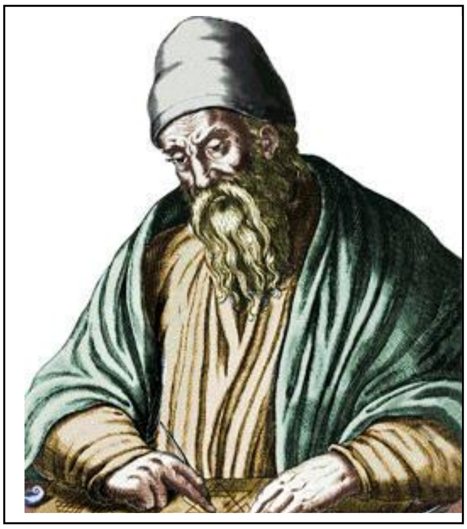
1. Сума довільного числа послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці, є точний квадрат.

2. Кожне непарне число, крім одиниці, є різницею двох квадратів.

3. Сторона і діагональ квадрата несумірні.

ЕВКЛІД

(бл. 365 – бл. 300 до н.е.)



Відомий математик Евклід жив в епоху еллінізму. Хронологічними межами її є час від завойовницьких походів Александра Македонського за межами Греції (333 – 323 до н. е.) до взяття римлянами столиці елліністичної країни Птолемеїв – Александрії (31 до н. е.).

На завойованих Александром Македонським величезних територіях після його смерті утворилися елліністичні країни. У них відбувався своєрідний синтез грецької культури і культур підкорених народів, хоча офіційною мовою науки була грецька.

Головним науковим і культурним центром елліністичного світу стало засноване Александром Македонським у гирлі Нілу місто Александрія, столиця країни Птолемеїв. Тут було засновано Мусейон – Будинок муз, великий науковий центр, де працювали запрошені найвидатніші вчені з багатьох країн світу. При Мусейоні діяла велика бібліотека, яка нараховувала понад 700000 рукописів з усіх галузей знань.

Серед запрошених був і найвидатніший математик свого часу Евклід. Він заснував в Александрії математичну школу, для слухачів якої і написав свою славнозвісну книгу “Начала”.

Великого математика спіткала дивна доля. Написана ним книга затьмарила славу самого автора. До нас дійшли два-три епізоди, можливо, історичні анекдоти. Перший малює Евкліда людиною принциповою. Коли цар Птолемей I зажадав короткого шляху для вивчення геометрії, математик відповів: “У геометрії немає царської дороги”. (А в Єгипті, як і в інших країнах, справді, існували дороги, їздити по яких мали право тільки царі, вищі сановники і царські кур’єри). Разом з тим, учений був дуже доброзичливим до всіх, хто зробив хоча б якийсь внесок у математику, яку він цінував понад усе. Один з юнаків, вивчивши кілька перших теорем “Начал”, запитав у автора: “А що я можу заробити, якщо вивчу все?” Евклід покликав раба і наказав: “Дай йому три оболи, бідолаха хоче заробити грошей своїм навчанням”. Уже перший коментатор його книг Прокл Діадох (бл. 410 – 485) не знав, де і коли народився знаменитий математик, їх розділяло вісім століть. Це все одно, що для нас відстань до автора “Слова о полку Ігоревім”.

Евклід був різностороннім ученим. До нас дійшли його твори: “Феномени”, присвячений елементарній сферичній астрономії, “Оптика” – теорії перспективи, “Переріз канону” – теорії музики. Це були перші дослідження в галузі математичної фізики. У книжці “Дані” Евклід показав, як задання одних геометричних фігур є одночасно заданням інших. Книгу “Псевдарій” вчений присвятив помилкам у геометричних доведеннях. На жаль, жодного рядка із цього першого збірника математичних софізмів і парадоксів до нас не дійшло.

Безсмертну славу принесли Евкліду “Начала”. Ця дивовижна книга пройшла крізь політичні катастрофи і війни 22-х століть, вистояла, вціліла, відіграла виключну роль в історії математики і математичної освіти в усьому світі. Щоб зрозуміти, чому так трапилося, спинимося на ній детальніше.

Спроби викласти головні розділи математики були й до Евкліда. Александрійський математик зробив це настільки досконало, що всі інші твори такого роду було забуто, і жодний з них не зберігся до наших днів.

Евклід осмислив, підсумував і виклав в цільній, логічно пов’язаній системі теорем найвидатніші досягнення грецької математики за трьохсотрічний період її розвитку. Його твір – перший з тих, що дійшли до нас, блискуче реалізований приклад аксіоматичного викладу геометрії. Евкліда вдосконалювали, коментували, пояснювали, але ніхто не насмілювався піддати сумніву правильність його трактування основних положень геометрії в 13-ти книгах його “Начал”.

Основу “Начал” становлять означення, постулати та аксіоми. Означення Евкліда – це підсумок багатовікової абстрагуючої діяльності людини. Вони довели свою практичну значущість на численних застосуваннях і тому сприймалися як безпосередньо очевидні Постулати були основою геометричних алгоритмів, які використовувалися в процесі вивчення геометричних фігур, а аксіоми – недоводжувані твердження – для описування властивостей усіх величин. Вибір аксіом настільки вдалий, що майже всі вони ввійшли в сучасну аксіоматику. Але їх усе одно було недостатньо для дедуктивної побудови геометрії. Евклід не сформулював багато з того, чим користувався далі. Наприклад, у нього немає стереометричних постулатів, аксіом руху. І все ж потрібно врахувати, що перших успіхів у створенні системи аксіом геометрії, які відповідали зростаючим вимогам математичної строгості, було досягнуто лише на кінець XIX ст.

Спираючись на розроблені вихідні основи (поняття, постулати і аксіоми) і використовуючи закони формальної логіки, Евклід логічними міркуваннями доводить 465 тверджень, поданих у “Началах”.

“Начала” стали невичерпним джерелом нових математичних досліджень, на які вони надихали покоління математиків різних країн. Евклід з дивовижною глибиною розв’язав багато складних теоретичних і методологічних проблем математики. Достатньо назвати Історію знаменитого V постулату про паралельні прямі. Багато математиків понад два тисячоліття намагалися виправити Евкліда. Вірили, що він помилково вніс у число недоводжуваних істин твердження, яке е теоремою, тобто може бути доведене. На пошуки його було витрачено чимало зусиль. Уже в XIX ст. король математиків, як називали сучасники К. Ф. Гауса, змушений був зізнатися: “І все ж, якщо хочемо говорити чесно й відверто, потрібно сказати, що, по суті, ми не пішли в цьому питанні далі, ніж Евклід, за 2000 років”.

Аксіоматична побудова геометрії справила глибоке враження на мислителів усіх часів. Виявилося, що достатньо зовсім невеликої кількості аксіом, щоб можна було вивести необмежену кількість теорем. При цьому, якщо якимось чином можна було переконатися в істинності аксіом, у чому ніхто фактично й не мав сумніву, то це вже забезпечувало істинність доводжуваних на їх основі теорем. Тому для поколінь учених різних епох і країн аксіоматичний виклад геометрії в “Началах” Евкліда був ідеальним зразком подання наукових теорій. Його наслідував геніальний англійський математик І. Ньютон (1643 – 1727) у своїй основоположній праці “Математичні начала натуральної філософії”. Ця книга не тільки назвою, а й методом свого викладу копіює твір Евкліда. Схеми “Начал” дотримував нідерландський філософ-матеріаліст Б. Спіноза (1623 – 1677), викладаючи систему етики.

Евклід блискуче розв'язав і методичне завдання, він писав не науковий трактат, а навчальний посібник для учнів своєї школи, який став посібником для поколінь учнів.

До 1880 р. "Начала" витримали 460 видань і продовжують друкуватися до наших днів. Перші вісім книг "Начал" було надруковано російською мовою ще у 1739 р. Загалом, ця праця перевидавалася різними мовами близько 2500 раз.

Відомими є дослідження Евкліда в галузі досконалих чисел (досконалі числа – такі числа, в яких власних дільників, менших за саме число дорівнює щцьому числу: 6 = 1 + 2 + 3). Він довів, що коли числа p і $2^p - 1$ прості, то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ досконале. Формула Евкліда допомогла обчислити ще два досконалих числа 496 і 8128. Дальші пошуки виявилися складнішими. Микола Геразький (І ст. н. е.) писав: "Досконалі числа красиві. Але відомо, що красиві речі рідкісні і нечисленні, а потворних зустрічається багато". У 1971 р. за 40 хвилин роботи потужна ЕОМ знайшла найбільше на той час просте число виду $2^p - 1 : 2^{19937} - 1$, якому відповідало 24-е досконале число: $2^{19936}(2^{19937} - 1)$. У 1978 р. ЕОМ вже працювала 440 годин, щоб дійти до наступного простого числа виду $2^p - 1 : 2^{21701} - 1$. Йому відповідає 25-е досконале число: $2^{21701} - 1 : 2^{21700}(2^{21701} - 1)$. У 1980 р. за допомогою ЕОМ вдалося обчислити 27-е просте число виду $2^p - 1 : 2^{44497} - 1$. Йому відповідає 27-е досконале число $2^{44496}(2^{44497} - 1)$.

Задачі

1. З усіх паралелограмів, уписаних у даний трикутник, найбільшу площу має той, основа якого дорівнює половині основи трикутника. (Кн. VI, твердження 27).

2. Даний відрізок |AB| = 1 поділити на такі дві частини $|x|$ і $1 - |x|$ ($|x| > 1 - |x|$), щоб $1 : |x| = |x| : (1 - |x|)$, тобто здійснити "золотий поділ" |AB| (Кн. VI, твердження 30).

3. Множина простих чисел нескінченна. (Кн. IX, твердження 20).

Якщо числа p і $2^p - 1$ прості, то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ дорівнює сумі своїх дільників (відмінних од самого себе), тобто є числом досконалим. (Кн. IX, твердження 36).

4. Площі двох кругів відносяться, як квадрати їх діаметрів. (Кн. ХП, твердження 2).

ЕРАТОСФЕН

(бл. 275 – 194 до н. е.)

Ератосфен давньогрецький вчений і письменник, один із надзвичайно різнобічних вчених античності. Ератосфен займався філологією, філософією, хронологією, математикою, астрономією, географією, сам писав вірші і музику. За це сучасники дали йому прізвисько “Пентатл” – багатоборець. Проте, з давнини до нас дійшло і інше його прізвисько – “Бета”, тобто “другий”. Очевидно, це є свідченням того, що у всіх науках Ератосфен досягнув не найвищого, але чудового результату.

Ератосфен народився в Африці, у Кірені. Спочатку він навчався в Александрії, а потім в Афінах у відомих вчених того часу (Зенона Кіфеонського, платоніка Аркесілая і перипатетика Арістона з Хіоса, граматика Лісанія). Імовірно, саме завдяки настільки широкій освіті і розмаїтості інтересів бл. 245 до н. е. Ератосфен отримав від царя Птолемея III Евергета запрошення повернутися в Александрію, щоб стати вихователем спадкоємця престолу Птолемея IV Філопатра й очолити Александрійську бібліотеку – центр наукових досягнень того часу. Така пропозиція була дуже почесною, оскільки вихованням дітей царів займалися найосвіченіші і талановиті люти. Роль вчителя-наставника давала можливість стати наближеним до царя, а також і впливати на політику, а керівництво Олександрійською бібліотекою давало необмежені можливості займатися наукою.

Ератосфен пристав на цю пропозицію й обіймав посаду бібліотекаря до кінця життя. Його наукові таланти удостоїлися високої оцінки сучасника Ератосфена, Архімеда, який присвятив йому свою книгу “Метод”.

Твори Ератосфена не збереглися, ми маємо від них лише фрагменти, які свідчать про надзвичайну різнобічність автора.

Серед математичних творів Ератосфена виділяється твір “Платоники”, у якому розглядалися питання з області математики і музики. Ератосфен звертається до математичних і музичних основ платонівської філософії. Вихідним пунктом було так зване делійське питання, тобто подвоєння куба, якому автор присвятив трактат “Подвоєння куба”. Геометричний зміст мав твір “Про середні величини” у 2 частинах, присвячений розв’язуванню геометричних та арифметичних задач. Широко відомий трактат “Решето”, у якому вчений виклав спрощену методику визначення простих чисел (так зване “решето Ератосфена”). Таку назву трактат одержав тому, що в часи Ератосфена писали загостреними палочками на глиняних дошках, доки глина на них була ще мокрою, тому Ератосфен за запропонованим ним алгоритмом не закреслював прості числа, а проколював. Після таких операцій дошка мала вигляд решета.

Ератосфен був основоположником наукової, математичної і фізичної географії. У його “Географії” в 3 книгах містився перший систематичний науковий виклад географії, історія географічних відкриттів, а також розглядався ряд фізичних і математичних проблем, пов’язаних з географією, включаючи вказівку на сферичну форму Землі й опис її поверхні. Учений виступав проти трактування Іліади й Одіссеї як джерела географічних відомостей. Він також висловив припущення, що якщо плисти від Гібралтару на захід, то можна доплисти до Індії. Ератосфен додав до свого твору географічну карту світу.

Однак найвідомішим досягненням Ератосфена в області географії був винайдений ним спосіб вимірювати розміри Землі, чому був присвячений трактат “Про вимір Землі”. Метод ґрунтувався на одночасному вимірюванні висоти Сонця в Сієні (суч. Асуан на півдні Єгипту) і в Александрії, що лежать приблизно на одному меридіані, у момент літнього сонцестояння (19 червня 240 р. до н. е.). Відстань між містами була відома (відстані вимірювали кроками спеціалісти-землеміри – гарпеданапти). І хоча є різні свідчення про результат вимірювань, 250 000 стадій (згідно Клеомеду) або 252 000 (приблизно 39 690 км, за повідомленням Страбона і Теона Смірнського), у будь-якому випадку підрахунок мав мінімальну помилку, оскільки справжня довжина екватора становить 40 120 км. У цій же роботі були розглянуті й астрономічні задачі, такі, як оцінка розміру Сонця і Місяця і відстані до них, сонячні і місячні затемнення і тривалість дня в залежності від географічної широти.

Ератосфена можна вважати також засновником наукової хронології. У своєму об’ємному творі “Хронографія” у 9 книгах він намагався встановити дати, пов’язані з політичною і літературною історією Стародавньої Греції. Праця охоплювала період від зруйнування Трої (датованої Ератосфеном 1184/83 до н. е.) до смерті Александра (323 до н. е.). У датуванні Ератосфен спирався на складений ним список переможців Олімпійських ігор і розробив точну хронологічну таблицю, у якій усі відомі йому політичні і культурні події датував за олімпіадами (чотирирічними періодами між іграми). “Хронографія” Ератосфена стала основою пізніших хронологічних досліджень інших вчених античності.

Твір “Про древню комедію” у 12 книгах був літературним, та історичним дослідженням, де Ератосфен виступив як літературний критик і філолог, вирішуючи проблеми автентичності і датування творів афінських драматургів. Ератосфен написав також поему “Гермес”, яка, ймовірно, є олександрійською версією гомерівського гімну, що оповідає про народження, дитинство, подвиги і загибель бога, до нас дійшли її фрагменти. Інший епіліон “Помста, або Гесіод” оповідав про смерть Гесіода і покарання його убивць. У “Ерігоні”, написаній елегійним дистихом, Ератосфен представив аттичну легенду про Ікара і його доньку Ерігону. Ератосфен був першим вченим, який назвав себе “філологом” (philologos – той, хто любить науку, подібно тому як philosophos – той, хто любить мудрість). Авторству Ератосфена також належить твір “Обертання зірок”, який був, імовірно, конспектом більшого твору, зв’язував воєдино філологічні й астрономічні дослідження, вплітаючи в них повісті і міфи про походження сузір’їв. Ератосфену належав ще ряд робіт з історії і філософії, що не збереглися.

РЕНЕ ДЕКАРТ
(1596 – 1650)

Франс Хальс.
Портрет Рене Декарта. 1649

Рене Декарт народився у дорозі в м. Лає території Турені, поблизу кордону провінції Пуату. Виняткові здібності хлопчика виявилися дуже рано. Навчався він в колежі Ла Флеш, який вважався одним з кращих у країні. Тут приділялося багато уваги математиці та прикладним наукам. До Декарта прийшло ще одне захоплення – він закохався в поезію і залишився вірним їй назавжди. Останнім його твором була п'єса, написана у віршах у Стокгольмі. Математика захоплювала логічною строгістю умовиводів, стимулювала думку і здавалася єдиною наукою, яка може дати істинні знання. Так виникає думка перебудувати всі науки за зразком математики, звідки пізніше викристалізується ідея загальної математики, яка об'єднує всі її розділи.

10 листопада 1619 р. він записав у щоденнику, що охоплений ентузіазмом і відкрив основи нової вражаючої науки. Це могла бути ідея універсальної математики, перетворення в алгебрі за допомогою єдиної символіки, подання алгебраїчних понять за допомогою геометричних образів або навпаки.

До 1633 р. учений завершив роботу над великим трактатом, у якому на основі розроблених ним принципів викладалася фізика, космологія, природознавство, досліджувався тваринний світ і, нарешті, людина. Та саме в цей час, 22 червня 1633 р., інквізиція вчинила розправу над Галілеєм. У листі до математика Мерсенна Декарт писав про враження, яке справила на нього ця звістка: "Це мене так вразило, що я вирішив спалити всі свої папери або принаймні нікому їх не показувати, бо я не в змозі був уявити собі, що його, італійця, який користувався прихильністю навіть папи, могли засудити за те, що хотів довести рух Землі…”.

Нильс Форсберг. Королева Христина розмовляє з Рене Декартом. 1884

Зі січня 1648 р. французький уряд призначив Декарту за наукові відкриття значну пенсію. Проте сподівання вченого на матеріальну підтримку уряду Франції не справдилися.

Неспокійна політична ситуація в Парижі так налякала Декарта, що він негайно і цього разу назавжди залишив Францію. Довелося повертатися в Голландію, де теж не було спокою. Тому вчений прийняв запрошення шведської королеви Христини. Він довго вагався і з тривогою 31 серпня 1649 року вирушив на північ. Тривожні передчуття справдилися. Шведській королеві вчений теж був потрібний насамперед як унікум наукового світу, життя в Стокгольмі остаточно зруйнувало його усталений ритм роботи і розпорядок дня.

Королева призначала заняття з філософом на 5 годину ранку. Через усе місто вчений повинен був у холодній кареті їздити в царський палац. Зима того року особливо лютувала, і вчений скоро застудився. Хвороба швидко прогресувала, і на дев’ятий день Декарта не стало. Оскільки в Стокгольмі не було католицького кладовища, могилу вибрали там, де ховали бездомних і нехрещених дітей.

Після смерті філософа говорили, начебто смерть була не випадковою і не від пневмонії. На надмогильному камені за наказом французького посла був вигравіруваний напис: “Він заплатив за атаки суперників невинністю свого життя”.

Через 17 років після смерті Рене Декарта його прах був перевезений зі Стокгольму в Париж і перепохований у дзвіниці абатства Сен-Жермен де Пре.

Перед остаточним поховання гріб відкрили і виявили, що в ньому тіло без голови. Пізніше череп з’явився на аукціоні в Швеції. За деякими припущеннями він був вилучений під час першої ексгумації і на ньому читалося наступне: “Череп Декарта взятий в користування Ізраелем Ханстромом у році 1666-ім у зв’язку з переносом тіла до Франції і до тепер зберігається у Швеції”. Ким був цей Ханстром невідомо, проте він, мабуть, вважав, що філософ належить тій країні, у якій помер. Череп був повернутий у Франію і з 1878 року обліковується в інвентарному каталозі анатомічних експонатів Музею людини у Парижі. На даний момент останки тіла і голова великого вченого зберігаються нарізно..

У 1980 році про смерть Декарта знову заговорили. Були знайдені листи лікаря шведської королеви Йоханна ван Вуллена до відомого німецького лікаря Уїльяма Писо. Його нащадок, публіцист Эйк Писо розіслав відомим патологоанатомам опис хвороби Рене Декарта, змінивши при цьому імена і дати. Результат виявився вражаючим: Декарт помер від отруєння миш’яком. Хто це зробив – залишається таємницею стокгольмського двору. Проте можна стверджувати, що вплив вченого на політичну обстановку Швеції був очевидним.

Загалом, математичні дослідження вченого були частиною розроблюваного ним методу дослідження просторових фігур у їх взаємодіях і взаємозв’язках.

Учений поділяв віру передових учених XVII ст. у всемогутність математичного методу як універсального знаряддя розв’язування будь-яких задач.

Величезна заслуга Декарта в тому, що він завбачив і зробив великий внесок у створення цього методу. Він писав: “…має існувати деяка загальна наука, яка пояснює все, що стосується порядку і міри, не вдаючись у дослідження жодних окремих предметів, і ця наука має називатися … ім’ям загальної математики, бо вона містить у собі все те, завдяки чому інші науки називаються частинами математики”.

Реалізації цієї програми автор присвятив великий трактат “Міркування про метод”, опублікований у 1637 році. Застосування загальної науки автор розкрив у трьох додатках до трактату: “Діоптрика”, “Метеори”, “Геометрія”. Для нас найбільший інтерес становить третій додаток. Саме завдяки йому Декарт поряд з Ферма поділяє славу основоположника одного з великих розділів класичної математики – аналітичної геометрії. За якихось 10 – 20 років виникла зовсім нова математична галузь, заснована на ідеї встановлення ізоморфізму між множиною дійсних чисел і множиною прямолінійних відрізків. У "Геометрії" Декарт писав: "Надаючи лінії *у* послідовно нескінченну множину різних значень, ми знайдемо також нескінченну кількість різних точок… Вони опишуть потрібну криву лінію". Як бачимо, головна ідея геометрії Декарта в тому, що геометричний об'єкт, крива лінія, подається рівнянням, яке пов'язує змінні величини. Досліджуючи властивості рівнянь (функцій), ми тим самим дістаємо інформацію і про властивості геометричних об'єктів. Це й дало підстави назвати потім геометрію Декарта аналітичною.

Декарт розглядав тільки одну пряму з фіксованою точкою відліку і вивчав властивості кривих ліній відносно цієї прямої. Однак це було вже велетенським кроком уперед. Метод координат не тільки став однаковим способом символічного подання кривої у вигляді відповідного їй рівняння, він також давав необмежені можливості для введення в математику нових кривих, оскільки кожне довільно записане рівняння від двох змінних давало якусь нову криву.

Метод координат відкрив шлях у математику змінним величинам.

У працях Декарта алгебра остаточно звільняється від геометричних уявлень і будується як самостійна частина математики. Формалізації алгебри і всієї математики сприяло подальше вдосконалення Декартом алгебраїчної символіки, яка вже майже не відрізняється од сучасної. Відомі величини він позначав буквами *a, b, c,…*, невідомі *x, y, z, …*. ввів позначення для степенів, хоча квадрати записував ще як *aa, xx.*

Ім'ям Декарта названо ряд відкритих ним кривих ліній. Серед них найбільше застосувань у самій математиці, математичному природознавстві й техніці знайшла логарифмічна спіраль. Досліджуючи властивості рівнянь (функцій), ми тим самим отримуємо інформацію і про властивості геометричних об'єктів. Це й дало підставу назвати потім геометрію Декарта аналітичною.

Увагу вченого привернули проблеми досконалих чисел. Він вважав, що йому досить місячної відпустки, щоб розгадати таємницю непарних досконалих чисел. Жаль, що Декартові її не надали, бо ця проблема не розв'язана й досі. Зате йому вдалося обчислити кілька так званих гіпердосконалих чисел.

Число a називається гіпердосконалим кратності m, якщо сума всіх дільників a, менших за $a(\sigma(a))$, дорівнює ma, тобто $\sigma(a)=ma$. Очевидно, що на основі вивчення якихось глибоких властивостей натуральних чисел він обчислив кілька гіпердосконалих чисел кратності 3 і 4:

$$\sigma\ (30\,240) = 3 \cdot 30240,$$

$$\sigma\ (32\,760) = 3 \cdot 32760,$$

$$\sigma\ (403\,031\,236\,608) = 3 \cdot 403\,031\,236\,608,$$

$$\sigma\ (56\,729\,756\,160) = 4 \cdot 56\,729\,756\,160.$$

Він також обчислив третю пару співдружніх чисел:

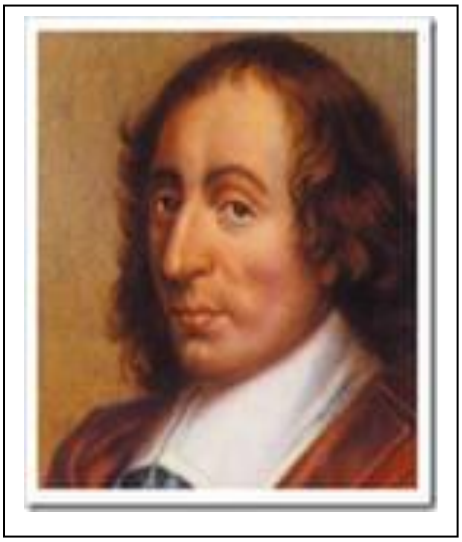
9 363 584 і 9 437 056.

Зрозуміло, що ці результати не можна було б одержати методом добору. Очевидно, вчений прийшов до них, глибоко вивчивши властивості натуральних чисел.

У ранніх роботах учений запропонував свої оригінальні способи некласичних розв'язань знаменитих геометричних задач давнини – трисекції кута і подвоєння куба.

Творчість Декарта мала великий вплив на наукову діяльність видатних учених Західної Європи і вітчизняних математиків, природодослідників і філософів. Тільки вісім математичних понять пов'язано з ім'ям Декарта, але й одного з них – декартової геометрії достатньо, щоб назавжди його ім'я лишилося серед найвидатніших творців математики.

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ
(1623 – 1662 рр.)



Син французького чиновника Етьєна Паскаля з дитинства вирізнявся серед однолітків своїм розумовим розвитком.

Коли йому було три роки, у нього померла мама, а батько вирішив присвятити себе вихованню двох дочок і хворобливого сина. Він не перевантажував своїх дітей розумовою працею, а нові знання найчастіше подавав у формі ігор і розваг, які придумував на прогулянках, під час бесід, за обіднім столом. А щоб остаточно позбутися службових обов’язків, родинних та інших візитів, які відволікали од виховання дітей і наукових занять, він у 1631 р. переїхав до Парижа, де познайомився з видатними вченими того часу. Вони збиралися в келії францісканського ченця Марена Мерсенна. Туди приходили математики, фізики, письменники, шанувальники математики і природничих наук.

У будинку Паскалів збиралися вчені, щоб обговорювати наукові проблеми. До них уважно прислуховувався Блез і настирливо просив батька докладніше розповісти про те, що вивчає математика. Але батько оберігав сина від нового захоплення. Блез і так викликав тривогу: його розумовий розвиток значно випереджував фізичний. У чотири роки він умів читати і писати, виконував усно складні обчислення.

Захопившись математикою сам, батько Паскаля приховував від сина математичну літературу, навіть утримувався від розмов на математичні теми в присутності дітей. Проте Блез випросив, щоб батько коротко розповів йому про геометрію. Почутих відомостей було достатньо, щоб він розробив свою власну геометричну термінологію і, оперуючи нею, дійшов до 32-ї теореми першої книги “Начал” Евкліда. За цією грою його застав батько. Він був вражений недитячим захопленням сина. Програму навчання довелося змінити. Під керівництвом батька Блез з дивовижною швидкістю вивчив праці Евкліда, Архімеда, Аполлонія, Паппа, потім Дезарга. Одночасно вивчав латинську, грецьку, італійську мови, логіку, фізику, філософію. 13-річного Блеза допускають до участі в засіданнях гуртка Мерсенна. Хлопець недовго залишався мовчазним споглядачем дискусій дорослих, з 15-ти років стає рівноправним і активним учасником наукових диспутів. У 16 років він пише працю "Досвід про конічні перерізи". Невеличке за обсягом дослідження (лише 53 рядки) було надруковане тиражем 50 примірників у формі афіші і ввійшло до золотого фонду математики.

"Досвід" містить основну теорему проективної геометрії і деякі важливі наслідки з неї. Твір мав великий успіх. Навіть Декарт, правилом життя якого було нічому не дивуватися, виявив бажання ознайомитися з "Досвідом" і прийшов до висновку, що 16-річний хлопець не міг такого написати. Спостерігаючи за виснажливою обчислювальною роботою батька, 18-річний Блез починає працювати над створенням обчислювальної машини, за допомогою якої навіть незнайомий з правилами арифметики міг би виконувати її чотири дії. Точна механіка ще тільки народжувалася, тому юний винахідник здійснив справжній винахідницький подвиг, долаючи численні технічні труднощі. Робота вимагала величезного розумового і нервового напруження, оскільки точність виготовлення деталей, якої вимагав учений, перевершувала можливості навіть досвідчених майстрів.

Перша модель не задовольнила автора, і, вдосконалюючи своє "Паскалеве колесо", він виготовив 50 примірників різних моделей. Паскаль розв'язав найскладнішу проблему на шляху механізації обчислень – створив механізм перенесення десятків, який відрізнявся від усіх відомих на той час лічильних приладів.

Узимку 1646 р. хворого Етьєна Паскаля лікували хірурги, послідовники релігійної секти янсеністів, які вперше зробили спробу затягнути Блеза Паскаля до своєї секти. Проте, подолавши внутрішню кризу, вчений повертається до повноцінного життя і інтенсивно працював над трактатом з гідростатики і теорії конічних перерізів. Наукові відкриття, насамперед обчислювальна машина, приносять Паскалю європейську славу.

Технічна недосконалість і висока ціна перешкодили поширенню машини Паскаля, хоча вона відкрила нову епоху в історії обчислювальної техніки. Перевтома і нервове напруження позначилися на здоров'ї вченого. Він тяжко захворів.

Серед нових паризьких знайомих вченого був дворянин де Мере, який був великим любителем азартних ігор. Під час гри часто виникали суперечки з приводу справедливого розв'язання різних задач.

Так, у процесі розв'язування окремих задач, дискусій, які виникали навколо них, формувалися основні поняття і методи теорії ймовірностей.

У період листування з Ферма Паскаль написав "Трактат про арифметичний трикутник", в якому узагальнив ряд комбінаторних задач і дослідив цікаві властивості числової таблиці

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Цю таблицю тепер частіше друкують в іншій формі. Вона була відома в Індії ще в II ст. до н. е., а в Західній Європі – із XVI ст.

Паскаль перший систематично виклав двадцять основних властивостей чисел трикутника, показав застосування його для вивчення сполук, степенів бінома і розподілу ставок між гравцями.

У цей час учений живе великими планами. Майбутнє бачилося в активній громадській і науковій діяльності. У "Посланні Паризькій академії" він подає перелік своїх надрукованих і підготовлених до друку праць, готується поступити на державну службу, одружитися. Тоді й трапилося непоправне, яке зламало його життя. 15 листопада 1654 року Блез виїхав з друзями на прогулянку. Недалеко від Парижа, поблизу села Неї, екіпаж їхав по мосту через Сену. У зв'язку з ремонтними роботами частину поручнів мосту зняли. Злякавшись, коні рвонули вбік і звалилися з мосту. Передня пара впала в річку, але посторонки обірвалися, і екіпаж завис над прірвою. Блез бачив глибоко внизу стовпи води, яка зімкнулася над кіньми, що пішли на дно. Потрясіння було жахливим. Паскаль втратив свідомість, потім тяжко захворів.

Релігійна секта янсеністів переконала Паскаля у тому, що то було "Боже провидіння" і на початку 1655 р. вразливий Паскаль переїхав у монастир янсеністів Пор-Рояль.

Життя Блеза Паскаля, сповнене внутрішніх суперечностей, криз і зламів, проте відкриття, зроблені вченим, назавжди вписали його ім'я в історію математики, фізики, філософії, літератури.

Задачі

1. *Загальна ознака подільності Паскаля.* Натуральне число a, задане в позиційній системі з основою p ($p \in N$, $p \geq 2$), ділиться на число b тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків кожної цифри a на остачу від ділення на b відповідних розрядних одиниць ($1, p, p^2$, … p^{n-1} p^{n}).

2. Найрізноманітніші числові відношення приховує в собі трикутник Паскаля, який у сучасному трактуванні зображається так:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

3. *Теорема Паскаля.* В усякому шестикутнику, вписаному в криву другого порядку (коло, еліпс, параболу, гіперболу), три точки перетину протилежних сторін лежать на одній прямій.

4. Два однаково вправні гравці грають у гру, яка не допускає нічиєї. Вони зробили рівні ставки і домовилися, що той, хто раніше набере 10 виграних партій, одержить усі гроші. Гру було припинено з рахунком 9 : 8. Як вони мають розподілити гроші?

ЛОБАЧЕВСЬКИЙ
МИКОЛА ІВАНОВИЧ
(1792 – 1856 рр.)

Багатовікові спроби довести V постулат Евкліда призвели до появи на початку XIX ст. нової геометрії, яка відрізняється від евклідової тим, що в ній V постулат не виконується. Ця геометрія в наш час називається на честь Лобачевского М.І., який вперше опублікував наукову роботу з її викладом.

Микола Іванович Лобачевский народився в Нижньому Новгороді (сьогодні Горький, Росія). Він дуже рано залишився без батька і мати домоглася його зарахування до Казанської гімназії на пільговій основі. Після її закінчення Лобачевский М.І. у 1807 р. поступив до Казанського університету.

Великий вплив на молодого студента здійснював професор Мартин Федорович Бартельс, друг відомого німецького математика Гауса. Він взяв шефство над бідним, але обдарованим студентом. На старшому курсі в характеристику Лобачевского М.І. включили “мрійливу про себе зарозумілість, наполегливість, непокору”, а також “обурливі вчинки” і “ознаки безбожності”. Він опинився під загрозою відрахування, але заступництво М.Ф.Бартельса та інших викладачів допомогло залишитися в університеті.

У 1811 р. Лобачевский М. І. закінчив університет з відзнакою, отримавши ступінь магістра з фізики та математики і був залишений при університеті. Наполеглива праця молодого вченого дозволила у 1820 р. стати деканом фізико-математичного факультету, у 1822 р. його обрано ординарним професором.

Збереглися студентські записи лекцій Лобачевского М. І. від 1817 року, де ним робилась спроба довести п’ятий постулат Евкліда, але в рукописі підручника “Геометрія” (1823 р.) він вже відмовився від цієї спроби.

У 1826 р. Лобачевский М. І. був обраним ректором університету. Він займався господарськими справами: реорганізував штат, організував будівництво механічних майстерень, лабораторій та обсерваторії, підтримував бібліотеки й мінералогічні колекції, брав участь у виданні “Казанського вісника”, читав науково-популярні лекції з фізики для населення.

23 лютого 1826 року Лобачевский М. І. у своєму виступі на засіданні фізико-математичного факультету Казанського університету виголосив доповідь на тему “Стислий виклад принципів геометрії зі строгим доведенням теореми про паралельні прямі”, в якій показав, що V постулат логічно не залежить від інших постулатів і аксіом Евкліда і його не можна довести на їх основі. Виявилося, що Евклід не помилився. День виголошення Лобачевским М. І. доповіді відкрив нову сторінку не тільки в геометрії, а й в усій математиці. З цього часу народжується перша неевклідова геометрія. З’ясувалося, що евклідова геометрія побудована геніально, але є тільки наближеною математичною моделлю фізичного простору. Геометрія Лобачевского М. І. розкрила глибинні, складніші властивості простору, які виявляються на рівні мікросвіту і у велетенських масштабах. Англійський математик Вільям Кліффорд назвав Лобачевского “Коперніком геометрії”.

Згодом саму доповідь було включено Лобачевским М. І. в його працю “Про початки геометрії”. Цей твір став першою в світовій літературі серйозною публікацією по неевклідовій геометрії або геометрії Лобачевського. Вчений вважав аксіому паралельності Евкліда довільним обмеженням. З його точки зору, ця вимога занадто жорстка і обмежує можливості теорії, яка описує властивості простору. В якості альтернативи він пропонує іншу аксіому: *на площині через точку, що не лежить на даній прямій, проходить більше ніж одна пряма, не перетинаюча дану*.

Студенти високо цінували лекції Лобачевскиго М. І. Коло його обов’язків було досить широким – від читання лекцій з математики, фізики, астрономії до упорядкування бібліотеки і музею. У списку службових обов’язків було також “спостереження за благонадійністю” всіх студентів Казані.

Лобачевский М. І. розшукував і підтримував талановиту молодь. Збереглися свідчення про те, як одного разу в місцевій крамниці вчений помітив хлопчика, який щось обчислював. Як виявилося пізніше, це був сирота, якого господар привіз з Італії. Математик запропонував хлопчикові навчатися. Порозумівшись з господарем, Лобачевский М. І. віддав сироту до гімназії. Здібний учень закінчив не тільки гімназію, але й університет. Цією дитиною виявився професор фізики Янішевський, відомий меценат і благодійник, який на власні кошти відкрив притулок для сиріт і протягом усього свого життя утримував його.

У 1832 році Лобачевский М. І. одружився з Варварою Олексіївною Мойсеєвою. У подружжя народилось семеро дітей.

Лобачевский М. І. був ректором Казанського університету в період з 1827 по 1846 роки, пережив епідемію холери (1830 р.) та сильну пожежу (1842 р.), що знищила половину населення Казані. Завдяки вмілим діям ректора жертви та втрати в обох випадках були мінімальними. Зусиллями Лобачевского М. І. Казанський університет стає першокласним, авторитетним і добре оснащеним навчальним закладом, одним з найкращих в Росії.

Розроблена Лобачевский М. І. нова геометрія не включає в себе евклідову геометрію, проте євклідова геометрія може бути з неї отримана граничним переходом (при прямуванні кривизни простору до нуля). У самій геометрії Лобачевського М. І. кривизна від'ємна.

Проте наукові ідеї Лобачевский М. І. не були зрозумілими для сучасників. Його праця "Про початки геометрії", представлена в 1832 році радою університету в Академію наук, отримала негативну оцінку Остроградського М. В. Серед колег його майже ніхто не підтримував, зросли непорозуміння та глузування. Вінцем цькування став знущальний анонімний пасквіль, який з'явився в журналі "Син вітчизни" у 1834 році. У ньому писалося: "Як можна подумати, щоб пан Лобачевский, ординарний професор математики, написав з якою-небудь серйозною метою книгу, яка небагато б принесла честі й останньому шкільному вчителю? Якщо не вченість, то принаймні здоровий глузд повинен мати кожен вчитель, а в новій геометрії нерідко не вистачає і цього".

Але Лобачевский М. І. не здався. У 1835 – 1838 роках він публікував у "Вчених записках" статті про "уявну геометрію", а потім побачила світ його праця "Нові початки геометрії з повною теорією паралельних". Не знайшовши розуміння на батьківщині, він намагався знайти однодумців за кордоном. У 1840 році Лобачевский М. І. надрукував на німецькій мові "Геометричні дослідження по теорії паралельних”, де містилося чітке викладення його основних ідей. Один примірник отримав Гаус, якого називали “королем математиків” тих часів. Як згодом з’ясувалося, Гаус і сам потайки розвивав неевклідову геометрію, проте так і не наважився опублікувати що-небудь на цю тему. Ознайомившись з результатами Лобачевського М. І., він висловив свою симпатію до ідей вченого і рекомендував обрати його іноземним членом-кореспондентом Геттингенського королівського товариства. Захопливі відгуки про Лобачевського М. І. Гаус довірив тільки своїм щоденникам і найближчим друзям. Це обрання відбулося у 1842 році, проте положення Лобачевского М. І. воно не зміцнило.

Лобачевский М. І. не був єдиним дослідником у цій новій області математики. Угорський математик Янош Бояї незалежно від Лобачевского М. І. у 1832 році опублікував свій опис неевклідової геометрії. Але і його роботи залишилися неоціненими сучасниками.

20 листопада 1845 року Лобачевського М. І. було вшосте затверджено на посаді ректора на наступні чотири роки. Не зважаючи на це, у 1846 році Міністерство брутально звільняє Лобачевського М. І. з посади ректора і професорської кафедри (офіційно – внаслідок погіршення здоров’я). Формально він отримує навіть підвищення – призначений помічником попечителя, проте платні йому на цій посаді не призначили. Незабаром Лобачевский М. І. розорився, маєток його дружини було продано за борги. У 1852 році помер старший син математика. Здоров’я вченого погіршало і невдовзі Лобачевский М. І. осліп. Головну працю “Пан геометрія” записали під диктовку учні сліпого вченого у 1855 році.

Лобачевский М. І. помер невизнаним. Через декілька десятиріч ситуація в науці докорінно змінилася. Значну роль у визнанні праць Лобачевського відіграли дослідження Е. Бельтрамі (1868), Ф. Клейна (1871), А. Пуанкаре (1883) та інші. Поява моделі Клейна довела, що геометрія Лобачевського М. І. така ж несуперечлива, як евклідова. Усвідомлення того, що в евклідовій геометрії є повноцінна альтернатива, справило велике враження на науковий світ і надало імпульс іншим новаторським ідеям в математиці та фізиці.

Математичні досягнення

1. В алгебрі розробив новий метод наближеного розв’язання рівнянь.

2. У математичному аналізі отримав ряд теорем про тригонометричні ряди.

3. Поточнив поняття неперервної функції.

4. У різні роки він опублікував декілька блискучих статей по математичному аналізу, алгебрі та теорії ймовірностей, механіці, фізиці, та астрономії.

ДЖУЗЕППЕ ПЕАНО
(27.8.1858 – 20.4. 1932)

Джузеппе Пеано народився в італійському місті Спинетті 27 серпня 1858 року. Його батьки працювали на фермі. Щоб продовжити навчатися малий Джузеппе змушений був відвідувати школу в Кунео і долати по 5 кілометрів кожного дня. Невдовзі батьки придбали будинок в Кунео і мама, Джузеппе і його старший брат переїхали туди жити.

Помітну роль у долі великого математика відіграв його дядько – старший брат матері. Він був священиком та адвокатом у Турині, отримав хорошу освіту і був впливовою людиною. Дядько помітив, що Джузеппе здібний до навчання і дуже талановитий, тому у 1870 р. забрав його до Турину, щоб хлопчик отримав середню освіту і підготувався до вступу в університет.

Здобувши середню освіту Джузеппе Пеано у 1870 р. вступив до Туринського університету. Серед його викладачів був професор Д'Овідіо, який викладав у нього курс аналітичної алгебри та геометрії. Наполегливість у навчанні та блискучі знання з математики, які він одержав від відомих на той час в Італії вчених – Д'Овідіо, Франческо ди Бруно, Анжело Геноккі, Франческо Сіамці дозволили Джузеппе Пеано закінчити 29 серпня 1880 р. університет та отримати вчений ступінь доктора математики.

Протягом 1880 – 1882 рр. він співпрацював з Д'Овідіо і Анжело Геноккі й опублікував перші чотири праці. Відкриття, представлені у них стали типовими для його наступних робіт – у них були висвітлені помилки у стандартних математичних визначеннях.

У зв'язку з погіршенням стану здоров'я пофесора Геноккі Джузеппе Пеано доручили читати один із його курсів, у якому вивчалися вигнуті поверхні. У процесі читання курсу вчений помітив, що книжка, по якій навчалися студенти містила ряд неточностей у стандартних визначеннях.

У зв'язку з цим у 1884 р. був виданий новий підручник лекцій Геноккі з доповненнями Джузеппе Пеано.

Викладацька робота Пеано не обмежилася викладанням у Туринському університеті. Паралельно він читав лекції у Військовій академії Турину. У 1886 р. він винайшов і опублікував метод для розв’язку систем диференційованих рівнянь з використанням послідовних наближень. Однак Еміль Пікар незалежно від Пеано першим опублікував дослідження у цій галузі, тому винахідником у цій галузі був визнаний саме він.

У 1888р. Пеано видав книгу “Геометричні обчислення”, яка починалася з розділу, присвяченому математичній логіці. Саме ця робота стала першою його працею в царині математичної логіки, побудованою на дослідженнях Шредера, Буле, Чарльза. У цій книзі вперше в математиці давалося визначення вектора простору з оригінальними і сучасними на той час поясненнями.

У 1889 р. були опубліковані знамениті аксіоми Пеано у вигляді брошури під назвою “*Arithmetices principia, nova methodo exposita*”. Оскільки брошура була надрукована класичною латинською мовою, то не знайшлося багато вчених, щоб зрозуміти її зміст і оцінити велич відкриття.

У грудні 1891 року Пеано став головним редактором математичного журналу, присвяченому математичній логіці та основам математики. У першому номері цього журналу на десяти сторінках була розміщена стаття Джузеппе Пеано, у якій коротко презентувалися роботи вченого з математичної логіки.

Аксіоматика Пеано була піддана критиці деяких вчених, які вважали, що аксіоми потрібно переформатувати в теореми і шукати шляхи для їх доведення. Зокрема, Коррадо Сегре заявив: “Я вважаю, що автори свідомо використовують у своїх дослідженнях речення…, до яких у них немає доведень”.

Бажання систематизувати знання в галузі математики спонукали Пеано до написання у 1892 р. підручника, де були зібрані всі відомі на той час теореми, згруповані по розділах математики. Цей проект зацікавив математиків. До цієї роботи вчений залучив кількох однодумців: Ваілаті, Буралі-Форті, П’єрі, Фано.

У вступному слові до підручника, який вийшов друком у 1896 р., Пеано написав : “Кожен викладач зможе використати це видання як підручник, оскільки він містить всі теореми і різні способи їх доведення. Тут подані рекомендації для студентів, як читати і вивчати формули, а також використовувати їх при розв’язанні задач”.

Підручник стали використовувати при викладанні математики, однак Пеано, який був хорошим науковцем виявився поганим вчителем-методистом. За цю працю його почали критикувати і викладачі, і студенти. Один з його учнів писав у своїх спогадах, що книга Джузеппе Пеано не розрахована на студентів, які тільки починають засвоювати ази математики, і час витрачається на вивчення “символів”, які слухачі інженерних спеціальностей не завжди будуть використовувати у своїй майбутній професії.

Важливим етапом у житті вченого став конгрес з філософії 1900 року, який відбувся в Парижі 1 серпня. Доповідь про аксіоми арифметики став тріумфом для вченого.

Ще одним проектом, який реалізував Пеано, було впровадження у наукову сферу універсальної міжнародної мови, яка базувалася на латинській без дотримання правил граматики. Він склав словник, куди ввійшли слова на англійській, французькій, німецькій і латинській мовах.

Математичні досягнення

1. Дав більш точне означення похідної.

2. Викладав математику у формі точних символів.

3. Створив систему аксіом натуральних чисел (система аксіом Пеано).

4. Побудував неперервну криву, яка повністю заповнює квадрат (крива Пеано).

5. Ввів поняття векторнозначних функцій і визначив для них поняття похідної і інтеграла.

Додаток Б

ТАБЛИЦЯ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ПЕРШОЇ ТИСЯЧІ

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	703	853	997

Додаток В

Прочитайте коротку історичну довідку про виникнення систем числення і виберіть відомості, з якими доцільно ознайомити учнів.

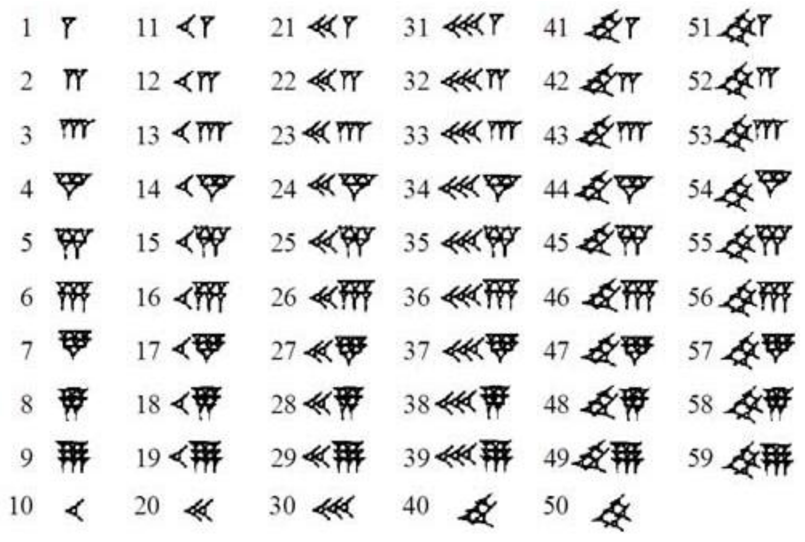
Людство вчилося рахувати дуже повільно, використовуючи при цьому допоміжні матеріали: палички, камінці, зарубки на камені і деревах, а також пальці своїх рук. Десять пальців на руці були першим інструментом обчислень.

Ще в сиву давнину людям доводилося рахувати різні предмети і явища, що їх оточували. За відсутності літер і цифр свої думки люди висловлювали за допомогою малюнків на стінах печер. Для запам'ятовування чисел користувалися зарубками на печерах, деревах, вузелками на мотузках та рахували на пальцях. За допомогою такого методу літературний герой Робінзон Крузо вимірював дні, що він провів на безлюдному острові. Це це був найпростіший спосіб запису чисел. Інколи і у наш час люди вчиться рахувати в цей спосіб (особливо діти).

Спосіб запису чисел за допомогою символів називається системою числення. Щойно розглянута система називається унарною. Але зазвичай ми користуємося десятковою системою числення. Вона використовує для запису чисел цифри від 0 до 9, тобто всього десятьма символами.

Навіть навчившись писати, наші предки ще довго не мали чітко продуманої і зручної системи числення. Перші з них були дуже недосконалими. Розглянемо деякі приклади систем числення.

Таблиця 1



Вавілонська шістдесяткова нумерація виникла приблизно за 2000 р. до н. е. (Таблиця 1.). Для запису чисел вавилоняни використовували всього два знаки: клин вертикальний (одиниці) і клин горизонталь-ний (десятки). Усі числа від 1 до 59 записувалися за допомогою цих знаків. Символ, який позначав одиницю повторювали потрібну кількість раз для чисел від 1 до 9. Число 60 (одиницю вищого розряду) записували так само як і 1, але на більшій відстані від інших клинів. Цілі числа, більші за 59, записували в позиційній шістдесятковій системі.

Нуль використовували тільки між розрядами і ніколи не ставили, коли запис числа закінчувався одним або кількома нулями. Щоб уникнути неправильного читання, між розрядами залишали помітний проміжок (прогалину). Але визначати величини проміжків між цифрами було незручно, тому, іноді різні числа читалися як одне і теж.

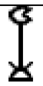
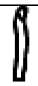
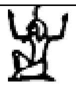
Вавілонську нумерацію математичних клинописних текстів називають нумерацією з неозначеною позицією.

Відгомін цієї системи числення зберігся і досі (година ділиться на 60 хвилин, одна хвилина містить 60 секунд, повний кут становить 360 градусів).

Єгипетська система числення (Таблиця 2.) відноситься до непозиційних систем числення, яка виникла близько 3 тис. років до н. е. і вживалася в Древньому Єгипті аж до початку X ст. У цій системі цифрами були ієрогліфічні символи, які позначали числа 10, 100, 1000 і т. д. до мільйона.

Числа від 1 до 9 позначалися відповідним числом вертикальних рисочок. Послідовно комбінуючи ці символи, можна було записати будь-яке число.

Таблиця 2

Число	Значення	Назва
|	1	Одна риска
∩	10	П'ята
	100	Петля мотузки
	1000	Лілія (або лотос)
	10 000	Палець
 або 	100 000	Жаба або пуголовок
	1 000 000	Людина з піднятими вгору

З появою папірусу виникло скорописне ієратичне письмо, яке посприяло виникненню нової числової системи.

Аттична система числення відноситься до непозиційних систем числення, яка використовувалася в давній Греції до III століття до н.е. (Таблиця 3). У ній в якості цифр вживалися грецькі

Таблиця 3

Ι	ΙΙ	ΙΙΙ	ΙΙΙΙ	Γ	
1	2	3	4	5	
ΓΙ	ΓΙΙ	ΓΙΙΙ	ΓΙΙΙΙ		
6	7	8	9		
Δ	ΔΔ	ΔΔΔ	ΔΔΔΔ		
10	20	30	40		
Η	Χ	Μ			
100	1000	10 000			

літери, причому цифрами служили перші літери слів, які позначали відповідні числа. При записі чисел спочатку записували великі числа, потім – менші.

Після III століття до н.е. аттична система числення була витіснена іонійською.

Іонійська алфавітна непозиційна система числення виникла близько V ст. до н. е. (табл. 4).

У ній для позначення чисел використовувалися 24 літери грецького алфавіту і три архаїчні літери. У іонійській системі числення не існувало позначення нуля. Кратні 1000 до 9000 позначалися як і дев’ять цілих чисел від 1 до 9, але перед кожною літерою ставилася вертикальна риска. Десятки тисяч позначалися буквою М (від грецького міріоі – 10 000), після якого ставилося те число, на яке потрібно було помножити десять тисяч

Таблиця 4

α′	β′	γ′	δ′	ε′	ζ′	ξ′	η′	ϑ′
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι′	χ′	λ′	μ′	ν′	έ′	υ′	π′	ϟ′
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ′	σ′	τ′	υ′	χ′	φ′	ψ′	ω′	ϡ′
100	200	300	400	500	600	700	800	900
͵α′	͵β′	͵γ′…						
1000	2000	3000						

Слов’янська давньоруська десяткова алфавітна нумерація виникла в Х ст. Над числами ставили особливий значок – “титло”. Тисячі позначали тими ж літерами алфавіту, що й одиниці, тільки перед ними писали особливий знак – перекреслену риску. Для одиниць більш високих розрядів були спеціальні назви і позначення. Ця нумерація проіснувала без змін до XVII ст. включно і була оригінальним способом слов’ян позначати великі числа без введення нових цифрових знаків.

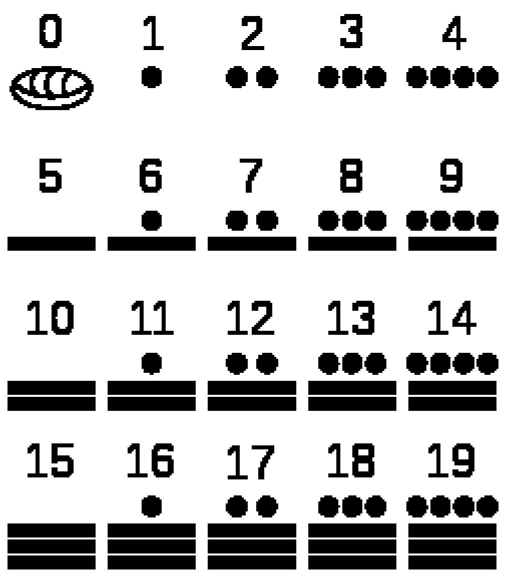
Римська нумерація (Таблиця 5) передувала позиційній десятковій системі числення. Вона є спорідненою за своєю усною структурою з усною нумерацією

Таблиця 5

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XX	XXX	XL	L		
11	12	13	14	20	30	40	50		
LX	XC	C	D	M					

багатьох сучасних європейських народів. Це – непозиційна десяткова система (із слідами п’ятіркової). Алгоритмічні числа утворюються внаслідок додавання і віднімання вузлових чисел. Роль цифр у римській системі числення відіграють букви алфавіту: I – один, V – п’ять, X – десять, C – сто, L – п’ятдесят, D – п’ятсот, M – тисяча. Наприклад, 324 = CCCXXIV. Хоча в римській системі і немає нуля, але за її допомогою можна записати числа, які “містять” нулі. Суттєвим недоліком цієї системи числення є те, що у ній незручно й складно виконувати арифметичні операції.

Таблиця 6



Двадцяткова позиційна ***система числення майя*** формувалася в V – XII ст. У ній використовували три числових знаки (Таблиця 6): для одиниці, п’яти і нуля (стилізована черепашка).

Витоки лежать у методі рахунків, при яких застосовувалися не тільки десять пальців рук, але й десять пальців ніг. При цьому існувала структура у вигляді чотирьох блоків по п’ять цифр, що відповідало п’яти пальцям рук і ніг. У системі числення майя існувало позначення нуля, який схематично був представлений у вигляді порожньої раковини від устриці або равлика. Позначення нуля також застосовувалося для позначення нескінченності.

Якого ж походження наша сучасна нумерація?

Родоначальницею нашої сучасної нумерації була нумерація, яка виникла в Індії. У індійській нумерації всі числа від 1 до 9 позначаються спеціальними символами (цифрами): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. До них приєднується знак 0, яким позначається число нуль. Будь-яке натуральне число можна однозначно зобразити за допомогою тільки цих десяти знаків (цифр) за принципом позиційного їх значення. З Індії ця система поширилася в інші країни через те, що люди мали “природну лічильну машину” – десять пальців на руках.

У Європі нова система почала застосовуватися тільки в XII ст. Цьому сприяв переклад на латинську мову праці з арифметики видатного узбецького вченого ал-Хорезмі (бл. 780 – бл. 850), в якій викладено спосіб позиційного числення. Цей спосіб одержав назву алгоритму (від видозміненого прізвища ал-Хорезмі). Оскільки ця робота була написана арабською мовою, яка в ті часи була пануючою у науковій літературі народів Близького і Середнього Сходу та Середньої Азії, то за цифрами незаконно закріпилася назва арабських.

У Росії індійські цифри витіснили слов’янську нумерацію у XVII – XVIII ст. В першому російському підручнику з арифметики Л. П. Магницького (1703 р.) нумерація сторінок велася ще слов’янськими цифрами.

Коли людина вчилася рахувати, вона створила різні системи числення. Найдавнішою серед них є двійкова. Відомий вчений Лейбніц В. Г. вважав двійкову систему простою, зручною і красивою. Він зазначав: “Обчислення за допомогою двох цифр є для науки основним і породжує нові відкриття. При зведенні чисел до найпростіших початків, якими є 0 і 1, скрізь з’являється чудовий порядок”. Особливо просто виконувати в ній арифметичні дії.

Справжнього поширення двійкова система числення набула у 1931 році, коли були продемонстровані деякі можливості практичного застосування двійкового числення.

З появою персональних комп’ютерів двійкова система числення повноправно увійшла в життя суспільства, ми використовуємо її щодня, працюючи за комп’ютером чи дивлячись цифрове телебачення. Сьогодні можна з впевненістю сказати, що двійкова система числення – це один із найважливіших винаходів людства.

ДЛЯ ЗАМІТОК